Geometria Analitica

Felipe Akio Nishimura

February 26, 2025

Matrizes e seus variados

A imagem abaixo representa uma matriz 2x3:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz nula:

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 2.}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 3.}$$

Diagonal principal: O conjunto dos elementos a_{ij} em que $i = j$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundaria: O conjutno dos elemnetos a_{ij} em que $i + j = n + 1$

$$\begin{bmatrix} & & d_{13} \\ & \ddots & \\ d_{31} & & \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal:
Toda matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são principal são iguais a zero

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Traço de uma matriz quadrada:
A soma dos elementos de sua diagonal principal

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Traço de M é -2
Traço de N é 3/2

Matriz símetrica:
É toda matriz quadrada que é igual á sua transposta.

$$A \text{ é simetrica} \Leftrightarrow A = A^T$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simetrica
É toda matriz quadrada que é igual á OPOSTA da sua transposta

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular
É toda matriz quadrada na qual são nulos todos os elementos situados num mesmo lado da diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1/2 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 4 & 1 \times 3 + 2 \times 2 \\ 3 \times (-1) + 4 \times 4 & 3 \times 3 + 4 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

1. Exercícios de PowerPoints

Calcule o traço da matriz quadrada A abaixo, sabendo que ela é matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x-y+6 \\ x+2y & x+y \end{bmatrix}$$

Answer:

$$\begin{aligned} x-y+6 &= 0 \\ x+2y &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$x = y - 6$$

Substituímos na segunda equação:

$$\begin{aligned} (y-6)+2y &= 0 \\ 3y-6 &= 0 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Agora, substituímos $y = 2$ em $x = y - 6$:

$$x = 2 - 6 = -4$$

O traço de A é a soma dos elementos da diagonal principal:

$$\mathrm{Tr}(A) = (x-2y) + (x+y)$$

Substituindo os valores de x e y:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= (-4-2(2)) + (-4+2) \\ &= (-4-4) + (-4+2) \\ &= -8-2 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Portanto, o traço da matriz A é $\mathbf{-10}$.

Obtenha m, n e p para que seja simetrica a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3 & m+n & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ m-2n & p+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Answer:

$$\begin{cases} m+n=-1 \\ m-2n=2 \\ p+2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ m-2n=2 \\ p=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+2n=-2 \\ m-2n=2 \\ 3m=0 \end{cases}$$

$$p = 3\, m = 0\, n = -1$$

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz $A \times B$ é:

Answer:

$$C = \begin{bmatrix} (-1)(2) + (0)(1) + (1)(0) & (-1)(-1) + (0)(2) + (1)(1) \\ (0)(2) + (2)(1) + (-2)(0) & (0)(-1) + (2)(2) + (-2)(1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 + 0 + 0 & 1 + 0 + 1 \\ 0 + 2 + 0 & 0 + 4 - 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O determinante de uma matriz 2×2,

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dado por:

$$\det(C) = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Substituindo os valores de C:

$$\det(C) = (-2 \cdot 2) - (2 \cdot 2)$$
$$re = -4 - 4$$
$$= -8$$

Conclusão

Portanto, o determinante da matriz $A \times B$ é $\mathbf{-8}$.

Dada a matriz A abaixo, encontre o determinante da matriz 2A: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Answer:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(2A) &= (4 \cdot 2 \cdot 8) + (2 \cdot 2 \cdot 0) + (6 \cdot 2 \cdot 2) \\
&\quad - (6 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 8) \\
&= (64 + 0 + 24) - (0 + 16 + 32) \\
&= 88 - 48 \\
&= 40
\end{aligned}$$

Portanto, o valor correto de $\det(2A)$ é 40.

Calcule o valor de x na matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & x \end{bmatrix}$ para que seu determinante seja igual a 159.

Answer:

$$\begin{aligned}
\det(A) = (2 \cdot 5 \cdot x) + (-2 \cdot (-3) \cdot 7) + (x \cdot 1 \cdot 2) \\
- [(7 \cdot 5 \cdot x) + (2 \cdot (-3) \cdot 2) + (x \cdot 1 \cdot (-2))]
\end{aligned}$$

$$= (10x + 42 + 2x) - (35x - 12 - 2x)$$

$$= 10x + 42 + 2x - 35x + 12 + 2x$$

$$= (-21x) + 54$$

Igualando a 159:

$$\begin{aligned}
-21x + 54 &= 159 \\
-21x &= 159 - 54 \\
-21x &= 105 \\
x &= \frac{105}{-21} \\
x &= -5
\end{aligned}$$

Calcule o determinante da matriz abaixo com teorema de Laplace:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Answer:

$$D = 7 * A_{31} + 4 * A32 + (-5) * A_{33} + 0 * A_{34}$$
$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 2 \end{bmatrix} = 9$$
$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix} = 20$$
$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 7$$
$$D = 7 \cdot 9 + 4 \cdot 20 + (-5) \cdot 7 + 0$$
$$\det D = 108$$