Avaliação Final

QXD0010 — Estrutura de Dados Avançada – Turma 01A

Prof. Atílio Gomes

06 de setembro de 2021

Aluno: _____

Matrícula: _____

OBSERVAÇÃO: Logo abaixo, encontram-se cinco exercícios de programação, que devem ser enviados via Moodle até as 8h do dia 07/09/2021.

Observação 1: Envie código compilável. Uma questão cujo código não compilar receberá automaticamente nota ZERO.

Observação 2: Qualquer prova com sinal de plágio receberá nota ZERO.

1. (2 pontos) Vimos em aula que a implementação mais eficiente da estrutura de dados Conjuntos Disjuntos (Union-Find) é aquela que usa o conceito de floresta de conjuntos disjuntos. Vimos também uma implementação desta ideia que usa um array como estrutura base para a implementação dos Conjuntos Disjuntos. A implementação vista em aula e que também está nos slides foi enviada em anexo juntamente com esta prova. Com base nesta implementação de Conjuntos Disjuntos, resolva o seguinte problema:

   Suponha que nós queiramos adicionar a operação `PrintSet(x)` que faz o seguinte: dado um nó x como entrada ela imprime todos os elementos que estão no mesmo conjunto que o x, em qualquer ordem.

   (a) Mostre como podemos adicionar um único atributo a cada nó em uma floresta de conjuntos disjuntos de modo que: (1) a função `PrintSet(x)` execute em tempo linear no número de elementos do conjunto que contém x; e (2) a complexidade assintótica das demais operações de Conjuntos Disjuntos permaneça inalterada. Escreva o pseudocódigo da sua solução e prove que ela satisfaz os requisitos acima.

   (b) Codifique em C++ a função `PrintSet(x)` que você projetou no item (a) usando como base o código que foi enviado com essa prova.

   (c) Crie um arquivo **main.cpp** que testa a função `PrintSet(x)` que você implementou.

Boa Prova!

2. (2.5 pontos) O menor ancestral comum de dois nós u e v em uma árvore enraizada T é o nó w que é um ancestral tanto de u quanto de v e que tem a maior profundidade em T. No problema do menor ancestral comum, são dados como entrada uma árvore enraizada T e um conjunto arbitrário $P = \{\{u, v\}\}$ de pares de nós não ordenados de T, e desejamos determinar o menor ancestral comum de cada par em P.

   A fim de resolver o problema do menor ancestral comum, o procedimento a seguir realiza um percurso na árvore T com chamada inicial `MAC(T.root)`. Nós supomos que cada nó é colorido com a cor `WHITE` antes do percurso iniciar.

```
MAC(u)
1. Make-Set(u)
2. Find-Set(u).ancestor = u
3. para cada filho v de u em T faça
4.     MAC(v)
5.     UNION(u,v)
6.     Find-Set(u).ancestor = u
7. u.color = BLACK
8. para cada nó v tal que {u, v} ∈ P faça
9.     se v.color == BLACK então
10.        print "o menor ancestral comum de"
11.            u "e" v "é" Find-Set(v).ancestor
```

   As operações `Make-Set`, `Find-Set` e `Union` são operações de Conjuntos Disjuntos. Note que cada nó do conjunto disjunto possui um campo adicional chamado `ancestor` nesse algoritmo. Logo, você deve modificar a implementação de Conjuntos Disjuntos a fim de incluir esse campo adicional juntamente com as operações que o acessam e o modificam.

   (a) Implemente o algoritmo `MAC` visto acima em C++. O algoritmo `MAC` recebe como entrada uma árvore enraizada T e uma sequência de pares não ordenados P de vértices de T e retorna como saída o menor ancestral comum de cada par de vértices de P. A entrada e a saída do programa devem ser fornecidas como explicado abaixo:

   Entrada

   A primeira linha da entrada consiste no número de vértices N da árvore T. A segunda linha contém o vértice r que é a raiz da árvore, $0 \leq r \leq N - 1$. Este número é seguido por uma lista de arestas. Cada linha na lista tem dois inteiros, a e b, que são os vértices extremos de uma aresta ($0 \leq a, b \leq N - 1$). A lista de arestas termina com uma linha com um par de 0 (zeros). Após esta linha, segue uma lista P de pares de vértices da árvore T. Cada linha nessa segunda lista tem

Boa Prova!

dois inteiros, a e b ($0 \leq a, b \leq N - 1$). A lista de pares de vértices termina com uma linha com um par de 0 (zeros). Esse par de zeros indica o final da entrada.

Saída

Para cada par de vértices na lista P é impresso numa linha separada o menor ancestral comum do par.

Exemplo de Entrada

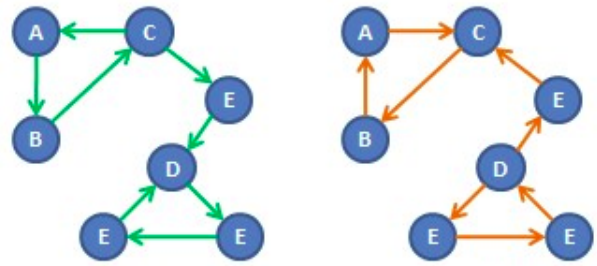
```
12
0
0 1
0 2
0 3
1 4
1 5
1 6
1 7
4 8
6 9
6 10
10 11
0 0
8 11
9 7
5 3
0 0
```

Exemplo de Saída para a entrada acima

```
o menor ancestral comum de 11 e 8 é 1
o menor ancestral comum de 7 e 9 é 1
o menor ancestral comum de 3 e 5 é 0
```

Boa Prova!

3. (2 pontos) O **transposto** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G_T = (V, E_T)$, onde $E_T = \{(v, u) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Assim, G_T é G com todas as suas arestas invertidas. A figura abaixo mostra um grafo direcionado G à esquerda e o seu transposto G_T à direita.



Implemente, em C++, algoritmos eficientes para calcular G_T a partir de G, para a representação por **lista de adjacências** de G e por **matriz de adjacências** de G. Note que você deve fornecer duas implementações distintas do grafo.

Entrada

Suponha que os vértices do grafo G sejam inteiros de 0 a $N - 1$, onde N é o número de vértices de G. A primeira linha da entrada contém o número de vértices no grafo direcionado, N. Este número é seguido por uma lista de arcos de G (arestas). Cada linha na lista tem dois inteiros, a e b, separados por espaço em branco, que são os vértices extremos de um arco de G, o vértice a é a cauda e b é a cabeça do arco $(0 \leq a, b \leq N-1)$. A lista de arestas termina com uma linha com um par de 0 (zeros). Esse par de zeros indica o final da entrada.

Saída

Cada linha da saída consiste em um par de vértices separados por espaço em branco e indica uma aresta do grafo transposto G_T.

Exemplo de Entrada

```
4
0 1
1 2
0 3
0 0
```

Exemplo de Saída

```
1 0
2 1
3 0
```

Boa Prova!

4. (2 pontos) Um **heap máximo** é um vetor $A[1..n]$ composto de n inteiros (chaves), satisfazendo a seguinte propriedade:

$$A[i] \leq A[\lfloor i/2 \rfloor], \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 < i \leq n. \quad (1)$$

Seja `A` um heap máximo. A função `HEAP-DELETE(int A[], int i)` remove a chave contida na posição i do heap `A` e, após ser executada, garante que a Propriedade (1) de heap máximo continue válida para o vetor `A`, ou seja, o vetor `A` continua sendo um heap máximo após a remoção da chave que estava contida na posição i do vetor. Dê uma implementação (pseudocódigo) de `HEAP-DELETE` que seja executada no tempo $O(\log n)$ para um heap máximo `A` com n elementos. Para essa questão, você pode considerar que o tamanho total do vetor `A` é dado pela variável global `tamVetor` e que o tamanho real do heap contido em `A` é dado pela variável global `tamHeap`. **Observação:** QUALQUER função auxiliar que você usar no seu código também deve ser implementada.

(a) Escreva o pseudocódigo da função `HEAP-DELETE(int A[], int i)`

(b) Prove que a complexidade de pior caso da sua função é $O(\log n)$.

Boa Prova!

5. (1.5 pontos) Uma aplicação divertida da teoria dos grafos surge no jogo Seis graus de Kevin Bacon. A ideia do jogo é conectar um ator a Kevin Bacon por meio de uma trilha de atores que apareceram juntos em filmes, e isso em menos de seis etapas. Por exemplo, Theodore Hesburgh (presidente emérito da Universidade de Notre Dame) esteve no filme Rudy com o ator Gerry Becker, que esteve no filme Sleepers com Kevin Bacon, então seu número de Bacon é 2. Claramente, o número de Bacon do próprio Kevin Bacon é 0.

   Por quê Kevin Bacon? Por algum motivo, os três alunos que inventaram o jogo, Mike Ginelli, Craig Fass e Brian Turtle, decidiram que Kevin Bacon é o centro do mundo do entretenimento. O jogo Kevin Bacon é bastante semelhante ao Número de Erdos, que faz parte do folclore dos matemáticos em todo o mundo há muitos anos.

   O jogo Seis Graus de Kevin Bacon é realmente um problema de grafos. Se você atribuir cada ator a um vértice e adicionar uma aresta entre dois atores se eles aparecerem juntos em um filme, você terá um grafo que representa os dados para este jogo. Então, o problema de encontrar uma trilha de atores até Kevin Bacon torna-se um problema tradicional em grafos: o de encontrar um caminho entre dois vértices. Uma vez que desejamos encontrar um caminho mais curto do que seis etapas, o ideal seria encontrar o caminho mais curto entre os vértices. Pode-se pensar em aplicar o algoritmo de caminho mais curto de Dijkstra a esse problema, mas isso seria um exagero, pois o algoritmo de Dijkstra se destina a situações em que cada aresta tem um comprimento (ou peso) associado e o objetivo é encontrar o caminho com o comprimento cumulativo mais curto. Uma vez que estamos apenas preocupados em encontrar os caminhos mais curtos em termos do número de arestas, um dos algoritmos de busca em grafos irá resolver o problema (e usará menos tempo do que o de Dijkstra).

   Para esta questão, você deve implementar em C++ um programa que resolve o problema dos Seis Graus de Kevin Bacon dada uma certa entrada.

   Entrada

   A entrada consiste em uma lista de pares de atores que apareceram no mesmo filme. Cada linha do arquivo contém o nome de um ator, um filme e outro ator que apareceu no filme. O caractere ";" (ponto-e-vírgula) é usado como separador. Aqui está um trecho contendo 4 linhas de uma possível entrada:

   Clint Howard;My Dog Skip (2000);Kevin Bacon
   Sean Astin;White Water Summer (1987);Kevin Bacon
   Theodore Hesburgh;Rudy (1993);Gerry Becker
   Gerry Becker;Sleepers (1996);Kevin Bacon

   Saída

   Cada linha da saída do programa deve conter uma frase indicando o nome de um ator seguido pelo seu número de Bacon e indicando o filme pelo qual o autor ganha esse número. Um exemplo contendo 4 linhas de uma possível saída é exibido a seguir:

Boa Prova!

O numero de Bacon de Angelo Rossitto é 2 pelo filme Dark, The (1979)
O numero de Bacon de Bebe Drake é 2 pelo filme Report to the Commissioner (1975)
O numero de Bacon de Bill Paxton é 1 pelo filme Apollo 13 (1995)
O numero de Bacon de Carrie Fisher é 2 pelo filme Soapdish (1991)

Um exemplo de arquivo de entrada foi fornecido junto com a prova.

Boa Prova!