capítulo 18

Relações e equações trigonométricas

1 Relações fundamentais

Além de seno, cosseno e tangente, existem outras três funções trigonométricas, importantes mais pelo seu valor histórico do que por qualquer outro motivo. São elas: secante, cossecante e cotangente.

As relações entre os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco são denominadas *relações trigonométricas*. Já conhecemos duas delas, consideradas fundamentais:

$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Existem outras relações fundamentais:

$\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ para todo $x \neq k\pi$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$ para todo $x \neq k\pi$

PARA REFLETIR Para simplificar as expressões, consideramos o fator $k \in \mathbb{Z}$ sempre que não especificado.

Vejamos alguns exemplos de aplicações dessas relações.

Exemplos:

1º) Sendo $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{4}$, com $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, vamos determinar tg x e sec x.

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como x é do 3º quadrante, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Então:

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sec x = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

2º) Vamos simplificar a expressão

$y = \dfrac{\text{cotg}\, x + \text{cossec}\, x}{\text{sen}\, x}$, supondo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Escrevendo todos os termos da expressão em função de sen x e cos x, temos:

$$y = \frac{\text{cotg}\, x + \text{cossec}\, x}{\text{sen}\, x} = \frac{\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} + \frac{1}{\text{sen}\, x}}{\text{sen}\, x} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x + 1}{\text{sen}\, x}}{\text{sen}\, x} = \frac{\cos x + 1}{\text{sen}\, x} : \text{sen}\, x =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{1}{\text{sen}\, x} = \frac{\cos x + 1}{\text{sen}^2\, x}$$

Como $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$, fazemos a substituição:

$$y = \frac{\cos x + 1}{1 - \cos^2 x} = \frac{\cancel{\cos x + 1}}{\cancel{(1 + \cos x)}(1 - \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \cos x}$$

Portanto, $y = \dfrac{1}{1 - \cos x}$.

PARA REFLETIR Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ existem todas as funções trigonométricas envolvidas no exemplo.

Exercícios propostos

1. Determine os valores das demais funções trigonométricas de um arco x quando:

   a) $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

   b) $\cos x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

   c) $\text{cossec}\, x = -\sqrt{2}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

   d) $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

2. Sendo $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor de $\text{sen}^2\, x - 3 \cdot \text{sen}\, x$.

3. Sabendo que $\cos a = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$, determine o valor de $(1 + \text{sen}\, a)(1 - \text{sen}\, a)$.

4. Dado $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, determine o valor de $\sec x + \text{cossec}\, x$.

5. Se $\cos a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < \frac{\pi}{2}$, qual é o valor da expressão $y = \frac{\text{cossec } a - \text{sen } a}{\sec a - \cos a}$?

6. Simplifique as expressões:

a) $y = \frac{\sec x - \text{cossec } x}{1 - \text{cotg } x}$

b) $y = (\sec x - \cos x)(\text{cossec } x - \text{sen } x)(\text{tg } x + \text{cotg } x)$

7. Determine o valor de $A = \frac{\text{cotg } x - 1}{\text{cossec } x - \sec x}$, dado $\cos x = \frac{1}{2}$.

2 Relações decorrentes das fundamentais

A partir das relações fundamentais podemos chegar a outras relações também importantes:

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ para $\cos x \neq 0$

Assim:

$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

PARA REFLETIR: Não se deve confundir $\text{tg}^2 x + 1$ com $\text{tg}^2 (x + 1)$.

2) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$ para $\text{sen } x \neq 0$

Assim:

$\text{cotg}^2 x + 1 = \text{cossec}^2 x$ para $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemplo:

Dado $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vamos calcular o valor da expressão $A = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1}$.

Vamos escrever a expressão dada em função de sen x e cos x:

$$A = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1} = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{1} = \text{sen}^2 x$$

Como $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor da expressão é

$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

PARA REFLETIR: Como resolver esse exemplo usando outra estratégia?

Exercícios propostos

8. Dado $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine o valor de cotg x.

9. Para $\cos x = \frac{1}{2}$, qual é o valor da expressão

$y = \frac{\text{cossec } x - \text{sen } x}{\text{cotg } x \cdot \sec x} + \sec x$?

10. Calcule o valor de $y = \text{sen } x \cdot \cos x$ sabendo que $\text{tg } x + \text{cotg } x = 2$.

11. Escreva a expressão $y = \text{sen } x \cdot \text{tg } x + 2 \cdot \cos x$ em função de cos x.

12. Se $m = \text{sen } x + \cos x$ e $n = \text{sen } x - \cos x$, prove que $m^2 + n^2 = 2$.

13. Se $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = t$, escreva a expressão

$y = \frac{\text{sen}^2 x + \text{sen } x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}$ em função de t. (Sugestão: use a fatoração no numerador e no denominador da fração.)

3 Identidades trigonométricas

PARA REFLETIR: As relações dadas nas páginas 221 e nesta são identidades trigonométricas.

Toda igualdade envolvendo funções trigonométricas que se verifica para todos os valores do domínio de tais funções é uma *identidade trigonométrica*. Por exemplo, considerando o domínio das funções, a igualdade $\text{sen } x \cdot \sec x = \text{tg } x$ é uma identidade trigonométrica, pois, independentemente do valor de x, ela se verifica. Para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\text{sen } x \cdot \sec x = \text{sen } x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$$

Já a igualdade $\text{sen } x + \cos x = 1$, para $x \in \mathbb{R}$, não é uma identidade, pois ela não é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\text{sen } x + \cos x = 1$ é uma *equação trigonométrica*.

PARA REFLETIR: Verifique o que acontece com $\text{sen } x + \cos x = 1$, para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{\pi}{4}$.

Para demonstrar que uma igualdade é uma identidade, há vários caminhos. Veja alguns nos exemplos a seguir.

1º) Vamos demonstrar que $(1 - \cos^2 x)(\text{cotg}^2 x + 1) = 1$, para $x \neq k\pi$, é uma identidade.
Vamos considerar que o primeiro membro da igualdade é $f(x)$ e o segundo membro é $g(x)$ e vamos procurar simplificar o primeiro membro, expressando-o em função de sen x e de cos x:

$$(1 - \cos^2 x)\left(\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} + 1\right) =$$

$$= \underbrace{(1 - \cos^2 x)}\underbrace{\left(\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}\right)} = \underbrace{\cancel{\text{sen}^2 x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\text{sen}^2 x}}} = 1$$

PARA REFLETIR Partindo de $f(x)$, chegamos a $g(x)$. Logo, $f(x) = g(x)$.

2º) Vamos demonstrar que $\dfrac{\text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = \dfrac{\text{sen } x}{\text{sec } x}$ é uma identidade para $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Vamos simplificar isoladamente cada membro:

- $f(x) = \dfrac{\text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = \dfrac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\sec^2 x} = \dfrac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$

$$= \frac{\text{sen } x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos^2 x}^{\cos x} = \text{sen } x \cdot \cos x$$

- $g(x) = \dfrac{\text{sen } x}{\sec x} = \dfrac{\text{sen } x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen } x \cdot \cos x$

PARA REFLETIR Partindo separadamente de $f(x)$ e $g(x)$, chegamos ao mesmo valor. Logo, $f(x) = g(x)$.

3º) Vamos demonstrar a identidade
$\sec^2 x - \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x + \cos^2 x$.
Considerando $\sec^2 x - \text{sen}^2 x$ como $f(x)$ e $\text{tg}^2 x + \cos^2 x$ como $g(x)$, podemos fazer:
$f(x) - g(x) = \sec^2 x - \text{sen}^2 x - \text{tg}^2 x - \cos^2 x =$
$= (\sec^2 x - \text{tg}^2 x) - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 - 1 = 0$
Se $f(x) - g(x) = 0$, então $f(x) = g(x)$ ou
$\sec^2 x - \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x + \cos^2 x$.

PARA REFLETIR
- Para que valores de **x** vale essa identidade?
- Partindo de $f(x) - g(x)$, chegamos a 0. Se $f(x) - g(x) = 0$, então $f(x) = g(x)$.

Exercícios propostos

14. Demonstre as seguintes identidades trigonométricas:
a) $\cos x \cdot \text{tg } x \cdot \text{cossec } x = 1$
b) $\text{tg}^2 x \cdot \text{cossec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$
c) $(\text{tg } x + 1)(1 - \text{tg } x) = 2 - \sec^2 x$
d) $(\text{tg } x - \text{sen } x)^2 + (1 - \cos x)^2 = (\sec x - 1)^2$
e) $\text{cossec}^2 x \cdot \text{tg } x = \text{cotg } x \cdot \sec^2 x$
f) $\sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x = \sec^2 x + \text{cossec}^2 x$
g) $(\sec x - \text{tg } x)^2 = \dfrac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x}$
h) $\dfrac{\sec x + \text{tg } x}{\cos x + \text{cotg } x} = \text{tg } x \cdot \sec x$

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

PARA REFLETIR As demonstrações das identidades podem ser vistas como um exercício de quebra-cabeça trigonométrico.

15. Se $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + \text{tg } x}{\text{cotg } x + \text{cossec } x}$ e $g(x) = \text{sen } x \cdot \text{tg } x$, prove que $f(x) = g(x)$.

16. Se $P = \dfrac{1}{1 + \text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \cos^2 x} +$
$+ \dfrac{1}{1 + \sec^2 x} + \dfrac{1}{1 + \text{cossec}^2 x}$, demonstre que $P = 2$.

17. Se $f(x) = \cos^4 x - \text{sen}^4 x$ e $g(x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$, prove que $f(x) = g(x)$.

18. Se $A = (\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b) +$
$+ (\text{sen } a + \text{sen } b)(\text{sen } a - \text{sen } b)$, prove que $A = 0$.

4 Equações trigonométricas

No capítulo 17 já aprendemos a resolver equações trigonométricas simples, da forma sen x = a, cos x = a ou tg x = a. Agora vamos aprender alguns artifícios que nos permitem resolver outras equações trigonométricas.

Equações resolvidas com alguns artifícios

Exemplo:

Vamos resolver as equações:

a) $\text{sen } 2x = 1$
b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$
d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

$\frac{\pi}{3} +$ $\pi + \frac{\pi}{3} + 4\pi$

$5\pi - \frac{\pi}{3} = k\pi$

a) $\text{sen } 2x = 1$

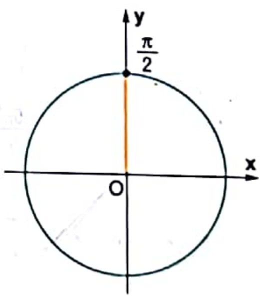
Como $\text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$, temos:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} =$$

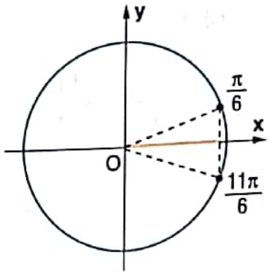
$$= \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$



PARA REFLETIR Quando não for explicitado o conjunto universo, devemos considerar $U = \mathbb{R}$.

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Como na 1ª determinação $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ têm cosseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ou

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

côngruo a $\frac{\pi}{6}$ $\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

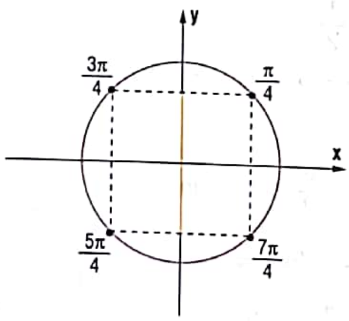
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

Fazendo sen $x = t$, ficamos com $2t^2 + 3t - 2 = 0$:

$\Delta = 25$

$t' = \frac{1}{2}$ e $t'' = -2$ $\left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right)$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = -2 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

Exercícios propostos

19. Determine o valor de **x**:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

c) $2 \cdot \text{sen } x = -1$

d) $1 + \cos x = 0$

e) $\text{sen } x = \sqrt{2}$

f) $\sec x = \sqrt{2}$

20. Resolva as equações trigonométricas:

a) $\text{sen } 3x = 1$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

c) $\text{tg } 5x = 0$

d) $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos 2x = 0$

f) $3 \cdot \text{tg } 2x - \sqrt{3} = 0$

g) $\sec 2x = \sqrt{2}$

h) $\text{cossec}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$

21. Resolva as seguintes equações:

a) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$

b) $\text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$

c) $\text{tg}^2 x = 3$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

e) $\cos 2x + \text{sen } \frac{\pi}{9} = 0$

f) $4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sec x = 8$

22. Resolva as equações:

a) $\sqrt{2} \cdot \text{sen } x + 1 = 0$

b) $\text{sen } x + \cos x = 0$

c) $2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

d) $\sec x = -2$

e) $\text{cotg } x = \sqrt{3}$

f) $\text{tg } 3x + \text{tg } x = 0$

23. Resolva a equação $\text{sen } x = 1 + \text{sen}^2 x$.

Desafios em dupla

- Resolva a inequação trigonométrica $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Demonstre a identidade $\frac{\text{sen } x}{\text{cossec } x - \text{cotg } x} = 1 + \cos x$, válida para todo **x** em que as funções envolvidas estão definidas.