Geometria Analitica

Felipe Akio Nishimura

February 28, 2025

Sistemas lineares

Existem muitas maneiras de resolvermos sistemas lineares:

1. Por substituicao
2. Regra de Cramer
3. Escalonamento

Equacao linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde b é um termo independente.

Linar homogênea

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Quando o $b = 0$

SPD - Sistema Possivel e Determinado

1. Possui uma única solução
2. Determinante principal diferente de 0 ($D \neq 0$)

SPI - Sistema Possivel e Indeterminado

1. Possui infinitas soluções
2. Determinante D e todos os determinantes secundários forem iguais a 0 ($D = 0$ e todos $D_i = 0$)

SI - Sistema Impossível

1. Nao possui soluções
2. Determinante principal for igual a 0 e pelo menos um determinante secundário for 0 ($D = 0$ e pelo menos um $D_i \neq 0$)

Regra de Cramer

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 0 \\ 7x - 2y + 4z = 0 \\ 3x + 8y - 5z = 0 \\ 9x + 3y - 8z = 0 \end{cases}$$

Sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + 6y = 42 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases} \equiv \begin{cases} x + 2y = 14 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$x = 10 \quad y = 2$$

1. Encontre os valores de x, y e z na matriz:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Resposta:

Encontrar $\det(D)$ da matriz:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

$$\det(D_x) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$\det(D_y) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

$$\det(D_z) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

logo,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{12}{-12} = -1$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-12} = 1$$
$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{12}{-12} = -1$$

A solução do sistema é (x, y, z) = (-1, 1, -1)

2. Em um lote de xícaras de porcelana, a razão entre o número de xícaras com defeitos e o número de xícaras perfeitas, nesta ordem, é $2/3$. Se o número total de xícaras do lote é 320, então, qual a diferença entre o número de xícaras perfeitas e o número de xícaras com defeitos?

Resposta:

$$\begin{cases} x + y = 320 \\ x/y = 2/3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{2y}{3}$$

Agora aplica-se na equacao $x + y = 320$

$$x + y = 320$$
$$\frac{2y}{3} + y = 320$$
$$y = 192$$

Entao o valor de x:

$$x + 192 = 320$$
$$x = 128$$

Portanto a diferença do número de xícaras perfeitas com defeitos é

$$192 - 128 = 64$$

Diferença entre o número de xícaras perfeitas e o número de xícaras com defeitos: 64

3. Resolva esse matriz com Escalonamento:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Resposta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Da última equação:

$$2z = 2 \Longrightarrow z = 1$$

Substituímos $z = 1$ na segunda equação:

$$y + 1 = 3 \Longrightarrow y = 2$$

Susbstituímos $y = 2$ e $z = 1$ na primeira equação:

$$x + 2 + 1 = 6 \Longrightarrow x = 3$$

Solução final: (x, y, z) = (3, 2, 1)

4. Usando escalonamento, resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

Resposta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 0 & 1/2 & 5 & -14 \\ 0 & 3/2 & 8 & -21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3/2 & 8 & -21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 35 \end{array}\right]$$

Da última equação:

$$-7z = 35 \implies z = -5$$

Substituímos $z = -5$ na segunda equação:

$$y + 10 \cdot -5 = -28 \implies y = 22$$

Susbstituímos $y = 22$ e $z = -5$ na primeira equação:

$$x + \frac{1}{2}(22) + -1 \cdot -5 = 5 \implies x = 0$$

Solucao final: (x, y, z) = (0, 22, -5)

5. Classifique o seguinte sistema linear e encontre sua solução:

$$\begin{cases} x + 7y - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 7x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

Resposta:

$$\det(D) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(D_x) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\det(D_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 30$$

$$\det(D_z) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 69$$

Portanto o sistema é **impossível** e **não** há soluções