ÁLGEBRA LINEAR
AULA 9
ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

Produto Interno em Espaços Vetoriais

Introdução

Anteriormente estudamos o ***produto escalar*** (produto interno usual). A partir da generalização do conceito de produto interno serão definidas as noções de comprimento, distância e ângulo em espaços vetoriais genéricos.

Definição

Chama-se produto interno no espaço vetorial V uma função de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ que a todo par de vetores $(\vec{u}, \vec{v}) \in V \times V$ associa um número real, indicado por $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, tal que os seguintes axiomas sejam verificados.

Axiomas

P_1 $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

P_2 $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

P_3 $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha.(\vec{u}).\vec{v}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

P_4 $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ e $\vec{u}.0 = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = 0$

Produto Interno em Espaços Vetoriais

O número real $\vec{u}.\vec{v}$ é chamado produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Propriedades

Dos quatro axiomas da definição decorrem as seguintes propriedades:

I $0.\vec{u} = \vec{u}.0 = 0, \forall \vec{u} \in V$

II $(\vec{u} + \vec{v})\,.\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

III $\vec{u}.\,(\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u}.\vec{v})$

IV $\vec{u}.\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + v_n) = \vec{u}.\vec{v}_1 + \vec{u}.\vec{v}_2 + \ldots + \vec{u}.v_n$

Definição: Espaço Vetorial Euclidiano

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual esta definido um produto interno, é um ***espaço vetorial euclidiano***.

Módulo de um Vetor

Módulo de um Vetor

Dado um vetor $\vec{v}$ de um espaço vetorial euclidiano V, chama-se módulo, norma ou comprimento de $\vec{v}$ o número real não-negativo, indicado por $|\vec{v}|$ definido por

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$$

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Propriedades do Módulo de um Vetor

i $|\vec{v}| \geq 0, \forall \vec{v} \in V$ e $|\vec{v}| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = 0$.

ii $|\alpha.\vec{v}| = |\alpha|.|\vec{v}|, \quad \forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
(***Desigualdade de Schwarz*** ou ***Inequação de Cauchy-Schwarz***)

iv $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
(***Desigualdade triangular***)

Distância entre dois Vetores (ou pontos)

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{u}$ vetores. Então a distância é dada por

$$d\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = |\vec{u} - \vec{v}|$$

Vetor Unitário

Todo vetor não nulo $\vec{v} \in V$ pode ser normalizado da seguinte forma:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$\vec{u}$ vetor unitário.

Ângulo Entre Dois Vetores

O ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Vetores Ortogonais

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dizemos que o dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais, e representamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Conjunto Ortogonal de Vetores

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ é **ortogonal** se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $\vec{v}_i.\vec{v}_j = 0$ para $i \neq j$.

Teorema

Um conjunto ortogonal de vetores não nulos $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.).

Base Ortogonal

Uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ é ***ortogonal*** se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Base Ortonormal

Uma base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ é ***Ortonormal*** se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, ou seja,

$$\vec{v}_i.\vec{v}_j = \begin{cases} 0 & para \quad i \neq j \\ 1 & para \quad i = j \end{cases}$$

Componentes de um Vetor em uma Base Ortogonal

Seja V um espaço vetorial euclidiano e uma base $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V. Para $\vec{w} \in V$, tem-se :

$$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_i\vec{v}_i + \ldots + a_n\vec{v}_n \qquad a_i = \frac{\vec{w}.\vec{v}_i}{\vec{v}_i.\vec{v}_i}$$

a_i i-ésima coordenada de $\vec{w}$ em relação à base B.

Conjuntos Ortogonais

Sejam S_1 e S_2 subconjuntos de um espaço vetorial euclidiano V. Então S_1 é ortogonal a S_2 ($S_1 \perp S_2$).
Se qualquer vetor $\vec{v}_1 \in S_1$ é ortogonal a qualquer vetor $\vec{v}_2 \in S_2$

Teorema

Seja V um espaço vetorial euclidiano e $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ uma base de um subespaço S de V, gerado por B. Se um vetor $u \in V$ é ortogonal a todos os vetores da base B, então $\vec{u}$ é ortogonal a qualquer vetor do subespaço S gerado por B. Logo, $\vec{u}$ é ortogonal a S e se representa por $\vec{u} \perp S$.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

Exercícios e demonstrações

EM AULA

Slides estão postados no seguinte site:

`http://wp.ufpel.edu.br/kiesow/`

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

Thanks!