



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# **Análise complexa e aplicações**

**Marcos Afonso da Silva**

**Rio Claro  
2018**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# **Análise complexa e aplicações**

**Marcos Afonso da Silva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso**

**Rio Claro**  
**2018**

517.8 Silva, Marcos Afonso da  
S586a      Análise complexa e aplicações / Marcos Afonso da Silva.  
- Rio Claro, 2018  
220 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Funções de variáveis complexas. 2. Número complexo.  
3. Análise complexa. 4. Função complexa. 5. Função  
analítica. 6. Integral complexa. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Marcos Afonso da Silva

ANÁLISE COMPLEXA E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso  
Orientadora

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli  
Departamento de Matemática - Unesp/IGCE - Rio Claro/SP

Prof. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes  
Departamento de Matemática - UEM - Maringá/PR

**Rio Claro, 20 de abril de 2018**



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS por todo Seu infinito amor, Seus ensinamentos, pois Tu, Oh! Deus, disseste “Eu darei a você perspicácia e o instruirei no caminho em que deve andar. Eu o aconselharei com os meus olhos fixos em você.” (Salmos 32:8) e Seu constante perdão para com esse filho.

À Professora Dra. Suzete Maria Silva Afonso, minha orientadora, o meu mais sincero agradecimento por todos os ensinamentos, orientação, paciência, dedicação, compreensão e pela amizade. Sem suas valiosas contribuições, esse trabalho não se realizaria. Os momentos de reflexão em nossos encontros fizeram de mim uma pessoa melhor. Muito obrigado!

Agradeço aos meus pais, Sergio e Luiza, pela educação que me deram, pelo amor infinito proporcionado desde os anos iniciais para que os estudos fossem a chave do sucesso em minha vida e pelo apoio incondicional dado em todos os momentos da minha caminhada por essa estrada.

Agradeço aos meus irmãos, Marcelo e Fernanda, pelo amor, apoio total e por tomarem à frente nas minhas ausências para que eu pudesse realizar esse sonho.

Agradeço aos meus tios Aparecido, Gonçalo, João e Lourival por serem mais do que tios em minha vida e concederem todo amor necessário para me tornar uma pessoa melhor nesse mundo.

Agradeço aos meus amigos Elígio e Thalita por estarem comigo nessa caminhada desde os tempos de graduação e pelo apoio sincero em todos os momentos que

estivemos juntos.

Agradeço à Professora Dra. Eliris Cristina Rizziolli e à Professora Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira pelas valiosas contribuições fornecidas no exame de qualificação.

Agradeço à Professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes e à Professora Dra. Eliris Cristina Rizziolli por aceitarem o convite para estarem presente na banca examinadora e pelas valiosas contribuições para este trabalho.

Agradeço à coordenação, corpo docente e funcionários do curso de Mestrado em Matemática pelo imenso profissionalismo em nos tornar pessoas e profissionais cada vez melhores.

Agradeço ao Professor Dr. Henrique Marins de Carvalho pela amizade, pelos grandes momentos de ensinamentos e por sempre me incentivar a fazer esse curso de Mestrado em Matemática.

Agradeço a todos os meus companheiros de turma pela luta conjunta e as inúmeras situações em que estávamos nos ajudando nos momentos de estudos. São eles: Bruna, Daniel, Elígio, Flaviani, Gregório, João, José Renato, José Vinícius, Laís, Rebeca e Thalita.

Agradeço à minha diretora Lígia e minha coordenadora Márcia pelos imensos esforços para que eu pudesse fazer o curso de Mestrado em Matemática. A amizade de vocês sempre me enriquece pessoalmente e profissionalmente.

Agradeço aos meus amigos professores e funcionários da Escola Santa Tereza pelo imenso apoio todos os dias.

Agradeço aos meus amigos Marcos, Roque e Thiago pelo companheirismo e pelas inúmeras viagens a Rio Claro que fizemos durante o curso.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um estudo introdutório, porém detalhado, sobre Análise Complexa e algumas de suas aplicações. Apresentamos o corpo dos números complexos, exploramos as funções complexas de uma variável complexa, exibimos parte da teoria das funções analíticas e parte da teoria de integração complexa. Provamos importantes resultados, tais como o Teorema de Cauchy, o Teorema de Taylor, o Teorema dos Resíduos, entre outros igualmente relevantes. Como aplicação da teoria, destacamos a utilização do Teorema dos Resíduos para determinar a transformada inversa de Laplace de uma função  $F(s)$ .

**Palavras-chave:** Número complexo, Análise complexa, Função complexa, Função analítica, Integral complexa.





# Abstract

The main objective of this work is to develop an introductory but detailed study on Complex Analysis and some of its applications. We present the field of the complex numbers, explore the complex functions of a complex variable, exhibit part of the theory of analytic functions, and part of the complex integration theory. We prove important results, such as Cauchy's Theorem, Taylor's Theorem, Residue Theorem, among others equally relevant. As an application of the theory, we highlight the use of the Residue Theorem to determine the inverse Laplace transform of a function  $F(s)$ .

**Keywords:** Complex number, Complex analysis, Complex function, Analytic function, Complex integral.



# Lista de Figuras

1.1	Representação de $z$ no plano. . . . .	26
1.2	Conjugado de $z$ . . . . .	26
1.3	Módulo de $z$ . . . . .	29
1.4	Coordenadas polares. . . . .	31
1.5	Raízes cúbicas da unidade. . . . .	38
3.1	Partição de $[a, b]$ . . . . .	84
3.2	Caminho suave. . . . .	85
3.3	Caminho suave por partes. . . . .	86
3.4	Caminho fechado simples. . . . .	86
3.5	Caminho fechado não simples. . . . .	87
3.6	Representação gráfica do caminho $\gamma$ . . . . .	91
3.7	$z(t) = x(t) + iz(t)$ . . . . .	93
3.8	Partição de $[a, b]$ . . . . .	95
3.9	Caminho $\gamma$ do Exemplo 3.13. . . . .	100
3.10	Disco $D = \{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$ . . . . .	106
3.11	Caminho triangular $\Delta$ . . . . .	111
3.12	Princípio da Deformação de Caminhos. . . . .	116
3.13	Caminho $\gamma$ do Exemplo 3.34. . . . .	117
3.14	Fórmula Integral de Cauchy. . . . .	118
4.1	Região anelar $A$ . . . . .	159
5.1	Pontos singulares no interior da região $A$ . . . . .	184
6.1	Caminho $\gamma$ que envolve todas as singularidades. . . . .	203
6.2	Caminho $\gamma_{sc}$ fechado. . . . .	209

6.3	Polo $z = 1 + i$ envolvido no caminho $\gamma_{sc}$ . . . . .	210
6.4	Mola em estado estacionário. . . . .	213

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1 Sobre o corpo dos números complexos</b>	<b>19</b>
1.1 O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos . . . . .	20
1.2 Forma polar . . . . .	31
1.3 Raízes $n$ -ésimas . . . . .	35
1.4 Conceitos básicos da topologia de $\mathbb{C}$ . . . . .	38
1.5 Exercícios propostos . . . . .	40
<b>2 Funções analíticas</b>	<b>45</b>
2.1 Funções de uma variável complexa . . . . .	45
2.2 Funções elementares . . . . .	46
2.2.1 Função Exponencial . . . . .	46
2.2.2 A função potência $z^{1/n}$ . . . . .	50
2.2.3 Logaritmo complexo . . . . .	51
2.2.4 Funções trigonométricas . . . . .	54
2.2.5 Funções hiperbólicas . . . . .	57
2.3 Limite e continuidade . . . . .	59
2.4 A derivada complexa . . . . .	68
2.5 Exercícios propostos . . . . .	79
<b>3 Integração complexa</b>	<b>83</b>
3.1 Integrais reais e integrais de linha no plano . . . . .	83
3.2 Integração no plano complexo . . . . .	93
3.2.1 Integração de funções complexas de uma variável real . . . . .	96
3.3 Integral complexa ao longo de um caminho . . . . .	99

3.4	Exercícios propostos . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Sequências e séries</b>	<b>129</b>
4.1	Sequências . . . . .	129
4.2	Séries de números complexos . . . . .	137
4.2.1	Série geométrica . . . . .	141
4.3	Séries de potências . . . . .	144
4.4	Exercícios propostos . . . . .	164
<b>5</b>	<b>Singularidades e Resíduos</b>	<b>169</b>
5.1	Classificação de singularidades . . . . .	169
5.2	Zeros de uma função analítica . . . . .	174
5.3	Resíduos . . . . .	180
5.4	Exercícios propostos . . . . .	193
<b>6</b>	<b>Algumas aplicações</b>	<b>197</b>
6.1	Aplicações do Teorema dos Resíduos . . . . .	197
6.1.1	Transformada de Laplace . . . . .	197
6.1.2	Cálculo de integrais reais . . . . .	205
6.2	Solução de equações diferenciais ordinárias . . . . .	212
6.3	Exercícios propostos . . . . .	214
	<b>Referências</b>	<b>217</b>

# Introdução

Desde o século XVIII, a Análise Complexa tem se mostrado uma das mais profícuas teorias no contexto global da Matemática. Através dela foi possível, por exemplo, dar um sentido à afirmação “toda equação polinomial possui ao menos uma solução”, estabelecer relações importantes entre funções elementares (como  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ), compreender melhor as funções definidas por séries de potências, entre outros feitos igualmente relevantes. Dentre os matemáticos importantes que contribuíram para o seu avanço, podemos mencionar Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Riemann, Weierstrass, Picard, Poincaré, Hilbert, entre outros.

A Análise Complexa destaca-se no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, como Engenharias e Física. Neste sentido, podemos citar sua importância para a dinâmica dos fluidos, para a teoria do potencial, para as funções harmônicas, para a eletrostática e para a gravitação. Além disso, a Análise Complexa tem contribuído para o desenvolvimento de outras áreas da matemática, como Equações Diferenciais Parciais, Cálculo das Variações, Análise Harmônica, entre outras.

Com este trabalho, temos a pretensão de fornecer um estudo introdutório à teoria de Análise Complexa, porém detalhado. O texto foi escrito de modo a poder ser utilizado tanto por alunos e profissionais de Matemática quanto por alunos e profissionais de Engenharia ou Física. Isto se deve ao objetivo de transformar a versão final da dissertação, após revisada e lapidada, em material didático.

O texto está organizado da seguinte forma:

**Capítulo 1.** Na Seção 1.1, apresentamos o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos e



suas propriedades. Em seguida, definimos a unidade imaginária  $i$ , exibimos a relação entre um número complexo e um par ordenado  $(x, y)$  de números reais, apresentamos a chamada forma algébrica  $x + iy$  e como são dadas as operações de adição e multiplicação nesta última forma. Na sequência, definimos o conjugado de um número complexo  $z$ , denotado por  $\bar{z}$ , mostramos sua representação geométrica (reflexão em torno do eixo imaginário), sua utilidade na divisão de dois números complexos e demonstramos suas propriedades. Para finalizar essa seção, definimos o valor absoluto de um número complexo (módulo) e expomos suas propriedades, tais como a desigualdade triangular. Na Seção 1.2, definimos o argumento de um número complexo e sua forma polar, e apresentamos as operações de multiplicação, divisão e potenciação de um número complexo em sua forma polar. Na Seção 1.3, mostramos como determinar a raiz  $n$ -ésima de um número complexo e provamos que todo número complexo não nulo possui exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ . Por fim, na Seção 1.4, destacamos alguns conceitos básicos da topologia de  $\mathbb{C}$ .

**Capítulo 2.** Na Seção 2.1, apresentamos o conceito de uma função complexa de uma variável complexa. Na Seção 2.2, estudamos algumas funções complexas elementares, a saber: funções exponencial, logarítmica, potência, trigonométrica e hiperbólica complexas. Na Seção 2.3, apresentamos as definições de limite e continuidade de uma função complexa e resultados importantes envolvendo esses conceitos. Na Seção 2.4, definimos a derivada complexa, exibimos o conceito de diferenciabilidade e apresentamos exemplos e propriedades de diferenciação. Além disso, definimos o conceito de função analítica (ou holomorfa), provamos as equações de Cauchy-Riemann e apresentamos uma condição necessária e suficiente para que uma função complexa  $f$  seja analítica em um ponto  $z_0$ .

**Capítulo 3.** Na Seção 3.1, revisamos parte da teoria básica da integral definida em  $\mathbb{R}$  (ou integral de Riemann) e o Teorema Fundamental do Cálculo. Apresentamos o conceito de curvas em  $\mathbb{R}^2$ , revisamos o conceito de integral de linha no plano e apresentamos exemplos computacionais para ilustrar esse conceito. Nas Seções 3.2 e 3.3, apresentamos a teoria de integral complexa ao longo de um caminho. Na Seção 3.3 recebem destaque os importantes resultados: Teorema de Cauchy, Teorema de Cauchy-Goursat, Fórmula Integral de Cauchy, Fórmula Integral de

Cauchy para Derivadas, Teorema de Liouville, Teorema Fundamental da Álgebra, Princípio do Módulo Máximo e Teorema de Morera.

**Capítulo 4.** Nas Seções 4.1 e 4.2, desenvolvemos estudos breves sobre sequências e séries de números complexos, respectivamente. Na Seção 4.3, apresentamos as séries de potências, vemos como estabelecer o raio de convergência desse tipo de série e exemplificamos os desenvolvimentos em série de potências de funções em torno de um ponto  $z_0$ . Mostramos que toda série de potências define uma função analítica no seu disco de convergência e provamos o importante Teorema de Taylor. Por fim, apresentamos o conceito de série de Laurent e mostramos que toda função analítica definida em um anel tem uma representação em série de Laurent (Teorema de Laurent).

**Capítulo 5.** Na Seção 5.1, definimos as singularidades isoladas de uma função complexa juntamente com suas classificações: removíveis, tipo polo e essenciais. Na Seção 5.2, estudamos os zeros de uma função analítica. Na Seção 5.3, apresentamos o conceito de resíduo de uma função complexa e vemos como determiná-lo. Ademais, demonstramos o Teorema dos Resíduos, que foi estabelecido por Cauchy, e algumas de suas consequências, como o Princípio do Argumento, o Teorema de Rouché e o Teorema Fundamental da Álgebra.

**Capítulo 6.** Este capítulo é dedicado a algumas aplicações da teoria da Análise Complexa. Na Seção 6.1, aplicamos o Teorema dos Resíduos para determinar a transformada inversa de Laplace de uma função  $F(s)$  e para calcular integrais reais da forma  $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  e integrais impróprias reais. Finalizamos o trabalho com a Seção 6.2, na qual apresentamos a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem quando as raízes de sua equação característica são números complexos.

Para a leitura do texto, são requisitos as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo Diferencial e Integral II no que tange o conhecimento dos conceitos de limite, continuidade, derivada ordinária e parcial, integral, sequências numéricas e séries. Os conceitos de integral foram brevemente revisitados aqui para um melhor entendimento das integrais de funções complexas.

Todas as referências bibliográficas, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], foram de grande valia para a elaboração do texto.

Por fim, informamos que as figuras e os gráficos presentes no texto foram elaborados com auxílio dos softwares *AutoCAD* e *GeoGebra*.

# 1 Sobre o corpo dos números complexos

Ao longo da história, um dos fatos que mais instigou os matemáticos foi a solução de equações. No século XVI, talentosos matemáticos italianos descobriram, de forma algébrica, a solução das equações cúbicas e quárticas.

No início do século XVI, Scipione del Ferro (1465 - 1526), solucionou algebricamente a equação cúbica da forma  $x^3 + px = q$ . Não publicou suas descobertas, mas repassou a seu discípulo Antônio Fior seu feito.

Em meados de 1530, Tartaglia, cujo nome era Nicolo Fontana de Brescia (1499 - 1557), descobriu uma maneira de solucionar a equação cúbica da forma  $x^3 + px^2 = q$ . Porém, o praticante de medicina que ensinava Matemática, Girolamo Cardano (1501 - 1576) publicou em seu livro *Ars Magna* o feito de Tartaglia.

Anos mais tarde, Rafael Bombelli (1526 - 1572), de forma notável, contribuiu para as soluções de equações cúbicas de forma a considerar as raízes quadradas de números negativos. É sabido que a fórmula de Cardano-Tartaglia para equações do tipo  $x^3 + px + q = 0$  é dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Por exemplo, a solução da equação  $x^3 = 15x + 4$  é  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  e, por substituição direta, nota-se que  $x = 4$  é a única raiz positiva da equação.

Nesta época, soluções do tipo  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  eram chamadas de *casos irredutíveis*, porém Bombelli foi o pioneiro em considerar as raízes quadradas de números negativos. Se  $x = 4$  é uma solução real, então as outras

duas seriam, como conhecemos hoje, números imaginários, um conjugado do outro.

A partir de então, não era mais possível negar que os números reais tornaram-se insuficientes no tratamento de soluções de equações algébricas. René Descartes (1596 - 1650) estudou as equações algébricas e no seu livro *O Discurso do Método* escreveu que nem sempre as raízes positivas ou negativas de uma equação são reais; às vezes elas são imaginárias.

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi um dos matemáticos que ajudou na melhoria da simbologia. A unidade imaginária  $i$  foi dada por Euler para representar  $\sqrt{-1}$ .

Já Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) juntamente com Jean Robert Argand (1768 - 1822) e Caspar Wessel (1745 - 1818) notaram que era possível associar os números da forma  $a + b\sqrt{-1}$ , ou  $a + bi$ , a pontos reais do plano. Como o reconhecimento dos feitos de Wessel veio tardiamente, hoje conhecemos o plano complexo por Argand-Gauss.

Ao definir um número complexo da forma  $a + bi$  (que também denotaremos por  $a + ib$ ) e sua associação a pontos do plano em que o eixo das abscissas são representados pela parte real e o eixo das ordenadas pela parte imaginária, os matemáticos poderiam visualizar tais números também como vetores e, assim, operá-los geometricamente da mesma maneira que operavam algebricamente.

No século XIX, o matemático irlandês William Rowan Hamilton escreveu um artigo em que a álgebra dos números complexos era definida como uma álgebra de pares ordenados de números reais a partir do ponto de vista físico, pela conveniência de trabalhar com vetores e rotações no plano. A partir de então, notou que o sistema dos números reais está imerso no sistema de números complexos. Assim, se um número complexo da forma  $a + bi$  é identificado com o par ordenado  $(a, b)$ , então um número real é identificado com o par ordenado  $(a, 0)$ .

Após esse breve relato histórico, estudaremos o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos.

## 1.1 O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos

Tomando por base a definição de Hamilton, temos a definição a seguir.

**Definição 1.1.** *Definimos o **corpo dos números complexos** como sendo o conjunto*

$$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

com as seguintes operações de adição e multiplicação: se  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  pertencem a  $\mathbb{C}$ , então

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad e \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (1.1)$$

Os elementos de  $\mathbb{C}$  são denominados **números complexos**.

Como consequência das operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{C}$  dadas em (1.1), temos o próximo resultado.

**Proposição 1.2.** *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer  $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :*

- (i)  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$  - propriedade associativa da adição;
- (ii)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  - propriedade comutativa da adição;
- (iii)  $(0, 0) + z = z$  - elemento neutro da adição;
- (iv)  $z(1, 0) = z$  - elemento identidade da multiplicação;
- (v) se  $z = (x, y)$ , então existe  $-z = (-x, -y)$  tal que  $(x, y) + (-x, -y) = z + (-z) = (0, 0)$  - simétrico aditivo;
- (vi)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  - propriedade comutativa da multiplicação;
- (vii) se  $z = (x, y) \neq (0, 0)$ , então existe um inverso multiplicativo  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$  tal que  $z \cdot z^{-1} = (x, y) \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$ ;
- (viii)  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$  - propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

*Demonstração.* (i) Sendo  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$ , utilizando a associatividade de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

(ii) Sejam  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ . Utilizando a comutatividade de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1. \end{aligned}$$

(iii) Se  $z = (x, y)$ , então

$$(0, 0) + z = (0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y) = z,$$

em que utilizamos o elemento neutro da adição de números reais.

(iv) Se  $z = (x, y)$ , então

$$z(1, 0) = (x, y)(1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x - 0, 0 + y) = (x, y) = z,$$

em que utilizamos o elemento identidade da multiplicação de números reais.

(v) Para todo  $z = (x, y)$ , temos

$$z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0),$$

em que utilizamos o elemento oposto da adição de números reais.

(vi) Se  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) = \\ &= (x_2 \cdot x_1 - y_2 \cdot y_1, y_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot y_1) = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = z_2 z_1, \end{aligned}$$

em que utilizamos a propriedade comutativa da multiplicação de números reais.

(vii) Sendo  $z = (x, y)$  e  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ , temos

$$zz^{-1} = (x, y) \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) =$$

$$= \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0),$$

em que utilizamos o elemento unidade da multiplicação de números reais.

(viii) Se  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$ , então

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\ &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_3, x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot x_3) \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_3, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3) \\ &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \end{aligned}$$

em que utilizamos a propriedade associativa da multiplicação de números reais.  $\square$

**Observação 1.3.** Um conjunto no qual estão definidas operações de adição e multiplicação que satisfazem as propriedades mencionadas na Proposição 1.2 é denominado **corpo**. Por esta razão é que chamamos  $\mathbb{C}$  de corpo dos números complexos, assim como nos referimos a  $\mathbb{R}$  como corpo dos números reais.

Tendo definido as operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{C}$ , podemos definir as operações de subtração e divisão da maneira usual: se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, \text{ se } z_2 \neq 0.$$

Além disso, a potenciação também é definida da maneira usual: se  $z \in \mathbb{C}$ , então

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \cdots z^{-1}}_{n \text{ vezes}}, \text{ se } z \neq 0 \ (n \geq 1).$$

Decorre da Proposição 1.2 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações  $\frac{z_1}{w_1}$  e  $\frac{z_2}{w_2}$  de números complexos podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1} \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}.$$

Ademais, temos o seguinte princípio de inclusão: podemos encarar  $\mathbb{R}$  como um



subconjunto de  $\mathbb{C}$ , ou seja, todo número real é considerado um número complexo. Isso ocorre quando denotamos qualquer número complexo  $(x, 0)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , simplesmente por  $x$ . Ou seja, através dessa convenção, podemos inferir que todo elemento de  $\mathbb{R}$  é um elemento de  $\mathbb{C}$  da forma  $(x, 0)$ .

A soma dos números reais  $x$  e  $a$  ou a soma dos números complexos  $x$  e  $a$  leva ao mesmo resultado; o mesmo ocorre com o produto dos números reais  $x$  e  $a$  e dos números complexos  $x$  e  $a$ .

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) = x + a \text{ e}$$

$$(x, 0)(a, 0) = (xa - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot a) = (xa, 0) = xa.$$

Portanto, não existe ambiguidade nas notações  $x + a$  e  $xa$ , com a adoção da inclusão apresentada acima.

Chamamos o número complexo  $(0, 1)$  de **unidade imaginária** e o representamos pela letra  $i$ . Observemos que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

O número complexo  $(-1, 0)$  é identificado com o número real  $-1$ . Assim, podemos escrever  $i = \sqrt{-1}$ .

Observemos que  $(y, 0)(0, 1) = (0, y)$ . Então, para qualquer número complexo  $z = (x, y)$ , temos

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Portanto, o par ordenado  $(x, y)$  e as expressões  $x + yi$  e  $x + iy$  representam o mesmo número complexo.

As operações da adição e multiplicação de dois números complexos são dadas na forma algébrica da seguinte forma: se  $z_1 = x_1 + y_1 i$  e  $z_2 = x_2 + y_2 i$ , então

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 i \cdot y_2 + x_2 i \cdot y_1 + i^2 y_1 \cdot y_2 = \\ &= x_1 \cdot x_2 + i x_1 \cdot y_2 + i x_2 \cdot y_1 + (-1) y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \end{aligned}$$

Se  $z = x + y i$  e  $z_1 = x - y i$ , então

$$z z_1 = (x + y i)(x - y i) = x^2 - (y i)^2 = x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2.$$

O número complexo  $z_1 = x - y i$  é denominado **conjugado** do número complexo  $z = x + y i$  e denotado por  $\bar{z}$ . Assim, se  $z = x + y i$  é um número complexo,  $\bar{z} = x - y i$  é o seu conjugado.

O conjugado de um número complexo nos permite escrever o quociente de dois números complexos na forma algébrica. De fato, sendo  $z = a + b i$  e  $w = c + d i$ ,  $w \neq 0$ , dois números complexos, temos

$$\frac{z}{w} = \frac{a + b i}{c + d i} \cdot \frac{c - d i}{c - d i} = \frac{ac + bd + (bc - ad) i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i,$$

que é a forma algébrica da divisão de dois números complexos.

**Exemplo 1.4.** Sendo  $z = 1 + 2 i$  e  $w = 3 - 4 i$ , então

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + 2 i}{3 - 4 i} \cdot \frac{3 + 4 i}{3 + 4 i} = \frac{3 + 4 i + 6 i + 8 i^2}{3^2 + 4^2} = \frac{-5 + 10 i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i.$$

Seja  $z = x + i y$  um número complexo. Definimos  $\text{Re}(z) = x$  como a **parte real** do número  $z$  e  $\text{Im}(z) = y$  como a **parte imaginária** do mesmo. Se  $\text{Re}(z) = 0$ , dizemos que  $z$  é um número imaginário puro.

Como todo número complexo pode ser representado por um par ordenado  $(x, y)$ , então podemos representá-los como pontos no plano cuja abscissa é  $x$  e a ordenada é  $y$ . Podemos representar  $z$ , também, como um vetor posição. A este plano denominamos **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**.

O eixo das abscissas recebe o nome de **eixo real** e o eixo das ordenadas de **eixo imaginário**.

O número complexo  $\bar{z}$ , o conjugado de  $z$ , é, graficamente, a reflexão de  $z$  em relação ao eixo real.

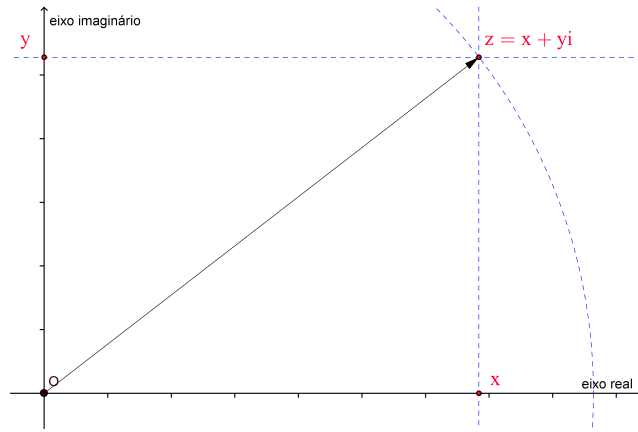


Figura 1.1: Representação de  $z$  no plano.

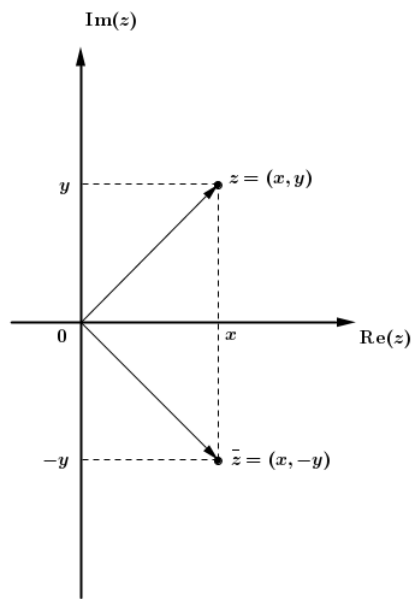


Figura 1.2: Conjugado de  $z$ .

Algumas propriedades se verificam com relação a  $\bar{z}$ . É o que apresentamos a seguir.

**Proposição 1.5.** *Sejam  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Então,*

$$(i) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2.$$

$$(ii) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$(iii) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0.$$

$$(iv) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \text{ e } z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z).$$

$$(v) z \text{ é um número real se, e somente se, } \bar{z} = z.$$

$$(vi) z \text{ é um número imaginário se, e somente se, } \bar{z} = -z.$$

*Demonstração.* (i) Sendo  $z_1 = x_1 + i y_1$  e  $z_2 = x_2 + i y_2$ , temos que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - i y_1) + (x_2 - i y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Para  $\overline{z_1 - z_2}$  a demonstração é análoga.

(ii) Se  $z_1 = x_1 + i y_1$  e  $z_2 = x_2 + i y_2$ , então

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2)} = \overline{x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2} = \\ &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + y_1 x_2)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i (x_1 y_2 + y_1 x_2) = \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i x_1 y_2 - i y_1 x_2 = x_1 x_2 - i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 - i y_1 x_2 = \\ &= x_1(x_2 - i y_2) - i y_1(x_2 - i y_2) = (x_1 - i y_1)(x_2 - i y_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

(iii) Sendo  $z_1 = x_1 + i y_1$  e  $z_2 = x_2 + i y_2$ ,  $z_2 \neq 0 + i 0$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 x_2 - i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)} = \\ &= \overline{\left[\frac{x_2(x_1 + i y_1) - i y_2(x_1 + i y_1)}{x_2^2 + y_2^2}\right]} = \overline{\left[\frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\left(\frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\right)} \cdot \overline{(x_1 + i y_1)} \cdot \overline{(x_2 - i y_2)} = \frac{x_1 - i y_1}{x_2 - i y_2} \cdot \frac{x_2 + i y_2}{x_2 + i y_2} = \\
&= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \cdot \frac{z_2}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}.
\end{aligned}$$

(iv) Se  $z = x + i y$  e  $\bar{z} = x - i y$ , então  $z + \bar{z} = x + i y + x - i y = 2x = 2 \operatorname{Re}(z)$  e  $z - \bar{z} = x + i y - (x - i y) = x + i y - x + i y = 2i y = 2i \operatorname{Im}(z)$ .

(v) Se  $z$  é um número real, ou seja, se  $z = x$ , então  $\bar{z} = x$ . Portanto,  $\bar{z} = z$ . Por outro lado, se  $\bar{z} = z$  e  $z = x + i y$ , isto é, se  $x - i y = x + i y$ , então  $y = 0$ , de onde segue que  $z$  é um número real.

(vi) Se  $z$  é um número imaginário puro, ou seja, se  $z = i y$ , então  $\bar{z} = -i y$ , o que implica  $\bar{z} = -z$ . Agora, se  $\bar{z} = -z$  e  $z = x + i y$ , então  $x - i y = -x - i y$ , o que implica  $x = 0$ . Logo,  $z$  é um número imaginário puro.  $\square$

O **módulo** de um número complexo  $z$  é a distância da origem do plano complexo ao número  $z$ ; também é chamado de **afixo** e é denotado por  $|z|$ . Então,

$$|z| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observemos, também, que  $z \cdot \bar{z} = (x + i y)(x - i y) = x^2 - (i y)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ . Portanto,  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ . Se  $z \neq 0$ , podemos reescrever esta igualdade da seguinte forma:

$$|z|^2 = \frac{\bar{z}}{z^{-1}}, \text{ ou seja, }$$

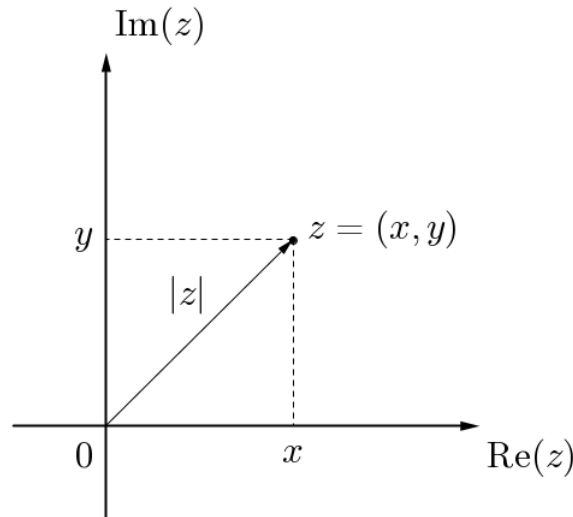
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.2)$$

A Figura 1.3 é a representação gráfica do módulo de um número complexo  $z$ .

Por meio do próximo resultado, demonstraremos as propriedades do módulo de um número complexo.

**Proposição 1.6.** *Sejam  $z = x + i y$ ,  $z_1 = x_1 + i y_1$  e  $z_2 = x_2 + i y_2$  números complexos. Então,*

$$(i) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|;$$

Figura 1.3: Módulo de  $z$ .

$$(ii) \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|;$$

$$(iii) |\bar{z}| = |z|;$$

$$(iv) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$(v) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ para } z_2 \neq 0;$$

$$(vi) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| - \text{desigualdade triangular};$$

$$(vii) |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||;$$

*Demonstração.* (i) Primeiramente, observemos que se  $x \geq 0$ , então  $x = |x|$  e, se  $x < 0$  então  $x < |x|$ . Portanto,  $x \leq |x|$ , ou seja,  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$ . Agora, notemos que  $x^2 \leq x^2 + y^2$ , o que implica  $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ , ou seja,  $|x| = |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

Assim,  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

(ii) Basta proceder como em (i).

(iii) De fato,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(iv) Vimos que  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ . Então, para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade, obtemos  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(v) Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e  $z_2 \neq 0$ . Primeiramente, notemos que

$$\left| \frac{1}{z_2} \right| = \left| \frac{1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} \right| = \left| \frac{x_2 - i y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right| = \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{1}{|z_2|}.$$

Com isso, temos

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(vi) Para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(vii) Observemos que  $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ , de onde segue que

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Trocando  $z_1$  com  $z_2$ , obtemos

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|.$$

Fazendo  $|z_1| - |z_2| = a$ , temos que  $|z_2| - |z_1| = -a$ , então  $a \leq |z_1 + z_2|$  e  $-a \leq |z_1 + z_2|$ , o que implica  $|a| \leq |z_1 + z_2|$ , ou seja,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

□

## 1.2 Forma polar

Vimos que um número complexo pode ser definido como um par ordenado de números reais e o mesmo pode ser identificado como um ponto do plano.

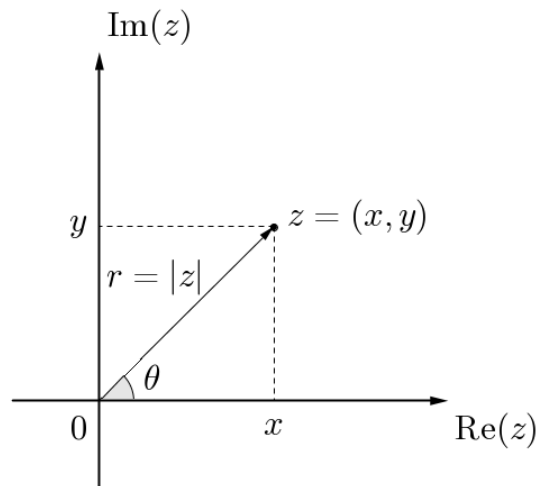


Figura 1.4: Coordenadas polares.



Notemos que  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor posição  $(x, y)$  e o eixo das abscissas. Assim,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \operatorname{sen} \theta$$

e

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta.$$

Identificando  $r = |z|$ , temos que  $(x, y)$  pode ser descrito em termos de coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Sendo  $z = x + iy$ , podemos escrever  $z$  na forma  $z = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta$ , ou seja,

$$z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (1.3)$$

O ângulo  $\theta$  é denominado um **argumento** de  $z$  e é denotado por  $\arg(z)$ . Observemos que qualquer ângulo da forma  $\theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , também satisfaz (1.3), uma vez que as funções seno e cosseno são periódicas<sup>1</sup>, com período  $2\pi$ . Assim, o conjunto  $\arg z$  de todos os argumentos de  $z$  é dado por:

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O único argumento de  $z$  que pertence ao intervalo  $(-\pi, \pi]$  é denominado **argumento principal** de  $z$  e é denotado por  $\operatorname{Arg} z$ . Portanto, o conjunto de todos os argumentos de  $z$  é dado por:

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Definição 1.7.** *A identidade*

$$z = |z| [\cos(\operatorname{Arg} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Arg} z)]$$

*é denominada a **forma polar** de  $z$ .*

Agora, sejam  $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$  dois números complexos não nulos e  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ . Vamos obter a representação polar para

---

<sup>1</sup>Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica com período  $\tau$ ,  $\tau > 0$ , se  $f(t + \tau) = f(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$z_1 z_2$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= |z_1| |z_2| [\cos \theta_1 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + i \operatorname{sen} \theta_1 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)] \\
 &= |z_1| |z_2| [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 i \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 i \operatorname{sen} \theta_2] \\
 &= |z_1| |z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)],
 \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Então,  $z_1 z_2$  tem valor absoluto  $|z_1| |z_2|$  e tem  $\theta_1 + \theta_2$  como argumento.

Seja  $z = |z|[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$  um número complexo não nulo. Vamos, agora, obter a representação polar para  $z^{-1}$ ,  $z \neq 0$ . Sabemos que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  e  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ . Portanto, podemos escrever que  $\bar{z} = |z|[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$ .

Também já vimos que  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  (veja (1.2)). Então,  $z^{-1} = \frac{|z|[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]}{|z|^2}$ .

Por conseguinte, a representação polar de  $z^{-1}$  é:

$$z^{-1} = |z|^{-1} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)].$$

A partir das representações polares encontradas anteriormente, concluímos que

$$z_1 z_2^{-1} = |z_1| |z_2|^{-1} [\cos(\theta_1 + (-\theta_2)) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + (-\theta_2))],$$

de onde se obtém a seguinte fórmula de divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0.$$

Agora, em  $z_1 \cdot z_2$ , façamos  $z_1 = z_2 = z$  e  $|z| = r$ . Então,

$$z^2 = r^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)],$$

o que nos sugere

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)],$$

para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ . Esta última igualdade é verdadeira e é conhecida como *Primeira Fórmula de De Moivre* e será provada abaixo.

**Teorema 1.8.** *Sejam  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  um número complexo não nulo e  $n \in \mathbb{Z}$ . Então,*

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]. \quad (1.4)$$

*Demonstração.* Vamos inicialmente provar que a igualdade (1.4) é válida para  $n \in \mathbb{N}$ , usando o Princípio de Indução Finita sobre  $n$ .

(I) Se  $n = 0$ ,  $z^0 = 1 = r^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ .

(II) Admitamos que a fórmula seja válida para  $n = k$ :

$$z^k = r^k [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)].$$

(III) Agora vamos provar que a igualdade é válida para  $n = k + 1$ . Com efeito, usando o item anterior, temos:

$$\begin{aligned} z^k \cdot z &= [r^k(\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))] \cdot [\rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))] \\ &= (r^k \cdot \rho) [\cos(k\theta) \cdot \cos(\theta) + i^2 \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(\theta)] + i[(\cos(k\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(k\theta) \cos(\theta))] \\ &= (r^k \cdot \rho) [\cos(k\theta + \theta)] + i[\operatorname{sen}(k\theta + \theta)] \\ &= r^{k+1} [\cos((k+1)\theta) + i \operatorname{sen}((k+1)\theta)] = z^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (1.4) vale para  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, vamos constatar que a igualdade (1.4) é válida para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Considerando o caso de interesse  $n < 0$ , podemos tomar  $m = -n$ . Então,

$$z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m}, \quad z \neq 0.$$

Como  $-n = m \in \mathbb{N}$ , a igualdade (1.4) é verdadeira para  $m$ , pelo o que foi visto

anteriormente, levando-nos a concluir que:

$$\begin{aligned}
 z^n &= \frac{1}{r^m [\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)]} \\
 &= \frac{1}{r^m} \frac{[\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)]}{[\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)][\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)]} \\
 &= \frac{1}{r^m} \frac{[\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)]}{\cos^2(m\theta) + \operatorname{sen}^2(m\theta)} \\
 &= r^{-m} [\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)] \\
 &= r^{-m} [\cos((-m)\theta) + i \operatorname{sen}((-m)\theta)] \\
 &= r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.9.** Para aplicar o Teorema 1.8, tomemos  $z = 1 + i$  e determinemos  $z^4$ . O módulo de  $z$  é dado por  $|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  e seu argumento principal é  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , pois

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\cos \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Com isso,

$$z^4 = (\sqrt{2})^4 \left[ \cos \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] = 4 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -4.$$

### 1.3 Raízes $n$ -ésimas

Dados um número complexo  $w$  e um número natural  $n \geq 1$ , diremos que  $z \in \mathbb{C}$  é uma **raiz  $n$ -ésima** de  $w$  se

$$z^n = w.$$

Se  $w = 0$ , é claro que  $z = 0$  é a única solução da equação  $z^n = w$ . Logo, o número 0 possui uma única raiz  $n$ -ésima que é o próprio 0. A seguir, veremos que se  $w \neq 0$ , então existirão exatamente  $n$  soluções distintas da equação  $z^n = w$ .

**Teorema 1.10.** *Seja  $n \in \mathbb{N}^*$ . Todo número complexo não nulo  $w$  possui exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas complexas distintas, a saber,*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[ \cos \left( \frac{\text{Arg } w + 2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\text{Arg } w + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (1.5)$$

onde  $k = 0, 2, \dots, n-1$ .

A igualdade acima é conhecida como *Segunda Fórmula de De Moivre*.

*Demonstração.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $z_k$  o número complexo dado em (1.5). Escrevemos  $w = |w|(\cos \psi + i \text{sen } \psi)$ , em que  $\psi = \text{Arg } w$ . O nosso objetivo é procurar todos os números complexos  $z = |z|(\cos \theta + i \text{sen } \theta)$  para os quais vale a igualdade:

$$z^n = w.$$

Pela Primeira Fórmula de De Moivre, a equação acima se transforma em

$$|z|^n [\cos(n\theta) + i \text{sen } (n\theta)] = |w|(\cos \psi + i \text{sen } \psi),$$

de onde segue que

$$|z|^n = |w|, \quad \cos(n\theta) = \cos \psi \quad \text{e} \quad \text{sen}(n\theta) = \text{sen } \psi.$$

A primeira condição é satisfeita precisamente quando  $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ , enquanto as duas últimas são satisfeitas quando  $n\theta = \psi + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\theta = \frac{\psi + 2k\pi}{n}$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Então, as raízes  $n$ -ésimas de  $w$  são os números  $z_k$  dados em (1.5) para  $k \in \mathbb{Z}$ . Fazendo  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , obtemos  $n$  distintas raízes  $n$ -ésimas de  $w$ . Os demais valores de  $k$  nos dão apenas repetições das raízes  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ . Com efeito, tomemos  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrário. Digamos que

$$k = qn + r \quad \text{com } q \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \leq r < n.$$

Como

$$\frac{\psi + 2k\pi}{n} = \frac{\psi + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\psi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

segue que  $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ . □

A raiz  $n$ -ésima de  $w$ , obtida fazendo  $k = 0$  em (1.5), é denominada **raiz  $n$ -ésima principal** de  $w$ . A notação  $\sqrt[n]{w}$  é reservada para esta raiz. Esta notação é coerente com a notação  $\sqrt[n]{|w|}$  que indica a única raiz real positiva de  $|w|$ . Portanto,

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \left[ \cos \left( \frac{\text{Arg } w}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\text{Arg } w}{n} \right) \right].$$

Observemos que todas as  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $w$  possuem o mesmo módulo, a saber,  $\sqrt[n]{|w|}$ . Então, elas são representadas por  $n$  pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio  $\sqrt[n]{|w|}$ . Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos.

**Exemplo 1.11.** Como exemplo, vemos que as raízes cúbicas da unidade são dadas por  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ ,

$$z_0 = \sqrt[3]{1} \left[ \cos \left( \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) \right] = 1,$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1} \left[ \cos \left( \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) \right] = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e

$$z_2 = \sqrt[3]{1} \left[ \cos \left( \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) \right] = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Estas raízes representam pontos no plano complexo e são vértices de um polígono regular de 3 lados inscrito em um círculo de centro 0 e raio 1. Veja Figura 1.5.

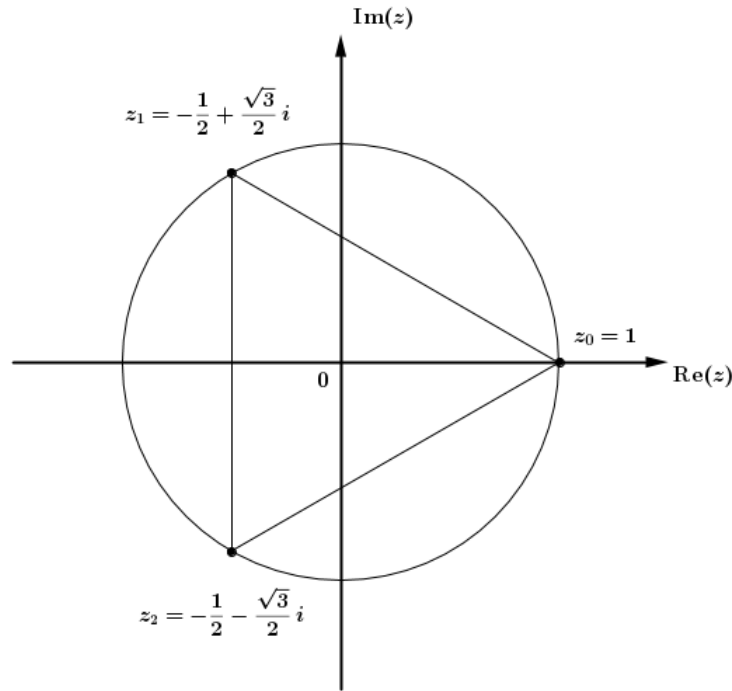


Figura 1.5: Raízes cúbicas da unidade.

## 1.4 Conceitos básicos da topologia de $\mathbb{C}$

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos básicos da topologia usual de  $\mathbb{C}$  que são imprescindíveis para uma discussão sobre teoria de funções de uma variável complexa. Ressaltamos que nossa pretensão aqui é estruturar os pré-requisitos de topologia necessários para futuras referências e não fornecer um aprofundamento no assunto.

Dados  $z_0 \in \mathbb{C}$  e um número real  $r > 0$ , definimos:

*i)* **disco aberto de centro  $z_0$  e raio  $r$**  por

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\};$$

iii) **disco fechado de centro  $z_0$  e raio  $r$**  por

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\};$$

iii) **disco aberto deletado de centro  $z_0$  e raio  $r$**  por

$$D^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\};$$

iv) **círculo de centro  $z_0$  e raio  $r$**  por

$$\gamma(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Sejam  $\rho_1$  e  $\rho_2$  números reais positivos tais que  $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ . Dizemos que

$$A(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

é uma **região anelar aberta** ou um **anel aberto**;

$$\overline{A}(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$$

é uma **região anelar fechada** ou um **anel fechado**;

$$A(z_0, \rho_1, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0|\} \quad \text{e} \quad \overline{A}(z_0, \rho_1, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0|\}$$

são **anéis ilimitados**.

**Definição 1.12.** *Seja  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $A$  é um **conjunto aberto** se, para cada  $z_0 \in A$ , existe  $r > 0$  tal que  $D(z_0, r) \subset A$  e dizemos que  $A \subset \mathbb{C}$  é um **conjunto fechado** se o seu complementar  $\mathbb{C} - A$  é aberto.*

Um exemplo de conjunto aberto é o disco aberto  $D(z_0, r)$  e um exemplo de conjunto fechado é o disco fechado  $\overline{D}(z_0, r)$ .

**Definição 1.13.** *Seja  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é **ponto interior** de  $A$  se existe  $r > 0$  tal que  $D(z_0, r) \subset A$ . O conjunto de todos os pontos interiores de  $A$  é denominado **interior** de  $A$  e é usualmente denotado por  $\text{Int } A$ .*



**Definição 1.14.** Seja  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um **ponto aderente** de  $A \subset \mathbb{C}$  se  $D(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$  para todo  $r > 0$ . O conjunto de todos os pontos aderentes de  $A$  é denominado **fecho** de  $A$  e é usualmente denotado por  $\bar{A}$ .

**Definição 1.15.** Seja  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $z_0$  é **ponto de fronteira** de  $A$  se todo disco aberto de centro  $z_0$  contém pontos de  $A$  e pontos do complementar de  $A$ . O conjunto de todos os pontos de fronteira de  $A$  é denominado **fronteira** de  $A$  e é usualmente denotado por  $\partial A$ . Assim, a fronteira de  $A$  é o conjunto

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C} - A}.$$

**Definição 1.16.** Seja  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $z_0$  é um **ponto de acumulação** de  $A$  se, para qualquer  $r > 0$ , o disco  $D(z_0, r)$  contém pelo menos um ponto de  $A$  distinto de  $z_0$ . Simbolicamente,  $z_0$  é um ponto de acumulação de  $A$  se  $(D(z_0, r) - \{z_0\}) \cap A \neq \emptyset$  para todo  $r > 0$ .

Para um estudo mais abrangente sobre o assunto, sugerimos a leitura das referências [10] e [13].

## 1.5 Exercícios propostos

1. Escreva o número complexo dado na forma  $x + iy$ .

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| (a) $(2 + 4i)(5 - 3i)$ ;               | (e) $(3 + 7i) + (4 - i)$ ;     |
| (b) $i(6 - 4i)$ ;                      | (f) $i(-5 + 2i) - (-8 + 7i)$ ; |
| (c) $(\sqrt{2} + 3i)(\sqrt{2} - 4i)$ ; | (g) $(-9 - i) - i(2 + 6i)$ ;   |
| (d) $(1 - i)^4$ ;                      | (h) $2i(-3 + i) + i(4 + 2i)$ . |

2. Escreva os quocientes a seguir na forma  $x + iy$ .

- (a)  $\frac{2}{1+3i}$ ;                      (d)  $\frac{3-2i}{1+i}$ ;  
(b)  $\frac{1}{2-5i}$ ;                      (e)  $\frac{(3-i)(2+3i)}{1+i}$ ;  
(c)  $\frac{4}{-3+4i}$ ;                      (f)  $\frac{6+2i}{10-5i}$ .

3. Sejam  $z$  e  $w$  dois números complexos. Mostre que

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

4. Forneça as condições necessárias e suficientes para que o número complexo  $\frac{a+ib}{c+id}$ , com  $c+id \neq 0$  seja

(a) imaginário puro;

(b) real.

5. Mostre que o subconjunto do plano complexo  $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = |z-i|\}$  é representado graficamente por uma reta.

6. Represente graficamente no plano complexo os seguintes subconjuntos:

(a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ;

(b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| \leq 3\}$ ;

(c)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \operatorname{Re}(z)\}$ ;

(d)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ ;

(e)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| \leq 1\}$ .

6. Prove que  $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  são as soluções da equação quadrática  $az^2 + bz + c = 0$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constante complexas e  $a \neq 0$ .

7. Determine as soluções da equação  $z^2 + 2z + 2 = 0$ .

8. Determine o módulo e  $\text{Arg } z$  dos números complexos a seguir e represente-os na forma polar.
- |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| (a) $2 - 2i$ ;        | (f) $4$ ;                     |
| (b) $1 + i$ ;         | (g) $-2i$ ;                   |
| (c) $3i$ ;            | (h) $-\sqrt{3} + i$ ;         |
| (d) $1 + i\sqrt{3}$ ; | (i) $-\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ ; |
| (e) $5 - 5i$ ;        | (j) $-5$ .                    |
9. Sejam  $z$  e  $w$  dois números complexos arbitrários tais que  $|z| = |w| = 1$  e  $1 + zw \neq 0$ . Prove que  $\frac{z+w}{1+zw}$  é um número real.
10. Determine o menor número  $n \in \mathbb{N}$  para o qual  $(-\sqrt{3} + i)^n$  é imaginário puro.
11. Use a fórmula (1.4) para  $n = 2$  e  $n = 3$  e determine as identidades trigonométricas  $\sin 2\theta$ ,  $\sin 3\theta$ ,  $\cos 2\theta$  e  $\cos 3\theta$ .
12. Calcule as potências indicadas a seguir.
- |   |  |
|---|--|
| (a) $(3 - 3i)^{12}$ ;   | (f) $(-1 + i)^6$ ;   |
| (b) $(2 - 2i)^5$ ;  | (g) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^8$ ;                             |
| (c) $(1 + i\sqrt{3})^9$ ;                                     | (h) $(1 + i)^4$ ;  |
| (d) $(-\sqrt{3} - i)^{20}$ ;                                  | (i) $(2 + 2\sqrt{3}i)^5$ ;                                   |
| (e) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$ ; | (j) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^{100}$ . |
13. Calcule as raízes indicadas a seguir.
- |                       |                                   |
|-----------------------|-----------------------------------|
| (a) $\sqrt[3]{8}$ ;   | (f) $\sqrt{3 + 4i}$ ;             |
| (b) $\sqrt{-9}$ ;     | (g) $\sqrt[3]{1 + i}$ ;           |
| (c) $\sqrt[4]{1}$ ;   | (h) $\sqrt{-16 + 30i}$ ;          |
| (d) $\sqrt{16i}$ ;    | (i) $\sqrt{5 + 12i}$ ;            |
| (e) $\sqrt[3]{-64}$ ; | (j) $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$ . |

**14.** Prove que as  $n$  raízes  $n$ -ésimas da unidade são dadas por

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**15.** Mostre que se  $z \neq 1$ , então

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$



## 2 Funções analíticas

No Capítulo 1, introduzimos o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e apresentamos algumas de suas propriedades algébricas e geométricas. No presente capítulo, estudaremos as funções complexas de uma variável complexa, ou seja, funções  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  em que  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

Apresentaremos algumas funções elementares. São elas: exponencial, função potência  $z^{\frac{1}{n}}$ , logarítmica, trigonométricas e hiperbólicas, e exibiremos algumas propriedades dessas funções.

Definiremos o conceito de limite e continuidade e exibiremos um estudo sobre a derivada complexa e suas consequências.

### 2.1 Funções de uma variável complexa

Com o corpo dos números complexos bem definido, iniciaremos o estudo das funções complexas com uma variável complexa. Em comparação com as funções de variáveis reais, as diferenças estão no domínio e na imagem, que são subconjuntos de  $\mathbb{C}$ .

Dizemos que  $f$  é uma **função complexa** com uma variável complexa ao associar o número complexo  $z$  a um único número complexo  $w$ , chamado a imagem de  $z$  por  $f$ . Escrevemos  $w = f(z)$ .

Lembramos que não basta apenas fornecer a lei de formação da função; é necessário especificar seu domínio de definição.

**Exemplo 2.1.** A expressão  $w = \frac{4z - 5i}{z - 2i}$  está definida em todo o plano complexo exceto quando  $z = 2i$ , ponto em que o denominador se anula.

Muitas vezes expressaremos uma função por meio de suas partes real e imaginária. Sendo  $A \subset \mathbb{C}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função, é possível representar  $f$  da seguinte forma:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad \text{com } z = (x, y),$$

em que  $u$  é a parte real de  $f$  e  $v$  é a parte imaginária de  $f$ . Simbolicamente, temos:  $u(x, y) = \operatorname{Re} [f(z)]$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} [f(z)]$ .

**Exemplo 2.2.** Se  $f(z) = z^2 - 2z + 7$ , então

$$u(x, y) = x^2 - 2x - y^2 + 7 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 2xy - 2y.$$

## 2.2 Funções elementares

Nesta seção, apresentaremos exemplos importantes de funções de uma variável complexa. Mais especificamente, estudaremos as funções exponencial, logarítmica, trigonométricas e hiperbólicas.

### 2.2.1 Função Exponencial

No caso de funções reais, a expansão em Série de Taylor centrada em  $x_0 = 0$  da função  $f(x) = e^x$  é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Temos, também, que as expansões das funções reais seno e cosseno são dadas por

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

e

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ao substituir  $x$  por  $ix$  em  $e^x$ , temos que

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots \\
 &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots + \frac{i^n x^n}{n!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\
 &= \cos x + i \operatorname{sen} x.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ . Essa igualdade é de grande relevância na Matemática e é conhecida como **Fórmula de Euler**. Ao fazer  $x = \pi$ , obtemos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i \cdot 0 = -1,$$

o que implica a identidade

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

conhecida como **identidade de Euler**.

Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$ , definimos a **exponencial** de  $z$  como sendo o número complexo

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cos y + (e^x \operatorname{sen} y) i.$$

Uma das razões pelas quais é natural denominar esta função por exponencial reside no fato desta generalizar a exponencial real, pois se  $z = x + i0$  é real, então

$$e^{x+i0} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x.$$

Na sequência provaremos propriedades da função exponencial.

Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  números complexos.

(PE1.)  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$



Com efeito,

$$\begin{aligned}
 (e^{x_1+iy_1})(e^{x_2+iy_2}) &= (e^{x_1} \cos y_1 + i e^{x_1} \operatorname{sen} y_1)(e^{x_2} \cos y_2 + i e^{x_2} \operatorname{sen} y_2) \\
 &= e^{x_1} e^{x_2} \cos y_1 \cos y_2 + i e^{x_1} e^{x_2} \cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + i e^{x_1} e^{x_2} \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 - \\
 &\quad - e^{x_1} e^{x_2} \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\
 &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2) \\
 &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1 + y_2)] + i e^{x_1} e^{x_2} [\operatorname{sen}(y_1 + y_2)] \\
 &= e^{(x_1+x_2)} [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] \\
 &= e^{z_1+z_2}.
 \end{aligned}$$

$$(PE2) \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \cdot \left[ \frac{(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2)}{\cos^2 y_2 + \operatorname{sen}^2 y_2} \right] \\
 &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \cdot (\cos y_1 \cos y_2 - i \cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + i \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) \\
 &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \cdot [\cos y_1 \cos y_2 + \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i (\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 - \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\
 &= e^{x_1-x_2} [\cos(y_1 - y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 - y_2)] \\
 &= e^{z_1-z_2}.
 \end{aligned}$$

(PE3) Para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $z \in \mathbb{C}$ , temos que

$$(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = [e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)]^n = e^{nz}.$$

De fato, pela Primeira Fórmula de De Moivre, segue que

$$\begin{aligned} [e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)]^n &= e^{nx} [\cos(ny) + i \operatorname{sen}(ny)] \\ &= e^{nx} e^{iny} \\ &= e^{n(x+iy)} \\ &= e^{nz}. \end{aligned}$$

As três propriedades vistas são também propriedades da exponencial real. A diferença mais surpreendente entre a exponencial real e a complexa está na periodicidade desta última. Como as funções seno e cosseno reais são periódicas de período  $2\pi$ , pela definição da exponencial complexa, temos:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z (1 + i 0) = e^z.$$

Portanto,  $e^z$  é periódica e tem período puramente imaginário igual a  $2\pi i$ , enquanto que, no caso real, a função exponencial  $e^x$  não é periódica. A partir desse fato, concluímos que a função exponencial complexa não é injetora, pois  $f(z) = e^z$  e  $f(z + 2\pi i) = e^z$ .

Agora, como  $e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$  e as funções  $f(y) = \cos y$  e  $g(y) = \operatorname{sen} y$  possuem período igual a  $2\pi$ , temos que

$$|e^z| = e^x \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = \{y + 2k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

É sabido que  $e^x > 0$  para todo  $x$  real. A exponencial complexa, por sua vez, pode tomar valores negativos. Por exemplo, se  $z = \pi i$ , então  $e^{\pi i} = e^0 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1 + 0 = -1 < 0$ .

O conjugado de  $e^z$  pode ser obtido através de propriedades das funções pares e ímpares. Sabemos que as funções cosseno e seno são par e ímpar, respectivamente, ou seja,  $f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x)$  e  $g(x) = \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) = -g(-x)$ , para todo  $x$  real. Sendo assim,

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - i e^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + i e^x \operatorname{sen}(-y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}},$$

ou seja,  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2.2.2 A função potência $z^{1/n}$

Agora, vamos analisar as funções  $z^{1/n}$ , com  $n \geq 2$ . Para  $n = 2$ , temos que as duas raízes quadradas de  $z$  são dadas por

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/2}. \quad (2.1)$$

com  $k = 0, 1$ . Mas, observemos que (2.1) não define uma função, pois para  $k = 0$  e  $k = 1$ , temos dois valores complexos associados ao número  $z$ . Porém, ao fixarmos  $\theta = \operatorname{Arg}(z)$  e  $k = 0$ , podemos definir uma função que associa o número complexo  $z$  a uma única raiz quadrada, a qual chamaremos de **principal**. Notemos que, para  $z = 16$ , temos que  $r = |z| = |16| = 16$  e  $\operatorname{Arg}(16) = 0$ . Logo, em (2.1), obtemos

$$16^{1/2} = \sqrt{16} e^{i(0/2)} = 4e^{i(0)} = 4.$$

É importante destacar que, no exemplo acima, utilizamos o *argumento principal* do número  $z = 16$ .

**Definição 2.3** (Raiz  $n$ -ésima principal). A potência  $z^{1/n}$ , para  $n \geq 2$ , dada por

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i \operatorname{Arg}(z)/n}, \quad (2.2)$$

em que  $r = |z|$ , é denominada **raiz  $n$ -ésima principal**.

Cabe observar que  $\operatorname{Arg}(z)$  na definição acima é o argumento principal, diferentemente de  $\arg(z)$  que representa um conjunto infinito de valores e não define uma função, pois um número  $z$  fixo admite  $n$  raízes  $n$ -ésimas. Este fato é chamado na Análise Complexa de **funções multivalentes**. Apesar de causar estranheza, as funções multivalentes não são consideradas funções, mas são muito utilizadas nesta área da Matemática. Denotaremos tais funções com letras maiúsculas. Por exemplo,  $F(z) = z^{1/2}$  é a função multivalente que determina as raízes quadradas do número complexo  $z$ .

Dos múltiplos valores de uma função multivalente, pode-se escolher um valor em que a função seja univalente. Se essa escolha for feita por meio do conceito de continuidade (que estudaremos a seguir), obtemos uma função que denominamos **ramo de uma função multivalente**. Em outras palavras, um *ramo* de uma

função multivalente  $F$  é uma função  $f_1$ , contínua em algum domínio, que associa um dos múltiplos valores de  $F$  a cada número  $z$  no domínio especificado.

### 2.2.3 Logaritmo complexo

A função exponencial  $f(x) = e^x$  é bijetora e possui sua inversa definida por  $f^{-1}(x) = \ln x$ , em que  $\ln x$  é o logaritmo natural de  $x$ . Vimos, na seção anterior, que a exponencial complexa não é definida univocamente em  $\mathbb{C}$ . Portanto, esta não admite inversa em  $\mathbb{C}$ .

Fixemos um número complexo  $z \neq 0$ . Se  $e^w = z$ , então

$$|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)} = |z| \quad \text{e} \quad \arg(e^w) = \operatorname{Im}(w) = \arg(z).$$

Ou seja,

$$e^w = z \Rightarrow w = \ln |z| + i \arg(z), \quad (2.3)$$

em que  $\ln |z|$  é o logaritmo real de  $|z|$ . Como há um número infinito de argumentos de  $z$ , por (2.3), podemos afirmar que a equação  $e^w = z$  admite infinitas soluções em  $\mathbb{C}$ .

**Definição 2.4.** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . O **logaritmo complexo** de  $z$  é denotado por  $\log(z)$  e definido por*

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg(z).$$

Cada número complexo  $z \neq 0$  tem uma infinidade de logaritmos, todos com parte real  $\ln |z|$ , e diferindo uns dos outros por múltiplos de  $2\pi i$ . Ou seja, se  $z = re^{i\theta}$ , então

$$\log(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Observação 2.5.** Por meio do logaritmo complexo é possível resolver equações do tipo  $e^{2z} + e^z + 1 = 0$ . Vejamos como. Se  $x = e^z$ , então a equação  $e^{2z} + e^z + 1 = 0$  equivale a  $x^2 + x + 1 = 0$ , cujas raízes são  $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

Para  $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , temos  $e^z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , o que implica  $z = \log\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ .

Chamando  $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , temos  $|w_1| = 1$  e  $\arg(w_1) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto,

$$z_1 = \ln 1 + i \left( \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

de onde segue que

$$z_1 = 2\pi i \left( \frac{1}{3} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , temos  $e^z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , o que implica  $z = \log \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ .

Chamando  $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , temos  $|w_2| = 1$  e  $\arg(w_2) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por conseguinte,

$$z_2 = \ln 1 + i \left( \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

de onde segue que

$$z_2 = 2\pi i \left( \frac{2}{3} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, as soluções da equação dada são

$$z_1 = 2\pi i \left( \frac{1}{3} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$z_2 = 2\pi i \left( \frac{2}{3} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como no caso real, o logaritmo complexo possui propriedades algébricas. Se  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos não nulos e  $n \in \mathbb{Z}$ , então valem as seguintes propriedades:

$$(PL1) \quad \log(z_1) + \log(z_2) = \log(z_1 z_2).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \log(z_1) + \log(z_2) &= \ln |z_1| + i \arg(z_1) + \ln |z_2| + i \arg(z_2) \\ &= \ln |z_1| + \ln |z_2| + i [\arg(z_1) + \arg(z_2)] \\ &= \ln |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log(z_1 z_2). \end{aligned}$$

$$(PL2) \quad \log(z_1) - \log(z_2) = \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \log(z_1) - \log(z_2) &= \ln|z_1| + i \arg(z_1) - \ln|z_2| - i \arg(z_2) \\ &= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i [\arg(z_1) - \arg(z_2)] \\ &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\ &= \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \end{aligned}$$

$$(PL3) \quad \log z_1^n = n \log(z_1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Realmente,

$$\begin{aligned} \log z_1^n &= \ln|z_1^n| + i \arg(z_1^n) \\ &= \ln|z_1|^n + n i \arg(z_1) \\ &= n \ln|z_1| + n i \arg(z_1) \\ &= n (\ln|z_1| + i \arg(z_1)) \\ &= n \log(z_1). \end{aligned}$$

Conforme mencionamos acima, o logaritmo complexo de um número real assume infinitos valores. Por exemplo, o logaritmo complexo de 10,  $\log(10)$ , é o conjunto de valores  $2,3026 + 2k\pi i$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Já o logaritmo real de 10,  $\ln 10$ , é único e vale, aproximadamente, 2,3026, que pode ser obtido do logaritmo complexo quando  $k = 0$ . Tal valor do logaritmo complexo é chamado de **valor principal do logaritmo complexo**, pois o determinamos por meio do argumento principal de  $z$ ,  $\text{Arg}(z)$ . Utilizaremos a notação  $\text{Log}(z)$  para denotar seu valor principal. A relação  $f(z) = \text{Log } z$  define uma função em  $\mathbb{C}$  e

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

define o **logaritmo principal** de  $z$ .

**Exemplo 2.6.** Para  $z = i$ , temos que  $|z| = 1$  e  $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ . Como  $\ln|i| = \ln 1 = 0$ ,

segue que

$$\operatorname{Log} i = \ln |i| + \operatorname{Arg}(i) = 0 + i \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i.$$

## 2.2.4 Funções trigonométricas

Nesta subseção, apresentaremos as funções trigonométricas complexas e suas semelhanças e diferenças com as funções trigonométricas reais.

Se  $x$  é uma variável real, então  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  e  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ . Somando e subtraindo estas igualdades membro a membro, obtemos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Essas fórmulas para as funções seno e cosseno reais podem ser usadas para definirmos as funções seno e cosseno complexos.

**Definição 2.7.** As funções **seno complexo** e **cosseno complexo** são definidas por

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , respectivamente.

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante complexas são definidas como no caso real: se  $\sin z \neq 0$  e  $\cos z \neq 0$ , então

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \text{e} \quad \operatorname{csc} z = \frac{1}{\sin z}.$$

Assim como no caso real, as identidades trigonométricas listadas abaixo são válidas.

**Proposição 2.8.** Se  $z$  e  $w$  são números complexos, então:

- (i)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ;
- (ii)  $\sin(-z) = -\sin z$ ;
- (iii)  $\cos(-z) = \cos z$ ;
- (iv)  $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ ;

$$(v) \cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$$

*Demonstração.* (i) De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} \\ &= \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Pela definição da função seno complexo, temos

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

(iii) Pela definição da função cosseno complexo, temos

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z.$$

(iv) Com efeito, notemos que

$$\operatorname{sen}(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}.$$

Pela Definição 2.7, temos que  $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$  e  $e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z+w) &= \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos w + i \operatorname{sen} w) - [(\cos z - i \operatorname{sen} z)(\cos w - i \operatorname{sen} w)]}{2i} \\ &= \frac{2i(\operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z)}{2i} \\ &= \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z. \end{aligned}$$



(v) Como na demonstração do item (iv), temos

$$\begin{aligned}
 \cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} \\
 &= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\
 &= \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos w + i \operatorname{sen} w) + [(\cos z - i \operatorname{sen} z)(\cos w - i \operatorname{sen} w)]}{2} \\
 &= \frac{2 \cos z \cos w - 2 \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w}{2} \\
 &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.
 \end{aligned}$$

□

Algumas desigualdades satisfeitas por funções trigonométricas reais não são satisfeitas por funções trigonométricas complexas. Por exemplo, sabemos que  $|\operatorname{sen} x| \leq 1$  e  $|\cos x| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , porém não é verdade que  $|\operatorname{sen} z| \leq 1$  e  $|\cos z| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . É o que constataremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 2.9.** Para  $z = i$ , tem-se

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1,5431,$$

de onde segue que  $|\cos i| > 1$ .

**Exemplo 2.10.** Para  $z = 1 + i$ , temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(1+i) &= \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^i e^{-1} - e e^{-i}}{2i} \\
 &= \frac{e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) - e(\cos(-1) + i \operatorname{sen}(-1))}{2i} \\
 &= \frac{-1,2699 + 2,5970i}{2i} \approx 1,2984 - 0,6349i,
 \end{aligned}$$

de onde se obtém  $|\operatorname{sen}(1+i)| \approx 1,4454 > 1$ .

### 2.2.5 Funções hiperbólicas

As funções seno hiperbólico real e cosseno hiperbólico real são definidas, respectivamente, por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , que têm como base a função exponencial real.

As funções seno hiperbólico complexo e cosseno hiperbólico complexo são definidas de forma análoga a partir da exponencial complexa.

**Definição 2.11.** *As funções **seno hiperbólico complexo** e **cosseno hiperbólico complexo** são definidas, respectivamente, por*

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Diferentemente das funções hiperbólicas reais, as funções hiperbólicas complexas são periódicas, pois a função exponencial complexa é periódica.

Se  $\cosh z \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , definimos a **tangente hiperbólica** de  $z$  e a **secante hiperbólica** de  $z$  por

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z},$$

respectivamente.

Se  $\sinh z \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , definimos a **cotangente hiperbólica** de  $z$  e a **cossecante hiperbólica** de  $z$  por

$$\operatorname{coth} z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad \text{e} \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z},$$

respectivamente.

Para finalizar esta subseção, exibiremos algumas propriedades das funções  $\sinh z$  e  $\cosh z$ .

**Proposição 2.12.** *Se  $z$  e  $w$  são números complexos, então:*

$$(i) \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1;$$

$$(ii) \quad \sinh(-z) = -\sinh z;$$

$$(iii) \cosh(-z) = \cosh z;$$

$$(iv) \sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \sinh w \cosh z;$$

$$(v) \cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.$$

*Demonstração.* (i) Com efeito,

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} \\ &= \frac{4e^z e^{-z}}{4} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Pela definição da função seno hiperbólico complexo, temos

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^z}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z.$$

(iii) Pela definição da função cosseno hiperbólico complexo, temos

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z.$$

(iv) Primeiramente, observemos que

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = i \sin z.$$

Portanto,  $\sin iz = -\frac{\sinh z}{i}$ . Além disso,

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Notemos, também, que

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{-iiz} + e^{iiz}}{2} = \cos(iz).$$

Assim, pela Proposição 2.8 - (iv), obtemos

$$\operatorname{sen}(iz + iw) = \operatorname{sen}(iz) \cos(iw) + \operatorname{sen}(iw) \cos(iz) = \frac{\operatorname{senh} z}{-i} \cosh w + \frac{\operatorname{senh} w}{-i} \cosh z,$$

o que implica

$$\frac{\operatorname{senh}(z + w)}{-i} = \frac{1}{-i} (\operatorname{senh} z \cosh w + \operatorname{senh} w \cosh z),$$

que é equivalente a

$$\operatorname{senh}(z + w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \operatorname{senh} w \cosh z.$$

(v) Conforme vimos na demonstração do item anterior, temos

$$\begin{aligned} \cosh(z + w) &= \cos(iz + iw) = \cos(iz) \cos(iw) - \operatorname{sen}(iz) \operatorname{sen}(iw) \\ &= \cos(iz) \cos(iw) + (-i \operatorname{sen}(iz))(-i \operatorname{sen}(iw)) \\ &= \cosh z \cosh w + \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w, \end{aligned}$$

onde utilizamos a Proposição 2.8 - (v). □

## 2.3 Limite e continuidade

Agora, apresentaremos a definição de limite de uma função complexa, que é formalmente a mesma da Análise Real.

**Definição 2.13.** *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função e  $z_0$  um ponto de acumulação de  $A$ . Dizemos que  $f$  tem limite  $L$  com  $z$  tendendo a  $z_0$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$  tal que*

$$z \in A, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - L| < \varepsilon.$$

*Escrevemos*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Ressaltamos que, na Definição 2.13, não é necessário a função estar definida no ponto  $z_0$ . É o que veremos no próximo exemplo.

**Exemplo 2.14.** A função complexa  $f(z) = \frac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i}$  não está definida quando  $z = 2i$ , mas seu limite existe e é igual a  $5i$  quando  $z$  se aproxima de  $2i$ , ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i.$$

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  tal que se  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z - 2i| < \delta$  então

$$\left| \frac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} - 5i \right| = \left| \frac{2z^2 - 8iz - 8}{z - 2i} \right| = 2 \left| \frac{z^2 - 4iz + 4i^2}{z - 2i} \right| = 2|z - 2i| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

No exemplo acima, mostramos por meio da definição de limite que, quando  $z$  se aproxima do número  $2i$ , a imagem de  $z$ ,  $f(z)$ , se aproxima de  $5i$ . Porém, nem sempre é possível satisfazer a definição formal de limite. Se ao longo de dois caminhos que passam por  $z_0$ ,  $f$  se aproximar de dois números complexos  $L_1 \neq L_2$ , dizemos que o limite da função  $f$ , ao se aproximar de  $z_0$ , não existe. Para mostrar este fato, basta apresentar dois caminhos que passam por  $z_0$  que corresponderá a dois valores de  $L$  distintos.

**Exemplo 2.15.** O limite  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$  não existe.

Primeiramente, façamos  $z$  se aproximar de zero pelo eixo real, ou seja, quando  $y = 0$ . Assim, sabendo que  $z = x + yi$  e que  $\bar{z} = x - yi$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x + 0i}{x - 0i} = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Agora, façamos  $z$  se aproximar de zero pelo eixo imaginário, ou seja, quando  $x = 0$ . Assim,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{0 + yi}{0 - yi} = \lim_{z \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Como temos dois valores distintos,  $-1$  e  $1$ , para o mesmo limite, concluímos que o mesmo não existe. Com isso, podemos enunciar o próximo resultado.

**Teorema 2.16** (Unicidade do limite). *O limite de uma função complexa quando existe é único.*

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ .

Seja  $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$ . Existem  $\delta_1$  e  $\delta_2$  positivos tais que

$$|f(z) - L_1| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

e

$$|f(z) - L_2| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

Assim, para  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ , temos

$$\begin{aligned} |L_2 - L_1| &= |L_2 - f(z) + f(z) - L_1| \leq |f(z) - L_2| + |f(z) - L_1| \\ &< \frac{|L_2 - L_1|}{2} + \frac{|L_2 - L_1|}{2} \\ &= |L_2 - L_1|, \end{aligned}$$

sempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

Portanto,  $|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$ , o que é um absurdo. Concluimos, então, que  $L_1 = L_2$ .  $\square$

No início desta seção, apresentamos a representação de uma função complexa por meio de suas partes real e imaginária:  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ , em que  $u$  e  $v$  são funções de duas variáveis reais. Com isso, é possível expressar o limite de uma função complexa por meio de suas partes real e imaginária.

**Exemplo 2.17.** A função complexa  $f(z) = z^2 - \bar{z}$  pode ser expressa através de suas partes real e imaginária. Sendo  $z = (x, y)$ , temos  $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy + y)$ , em que  $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$  e  $v(x, y) = 2xy + y$  são funções reais de duas variáveis reais. Nessa mesma função, quando  $z$  se aproxima

de  $2i$ , temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 - \bar{z}) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} [(x^2 - y^2 - x) + i(2xy + y)] \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (x^2 - y^2 - x) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (2xy + y) \\
 &= (0^2 - 2^2 - 0) + i(2 \cdot 0 + 2) = -4 + 2i.
 \end{aligned}$$

Este fato é garantido pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.18.** *Sejam  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + i y_0$  e  $L = u_0 + i v_0$ . Temos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  se, e somente se,*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* De forma direta, temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = u_0 + i v_0 \\
 &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u(x, y) + i v(x, y)] = u_0 + i v_0 \\
 &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = u_0 + i v_0 \\
 &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.
 \end{aligned}$$

□

Para a prova acima, usamos as propriedades dos limites de funções reais. O teorema anterior nos permite provar as propriedades dos limites de funções complexas a partir das propriedades dos limites de funções reais, conforme veremos na sequência.

**Teorema 2.19.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções complexas. Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ , então*

- (i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cL$ , em que  $c$  é uma constante complexa;
- (ii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = L \pm M$ ;
- (iii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = L \cdot M$ ;
- (iv)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ , se  $g(z) \neq 0$  e  $M \neq 0$ .

*Demonstração.* (i) Sendo  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + i y_0$ ,  $L = u_0 + i v_0$  e  $c = a + bi$ , temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (a + bi) [u(x, y) + i v(x, y)].$$

Do Teorema 2.18 segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [a u(x, y) - b v(x, y)] = a u_0 - b v_0$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [b u(x, y) + a v(x, y)] = b u_0 + a v_0,$$

em que  $a u(x, y) - b v(x, y)$  e  $b u(x, y) + a v(x, y)$  são as partes real e imaginária de  $c \cdot f$ , respectivamente. Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(z) &= (a u_0 - b v_0) + i (b u_0 + a v_0) \\ &= (a + bi)u_0 + (ai - b)v_0 \\ &= (a + bi)u_0 + i(a + bi)v_0 \\ &= (a + bi)(u_0 + i v_0). \end{aligned}$$

(ii) Sejam  $f(x, y) = u_1(x, y) + i v_1(x, y)$ ,  $g(x, y) = u_2(x, y) + i v_2(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + i y_0$ ,  $L = u_1 + i v_1$  e  $M = u_2 + i v_2$ . Então,



$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \{[u_1(x,y) + i v_1(x,y)] + [u_2(x,y) + i v_2(x,y)]\} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \{[u_1(x,y) + u_2(x,y)] + i [v_1(x,y) + v_2(x,y)]\}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.18, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_1(x,y) + u_2(x,y)] = u_1 + u_2$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [v_1(x,y) + v_2(x,y)] = v_1 + v_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] &= \{[u_1 + u_2] + i [v_1 + v_2]\} \\ &= [u_1 + i v_1] + [u_2 + i v_2] \\ &= L + M.\end{aligned}$$

O caso  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - g(z)] = L - M$  é análogo.

(iii) Sejam  $f(x,y) = u_1(x,y) + i v_1(x,y)$ ,  $g(x,y) = u_2(x,y) + i v_2(x,y)$ ,  $z_0 = x_0 + i y_0$ ,  $L = u_1 + i v_1$  e  $M = u_2 + i v_2$ . Então,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [(u_1(x,y) u_2(x,y) - v_1(x,y) v_2(x,y)) + i (u_1(x,y) v_2(x,y) + v_1(x,y) u_2(x,y))].\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.18, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [(u_1(x,y) u_2(x,y) - v_1(x,y) v_2(x,y))] = u_1 u_2 - v_1 v_2$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [(u_1(x,y) v_2(x,y) + v_1(x,y) u_2(x,y))] = u_1 v_2 + v_1 u_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) &= (u_1 u_2 - v_1 v_2) + i(u_1 v_2 + v_1 u_2) \\ &= u_1 u_2 + i^2 v_1 v_2 + i u_1 v_2 + i v_1 u_2 \\ &= (u_1 + i v_1)(u_2 + i v_2) \\ &= L \cdot M.\end{aligned}$$

(iv) Basta fazer  $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ f(z) \cdot \frac{1}{g(z)} \right]$  e aplicar (iii), ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ f(z) \cdot \frac{1}{g(z)} \right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

□

Observemos que, a partir das propriedades dos números reais, dos limites de funções reais e do Teorema 2.18, podemos demonstrar as propriedades de limite de uma função complexa sem a necessidade de utilizar  $\varepsilon$  e  $\delta$ . Com essa notação, a propriedade (i) do Teorema 2.19 pode ser demonstrada da seguinte forma: para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Consequentemente, temos que

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |cf(z) - cL| = |c||f(z) - L| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

de onde segue a propriedade.

O conceito de limite complexo, como no caso real, auxilia-nos a definir o conceito de continuidade de uma função, conforme poderemos constatar a seguir.

**Definição 2.20.** *Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa e  $A \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto. Dizemos que  $f$  é uma **função contínua em**  $z_0 \in A$  se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Uma função complexa é **contínua** em  $A$  se for contínua em todos os pontos de  $A$ .*

A função  $f(z) = \frac{1}{z}$  é contínua em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  exceto na origem do plano complexo.

As funções polinomiais complexas são contínuas em todo o plano complexo. Como no caso real, podemos definir função contínua de seguinte forma: seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida em  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é **contínua** em  $z_0 \in A$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos obter  $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$  tal que

$$z_0 \in A \quad \text{e} \quad |z - z_0| < \delta \quad \implies \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ou seja,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Se  $f$  não é contínua em  $z_0$ , dizemos que  $f$  é **descontínua** neste ponto. Neste caso, existe algum  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existe  $z \in A$  de modo que  $|z - z_0| < \delta$ , porém  $|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ .

O Teorema 2.18 relaciona o limite complexo de  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  e os limites das partes real e imaginária,  $u$  e  $v$ , respectivamente. Sabemos, da Análise Real, o conceito de continuidade de uma função real de duas variáveis reais: uma função real de duas variáveis reais é contínua em um ponto  $(x_0, y_0)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Com isso em mente, podemos estudar a continuidade de uma função complexa também por meio de suas partes real e imaginária, conforme garante o teorema seguinte.

**Teorema 2.21.** *Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  e  $z_0 = x_0 + i y_0$ . A função complexa  $f$  é contínua no ponto  $z_0$  se, e somente se, as funções que compõem as partes real e imaginária de  $f$ ,  $u$  e  $v$ , são contínuas no ponto  $(x_0, y_0)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $f$  contínua em  $z_0$ . Então, por definição,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0).$$

Pelo Teorema 2.18, temos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$ , ou seja,  $u$  e  $v$  são contínuas em  $(x_0, y_0)$ .

Por outro lado, supondo  $u$  e  $v$  contínuas em  $(x_0, y_0)$ , temos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) =$

$u(x_0, y_0)$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$ . Assim, novamente pelo Teorema 2.18, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(z) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) = f(z_0),$$

de onde segue que  $f$  é contínua em  $z_0$ .  $\square$

**Exemplo 2.22.** Para mostrarmos, por meio do Teorema 2.21, que a função complexa  $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i$  é contínua no ponto  $z_0 = 2 - i$ , basta verificar que as partes real e imaginária de  $f$  são contínuas neste ponto. De fato,  $f(z) = (x^2 - y^2 + y + 3) + i(2xy - x - 2)$ , desde que  $z = x + iy$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (x^2 - y^2 + y + 3) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (2xy - x - 2) = -8.$$

Além disso,  $u(2, -1) = 5$  e  $v(2, -1) = -8$ . Então,  $u$  e  $v$  são contínuas em  $(2, -1)$  e, portanto,  $f$  é contínua em  $z_0 = 2 - i$ .

Apresentaremos, na sequência, algumas propriedades das funções contínuas. Mas, antes, vamos recordar o conceito de composição de funções. Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  funções tais que  $f(A) \subset B$ . A expressão  $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ ,  $z \in A$ , é denominada a função composta de  $f$  e  $g$ . Em símbolos, temos

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto g(f(z)). \end{aligned}$$

**Proposição 2.23.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos abertos em  $\mathbb{C}$ . Consideremos, também,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  funções complexas, com  $f(A) \subset B$ . Se  $f$  e  $h$  são funções contínuas em  $z_0$  e  $g$  é contínua em  $f(z_0)$ , então são contínuas em  $z_0$  as seguintes funções:*

- (i)  $cf : A \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $c$  é uma constante complexa;
- (ii)  $f + h : A \rightarrow \mathbb{C}$ ;
- (iii)  $f \cdot h : A \rightarrow \mathbb{C}$ ;
- (iv)  $\frac{f}{h} : A \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $h \neq 0$ ;
- (v)  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Mostraremos (v). Seja  $\varepsilon > 0$ . Pela continuidade de  $g$  em  $f(z_0)$ , existe  $\delta_g > 0$  tal que  $w \in B$  e  $|w - f(z_0)| < \delta_g$  implicam  $|g(w) - g(f(z_0))| < \varepsilon$ . Da continuidade de  $f$  em  $z_0$  segue que existe  $\delta_f > 0$  tal que  $z \in A$  e  $|z - z_0| < \delta_f$  implicam  $|f(z) - f(z_0)| < \delta_g$ . Assim,  $|z - z_0| < \delta_f$  implica  $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon$ , provando a continuidade de  $g \circ f$  em  $z_0$ .

As provas das demais propriedades são de fácil construção e, por essa razão, são omitidas aqui.  $\square$

**Exemplo 2.24.** A função  $h(z) = \frac{1}{z-i}$  é contínua em  $\mathbb{C} - \{i\}$ , pois é a composição de  $g(z) = \frac{1}{z}$ , contínua em  $\mathbb{C} - \{0\}$ , com  $f(z) = z - i$ , contínua em  $\mathbb{C}$ .

## 2.4 A derivada complexa

Nas seções anteriores, vimos que as definições de limite e continuidade de uma função complexa são exatamente as mesmas que as do caso real. O objetivo desta seção é apresentar a derivada de uma função complexa e suas surpreendentes diferenças interpretativas em relação à derivada de uma função de uma variável real.

Sabemos do Cálculo que a derivada da função  $y = f(x)$  pode ser interpretada de várias maneiras; por exemplo, a derivada de uma função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  neste ponto. Com isso, podemos analisar, em um determinado intervalo na reta real, se a função é crescente ou não, ou até mesmo se possui valor mínimo ou máximo. Na Física, podemos interpretar a derivada de uma função  $s = s(t)$  como a velocidade instantânea de um móvel e denotamos  $v = s'(t)$ . No contexto complexo, não são aplicáveis essas interpretações. Veremos os conceitos de analiticidade e diferenciabilidade de uma função complexa. O primeiro significa a existência da derivada em  $z_0$  e em uma vizinhança em torno deste ponto. Já o segundo significa a existência da derivada no ponto  $z_0$ .

Formalmente, a definição de derivada complexa é a mesma que a do caso real. Por meio do conceito de limite, definimo-la.

**Definição 2.25.** Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_0 \in A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é

**diferenciável em  $z_0$  se existir o limite**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

O limite acima é denominado **derivada de  $f$  em  $z_0$**  e denotado por  $f'(z_0)$ .

**Exemplo 2.26.** Através da Definição 2.25, determinemos a derivada da função complexa  $f(z) = z^2 + 4z$  no ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 + 4z - (z_0^2 + 4z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 + 4z - z_0^2 - 4z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0) + 4(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 + 4)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0 + 4) = 2z_0 + 4. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.27.** A função  $f(z) = \bar{z}$  está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Vamos mostrar que  $f$  não é diferenciável em ponto algum do plano complexo. Seja  $z$  um ponto qualquer no plano complexo. Sabendo que a derivada de uma função complexa também pode ser determinada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (2.5)$$

façamos

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (x + \Delta x) - i(y + \Delta y) - x + i y = \Delta x - i \Delta y,$$

uma vez que  $f(z) = \bar{z} = x - i y$  e que  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ . Segue que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Primeiramente, façamos  $\Delta z \rightarrow 0$  ao longo de uma reta paralela ao eixo real, ou seja, quando  $\Delta y = 0$ . Assim,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 1 = 1. \quad (2.6)$$

Agora, façamos  $\Delta z \rightarrow 0$  ao longo de uma reta paralela ao eixo imaginário, ou seja, quando  $\Delta x = 0$ . Com efeito,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{-i \Delta y}{i \Delta y} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (-1) = -1. \quad (2.7)$$

Como os valores em (2.6) e (2.7) são diferentes, concluímos que o limite em (2.5) não existe. Portanto,  $f(z) = \bar{z}$  não é diferenciável em ponto algum do plano complexo. Por outro lado, é fácil ver que  $f(z) = \bar{z}$  é contínua em  $\mathbb{C}$ . Este exemplo nos indica que nem toda função complexa contínua é diferenciável. Porém, toda função complexa diferenciável é contínua, conforme verificaremos abaixo.

**Teorema 2.28.** *Se  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , então  $f$  é contínua em  $z_0$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , então existe o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ . O limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)$  existe e é igual a 0. Por conseguinte, utilizando o Teorema 2.19, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que  $f$  é contínua em  $z_0$ . □

A seguir, apresentaremos as regras de derivação que são as mesmas do caso de uma função real. Tais regras são facilmente verificadas através do Teorema 2.19.

**Proposição 2.29.** *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  aberto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  funções diferenciáveis em um ponto  $z_0$ . Então,*

- (i)  $cf$  é diferenciável em  $z_0$ , para todo  $c \in \mathbb{C}$ , e  $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$ ;
- (ii)  $f + g$  é diferenciável em  $z_0$  e  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ ;
- (iii)  $fg$  é diferenciável em  $z_0$  e  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ ;
- (iv)  $\frac{f}{g}$  é diferenciável em  $z_0$ , para  $g(z_0) \neq 0$ , e  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$ .

*Demonstração.* Mostremos (iii). Observemos que

$$f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0) = [f(z) - f(z_0)]g(z) + [g(z) - g(z_0)]f(z_0).$$

Por hipótese,  $g$  é diferenciável em  $z_0$ , logo  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$ . Da mesma forma,  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , logo  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \cdot f(z_0) \right] \\ &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \end{aligned}$$

□

O resultado abaixo, denominado *Regra da Cadeia*, exhibe uma regra de derivação para a função composta de duas funções complexas. Cabe observar que a mesma regra é válida para funções reais.

**Teorema 2.30** (Regra da Cadeia). *Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  funções complexas tais que  $f(A) \subset B$ . Se  $f$  é diferenciável em  $z_0$  e  $g$  é diferenciável em  $f(z_0)$ , então a função composta  $g \circ f$  é diferenciável em  $z_0$  e*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0). \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $H : B \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$H(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}, & \text{se } w \neq w_0 \\ g'(w_0), & \text{se } w = w_0, \end{cases}$$



em que  $w_0 = f(z_0)$ .

Como  $g$  é diferenciável em  $w_0$ , temos que

$$\lim_{w \rightarrow w_0} H(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = g'(w_0) = H(w_0),$$

o que prova que  $H$  é contínua em  $w_0$ . Como  $f$  é contínua em  $z_0$ , pois  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , segue que a composição  $H \circ f$  é contínua em  $z_0$ . Assim,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (H \circ f)(z) = (H \circ f)(z_0) = H(w_0) = g'(w_0).$$

E quando  $w \neq w_0$ , temos, por definição de  $H$ , a igualdade

$$g(w) - g(w_0) = (w - w_0)H(w),$$

que também é válida quando  $w = w_0$ . Trocando  $w$  por  $f(z)$  e sendo  $w_0 = f(z_0)$ , temos

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = H(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

para todo  $z \in A$ , com  $z \neq z_0$ . Tomando, em ambos os membros da igualdade, o limite quando  $z \rightarrow z_0$ , obtemos

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0),$$

o que completa a prova. □

**Exemplo 2.31.** A função  $h(z) = (z^2 + 2z - 7i)^2$  está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$  e  $h$  é a composta  $g \circ f$  em que  $f(z) = z^2 + 2z - 7i$  e  $g(z) = z^2$ . Como  $f'(z) = 2z + 2$  e  $g'(z) = 2z$ , segue pelo Teorema 2.30, que

$$h'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) = 2(z^2 + 2z - 7i) \cdot (2z + 2).$$

**Definição 2.32.** Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos que  $f$  é **analítica** (ou **holomorfa**) **em**  $z_0$  se  $f$  for diferenciável neste ponto e em todo ponto numa vizinhança de  $z_0$ . Em outras palavras, diz-se que  $f$  é analítica (ou holomorfa) em  $z_0$  quando existe  $r > 0$  tal que  $D(z_0, r) \subset A$  e  $f$  é diferenciável em todo ponto de  $D(z_0, r)$ .

**Exemplo 2.33.** A função  $f(z) = |z|^2$  é diferenciável em  $z = 0$ , mas não é diferenciável em qualquer outro ponto do plano complexo. Portanto, pela Definição 2.32,  $f$  não é analítica em  $z = 0$ , pois não existe uma vizinhança de  $z = 0$  na qual  $f$  é diferenciável.

Dizemos que uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é **analítica** quando é analítica em todo domínio  $A \subset \mathbb{C}$ , ou seja, quando  $A$  é um aberto e  $f$  é diferenciável em todos os pontos desse domínio.

Para que uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  seja diferenciável em um ponto  $z_0 \in A$  é necessário que haja uma certa relação entre as derivadas parciais das partes real e imaginária de  $f$  neste ponto, que é dada pelas chamadas *Equações de Cauchy-Riemann*.

**Teorema 2.34.** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função tal que  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$  é a sua representação por meio de suas partes real e imaginária. Se  $f$  é diferenciável em um ponto  $z_0 = x_0 + i y_0$ , então existem as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  no ponto  $z_0$  e estas satisfazem o par de equações*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \quad (2.9)$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

ou

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

As equações dadas em (2.9) são chamadas **Equações de Cauchy-Riemann**.

*Demonstração.* Da diferenciabilidade de  $f$  em  $z_0 = x_0 + i y_0$ , temos que o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Neste limite não há restrição sobre a maneira como  $z$  se aproxima de  $z_0$  no plano complexo. Façamos, primeiramente,  $z$  tender a  $z_0$  por meio da reta vertical

$x = x_0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + i y) - f(x_0 + i y_0)}{i y - i y_0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + i v(x_0, y) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0).
 \end{aligned}$$

Façamos, agora,  $z$  tender a  $z_0$  por meio da reta horizontal  $y = y_0$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + i y_0) - f(x_0 + i y_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + i v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0).
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que  $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$  e  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ . Comparando as duas expressões de  $f'(z_0)$ , obtemos o resultado desejado.

□

**Exemplo 2.35.** Utilizaremos o Teorema 2.34 para verificar que a função  $f(z) = |z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$  não é analítica. Com efeito, as partes real e imaginária de  $f$  são, respectivamente,  $u(x, y) = x^2 + y^2$  e  $v(x, y) = 0$ . Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \text{para qualquer } (x, y) \neq (0, 0),$$

o que mostra que tal função não é analítica, pois  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Porém, em  $z = (x, y) = (0, 0)$ , temos  $f'(z) = 0$ .

**Exemplo 2.36.** A recíproca do Teorema 2.34 é falsa. Consideremos a função  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  definida para todo  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ . Observemos que  $f$  se anula na origem do plano complexo,  $u(x, y) = \sqrt{xy}$  e  $v(x, y) = 0$ . As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas no ponto  $z = 0$ . Com efeito, como  $f$  se anula em ambos os eixos coordenados, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Mas  $f$  não é diferenciável em  $z = 0$ . De fato, quando  $z$  tende a zero pelo caminho  $y = x$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + ix) - f(0, 0)}{x + ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(1 + i)}$$

e tal limite não existe. Portanto  $f'(0)$  não existe.

Para que as equações de Cauchy-Riemann tornem-se uma condição suficiente para a diferenciabilidade de uma função  $f$  em um ponto  $z$ , precisamos estabelecer que as derivadas parciais de primeira ordem de  $u$  e  $v$  sejam contínuas em  $z$ . Com esta hipótese adicional, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.37.** *Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  aberto e  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  existem em  $A$  e são contínuas em  $z_0 = (x_0, y_0) \in A$ . Uma condição necessária e suficiente para que a função  $f$  seja diferenciável em  $z_0$  é que as equações de Cauchy-Riemann estejam satisfeitas neste ponto.*

*Demonstração.* A condição necessária está provada no Teorema 2.34. Vamos mostrar que a condição é suficiente. Por hipótese, as derivadas parciais de  $u$  e  $v$

existem em todo ponto de  $A$ . Um ponto na vizinhança de  $z_0$  pode ser escrito como  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , com  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta y \rightarrow 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

em que  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são funções de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , respectivamente, e tendem a zero quando  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tendem a zero.

De forma análoga, para  $\Delta v$ , temos

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y,\end{aligned}$$

em que  $\varepsilon_3$  e  $\varepsilon_4$  são funções de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , respectivamente, e tendem a zero quando  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tendem a zero. A variação de  $f$  é dada por

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\ &= \Delta u + i \Delta v \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \\ &\quad + i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y \right).\end{aligned}$$

Como as condições de Cauchy-Riemann estão satisfeitas em  $(x_0, y_0)$ , ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0),$$

então

$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \\
&\quad + i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) (\Delta x + i \Delta y) + \\
&\quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \Delta x + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4) \Delta y.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ , temos

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i \varepsilon_4) \frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Agora, basta mostrar que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ (\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i \varepsilon_4) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] = 0.$$

Notemos que  $|\Delta x| \leq |\Delta z|$  e  $|\Delta y| \leq |\Delta z|$ , então  $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1$  e  $\left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ (\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i \varepsilon_4) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i \varepsilon_4) \frac{\Delta y}{\Delta z} \\
&= 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

pois  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  e  $\varepsilon_4$  tendem a zero quando  $\Delta z$  tende a zero e  $\frac{\Delta x}{\Delta z}$  e  $\frac{\Delta y}{\Delta z}$  são funções limitadas. Portanto,  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$  existe e o teorema está demonstrado. □

**Exemplo 2.38.** A função  $f(z) = e^z$  está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Escrevendo-a em termos de suas partes real e imaginária, temos

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

sendo  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Afirmamos que  $f$  é analítica em  $\mathbb{C}$ . De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

ou seja, as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas e  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  são funções contínuas em todo plano complexo.

As funções complexas que são analíticas em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  recebem um nome específico. É o que veremos a seguir.

**Definição 2.39.** *Uma função  $f$  complexa definida em  $\mathbb{C}$  e analítica em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  é denominada **função inteira**.*

**Exemplo 2.40.** *Como vimos acima, a função  $f(z) = e^z$  é uma função inteira, pois está definida em  $\mathbb{C}$  e é analítica em todo plano complexo. Além disso,  $f(z) = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$  e*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &= e^x \cos y + i \sin y \\ &= e^z. \end{aligned}$$

No próximo capítulo, estudaremos a integração complexa ao longo de um caminho no plano complexo e demonstraremos o teorema central da Análise Complexa: o Teorema de Cauchy. Esse resultado afirma que se  $f$  é uma função sob determinadas condições e  $\gamma$  é um caminho fechado, tem-se  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Outros teoremas importantes, consequências do Teorema de Cauchy, serão demonstrados, tais como as Fórmulas Integrais de Cauchy.

## 2.5 Exercícios propostos

1. Expresse as funções a seguir em termos de suas partes real e imaginária,  $u$  e  $v$ , respectivamente.

(a)  $f(z) = z^2 + 5z - 4$ ;

(e)  $f(z) = e^z(z - i)$ ;

(b)  $f(z) = \bar{z}e^z - ze^{\bar{z}}$ ;

(f)  $f(z) = e^{z^2+4z}$ ;

(c)  $f(z) = iz^2 - 3z$ ;

(g)  $f(z) = |e^z|$ ;

(d)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$ ;

(h)  $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .

2. Determine o domínio de cada função complexa a seguir.

(a)  $f(z) = \frac{2z^2 - 7}{e^z - 1}$ ;

(b)  $f(z) = \frac{z + 2i}{z^3 + 4z^2 + z}$ ;

(c)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4 + 3z^2 - 4}$ ;

(d)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z| - 1}$ .

3. Mostre que a função  $f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  é periódica, com período real  $2\pi$ .

4. Nas funções dadas a seguir, determine o valor da raiz  $n$ -ésima principal no valor especificado para  $z$ .

(a)  $z^{\frac{1}{2}}$  e  $z = -i$ ;

(b)  $z^{\frac{1}{3}}$  e  $z = -1$ ;

(c)  $z^{\frac{1}{4}}$  e  $z = -1 + i\sqrt{3}$ ;

(d)  $z^{\frac{1}{2}}$  e  $z = 2 + i$ .

5. Utilizando a definição de limite de uma função complexa, estabeleça os limites a seguir.



(a)  $\lim_{z \rightarrow 1+i} [(1-i)z + 2i] = 2 + 2i;$

(b)  $\lim_{z \rightarrow -3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i;$

(c)  $\lim_{z \rightarrow 2i} (2x + y^2) = 4;$

(d)  $\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z) = -4 + 6i.$

6. Prove que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes complexas.

7. Prove que  $\lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} z = \bar{z}_0.$

8. Mostre que  $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$  não existe.

9. Calcule o valor dos limites.

(a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - 27}{z - 3};$

(e)  $\lim_{z \rightarrow \pi i} e^z;$

(b)  $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 81}{z + 2i};$

(f)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{\text{Im}(z)};$

(c)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+z} - 1}{z};$

(g)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0};$

(d)  $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}};$

(h)  $\lim_{z \rightarrow 3i} \frac{\text{Im}(z^2)}{z + \text{Re}(z)}.$

10. Mostre que as funções abaixo são contínuas nos pontos especificados.

(a)  $f(z) = \frac{z^3}{z^3 + 3z^2 + z}$  e  $z_0 = i;$

(b)  $f(z) = \frac{z - 3i}{z^2 + 2z - i}$  e  $z_0 = 1 + i;$

(c)  $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z - 1}, & |z| \neq 1 \\ 3, & |z| = 1 \end{cases} \quad \text{e } z_0 = 1;$

$$(d) f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z^2 + z + 1}, & |z| \neq 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, & |z| = 1 \end{cases} \quad \text{e } z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

11. Use a Definição 2.25 para estabelecer  $f'(z)$  para cada função dada.

(a)  $f(z) = z^2 - 5z - 4;$

(b)  $f(z) = 9z^2 - 3z + 1 - 2i;$

(c)  $f(z) = z^4 - z^2;$

(d)  $f(z) = \frac{1}{2iz}.$

12. Prove, por indução, que  $(z^n)' = nz^{n-1}$ , para todo inteiro  $n$ .

13. Demonstre, por meio da definição de derivada, que se  $f(z) = \frac{1}{z}$ , então  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$  para todo  $z \neq 0$ .

14. Utilize as regras de diferenciação para calcular  $f'(z)$  em cada caso.

(a)  $f(z) = 4z^3 - 2iz^2 + 7z - 4i;$

(e)  $f(z) = e^{z^2-2iz};$

(b)  $f(z) = (z^3 - 4iz)^4;$

(f)  $f(z) = (2z^2 - 3i)(z + 2);$

(c)  $f(z) = \frac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i};$

(g)  $f(z) = z^3 e^{iz};$

(d)  $f(z) = \frac{2+i}{z^2} - 5iz^2;$

(h)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 3i}.$

15. [Regra de L'Hospital] Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $z_0$ ,  $f(z_0) = 0$  e  $g(z_0) = 0$ , com  $g'(z_0) \neq 0$ . Mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

16. Use a Regra de L'Hospital para calcular  $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}.$

17. Mostre que a função  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$  é analítica para todo  $\mathbb{C} - \{0\}$ .
18. Mostre que a função  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$  não é analítica em ponto algum do plano complexo.
19. Verifique, em cada caso, se são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann. Se sim, apresente um domínio apropriado.
- (a)  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ ; (e)  $f(z) = 3x^2 + y + i(y^2 - x)$ ;
- (b)  $f(z) = e^{-x} \cos y - i e^{-x} \sin y$ ; (f)  $f(z) = e^y (\cos x + i \sin y)$ ;
- (c)  $f(z) = y + ix$ ; (g)  $f(z) = e^{\bar{z}}$ ;
- (d)  $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$ ; (h)  $f(z) = \frac{z-2i}{z+2i}$ .
20. Mostre que as funções  $f(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  e  $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$  são inteiras e determine suas derivadas.
21. Mostre que  $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$  é uma função inteira em uma região  $A$  do plano complexo.

## 3 Integração complexa

Neste capítulo será apresentado um dos mais importantes teoremas da Análise Complexa: o Teorema de Cauchy. Basicamente, ele afirma que se uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica e  $\gamma$  um caminho em  $A$  satisfazendo determinadas condições, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Estabeleceremos outros resultados importantes que decorrem diretamente do Teorema de Cauchy.

Inicialmente, revisaremos os conceitos de integrais reais e integrais de linha no plano e seus métodos de cálculo. Estudaremos integração no plano complexo, integração de funções complexas de uma variável real e integração complexa ao longo de um caminho  $\gamma$ .

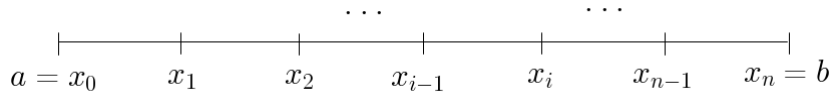
### 3.1 Integrais reais e integrais de linha no plano

Nesta seção, iremos revisitar os conceitos de integral definida em intervalos fechados de  $\mathbb{R}$  e de integral de linha no plano.

Para apresentar o conceito de integral definida, consideremos uma função real  $f$  definida no intervalo fechado  $[a, b]$  e  $P$  uma partição deste intervalo, ou seja,  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , em que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

A partição  $P$  considerada divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1, n$ , conforme a Figura 3.1.

Denominamos  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$  a **norma** (ou comprimento) da partição  $P$ , em que  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Figura 3.1: Partição de  $[a, b]$ .

Sendo  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $P$  a partição considerada, escolhamos, arbitrariamente, um número  $t_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  e formamos os produtos  $f(t_i)\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Somando-os, obtemos a seguinte soma

$$f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i,$$

a qual chamamos de **soma de Riemann da função  $f$  com relação à partição  $P$** . Com essa descrição, definimos a Integral de Riemann (ou integral definida) como segue.

**Definição 3.1.** A *integral de Riemann* da função  $f$  definida em  $[a, b]$  é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i, \quad (3.1)$$

desde que o limite exista.

Se o limite em (3.1) existir, diremos que  $f$  é **integrável** no intervalo  $[a, b]$ .

Se a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e admite uma primitiva  $F$  em  $[a, b]$ , ou seja,  $F' = f$  neste intervalo, temos que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (3.2)$$

fato este garantido pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*.

É possível estender o conceito de integral definida num intervalo fechado em  $\mathbb{R}$  para as funções reais de duas variáveis  $f(x, y)$  sobre um caminho  $\gamma$  no plano cartesiano. Essas integrais são chamadas de *integrais de linha no plano*. Para definirmos o objeto integral de linha, precisamos, primeiramente, relembrar o conceito de caminho, especificamente no plano.

Em  $\mathbb{R}^2$ , um **caminho** é uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo da forma  $[a, b]$ ,  $a < b$ , que associa a cada real  $t \in I$  um único vetor  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ .

Lembramos que considerar uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  significa exibir duas funções reais  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , coordenadas de  $\gamma$ , tais que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . À medida que  $t$  percorre o intervalo  $I$ , o vetor  $\gamma(t)$  descreve o caminho. A imagem ou trajetória de  $\gamma$  é o conjunto

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\},$$

denominado **curva**, cuja parametrização é  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Por abuso de linguagem, chamaremos a curva  $\gamma(I)$  também de caminho.

**Exemplo 3.2.** É fácil ver que a imagem do caminho  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  é a circunferência de raio unitário. Com efeito, se  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ , então  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ .

Suponhamos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja um caminho em  $\mathbb{R}^2$ , cujas coordenadas  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , são funções reais e contínuas. Denotemos por  $A$  e  $B$  os pontos inicial e terminal do caminho  $\gamma$ , respectivamente. O ponto  $A$  é o vetor  $(x(a), y(a))$  e o ponto  $B$  é o vetor  $(x(b), y(b))$ . Assim,

- (i) se  $x'$  e  $y'$ , derivadas das funções  $x$  e  $y$ , respectivamente, forem contínuas em  $[a, b]$  e não nulas em  $(a, b)$ , diremos que  $\gamma$  é um **caminho suave**;

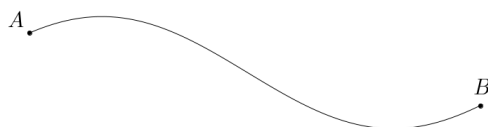


Figura 3.2: Caminho suave.

- (ii) se o caminho  $\gamma$  consistir em  $n$  caminhos suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$  unidos um a um por suas extremidades final e inicial, diremos que  $\gamma$  é um **caminho suave por partes**;

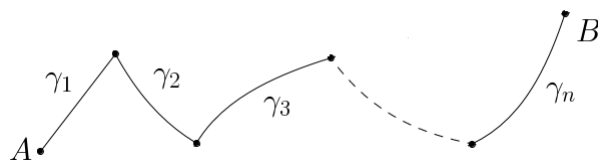


Figura 3.3: Caminho suave por partes.

- (iii) se um caminho  $\gamma$  não tiver auto-intersecções, exceto, nos pontos  $a$  e  $b$ , diremos que  $\gamma$  é um **caminho simples**;
- (iv) se os pontos  $A$  e  $B$  coincidirem, diremos que  $\gamma$  é um **caminho fechado**;
- (v) se os pontos  $A$  e  $B$  coincidirem e se o caminho não tiver auto-intersecções, diremos que  $\gamma$  é um **caminho fechado simples**.

A Figura 3.4 mostra um exemplo de caminho fechado simples.

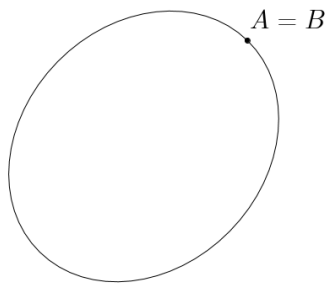


Figura 3.4: Caminho fechado simples.

A Figura 3.5 mostra um exemplo de um caminho fechado que não é simples.

O processo para definir integrais de linha é semelhante ao processo para definir a integral de Riemann. Assim, consideremos uma função  $f$  de duas variáveis reais tal que seu domínio inclui a imagem de um caminho suave  $\gamma$ , ou seja,  $f$  é definida em todos os pontos de  $\gamma$ .

Ao dividirmos o intervalo  $[a, b]$  ao qual pertence o parâmetro  $t$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de comprimento  $\Delta t_i$ , teremos uma partição  $P$  de  $[a, b]$  que particionará a curva  $\gamma([a, b])$  em  $n$  sub-arcos de comprimento  $\Delta s_i$ .

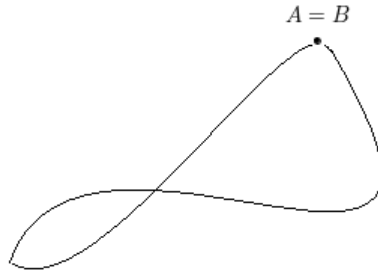


Figura 3.5: Caminho fechado não simples.

Denotemos por  $\Delta x_i$  e  $\Delta y_i$  os comprimentos das projeções de cada sub-arco nos eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente. Da mesma forma que na integral de Riemann, a norma da partição  $P$ , denotada por  $\|P\|$ , é o comprimento do maior subintervalo determinado pela partição  $P$ . Sendo  $f$  uma função de duas variáveis reais,  $(x_i^*, y_i^*)$  um ponto em cada sub-arco da curva descrita por  $\gamma$  e  $\Delta s_i$  o comprimento do  $i$ -ésimo arco, formemos os produtos  $f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Somando-os, temos

$$f(x_1^*, y_1^*) \cdot \Delta s_1 + f(x_2^*, y_2^*) \cdot \Delta s_2 + \dots + f(x_n^*, y_n^*) \cdot \Delta s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i.$$

Com essa descrição, definimos a integral de linha da função  $f$  ao longo do caminho  $\gamma$  em relação ao comprimento do arco  $s$  por:

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i. \quad (3.3)$$

O termo  $ds$  no integrando do primeiro membro é o comprimento do arco e é dado por

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (3.4)$$

**Exemplo 3.3.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} 2xy ds$ , em que a curva descrita por  $\gamma$  é o quarto de circunferência definida parametricamente por  $x(t) = 5 \cos t$  e  $y(t) = 5 \sin t$



para  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ . Como  $x'(t) = -5 \sin t$  e  $y'(t) = 5 \cos t$ , temos

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{(-5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2} dt = 5 dt.$$

Calculando a integral de linha, obtemos

$$\int_{\gamma} 2xy ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 \cos t \cdot 5 \sin t \cdot 5) dt = 250 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t \cdot \sin t) dt.$$

Fazendo a substituição  $u = \sin t$ , temos que  $du = \cos t dt$ . A mudança de variável requer uma mudança nos limites de integração. Quando  $t = 0$  segue que  $u = 0$  e quando  $t = \frac{\pi}{4}$  segue que  $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Assim,

$$\int_{\gamma} 2xy ds = 250 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u du = \left[ 250 \cdot \frac{u^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{250}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{125}{2}.$$

O exemplo acima mostrou o método de cálculo quando o caminho  $\gamma$  é definido por um par de equações paramétricas. E quando a curva descrita por  $\gamma$  é o gráfico de uma função explícita  $y = g(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ? Neste caso, podemos usar  $x$  como parâmetro. Assim, o diferencial de  $y$  é  $dy = g'(x)dx$  e o diferencial de comprimento de arco é  $ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx$ .

Portanto, a integral ao longo de um caminho  $\gamma$  dado pelo gráfico de uma função do tipo  $y = g(x)$  é definida por

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx.$$

**Exemplo 3.4.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} (3x^2 + 6y^2) ds$  em que  $\gamma$  é o gráfico da função  $y = 2x + 1$ , com  $-1 \leq x \leq 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (3x^2 + 6y^2) ds &= \int_{-1}^0 [3x^2 + 6(2x+1)^2] \sqrt{1 + [(2x+1)']^2} dx \\
&= \int_{-1}^0 [3x^2 + 6(4x^2 + 4x + 1)] \sqrt{1 + 2^2} dx \\
&= \int_{-1}^0 (3x^2 + 24x^2 + 24x + 6) \sqrt{5} dx \\
&= \sqrt{5} \left[ 27 \left( \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-1}^0 + \sqrt{5} \left[ 24 \left( \frac{x^2}{2} \right) \right]_{-1}^0 + \sqrt{5} [6x]_{-1}^0 \\
&= \sqrt{5} \left[ \frac{27}{3} - \frac{24}{2} + 6 \right] \\
&= 3\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

As integrais dos exemplos apresentados anteriormente foram calculadas com relação ao comprimento de arco  $s$  ao longo do caminho  $\gamma$ . Porém, também podemos calcular tais integrais ao longo de  $\gamma$  com relação a  $x$  e a  $y$ . Assim, temos as seguintes integrais

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(x, y) dx &= \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt \\
\int_{\gamma} f(x, y) dy &= \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt,
\end{aligned}$$

em que  $\gamma = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Quando  $\gamma$  for o gráfico de uma função  $y = g(x)$ , definiremos a integral de linha de  $f$  ao longo de  $\gamma$  com relação a  $x$  e a  $y$ , por

$$\int_{\gamma} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, g(x)) dx$$

e

$$\int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_a^b f(x, g(x)) g'(x) dx,$$

respectivamente, visto que  $dy = g'(x) dx$ .

**Exemplo 3.5.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} -y^2 dx + xy dy$ , em que  $\gamma$  é o gráfico da função  $y = x^3$ , com  $-1 \leq x \leq 2$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} -y^2 dx + xy dy &= \int_{-1}^2 -(x^3)^2 dx + x(x^3)(3x^2) dx = \int_{-1}^2 2x^6 dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^2 = 2 \left( \frac{2^7}{7} - \frac{(-1)^7}{7} \right) = \frac{258}{7}. \end{aligned}$$

Em diversas aplicações de integrais ao longo de um caminho, as mesmas são definidas por uma soma do tipo

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + \int_{\gamma} Q(x, y) dy.$$

De forma prática, podemos simplesmente escrevê-la como

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

que não é uma integral em relação ao comprimento de arco  $ds$ , e em um formato menos carregado como

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Uma notação bastante utilizada para uma integral ao longo de um caminho  $\gamma$  fechado é dada por

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Considerando um caminho  $\gamma$  suave por partes, definimos a integral de linha de

uma função  $f$  ao longo de  $\gamma$  como a soma das integrais ao longo dos  $n$  caminhos que compõem  $\gamma$  ( $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ ). Então,

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_{\gamma_1} f(x, y) ds + \int_{\gamma_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{\gamma_n} f(x, y) ds.$$

**Exemplo 3.6.** Vamos calcular a integral  $\oint_{\gamma} x^2 y^3 dx - xy^2 dy$ , em que  $\gamma$  é o caminho dado na Figura 3.6.

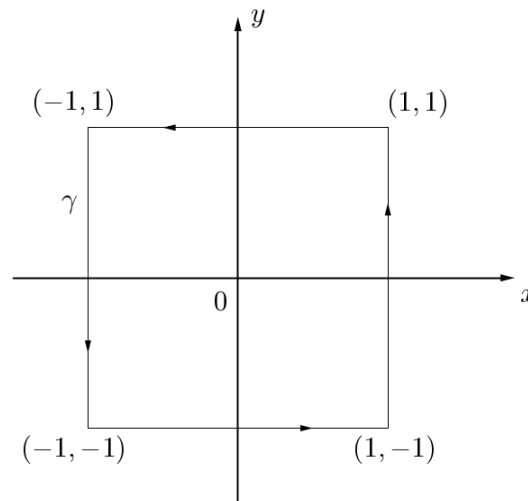


Figura 3.6: Representação gráfica do caminho  $\gamma$ .

Observemos que o caminho  $\gamma$  da figura é a reunião de quatro caminhos:  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$ , tais que  $\gamma_1$  é o segmento de reta com extremidades em  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$ ;  $\gamma_2$  é o segmento de reta com extremidades em  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ ;  $\gamma_3$  é o segmento de reta com extremidades em  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$  e  $\gamma_4$  é o segmento de reta com extremidades em  $(-1, -1)$  e  $(1, -1)$ .

Portanto, o valor da integral será dado pela soma dos valores de quatro integrais. Em símbolos,

$$\oint_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}.$$

Determinemos, primeiramente, a integral da função dada ao longo de  $\gamma_1$ . Utili-

zando  $x$  como parâmetro temos que  $x = 1$  e  $dx = 0$  e, portanto,

$$\int_{\gamma_1} x^2 y^3 dx - xy^2 dy = \int_{-1}^1 1^2 \cdot y^3 \cdot (0) - 1 \cdot y^2 dy = - \int_{-1}^1 y^2 dy = - \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}.$$

Ao longo de  $\gamma_2$ , usemos  $y$  como parâmetro, isto é,  $y = 1$  e  $dy = 0$ . Então,

$$\int_{\gamma_2} x^2 y^3 dx - xy^2 dy = \int_1^{-1} x^2 \cdot 1^3 dx - x \cdot 1^2 \cdot (0) dy = \int_1^{-1} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}.$$

Determinemos, agora, a integral da função dada ao longo do caminho  $\gamma_3$ . Sendo  $x$  o parâmetro com  $x = -1$  e  $dx = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} x^2 y^3 dx - xy^2 dy &= \int_1^{-1} (-1)^2 \cdot y^3 \cdot (0) dx - (-1) \cdot y^2 dy = \int_1^{-1} y^2 dy = \\ &= - \int_{-1}^1 y^2 dy = - \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por fim, calculemos a integral ao longo de  $\gamma_4$ . Sendo  $y$  o parâmetro, temos que  $y = -1$  e  $dy = 0$  e, então:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} x^2 y^3 dx - xy^2 dy &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot (-1)^3 dx - x \cdot (-1)^2 \cdot (0) = \int_{-1}^1 -x^2 dx \\ &= - \int_{-1}^1 x^2 dx = - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Calculadas as quatro integrais ao longo dos caminhos que definem  $\gamma$ , obtemos

$$\oint_{\gamma} x^2 y^3 dx - xy^2 dy = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}.$$

A partir dos conceitos de integrais revistos brevemente nesta seção, definiremos, na próxima seção, a integral complexa ao longo de um caminho, que é muito semelhante à integral de linha no plano cartesiano.

## 3.2 Integração no plano complexo

Um caminho em  $\mathbb{C}$  é uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . A imagem  $\gamma([a, b])$  é uma curva no plano  $\mathbb{C}$  e, por abuso de linguagem, também pode ser denominada caminho.

Suponhamos que as funções de valores reais  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , sejam equações paramétricas do caminho  $\gamma$  no plano complexo definido em  $[a, b]$ . Assim,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Uma **parametrização** de  $\gamma$  em  $\mathbb{C}$  é dada por

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (3.5)$$

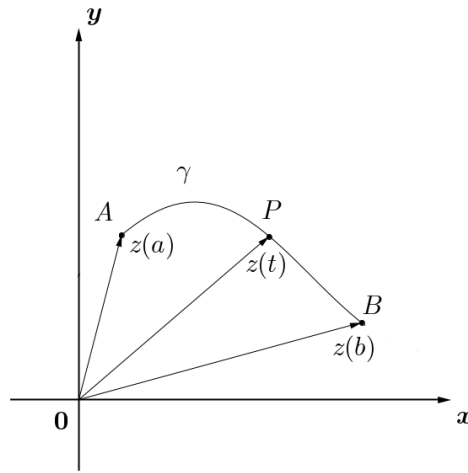


Figura 3.7:  $z(t) = x(t) + iz(t)$ .

**Exemplo 3.7.** As equações paramétricas  $x(t) = r \cos t$  e  $y(t) = r \sin(t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $r > 0$ , descrevem uma circunferência de raio  $r$  centrada na origem. Uma parametrização desta circunferência em  $\mathbb{C}$  é:

$$z(t) = r \cos t + i r \sin t = r e^{it}.$$

No intervalo  $[a, b]$ , dizemos que  $z(a) = x(a) + i y(a)$  é o **ponto inicial** e  $z(b) = x(b) + i y(b)$  é o **ponto terminal** do caminho  $\gamma$ . Para cada valor de  $t$  no intervalo considerado,  $z(t)$  pode ser interpretado como um vetor posição no plano complexo.

Geometricamente, à medida que  $t$  varia de  $a$  a  $b$ , o caminho  $\gamma$  é percorrido pela extremidade  $z(t)$ .

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho, então  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t) \quad (3.6)$$

é chamado o caminho **reverso** de  $\gamma$ . Notemos que  $\gamma$  e  $-\gamma$  têm a mesma trajetória, mas orientações opostas.

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\mu : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  são caminhos tais que  $\gamma(b) = \mu(c)$ , então o caminho  $\gamma + \mu : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$(\gamma + \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ \mu(t - b + c) & \text{se } b \leq t \leq b + d - c \end{cases} \quad (3.7)$$

é chamado a **soma** de  $\gamma$  e  $\mu$ .

Agora, suponhamos que exista a derivada de (3.5) em  $a \leq t \leq b$ . Então,

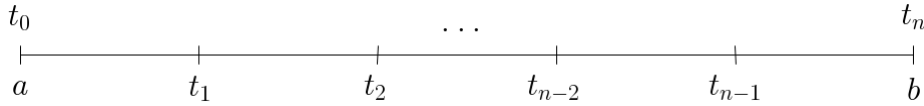
$$z'(t) = x'(t) + i y'(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (3.8)$$

Se  $z'$  for contínua e diferente de zero em  $a \leq t \leq b$ , diremos que o caminho  $\gamma$  é **suave**. Podemos interpretar  $z'(t)$ , quando este valor é não nulo em qualquer ponto  $P$  pertencente à curva  $\gamma([a, b])$ , como o vetor tangente à  $\gamma$  no ponto  $P$ .

As definições de caminho suave por partes, caminho simples, caminho fechado e caminho fechado simples no plano complexo coincidem com as definições apresentadas na seção anterior.

Para definirmos a integral complexa ao longo de um caminho suave por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , consideremos, primeiramente,  $f$  uma função a valores complexos definida em todos os pontos de  $\gamma([a, b])$  e  $z(t) = x(t) + i y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , uma parametrização de  $\gamma$ . Seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{k-1}, t_k]$  de comprimento  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ . Geometricamente, a partição  $P$  é dada por

A partição  $P$  induz uma partição na curva  $\gamma([a, b])$  em  $n$  sub-arcos no plano

Figura 3.8: Partição de  $[a, b]$ .

complexo em que os pontos inicial e terminal são os pares de números complexos:

$$z_0 = x(t_0) + i y(t_0) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{inicial} \end{pmatrix}, \quad z_1 = x(t_1) + i y(t_1) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{terminal} \end{pmatrix}$$

$$z_1 = x(t_1) + i y(t_1) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{inicial} \end{pmatrix}, \quad z_2 = x(t_2) + i y(t_2) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{terminal} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = x(t_{n-1}) + i y(t_{n-1}) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{inicial} \end{pmatrix}, \quad z_n = x(t_n) + i y(t_n) \begin{pmatrix} \text{Ponto} \\ \text{terminal} \end{pmatrix}.$$

O comprimento do sub-arco definido por  $z_k$  e  $z_{k-1}$  é  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sejam  $\|P\|$  a norma da partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$ , que é o comprimento do maior subintervalo de  $[a, b]$  determinado por  $P$ , e  $z_k^* = x_k^* + i y_k^*$  um ponto em cada sub-arco da curva  $\gamma([a, b])$ .

Agora, formemos os produtos da forma  $f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , e os somemos. Assim,

$$f(z_1^*) \Delta z_1 + f(z_2^*) \Delta z_2 + \dots + f(z_n^*) \Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(z_k^*) \Delta z_k.$$

A partir desta soma, vamos definir a integral complexa de  $f$  em  $\gamma$ .

**Definição 3.8.** A integral de  $f$  ao longo do caminho  $\gamma$  é

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k^*) \Delta z_k. \quad (3.9)$$

Dizemos que  $f$  é **integrável em**  $\gamma$  quando o limite no segundo membro da



igualdade em (3.9) existe.

### 3.2.1 Integração de funções complexas de uma variável real

Nesta subseção, exibiremos o conceito de integral para funções complexas de uma variável real,  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , e algumas de suas propriedades.

**Definição 3.9.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $a < b$ . Escrevemos  $f$  em termos de suas partes real e imaginária:*

$$f = u + iv.$$

*Dizemos que  $f$  é **integrável** em  $[a, b]$  quando as funções reais  $u$  e  $v$  são integráveis em  $[a, b]$  e definimos, neste caso, a **integral de  $f$  em  $[a, b]$**  por*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt. \quad (3.10)$$

**Exemplo 3.10.** Seja  $f(t) = 2t + i(4t - 1)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Calculemos a integral de  $f$  neste intervalo, utilizando Definição 3.9. Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_0^1 [2t + i(4t - 1)] dt &= \int_0^1 2t dt + i \int_0^1 (4t - 1) dt \\ &= 2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + i \left[ \frac{4t^2}{2} - t \right]_0^1 = 1 + i. \end{aligned}$$

Apresentaremos a seguir as já conhecidas propriedades das integrais de funções reais de uma variável real.

**Proposição 3.11.** *Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  são funções integráveis,  $k \in \mathbb{C}$  e  $c \in (a, b)$ , então:*

(i)  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt;$$

(ii)  $kf$  é integrável e

$$\int_a^b kf(t) dt = k \int_a^b f(t) dt;$$

(iii)  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$  e

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt;$$

(iv)  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

*Demonstração.* As provas de (i), (ii) e (iii) são realizadas escrevendo as funções  $f$  e  $g$  em termos de suas partes real e imaginária e aplicando as propriedades correspondentes para funções reais.

(iv) Escrevamos  $f = u + iv$ . Como  $f$  é integrável, temos que as funções reais  $u$  e  $v$  são integráveis em  $[a, b]$ . Portanto,  $u^2 + v^2$  é integrável em  $[a, b]$ . Como a função  $x \in [0, +\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  é contínua, então a função  $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$  também é integrável em  $[a, b]$ , pois a composta de funções reais integráveis é também uma função integrável (veja [4], Teorema 7.2.5).

Agora, vamos mostrar que  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .

Se  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , a desigualdade é evidente. Suponhamos que  $\int_a^b f(t) dt \neq 0$  e chamemos  $k = e^{-i\theta}$ , em que  $\theta = \text{Arg} \left( \int_a^b f(t) dt \right)$ . Dessa forma, temos

$$|k| = 1 \quad \text{e} \quad k \int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= k \int_a^b f(t) dt \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_a^b k f(t) dt \\ &= \text{Re} \int_a^b k f(t) dt \\ &= \int_a^b \text{Re}[k f(t)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &\leq |z|, \forall z \in \mathbb{C} \\
&\leq \int_a^b |kf(t)| dt \\
&= \int_a^b |f(t)| dt.
\end{aligned}$$

□

Outras propriedades de integral de uma função complexa de uma variável real são facilmente demonstradas ao escrever a função em termos de suas partes real e imaginária e aplicar resultados correspondentes para funções reais, tais como as que serão enunciadas abaixo.

**Proposição 3.12.**

(i) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável, então a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

é contínua. Ademais, se  $f$  é contínua em um ponto  $c \in [a, b]$ , então  $F$  é diferenciável em  $c$  e

$$F'(c) = f(c).$$

(ii) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável e  $f'$  é integrável em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

(iii) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua e se  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável, com  $g'$  integrável em  $[c, d]$  e  $g([c, d]) \subset [a, b]$ , então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(s) ds = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt.$$

### 3.3 Integral complexa ao longo de um caminho

Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho suave,  $|\gamma| = \gamma([a, b])$ <sup>1</sup> a imagem de  $\gamma$  e  $f$  uma função complexa definida e contínua em  $|\gamma|$ . Definimos a integral de  $f$  sobre  $\gamma$  por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (3.11)$$

Suponhamos que  $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$  e  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Então,  $\gamma'(t) = x'(t) + i y'(t)$  e  $f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))$ . Fazendo  $f(\gamma(t)) \gamma'(t)$ , temos

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))] [x'(t) + i y'(t)] \\ &= u(x(t), y(t)) x'(t) + i u(x(t), y(t)) y'(t) + \\ &\quad + i v(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] + \\ &\quad + i [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)] dt. \end{aligned}$$

Considerando  $dx = x'(t) dt$  e  $dy = y'(t) dt$ , podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma simplificada:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy.$$

---

<sup>1</sup>Apesar de que  $|z|$  e  $|\gamma|$  tenham a mesma notação, o primeiro refere-se ao afixo do número complexo  $z$  e o segundo, à imagem do caminho  $\gamma$ .

Assim, as partes real e imaginária da integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  são as integrais de linha reais  $\int_{\gamma} u dx - v dy$  e  $\int_{\gamma} v dx + u dy$ .

**Exemplo 3.13.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} (x^2 + i y^3) dz$ , em que  $\gamma$  é o segmento de reta de  $z = 1$  a  $z = i$  (Veja Figura 3.9).

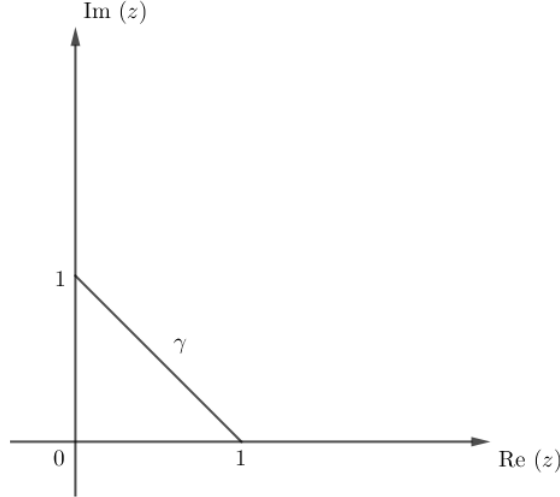


Figura 3.9: Caminho  $\gamma$  do Exemplo 3.13.

Temos que  $u(x, y) = x^2$ ,  $v(x, y) = y^3$  e  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , em que  $x(t) = t$  e  $y(t) = 1 - t$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Como  $x'(t) = 1$  e  $y'(t) = -1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (x^2 + i y^3) dz &\stackrel{(3.11)}{=} \int_0^1 [t^2 \cdot 1 - (1-t)^3 \cdot (-1)] dt + i \int_0^1 [(1-t)^3 \cdot 1 + t^2 \cdot (-1)] dt \\
 &= \int_0^1 [t^2 + (1-t)^3] dt + i \int_0^1 [(1-t)^3 - t^2] dt \\
 &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1-t)^3 dt + i \int_0^1 (1-t)^3 dt - i \int_0^1 t^2 dt \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + i \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} i.
 \end{aligned}$$

No Exemplo 3.13,  $\gamma$  é um segmento de reta de  $z = 1$  a  $z = i$  e suas interseções

com os eixos real e imaginário formam um triângulo retângulo de catetos iguais a 1. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento de  $\gamma$  é igual a  $\sqrt{2}$ . Porém, nem todo caminho é um segmento de reta.

Denotaremos o **comprimento de um caminho suave**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\ell(\gamma)$  e o definiremos por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (3.12)$$

Ao longo de  $\gamma$ , temos que  $dx = x'(t)dt$  e  $dy = y'(t)dt$  e, portanto,  $dz = (x'(t) + iy'(t))dt$ . Usando essas relações, podemos dizer que  $|dz| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$  e então

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|.$$

No Exemplo 3.13, temos que

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \stackrel{(3.12)}{=} \int_0^1 \sqrt{1^2 + (-1)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2},$$

conforme já havíamos concluído.

**Exemplo 3.14.** Se  $\gamma$  é o círculo de raio  $r$ ,  $r > 0$ , orientado no sentido positivo, em que suas equações paramétricas são dadas por  $x(t) = r \cos t$  e  $y(t) = r \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , então seu comprimento é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt \stackrel{(3.12)}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r. \end{aligned}$$

No cálculo da integral do Exemplo 3.13, utilizamos propriedades que serão demonstradas a seguir.

**Proposição 3.15.** Se  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  são funções contínuas em  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ,  $\mu : [c, d] \rightarrow A$  são caminhos suaves por partes em  $A$  e  $k \in \mathbb{C}$ , então

- (i)  $\int_{\gamma} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz;$
- (ii)  $\int_{\gamma} kf(z) dz = k \int_{\gamma} f(z) dz;$
- (iii)  $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$
- (iv)  $\int_{\gamma+\mu} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\mu} f(z) dz$ , se o caminho  $\gamma + \mu$  estiver definido.

*Demonstração.* (i) De (3.11) e da Proposição 3.11-(i), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [f(z) + g(z)] dz &= \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt \\ &= \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + \int_a^b [g(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz. \end{aligned}$$

(ii) De (3.11) e da Proposição 3.11-(ii), segue que

$$\int_{\gamma} kf(z) dz = \int_a^b [kf(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt = k \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt = k \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(iii) Como  $-\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$  (veja (3.6)), temos que

$$(-\gamma)'(t) = -\gamma'(b + a - t) \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Fazendo a mudança de variável  $s = b + a - t$ , segue da Proposição 3.12-(iii) que

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_a^b [f(\gamma(b + a - t)) \gamma'(b + a - t)] dt = \int_b^a [f(\gamma(s)) \gamma'(s)] ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(iv) Suponhamos que  $\gamma + \mu$  está definida, ou seja, que  $\gamma(b) = \mu(c)$ . Pela definição de  $\gamma + \mu$  no intervalo  $[a, b]$  (veja (3.7)), temos que

$$(\gamma + \mu)'(t) = \gamma'(t),$$

exceto no conjunto finito de pontos nos quais  $\gamma'$  não existe. De forma similar, no intervalo  $[b, b + d - c]$ , temos

$$(\gamma + \mu)'(t) = \mu'(t - b + c),$$

exceto num número finito de pontos. Então, pela Proposição 3.11-(iii), temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma+\mu} f(z) dz &= \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + \int_b^{b+d-c} [f(\mu(t-b+c)) \mu'(t-b+c)] dt \\ &= \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + \int_c^d [f(\mu(t)) \mu'(t)] dt \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\mu} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

No que segue, as propriedades demonstradas acima serão utilizadas sem serem mencionadas.

**Exemplo 3.16.** Calculemos a integral da função  $f(z) = z^2$  ao longo do caminho  $\gamma(t) = t^2 + it$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Como  $\gamma'(t) = 2t + i$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^1 [(t^2 + it)^2(2t + i)] dt = \int_0^1 [(2t^5 - 4t^3) + i(5t^4 - t^2)] dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3) dt + i \int_0^1 (5t^4 - t^2) dt = \left[ \frac{2t^6}{6} - t^4 \right]_0^1 + i \left[ t^5 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 1 + i \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

Veremos um resultado análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Riemann o que torna o cálculo da integral do Exemplo 3.16 mais simples. Para exibir tal resultado, apresentaremos um conceito preliminar.



**Definição 3.17.** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos que uma função  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  é uma **primitiva** de  $f$  se  $F$  é analítica em  $A$  e  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in A$ .*

**Exemplo 3.18.**  $F(z) = \frac{z^3}{3}$  é uma primitiva da função  $f(z) = z^2$  em  $\mathbb{C}$ , pois  $F$  é analítica em  $\mathbb{C}$  e  $F'(z) = z^2$ .

**Teorema 3.19.** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua e  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $A$ . Para todo caminho suave por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , temos que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em dois casos.

*Caso 1:*  $\gamma$  é um caminho suave.

Definamos  $H(t) = F(\gamma(t))$ , para  $t \in [a, b]$ . Então,  $H$  é a composta de duas funções diferenciáveis em todos os pontos de seus respectivos domínios. Pela Regra da Cadeia, temos

$$H'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \quad \text{para todo } t \in [a, b],$$

de onde se observa que  $H'$  é uma função contínua. Pela Proposição 3.12-(ii), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b H'(t) dt = H(b) - H(a) = \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

*Caso 2:*  $\gamma$  é um caminho suave por partes.

Neste caso existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de  $[a, b]$  tal que, para cada  $1 \leq k \leq n$ , a restrição  $\gamma_k$  de  $\gamma$  a  $[t_{k-1}, t_k]$  é um caminho suave e  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ . Pela Proposição 3.15-(iv) e pelo Caso 1, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\gamma_n(t)) \gamma_n'(t) dt \\
&= F(\gamma_1(t_1)) - F(\gamma_1(t_0)) + F(\gamma_2(t_2)) - F(\gamma_2(t_1)) + \dots + F(\gamma_n(t_n)) - F(\gamma_n(t_{n-1})) \\
&= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + \dots + F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1})) \\
&= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + \dots + F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1})) \\
&= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.20.** Usando o Teorema 3.19, podemos simplificar o cálculo da integral do Exemplo 3.16, visto que  $F(z) = \frac{z^3}{3}$  é uma primitiva da função  $f(z) = z^2$ . Com efeito, como  $F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1+i) - F(0)$ , temos

$$\int_{\gamma} z^2 dz = F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2i-2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

**Definição 3.21.** Um conjunto aberto não vazio  $A$  no plano  $\mathbb{C}$  é dito **simplesmente conexo** quando, para todo caminho fechado  $\gamma \subset R$ , a região limitada por  $\gamma$  está contida em  $A$ .

Os conjuntos dos números reais  $\mathbb{R}$  e dos números complexos  $\mathbb{C}$  são exemplos de conjuntos simplesmente conexos. *Grosso modo*, um conjunto simplesmente conexo não apresenta buracos. O disco  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  é um conjunto simplesmente conexo (Ver Figura 3.10).

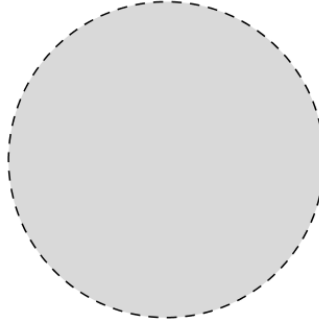


Figura 3.10: Disco  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

O próximo resultado é bem conhecido no caso de funções reais definidas num intervalo da reta.

**Teorema 3.22.** *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto e simplesmente conexo e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $f'(z) = 0$ , para todo  $z \in A$ , então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Fixemos um ponto  $z_0 \in A$ . Dado  $z \in A$ , seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  um caminho suave por partes, de modo que  $\gamma(0) = z_0$ ,  $\gamma(1) = z$  e  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ . Compondo  $f$  e  $\gamma$ , temos que a função  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  é o caminho suave por partes  $f \circ \gamma = (f \circ \gamma_1) + (f \circ \gamma_2) + \dots + (f \circ \gamma_n)$ .

Escrevendo  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ , para  $z = (x, y) \in A$ , e  $\gamma_i(t) = x_i(t) + i y_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para  $t \in [0, 1]$ , segue que

$$(f \circ \gamma_i)(t) = u(x_i(t), y_i(t)) + i v(x_i(t), y_i(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Notemos que as funções  $\eta(t) = u(x_i(t), y_i(t))$  e  $\varphi(t) = v(x_i(t), y_i(t))$  são funções reais da variável real  $t$ . Aplicando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\eta'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i(t), y_i(t)) x_i'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_i(t), y_i(t)) y_i'(t)$$

e

$$\varphi'(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_i(t), y_i(t)) x_i'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_i(t), y_i(t)) y_i'(t).$$

Da analiticidade de  $f$ , segue que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

ou

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Como  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in A$  e valem as equações de Cauchy-Riemann, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Logo,  $\eta'(t) = 0$  e  $\varphi'(t) = 0$ . Portanto, do Cálculo de uma variável real, constatamos que as funções  $\eta$  e  $\varphi$  são constantes. Digamos que  $\eta(t) = x_0$  e  $\varphi(t) = y_0$ . Como  $(f \circ \gamma_1)(t) = \eta(t) + i\varphi(t)$ , segue que  $f \circ \gamma_i$  é constante para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a saber  $(f \circ \gamma_i)(t) = x_0 + iy_0$ .

Uma vez que o ponto inicial de  $\gamma_{i+1}$  é o ponto terminal de  $\gamma_i$ , temos que  $f(z_0) = (f \circ \gamma_1)(0) = (f \circ \gamma_n)(1) = f(z)$ . Como  $z$  é um ponto arbitrário de  $A$ , concluímos que  $f(z) = f(z_0)$ , para todo  $z \in A$ , ou seja,  $f$  é constante em  $A$ .  $\square$

Voltando ao Teorema 3.19, ressaltamos que a integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

independe do percurso, dependendo apenas de  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ . Portanto, se  $\gamma$  for um caminho fechado, então  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \tag{3.13}$$

pois obviamente  $F(\gamma(a)) = F(\gamma(b))$ .

Se  $f$  for uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  e  $f'$  for uma função contínua nesse domínio, teremos a validade de (3.13) para todo caminho fechado simples em  $A$ . Isto é o que nos diz o *Teorema de Cauchy*. Esse resultado é uma consequência direta do *Teorema de Green*, visto em cursos de Cálculo, que passamos a enunciar.

**Teorema 3.23** (de Green). *Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  funções reais de classe  $C^1$  definidas em um conjunto aberto e simplesmente conexo  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\gamma$  for um caminho fechado simples, com orientação positiva, que forma a fronteira de uma*

região  $D$  no interior de  $A$ , então

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

A prova do Teorema de Green pode ser encontrada em [12], páginas 424 e 488, e em [2], página 380.

**Teorema 3.24** (de Cauchy). *Sejam  $f$  uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  em  $\mathbb{C}$  e  $f'$  contínua em  $A$ . Para todo caminho  $\gamma$  fechado simples em  $A$ , tem-se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Green, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

em que  $D$  é uma região interna à  $\gamma$ .

Como  $f$  é analítica em  $R$ , as funções reais  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (veja o Teorema 2.34). Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D 0 dx dy + i \iint_D 0 dx dy = 0. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.25.** Consideremos a função  $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$  e o caminho  $\gamma$  sendo o círculo  $|z| = \frac{3}{2}$ . Note que  $f$  é analítica em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  exceto em  $z = -2i$  e que esse ponto não está na região delimitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

e nem na fronteira. Então, pelo Teorema de Cauchy, concluímos que

$$\int_{\gamma} \frac{3z^2}{z+2i} dz = 0.$$

Em 1883, o matemático francês Édouard Goursat provou que a continuidade de  $f'$  não é necessária para chegarmos na conclusão do Teorema de Cauchy. A versão modificada do Teorema de Cauchy ficou conhecida por *Teorema de Cauchy - Goursat*:

**Teorema 3.26** (de Cauchy-Goursat). *Sejam  $f$  uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  em  $\mathbb{C}$ . Para todo caminho  $\gamma$  fechado e simples em  $A$ , tem-se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Neste caso, a demonstração requer um tratamento bem mais extenso, que pode ser analisado em [1] e [9], por exemplo. Porém, veremos adiante que uma função analítica tem derivadas de todas as ordens e, portanto, todas essas derivadas são contínuas, em particular a primeira delas. Dessa forma, a demonstração de Goursat tem interesse apenas teórico. Forneceremos aqui a demonstração do Teorema de Cauchy - Goursat para triângulos e a prova do Teorema 3.24 para o caso em que a função é analítica definida num domínio estrelado (conceito este que proveremos na sequência) e  $\gamma$  é um caminho fechado suave por partes. Mas antes, demonstraremos um resultado auxiliar.

**Lema 3.27** (Desigualdade ML). *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua,  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  um caminho suave por partes e  $\ell(\gamma)$  seu comprimento. Se  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z$  em  $\gamma$ , em que  $M$  é uma constante real positiva, então*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M\ell(\gamma).$$

*Demonstração.* Usando as propriedades de integral ao longo de um caminho já

vistas, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b [f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt = \int_a^b [|f(\gamma(t))| |\gamma'(t)|] dt \\ &\leq \int_{\gamma} [M |\gamma'(t)|] dt = M \int_{\gamma} |\gamma'(t)| dt = M \ell(\gamma). \end{aligned}$$

□

**Definição 3.28.** Dizemos que um subconjunto não vazio  $A$  de  $\mathbb{C}$  é um **domínio** se  $A$  é aberto e dados quaisquer dois pontos  $p$  e  $q$  em  $A$ , existe um caminho suave por partes, inteiramente contido em  $A$ , cujos pontos inicial e terminal são, respectivamente,  $p$  e  $q$ .

**Teorema 3.29** (de Cauchy - Goursat para triângulos). *Sejam  $A$  um domínio em  $\mathbb{C}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $\Delta$  é um triângulo que limita uma região inteiramente contida em  $A$ , então*

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0. \quad (3.14)$$

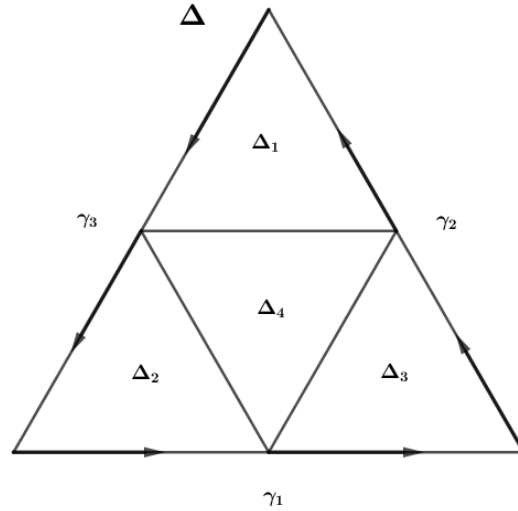
*Demonstração.* A princípio munimos o triângulo  $\Delta$  da orientação compatível com a região por ele limitada, isto é, o sentido de percurso é o anti-horário. O triângulo  $\Delta$  é um caminho suave por partes descrito pela justaposição dos caminhos  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , como na Figura 3.11. Tomando os três pontos médios dos lados de  $\Delta$  e unindo-os por segmentos de reta, dividimos  $\Delta$  em quatro triângulos  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Orientando cada triângulo  $\Delta_i$  com a mesma orientação de  $\Delta$ , temos que

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \int_{\Delta_3} f(z) dz + \int_{\Delta_4} f(z) dz. \quad (3.15)$$

Cada integral do lado direito da igualdade é um número complexo. Escolhendo dentre esses números o que tem maior módulo e denotando por  $\Delta^{(1)}$  o triângulo correspondente, obtemos

$$\left| \int_{\Delta_i} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|, \quad (3.16)$$

Figura 3.11: Caminho triangular  $\Delta$ .

para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dessa forma, concluímos que

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\Delta_i} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|. \quad (3.17)$$

Ademais, da geometria elementar, é sabido que existe uma relação entre o perímetro de cada um dos triângulos  $\Delta_i$  (o comprimento  $l(\Delta_i)$ ) e o perímetro  $l(\Delta)$ , a saber:

$$l(\Delta_i) = \frac{1}{2} l(\Delta), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Em particular, temos que

$$l(\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2} l(\Delta).$$

Chamando de  $\varphi_i$  o lado de  $\Delta_i$  de maior comprimento e de  $\varphi$  o lado de  $\Delta$  de maior comprimento, temos também as igualdades

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \varphi, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

de onde segue que

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2} \varphi.$$

Repetimos o procedimento descrito acima para o triângulo  $\Delta^{(1)}$ , ou seja,



dividimo-lo em quatro novos triângulos, obtidos a partir dos pontos médios de cada um de seus lados, adotamos o sentido de percurso anti-horário para cada um deles e calculamos as quatro integrais correspondentes. Escolhemos dentre elas a que tem maior módulo e denotamos por  $\Delta^{(2)}$  o triângulo correspondente. Assim,

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\Delta_i} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right|, \quad (3.18)$$

$$l(\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2} l(\Delta^{(1)})$$

e

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \varphi^{(1)}.$$

Das desigualdades (3.17) e (3.18), segue que

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right|. \quad (3.19)$$

Repetindo o procedimento acima  $n$  vezes, obtemos uma sequência de caminhos triangulares  $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}$ , tal que  $\Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots \supset \Delta^{(n)}$ ,

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right|, \quad (3.20)$$

$$l(\Delta^{(n)}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n l(\Delta)$$

e

$$\varphi^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varphi.$$

Pelo Teorema da Interseção de Cantor (veja [13], Teorema 26.9), existe um ponto  $z_0 \in A$  comum a todas regiões limitadas pelos triângulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Da analiticidade de  $f$ , existe  $f'(z_0)$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos obter  $\delta > 0$  tal que  $D(z_0, \delta) \subset A$  e

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (3.21)$$

Chamando  $\eta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$ , para  $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ , segue que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\eta(z), \quad \text{para } z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}.$$

Escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de tal modo que  $\varphi^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varphi < \delta$ , temos que a região limitada por  $\Delta^{(n)}$  está contida em  $D(z_0, \delta)$ , visto que  $z_0 \in \Delta^{(n)}$ .

Calculando a integral de  $f$  com relação ao caminho  $\Delta^{(n)}$ , temos

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = f(z_0) \int_{\Delta^{(n)}} dz + f'(z_0) \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) dz + \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0)\eta(z) dz. \quad (3.22)$$

Notemos que, pelo Teorema 3.24, podemos inferir que  $\int_{\Delta^{(n)}} dz = 0$  e  $\int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) dz = 0$ , uma vez que  $\Delta^{(n)}$  é um caminho fechado em  $A$ . Portanto, 3.22 se reduz a

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0)\eta(z) dz. \quad (3.23)$$

Para  $z$  em  $\Delta^{(n)}$ , temos  $|z - z_0| < \varphi^{(n)} = \frac{1}{2^n} \varphi < \delta$ . Portanto, de (3.21), (3.23) e do Lema 3.27 segue que

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0)\eta(z) dz \right| < \frac{1}{2^n} \varphi \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \varphi = \frac{\varepsilon}{4^n} \varphi^2. \quad (3.24)$$

De (3.20) e (3.24), obtemos

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| < 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{4^n} \varphi^2 = \varepsilon \varphi^2. \quad (3.25)$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, concluímos por 3.25 que

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0,$$

o que completa a prova. □

**Definição 3.30.** Dizemos que um subconjunto não vazio  $A$  de  $\mathbb{C}$  é um **domínio estrelado** se

- i)  $A$  é um domínio (veja Definição 3.28);
- ii) existe um ponto  $z_0 \in A$  que goza da seguinte propriedade: dado qualquer ponto  $z \in A$ , o segmento de reta unindo  $z_0$  a  $z$ , denotado  $\overrightarrow{z_0 z}$ , está inteiramente contido em  $A$ . O ponto  $z_0$  é denominado **centro** do domínio  $A$ .

Exemplos de domínios estrelados são: um disco  $D \subset \mathbb{C}$ , o plano  $\mathbb{C}$  e, mais geralmente, qualquer subconjunto aberto convexo  $R \subset \mathbb{C}$ .

Na sequência, mostraremos a existência de primitivas em domínios estrelados.

**Lema 3.31.** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica e  $A \subset \mathbb{C}$  é um domínio estrelado, então  $f$  admite uma primitiva em  $A$ .

*Demonstração.* Seja  $z_0$  um centro de  $A$  e definamos a função

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\beta) d\beta, \quad z \in A.$$

Claramente,  $F$  está bem definida em  $A$ . Resta-nos mostrar que  $F$  é derivável e  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in A$ . Para tal, tomemos  $h \in \mathbb{C}$  com  $|h|$  suficientemente pequeno de tal forma que  $z + h \in A$  e o segmento que une  $z$  a  $z + h$ ,  $\overrightarrow{z z+h}$ , esteja contido em  $A$ .

Considerando que  $z_0$ ,  $z$  e  $z + h$  são vértices de um triângulo  $\Delta$  que está inteiramente contido em  $A$  e limita uma região também contida em  $A$ , temos pelo Teorema de Cauchy-Goursat 3.29 que

$$\int_{\Delta} f(\beta) d\beta = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} f(\beta) d\beta &= \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\beta) d\beta + \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(\beta) d\beta + \int_{\overrightarrow{z+h z_0}} f(\beta) d\beta \\ &= \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\beta) d\beta + \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(\beta) d\beta - \int_{\overrightarrow{z_0 z+h}} f(\beta) d\beta, \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_{\overrightarrow{z_0 z+h}} f(\beta) d\beta - \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\beta) d\beta = \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(\beta) d\beta,$$

que equivale a

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(\beta) d\beta.$$

Notemos que  $h \cdot f(z) = \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(z) d\beta$ . Portanto,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z z+h}} [f(\beta) - f(z)] d\beta.$$

Como  $f$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $|\beta - z| < \delta$  implica  $|f(\beta) - f(z)| < \varepsilon$ . Assim, se  $0 < |h| < \delta$  temos, pelo Lema 3.27, que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\overrightarrow{z z+h}} [f(\beta) - f(z)] d\beta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{\overrightarrow{z z+h}} |f(\beta) - f(z)| |d\beta| \\ &< \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que  $F'(z) = f(z)$  e  $F$  é uma primitiva de  $f$ . □

**Teorema 3.32** (de Cauchy - Goursat). *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio estrelado e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $\gamma$  é um caminho fechado e suave por partes em  $A$ , então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (3.26)$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.31  $f$  possui primitiva em  $A$  e pelo Teorema 3.19 segue

que  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

□

O próximo resultado facilitará o cálculo de algumas integrais.

**Teorema 3.33** (Princípio da Deformação de Caminhos). *Sejam  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  caminhos fechados simples tais que  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  estão contidos no interior de  $\gamma_0$  e são dois a dois exteriores um ao outro. Veja a Figura 3.12.*

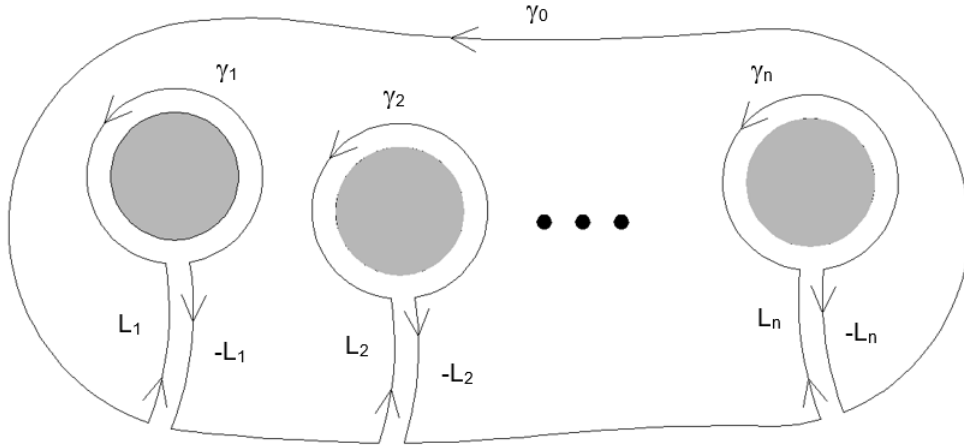


Figura 3.12: Princípio da Deformação de Caminhos.

Seja  $f$  uma função complexa de uma variável complexa. Se a região compreendida entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , juntamente com esses caminhos, estiver contida na região em que  $f$  é analítica, então

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz, \quad (3.27)$$

desde que todos os caminhos tenham a mesma orientação.

**Justificação:** Um tratamento completo deste teorema requer o uso de conceitos topológicos que não serão explorados aqui. Em casos simples, conforme ilustra a Figura 3.12, justifica-se o teorema introduzindo cortes  $L_1$  e  $L_{-1}$ ,  $L_2$  e  $L_{-2}$ ,  $\dots$ ,  $L_n$  e  $L_{-n}$  que ligam  $\gamma_0$  a  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , respectivamente, todos contidos em uma região  $A$ . O caminho assim obtido,  $\gamma_0 \cup L_1 \cup (-\gamma_1) \cup (-L_1) \cup \dots \cup L_n \cup (-\gamma_n) \cup (-L_n)$ , envolve uma região simplesmente conexa e, pelo Teorema de Cauchy-Goursat 3.26,

a integral ao longo dele é nula. Assim, como as integrais ao longo de  $L_1$  e  $L_{-1}$ ,  $L_2$  e  $-L_2$ ,  $\dots$ ,  $L_n$  e  $L_{-n}$  cancelam-se aos pares, obtemos

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \dots - \int_{\gamma_n} f(z) dz = 0.$$

Em particular, quando  $n = 1$ , temos

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Neste caso, dizemos que estamos deformando o caminho de integração  $\gamma_0$  no caminho  $\gamma_1$ .

**Exemplo 3.34.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  em que  $\gamma$  é o caminho da Figura 3.34.

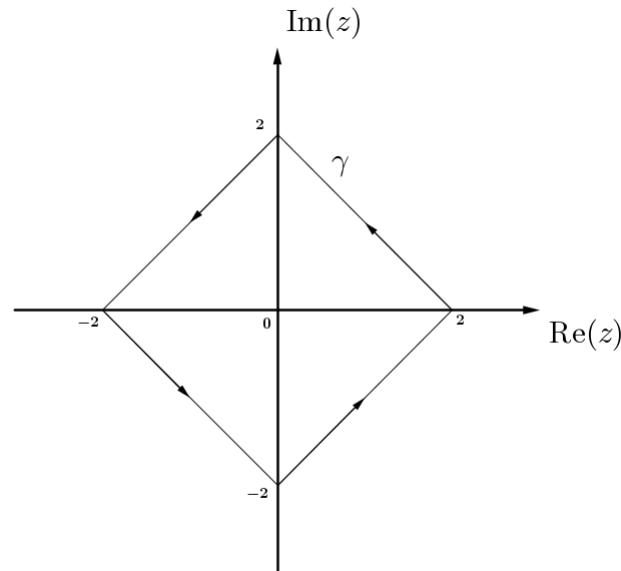


Figura 3.13: Caminho  $\gamma$  do Exemplo 3.34.

Pelo Princípio da Deformação de Caminhos, podemos integrar a função  $f$  ao longo de um caminho mais conveniente. Notemos que  $f$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Um caminho  $\gamma_1$  mais conveniente que torna satisfeitas todas as hipóteses do Teorema 3.33 é a circunferência centrada na origem de raio igual 1, que está no interior de

$\gamma$ . Assim, como  $\gamma_1(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i [t]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

O próximo resultado estabelece o valor de uma função num ponto  $z_0$  em função de uma integral ao longo de um caminho.

**Teorema 3.35** (Fórmula Integral de Cauchy). *Se  $f$  é uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  e  $\gamma$  é um caminho fechado e simples inteiramente contido em  $A$ , então, para qualquer ponto  $z_0$  no interior de  $\gamma$ , tem-se*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

*Demonstração.* Seja  $\gamma_1$  uma circunferência centrada em  $z_0$  no interior de  $\gamma$ .

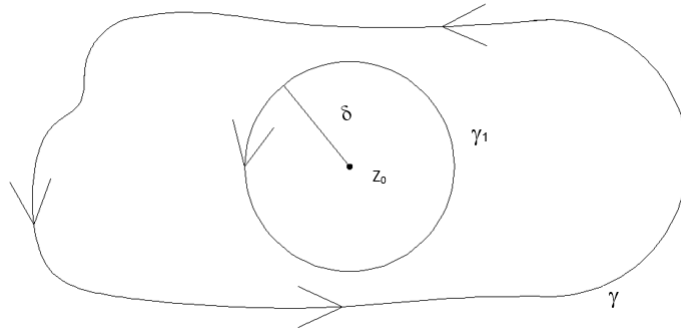


Figura 3.14: Fórmula Integral de Cauchy.

Pelo Princípio da Deformação de Caminhos (Teorema 3.33), temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Na integral do lado direito, temos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz.\end{aligned}$$

Afirmamos que  $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ . De fato, digamos que  $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $\gamma'_1(t) = ire^{it} dt$ , segue que

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z_0} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Portanto,

$$f(z_0) \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

e

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Como  $f$  é contínua em  $z_0$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|z - z_0| < \delta$  implica  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Se escolhermos  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$ , com  $r < \delta$ , pela Desigualdade ML (Lema 3.27), obtemos

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma_1} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{\varepsilon}{r} \int_{\gamma_1} |dz| = \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi \cdot r = 2\pi\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, podemos concluir que

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Por conseguinte,

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0),$$

ou, equivalentemente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



□

**Exemplo 3.36.** Determinemos o valor de  $\int_{|z-1|=2} \frac{z}{z-2} dz$ . Neste caso, temos que  $f(z) = z$  e que  $z_0 = 2$  é um ponto interior à circunferência  $|z-1| = 2$ . Como todas as hipóteses do Teorema 3.35 estão satisfeitas, podemos aplicá-lo. Pois bem,

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z}{z-2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \cdot (2) = 4\pi i.$$

**Teorema 3.37** (Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas). *Se  $f$  é uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  e  $\gamma$  é um caminho fechado e simples inteiramente contido em  $A$ , então  $f$  tem derivada de todas as ordens em  $A$  e, para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $z_0$  no interior de  $\gamma$ , tem-se*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.35, temos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_{\gamma} \left[ \frac{f(z)}{z - z_0 - h} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right] dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)f(z) - (z - z_0 - h)f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_{\gamma} \frac{f(z) \cdot h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

Pela continuidade da  $f$  em  $|\gamma|$ , podemos concluir que existe um número real

positivo  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z$  em  $|\gamma|$ . Considerando  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e escolhendo  $|h| < \frac{r}{2}$ , temos que  $|z - z_0| = r$  e  $|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ .

Assim, aplicando o Lema 3.27, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz \right| &= \left| \int_{\gamma} \frac{h \cdot f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \right| \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{|h||f(z)|}{|z - z_0|^2|z - z_0 - h|} |dz| \\ &< \frac{|h|M}{r^2 \cdot \frac{r}{2}} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{4\pi M|h|}{r^2}. \end{aligned}$$

Ao fazermos  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

uma vez que  $\frac{4\pi M|h|}{r^2} \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Com isso, provamos o resultado para  $n = 1$ . Para obtermos o resultado para as derivadas de ordens superiores, devemos repetir o mesmo processo.  $\square$

**Exemplo 3.38.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z - i)^3} dz$ , em que  $\gamma$  é a circunferência  $|z - i| = 1$ . Pelo Teorema 3.37, temos que  $f(z) = e^{z^2}$ ,  $z_0 = i$  e  $n = 2$ . Assim,  $f'(z) = 2ze^{z^2}$ ,  $f''(z) = 2e^{z^2} + 4z^2e^{z^2}$  e  $f''(i) = 2e^{i^2} + 4i^2e^{i^2} = 2e^{-1} - 4e^{-1} = -2e^{-1}$ . Com essas informações, segue que

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z - i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi i \cdot (-2e^{-1}) = -2e^{-1}\pi i.$$

**Teorema 3.39** (Estimativas de Cauchy). *Suponhamos que  $f$  é uma função analítica em um conjunto aberto simplesmente conexo  $A$  e que a circunferência  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,*

$0 \leq t \leq 2\pi$ , está totalmente contida em  $A$ . Se  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z$  em  $\gamma$ , então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.37, temos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e, pelo Lema 3.27, concluimos que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{|2\pi i|} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

□

Sabemos do Cálculo Diferencial de funções reais que a função trigonométrica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \cos x$ , é derivável para todo  $x$  real e limitada, porém não é constante. O próximo teorema mostra uma surpreendente diferença no caso das funções complexas; toda função analítica e limitada em todo plano é necessariamente constante.

**Teorema 3.40** (Teorema de Liouville). *Se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função inteira e  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ , o Teorema 3.39 estabelece que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}, \quad \text{para todo } r > 0.$$

Fazendo  $r \rightarrow +\infty$ , segue que  $f'(z_0) = 0$ . Portanto,  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , de onde se conclui que  $f$  é uma função constante em  $\mathbb{C}$  (Veja o Teorema 3.22). □

O Teorema de Liouville nos permite demonstrar de forma relativamente simples o Teorema Fundamental da Álgebra.

**Teorema 3.41** (Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio de grau  $n \geq 1$  admite ao menos uma raiz complexa.*

*Demonstração.* Vale observar que, ao dizermos que o grau do polinômio é um número  $n$  maior ou igual a 1, estamos admitindo que o polinômio não é constante.

Seja, pois,  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , em que  $a_n \neq 0$ . Podemos mostrar que  $P$  é uma função diferenciável em todo plano complexo e, portanto, inteira.

Devemos provar que existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ . Suponhamos que isto não ocorra. Então,  $P(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  e  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  define uma função inteira em  $\mathbb{C}$ .

Observemos que  $|f(z)| \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow +\infty$ , já que

$$|P(z)| \geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_0|}{|z|^n} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right),$$

de onde segue que  $|P(z)| \rightarrow +\infty$  quando  $|z| \rightarrow +\infty$ . Assim, podemos tomar  $R > 0$  tal que  $|f(z)| \leq 1$  para  $|z| > R$ . Por outro lado, como  $f$  é contínua, existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para  $|z| \leq R$ . Portanto,  $|f(z)| \leq \max\{1, M\}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , ou seja,  $f$  é limitada. Pelo Teorema de Liouville (Teorema 3.40), temos que  $f$  é constante e, conseqüentemente,  $P$  também o é. Eis, pois, uma contradição. Logo, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .  $\square$

Em seguida, provaremos o Princípio do Módulo Máximo, resultado que afirma que uma função analítica não constante  $f$ , definida num domínio  $A$ , é tal que  $|f|$  não possui valor máximo em  $A$ . Para tal, precisaremos do próximo resultado auxiliar.

**Lema 3.42.** *Sejam  $D(z_0, r)$ ,  $r > 0$ , um disco aberto e  $f : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se a imagem  $f(D(z_0, r))$  está contida num círculo  $|\omega| = \alpha$ , então  $f$  é uma função constante.*

*Demonstração.* Se  $\alpha = 0$ , o resultado é trivial. Suponhamos, pois,  $\alpha > 0$  e escrevemos  $f = u + iv$ . A função  $g(x, y) = |f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$  é constante em  $D(z_0, r)$ , pois é igual a  $\alpha$ , tem derivadas parciais contínuas e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left[ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como valem as Equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

de onde segue que  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$  e  $f'(z) = 0$  em todos os pontos  $z$  de  $D(z_0, r)$ . Pelo Teorema 3.22, concluímos que  $f$  é constante em  $D(z_0, r)$ .  $\square$

**Teorema 3.43** (Princípio do Módulo Máximo). *Sejam  $A$  um conjunto aberto simplesmente conexo em  $\mathbb{C}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se existe um ponto  $z_0 \in A$  tal que  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ , para todo  $z \in A$ , então  $f$  é uma função constante.*

*Demonstração.* Seja  $D(z_0, r)$  um disco centrado em  $z_0$  tal que o fecho  $\overline{D}(z_0, r)$  está contido em  $A$ , com  $r > 0$ . A fronteira de  $D(z_0, r)$  é expressa por  $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Pela Fórmula Integral de Cauchy (Teorema 3.35), temos que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.27 e da hipótese de que  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  para todo  $z \in A$ , obtemos

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot |f(z_0)| \cdot 2\pi = |f(z_0)|,$$

o que implica

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|] d\theta = 0. \quad (3.29)$$

Como o integrando em (3.29) é uma função contínua e não negativa, segue que

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{i\theta})|, \quad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi],$$

de onde concluímos que a imagem de  $D(z_0, r)$  por  $f$  está contida no círculo

$|\omega| = |f(z_0)|$ . Pelo Lema 3.42,  $f$  é uma função constante em  $D(z_0, r)$ . Sendo  $r$  arbitrário, a prova está completa.  $\square$

Finalizamos este capítulo com uma recíproca do Teorema 3.29.

**Teorema 3.44** (de Morera). *Sejam  $A$  um domínio em  $\mathbb{C}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Se  $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$  para todo caminho triangular  $\Delta \subset A$ , então  $f$  é analítica.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $f$  possui derivada em todos os pontos de  $A$ . Com efeito, dado  $z_0 \in A$ , seja  $D(z_0, r)$  um disco aberto centrado em  $z_0$  em  $A$ , com  $r > 0$ . Esse disco é um domínio estrelado. Repetindo a demonstração do Lema 3.31, utilizando  $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$  para  $\Delta \subset D(z_0, r)$ , concluímos que  $f$  tem uma primitiva em  $D(z_0, r)$  e, por conseguinte, é derivável em  $z_0$ . Como  $z_0$  é um ponto arbitrário de  $A$ , o teorema está provado.  $\square$

### 3.4 Exercícios propostos

1. Calcule as integrais reais a seguir.

(a)  $\int_1^4 (5x + \sqrt{x}) dx;$

(h)  $\int_{-\pi}^0 \cos 3x dx;$

(b)  $\int_{-1}^1 e^{2x} dx;$

(i)  $\int_0^1 2x e^{x^2} dx;$

(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx;$

(j)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx;$

(d)  $\int_1^2 (x-2)^5 dx;$

(k)  $\int_1^3 \frac{2x}{1+x^2} dx;$

(e)  $\int_0^1 \sqrt{3x+1} dx;$

(l)  $\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1} dx;$

(f)  $\int_{-3}^4 \sqrt[3]{5-x} dx;$

(m)  $\int_{-2}^1 \frac{3}{4+x} dx;$

(g)  $\int_0^1 (3x+1)^4 dx;$

(n)  $\int_1^3 \frac{2}{5+3x} dx.$

2. Nos itens a seguir, calcule as integrais de linha  $\int f(x, y) dx$ ,  $\int f(x, y) dy$  e  $\int f(x, y) ds$  com relação aos caminhos  $\gamma$  indicados.

(a)  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ ,  $x = 2t$ ,  $y = t^2$  e  $0 \leq t \leq 1$ .

(b)  $f(x, y) = y^3$ ,  $x = t^2$ ,  $y = 2t$  e  $0 \leq t \leq 2$ .

(c)  $f(x, y) = 2xy$ ,  $x = 5 \cos t$ ,  $y = 5 \sin t$  e  $0 \leq t \leq \pi/4$ .

(d)  $f(x, y) = xy^4$  e  $\gamma$  é a metade do círculo  $x^2 + y^2 = 16$ .

(e)  $f(x, y) = 3x^2 + 6y^2$ ,  $y = 2x + 1$  e  $-1 \leq x \leq 0$ .

(f)  $f(x, y) = xy^3$ ,  $x = 4 \sin t$ ,  $y = 4 \cos t$  e  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

(g)  $f(x, y) = x \sin y$  e  $\gamma$  é o segmento de reta que liga  $(0, 3)$  a  $(4, 6)$ .

(h)  $f(x, y) = x^2 y^3 - \sqrt{x}$  e  $\gamma$  é o arco da curva de  $(1, 1)$  a  $(4, 2)$ .

3. Nos itens de (a) a (l), calcule  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , em que  $f$  e  $\gamma$  são dados.

(a)  $f(z) = z\bar{z}$  e  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(b)  $f(z) = \frac{z+1}{z}$  e  $\gamma(t) = 3e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(c)  $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$  e  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $r > 0$ .

(d)  $f(z) = 3z^2 - 2z$ , onde  $\gamma$  é  $z(t) = t + it^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(e)  $f(z) = x^2 + iy^3$ , onde  $\gamma$  é o segmento de reta de  $z = 1$  a  $z = i$ .

(f)  $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$ , onde  $\gamma$  é o segmento de reta de  $z = 0$  a  $z = 3 + 2i$ .

(g)  $f(z) = z^2$  e  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

(h)  $f(z) = |z|^2$ , onde  $\gamma$  é  $x = t^2$  e  $y = 1/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .

(i)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$  e  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(j)  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$  e  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(k)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2}$  e  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(l)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2}$  e  $\gamma(t) = 2 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Mostre que  $\int_a^b e^{it} dt = i(e^{ia} - e^{ib})$  e  $\int_a^b e^{ikt} dt = \frac{i}{k}(e^{ika} - e^{ikb})$ .

5. Seja  $\gamma$  um arco de círculo parametrizado por  $z = z(\theta) = re^{i\theta}$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ .

Prove que  $\int_{\gamma} f(z) dz = ir \int_{\alpha}^{\beta} f(z(\theta))e^{i\theta} d\theta$ .

6. Mostre que  $\int_{\gamma} \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i$ , onde  $k$  é uma constante real e  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

7. Use o resultado do Exercício 6 para mostrar que  $\int_0^{\pi} e^{k \cos t} \cos(k \sin t) dt = \pi$ .

8. Seja  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função polinomial não constante. Mostre que  $p$  é uma função sobrejetora.



9. Sejam  $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  e  $p : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função polinomial. Mostre que, se  $\gamma$  é um caminho suave por partes em  $A$ , então  $\int_{\gamma} p(z) dz = 0$ .
10. Nos itens de (a) a (j), calcule as integrais ao longo dos caminhos fechados indicados.
- (a)  $\int_{|z|=5} \frac{4}{z - 3i} dz;$
- (b)  $\int_{|z|=5} \frac{z^2}{(z - 3i)^2} dz;$
- (c)  $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i} dz;$
- (d)  $\int_{|z|=1} \frac{1 + e^z}{z} dz;$
- (e)  $\int_{|z|=3} \frac{z^2 - 3z + 4i}{z + 2i} dz;$
- (f)  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{3z - \pi} dz;$
- (g)  $\int_{|z-i|=1} \frac{z^2}{z^2 + 4} dz;$
- (h)  $\int_{|z+5|=\frac{3}{2}} \frac{z^2 + 3z + 2i}{z^2 + 3z - 4} dz;$
- (i)  $\int_{|z|=1} \frac{\cos 2z}{z^5} dz;$
- (j)  $\int_{|z|=4} \frac{z}{(z - 1)(z - 2)} dz.$
11. Sejam  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  um polinômio de grau  $n > 1$  e  $z_1$  um número tal que  $P(z_1) = 0$ . Mostre que  $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ , em que  $Q$  é um polinômio de grau  $n - 1$ .
12. Mostre que  $\int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} dz = 0$  para qualquer caminho  $\gamma$  que circunde os pontos  $z_0$  e  $z_1$ .

## 4 Sequências e séries

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de sequências e séries de números complexos. Uma considerável parte dos resultados é análoga à teoria da Análise Real.

Uma consequência imediata da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas, que nos mostra que uma função complexa  $f$  possui derivadas de todas as ordens em um ponto  $z_0$  numa região  $A$  do plano complexo, é que essa função sempre pode ser expandida em uma série de potências com centro  $z_0$ .

Veremos, também, um outro tipo de série, a qual chamamos de *Série de Laurent*, que é uma generalização da *Série de Taylor*.

### 4.1 Sequências

**Definição 4.1.** Uma *sequência de números complexos* é uma função do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  em  $\mathbb{C}$ ,

$$z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}.$$

O número complexo  $z(n)$  é chamado o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência e é também denotado por  $z_n$ .

As notações mais usuais para sequências de números complexos são:  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{z_n\}$ ,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(z_n)$ .

Por exemplo, os cinco primeiros termos da sequência  $\{5i^n\}$ , definida pela função  $z(n) = 5i^n$ , são  $z(0) = 5$ ,  $z(1) = 5i$ ,  $z(2) = -5$ ,  $z(3) = -5i$  e  $z(4) = 5$ .

Observemos que, à medida que  $n$  cresce, o termo geral  $z_n = 5i^n$  não se aproxima

de um número complexo fixo e, como no caso real, dizemos que esta sequência é **divergente**.

Quando o termo geral  $z_n$  de uma sequência se aproxima de um número complexo fixo  $z$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , dizemos que a sequência é **convergente** e que  $z_n$  converge a  $z$ .

**Exemplo 4.2.** A sequência  $\left\{ \frac{3ni + 2}{n + ni} \right\}$  é convergente, pois seu termo geral  $z_n = \frac{3ni + 2}{n + ni}$  se aproxima de  $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, como

$$\begin{aligned} z_n = \frac{3ni + 2}{n + ni} &= \frac{(3ni + 2) \cdot (n - ni)}{(n + ni)(n - ni)} = \frac{3n^2i + 3n^2 + 2n - 2ni}{2n^2} \\ &= \frac{3n^2 + 2n}{2n^2} + \frac{3n^2 - 2n}{2n^2}i, \end{aligned}$$

temos que

$$(\operatorname{Re})(z_n) = \frac{3n^2 + 2n}{2n^2} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

e

$$(\operatorname{Im})(z_n) = \frac{3n^2 - 2n}{2n^2} \longrightarrow \frac{3}{2},$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, a sequência considerada converge ao número complexo  $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ .

De forma intuitiva, calculamos os limites das partes real e imaginária quando  $n \rightarrow \infty$  para obter o limite da sequência. Esse cálculo está correto segundo um resultado que iremos demonstrar. Mas antes de exhibir tal resultado, vamos formalizar a apresentação dos conceitos citados na discussão anterior.

**Definição 4.3.** Um número complexo  $L$  é o **limite** de uma sequência de números complexos  $(z_n)$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies |z_n - L| < \varepsilon.$$

Escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L \quad \text{ou} \quad z_n \longrightarrow L.$$

Se  $L$  é o limite de  $(z_n)$ , dizemos que a sequência  $(z_n)$  converge a  $L$ .

Uma sequência que possui limite é chamada **convergente** e uma sequência que não possui limite é chamada **divergente**.

Daqui para frente, quando escrevermos  $\lim z_n = L$  ou  $z_n \rightarrow L$ , estará subentendido que  $n \rightarrow \infty$ . Com a definição de limite apresentada, provaremos o próximo resultado.

**Teorema 4.4.** *Seja  $\{z_n\}$  uma sequência de números complexos. A sequência  $\{z_n\}$  converge para o número  $L = a + bi$  se, e somente se, as partes real e imaginária,  $\operatorname{Re}(z_n)$  e  $\operatorname{Im}(z_n)$ , convergem para  $\operatorname{Re}(L) = a$  e  $\operatorname{Im}(L) = b$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Escrevemos  $z_n = a_n + i b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que  $z_n \rightarrow L$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n - L| < \varepsilon$ , sempre que  $n \geq n_0$ .

Para qualquer número complexo  $z = x + i y$ , temos que  $|x| \leq |z|$  e  $|y| \leq |z|$ . Pondo  $z = z_n - L = (a_n - a) + i(b_n - b)$ , segue que se  $n \geq n_0$  então

$$|a_n - a| \leq |z_n - L| < \varepsilon$$

e

$$|b_n - b| \leq |z_n - L| < \varepsilon.$$

Portanto,  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ . Reciprocamente, se  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , existem números naturais  $n_1$  e  $n_2$  tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ao escolher  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , temos que, para  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= |a_n + i b_n - a - bi| = |a_n - a + i(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que  $z_n \rightarrow L = a + bi$ , em que  $\operatorname{Re}(L) = a$  e  $\operatorname{Im}(L) = b$ .

□

Se existe o limite de uma sequência, então ele é único. É o que provaremos a seguir.

**Teorema 4.5** (Unicidade do limite). *O limite de uma sequência de números complexos, quando existe, é único.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\lim z_n = L_1$  e  $\lim z_n = L_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ . Seja  $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$ . Se  $\lim z_n = L_1$ , então existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_1$  implica  $|z_n - L_1| < \varepsilon$ . Se  $\lim z_n = L_2$ , então existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_2$  implica  $|z_n - L_2| < \varepsilon$ . Seja  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ . Assim, para  $n \geq n_0$ , temos que

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - z_n + z_n - L_2| \leq |z_n - L_1| + |z_n - L_2| \\ &< \frac{|L_1 - L_2|}{2} + \frac{|L_1 - L_2|}{2} \\ &= |L_1 - L_2|, \end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo, devemos ter  $L_1 = L_2$ .

□

Como no caso real, uma sequência  $(z_n)$  de números complexos convergente é, necessariamente, limitada. Provaremos este fato abaixo. Uma sequência  $(z_n)$  é **limitada** quando existe  $M > 0$  tal que  $|z_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 4.6.** *Toda sequência de números complexos convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $(z_n)$  uma sequência de números complexos convergente. Suponhamos que  $\lim z_n = L$ . Então, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies |z_n - L| < 1,$$

de onde se obtém  $|z_n| < 1 + |L|$ , para  $n \geq n_0$ .

Seja  $M = \max \{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0}|, 1 + |L|\}$ . Então,  $|z_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que mostra que a sequência  $(z_n)$  é limitada.  $\square$

Para quaisquer sequências de números complexos, valem as seguintes propriedades:

**Proposição 4.7.** *Se  $(z_n)$  e  $(w_n)$  são sequências de números complexos tais que  $\lim z_n = L_1$  e  $\lim w_n = L_2$ , então:*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n = cL_1$ , em que  $c \in \mathbb{C}$ ;
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = L_1 + L_2$ ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = L_1 \cdot L_2$ ;
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{L_1}{L_2}$ , se  $L_2 \neq 0$  e  $w_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (i) Digamos que  $L_1 = a'_1 + i b'_1$ . De  $\lim z_n = L_1$  e do Teorema 4.4, segue que  $\lim a_n = a'_1$  e  $\lim b_n = b'_1$ , que são os limites das partes real e imaginária de  $(z_n)$ , respectivamente. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n \geq n_1 \implies |a_n - a'_1| < \frac{\varepsilon}{2|c|}$$

e

$$n \geq n_2 \implies |b_n - b'_1| < \frac{\varepsilon}{2|c|}.$$

Seja  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ . Assim, para  $n \geq n_0$ , temos que

$$\begin{aligned} |cz_n - cL| &= |c(a_n + i b_n) - c(a'_1 + i b'_1)| = |ca_n + i cb_n - ca'_1 - i cb'_1| \\ &= |c(a_n - a'_1) + i c(b_n - b'_1)| \\ &\leq |c||a_n - a'_1| + |c||b_n - b'_1| \\ &< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{2|c|} + |c| \cdot \frac{\varepsilon}{2|c|} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde se conclui que  $\lim cz_n = cL$ .

(ii) Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $n \geq n_1$  implica  $|z_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $n \geq n_2$  implica  $|w_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sendo  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , temos que, para  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |(z_n - w_n) - (L_1 + L_2)| &= |z_n - L_1 + L_2 - w_n| \\ &\leq |z_n - L_1| + |w_n - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,  $\lim(z_n + w_n) = L_1 + L_2$ .

(iii) Da convergência de  $(z_n)$ , temos que a mesma é limitada, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|z_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |z_n \cdot w_n - L_1 \cdot L_2| &= |z_n \cdot w_n - z_n \cdot L_2 + z_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\ &= |z_n(w_n - L_2) + L_2(z_n - L_1)| \\ &\leq |z_n||w_n - L_2| + |L_2||z_n - L_1| \\ &\leq M|w_n - L_2| + |L_2||z_n - L_1|. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $n \geq n_1$  implica  $|z_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2|L_2|}$  e  $n \geq n_2$  implica  $|w_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ,  $L_2 \neq 0$  e  $M \neq 0$ . Escolhendo  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , para  $n \geq n_0$ , temos que

$$|z_n \cdot w_n - L_1 \cdot L_2| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |L_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon,$$

de onde se conclui que  $\lim(z_n \cdot w_n) = L_1 \cdot L_2$ .

(iv) Observemos que  $\frac{z_n}{w_n} = z_n \cdot \left(\frac{1}{w_n}\right)$ . Então, pelo item (iii), basta provar que

$\left(\frac{1}{w_n}\right)$  converge a  $\frac{1}{L_2}$ . Notemos que

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - w_n}{w_n \cdot L_2}\right| = \left|\frac{w_n - L_2}{w_n \cdot L_2}\right|. \quad (4.1)$$

Como  $L_2 \neq 0$ ,  $w_n \neq 0$  e  $w_n \rightarrow L_2$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos garantir que existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $|w_n| > \frac{|L_2|^2}{2}$  se  $n \geq n_1$  e  $|w_n - L_2| < \varepsilon \cdot \frac{|L_2|^2}{2}$  se  $n \geq n_2$ . Escolhendo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , temos, para  $n \geq n_0$ ,

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{L_2}\right| \stackrel{(4.1)}{<} \frac{2}{|L_2|^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|L_2|^2}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que  $\lim \frac{1}{w_n} = \frac{1}{L_2}$ . Como  $\lim z_n = L_1$ , segue, por (iii), que

$$\lim(z_n \cdot w_n) = \lim z_n \cdot \left(\frac{1}{w_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}.$$

□

Apresentaremos a seguir o critério mais importante para decidir se uma sequência é convergente ou não, que é o *Princípio Geral de Convergência* ou *Princípio de Cauchy*.

**Teorema 4.8** (Princípio de Cauchy). *Uma sequência de números complexos  $(z_n)$  é convergente se, e somente se, dado qualquer número  $\varepsilon > 0$ , é possível encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n \geq n_0 \implies |z_m - z_n| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que a sequência  $(z_n)$  seja convergente. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m > n_0$  implica  $|z_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$



e  $n > n_0$  implica  $|z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} |z_m - z_n| &= |z_m - L + L - z_n| \\ &\leq |z_m - L| + |z_n - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para  $m, n \geq n_0$ .

Reciprocamente, supondo a validade de (4.2), precisamos provar que existe  $L \in \mathbb{C}$  de modo que  $(z_n)$  convirja para esse valor. Mostremos, a princípio, que a sequência  $(z_n)$  é limitada.

Para  $\varepsilon = 1$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq n_0$  implica  $|z_m - z_n| < 1$ . Assim, para  $n \geq n_0$ , temos que  $|z_{n_0} - z_n| < 1$  e  $z_n \in D$ , em que  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_{n_0}| < 1\}$ .

Fora de  $D$  há finitos pontos de  $(z_n)$  que estão contidos em um disco  $\overline{D}(0; R)$ . Tomando  $M = \max\{R, |z_{n_0}| + 1\}$ , concluímos que  $(z_n) \subset \overline{D}(0; M)$ . Aplicando o Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver [11], página 26) a  $[\operatorname{Re}(z_n)]$  e  $[\operatorname{Im}(z_n)]$ , temos que existem subsequências  $[\operatorname{Re}(z_{n_l})]$  e  $[\operatorname{Im}(z_{n_{l'}})]$  que convergem. Por simplicidade de notação, denotaremos essas subsequências por  $[\operatorname{Re}(z_{n_k})]$  e  $[\operatorname{Im}(z_{n_k})]$ . Digamos que

$$\operatorname{Re}(z_{n_k}) \rightarrow a \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z_{n_k}) \rightarrow b, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 4.4, temos que

$$z_{n_k} \rightarrow L = a + ib. \tag{4.3}$$

Agora, precisamos provar que  $(z_n)$  converge para  $L$ . Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq n_0$  implicam  $|z_m - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Além disso, por (4.3),

temos que existe  $n_1 \geq n_0$  tal que  $|z_{n_1} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim, para  $n \geq n_0$ , temos

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= |z_n - z_{n_1} + z_{n_1} - L| \\ &\leq |z_n - z_{n_1}| + |z_{n_1} - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

## 4.2 Séries de números complexos

Dada uma sequência de números complexos  $(z_n)$ , podemos associar a ela uma nova sequência  $(s_n)$ , chamada sequência das **somas parciais** de  $(z_n)$  ou sequência gerada por  $(z_n)$  e definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= z_0 \\ s_1 &= s_0 + z_1 = (z_0) + z_1 \\ s_2 &= s_1 + z_2 = (z_0 + z_1) + z_2 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + z_n = (z_0 + z_1 + \dots + z_{n-2} + z_{n-1}) + z_n. \end{aligned}$$

Observemos que  $s_n = \sum_{j=0}^n z_j$  e que  $z_n = s_n - s_{n-1}$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 4.9.** Uma **série numérica** é a sequência  $(s_n)$  gerada por uma sequência  $(z_n)$  de números complexos.

A série numérica gerada por  $(z_n)$  é denotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Chamamos  $z_n$  de o **termo geral** da série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ .

Dizemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é **convergente** quando existe  $s = \lim s_n$  e chamamos  $s$  de a **soma da série**. Se  $(s_n)$  divergir, diremos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é **divergente**.

Quando queremos verificar se uma série converge ou não, observamos inicialmente se o termo geral da série possui limite nulo. O critério, a seguir, é apropriado para atestar que uma série é divergente.

**Teorema 4.10.** *O termo geral de uma série convergente tem limite igual a zero.*

*Demonstração.* Seja  $s$  a soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ . Então  $s = \lim s_n$  e  $s = \lim s_{n-1}$ . Como  $z_n = s_n - s_{n-1}$ , segue que

$$\lim z_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Para saber se uma série diverge, basta aplicar a contrapositiva do Teorema 4.10: se  $\lim z_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  diverge.

Como estamos trabalhando com números da forma  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , é natural que, em termos de séries de números complexos, possamos separar o termo geral  $z_n$  em partes real e imaginária. Assim, para que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  convirja é necessário e suficiente que as séries de números reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  convirjam. Esse fato é constatado a seguir.

**Proposição 4.11.** *Seja  $z_n = x_n + iy_n$  um número complexo para cada  $n \in \mathbb{N}$ . A série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente se, e somente se, as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  são convergentes.*

*Demonstração.* Para  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n = (x_0 + x_1 + \dots + x_n) + i(y_0 + y_1 + \dots + y_n).$$

Suponhamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i = L_1 + iL_2$ , onde  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema 4.4, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_i = L_2,$$

que são as somas das séries reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , respectivamente. Portanto, as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  convergem.

Reciprocamente, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i = L_1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_i = L_2$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i = L_1 + i L_2$ , pelo Teorema 4.4, concluindo assim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = L_1 + i L_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

□

**Proposição 4.12.** *Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  duas séries convergentes e  $\alpha$  um número complexo qualquer. Nessas condições, as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha z_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n$  são convergentes.*

*Demonstração.* Sejam  $s_n$  e  $S_n$  as sequências de somas parciais de  $(z_n)$  e de  $(w_n)$ , respectivamente. Então, utilizando a Proposição 4.7, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \lim (s_n + S_n)$$

$$= \lim s_n + \lim S_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

□

Na sequência, veremos um critério elementar de convergência para séries de números reais não-negativos.

**Teorema 4.13** (Critério da Comparação). *Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  séries de números reais, em que  $a_n \geq 0$  e  $b_n \geq 0$  para todo  $n \geq 0$ . Suponhamos que existam  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  e  $C > 0$  tais que  $a_n \leq C b_n$  para todo  $n \geq \tilde{n}$ . É verdade que:*

- (i) se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é uma série convergente, então  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  também o é;
- (ii) se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é uma série divergente, então  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  também o é.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumamos que  $a_n \leq Cb_n$ , para todo  $n \geq 0$ .

(i) Sejam  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$  e  $s'_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$  as somas parciais de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , respectivamente.

Pelo Princípio de Cauchy (Teorema 4.8) e da hipótese de que  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é uma série convergente, temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq n_0$  implicam  $|s'_n - s'_m| < \frac{\varepsilon}{C}$ . Podemos supor que  $n > m \geq n_0$  e escrever  $n = m + p$ , em que  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ . Assim,

$$|s'_n - s'_m| = |s'_{m+p} - s'_m| = b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{m+p} < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Como  $a_n \leq b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\begin{aligned} |s_{m+p} - s_m| &= a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+p} \\ &\leq C(b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{m+p}) \\ &< C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para  $m \geq n_0$ . Novamente, pelo Critério de Cauchy, concluimos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é convergente.

(ii) Suponhamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  seja uma série convergente. Então, por (i), a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é convergente, o que contraria a hipótese. Logo,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é divergente. □

**Definição 4.14.** Dizemos que uma série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é **absolutamente convergente** quando a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  é convergente.

Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  for convergente e a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  for divergente, então diremos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é **condicionalmente convergente**.

**Proposição 4.15.** *Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é absolutamente convergente, então ela é convergente.*

*Demonstração.* Seja  $s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$  a  $n$ -ésima soma parcial de  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ . Observemos que, pela Desigualdade Triangular, tem-se

$$\begin{aligned} |s_{m+p} - s_m| &= |z_{m+1} + z_{m+2} + \dots + z_{m+p-1} + z_{m+p}| \\ &\leq |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \dots + |z_{m+p-1}| + |z_{m+p}|, \end{aligned}$$

para quaisquer  $m, p \in \mathbb{N}$ .

Notemos, também, que a  $n$ -ésima soma parcial de  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  é dada por  $s'_n = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$  e, portanto,

$$|s'_{m+p} - s'_m| = ||z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \dots + |z_{m+p-1}| + |z_{m+p}|| = |z_{m+1}| + \dots + |z_{m+p}|$$

e

$$|s_{m+p} - s_m| \leq |s'_{m+p} - s'_m|, \quad (4.4)$$

para quaisquer  $m, p \in \mathbb{N}$ .

Por hipótese, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  é convergente. Então, pelo Critério de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m \geq n_0 \Rightarrow |s'_{m+p} - s'_m| < \varepsilon, \quad (4.5)$$

Por (4.4) e (4.5), vemos que

$$m \geq n_0 \Rightarrow |s_{m+p} - s_m| < \varepsilon,$$

de onde concluímos, novamente pelo Critério de Cauchy, que  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é uma série convergente.  $\square$

### 4.2.1 Série geométrica

As séries geométricas são aquelas formadas pela sequência dos termos de uma progressão geométrica e seu estudo é bastante relevante no que diz respeito à análise da convergência de séries.

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} + az^n + \dots,$$

com  $a, z \in \mathbb{C}$ , é chamada de **série geométrica** e sua  $n$ -ésima soma parcial é dada por

$$s_n = a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} + az^n. \quad (4.6)$$

Vamos encontrar uma fórmula para  $s_n$ . Pois bem, multiplicando (4.6) por  $z$ , temos

$$zs_n = az + az^2 + az^3 + \dots + az^n + az^{n+1}. \quad (4.7)$$

Subtraindo (4.7) de (4.6), obtemos

$$s_n - zs_n = (a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} + az^n) - (az + az^2 + az^3 + \dots + az^n + az^{n+1})$$

ou seja,

$$s_n(1 - z) = a - az^{n+1},$$

de onde segue que

$$s_n = \frac{a(1 - z^{n+1})}{1 - z}. \quad (4.8)$$

Quando  $|z| < 1$ ,  $z^{n+1}$  tende a zero quando  $n \rightarrow +\infty$  e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(1 - z^{n+1})}{1 - z} = \frac{a}{1 - z}$ .

Quando  $|z| \geq 1$ ,  $z^{n+1}$  não tende a zero quando  $n \rightarrow +\infty$ . Nesse caso, a série geométrica diverge.

**Exemplo 4.16.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$  é geométrica com  $a = 1$  e  $z = \frac{i}{2}$ . Como

$|z| = \frac{1}{2} < 1$ , a série é convergente e sua soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1}{\frac{2-i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Na seção anterior, provamos o Critério da Comparação (também chamado Teste da Comparação) para séries de números complexos cujas partes real e imaginária são números reais não negativos. Os dois próximos teoremas apresentam dois testes bastante utilizados para determinar a convergência de séries infinitas.

**Teorema 4.17** (Teste da Razão). *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  uma série de números reais positivos tal que existe*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 0.$$

(a) *Se  $L < 1$ , a série converge.*

(b) *Se  $L > 1$ , a série diverge.*

*Demonstração.* (a) Consideremos um número real  $d$  tal que  $L \leq d < 1$ . Pela definição de limite, a partir de um  $n_0$ , temos que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d$ , o que implica  $a_{n+1} < da_n$ . Assim, temos as seguintes desigualdades:  $a_{n+1} < a_nd$ ,  $a_{n+2} < a_{n+1}d < a_nd^2$ ,  $a_{n+3} < a_{n+2}d < a_nd^3, \dots$  e de uma forma geral,  $a_{n+k} < a_nd^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} d^k$  é absolutamente convergente, pois é uma série geométrica em que  $0 < d < 1$  e, a partir do índice  $n + 1$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é majorada por  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nd^k$ . Portanto, pelo Critério da Comparação (Teorema 4.13), a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é convergente.

(b) Para o caso  $L > 1$ , a série é divergente, pois  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  implica que  $a_{n+1} > a_n$  para  $n$  suficientemente grande, mostrando que o termo geral não tende a zero.

□

**Exemplo 4.18.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n-1)!}$  é absolutamente convergente, pois pelo Teste da Razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(-i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{i}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$



**Teorema 4.19** (Teste da Raiz). *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  uma série de termos positivos tal que existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 0.$$

(a) *Se  $L < 1$ , a série converge.*

(b) *Se  $L > 1$ , a série diverge.*

*Demonstração.* (a) Tomemos um número real  $d$  tal que  $L \leq d < 1$ . Pela definição de limite, temos que  $\sqrt[n]{a_n} \leq d < 1$  e, portanto,  $a_n \leq d^n$  para  $n$  suficientemente grande. A série  $\sum_{n=0}^{\infty} d^n$  é geométrica e convergente, pois  $0 < d < 1$ . Então, pelo Critério da Comparação (Teorema 4.13),  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é uma série convergente.

(b) Para  $L > 1$ , temos que  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  implica  $a_n > 1$  para  $n$  suficientemente grande. Portanto, a série diverge, pois seu termo geral não tende a zero.  $\square$

**Exemplo 4.20.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+i}\right)^n$  é absolutamente convergente, pois pelo Teste da Raiz (Teorema 4.19), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2}{2+i}\right)^n\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{2}{2+i}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1.$$

### 4.3 Séries de potências

Consideremos agora sequências de funções, ou seja, uma correspondência que a cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  associa uma função da variável complexa  $z$ ,  $f_n(z)$ , definida num subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Vamos nos concentrar num tipo específico desses objetos: sequências de potências de  $z - z_0$ , em que  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ ,  $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ .

**Definição 4.21.** *Dada uma sequência  $(a_n(z - z_0)^n)$ , a série por ela gerada é denominada **série de potências de centro**  $z_0$  e denotada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.9)$$

Um exemplo bem conhecido de série de potências é a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Surgem-nos as seguintes questões: para quais valores de  $z$  essa série converge? E para quais valores de  $z$  a mesma diverge?

As reduções da série  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  são dadas por

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \geq 0 \text{ e } z \neq 1. \quad (4.10)$$

Sabemos que se  $|z| < 1$ , então  $\lim z^n = 0$  e, portanto, a série geométrica dada converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z},$$

por (4.10).

Quando  $|z| > 1$ , temos que  $\lim |z|^n = \infty$  e, assim, a série diverge. Além disso, quando  $|z| = 1$ , a série geométrica em questão é claramente divergente.

Portanto, a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge no disco  $D(0, 1)$  e diverge fora dele.  $R = 1$  é denominado o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  e  $D(0, 1)$  seu disco de convergência. A fim de determinar o raio de convergência de uma série de potências qualquer, apresentamos o seguinte resultado.

**Teorema 4.22.** *Consideremos a série de potências da em (4.9). Seja  $R$  o número real dado por*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}. \quad (4.11)$$

(i) *Se  $|z - z_0| < R$ , então a série (4.9) converge absolutamente.*

(ii) *Se  $|z - z_0| > R$ , então a série (4.9) diverge.*

O número  $0 \leq R \leq \infty$  é denominado **raio de convergência** da série de potências (4.9) e o disco  $D(z_0, R)$  seu **disco de convergência**.

*Demonstração.* Para demonstrarmos (i) e (ii), vamos supor que  $z_0 = 0$ , sem perda de generalidade.

(i) Suponhamos que  $|z| < R$ . Podemos afirmar que existe um número real  $r$  tal que  $|z| < r < R$ . Dessa forma, existe um número natural  $n_0$  tal que  $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$  para todo  $n \geq n_0$ , pois  $\frac{1}{r} > \frac{1}{R}$ . Daí,

$$|a_n| < \frac{1}{r^n} \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (4.12)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade (4.12) por  $|z|^n$ , segue que  $|a_n z^n| < \frac{|z^n|}{r^n}$ , o que implica  $|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$  para todo  $n \geq n_0$ . Portanto, a partir de  $n_0$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  é majorada pela série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ , que converge já que  $\frac{|z|}{r} < 1$ . Segue, então, do Critério da Comparação (Teorema 4.13) que a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge absolutamente quando  $|z| < R$ .

(ii) Suponhamos que  $|z| > R$ . Escolhemos um número real  $r$  tal que  $|z| > r > R$ . Assim,  $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$  e, da definição de  $\limsup$ , há uma infinidade de números naturais  $n$  para os quais  $\frac{1}{r} < |a_n|^{1/n}$ . Daí,  $|a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$  para uma infinidade de números naturais  $n$  e, como  $\left(\frac{|z|}{r}\right) > 1$ ,  $|a_n z^n|$  não converge para zero. Portanto, quando  $|z| > R$ , a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  diverge.  $\square$

Existe outra fórmula para calcular o raio de convergência  $R$  de uma série de potências, conforme constataremos no próximo resultado.

**Teorema 4.23.** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  é uma série de potências, com  $a_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $R$  é seu raio de convergência, então*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (4.13)$$

*desde que esse limite exista.*

*Demonstração.* Supondo a existência do limite em (4.13), temos pelo Teste da

Razão (Teorema 4.17) que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| < 1,$$

ou, equivalentemente, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n(z - z_0)^n}{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}(z - z_0)} \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > 1,$$

de onde segue que

$$|z - z_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

conforme atesta o Teorema 4.22-(i).

Por outro lado, pelo Teste da Razão (Teorema 4.17), a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  diverge quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| > 1,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n(z - z_0)^n}{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}(z - z_0)} \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1,$$

ou, equivalentemente, quando

$$|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

conforme afirma o Teorema 4.22-(ii). □

**Exemplo 4.24.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  tem raio de convergência  $R = \infty$ . Com efeito, sendo  $a_n = \frac{1}{n!}$ , temos

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty.$$

**Exemplo 4.25.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n)z^n$  tem raio de convergência  $R = \frac{1}{e}$ . De fato,

como  $a_n = \sinh n = \frac{e^n - e^{-n}}{2}$ , temos

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sinh n}{\sinh(n+1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^n - e^{-n}}{2} \cdot \frac{2}{e^{n+1} - e^{-(n+1)}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^n(1 - e^{-2n})}{e^n(e - e^{-(2n+1)})} \right| = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.26.** Vamos desenvolver a função  $f(z) = \frac{1}{z}$  em série de potências de  $z - 4$ . Observemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-4) + 4} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{z-4}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-4)^n.$$

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-4)^n$  tem raio de convergência  $R = 4$ . Com efeito,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{4^n \cdot 4} \cdot \frac{4^n \cdot 4^2}{(-1)^n \cdot (-1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4}{(-1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4.$$

Logo, o desenvolvimento da função  $f(z) = \frac{1}{z}$  em série de potências de  $z - 4$  é válido em  $|z - 4| < 4$ .

Nosso próximo objetivo é mostrar que toda série de potências representa uma função analítica em seu disco de convergência. Para isso, precisaremos do seguinte lema:

**Lema 4.27.** *Se uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente em um disco  $D(z_0, R)$ , então a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$  também converge absolutamente em  $D(z_0, R)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, mostremos que se  $0 \leq s < 1$ , então a série de números reais

$$\sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} = 1 + 2s + 3s^2 + \dots + n s^{n-1} + \dots$$

converge para  $\frac{1}{(1-s)^2}$ . Por indução sobre  $n$ , mostremos que

$$1 + 2s + 3s^2 + \dots + n s^{n-1} = \frac{n s^{n+1} - (n+1) s^n + 1}{(1-s)^2}. \quad (4.14)$$

Para  $n = 1$ , a afirmação é verdadeira. De fato,  $1 = \frac{s^2 - 2s + 1}{(1-s)^2}$ , pois  $s^2 - 2s + 1 = (1-s)^2$ . Suponhamos que a igualdade (4.14) seja válida para algum  $n$  natural maior do que 1 e mostremos que (4.14) vale para  $n+1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 + 2s + 3s^2 + \dots + n s^{n-1}) + (n+1)s^n &= \frac{n s^{n+1} - (n+1)s^n + 1}{(1-s)^2} + (n+1)s^n \\ &= \frac{n s^{n+1} - (n+1)s^n + 1 + (n+1)s^n(1-s)^2}{(1-s)^2} \\ &= \frac{n s^{n+1} - (n+1)s^n + 1 + (n+1)s^n(1-2s+s^2)}{(1-s)^2} \\ &= \frac{n s^{n+1} - (n+1)s^n + 1 + (n+1)s^n - (n+1)2s^{n+1} + (n+1)s^{n+2}}{(1-s)^2} \\ &= \frac{(n+1)s^{n+2} + s^{n+1}(n-2n-2) + 1}{(1-s)^2} \\ &= \frac{(n+1)s^{n+2} - (n+2)s^{n+1} + 1}{(1-s)^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, como  $0 \leq s < 1$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n s^{n-1} - (n+1)s^n + 1}{(1-s)^2} = \frac{1}{(1-s)^2}, \quad (4.15)$$

de onde segue que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1}$  converge para  $\frac{1}{(1-s)^2}$ .

Para provarmos a afirmação do lema, vamos admitir, sem perda de generalidade, que  $z_0 = 0$ . Seja  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < R$  e  $\delta > 0$  com  $|z| < \delta < R$ . Assim, como por hipótese a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge absolutamente para  $|z| < R$ , a sequência  $|a_n \delta^n|$  é limitada e, portanto, existe  $M > 0$  tal que

$$|a_n \delta^n| < M \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \frac{M}{\delta^n},$$

para todo  $n$  natural. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} |n a_n z^{n-1}| &= |n a_n| \frac{|z^{n-1}|}{|\delta^{n-1}|} |\delta^{n-1}| = n |a_n| \left| \frac{z}{\delta} \right|^{n-1} \delta^{n-1} \\ &< n \frac{M}{\delta^n} \left| \frac{z}{\delta} \right|^{n-1} \delta^{n-1} \\ &= n \frac{M}{\delta} \left| \frac{z}{\delta} \right|^{n-1}, \end{aligned}$$

para todo  $n$  natural.

Fazendo  $\left| \frac{z}{\delta} \right| = s$ , temos  $|n a_n z^{n-1}| < n \frac{M}{\delta} s^{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n z^{n-1}| \leq \frac{M}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1}.$$

Como  $s < 1$ , a série do lado direito é convergente (veja (4.15)). Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  converge absolutamente em  $D(0, R)$ .  $\square$

**Teorema 4.28.** *Toda série de potências define uma função analítica no seu disco de convergência.*

*Demonstração.* O Lema 4.27 mostra que se  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente no seu disco de convergência  $D(z_0, R)$ , então  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$  também converge absolutamente em  $D(z_0, R)$ . Com isso, basta mostrar que  $f'(z) = g(z)$  para todo  $z \in D(z_0, R)$ . Novamente, para facilitar os cálculos, vamos considerar  $z_0 = 0$ .

Dados  $z, w \in D(0, R)$ ,  $z \neq w$ , temos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{z^n - w^n}{z - w} - n a_n w^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right].$$

Observemos que, para  $n \geq 2$ , a expressão  $\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1}$  é equivalente a

$$(z - w) \left[ z^{n-2} + 2z^{n-3}w + 3z^{n-4}w^2 + \dots + (n-2)zw^{n-3} + (n-1)w^{n-2} \right].$$

Escolhendo  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s < R$ , temos  $|z| < s$ ,  $|w| < s$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right| &< |z - w| s^{n-2} [1 + 2 + \dots + (n-1)] \\ &= s^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} |z - w|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < \frac{|z - w|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| s^{n-2}.$$

Como  $s < R$ , segue do Lema 4.27 que a série  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| s^{n-2}$  converge e, portanto,

$$z \rightarrow w \quad \implies \quad \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \rightarrow 0,$$

de onde segue que  $f'(w) = g(w)$ . Como  $w$  foi tomado arbitrariamente em  $D(0, R)$ , a prova está completa.  $\square$

**Observação 4.29.** O Teorema 4.28 afirma que, em seu disco de convergência, podemos derivar uma série de potências termo a termo.



Ao aplicarmos o Teorema 4.28 de forma recursiva, obtemos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \quad \text{para } k \geq 0. \quad (4.16)$$

Com efeito,

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n z^{n-3}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

Ao fazermos  $z = 0$  na expressão (4.16), obtemos  $f^{(k)}(0) = k!a_k$ , ou seja,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \text{para } k \geq 0.$$

Com isso, acabamos de mostrar o seguinte corolário:

**Corolário 4.30.** *Se  $f(z)$  é uma função definida pela série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , com raio de convergência  $R > 0$ , então  $f(z)$  é dada pela sua série de Taylor de centro em 0,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad (4.17)$$

*a qual converge absolutamente em seu disco de convergência,  $D(0, R)$ .*

**Exemplo 4.31.** Vamos expandir em série de Taylor a função  $f(z) = \sinh z$ . Sabemos que

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

e que a expansão da função exponencial é dada por

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

e

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2z}{1!} + \frac{2z^3}{3!} + \frac{2z^5}{5!} + \dots \right) = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

e seu raio de convergência é  $R = \infty$ , pois

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (2n+3)! \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+3)(2n+2)| = \infty.$$

**Teorema 4.32** (de Taylor). *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto simplesmente conexo,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica e  $z_0 \in A$  um ponto qualquer. Nessas condições,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (4.18)$$

*ou seja,  $f$  é dada por sua série de Taylor de centro em  $z_0$ , a qual converge em qualquer disco aberto  $D(z_0, r)$  totalmente contido em  $A$ .*

*Demonstração.* Sejam  $r > 0$ ,  $D(z_0, r)$  um disco aberto centrado em  $z_0$  contido em

$A$ ,  $z$  um ponto qualquer nesse disco e  $\gamma = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , a fronteira de  $D(z_0, r)$ . Pela Fórmula Integral de Cauchy (Teorema 3.35), temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0) - (z - z_0)} d\delta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0) \left[1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}\right]} d\delta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}} \right] d\delta. \end{aligned}$$

Antes de continuarmos, notemos que, para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ , é facilmente verificável que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1 - z} + \dots, \quad n \geq 1. \quad (4.19)$$

Substituindo  $z$  por  $\frac{z - z_0}{\delta - z_0}$  em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}} &= 1 + \frac{z - z_0}{\delta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\delta - z_0}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\delta - z_0}\right)^3 + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{z - z_0}{\delta - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(\delta - z)(\delta - z_0)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}} \right] d\delta,$$

temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{\delta - z_0} d\delta + \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^2} d\delta + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^3} d\delta + \\ &+ \dots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^n} d\delta + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)(\delta - z_0)^n} d\delta. \end{aligned}$$

Pela Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas (Teorema 3.37), podemos reescrever a igualdade acima como

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z)$$

em que

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)(\delta - z_0)^n} d\delta,$$

expansão conhecida como Fórmula de Taylor com resto  $R_n(z)$ .

Para mostrar que a série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j$  converge a  $f(z)$  é suficiente mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$  para qualquer  $z \in D(z_0, r)$ . Para isso, mostraremos que  $|R_n(z)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, seja  $M$  o valor máximo de  $|f(z)|$  ao longo de  $\gamma$ . Como  $z$  é um ponto no interior de  $\gamma = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $|z - z_0| < r$ , então

$$|\delta - z| = |\delta - z_0 - (z - z_0)| \geq |\delta - z_0| - |z - z_0| = r - d,$$

em que  $d$  é a distância de  $z$  a  $z_0$ .

Pelo Lema 3.27, temos

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)(\delta - z_0)^n} d\delta \right| = \left| \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \right| \left| \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)(\delta - z_0)^n} d\delta \right| \\ &\leq \frac{|(z - z_0)^n|}{|2\pi i|} \oint_{\gamma} \frac{|f(\delta)|}{|(\delta - z)(\delta - z_0)^n|} |d\delta| \\ &\leq \frac{d^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{(r - d)r^n} \cdot 2\pi r = \left(\frac{d}{r}\right)^n \cdot \frac{Mr}{(r - d)}. \end{aligned}$$

Como  $d < r$ , segue que  $\left(\frac{d}{r}\right)^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, por conseguinte,  $|R_n(z)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, a série

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

converge para  $f(z)$ , ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0),$$

o que completa a demonstração.  $\square$

**Exemplo 4.33.** Vamos expandir em série de Taylor a função  $f(z) = \frac{1}{3-z}$  centrada em  $z_0 = 2i$ . Temos

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3-z+2i-2i} = \frac{1}{3-2i-(z-2i)} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}}.$$

Sabendo que, para  $z \neq 1$ ,  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  e substituindo  $z$  por  $\frac{z-2i}{3-2i}$  nessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}} &= \frac{1}{3-2i} \left[ 1 + \frac{z-2i}{3-2i} + \left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^3 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{3-2i} + \frac{1}{(3-2i)^2} (z-2i) + \frac{1}{(3-2i)^3} (z-2i)^2 + \dots + \frac{1}{(3-2i)^{n+1}} (z-2i)^n + \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3-2i)^{n+1}} (z-2i)^n$$

e seu raio de convergência é  $R = \sqrt{13}$ . De fato,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2i)^{n+2}}{(3-2i)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |3-2i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3^2 + (-2)^2} \right) = \sqrt{13}.$$

Podemos observar que o raio  $R$  de convergência é a distância do centro  $z_0$  ao

ponto  $z$  no qual a função  $f$  não é analítica. Tal ponto  $z$  é chamado de singularidade isolada de  $f$ , conceito que formalizaremos no próximo capítulo.

**Exemplo 4.34.** Vamos expandir em série de Taylor a função  $f(z) = \frac{z-1}{3-z}$  centrada em  $z_0 = 1$ . Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{3-z} &= (z-1) \cdot \frac{1}{3-z} = (z-1) \cdot \frac{1}{2-(z-1)} = (z-1) \cdot \frac{1}{2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)} \\ &= \frac{z-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.\end{aligned}$$

Lembrando que  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  e substituindo  $z$  por  $\frac{z-1}{2}$  nessa igualdade, obtemos

$$\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = 1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \dots,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} &= \frac{z-1}{2} \left[ 1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \dots + \frac{(z-1)^n}{2^n} + \dots\end{aligned}$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n \quad (4.20)$$

tem raio de convergência  $R = 2$ . Com efeito,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \cdot 2}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2| = 2.$$

No Exemplo 4.34,  $z = 3$  é uma singularidade isolada, pois é o ponto em que  $f$  não é analítica, e  $z_0 = 1$ . O raio de convergência da série (4.20) também é dado pela distância de  $z$  a  $z_0$ , pois  $|z - z_0| = |3 - 1| = |2| = 2$ , conforme fora constatado acima.

Sempre é possível desenvolver em série de Taylor de centro  $z_0$  funções que sejam analíticas em  $z_0$ . Porém, é ainda possível realizar esse desenvolvimento mesmo que a função não seja analítica em  $z_0$ . Para isso, é necessário admitir potências com expoentes negativos, como é o caso da função  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ . Notemos que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-3}.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3! \cdot z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \dots$$

Observemos que  $\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \dots$  é a parte da expansão em que a função é analítica e tal parte recebe o nome de “**parte analítica**”. A parte  $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3! \cdot z}$  recebe o nome de “**parte principal**”, que consiste de potências negativas.

Note que a parte analítica da expansão converge para todo  $z$  tal que  $|z| < \infty$  e que a parte principal converge para  $z$  tal que  $|z| > 0$ . Concluimos, assim, que essa expansão em série é válida para  $0 < |z| < \infty$ , a qual denominamos **região anelar**.

Esse tipo de série apresentada acima é uma generalização da série de Taylor e recebe o nome de *Série de Laurent* ou *Expansão de Laurent*.

**Teorema 4.35** (de Laurent). *Seja  $f$  uma função analítica no anel*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

*em que  $0 \leq r < R \leq \infty$ . A função  $f$  tem uma representação em série de Laurent centrada em  $z_0$*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

*que é válida para todo  $z \in A$ . Os coeficientes  $a_n$  são dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)^{n+1}} d\delta,$$

onde  $\gamma$  é o caminho fechado em  $A$ :  $|\delta - z_0| = s$ , em que  $s$  é qualquer número real tal que  $r < s < R$ .

*Demonstração.* Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  círculos concêntricos com centro  $z_0$  e raios  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , tais que  $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ . Consideremos um ponto  $z$  arbitrário tal que  $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ . Se  $L$  é um arco que liga  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , então o caminho  $\gamma = \gamma_2 + L - \gamma_1 - L$  é fechado.

Pela Fórmula Integral de Cauchy (Teorema 3.35), temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta.$$

Como as integrais ao longo de  $L$  e  $-L$  se cancelam, vemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta. \quad (4.21)$$

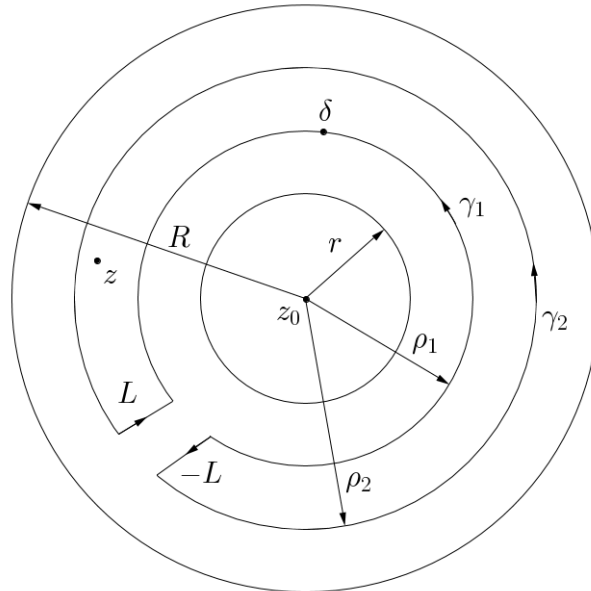


Figura 4.1: Região anelar  $A$ .

Vamos estudar separadamente cada uma das integrais em (4.21).



Pelo Teorema 4.32, a primeira integral é dada por

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta,$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Em  $-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta$ , temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0) - (z - z_0)} d\delta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(z - z_0) - (\delta - z_0)} d\delta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(z - z_0)} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\delta - z_0}{z - z_0}} \right] d\delta. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{1 - \frac{\delta - z_0}{z - z_0}} = 1 + \frac{\delta - z_0}{z - z_0} + \left( \frac{\delta - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\delta - z_0}{z - z_0} \right)^{n-1} + \frac{(\delta - z_0)^n}{(z - \delta)(z - z_0)^{n-1}} + \dots,$$

segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(z - z_0)} \left[ 1 + \frac{\delta - z_0}{z - z_0} + \left( \frac{\delta - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\delta - z_0}{z - z_0} \right)^{n-1} + \frac{(\delta - z_0)^n}{(z - \delta)(z - z_0)^{n-1}} \right] d\delta \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + R_n(z), \end{aligned}$$

em que  $R_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)(\delta - z_0)^n}{z - \delta} d\delta$  e  $a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{-m+1}} d\delta$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Seja  $M$  o maior valor de  $|f(z)|$  ao longo de  $\gamma_1$  e  $d$  a distância de  $z$  a  $z_0$ , ou seja,

$|z - z_0| = d$ . Então,

$$|z - \delta| = |z - z_0 - \delta + z_0| = |z - z_0 - (\delta - z_0)| \geq |z - z_0| - |\delta - z_0| = d - \rho_1,$$

pois,  $\rho_1 = |\delta - z_0|$ .

Assim, pelo Lema 3.27 (Desigualdade ML), obtemos

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^n} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)(\delta - z_0)^n}{z - \delta} d\delta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi d^n} \cdot \frac{M\rho_1^n}{d - \rho_1} 2\pi\rho_1 = \frac{M\rho_1}{d - \rho_1} \left(\frac{\rho_1}{d}\right)^n. \end{aligned}$$

Como  $\rho_1 < d$ , segue que  $\left(\frac{\rho_1}{d}\right)^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $|R_n(z)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{\delta - z} d\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

onde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{-n+1}} d\delta$$

e  $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto, de (4.21), segue que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

ou, equivalentemente,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

onde os coeficientes  $a_n$  foram especificados acima.

Outra observação é que, sendo  $z_0$  um ponto interior de  $A$  e  $\gamma$  um caminho fechado simples em  $A$ , podemos reescrever  $a_n$  como

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  para substituir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\delta)}{(\delta - z)^{n+1}} d\delta \quad \text{e} \quad a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{-m+1}} d\delta,$$

fato este que pode ser justificado pelo Princípio da Deformação de Caminhos (Teorema 3.33).  $\square$

**Exemplo 4.36.** Vamos expandir a função  $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$  em uma série de Laurent válida no domínio anelar  $0 < |z| < 3$ . Primeiramente, trabalharemos com a função  $\frac{1}{z-3}$ . Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots \right] \\ &= -\left[ \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \frac{z^3}{3^4} + \dots + \frac{z^n}{3^{n+1}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando  $\frac{1}{z-3}$  por  $\frac{1}{z}$ , temos

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-3} = -\left[ \frac{1}{3z} + \frac{1}{3^2} + \frac{z}{3^3} + \frac{z^2}{3^4} + \dots + \frac{z^{n-1}}{3^{n+1}} + \dots \right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^{n-1}.$$

Observemos que a parte principal da série converge para  $|z| > 0$  e a parte analítica converge para  $|z| < 3$ . Portanto, a série de Laurent da função  $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$  converge no domínio anelar  $0 < |z| < 3$ .

Notemos que para fazermos a expansão em série de Laurent da função  $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ , não utilizamos a fórmula integral  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta$  e sim uma manipulação algébrica da soma da série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \frac{1}{1-z}$ , pois, em geral, utilizar a integral é uma tarefa bem trabalhosa.

**Exemplo 4.37.** Façamos a expansão em série de Laurent da função  $f(z) = \frac{7z-3}{z(z-1)}$ , válida no domínio anelar  $0 < |z| < 1$ .

Notemos que

$$\frac{7z-3}{z(z-1)} = \frac{3}{z} + \frac{4}{z-1} = \frac{3}{z} - \frac{4}{1-z}.$$

Temos que  $-\frac{4}{1-z} = -4 - 4z - 4z^2 - 4z^3 - \dots = -4 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  e adicionando  $\frac{3}{z}$  nessa série, obtemos

$$f(z) = \frac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - 4z^3 - \dots = \frac{3}{z} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

A série  $-\frac{4}{1-z} = -4 - 4z - 4z^2 - 4z^3 - \dots$  converge para  $|z| < 1$  e, ao adicionarmos o termo  $\frac{3}{z}$  a esta, a série de Laurent  $f(z) = \frac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - 4z^3 - \dots$  converge no domínio anelar  $0 < |z| < 1$ .

**Exemplo 4.38.** Vamos expandir em série de Laurent a função  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$  válida no domínio  $1 < |z - 1|$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2} &= \frac{z^2 - 2z + 1 + 1}{z - 1 - 1} = \frac{(z - 1)^2 + 1}{(z - 1) \left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} = \\ &= \frac{(z - 1)^2}{(z - 1) \left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} + \frac{1}{(z - 1) \left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} = \\ &= \frac{z - 1}{1 - \frac{1}{z-1}} + \frac{1}{(z - 1) \left(1 - \frac{1}{z-1}\right)}. \end{aligned}$$

Trabalhando de forma separada em cada parcela e sabendo que  $\frac{1}{1 - z} =$

$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ , obtemos

$$\begin{aligned}(z-1) \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \right) &= (z-1) \left( 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots \right) = \\ &= (z-1) + 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \right) &= \frac{1}{z-1} \left( 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} + \dots\end{aligned}$$

Reescrevendo as duas parcelas em uma única, concluimos que

$$f(z) = (z-1) + 1 + \frac{2}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} + \dots = (z-1) + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

## 4.4 Exercícios propostos

1. Determine se as sequências a seguir são convergentes ou divergentes.

(a)  $\left\{ \frac{i^{n+1}}{n} \right\};$

(d)  $\left\{ \frac{n + i^n}{\sqrt{n}} \right\};$

(b)  $\left\{ \frac{(ni + 2)^2}{n^2 i} \right\};$

(e)  $\left\{ \frac{n(1 + i^n)}{n + 1} \right\};$

(c)  $\left\{ \frac{ni + 2^n}{3ni + 5^n} \right\};$

(f)  $\left\{ \frac{3 + ni}{2 + 2ni} \right\}.$

2. Use a sequência de somas parciais para mostrar que as séries  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k+2i} - \frac{1}{k+1+2i} \right]$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  são convergentes.

3. Mostre que as sequências  $\left\{ \frac{4n + 3ni}{2n + i} \right\}$  e  $\left\{ \left( \frac{1+i}{4} \right)^n \right\}$  convergem a um número complexo  $L$ .

4. Em cada uma das séries geométricas a seguir, determine se as mesmas convergem ou divergem. Em caso de convergência, calcule sua soma.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n;$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} i^n;$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left( \frac{2}{1+2i} \right)^n;$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n};$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} 4i \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1};$

(f)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{(1+i)^{n-1}}.$

5. Nos itens de (a) a (j), determine o raio e o disco de convergência de cada uma das séries de potências dadas.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$

(f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1+2i}{2} \right)^n (z+2i)^n;$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n;$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} z^{3n};$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(4+3i)^n} z^n;$

(h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4-3i)^n}{5^{2n}};$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n} (z-\pi)^n;$

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n z^n;$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(3+4i)^n} (z+3i)^n;$

(j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n z^n.$

6. Mostre que a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^k}{n^2}$  converge em todos os pontos na circunferência de seu disco de convergência.

7. Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$  duas séries de Taylor convergentes em um disco aberto  $D = D(z_0, r)$ , com  $r > 0$ . Mostre que se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

para todo  $z \in D$ , então  $a_n = b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Sejam  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  e  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$  duas séries de Laurent convergentes em um anel  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ , com  $\rho_1 < \rho_2$ . Mostre que se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

para todo  $z \in A$ , então  $a_n = b_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

9. Nos itens de (a) a (j), determine a expansão da função dada em série de Maclaurin e dê o raio de convergência de cada uma delas.

(a)  $f(z) = \frac{z}{1+z};$

(e)  $f(z) = e^{-2z};$

(b)  $f(z) = \frac{1}{4-z};$

(f)  $f(z) = \sinh z;$

(c)  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3};$

(g)  $f(z) = \cos \frac{z}{2};$

(d)  $f(z) = \frac{1}{(1+2z)^2};$

(h)  $f(z) = \sin 3z.$

10. Nos itens de (a) a (j), determine a expansão da função dada em série de Taylor centrada no ponto  $z_0$  e dê o raio de convergência de cada uma delas.

(a)  $f(z) = \frac{1}{z}$  e  $z_0 = 1;$

(f)  $f(z) = \frac{z-1}{3-z}$  e  $z_0 = 1;$

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$  e  $z_0 = 0;$

(g)  $f(z) = \frac{1}{z+1}$  e  $z_0 = -i;$

(c)  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$  e  $z_0 = 1;$

(h)  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$  e  $z_0 = i;$

(d)  $f(z) = \sin z$  e  $z_0 = \frac{\pi}{2};$

(i)  $f(z) = e^z$  e  $z_0 = 3i;$

(e)  $f(z) = \frac{1}{4-z}$  e  $z_0 = 3i;$

(j)  $f(z) = \cos z$  e  $z_0 = \frac{\pi}{4}.$

11. Diz-se que uma função  $f$  é par (ímpar) se  $f(z) = f(-z)$  ( $f(-z) = -f(z)$ ) para todo  $z$ . Demonstre que o desenvolvimento de uma função par (ímpar) em potências de  $z$  só contém potências pares (ímpares).

**12.** Nos itens de (a) a (j), determine a expansão da função dada em série de Laurent válida no domínio especificado.

(a)  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$  e  $0 < |z|$ ;

(f)  $f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)}$  e  $0 < |z| < 1$ ;

(b)  $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$  e  $0 < |z|$ ;

(g)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  e  $|z| > 2$ ;

(c)  $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$  e  $0 < |z-1|$ ;

(h)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  e  $0 < |z|$ ;

(d)  $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$  e  $0 < |z-3| < 3$ ;

(i)  $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$  e  $0 < |z|$ ;

(e)  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  e  $0 < |z-2| < 2$ ;

(j)  $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$  e  $0 < |z|$ .

**13.** Nos itens a seguir, determine a expansão da função dada em série de Laurent válida no domínio anelar especificado.

(a)  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3}$  e  $0 < |z-2| < 1$ ;

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  e  $0 < |z+1| < 3$ ;

(c)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$  e  $0 < |z-2| < 3$ ;

(d)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  e  $0 < |z-1| < 2$ ;

(e)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  e  $0 < |z-3| < 2$ .





## 5 Singularidades e Resíduos

No presente capítulo, estudaremos as singularidades de funções complexas, que são os pontos onde tais funções não são analíticas. Por exemplo,  $z = -3i$  e  $z = 3i$  são singularidades da função  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$ , já que nesses valores  $f$  é descontínua.

Analisaremos também os zeros de uma função analítica e exibiremos alguns resultados que decorrem desse conceito. Por fim, apresentaremos a definição de resíduo de uma função complexa, provaremos o importante Teorema dos Resíduos, bem como resultados que são consequências do mesmo.

### 5.1 Classificação de singularidades

No Capítulo 4, Exemplo 4.33, mencionamos que 3 é uma singularidade isolada de  $f(z) = \frac{1}{3-z}$ . Notemos que  $z = 3$  é o único ponto em que  $f$  não é analítica. Esse conceito será formalizado abaixo.

**Definição 5.1.** Dizemos que um ponto  $z_0$  é uma **singularidade isolada** de uma função  $f$  se existe uma vizinhança de  $z_0$  na qual  $f$  é univalente (analítica e injetiva), com exceção do ponto  $z_0$ .

**Exemplo 5.2.** A função  $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}$  tem como singularidades isoladas os pontos  $z = \pi h$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ , uma vez que todos os múltiplos de  $\pi$  são zeros do denominador.

**Exemplo 5.3.** Estudemos a função  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  quanto à sua expansão em série de Laurent. Sabemos que

$$g(z) = \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Multiplicando  $g$  por  $\frac{1}{z}$ , obtemos

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Temos duas observações importantes a fazer:

(i) A função  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  não está definida em  $z = 0$  e, portanto, não é analítica nesse ponto.

(ii) Porém, a expansão de  $f$  em série de Laurent nos permite perfeitamente obter  $f(0)$ , a saber  $f(0) = 1$ .

Nesse caso,  $z = 0$  é chamado de *singularidade removível*. Vimos no capítulo anterior que a expansão em série de Laurent possui duas partes: a parte principal e a parte analítica:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{parte analítica}} \quad (5.1)$$

e vimos acima que

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

Notemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$  não contém a parte principal, ou seja,  $a_{-n} = 0$  e define uma função analítica para todo  $z$ . De forma bastante apropriada, é possível remover a singularidade  $z = 0$ .

Com isso, temos a seguinte definição.

**Definição 5.4.** Um ponto  $z_0$  é dito uma *singularidade removível* de  $f$  se, em (5.1),  $a_{-n} = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Uma outra maneira de classificar em removível uma singularidade isolada é dada pelo próximo teorema.

**Teorema 5.5** (de Extensão de Riemann). *Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função complexa  $f$ . A singularidade  $z_0$  é removível se, e somente se,  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $z_0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $z_0$ . Então, existem  $s > 0$  e  $M > 0$  tais que  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ , tal que  $0 < |z - z_0| < s$ . Podemos escolher  $s$  suficientemente pequeno de modo que  $f$  é analítica em  $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < s\}$ . A fórmula que fornece os coeficientes da série de Laurent de  $f$  em  $A$  é dada por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta,$$

em que  $\gamma$  é o círculo  $|\delta - z_0| = r$ , com  $0 < r < s$ . Tomando o módulo em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\delta)|}{|\delta - z_0|^{n+1}} |d\delta| \\ &\leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{\gamma} |d\delta| = \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}. \end{aligned}$$

Sendo  $r$  arbitrariamente pequeno, podemos concluir que  $|a_n| = 0$  e, portanto,  $a_n = 0$  para  $n$  inteiro negativo. Mostramos, assim, que  $f$  possui uma singularidade removível. Por outro lado, suponhamos que  $z_0$  seja uma singularidade removível. Dessa forma, a série de Laurent de  $f$  reduz-se à série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

válida em  $0 < |z - z_0| < r$ , para algum  $r > 0$ . Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 = f(z_0)$ , existe  $0 < \delta < r$ , da definição de limite, tal que  $0 < |z - z_0| < \delta$  implica  $|f(z) - a_0| < 1$  (escolhendo  $\varepsilon = 1$ ). Isso equivale a dizer que  $|f(z)| < 1 + |a_0|$  para todo  $z \in A = \{0 < |z - z_0| < \delta\}$ , de onde segue  $f$  é limitada numa vizinhança de

$z_0$ .

□

Agora, exploraremos um exemplo que exhibe uma outra classificação de singularidade: *singularidade do tipo polo*.

**Exemplo 5.6.** Considerando a função  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ , determinemos sua expansão em série de Laurent. Temos,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left[ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

Notemos que a parte principal da série acima não está definida para  $z = 0$  e a parte analítica é válida em  $|z| < \infty$ . Assim, essa série de Laurent é válida no domínio anelar  $0 < |z| < \infty$ . A parte principal contém apenas um termo não nulo. Nesse caso, chamamos  $z = 0$  de *polo simples* de  $f$ . Generalizando, se

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

então  $z = z_0$  é um polo simples de  $f$ , pois  $a_{-1} \neq 0$  é o último coeficiente não nulo da parte principal da série de Laurent de  $f$ .

Chamamos  $z = z_0$  um *polo de ordem  $n$*  de  $f$  quando o último coeficiente não nulo da parte principal da série de Laurent de  $f$  for  $a_{-n}$  para  $n \geq 1$ , ou seja, quando

$$\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

**Exemplo 5.7.** O ponto  $z = 1$  é um polo de ordem 4 da função  $f(z) = \frac{2}{(z-1)^4(z-3)}$ . Expandindo  $f$  em série de Laurent em termos de  $z - 1$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(z-1)^4(z-3)} &= \frac{2}{(z-1)^4} \cdot \frac{1}{-2+(z-1)} = \frac{2}{(z-1)^4} \cdot \frac{1}{-2\left[1-\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]} = \\
&= \frac{2}{(z-1)^4} \cdot \left(\frac{1}{-2}\right) \left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \dots\right] = \\
&= \frac{2}{(z-1)^4} \left[-\frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} - \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} - \frac{(z-1)^4}{2^5} - \dots\right] = \\
&= -\frac{1}{(z-1)^4} - \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{16} - \frac{z-1}{32} - \dots
\end{aligned}$$

Observemos que  $a_{-4} = -1 \neq 0$ , logo  $z = 1$  é um polo de ordem 4. Cabe observar que a expansão acima é válida para  $0 < |z-1| < 2$ . O que vimos acima pode ser formalizado por meio da definição a seguir.

**Definição 5.8.** Um ponto  $z_0$  é dito um **polo** de  $f$  se  $a_n \neq 0$  para apenas um número finito de coeficientes não nulos e  $n < 0$ . E é dito um **polo de ordem**  $m$  se existe  $m > 0$  tal que  $a_{-m} \neq 0$  e  $a_{-n} = 0$  para  $n > m$ .

**Exemplo 5.9.** Vamos agora expandir em série de Laurent a função  $f(z) = e^{2/z}$  válida no domínio anelar  $0 < |z| < \infty$ . Sabemos que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (5.2)$$

Para obter a série desejada, basta substituir  $z$  por  $\frac{2}{z}$ ,  $z \neq 0$ , em (5.2). Assim,

$$e^{2/z} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2! z^2} + \frac{2^3}{3! z^3} + \frac{2^4}{4! z^4} + \dots,$$

para  $0 < |z| < \infty$ .

Notemos que a parte principal da série acima contém um número infinito de termos não nulos. Observemos também que, em infinitos termos, a série não está

definida na origem, ou seja,  $z = 0$  é uma singularidade que, neste caso, classificamos como *singularidade essencial*. De modo geral, temos a seguinte definição.

**Definição 5.10.** *Um ponto  $z_0$  é dito uma **singularidade essencial** de uma função complexa  $f$  se a parte principal da série de Laurent de  $f$  contém um número infinito de termos não nulos.*

Na próxima seção, apresentaremos a definição de zero de uma função analítica e resultados que são consequências dessa definição.

## 5.2 Zeros de uma função analítica

Sabemos que um número complexo  $z_0$  é um zero de uma função  $f$  se  $f(z_0) = 0$ . Por exemplo, os números  $1 + i$  e  $1 - i$  são zeros da função  $f(z) = z^2 - 2z + 2$ , pois  $f(1 \pm i) = 0$ .

Agora, observemos a seguinte situação: o ponto  $z = 3$  é zero da função  $f(z) = (z - 3)^4$ , mas  $f'(3) = 0$ ,  $f''(3) = 0$ ,  $f'''(3) = 0$  e  $f^{(4)}(3) = 24 \neq 0$ . Nesse caso, dizemos que  $z = 3$  é um zero de ordem 4 de  $f$ . Formalizando esse conceito, temos a seguinte definição.

**Definição 5.11.** *Uma função analítica  $f$  tem um **zero de ordem**  $n$  em  $z_0$  se  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) = 0$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(z_0) = 0$  e  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ .*

Vimos que uma função  $f$  analítica no ponto  $z_0$  tem uma representação em série de Taylor de centro em  $z_0$ , ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

válida em uma vizinhança  $|z - z_0| < r$  e que os coeficientes da mesma são dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O fato recordado acima será utilizado para demonstrar o teorema a seguir.

**Teorema 5.12.** *Seja  $f$  uma função analítica e não constante em  $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $z_0$  seja um zero de*

ordem  $k$  da função  $f$  é que exista uma função  $h$  analítica em  $z_0$ , com  $h(z_0) \neq 0$ , tal que  $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$ .

Antes de demonstrarmos o Teorema 5.12, observemos este fato (zeros de ordem  $k$ ) para polinômios. Consideremos  $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$  um polinômio e  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ . Expandindo  $P(z)$  em série de Taylor centrada em  $z_0$ , temos

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots + b_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + b_n(z - z_0)^n,$$

$$\text{em que } P(z_0) = 0 = b_0, P'(z_0) = b_1, \frac{P''(z_0)}{2!} = b_2, \dots, \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n.$$

Como  $b_0 = 0$ , temos

$$P(z) = (z - z_0) [b_1 + b_2(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^{n-1}].$$

Se  $b_1 = 0$ , então

$$P(z) = (z - z_0)^2 [b_2 + b_3(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^{n-2}],$$

e se continuarmos com o raciocínio de que  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 0$ , e assim por diante, teremos duas possibilidades:

(i) ou  $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  e  $P$  é um polinômio identicamente nulo,

(ii) ou  $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{k-1} = 0$ , porém  $b_k \neq 0$ ,  $k \leq n$ . Dizemos, nesta ocasião, que  $z_0$  é um zero de ordem  $k$  de  $P(z)$  e

$$P(z) = (z - z_0)^k [b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^{n-k}],$$

que equivale a  $P(z_0) = P'(z_0) = P''(z_0) = \dots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$  e  $P^{(k)}(z_0) \neq 0$ .

Chamando  $h(z) = b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^{n-k}$ , escrevemos  $P$  como  $P(z) = (z - z_0)^k h(z)$ , em que  $h(z_0) = b_k \neq 0$ .

Utilizaremos um raciocínio semelhante ao utilizado acima para demonstrar o Teorema 5.12.



*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  seja uma função analítica em  $z_0$  e  $z_0$  é um zero de ordem  $k$  da função  $f$ . Consideremos  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  a expansão em série de Taylor  $f$  centrada em  $z_0$  em  $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ , com  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Seja  $k$  um número natural tal que  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$  e  $a_k \neq 0$ ; esse número  $k$  existe, pois a série não é identicamente nula. Então, fatorando  $(z - z_0)^k$  em  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , temos

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n.$$

Chamando  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n$ , temos que  $h$  é analítica em  $z_0$ ,  $h(z_0) = a_k \neq 0$  e  $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$  para  $z \in A$ .

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função  $h$  analítica em  $z_0$ , tal que  $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$  e  $h(z_0) \neq 0$ , para  $z \in A$ . Como  $h$  é analítica em  $z_0$ , então  $h$  admite a representação

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n, \quad (5.3)$$

em que  $h(z_0) = a_k \neq 0$ .

Substituindo  $h$  dada em (5.3) em  $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$ , obtemos

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

em que  $a_n = 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ .

Claramente,  $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{k-1}(z_0) = 0$  e  $f^k(z_0) = h(z_0) \neq 0$ . Portanto,  $f$  tem um zero de ordem  $k$  em  $z_0$ .  $\square$

**Exemplo 5.13.** A função  $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$  tem um zero de ordem 3 em  $z = 0$ . Com efeito,

$$z^2 \operatorname{sen} z = z^2 \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right)$$

e fatorando  $z$  nesta série, temos que  $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z = z^3 h(z)$ , em que

$$h(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

$h$  é analítica em 0 e  $h(0) = 1 \neq 0$ . Pelo Teorema 5.12,  $z = 0$  é um zero de ordem 3 de  $f$ .

**Exemplo 5.14.** A função  $f(z) = e^{2z} - e^z$  possui zeros simples para  $z = 2n\pi i$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Basta notar que

$$\begin{aligned} f(2n\pi i) &= e^{2 \cdot 2n\pi i} - e^{2n\pi i} = \left(e^{4\pi i}\right)^n - \left(e^{2\pi i}\right)^n \\ &= [\cos(4\pi) + i \operatorname{sen}(4\pi)]^n - [\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi)]^n \\ &= (1 + 0i)^n - (1 + 0i)^n = 1^n - 1^n = 0. \end{aligned}$$

**Lema 5.15.** *Seja  $f$  uma função analítica em  $0 < |z - z_0| < \rho$ . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i)  $z_0$  é singularidade removível de  $f$ .
- (ii) existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .
- (iii)  $|f|$  é limitada em algum anel  $A(z_0, 0, \delta) \subset A(z_0, 0, \rho)$ , em que

$$A(z_0, 0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

e

$$A(z_0, 0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\}.$$

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Suponhamos que  $z_0$  seja uma singularidade removível de  $f$ . Então, sua série de Laurent em  $A(z_0, 0, \rho)$  é dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

de onde segue que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ , ou seja, existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Suponhamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \beta$ . Por definição de limite, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  (este menor que  $\rho$ ) tal que  $0 < |z - z_0| < \delta$  implica  $|f(z) - \beta| < 1$ .

Daí,  $|f(z)| < 1 + |\beta|$  para  $z \in A(z_0, 0, \rho)$  e, conseqüentemente,  $|f|$  é limitada no anel  $A(z_0, 0, \delta) \subset A(z_0, 0, \rho)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Suponhamos que exista uma constante real positiva  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , para  $z \in A(z_0, 0, \delta)$ , para algum  $0 < \delta < \rho$ .

Os coeficientes  $a_n$  das potências negativas da série de Laurent de  $f$  são dados por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz, \quad n \geq 1,$$

em que  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $0 < r < \delta$ . Pelo Lema 3.27 (Desigualdade ML), temos

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot Mr^{n-1} \cdot 2\pi r = Mr^n.$$

Fazendo  $r$  tender a zero, concluímos que  $a_n = 0$  para  $n \geq 1$  e  $z_0$  é singularidade removível de  $f$ .  $\square$

**Teorema 5.16.** *Seja  $f$  uma função analítica em  $0 < |z - z_0| < r$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $z_0$  seja um polo de ordem  $k$  de  $f$  é que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$  exista e seja um número complexo não nulo.*

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $z_0$  seja um polo de ordem  $k$  de  $f$ . Assim, sua série de Laurent em  $0 < |z - z_0| < r$  é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{com } a_{-k} \neq 0.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por  $(z - z_0)^k$ , temos

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+k}.$$

Fazendo  $z \rightarrow z_0$  em ambos os lados da igualdade, concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq 0.$$

Suponhamos, agora, que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \beta$ , em que  $\beta \neq 0$ . Escrevendo  $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$ , afirmamos, pelo Lema 5.15, que  $z_0$  é uma singularidade

removível de  $h$ . Assim,  $h$  pode ser representada pela série de potências

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

convergente no disco  $D(z_0, r)$ .

Como  $a_0 = \beta$ , temos

$$f(z) = \frac{\beta}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n,$$

de onde segue que  $z_0$  é polo de ordem  $k$  de  $f$ . □

**Corolário 5.17.** *Se  $f$  é uma função analítica em  $0 < |z - z_0| < r$  e  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ , então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

*Demonstração.* Supondo que  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ , vimos na demonstração do Teorema 5.16 que  $f$  pode ser escrita como  $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$ . Assim,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|h(z)|}{|z - z_0|^k} = |\beta| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|^k} = \infty,$$

em que  $\beta = \lim_{z \rightarrow z_0} h(z)$ . □

**Exemplo 5.18.** Consideremos a função  $f(z) = \frac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4}$ . Afirmamos que  $-2$  é um polo simples (ou de ordem 1) e que  $-i$  é um polo de ordem 4 de  $f$ . Com efeito,

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z + 2)f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} (z + 2) \frac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1 + 4i}{(z + i)^4} = \frac{1 + 4i}{(-2 + i)^4}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)^4 f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)^4 \frac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1 + 4i}{z + 2} = \frac{1 + 4i}{2 - i}.$$

Pelo Teorema 5.16, temos a veracidade da afirmação, já que os limites  $\lim_{z \rightarrow -2} (z + 2)f(z)$ ,  $\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)^4 f(z)$  existem e são não nulos.

Na próxima seção, definiremos o que é resíduo de uma função  $f$  em um ponto  $z_0$ , que denotamos por  $\text{Res}(f, z_0)$ , e estabeleceremos o Teorema dos Resíduos para um número finito de pontos singulares.

### 5.3 Resíduos

Lembremos que se  $z_0$  é uma singularidade isolada de uma função  $f$ , sua expansão em série de Laurent válida num anel é dada por

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

e os coeficientes  $a_n$  são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\delta)}{(\delta - z_0)^{n+1}} d\delta,$$

em que  $\gamma$  é um caminho fechado no anel que envolve  $z_0$  no sentido positivo.

Estudaremos o coeficiente  $a_{-1}$  do desenvolvimento em série de Laurent de  $f$ , o qual receberá o nome de resíduo, conforme formalizaremos a seguir.

**Definição 5.19.** *Seja  $f$  uma função complexa que possui uma singularidade isolada em  $z_0$ . O coeficiente  $a_{-1}$  da série de Laurent de  $f$  é denominado **resíduo** de  $f$  no ponto  $z_0$  e é denotado por  $\text{Res}(f, z_0)$ .*

**Exemplo 5.20.** A expansão em série de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  centrada em  $z = 1$ , válida no anel  $0 < |z-1| < 2$ , é dada por

$$f(z) = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \frac{-1/4}{z-1} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \dots,$$

em que  $a_{-1} = -\frac{1}{4}$ . Portanto,  $\text{Res}(f, 1) = -\frac{1}{4}$ .

Notemos que  $z = 1$  é um polo de ordem 2 de  $f$ . Então, é possível determinar o resíduo da função  $f$  tanto em um polo simples como em um polo de ordem  $k$ , conforme veremos nos teoremas a seguir.

**Teorema 5.21.** Se  $f$  é uma função analítica em  $0 < |z - z_0| < r$  e  $z_0$  é um polo simples de  $f$ , então

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (5.4)$$

*Demonstração.* Por hipótese,  $f$  tem um polo simples em  $z_0$ , então sua expansão em série de Laurent de centro  $z_0$  é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

em que  $a_{-1} \neq 0$ . Multiplicando por  $(z - z_0)$  ambos os membros da igualdade acima, temos

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Tomando o limite quando  $z \rightarrow z_0$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} \right) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

□

**Exemplo 5.22.** A função  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4i}$  tem um polo simples em  $2i$  e  $-2i$ . Além disso,

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \cdot \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{z + 2i} = \frac{2i}{2i + 2i} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \cdot \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z}{z - 2i} = \frac{-2i}{-2i - 2i} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo Teorema 5.21, temos  $\text{Res}(f, 2i) = \frac{1}{2}$  e  $\text{Res}(f, -2i) = -\frac{1}{2}$ .

Suponhamos que  $z_0$  é um polo de ordem 2 de uma função  $f$ . Então, sua série de Laurent é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

válida num determinado anel  $0 < |z - z_0| < r$ . Multiplicando por  $(z - z_0)^2$  ambos

os lados da igualdade, obtemos

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots$$

Notemos que o coeficiente  $a_{-1}$  está sendo multiplicado por  $z - z_0$  e, por definição,  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ . Como determinar  $a_{-1}$  nesse caso? Ao calcularmos a derivada das funções em relação a  $z$  na igualdade acima, temos

$$\frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + 4a_2(z - z_0)^3 + \dots$$

Quando  $z \rightarrow z_0$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

De modo geral, temos o seguinte resultado.

**Teorema 5.23.** *Se  $f$  é uma função analítica em  $0 < |z - z_0| < r$  e  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ , então*

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (5.5)$$

*Demonstração.* Como  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ , então sua expansão em série de Laurent centrada em  $z_0$  válida no anel  $0 < |z - z_0| < r$  é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por  $(z - z_0)^k$ , temos

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{k-2} + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+k}.$$

Assim, para obtermos o coeficiente  $a_{-1}$ , derivamos os dois lados da última igualdade  $k - 1$  vezes em relação a  $z$ . Assim,

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] = (k-1)! \cdot a_{-1} + k! \cdot a_0(z - z_0) + (k+1)! \cdot a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Fazendo  $z \rightarrow z_0$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] = (k-1)! \cdot a_{-1}.$$

Como  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ , concluímos que

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)].$$

□

**Exemplo 5.24.** Voltemos à função  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  do Exemplo 5.20, que tem um polo de ordem 2 em  $z = 1$  e um polo simples em  $z = 3$ . Pelo Teorema 5.23, temos que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-3} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = \frac{-1}{(1-3)^2} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

que é justamente o coeficiente  $a_{-1}$  encontrado anteriormente.

O próximo teorema nos mostrará que, em algumas situações, é possível calcular integrais de funções complexas ao somar resíduos em singularidades de  $f$  no interior de um caminho  $\gamma$ . Este resultado é chamado *Teorema dos Resíduos de Cauchy*. Antes de apresentar seu enunciado e sua demonstração, enunciaremos um resultado auxiliar também provado por Cauchy, cuja demonstração é simples, faz uso do Teorema de Green e pode ser encontrada em [15], página 126. Com esse resultado preliminar, provaremos o Teorema dos Resíduos.

**Teorema 5.25** (de Cauchy). *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Seja  $V \subset A$  um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira  $\partial V$  é formada por um número finito de curvas de Jordan suaves por partes<sup>1</sup>,*

---

<sup>1</sup>Uma **curva de Jordan suave por partes** é um caminho suave por partes, fechado e simples.



$\partial V = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ , e tal que  $V - \{\partial V\}$  é um domínio. Nessas condições,

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

**Teorema 5.26** (dos Resíduos de Cauchy). *Seja  $f$  uma função analítica no domínio  $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Suponhamos que  $\gamma \subset A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em  $A$  e contém todos os pontos  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Nessas condições,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}(f, a_n).$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  sejam circunferências centradas em  $a_1, a_2, \dots, a_m$  contidas em  $\gamma$  e que não tenham pontos em comum em  $\gamma$  (veja Figura 5.1).

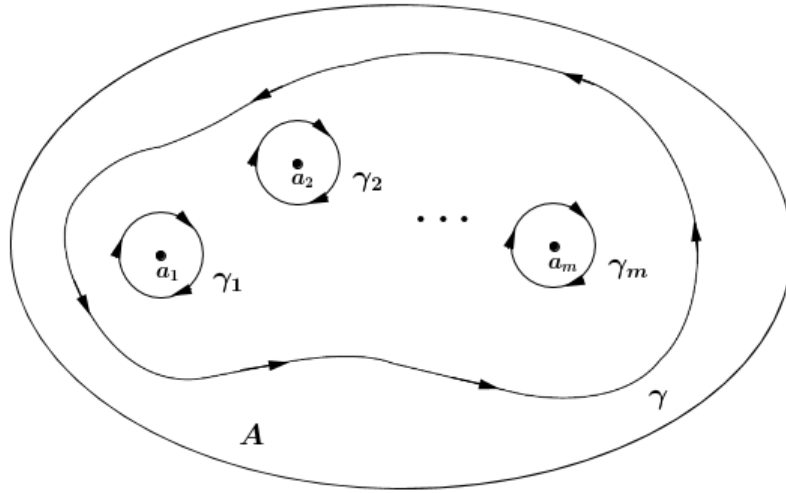


Figura 5.1: Pontos singulares no interior da região  $A$ .

Orientando  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , no sentido anti-horário, temos pelo Teorema 5.26 que

$$\int_{\gamma \cup -\gamma_1 \cup \dots \cup -\gamma_m} f(z) dz = 0,$$

o que equivale a

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \dots - \int_{\gamma_m} f(z) dz = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_m} f(z) dz.$$

Pelo Teorema de Laurent (Teorema 4.35), segue que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - a_m)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a_m)^n$$

é a série de Laurent centrada em  $a_m$  e

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Dessa forma,

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1} = \text{Res}(f, a_k)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \text{Res}(f, a_1) + 2\pi i \text{Res}(f, a_2) + \dots + 2\pi i \text{Res}(f, a_m) \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}(f, a_n), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

**Exemplo 5.27.** Voltemos à função  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  do Exemplo 5.20 e determinaremos a integral de  $f$  ao longo da circunferência  $|z| = 2$  por meio do Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26). Observemos que o polo  $z = 1$  está no interior da circunferência  $|z| = 2$ . Assim,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2},$$

lembrando que

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = -\frac{1}{4} \quad (\text{veja o Exemplo 5.24}).$$

**Exemplo 5.28.** Consideremos a função  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 13}$  e calculemos a integral de  $f$  ao longo do caminho  $\gamma$  definido por  $|z - 3i| = 3$ . Notemos que  $f$  pode ser escrita como  $f(z) = \frac{1}{(z + 2 - 3i)(z + 2 + 3i)}$  e que  $z = -2 + 3i$  e  $z = -2 - 3i$  são polos simples de  $f$ , porém, apenas  $z = -2 + 3i$  está no interior do caminho  $\gamma(t) = 3 + 3e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Portanto, pelo Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26), temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{(z + 2 - 3i)(z + 2 + 3i)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2 + 3i) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2+3i} (z + 2 - 3i) \cdot \frac{1}{(z + 2 - 3i)(z + 2 + 3i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Os dois próximos teoremas são aplicações (e consequências) importantes do Teorema dos Resíduos. O primeiro teorema, conhecido como Princípio do Argumento, nos permite contar os zeros e polos, contados cada um com suas multiplicidades e ordens, respectivamente. A segunda consequência, nomeada Teorema de Rouché, é útil na determinação do número de zeros de uma função analítica.

**Teorema 5.29** (Princípio do Argumento). *Seja  $f$  uma função analítica em um domínio  $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Suponhamos que  $\gamma \subset A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em  $A$  e contém todos os pontos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Suponhamos que esses pontos são polos de  $f$  e que  $f$  não tenha zeros ao longo de  $\gamma$ . Nessas condições,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P, \quad (5.6)$$

em que  $Z$  é o número de zeros de  $f$  na região interior a  $\gamma$ , contados cada um com suas multiplicidades e  $P$  é o número de polos de  $f$  na região interior a  $\gamma$ , contados cada um com suas ordens.

*Demonstração.* Pelo Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26), a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (5.7)$$

é a soma dos resíduos da função  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  na região interior a  $\gamma$ . Dado um ponto  $a$  nessa região, temos três casos a considerar:

(I)  $f(a) \neq 0$ ;

(II)  $a$  é um zero de multiplicidade  $n$  de  $f$ ;

(III)  $a$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ .

O caso (I) fornece nada à integral (5.7), pois o integrando não possui resíduo nesse ponto. Consideremos, então, os casos (II) e (III).

(II) Seja  $a$  um zero de multiplicidade  $n$  de  $f$ . Então, em um disco  $|z - a| < r$ ,  $f$  pode ser escrita como  $f(z) = (z - a)^n h(z)$ , em que  $h(a) \neq 0$ , sendo  $h$  analítica. Derivando  $f$  em relação a  $z$ , obtemos  $f'(z) = n(z - a)^{n-1} h(z) + (z - a)^n h'(z)$ , e dividindo ambos os lados dessa igualdade por  $f(z)$ , vem que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - a)^{n-1} h(z)}{(z - a)^n h(z)} + \frac{(z - a)^n h'(z)}{(z - a)^n h(z)},$$

o que implica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Observemos que o termo  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  possui um polo simples em  $z = a$  e, pelo Teorema 5.21, vale que

$$\text{Res} \left( \frac{f'}{f}, a \right) = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z - a) \left( \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[ n + (z - a) \frac{h'(z)}{h(z)} \right] = n,$$

resultado este que é a multiplicidade do zero  $z = a$ . É importante observar que  $(z - a) \frac{h'(z)}{h(z)} \rightarrow 0$ , quando  $z \rightarrow a$ , pois  $(z - a) \rightarrow 0$ , quando  $z \rightarrow a$ ,  $h(a) \neq 0$  e  $h$  é analítica, de onde segue que a função  $\frac{h'(z)}{h(z)}$  é limitada numa vizinhança de  $a$ .

(III) Agora, seja  $z = a$  um polo de ordem  $k$  de  $f$ . Então, em um disco  $|z - a| < r$ ,  $f$  pode ser escrita como  $f(z) = \frac{h(z)}{(z - a)^k}$ , em que  $h$  é analítica e  $h(a) \neq 0$ . Derivando  $f$ , temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{h'(z)(z - a)^k - k(z - a)^{k-1}h(z)}{(z - a)^{2k}} = \frac{h'(z)(z - a)^k}{(z - a)^{2k}} - \frac{k(z - a)^{k-1}h(z)}{(z - a)^{2k}} = \\ &= h'(z)(z - a)^{-k} - k(z - a)^{-k-1}h(z). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade anterior por  $f(z)$ , obtemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{k}{z - a} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{-k}{z - a}.$$

Com o mesmo argumento anterior, temos que o resíduo em  $z = a$  é igual a  $-k$ , valor simétrico da ordem do polo  $z = a$  de  $f$ .

O que foi mostrado em (II) e (III) justifica a fórmula (5.6), visto que a integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  é a soma dos resíduos da função  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  na região interior a curva  $\gamma$ .  $\square$

**Exemplo 5.30.** Calculemos a integral  $\int_{\gamma} \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz$ , em que  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ . Notemos que  $f(z) = z^2 + z$  e  $f'(z) = 2z + 1$ . Pelo Teorema 5.29, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz = Z - P = 2 - 0 = 2,$$

o que implica

$$\int_{\gamma} \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot (2) = 4\pi i,$$

pois o número de zeros de  $f$  é igual a 2, sendo estes  $z = 0$  e  $z = -1$  e o número de polos é igual a zero.

**Corolário 5.31.** Nas mesmas hipóteses do Teorema 5.29, se  $f$  e  $\eta$  são funções analíticas em  $A$ , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^p \eta(\zeta_k) m_{\zeta_k}(f) \quad (5.8)$$

em que  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$  são os zeros de  $f$  na região interior a  $\gamma$  e  $m_{\zeta_k}(f)$  é a multiplicidade de  $\zeta_k$  como zero de  $f$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26), segue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (5.9)$$

é a soma dos resíduos da função  $\eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$  na região interior a  $\gamma$ . Dado um ponto  $a$  nessa região, temos duas possibilidades, uma vez que  $f$  e  $\eta$  são analíticas:

(i) ou  $f(a) \neq 0$ ;

(ii) ou  $a$  é um zero de multiplicidade  $m$  de  $f$ .

Notemos que se (i) ocorre, então a integral em (5.9) é igual a zero, pois o integrando possui resíduo nulo nesse ponto  $a$ .

Quanto a (ii), suponhamos que  $a$  seja um zero de multiplicidade  $m$  de  $f$ , localizado no interior da região limitada por  $\gamma$ . Nesse caso, em um disco  $D(a, \delta)$  vale que  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  onde  $g(a) \neq 0$  e  $g$  é analítica. Derivando  $f$  em relação a  $z$ , temos  $f'(z) = m(z - a)^{m-1} g(z) + (z - a)^m g'(z)$ , e dividindo ambos os lados dessa igualdade por  $f(z)$ , obtemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  é analítica em  $D(a, \delta)$ , temos  $\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  e, portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (5.10)$$

Essa é a série de Laurent de  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  centrada em  $a$  e nesse ponto o resíduo é  $m$ .

Por outro lado, a função  $\eta$  admite uma representação em série de Taylor centrada em  $a$  dada por, digamos

$$\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - a)^n. \quad (5.11)$$

Multiplicando a igualdade (5.10) por  $\eta(z)$  dada em (5.11), obtemos

$$\eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b_0 m}{z-a} + m \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} (z-a)^n + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right].$$

Por conseguinte, o resíduo de  $\eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$  em  $a$  é  $b_0 m = \eta(a) m_a(f)$  e a prova está completa.  $\square$

**Observação 5.32.** Se  $\eta \equiv 1$  em  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ , então o Corolário 5.31 garante que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f,$$

em que  $Z_f$  é o número de zeros de  $f$  na região interior a  $\gamma$ , cada um deles contados tantas vezes quanto for sua multiplicidade.

Uma consequência do Princípio do Argumento (Teorema 5.29) é o resultado a seguir conhecido como Teorema de Rouché.

**Teorema 5.33** (de Rouché). *Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio e  $f$  e  $g$  funções analíticas definidas em  $A$ . Consideremos  $R \subset A$  uma região fechada e limitada, tal que  $\partial R$ , sua fronteira, é uma curva de Jordan suave por partes e  $R \setminus \partial R$  um domínio. Se  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ , para todo  $z \in \partial R$ , então  $f$  e  $g$  tem o mesmo número de zeros no interior de  $R$ , cada um deles contado quantas vezes for sua multiplicidade.*

*Demonstração.* Inicialmente, observemos que a desigualdade  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ , para todo  $z \in \partial R$ , implica que  $f$  e  $g$  não possuem zeros ao longo de  $\partial R$ . Dividindo essa desigualdade por  $|f(z)|$ , temos  $\left| 1 - \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ , para todo  $z \in \partial R$ , ou equivalentemente,

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \text{para todo } z \in \partial R. \quad (5.12)$$

Escrevendo  $\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ , temos

$$\varphi'(z) = \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{[f(z)]^2} = \frac{g'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z)g(z)}{[f(z)]^2}.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por  $\varphi(z)$ , obtemos

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Da Observação 5.32 segue que

$$Z_f - Z_g = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz.$$

Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = 0$ . Para isso, orientemos o caminho  $\partial R$  no sentido anti-horário e suponhamos que ele é descrito por  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Temos

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|,$$

de onde vem

$$|\varphi(\gamma(t)) - 1| < 1 \quad (\text{veja (5.12)}). \quad (5.13)$$

Consideremos o caminho  $\rho(t) = \varphi(\gamma(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , fechado e suave por partes (uma vez que  $\varphi$  é analítica em  $\gamma$ ). Esse caminho está inteiramente contido no disco aberto  $D(1, 1)$ , já que (5.13) ocorre. Portanto,

$$\int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = \int_0^1 \frac{\varphi'(\gamma(t))}{\varphi(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt.$$

Porém, a integral  $\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt$  nada mais é que a integral da função  $\eta(z) = \frac{1}{z}$  ao longo do caminho  $\rho$ :

$$\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt = \int_{\rho} \frac{1}{z} dz.$$

Como o caminho  $\rho$  está contido no disco  $D(1, 1)$  e o ramo principal do logaritmo,  $\log z$ , é uma primitiva de  $\eta(z) = \frac{1}{z}$  em  $D(1, 1)$ , segue que

$$\int_{\rho} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = 0,$$

pelo Teorema 3.19, visto que  $\rho$  é fechado. Logo,  $Z_f = Z_g$ . □



Segue como corolário do Teorema de Rouché o seguinte teorema:

**Teorema 5.34** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é um polinômio de grau  $n$ , então  $P(z)$  tem precisamente  $n$  zeros, contados com multiplicidade.*

*Demonstração.* Escrevemos  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , com  $a_n \neq 0$  e definamos  $Q(z) = a_n z^n$ . Claramente,  $Q$  tem um zero de multiplicidade  $n$  em  $z = 0$  e

$$|Q(z) - P(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|.$$

Se  $z \neq 0$ , temos

$$\left| \frac{Q(z) - P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} \right|.$$

Como

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} \right| = 0,$$

existe  $R > 0$  tal que se  $|z| > R$ , então

$$\left| \frac{Q(z) - P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} \right| < 1. \quad (5.14)$$

Dessa forma, escolhendo  $\gamma$  como sendo um círculo de centro 0 e raio  $r > R$ , concluímos por (5.14) que, ao longo de  $\gamma$ ,

$$|Q(z) - P(z)| < |Q(z)|.$$

Pelo Teorema de Rouché (Teorema 5.33),  $P$  tem exatamente  $n$  zeros, contados com multiplicidade.  $\square$

**Exemplo 5.35.** Vamos mostrar que os zeros da função  $g(z) = z^5 + 3z + 14$  estão no interior do disco  $|z| < 2$ . Com efeito, notemos que a função  $f(z) = z^5$  possui o mesmo número de zeros que  $g$  (pelo Teorema 5.34) e tem um zero de multiplicidade 5 em  $z = 0$ . Sendo  $\gamma$  a circunferência  $|z| = 2$ , verifiquemos que  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ , para todo  $z \in \gamma$ . De fato, se  $|z| = 2$ , então

$$|z^5 - (z^5 + 3z + 1)| = |-3z - 1| = |3z + 1| \leq 3|z| + 1 = 7.$$

Como  $|f(z)| = |z|^5 = 2^5 = 32$ , temos  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  e, pelo Teorema de Rouché (Teorema 5.33), segue que  $g$  também tem 5 zeros no interior do disco  $|z| < 2$ , uma vez que  $f$  tem 5 zeros nesse disco ( $z = 0$  com multiplicidade 5).

## 5.4 Exercícios propostos

1. Mostre que  $z = 0$  é uma singularidade removível de cada função. Determine o valor que se deve atribuir à função, de modo que, para  $z = 0$ ,  $f$  seja analítica.

(a)  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1};$

(d)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} 4z - 4z}{z^2};$

(b)  $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z};$

(e)  $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sen} z};$

(c)  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z};$

(f)  $f(z) = \frac{\cosh 2z - 1}{\operatorname{sen}^2 z}.$

2. Nas funções a seguir, determine os polos com suas respectivas ordens.

(a)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z - \pi)};$

(d)  $f(z) = \frac{e^z}{z - e^{-z}};$

(b)  $f(z) = \frac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5};$

(e)  $f(z) = \frac{z - 1}{(z + 1)(z^3 + 1)};$

(c)  $f(z) = \frac{1 + 4i}{(z + 2)^2(z + i)^4};$

(f)  $f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen}^2 \pi z}.$

3. Nos itens de (a) a (j), calcule o resíduo  $\operatorname{Res}(f, z_0)$  em cada polo indicado da função dada.

(a)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$  e  $z_0 = 0;$

(b)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 16}$  e  $z_0 = 4i;$

(c)  $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$  e  $z_0 = 1;$

$$(d) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)} \quad \text{e} \quad z_0 = 0;$$

$$(e) \quad f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-2)^2} \quad \text{e} \quad z_0 = 2;$$

$$(f) \quad f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z} \quad \text{e} \quad z_0 = 0;$$

$$(g) \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5} \quad \text{e} \quad z_0 = 1;$$

$$(h) \quad f(z) = \frac{5z^2 - 4z + 3}{(z+1)(z+2)} \quad \text{e} \quad z_0 = -1;$$

$$(i) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4} \quad \text{e} \quad z_0 = 4;$$

$$(j) \quad f(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^3(z+3)} \quad \text{e} \quad z_0 = 1.$$

4. Nos itens de (a) a (j), utilize o Teorema dos Resíduos para calcular a integral ao longo do caminho especificado.

$$(a) \quad \int_{|z|=2} \operatorname{tg} z \, dz;$$

$$(b) \quad \int_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}} \, dz;$$

$$(c) \quad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} \, dz;$$

$$(d) \quad \int_{|z-3i|=3} \frac{1}{z^2 + 4z + 13} \, dz;$$

$$(e) \quad \int_{|z+3i|=3} \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} \, dz;$$

$$(f) \quad \int_{|z-2i|=3} \frac{1}{z \operatorname{sen} z} \, dz;$$

$$(g) \quad \int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} \, dz;$$

$$(h) \quad \int_{|z-1|=2} z^5 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{z^2} \right) \, dz;$$

$$(i) \quad \int_{|z|=8} \frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z} \, dz.$$

5. Prove que as únicas singularidades isoladas de uma função racional  $f$  são polos ou singularidades removíveis.
6. Seja  $f$  uma função analítica e diferente de zero no ponto  $z_0$ . Mostre que a função  $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  tem um polo simples nesse ponto, com resíduo igual a  $f(z_0)$ .

- 
7. Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função inteira. Suponha que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  e que o limite  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  existe e é não nulo. Mostre que  $f$  é constante.



## 6 Algumas aplicações

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações da teoria da Análise Complexa. Dividiremos seu conteúdo em duas seções.

Na Seção 6.1, exibiremos aplicações do Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26) visto no capítulo anterior. Revisaremos brevemente o estudo da Transformada de Laplace e veremos como determinar sua inversa por meio do Teorema 5.26. Através do mesmo resultado, exploraremos o cálculo de integrais da forma  $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  e integrais impróprias reais.

Já na Seção 6.2, apresentaremos a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem quando as raízes de sua equação característica são números complexos.

### 6.1 Aplicações do Teorema dos Resíduos

Na presente seção, utilizaremos o Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26) para calcular a Transformada Inversa de Laplace e para calcular integrais reais sob determinadas condições.

#### 6.1.1 Transformada de Laplace

Sabe-se que a **transformada de Laplace** de uma função real  $f$  definida no intervalo  $[0, \infty[$  é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s), \quad (6.1)$$

a quando a integral imprópria em (6.1) converge.

A função  $K(s, t) = e^{-st}$  é denominada *núcleo da transformada*. Ao aplicar (6.1), nos deparamos com dois problemas.

- (i) *Problema direto*: dada a função  $f(t)$  que satisfaz certas condições, determinar sua transformada de Laplace.
- (ii) *Problema inverso*: determinar a função  $f(t)$  que tem uma dada transformada  $F(s)$ .

A função  $f(t)$  é denominada **transformada inversa de Laplace** e é denotada por  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

**Exemplo 6.1.** A transformada da função  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = e^{kt}$  é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{kt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-k)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(s-k)b}}{-(s-k)} - \frac{1}{-(s-k)} \right] = 0 - \frac{1}{-(s-k)} = \frac{1}{s-k} = F(s),\end{aligned}$$

se  $s > k$ .

Observemos que se  $s$  for uma variável complexa, isto é,  $s = x + iy$ , então

$$\frac{e^{-(s-k)b}}{-(s-k)} = \frac{e^{-sb} \cdot e^{kb}}{-(s-k)} = \frac{e^{-bx}(\cos by + i \operatorname{sen} by)e^{kb}}{-(s-k)}$$

e  $e^{-bx} \rightarrow 0$  quando  $b \rightarrow \infty$ , se  $x > 0$ . Logo,  $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$  quando  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Recordaremos algumas definições importantes para podermos exibir condições suficientes para garantir a existência da transformada de Laplace para uma função  $f$ .

**Definição 6.2** (Continuidade por partes). *Uma função  $f$  é **contínua por partes** em um intervalo  $[a, b]$  se este puder ser particionado em um número finito de subintervalos  $(t_i, t_{i+1})$  de forma que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , tal que*

- (i)  *$f$  é contínua em cada subintervalo aberto  $(t_i, t_{i+1})$ ;*

(ii) os limites laterais

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t) \quad e \quad \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} f(t), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

existem e são finitos.

**Definição 6.3.** Dizemos que uma função  $f$  é de **ordem exponencial** em  $[0, \infty[$  se existem constantes reais  $M > 0$ ,  $T > 0$  e  $k$  tais que  $|f(t)| \leq M e^{kt}$ , para todo  $t > T$ .

Notemos que se  $f$  é de ordem exponencial, então  $e^{-kt} |f(t)| \leq M$ , para  $t > T$ , ou seja, a função  $e^{-kt} |f(t)|$  é limitada, para  $t > T$ .

**Teorema 6.4.** Se  $f$  é uma função contínua por partes em  $[0, \infty[$  e de ordem exponencial  $k$ , para  $t > T$ , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

existe, para  $\operatorname{Re}(s) > k$ .

*Demonstração.* Pela propriedade aditiva das integrais definidas, temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = I_1 + I_2.$$

(i) A integral  $I_1$  existe, pois podemos escrevê-la como a soma de integrais em intervalos onde a função  $e^{-st} f(t)$  é contínua.

(ii) Vamos verificar que a integral  $I_2$  também existe. Com efeito, tomemos  $s$  como a variável complexa  $s = x + iy$ .

Por hipótese,  $f$  é de ordem exponencial  $k$ , para  $t > T$ , ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| \leq M e^{kt}$ , para  $t > T$ . Usando  $|e^{-st}| = |e^{-xt}(\cos yt + i \operatorname{sen} yt)| = e^{-xt}$ , obtemos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^\infty |e^{st} f(t)| dt \leq M \int_T^\infty e^{-xt} \cdot e^{kt} dt = M \int_T^\infty e^{-(x-k)t} dt = \\ &= M \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_T^b e^{-(x-k)t} dt = M \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(x-k)t}}{-(x-k)} \right]_T^b \\ &= M \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(x-k)b}}{-(x-k)} - \frac{e^{-(x-k)T}}{-(x-k)} \right]. \end{aligned}$$



Notemos que  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-(x-k)b}}{-(x-k)} = 0$ , se  $x > k$ . Portanto,  $|I_2| \leq M \frac{e^{-(x-k)T}}{-(x-k)}$ , para  $x > k$ , em que  $x = \operatorname{Re}(s)$ .

Como  $\int_T^\infty M e^{-(x-k)t} dt$  converge a  $M \frac{e^{-(x-k)T}}{x-k}$  se  $x > k$ , segue, pelo Teste da Comparação para integrais impróprias (veja [11], página 144), que a integral

$$\int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt$$

converge se  $x > k$ , o que implica que  $I_2$  existe para  $x = \operatorname{Re}(s) > k$ .

Por (i) e (ii), concluímos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

existe, para  $\operatorname{Re}(s) > k$ . □

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada na referência [7], página 26 (Teorema 6.1).

**Teorema 6.5** (Transformada de Laplace como uma função analítica). *Se  $f$  é uma função contínua por partes no intervalo  $[0, \infty[$  e de ordem exponencial  $k$  para  $t \geq 0$ , então a transformada de Laplace*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

*é uma função analítica no semiplano direito definido por  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .*

A demonstração do resultado enunciado a seguir pode ser encontrada na referência [5], páginas 29 e 30.

**Teorema 6.6** (Transformada inversa de Laplace). *Sejam  $f$  e  $f'$  funções contínuas por partes em  $[0, \infty[$ . Se  $f$  é de ordem exponencial  $k$  para  $t \geq 0$  e  $F(s)$  é uma transformada de Laplace, então a transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  é dada por*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds \quad (6.2)$$

*em que  $\alpha > k$ .*

O limite na igualdade (6.2), que define um valor principal da integral, é usualmente escrito como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (6.3)$$

em que os limites de integração indicam que esta é feita ao longo do caminho retilíneo vertical infinito  $Re(s) = x = \alpha$ . Aqui,  $\alpha$  é uma constante positiva maior do que  $k$  e maior do que as partes reais das singularidades no semiplano à esquerda de  $x = \alpha$ . A integral em (6.3) é conhecida como **integral de contorno de Bromwich**.

O fato de  $F(s)$  ter singularidades  $s_1, s_2, \dots, s_n$  à esquerda da reta  $x = \alpha$  permite que calculemos (6.2) usando um caminho fechado que envolva tais singularidades. Um caminho fechado geralmente utilizado consiste em uma semicircunferência  $\gamma_1$  de raio  $R$  e centro  $(\alpha, 0)$  e em um segmento de reta vertical  $\gamma_2$  paralelo ao eixo  $y$ , que passa pelo ponto  $(\alpha, 0)$  e se estende de  $y = \alpha - iR$  a  $y = \alpha + iR$ . O raio  $R$  deve ser maior do que o maior número no conjunto dos módulos das singularidades,  $\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_n|\}$ , isto é, o suficientemente grande para que todas as singularidades estejam no interior da semicircunferência. Com o caminho  $\gamma$  escolhido dessa forma, a integral em (6.2) pode ser calculada com o uso do Teorema dos Resíduos. Se  $R \rightarrow \infty$ , a parte vertical do caminho tende a reta vertical infinita, que é o caminho em (6.3).

O caminho descrito acima será utilizado para calcular a transformada inversa de Laplace de uma função através do Teorema dos Resíduos. Antes de exibirmos o teorema que trata desse cálculo, vamos demonstrar um resultado auxiliar.

**Lema 6.7.** Se  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , então  $\frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$ .

*Demonstração.* Seja

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta} & , \quad \text{se } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad \text{se } \theta = 0. \end{cases}$$

Notemos que se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , então  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ . Se mostrarmos que  $f$  é decrescente em  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , teremos  $f(\theta) \geq \frac{2}{\pi}$  para todo  $\theta$  nesse intervalo. Façamos isso.

Fixemos  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (veja [11], Teorema 7, página 96), existe  $\alpha \in (0, \theta)$  tal que

$$\cos \alpha = \frac{\sin \theta - \sin 0}{\theta - 0}.$$

Assim, para tal  $\alpha \in (0, \theta)$ , temos

$$f'(\theta) = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2} = \frac{\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta} = \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\theta}.$$

Como a função cosseno é decrescente em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , segue que  $f'(\theta) < 0$  para todo  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 6.8.** *Seja  $F(s)$  uma função obtida pela transformada de Laplace que tem um número finito de polos  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , à esquerda da reta vertical  $\operatorname{Re}(s) = \alpha$ . Seja  $\gamma$  o caminho conforme Figura 6.1. Se a função  $sF(s)$  é limitada em  $\gamma_1$ , a semicircunferência de raio  $R$  e centro  $(\alpha, 0)$ , quando  $R \rightarrow \infty$ , então*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(e^{st}F(s), s_k\right). \quad (6.4)$$

*Demonstração.* Sejam  $\gamma_1$  a semicircunferência de raio  $R$  e centro  $(\alpha, 0)$  e  $\gamma_2$  o segmento de reta vertical que se estende de  $y = \alpha - iR$  e  $y = \alpha + iR$ . Da Figura 6.1 e do Teorema dos Resíduos (Teorema 5.26), segue que

$$\int_{\gamma_1} e^{st}F(s) ds + \int_{\gamma_2} e^{st}F(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(e^{st}F(s), s_k\right),$$

o que implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st}F(s) ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(e^{st}F(s), s_k\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{st}F(s) ds.$$

Primeiramente, mostraremos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{st}F(s) ds = 0.$$

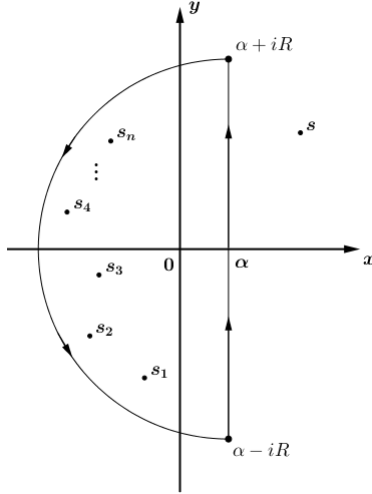


Figura 6.1: Caminho  $\gamma$  que envolve todas as singularidades.

Se a semicircunferência  $\gamma_1$  for parametrizada por  $s = \alpha + Re^{i\theta}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ , então  $ds = Rie^{i\theta} d\theta$ . Como  $s - \alpha = Re^{i\theta}$ , segue que  $ds = (s - \alpha)i d\theta$ . Assim,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{(\alpha + Re^{i\theta})t} F(\alpha + Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |e^{\alpha t + Rte^{i\theta}}| |F(\alpha + Re^{i\theta})| |Rie^{i\theta}| d\theta. \end{aligned}$$

Observe que

$$|e^{\alpha t + Rte^{i\theta}}| = |e^{\alpha t} e^{Rt(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{\alpha t} e^{Rt \cos \theta} e^{iRt \sin \theta}| = e^{\alpha t} e^{Rt \cos \theta},$$

pois  $|e^{iRt \sin \theta}| = 1$ .

Em  $|Rie^{i\theta}|$ , temos para  $R$  suficientemente grande e  $\alpha < s$

$$|Rie^{i\theta}| = |s - \alpha||i| \leq |s| + |\alpha| < |s| + |s| = 2|s| \quad \text{e} \quad s|F(s)| < M.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{M}{\pi} e^{\alpha t} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta.$$

Fazendo  $\theta = \omega + \frac{\pi}{2}$ , a integral  $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta$  se torna

$$\int_0^\pi e^{-Rt \sin \omega} d\omega = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \sin \omega} d\omega.$$

Como  $\sin \omega \geq \frac{2\omega}{\pi}$  para todo  $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (veja Lema 6.7), vemos que

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \sin \omega} d\omega \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2Rt\omega}{\pi}} d\omega = \left[ -\frac{\pi}{Rt} e^{-\frac{2Rt\omega}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{Rt} (1 - e^{-Rt}).$$

Usando as desigualdades obtidas anteriormente, concluímos que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{M e^{\alpha t}}{Rt} (1 - e^{-Rt}).$$

Quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $\frac{M e^{\alpha t}}{Rt} (1 - e^{-Rt}) \rightarrow 0$  e, portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds = 0.$$

Logo, quando  $R \rightarrow \infty$ , em

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res} (e^{st} F(s), s_k) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{st} F(s) ds$$

segue

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res} (e^{st} F(s), s_k).$$

□

**Exemplo 6.9.** Vamos utilizar o Teorema 6.8 para calcular  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^6} \right\}$ , para

$\operatorname{Re}(s) > 0$ . Notemos que  $F(s) = \frac{1}{s^6}$  tem um polo de ordem 6 em  $s = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^6} \right\} = \operatorname{Res} \left( e^{st} \cdot \frac{1}{s^6}, 0 \right) = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} \left[ (s-0)^6 \cdot \frac{e^{st}}{s^6} \right] = \\ &= \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} \left[ s^6 \cdot \frac{e^{st}}{s^6} \right] = \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} [e^{st}] = \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} t^5 e^{st} = \frac{1}{120} t^5. \end{aligned}$$

Vale observar que utilizamos a fórmula

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)],$$

fornecida pelo Teorema 5.23.

**Exemplo 6.10.** *Determinemos  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+4} \right\}$ . A função  $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$  tem dois polos simples,  $s = 2i$  e  $s = -2i$ . Aplicando o Teorema 6.8, temos*

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+4} \right\} = \operatorname{Res} \left( \frac{1}{s^2+4}, 2i \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{1}{s^2+4}, -2i \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 2i} \left[ (s-2i) \cdot \frac{e^{st}}{(s-2i)(s+2i)} \right] + \lim_{s \rightarrow -2i} \left[ (s+2i) \cdot \frac{e^{st}}{(s-2i)(s+2i)} \right] = \\ &= \frac{e^{2it}}{4i} + \frac{e^{-2it}}{-4i} = \frac{\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t}{4i} - \frac{\cos(-2t) + i \operatorname{sen}(-2t)}{4i} = \\ &= \frac{\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t - \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t}{4i} = \frac{2i \operatorname{sen} 2t}{4i} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

### 6.1.2 Cálculo de integrais reais

O objetivo desta seção é mostrar a aplicabilidade do Teorema dos Resíduos no cálculo de integrais reais sob determinadas condições.

### Integrais trigonométricas da forma $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Para este caso, converteremos a integral acima em uma integral complexa em que o caminho  $\gamma$  é a circunferência unitária  $|z| = 1$  centrada na origem. A parametrização dessa circunferência centrada na origem é dada por  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Assim,  $dz = i e^{i\theta} d\theta$  e, além disso, sabemos que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Observemos que  $z^{-1} = \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ , logo  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$  e  $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$ . Portanto, a integral

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \tag{6.5}$$

se torna a integral

$$\oint_{\gamma} F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right) \frac{dz}{iz}, \tag{6.6}$$

em que  $\gamma$  é a circunferência unitária  $|z| = 1$ .

**Exemplo 6.11.** Vamos calcular a integral  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$ ,  $a > 1$ , fazendo as substituições mencionadas.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{\left[a + \frac{1}{2}(z + z^{-1})\right]^2} \frac{dz}{iz} &= \oint_{\gamma} \frac{1}{\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \oint_{\gamma} \frac{1}{\left(\frac{z^2+2az+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \\ &= \oint_{\gamma} \frac{4z^2}{(z^2 + 2az + 1)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z^2 + 2az + 1)^2} dz. \end{aligned}$$

O polinômio  $z^2 + 2az + 1$  pode ser fatorado em um produto de polinômios do 1º grau:  $z^2 + 2az + 1 = (z + a - \sqrt{a^2 - 1})(z + a + \sqrt{a^2 - 1})$ .

O caminho de integração é a circunferência  $|z| = 1$ . Sendo  $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$

e  $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ , somente  $z_1$  pode estar no interior de  $|z| = 1$ . Portanto,

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1),$$

pelo Teorema dos Resíduos. Vamos calcular o resíduo de  $f$  em  $z_1$ . Como  $z_1$  é um polo de ordem 2, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [(z - z_1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z - z_2)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{(z - z_2)^2 - 2z(z - z_2)}{(z - z_2)^4} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{(z - z_2)(z - z_2 - 2z)}{(z - z_2)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{-z - z_2}{(z - z_2)^3} \right] = \frac{a}{4(\sqrt{a^2 - 1})^3}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\frac{4}{i} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z^2 + 2az + 1)^2} dz = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_1) = 8\pi \cdot \frac{a}{4(\sqrt{a^2 - 1})^3} = \frac{2a\pi}{(\sqrt{a^2 - 1})^3}.$$

### Integrais impróprias reais

Seja  $f$  uma função real contínua definida no intervalo  $[0, \infty[$ . Do Cálculo Integral sabemos que  $I_1 = \int_0^{\infty} f(x) dx$  é dada pelo limite

$$I_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x) dx. \quad (6.7)$$

Se o limite acima existe, dizemos que a integral  $I_1$  converge; caso o limite não exista, dizemos que  $I_1$  diverge.

Da mesma forma, temos que, se  $f$  está definida em  $(-\infty, 0]$ ,

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 f(x) dx. \quad (6.8)$$



Se  $f$  é contínua em  $]-\infty, \infty[$ , a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  é definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = I_1 + I_2, \quad (6.9)$$

desde que as duas integrais do lado direito converjam. Caso uma das duas integrais,  $I_1$  ou  $I_2$ , diverja, a integral do lado esquerdo da igualdade também será divergente.

É importante ressaltar que

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x) dx \neq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

Para que a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  convirja, é necessário que os limites em (6.7) e (6.8) existam independentemente um do outro. Entretanto, caso saibamos *a priori* que uma integral imprópria  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  converge, podemos calculá-la empregando o seguinte processo de limite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx. \quad (6.10)$$

O limite simétrico em (6.10) pode existir mesmo que a integral imprópria  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  diverja. Um exemplo simples é dado pela integral imprópria  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  que diverge, pois

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} = \infty,$$

porém

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [r^2 - (-r)^2] = 0.$$

O limite  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$  é denominado **valor principal de Cauchy** e é denotado por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (6.11)$$

No caso de  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x dx$ , temos  $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$ .

Percebemos assim que, mesmo que a integral em (6.9) diverja, podemos obter

um valor principal de Cauchy. Caso a integral imprópria convirja, o valor principal de Cauchy terá o mesmo valor da integral.

Para utilizar a teoria dos resíduos com o objetivo de calcular a integral em (6.9), em que  $f$  é uma função racional  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  contínua em  $]-\infty, \infty[$ , substituímos a variável real  $x$  pela complexa  $z$  e calculamos a integral da função complexa  $f$  ao longo de um caminho fechado  $\gamma$ , dado pelo intervalo  $[-r, r]$  no eixo real e uma semicircunferência com raio suficientemente grande para envolver todos os polos de  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  contidos no semiplano superior  $\text{Im}(z) > 0$ .

Pelo Teorema dos Resíduos, temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{sc}} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (6.12)$$

em que  $\gamma_{sc}$  é a semicircunferência descrita e  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , são os polos no semiplano  $\text{Im}(z) > 0$ .

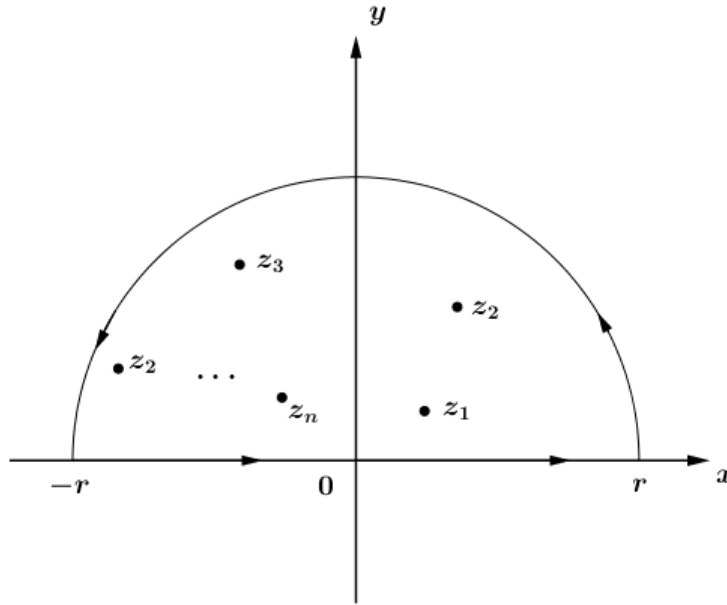


Figura 6.2: Caminho  $\gamma_{sc}$  fechado.

Se

$$\int_{\gamma_{sc}} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty,$$

então

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (6.13)$$

**Exemplo 6.12.** Determinemos o valor principal de Cauchy da integral imprópria  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$ . Observemos que

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)}.$$

Consideremos o caminho fechado  $\gamma$  que consiste no intervalo  $[-r, r]$  no eixo das abscissas e na semicircunferência  $\gamma_{sc}$  com raio  $r > \sqrt{2}$ , pois é necessário envolver o polo  $z = 1 + i$ , pertencente ao semiplano  $\text{Im}(z) > 0$ . Veja a Figura 6.3.

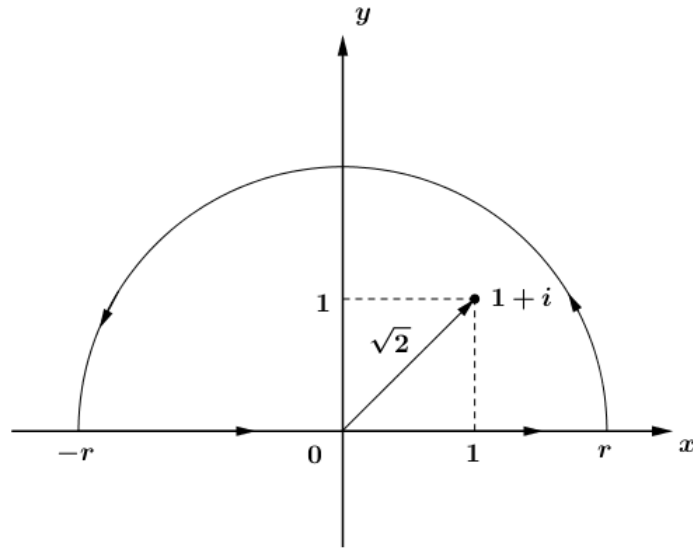


Figura 6.3: Polo  $z = 1 + i$  envolvido no caminho  $\gamma_{sc}$ .

Pelo que vimos, temos

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 2z + 2} dz = \int_{\gamma_{sc}} \frac{1}{z^2 - 2z + 2} dz + \int_{-r}^r \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi i \text{Res}(f, 1 + i).$$

Como  $z = 1 + i$  é um polo simples, segue que

$$\text{Res}(f, 1 + i) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - 1 - i) \cdot \frac{1}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)} = \frac{1}{1 + i - 1 + i} = \frac{1}{2i}.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \quad (6.14)$$

Mas, e o valor da integral  $\int_{\gamma_{sc}} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$ ? Precisamos mostrar que

$$\int_{\gamma_{sc}} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty,$$

para obter (6.14).

Pois bem, observemos que

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 2| &= |(z - 1 - i)(z - 1 + i)| \geq ||z| - |-1 - i|| \cdot ||z| - |-1 + i|| \\ &= ||z| - \sqrt{2}| \cdot ||z| - \sqrt{2}| = (r - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Sabendo que o comprimento da semicircunferência é  $\pi r$ , segue do Lema 3.27 que

$$\left| \int_{\gamma_{sc}} \frac{1}{z^2 - 2z + 2} dz \right| \leq \int_{\gamma_{sc}} \left| \frac{1}{z^2 - 2z + 2} \right| |dz| \leq \frac{\pi r}{(r - \sqrt{2})^2}$$

e

$$\frac{\pi r}{(r - \sqrt{2})^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty.$$

O teorema a seguir garante o fato descrito acima. Sua demonstração é proposta como um exercício no final do capítulo.

**Teorema 6.13.** *Seja  $f$  uma função racional  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , em que o grau de  $p$  é  $n$  e o grau de  $q$  é  $m \geq n + 2$ . Se  $\gamma_{sc}$  é um caminho (semicircunferência) cuja parametrização é  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , então*

$$\int_{\gamma_{sc}} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty.$$

No Exemplo 6.12 o grau do denominador é  $m = 2$  e o grau do numerador é

$n = 0$  e, portanto, a condição  $m \geq n + 2$  ( $2 \geq 0 + 2$ ) é satisfeita.

## 6.2 Solução de equações diferenciais ordinárias

Sabemos da teoria das equações diferenciais ordinárias que a solução da equação diferencial ordinária linear  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , é dada por  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$  em que  $y_h$  é a solução da equação diferencial homogênea  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$  associada à equação inicial e  $y_p$  é uma solução particular.

Afirmamos que  $y = e^{\lambda t}$  é solução da equação homogênea associada. De fato, como  $y' = \lambda e^{\lambda t}$  e  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ , temos  $a(\lambda^2 e^{\lambda t}) + b(\lambda e^{\lambda t}) + c(e^{\lambda t}) = 0$ , o que implica  $e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$ . Quando  $\lambda$  for solução da equação polinomial  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ,  $y = e^{\lambda t}$  sempre será solução da equação homogênea  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ .

Como  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, se  $b^2 - 4ac < 0$ , então as raízes da equação  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  são números complexos um conjugado do outro, digamos  $\alpha + i\beta$  e  $\alpha - i\beta$ , com  $\beta > 0$ .

Portanto, duas soluções de  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$  são  $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}$  e  $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}$ . Como  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , temos

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

e

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

A solução geral de  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$  pode ser escrita como a soma e a diferença de duas funções soluções, digamos

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t) = 2e^{\alpha t} \cos \beta t$$

e

$$y_1 - y_2 = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) - e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t) = 2ie^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Desprezando as constantes multiplicativas 2 e  $2i$ , obtemos um par de soluções com valores reais  $u(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$  e  $v(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Podemos mostrar que o Wronskiano das funções  $u$  e  $v$  é diferente de zero quando  $\beta \neq 0$ , pois  $W(u, v) = \beta e^{2\alpha t}$ . Quando  $\beta = 0$ , as raízes são reais. Logo,  $u$  e  $v$  formam um conjunto fundamental

de soluções e a solução geral de  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$  é dada por

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 6.14.** Determinemos a solução geral da equação  $y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$ . A equação auxiliar (ou característica) é dada por  $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$  que tem como discriminante  $\Delta = -36$ . Assim, temos duas raízes complexas para a equação característica, a saber  $\lambda_1 = 2 + 3i$  e  $\lambda_2 = 2 - 3i$ . Portanto,  $y_1 = e^{2t} \cos 3t$  e  $y_2 = e^{2t} \sin 3t$  formam um conjunto fundamental de soluções para a equação  $y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$  e a solução geral é dada pela combinação linear de ambas as funções:

$$y(t) = e^{2t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 6.15** (Movimento harmônico simples). Sabe-se que a Lei de Hooke, dada por  $F = -kx$ , em que  $F$  é a força de tensão,  $k$  é a constante elástica da mola e  $x$  é o afastamento da mola em relação ao seu comprimento de equilíbrio, está relacionada com a elasticidade de determinados corpos, principalmente as molas. A força de um corpo exercida na mola causa uma determinada deformação a partir de um comprimento de equilíbrio. Neste caso, estamos desprezando qualquer atrito na situação.

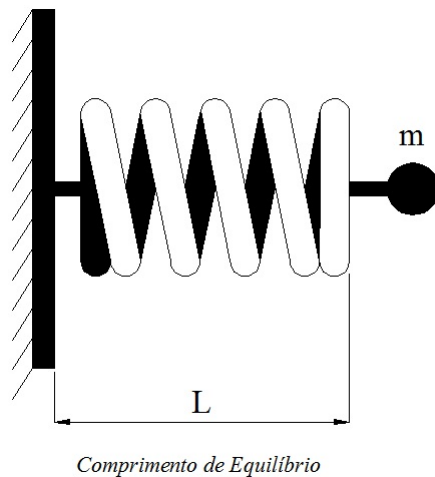


Figura 6.4: Mola em estado estacionário.

Pela 2ª Lei de Newton,  $F = m \cdot a$  e sendo a aceleração a segunda derivada do espaço em relação ao tempo, temos que  $F = m \cdot x''$ . Assim, substituindo essas informações na Lei de Hooke, obtemos  $mx'' = -kx$ , que equivale a

$$mx'' + kx = 0.$$

A equação acima é uma equação diferencial ordinária linear, homogênea e de segunda ordem com coeficientes constantes conhecida como *equação do movimento harmônico simples* e esse tipo de movimento é caracterizado por oscilações do espaço em função do tempo. A equação característica é dada por  $m\lambda^2 + k = 0$  que tem como raízes  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} i$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} i$ . Portanto, sua solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

### 6.3 Exercícios propostos

1. Nos itens de (a) a (j), calcule a transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$  para cada função dada.

(a)  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3};$

(f)  $F(s) = \frac{1}{(s-a)^2 + b^2};$

(b)  $F(s) = \frac{e^{\alpha s}}{s^2 - 5s + 6}, \alpha > 0;$

(g)  $F(s) = \frac{e^{\alpha s}}{(s-a)^2}, \alpha > 0;$

(c)  $F(s) = \frac{1}{s^4 - 1};$

(h)  $F(s) = \frac{s+4}{s^2 + 6s + 11};$

(d)  $F(s) = \frac{1}{(s-5)^3};$

(i)  $F(s) = \frac{1}{s^3};$

(e)  $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2};$

(j)  $F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}.$

2. Nos itens de (a) a (j), determine o valor de cada integral trigonométrica a seguir.

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \theta - 2} d\theta;$

(f)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin^2 \theta} d\theta;$

(b)  $\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta;$

(g)  $\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{2 + \sin \theta} d\theta;$

(c)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{4}{3} + \sin \theta} d\theta;$

(h)  $\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta;$

(d)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \sin \theta} d\theta;$

(i)  $\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{3 - \sin \theta} d\theta;$

(e)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta;$

(j)  $\int_0^\pi \frac{1}{1 + a \sin \theta} d\theta, |a| < 1.$

3. Para  $|a| < 1$  e  $a > b > 0$ , verifique que

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}};$

(b)  $\int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$

4. Demonstre o Teorema 6.13.

5. Nos itens de (a) a (j), para cada integral a seguir, determine o valor principal de Cauchy.

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx;$

(c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx;$

(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx;$

(e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx;$

(f)  $\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 1} dx;$



(g)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx;$

(h)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} dx;$

(i)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx;$

(j)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2} dx.$

6. Determine a solução geral de cada equação diferencial homogênea dada.

(a)  $4y'' + y' = 0;$

(b)  $y'' + 9y' = 0;$

(c)  $y'' + 2y' + 2y = 0;$

(d)  $3y'' + 2y' + y = 0;$

(e)  $y'' + 64y = 0;$

(f)  $y'' + 2y' + 10y = 0.$

# Referências

- [1] AHLFORS, L. *Complex Analysis*. 2. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] APOSTOL, T. M. *Calculus, Volume 2 - Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*. 2. ed. New York: Wiley, 1969.
- [3] ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [4] BARTLE, R. G.; SHEBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [5] CAMARGO, R. F. *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*. Tese (Doutorado) — IMECC UNICAMP, 2005.
- [6] CONWAY, J. *Functions of one complex variable*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [7] DOETSCH, G. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. New York: Springer Science and Business Media, 1974.
- [8] FERNANDES, C.; BERNARDES, N. *Introdução às funções de uma variável complexa*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [9] LANG, S. *Complex Analysis*. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. (Graduate Texts in Mathematics).
- [10] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [11] LIMA, E. L. *Análise real*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária, v. 1).

- [12] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Volume 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Projeto Euclides, v. 2).
- [13] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- [14] NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [15] SOARES, M. *Cálculo em uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [16] ZILL, D.; SHANAHAN, P. *Análise complexa com aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

# Índice Remissivo

- afixo, 28
- anel
  - aberto, 39
  - fechado, 39
  - ilimitado, 39
- argumento, 32
- argumento principal, 32
- círculo, 39
- caminho, 84
  - fechado, 86
  - fechado simples, 86
  - reverso, 94
  - simples, 86
  - suave, 85
  - suave por partes, 85
- comprimento de um caminho suave, 101
- conjugado de um número complexo, 25
- conjunto
  - aberto, 39
  - fechado, 39
  - simplesmente conexo, 105
- corpo dos números complexos, 20
- cosseno complexo, 54
- cosseno hiperbólico complexo, 57
- CrITÉrio
  - da Comparação, 139
- curva, 85
  - de Jordan suave por partes, 183
- Desigualdade
  - ML, 109
  - triangular, 29
- disco
  - aberto, 38
  - aberto deletado, 39
  - fechado, 39
- disco de convergência, 145
- domínio, 110
  - estrelado, 114
- eixo
  - imaginário, 25
  - real, 25
- Equações de Cauchy-Riemann, 73
- Estimativas de Cauchy, 121
- Fórmula
  - Integral de Cauchy, 118
  - Integral de Cauchy para Derivadas, 120
- fecho, 40
- forma polar, 32
- fronteira, 40
- função
  - analítica, 72
  - complexa, 45

- contínua, 65
- descontínua, 66
- diferenciável, 69
- exponencial, 46
- inteira, 78
- função
  - contínua por partes, 198
  - de ordem exponencial, 199
  - multivalente, 50
- integral
  - complexa, 95
  - de contorno de Bromwich, 201
  - de Riemann, 84
- interior, 39
- limite, 130
- logaritmo complexo, 51
- módulo, 28
- Movimento harmônico simples, 213
- norma de uma partição, 83
- parametrização, 93
- parte
  - analítica, 158
  - imaginária, 25
  - principal, 158
  - real, 25
- plano de Argand-Gauss, 25
- polo, 173
  - de ordem  $n$ , 172
  - simples, 172
- ponto
  - aderente, 40
  - de acumulação, 40
  - de fronteira, 40
  - interior, 39
- Primeira Fórmula de De Moivre, 34
- primitiva, 103
- Princípio
  - da Deformação de Caminhos, 116
  - de Cauchy, 135
  - do Argumento, 186
  - do Módulo Máximo, 124
- raio de convergência, 145
- raiz
  - $n$ -ésima principal, 37, 50
  - $n$ -ésima, 35
- região anelar, 158
- Regra da Cadeia, 71
- resíduo, 180
- série, 137
  - absolutamente convergente, 140
  - condicionalmente convergente, 140
  - convergente, 138
  - de Laurent, 158
  - de potências, 144
  - de Taylor, 153
  - divergente, 138
  - geométrica, 142
- Segunda Fórmula de De Moivre, 36
- seno complexo, 54
- seno hiperbólico complexo, 57
- sequência, 129
  - convergente, 130
  - divergente, 130
  - limitada, 132

- 
- singularidade
    - essencial, 174
    - removível, 170
  - soma
    - de caminhos, 94
    - de Riemann, 84
    - de uma série, 138
  - somas parciais, 137
  - Teorema
    - da transformada inversa de Laplace,
      - 200
    - de Cauchy, 108, 183
    - de Cauchy-Goursat, 109
    - de Cauchy-Goursat para triângulos,
      - 110
    - de Extensão de Riemman, 171
    - de Green, 107
    - de Laurent, 158
    - de Liouville, 122
    - de Morera, 125
    - de Rouché, 190
    - de Taylor, 153
    - dos Resíduos, 184
    - Fundamental da Álgebra, 122, 192
    - transformada de Laplace como uma
      - função analítica, 200
  - Teste
    - da Raiz, 144
    - da Razão, 143
  - transformada
    - de Laplace, 197
    - inversa de Laplace, 198
    - núcleo da, 198
  - unidade imaginária, 24
  - valor principal de Cauchy, 208
  - zero de ordem  $n$ , 174