capítulo 17

Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica

1 Introdução

No capítulo 14, os valores sen α, cos α e tg α foram definidos apenas para ângulos agudos, ou seja, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, com α indicando a medida do ângulo em radianos.

Para esses valores de α foram demonstradas duas importantes relações:

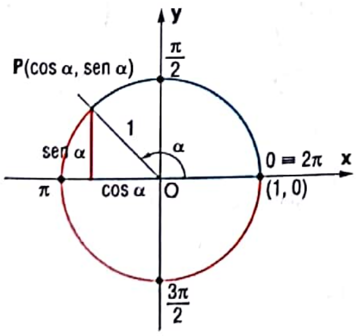
$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{e} \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

No capítulo 15, os valores de sen α, cos α e tg α foram estendidos para $\alpha = 0$ (ângulo nulo), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ângulo reto) e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (ângulos obtusos) para possibilitar a resolução de triângulos quaisquer, mas sem a justificativa desses valores.

Neste capítulo, vamos estender a noção de sen α, cos α e tg α para *todos os valores reais de* α, justificando seus valores de modo que sejam mantidas as duas relações fundamentais $\left(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ e } \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)$. Assim, poderemos definir seno, cosseno e tangente como funções de variáveis reais, quando for conveniente. Por isso, muitas vezes nos referimos ao seno, cosseno e tangente como *funções trigonométricas*. Porém, a formalização das funções trigonométricas só será feita no capítulo 20.

2 A idéia de seno, cosseno e tangente de um número real

Consideremos P(x, y) um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida α rad, definido a partir do número real α.



Nessas condições, definimos:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{ordenada de P}$$
$$\cos\alpha = \text{abscissa de P}$$
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0$$

Observe que essa definição coincide com aquela dada para ângulos agudos, pois, como todos os pontos da circunferência trigonométrica estão à distância 1 da origem, pela relação de Pitágoras temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Assim, essa definição estendida agora para qualquer número real mantém as relações fundamentais.

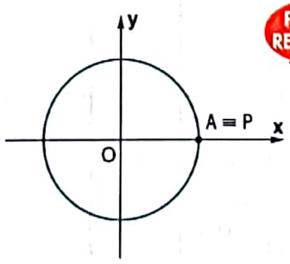
Observe também que tg α não é definida para alguns valores de α, como para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, em que $\cos\alpha = 0$.

Observações:

1) Dessa forma, ao associar um número real α a um arco da circunferência, estamos associando o número real ao ponto P cuja abscissa é o cosseno de α e cuja ordenada é o seno de α.
2) Apesar de a definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica necessitar do arco em radianos – por causa da associação com os números reais (como exposto no capítulo 16) –, não há problema em se referir aos valores dos ângulos em graus. Então, agora podemos pensar em seno e cosseno de arcos (ou ângulos) maiores do que 90°, algo impensável quando se trabalhava com triângulos retângulos. Também podemos pensar em senos e cossenos de ângulos negativos!

3 Valores notáveis de seno e cosseno

Observe nas figuras a seguir os pontos A(1, 0), B(0, 1), A'(−1, 0) e B'(0, −1). Lembrando que a abscissa do ponto P é o cosseno e a ordenada é o seno, temos:

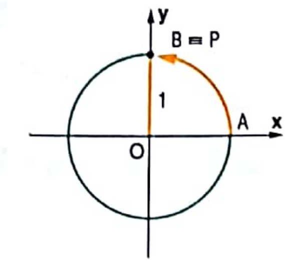


PARA REFLETIR Por que o nome "valores notáveis?"

x = 0 (0°)

$\text{sen}\,0 = 0$

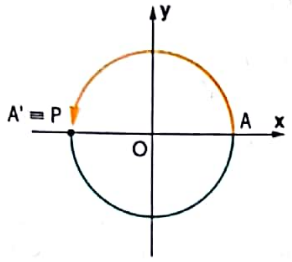
$\cos 0 = 1$



$x = \frac{\pi}{2}$ (90°)

$\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

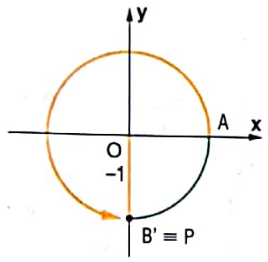
$\cos\ \frac{\pi}{2} = 0$



$x = \pi$ (180°)

$\text{sen}\ \pi = 0$

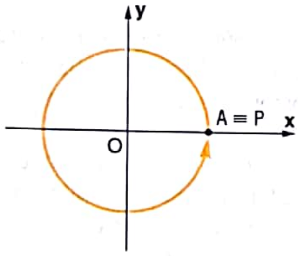
$\cos\ \pi = -1$



$x = \frac{3\pi}{2}$ (270°)

$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos\ \frac{3\pi}{2} = 0$



$x = 2\pi$ (360°)

$\text{sen}\ 2\pi = 0$

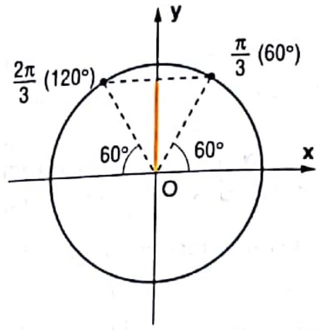
$\cos\ 2\pi = 1$

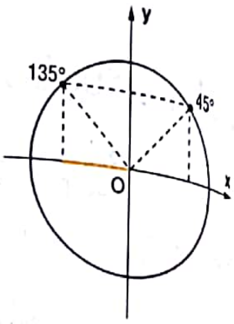
Veja a tabela com os valores notáveis do seno e do cosseno:

x	sen x	cos x
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1	0
π (180°)	0	–1
$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	–1	0
2π (360°)	0	1

Sabendo esses valores e usando a simetria dos pontos da circunferência, podemos obter valores de seno e cosseno de arcos em todos os quadrantes. Observe como usar a simetria nas figuras abaixo:

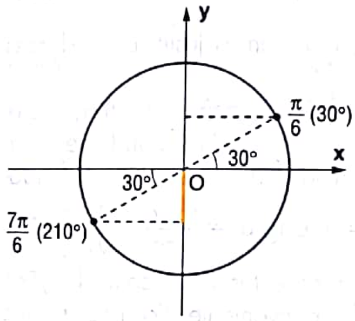
Arcos no 2º quadrante

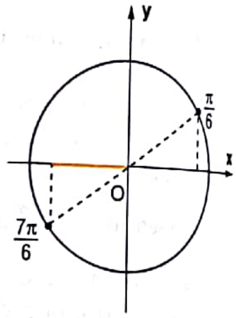




PARA REFLETIR
Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 2º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante:
$\text{sen}\ (\pi - x) = \text{sen}\ x$
$\cos\ (\pi - x) = -\cos\ x$

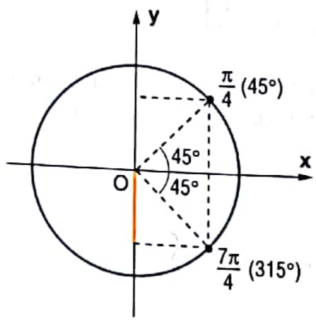
Arcos no 3º quadrante

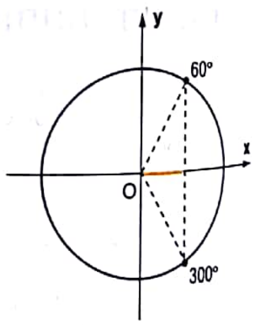




PARA REFLETIR
Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 3º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante:
$\text{sen}\ (\pi + x) = -\text{sen}\ x$
$\cos\ (\pi + x) = -\cos\ x$

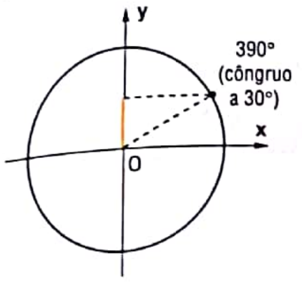
Arcos no 4º quadrante

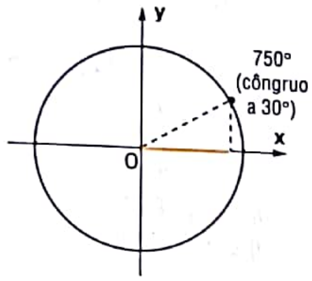




PARA REFLETIR
Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 4º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante:
$\text{sen}\ (2\pi - x) = -\text{sen}\ x$
$\cos\ (2\pi - x) = \cos\ x$

Arcos maiores do que 360° (fora da 1ª volta)





PARA REFLETIR Para determinar o seno ou o cosseno de um arco fora da 1ª volta, basta considerar seu côngruo na 1ª volta.

Exemplos:

1º) Vamos calcular o valor de:

a) sen $\frac{2\pi}{3}$ c) sen 210° e) sen $\frac{7\pi}{4}$ g) sen 390°

b) cos 135° d) cos $\frac{7\pi}{6}$ f) cos 300° h) cos 750°

(Observe as figuras acima para entender o processo.)

a) $\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\ 210° = -\text{sen}\ 30° = \frac{-1}{2}$

d) $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

g) $\text{sen}\ 390° = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$

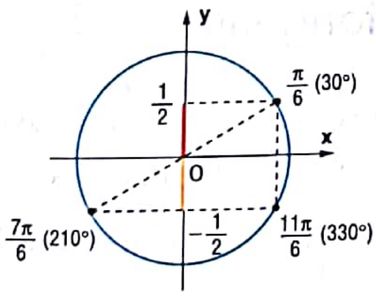
h) $\cos 750° = \cos 30° = \frac{1}{2}$

PARA REFLETIR Perceba os sinais de seno e cosseno em cada quadrante:

seno

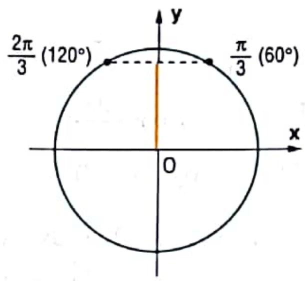
cosseno

2º) Vamos determinar x tal que $0 \leqslant x < 2\pi$ e sen $x = -\frac{1}{2}$.



Sabemos que sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Então, fazendo as simetrias necessárias descobrimos os possíveis valores de x, que são $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

3º) Vamos determinar todos os valores reais de x para os quais sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Sabemos que sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e pela figura vemos que também sen $\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então, os valores reais de x podem ser $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e todos os arcos côngruos a eles, ou seja, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios propostos

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Em que quadrante temos simultaneamente:
a) sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha < 0$;
b) sen $\alpha > 0$ e cos $\alpha > 0$;
c) sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha > 0$.

2. A que quadrante pode pertencer α se:
a) sen $\alpha = -\frac{1}{4}$
b) cos $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) cos $\alpha = \frac{2}{5}$
d) sen $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Determine cos x sabendo que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e sen $x = \frac{3}{5}$.
(Lembre-se de que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

4. Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:
a) sen $\frac{5\pi}{6}$ b) sen $\frac{4\pi}{3}$ c) sen 330°

5. Use a tabela da página 202 e calcule fazendo a redução ao 1º quadrante:
a) sen 100°
b) sen 205°
c) sen 310°
d) sen 248°
e) sen 107°
f) sen 355°
g) sen 94°
h) sen 325°

6. Determine **x** nos seguintes casos:

a) $0° \leq x < 360°$ e $\text{sen } x = -1$

b) $0 \leq x \leq 2\pi$ e $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

c) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $0 \leq x < \pi$ e $\text{sen } x = 0$

e) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

7. Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:

a) $\cos \frac{5\pi}{6}$

b) $\cos 315°$

c) $\cos \frac{2\pi}{3}$

d) $\cos 330°$

e) $\cos \frac{5\pi}{4}$

f) $\cos 240°$

8. Use a tabela da página 202 e calcule:

a) $\cos 28°$

b) $\cos 130°$

c) $\cos 185°$

d) $\cos 310°$

9. Determine **x** tal que:

a) $0° \leq x < 360°$ e $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $0 \leq x < 2\pi$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. Use os valores notáveis do seno e calcule:

a) $\text{sen } \frac{37\pi}{6}$

b) $\text{sen } (-225°)$

c) $\text{sen } 6\pi$

d) $\text{sen } \frac{19\pi}{4}$

e) $\text{sen } 630°$

f) $\text{sen } \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

g) $\text{sen } \frac{13\pi}{2}$

h) $\text{sen } 930°$

11. Use a tabela da página 202 e calcule:

a) $\text{sen } 580°$

b) $\text{sen } (-14°)$

c) $\text{sen } \frac{34\pi}{9}$

d) $\text{sen } \frac{24\pi}{5}$

12. Calcule os possíveis valores reais de **x** em:

a) $\text{sen } x = -1$

b) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen } x = 0$

13. Calcule usando arcos côngruos:

a) $\cos \frac{9\pi}{4}$

b) $\cos (-330°)$

c) $\cos \frac{9\pi}{2}$

d) $\cos 1\,140°$

e) $\cos \frac{25\pi}{6}$

f) $\cos \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

g) $\cos 11\pi$

h) $\cos 570°$

14. Use a tabela da página 202 e calcule:

a) $\cos \frac{7\pi}{9}$

b) $\cos 730°$

c) $\cos (-83°)$

d) $\cos 1\,125°$

PARA REFLETIR Confira os resultados do exercício 14 em uma calculadora.

15. Calcule o valor das expressões:

a) $\text{sen } 45° + \cos 90°$

b) $2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3} - 5 \cdot \cos \frac{5\pi}{6}$

c) $\dfrac{\text{sen } \frac{7\pi}{3}}{\cos \frac{7\pi}{3}}$

d) $\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$

e) $\text{sen } (30° + 60°)$

f) $\text{sen } 30° + \text{sen } 60°$

g) $\cos 60° + \cos 30°$

h) $\cos (60° + 30°)$

i) $\text{sen } (2 \cdot 60°)$

j) $2 \cdot \text{sen } 60°$

l) $2 \cdot \text{sen } 60° \cdot \cos 60°$

16. Determine **x** nos casos seguintes:

a) $0° \leq x < 360°$ tal que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $0 \leq x < 2\pi$ tal que $\cos x = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -1$

17. Calcule sen x sabendo que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

18. Se $0 \leq x < 2\pi$ e $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, determine os possíveis valores de cos x e de **x**.

4 A idéia geométrica de tangente

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida **x** no círculo trigonométrico, definimos tangente de **x** como o valor obtido assim:

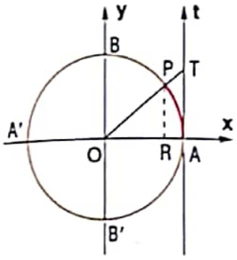
$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{ para } \cos x \neq 0$$

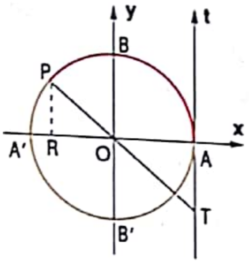
Geometricamente, o cos x é a abscissa de **P** e o sen x é a ordenada de **P**.

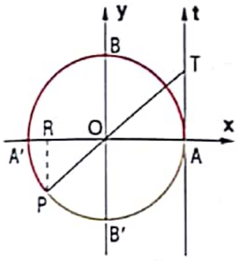
Vejamos agora o significado geométrico de tg x.

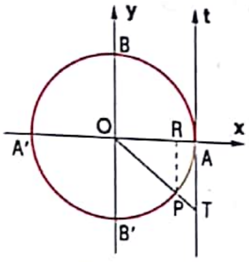
Para isso, vamos considerar na circunferência trigonométrica a reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y.

Observe as figuras com P em cada um dos quadrantes:









Em todos os casos, $\triangle ORP$ e $\triangle OAT$ são semelhantes. Dessa semelhança, vem:

$$\frac{PR}{OR} = \frac{AT}{OA} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{AT}{1}$$

PARA REFLETIR Justifique que $\triangle ORP \sim \triangle OAT$.

Como $\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$ e $\frac{AT}{1} = AT$, então temos

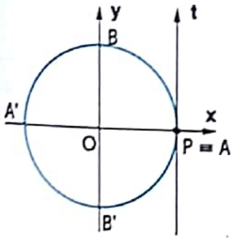
tg x = AT, ou seja, geometricamente a tg x é AT, medida algébrica de $\overline{AT}$.

PARA REFLETIR Medida algébrica de $\overline{AT}$ significa que ela pode ser positiva, negativa ou nula.

Observação: Se T é o encontro das retas $\overleftrightarrow{OP}$ e t, no caso de essas retas serem paralelas, não existirá $\overline{AT}$ e por isso não existirá tg x.

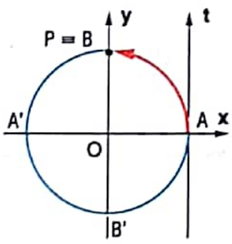
Por exemplo, $\text{tg } \frac{\pi}{2}$ e $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$ não existem $\left(\text{veja que } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ e } \cos \frac{3\pi}{2} = 0\right)$.

Valores notáveis da tangente



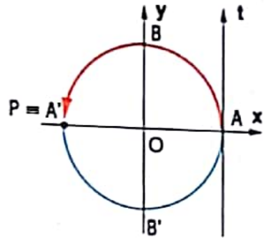
x = 0

tg 0 = 0



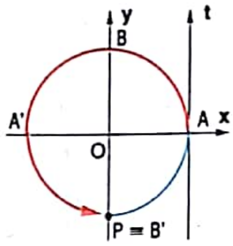
$x = \frac{\pi}{2}$

Não é definida a $\text{tg } \frac{\pi}{2}$.



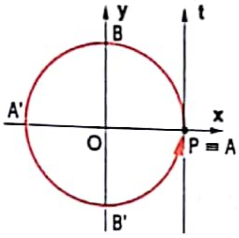
$x = \pi$

$\text{tg } \pi = 0$



$x = \frac{3\pi}{2}$

Não é definida a $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$.



$x = 2\pi$

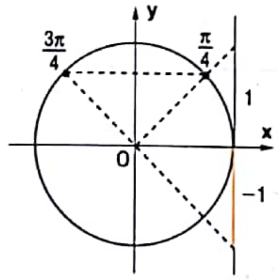
$\text{tg } 2\pi = 0$

Temos, então, a tabela com os valores notáveis da tangente:

x	tg x
0	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	1
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	não é definida
π (180°)	0
$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	não é definida
2π (360°)	0

Para o cálculo dos valores das tangentes de ângulos no 2º, 3º ou 4º quadrante, procedemos exatamente da mesma maneira que fizemos com senos e cossenos: sabendo o sinal da tangente em cada quadrante, basta reduzir cada arco desejado ao 1º quadrante para saber o valor da tangente desse arco.

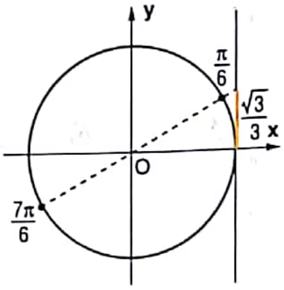
Acompanhe as simetrias nas figuras abaixo:



$$\text{tg } \frac{3\pi}{4} = -\text{tg } \frac{\pi}{4} = -1$$

PARA REFLETIR Comparação de um arco do 2º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.

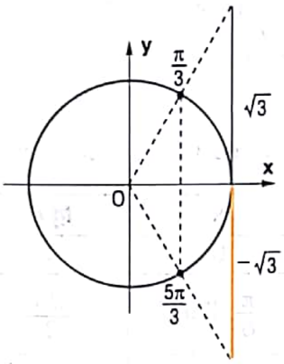
$$\text{tg } (\pi - x) = -\text{tg } x$$



$$\text{tg}\ \frac{7\pi}{6} = \text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

PARA REFLETIR Comparação de um arco do 3º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.

$$\text{tg}\ (\pi + x) = \text{tg}\ x$$

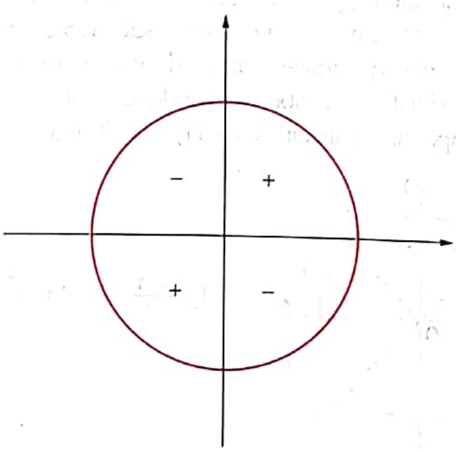


$$\text{tg}\ \frac{5\pi}{3} = -\ \text{tg}\ \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

PARA REFLETIR Comparação de um arco do 4º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.

$$\text{tg}\ (2\pi - x) = -\text{tg}\ x$$

Como a reta **t** é orientada "para cima", a tangente é positiva quando P é do 1º ou do 3º quadrante; é negativa quando P é do 2º ou 4º quadrante. Assim, sabemos o sinal da tangente em qualquer quadrante.



Exercícios propostos

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

19. Calcule o valor: (Use os valores notáveis, redução ao 1 quadrante e arcos côngruos.)

a) $\text{tg}\ 180°$

b) $\text{tg}\ 0°$

c) $\text{tg}\ 30°$

d) $\text{tg}\ 90°$

e) $\text{tg}\ 45°$

f) $\text{tg}\ 60°$

g) $\text{tg}\ 210°$

h) $\text{tg}\ 300°$

i) $\text{tg}\ \frac{3\pi}{4}$

j) $\text{tg}\ \frac{4\pi}{3}$

l) $\text{tg}\ \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

m) $\text{tg}\ \frac{5\pi}{6}$

20. Use a tabela da página 202 e calcule:

a) $\text{tg}\ 100°$

b) $\text{tg}\ \frac{10\pi}{9}$

c) $\text{tg}\ (-55°)$

d) $\text{tg}\ \frac{37\pi}{18}$

e) $\text{tg}\ 244°$

f) $\text{tg}\ (-310°)$

21. Represente a expressão geral de **x** para que se tenha $\text{tg}\ x = 1$.

22. Determine **x** nos seguintes casos, com $x \in \mathbb{R}$:

a) $\text{tg}\ x = \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\ x = -1$

23. Determine **x** nos seguintes casos, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:

a) $\text{tg}\ x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}^2\ x = 1$

24. Determine tg x sabendo que $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $\text{sen}\ x = -\frac{3}{5}$.

25. Se $x \in [90°, 180°]$, $\cos x = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$ e $\text{tg}\ x = -\frac{\sqrt{14}}{6}$, qual é o valor de sen x?

26. Determine o valor de tg 1 935°.

Desafios em dupla

- Descubra a 1ª determinação positiva de 760°, 1 130° e 2 174°.
- Determine o valor da expressão

$$\frac{\text{sen}\ 760° - \cos\ 1\,130°}{\text{tg}\ 2\,174°}$$

sem usar a tabela ou a calculadora.