capítulo 20

Senóides e os fenômenos periódicos

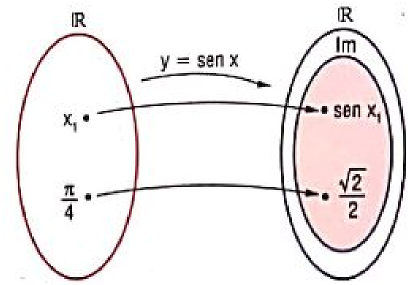
1 Introdução

Agora que sabemos como obter valores de senos, cossenos e tangentes para números reais, podemos defini-los como funções *trigonométricas*. Essencialmente, é apenas uma formalização maior em torno do que foi visto no capítulo anterior, agora sob o ponto de vista de funções. Assim, estudaremos neste capítulo a *função seno*, a *função cosseno* e outras decorrentes destas.

Historicamente, o primeiro indício do tratamento funcional da Trigonometria surgiu em 1635, quando Roberval (Gilles Personne de Roberval, 1602-1675) fez o primeiro esboço de uma curva do seno. Porém, essa área só avançou efetivamente no século XIX, com Fourier (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830) e seus estudos sobre os movimentos periódicos.

2 Estudo da função seno

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de x radianos:



PARA REFLETIR Para cada valor real de x existe sempre um único valor real para sen x.

Assim, definimos a *função seno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real sen x, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \text{sen } x$$

Já estudamos o processo que permite associar um número real x à medida x de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor *sen x*. Estudamos também como obter os valores *sen x* para quaisquer valores x de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que x, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

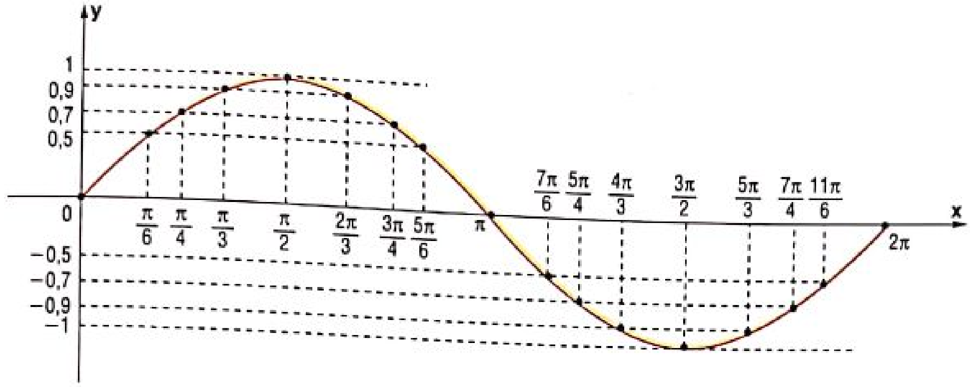
Gráfico da função seno

Para construir o gráfico da função seno vamos construir uma tabela com valores de x da 1ª volta positiva. O seno, em alguns casos, será usado com valores aproximados.

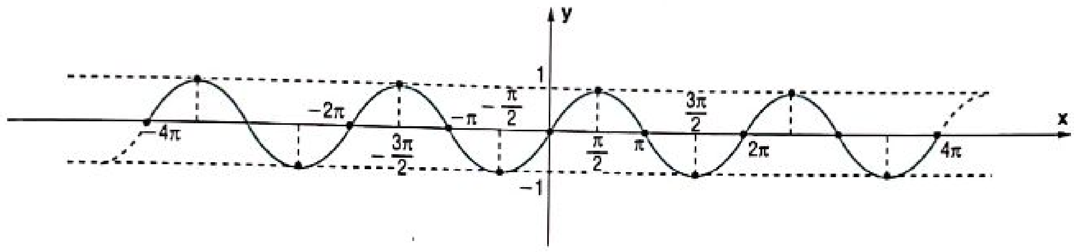
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	−0,5	−0,7	−0,9	−1	−0,9	−0,7	−0,5	0

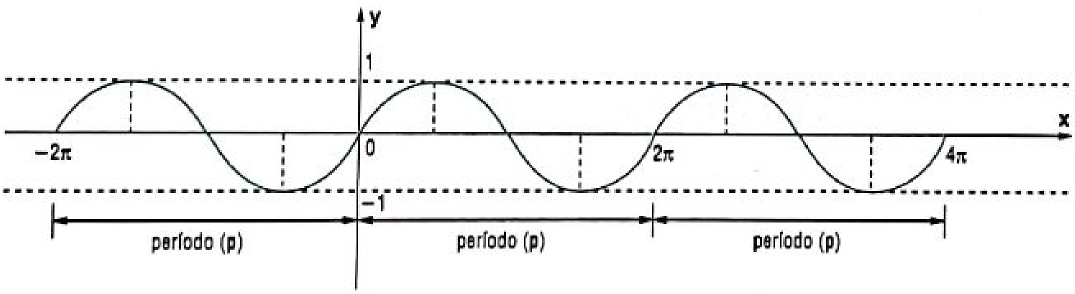
Veja o gráfico inicialmente para x ∈ [0, 2π] e depois para x ∈ ℝ:



Como a função f(x) = sen x é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é ℝ, a curva pode ser estendida para valores de **x** menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função f: ℝ → ℝ, definida por f(x) = sen x, é a curva chamada *senóide*, que tem o seguinte aspecto:



Periodicidade da função seno



Observando o gráfico da função seno, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos ... [−2π, 0], [0, 2π], [2π, 4π] ... Daí dizermos que a função seno é *periódica*.

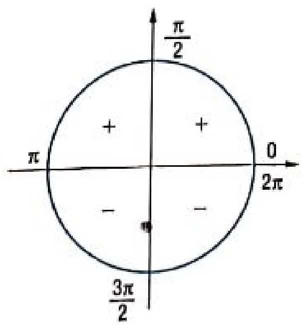
Observe no gráfico que:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dizemos então que o período da função seno é 2π e indicamos assim: p = 2π.

Sinal da função seno

Observando o sinal da função seno, vemos que a função é *positiva* para valores do 1º e 2º quadrantes e *negativa* para valores do 3º e 4º quadrantes.



PARA REFLETIR

Quais os valores de sen x para x = 0, x = $\frac{\pi}{2}$, x = π e x = $\frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos?

Resumo sobre a função seno

1º) Função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$.

2º) A função seno tem $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$.

3º) A função seno não é injetiva nem sobrejetiva.

4º) A função seno é função ímpar, isto é, $\text{sen } x = -\text{sen } (-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5º) A função seno é periódica de período $p = 2\pi$.

6º) • $\text{sen } x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

• $\text{sen } x > 0$, para x do 1º e 2º quadrantes e para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

• $\text{sen } x < 0$, para x do 3º e 4º quadrantes e para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

PARA REFLETIR x é a medida do arco em radianos.

Exemplo:

Vamos determinar os valores reais que **m** pode assumir para que exista um número real **x** que satisfaça a igualdade $\text{sen } x = 2m - 3$.

Condição: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2m - 3 \leq 1$

Resolvendo a dupla desigualdade, temos:

$$-1 \leq 2m - 3 \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq 2m \leq 1 + 3 \Rightarrow 2 \leq 2m \leq 4 \Rightarrow 1 \leq m \leq 2$$

Logo, os valores de **m** são dados pelo conjunto $\{m \in \mathbb{R} \mid 1 \leq m \leq 2\}$.

Exercício proposto

1. Determine os valores reais de **m** para que as seguintes equações tenham solução:

a) $\text{sen } x = 2m - 7$
b) $\text{sen } x = m - 5$
c) $\text{sen } x = 3m - 2$
d) $\text{sen } x = m^2 + m - 1$
e) $\text{sen } x = m^2 - 1$
f) $4m + \text{sen } x = 1$

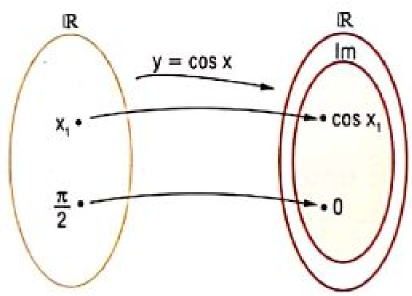
ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

3 Estudo da função cosseno

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos.

Assim, definimos a *função cosseno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *cosseno* x, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$



PARA REFLETIR Para cada valor real de **x** existe sempre um único valor real para cos x.

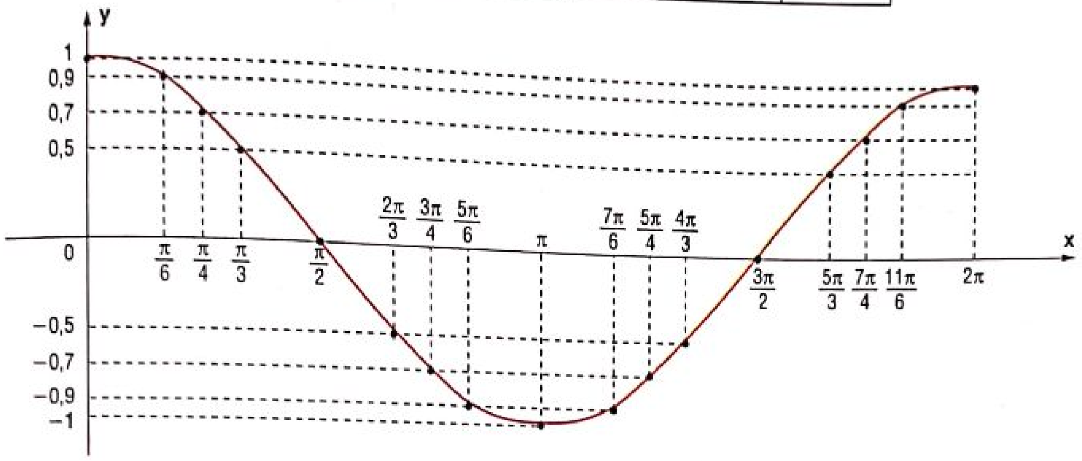
Já estudamos o processo que permite associar um número real **x** à medida **x** de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor *cos x*. Estudamos também como obter os valores *cos x* para quaisquer valores **x** de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que **x**, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Gráfico da função cosseno

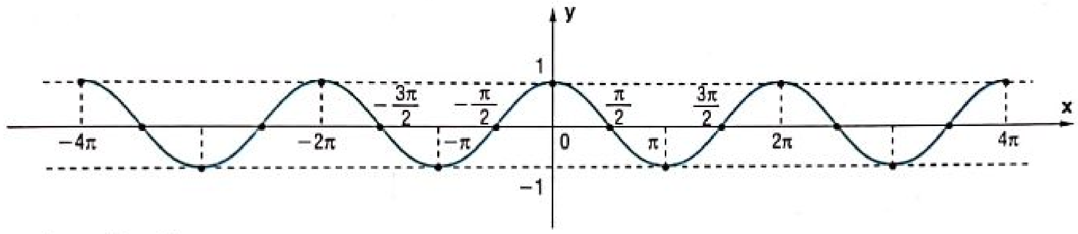
Vamos construir o gráfico da função $f(x) = \cos x$, inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$. Alguns valores de *cos x* serão aproximados.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos x	1	0,9	0,7	0,5	0	−0,5	−0,7	−0,9	−1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	−0,9	−0,7	−0,5	0	0,5	0,7	0,9	1



Como a função f(x) = cos x é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = cos x é a curva chamada *cossenóide*, que tem o seguinte aspecto:



Observações sobre a função cosseno:

1ª) A cossenóide *não* é uma nova curva, e sim uma senóide transladada de $\frac{\pi}{2}$ para a direita. Observe na senóide da página 231 que, se colocarmos o eixo y no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{2}$, teremos exatamente o gráfico acima. Isso faz com que a maioria dos aspectos relevantes da função cosseno seja a mesma da função seno.

2ª) O domínio é o mesmo: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = cos x tem D = $\mathbb{R}$.

3ª) A imagem é a mesma: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = cos x tem Im = [−1, 1].

4ª) O período é o mesmo: a função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.

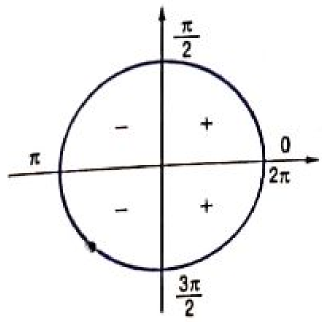
5ª) A função cosseno também não é nem injetiva nem sobrejetiva.

As diferenças entre a função cosseno e a função seno ficam por conta dos aspectos que dependem dos valores das imagens associados aos domínios, que transladam $\frac{\pi}{2}$ para a direita. Por exemplo, a função seno é ímpar e a função cosseno é par, pois cos x = cos (−x), $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$.

PARA REFLETIR O gráfico de f(x) = cos x é simétrico em relação ao eixo y.

Sinal da função cosseno

Observando o sinal da função f(x) = cos x, vemos que a função cosseno é *positiva* para valores do 1º e 4º quadrantes e *negativa* para valores do 2º e 3º quadrantes.



PARA REFLETIR Qual é o valor do cos x para x = 0, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos?

Exemplo:

Vamos determinar os valores máximo e mínimo da função $y = 2 + 3 \cdot \text{sen } x$.

Para -1, que é o valor mínimo de sen x, temos:
$y = 2 + 3(-1) = -1$

Para 1, que é o valor máximo de sen x, temos:
$y = 2 + 3 \cdot 1 = 5$

Logo, $y_{mín} = -1$ e $y_{máx} = 5$.

Exercícios propostos

2. Determine os valores reais de **m** para que exista um número real x que satisfaça as seguintes igualdades:

a) $\cos x = 2m + 5$
b) $\cos x = m - 3$
c) $\cos x = 3m + 4$
d) $\cos x = 3m^2 - m - 1$
e) $\cos x = 1 - m^2$
f) $\cos x + 5m = 6$

3. Considerando **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$:

a) calcule $f(\pi)$, $g(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

b) determine $x \in [0, 2\pi]$ tal que $f(x) = g(x)$;

c) determine se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $f(x) = g(x)$. Justifique sua resposta;

d) determine **x** tal que $0 \leq x \leq 2\pi$, $f(x) < 0$ e $g(x) \geq 0$.

4. Determine os valores máximo e mínimo de **y**.

a) $y = \text{sen } x - 10$
b) $y = 6 - 10 \cdot \cos x$
c) $y = 3 \cdot \cos^2 x + 1$
d) $y = \text{sen } x + \cos z$

4 Senóides

Além das funções trigonométricas estudadas existem outras que envolvem seno e cosseno, que chamaremos *senóides*. Por exemplo, as funções **f** e **g**, tal que:

- $f(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = \text{sen } 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

1º) Usando as funções dos exemplos dados acima, vamos determinar:

a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \cos \frac{\pi}{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

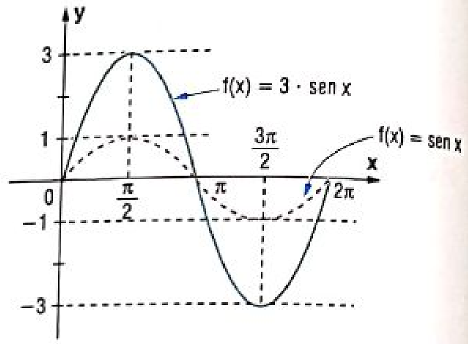
b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \pi = 0$

2º) Vamos construir e analisar os gráficos das funções abaixo dando o seu domínio, sua imagem e seu período. (Construa apenas um período completo.)

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ b) $f(x) = 1 + \cos x$

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$

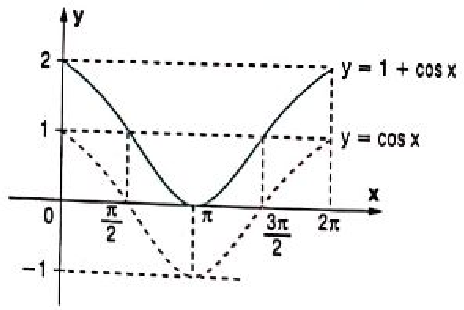
x	sen x	3 · sen x	y = f(x)
0	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1 = 3$	3
π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$3(-1) = -3$	-3
2π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0



$D = \mathbb{R}$, $Im = [-3, 3]$, $p = 2\pi$

b) $f(x) = 1 + \cos x$

x	cos x	1 + cos x	y = f(x)
0	1	$1 + 1 = 2$	2
$\frac{\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$	1
π	-1	$1 + (-1) = 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$	1
2π	1	$1 + 1 = 2$	2



$D = \mathbb{R}$, $Im = [0, 2]$, $p = 2\pi$

PARA REFLETIR Verifique que mudanças ocorreram nos gráficos de: $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ com relação a $f(x) = \text{sen } x$, e $f(x) = 1 + \cos x$ com relação a $f(x) = \cos x$.

Exercícios propostos

5. Considere as funções **f** e **g** definidas por:

- $f(x) = \text{sen } 4x$
- $g(x) = 1 - \cos x$

Determine:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
b) $g(\pi)$
c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
d) $D(g)$
e) $Im(g)$
f) $x \in [0, 2\pi]$ tal que $f(x) = 1$

6. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período de cada função. (*Sugestão*: para construí-lo, reveja os gráficos de seno e cosseno.)
a) f tal que $f(x) = \cos 3x$
b) g tal que $g(x) = |\text{sen } x|$

Senóides do tipo $y = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$

Também são senóides funções do tipo $y = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ ou $y = a + b \cdot \cos (cx + d)$, como por exemplo:

- $f(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$ $(a = 2; b = 1; c = 1; d = 0)$
- $g(x) = \text{sen } 2x$, com $x \in \mathbb{R}$ $(a = 0; b = 1; c = 2; d = 0)$
- $h(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen } (3x - \pi)$ $(a = 5; b = -3; c = 3; d = -\pi)$

O domínio de qualquer senóide é sempre $D = \mathbb{R}$. O que varia é a imagem e o período. Para obter a imagem, basta lembrar que $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ e substituir nas funções:

- $\left.\begin{array}{l}\text{máximo valor de } f(x) = 2 + \cos x\text{: } 2 + 1 = 3 \\ \text{mínimo valor de } f(x) = 2 + \cos x\text{: } 2 + (-1) = 1\end{array}\right\} \text{Im}(f) = [1, 3]$
- $\left.\begin{array}{l}\text{máximo valor de } g(x) = \text{sen } 2x\text{: } 1 \\ \text{mínimo valor de } g(x) = \text{sen } 2x\text{: } -1\end{array}\right\} \text{Im}(g) = [-1, 1]$
- $\left.\begin{array}{l}\text{máximo valor de } h(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen } (3x - \pi)\text{: } 5 - 3(1) = 2 \\ \text{mínimo valor de } h(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen } (3x - \pi)\text{: } 5 - 3(-1) = 8\end{array}\right\} \text{Im}(h) = [2, 8]$

Para obter o período, basta fazer $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$:

- período de $f(x) = 2 + \cos x$: $p_f = \dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$
- período de $g(x) = \text{sen } 2x$: $p_g = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$
- período de $h(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen } (3x - \pi)$: $p_h = \dfrac{2\pi}{|3|} = \dfrac{2\pi}{3}$

Além disso, é conveniente saber mais outros três detalhes sobre as senóides:

- se $b < 0$, o gráfico fica simétrico ao gráfico com $b > 0$ (simetria em relação ao eixo x);
- antes de desenhar o gráfico, é importante deixar o parâmetro c positivo. Para isso, usamos a paridade de seno e cosseno: $\text{sen } (-cx) = -\text{sen } (cx)$ e $\cos (-cx) = \cos (cx)$;
- se $d \neq 0$, o gráfico translada $\dfrac{-d}{c}$ unidades.

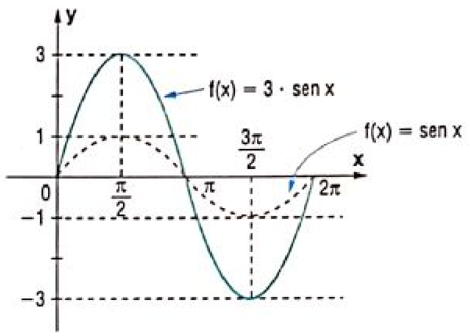
PARA REFLETIR
d positivo: o gráfico translada para a esquerda
d negativo: o gráfico translada para a direita

Exemplos:

1º) Vamos obter o conjunto imagem e o período da função $y = 2 + 4 \cdot \cos 3x$.
O valor mínimo de y é $2 + 4(-1) = -2$ e o valor máximo é $2 + 4 \cdot 1 = 6$. Portanto, $\text{Im}(y) = [-2, 6]$.
Como o período padrão da função cosseno é $p = 2\pi$, então o período da função y é $p_y = \dfrac{2\pi}{|3|} = \dfrac{2\pi}{3}$.

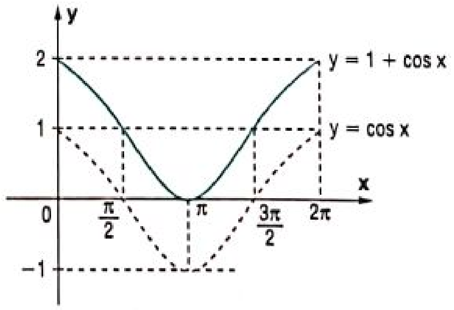
2º) Vamos construir novamente os gráficos do exemplo 2 da página 234, dando seu domínio, sua imagem e seu período. (Construa um período completo.)
a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ b) $f(x) = 1 + \cos x$

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$
Calculando a imagem, o período e o valor da translação horizontal do gráfico, podemos desenhá-lo facilmente.
Imagem: $f(x)_{máx} = 3 \cdot 1 = 3$
$f(x)_{mín} = 3(-1) = -3$
Logo, $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ (dilatou verticalmente, mas não transladou).
Período: $p_y = \dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ (não mudou)
Translação horizontal: $d = 0$ (não transladou)
Agora, basta esboçar o gráfico:



$D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [-3, 3]$, $p = 2\pi$

b) $y = f(x) = 1 + \cos x$
Imagem: $f(x)_{máx} = 1 + 1 = 2$
$f(x)_{mín} = 1 + (-1) = 0$
Logo, $\text{Im}(f) = [0, 2]$ (só transladou verticalmente; não dilatou).
Período: $p_y = \dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ (não mudou)
Translação horizontal: $d = 0$ (não transladou)
Agora, basta esboçar o gráfico:



$D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [0, 2]$, $p = 2\pi$

Exercícios propostos

7. Determine o conjunto imagem das funções f e g definidas por $f(x) = 3 + \cos x$ e $g(x) = 3 \cdot \cos x$.

8. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período da função $g(x) = -2 \cdot \text{sen } \dfrac{x}{2}$.

9. Determine o período das seguintes funções:

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

a) $f(x) = \text{sen } 7x$

b) $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $f(x) = 1 + 4 \cdot \text{tg}\left(\pi x - \frac{1}{2}\right)$

e) $f(x) = 1 + \text{sen } (\pi x - 3)$

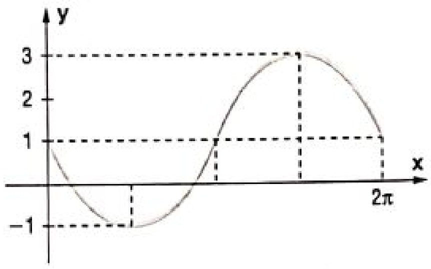
10. Determine:

a) o valor de m sabendo que o período da função $f(x) = 1 + \cos mx$ é igual a 3π;

b) o valor de a sabendo que o período da função $f(x) = \text{sen } \frac{2x}{a}$ é igual a $\frac{5\pi}{2}$;

c) o valor de m para que a função $f(x) = \cos\left(mx - \frac{\pi}{2}\right)$ tenha como período $p = \pi$.

11. (UFRGS) Se $f(x) = a + b \cdot \text{sen } x$ tem como gráfico:



Então:

a) $a = -2$ e $b = 1$.

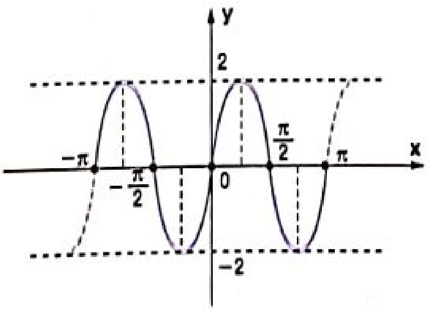
b) $a = -1$ e $b = 2$.

c) $a = 1$ e $b = -1$.

d) $a = 1$ e $b = -2$.

e) $a = 2$ e $b = -1$.

12. O gráfico abaixo representa a função:



a) $y = -2 \cdot \cos x$.

b) $y = \cos \frac{x}{2}$.

c) $y = 2 \cdot \text{sen } x$.

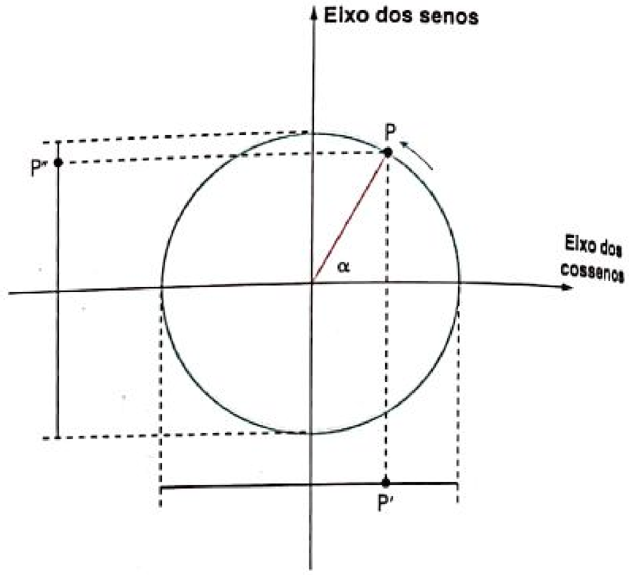
d) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$.

e) $y = 2 \cdot \text{sen } 2x$.

Fenômenos periódicos*

A natureza está repleta de fenômenos físicos ditos periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (período). Por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são todos periódicos.

As funções trigonométricas, em especial as senóides, são excelentes para descrever tais fenômenos, uma vez que são funções periódicas. A maneira mais básica de associar as senóides a um movimento periódico é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferência trigonométrica. A projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve um movimento periódico.



A projeção do ponto P(x, y) sobre o eixo dos cossenos descreve um movimento cuja equação é do tipo $x = \cos \alpha$ e sobre o eixo dos senos, $y = \text{sen } \alpha$.

Dessa forma podemos associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$, cuja imagem é dada por $[a - |b|, a + |b|]$, e cujo período é dado por $\frac{2\pi}{|c|}$. Na descrição dos fenômenos periódicos, em geral se opta por valores de b e c positivos, de forma que a imagem da senóide nesses casos passa a ser $[a - b; a + b]$ e o período, $\frac{2\pi}{c}$.

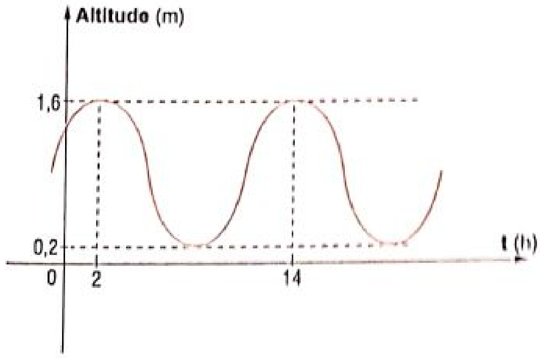
Exemplo:

Vamos descrever com uma senóide a altitude do mar em um dia em determinado local sabendo que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi 1,6 m e na maré baixa foi 0,2 m. As marés altas ocorreram às 2 h e às 14 h e as marés baixas ocorreram às 8 h e às 20 h. Vamos considerar a contagem do tempo em horas a partir da meia-noite.

* Contribuição dada pelo Prof. Eloy Ferraz Machado Neto.

O texto pode ser resumido pelo gráfico ao lado.

Então precisamos obter as constantes a, b, c e d em $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ou em $f(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$. Optaremos por $h(t) = a + b \cdot \text{sen}\,(ct + d)$ sem que haja motivo específico para isso. Optaremos também por b e c positivos, que é o mais comum. Assim, temos:



$$\begin{cases} a + b = 1{,}6 \\ a - b = 0{,}2 \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}9 \text{ e } b = 0{,}7$$

O período das marés é de $14 - 2 = 12$ h. Então:

$$\frac{2\pi}{c} = 12 \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}.$$

Existe deslocamento horizontal da senóide. Então, para obter a constante d, percebemos que nesse caso o máximo seno ocorre quando $t = 2$; como já sabemos que $c = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 + d\right) = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + d\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

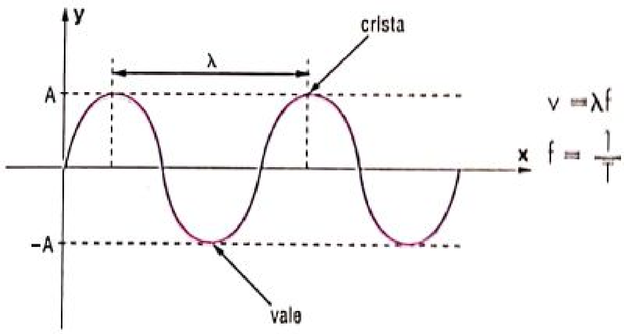
Variando k, encontramos os possíveis valores de d, que são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, etc. Optaremos por $d = \frac{\pi}{6}$.

Assim, nesse dia e nesse local, a altitude do mar pode ser descrita por $h(t) = 0{,}9 + 0{,}7 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Um tipo de movimento periódico muito comum é o movimento harmônico simples (MHS), caracterizado pelo movimento de um corpo em trajetória retilínea, com oscilação em torno de um ponto de equilíbrio. Os MHS são fenômenos periódicos no tempo. As constantes a, b, c e d são substituídas por constantes que representam aspectos relevantes do MHS. A constante a é nula, pois considera-se que o sistema de coordenadas tem origem na posição de equilíbrio (centro de oscilação); b é a amplitude A do movimento a partir do centro de oscilação; c é a freqüência angular ω; d é a fase inicial φ_0; e o argumento do seno (ou cosseno), ou seja, $\omega t + \varphi_0$, é chamado fase do movimento no tempo t. Dessa forma, a equação do espaço no MHS é comumente apresentada como $x = A \cdot \cos\,(\omega t + \varphi_0)$ ou $x = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$.

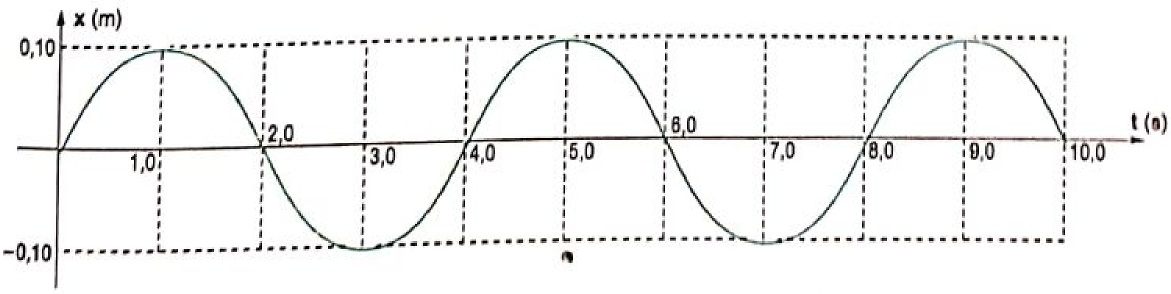
As ondas, seja do mar, sonoras, seja eletromagnéticas (luz, microondas, raios X, etc.), também são fenômenos periódicos descritos por senóides. Neste caso, são fenômenos periódicos no espaço, sendo que cada onda se caracteriza por uma amplitude A, um comprimento λ, uma velocidade de propagação v e uma freqüência f (ou período T). O comprimento de onda λ é a distância entre duas cristas, ou seja, é o período da senóide que representa a função, e não deve ser confundido com o período T do movimento da onda.



A equação da onda no momento inicial da propagação pode ser descrita por $y = A \cdot \text{sen}\,(kx)$, sendo o parâmetro k chamado de *número de onda*.

Exemplos:

1º) Vamos considerar uma partícula realizando um MHS com função horária $x(t) = A \cdot \cos\,(\varphi_0 + \omega t)$. Dessa forma, x(t) representa a posição assumida pela partícula em função do instante t a partir de $t_0 = 0$, A representa a amplitude do movimento; φ_0, sua fase inicial e ω sua pulsação. Na figura temos o gráfico dessa função horária, segundo um certo referencial.



Vamos obter a função horária da posição dessa partícula, com dados no SI, e as constantes A, φ_0 e ω positivas.

A função pedida é derivada de uma função cosseno. Além disso, o gráfico nos mostra que:

- o período é 4:
- $4 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{\pi}{2}$
- a imagem é Im = [−0,1; 0,1]:
- $\begin{cases} a + b = 0,1 \\ a - b = -0,1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 0,1$
- existe deslocamento horizontal

  Do gráfico temos que o cosseno é máximo em t = 1 s. Então:

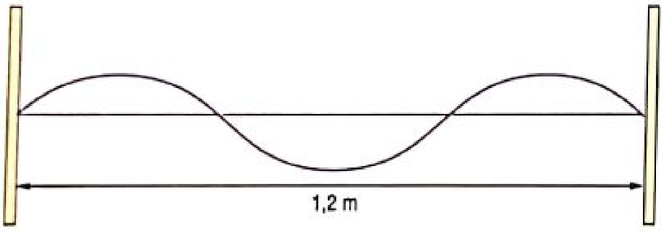
  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + d\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + d = 0 + 2k\pi \Rightarrow$

  $\Rightarrow d = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

  Variando k, encontramos os possíveis valores de d, que são: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, etc.

Assim, com as constantes positivas, uma equação possível é $x(t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

2º) (PUC-SP) Uma onda senoidal que se propaga por uma corda (como mostra a figura) é produzida por uma fonte que vibra com uma freqüência de 150 Hz.



O comprimento de onda e a velocidade de propagação dessa onda são:

a) λ = 0,8 m e v = 80 m/s.

b) λ = 0,8 m e v = 120 m/s.

c) λ = 0,8 m e v = 180 m/s.

d) λ = 1,2 m e v = 180 m/s.

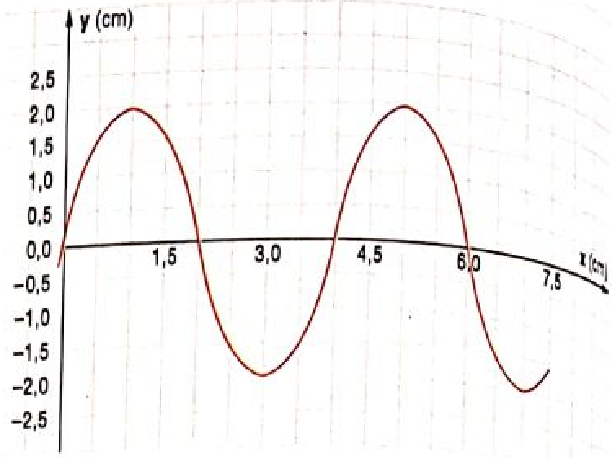
e) λ = 1,2 m e v = 120 m/s.

O desenho mostra 1,5 período de uma senóide. O comprimento de onda λ é dado pelo período da senóide. Então: $1,5\,\lambda = 1,2 \Rightarrow \lambda = 0,8$ m

A velocidade de propagação é dada por $v = \lambda f = 0,8 \cdot 150 = 120$ m/s.

Resposta: alternativa b.

3º) (Fuvest-SP-modificado) Uma caneta move-se ao longo do eixo y com um movimento harmônico simples. Ela registra uma linha sobre uma fita de papel e se move com velocidade de 10 cm/s da direita para a esquerda. O gráfico a seguir representa esse movimento.



Vamos determinar a função y(x) que representa a curva mostrada no gráfico.

O formato do gráfico é uma senóide sem translação alguma em x, portanto d = 0.

A imagem do gráfico é [−2, 2], portanto temos a = 0 e b = 2.

O período é 4, portanto:

$4 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{\pi}{2}$

Assim, a função é $y(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Observação: Essa mesma função poderia ser escrita usando-se a função cosseno, bastando para isso lembrar que $\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Portanto, a função poderia ser $y(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)$.

Exercícios propostos

13. (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão $P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação (t = 0) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante t.
    a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$.
    b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

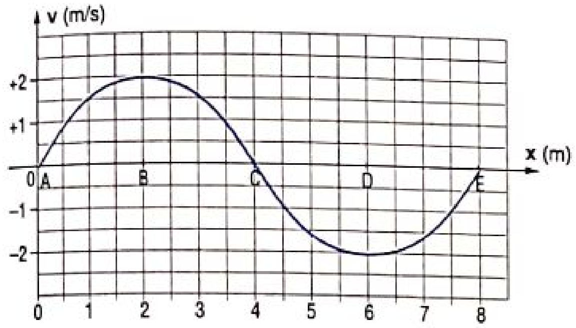
14. (Vunesp) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t) = 15 + 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação de H(t) à temperatura (em °C) no instante t.

a) Resolva a equação $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$.

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia de observação.

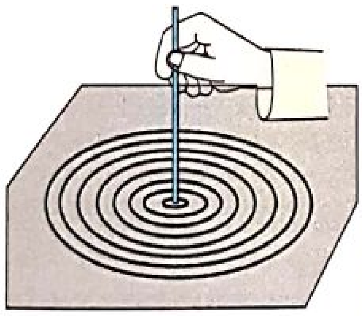
Resolva os exercícios a seguir em equipe.

15. O gráfico representa, num dado instante, a velocidade transversal dos pontos de uma corda na qual se propaga uma onda senoidal na direção do eixo dos x.



Para esse instante, determine uma senóide que relaciona a velocidade v com a posição x dos pontos da corda.

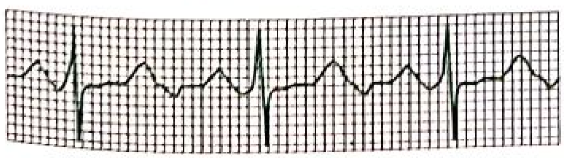
16. Utilizando um pequeno bastão e uma tigela com água, uma pessoa produz na superfície da água ondas circulares como mostra a figura.



ATENÇÃO! As questões de vestibular foram transcritas literalmente. Embora em algumas apareça: "Assinale", "Indique", etc., **não escreva no livro**. Todas as respostas devem ser dadas no caderno.

Sabendo que a distância entre duas cristas consecutivas das ondas produzidas é de 2 cm, e a amplitude das ondas é de 0,3 cm, obtenha uma função relacionando a altitude h da superfície da água (em relação ao nível de água em repouso) para o momento em que em x = 0 temos h = 0 e a função seja crescente em x = 0.

17. (Unifesp) O eletrocardiograma é um dos exames mais comuns da prática cardiológica. Criado no início do século XX, é utilizado para analisar o funcionamento do coração em função das correntes elétricas que nele circulam. Uma pena ou caneta registra a atividade elétrica do coração, movimentando-se transversalmente ao movimento de uma fita de papel milimetrado, que se desloca em movimento uniforme com velocidade de 25 mm/s. A figura mostra parte de uma fita de um eletrocardiograma.



Sabendo-se que a cada pico maior está associada uma contração do coração, a freqüência cardíaca dessa pessoa, em batimentos por minuto, é:

a) 60. b) 75. c) 80. d) 95. e) 100.

18. (Vunesp-modificado) As figuras 1 e 2, desenhadas numa mesma escala, reproduzem instantâneos fotográficos de duas ondas propagando-se em meios diferentes.

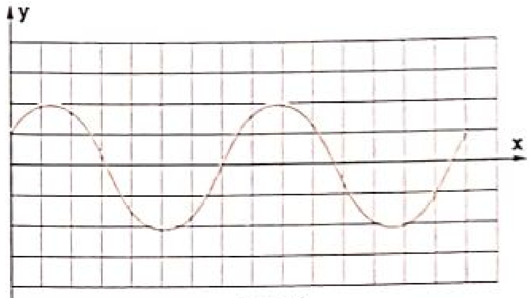


Figura 1

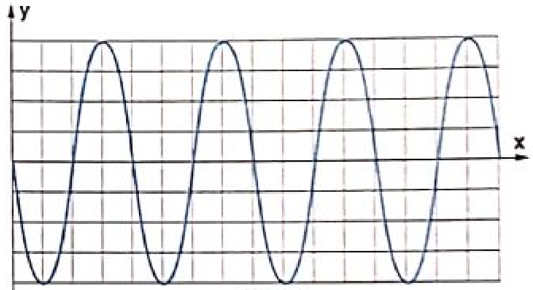


Figura 2

Denominando A_1 e A_2 e l_1 e l_2, respectivamente, as amplitudes e os comprimentos de onda associados a essas ondas, determine as razões $\frac{A_1}{A_2}$ e $\frac{l_1}{l_2}$.

19. (Mack-SP) Uma partícula realiza um MHS (movimento harmônico simples), segundo a equação $x = 0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)$, no SI. A partir da posição de elongação máxima, o menor tempo que esta partícula gastará para passar pela posição de equilíbrio é:

a) 0,5 s. b) 1 s. c) 2 s. d) 4 s. e) 8 s.

20. (UFG-GO) O gráfico abaixo mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4 s. A equação da posição em função do tempo para este movimento harmônico é dada por $x = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$. A partir do gráfico, encontre as constantes A, ω e ϕ.