POLINÔMIOS

1) Definição:

Seja n um número tal que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, k um número tal que $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$ e a_k coeficientes tais que $a_k \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Definimos como *polinômio* toda relação do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pode também ser escrito como:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Exemplos:

⇒ $P(x) = x + 3$ é um polinômio

⇒ $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ é um polinômio

⇒ $R(x) = 3x^3 + 2x$ é um polinômio

⇒ $S(x) = 2ix^4 - \sqrt{5}x^3 + (3-4i)x + 2$ é um polinômio

⇒ $T(x) = \dfrac{3}{x} + 2x + 4$ **NÃO** é um polinômio

⇒ $U(x) = \sqrt[3]{x^2} + 3x - 5$ **NÃO** é um polinômio

2) Partes:

- $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são chamados de **coeficientes.**
- a_0 é chamado de **termo independente** e a_n é chamado de **coeficiente dominante**.
- $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \cdots, a_n x^n$ são chamados de **termos**.

3) Grau:

O grau do polinômio é dado pelo expoente de x com maior valor. Ou seja: $\text{gr}(P) = n$.

Exemplos:

⇒ $P(x) = x - 3$ tem grau 1.

⇒ $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ tem grau 3.

⇒ $R(x) = 2x - 5x^5 + 3$ tem grau 5

Ex$_1$: Calcule o valor de m para que o polinômio $P(x) = (m^2 - 9)x^3 + (m+3)x^2 - 5x + 6$ tenha grau 2.

⇒ Para gr(P) = 2, temos que fazer com que o termo de terceiro grau tenha coeficiente nulo. Ou seja, fazemos $m^2 - 9 = 0$. Como soluções disso, temos $m = \pm 3$, ou seja, $m = 3$ ou $m = -3$. Porém, é importante ressaltar que para P ter grau 2, o coeficiente do termo de grau 2 não pode ser nulo, ou seja, $m + 3 \neq 0$. Disso tiramos que $m \neq -3$. Logo, o único valor de m que torna P um polinômio de segundo grau é $m = 3$.

Ex$_2$: Analise, em função do valor de m, o grau de $Q(x) = (m^2 - 4)x^3 + (m-2)x^2 + 7x - 2$.

⇒ Analisando os valores de m, podemos chegar as seguintes conclusões: se $m = 2$, gr(Q) = 1; se $m = -2$, gr(Q) = 2; se $m \neq \pm 2$, gr(Q) = 3

4) Valor Numérico:

Seja P um polinômio tal que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ e α tal que $\alpha \in \mathbb{C}$, o valor numérico desse polinômio quando $x = \alpha$ será dado por $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$, fazendo as operações necessárias. Vale lembrar que $P(\alpha)$ será um número pertencente ao conjunto dos complexos.

Exemplo:

⇒ Valor numérico de $P(x) = x^2 - 5x + 6$ quando $x = 5$: $P(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 6$

⇒ Valor numérico de $Q(x) = x^3 - 2x + 1$ quando $x = 2 + i$:

$$\begin{aligned} Q(2+i) &= (2+i)^3 - 2(2+i) + 1 = \\ &= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 - 4 - 2i + 1 = \\ &= 8 - 6 - 4 + 1 + 12i - i - 2i = \\ &= -1 + 9i \end{aligned}$$

5) Raízes ou zeros de um polinômio:

São chamados de raízes ou de zeros de $P(x)$ todo o valor $\alpha \in \mathbb{C}$ cujo valor numérico de P para $x = \alpha$ é 0. Ou seja, se $P(\alpha) = 0$, α é raiz do polinômio P.

Exemplos:

- $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ para $x = 2$

  ⇒ $$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = \\ &= 8 - 24 + 22 - 6 = 0 \end{aligned}$$

  Logo, 2 é raiz de P.

- $Q(x) = x^2 + 1$ para $x = i$

  ⇒ $Q(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

  Logo, i é raiz de Q.

- $D(x) = x^4 - 2x + 1$ para $x = 3$

  ⇒ $D(3) = 3^4 - 2 \cdot 3 + 1 = 81 - 6 + 1 = 76$

  Logo, 3 não é raiz de D.

6) Polinômios completos:

Um polinômio é completo se todos os seus coeficientes são não nulos, ou seja, existem termos de todos os graus.

Exemplo:

$\Rightarrow$ $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é completo.

$\Rightarrow$ $Q(x) = x^4 + 2x - 1$ é incompleto.

Observe que Q não tem os termos de graus 3 e 2, e isso o caracteriza como um polinômio incompleto. Será necessário escrever o polinômio em sua forma completa em alguns casos. Quando isso acontecer, basta escrever os termos que faltam com coeficiente 0.

Exemplo:

$\Rightarrow$ $Q(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 1$

7) Igualdade:

Sejam dois polinômios $P(x) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k$ e $Q(x) = \sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k$. Para que esses dois polinômios sejam idênticos (ou iguais), eles precisam ter o mesmo grau ($gr(Q)=gr(P)$, ou seja, $n_1 = n_2$) e os coeficientes dos termos de mesmo grau precisam ser iguais ($a_k = b_k$).

Ex3: Sejam P e Q polinômios tais que: $P(x) = (a + 2b - 4)x^3 + 5x^2 - cx + 6$, $Q(x) = (3a - b)x^2 + (d + 2)x - d$. Calcule *a*, *b*, *c* e *d* para que $P(x) \equiv Q(x)$.

$\Rightarrow$ Para eles serem idênticos, eles precisam ter o mesmo grau. Para isso, o termo de grau 3 de P deve ter coeficiente nulo, e os coeficientes de P e Q devem ser iguais. Ou seja:

$a + 2b - 4 = 0$
$3a - b = 5$
$d + 2 = -c$
$-d = 6$

Disso, tiramos os sistemas:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a - b = 5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} d + c = -2 \\ d = -6 \end{cases}$$

Resolvendo, teremos:

$a = 2$, $b = 1$, $c = 4$ e $d = -6$.

- **Polinômios identicamente nulos:**
  Se dizemos que um polinômio é identicamente nulo, ou seja, $P(x) \equiv 0$, esse polinômio tem todos os coeficientes iguais a 0 ($a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$).

Ex4: Calcule *a*, *b* e *c* para que $P(x) = (a - 2b)x^3 + (b - 3)x^2 + (a + b + c)$ seja um polinômio identicamente nulo:

$\Rightarrow$ Para $P(x) \equiv 0$, teremos:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b - 3 = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, achamos $a = 6$, $b = 3$ e $c = -9$.

8) Operações com polinômios:

Sejam P e Q dois polinômios quaisquer. É possível fazer operações com esses polinômios.

- **Oposto:** Se temos o polinômio P como $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, o oposto $-P$ será dado por $-P(x) = -a_n x^n - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$
- **Soma/subtração:** A soma entre P e Q será dada por $(P+Q)(x)$ e para isso iremos somar os termos de mesmo grau. Para a subtração P – Q, somamos P com o oposto de Q, ou seja, $(P+(-Q))(x)$. Exemplo:

  $\Rightarrow$ $P(x) = x^2 - 5x + 6$ e $Q(x) = 2x + 4$.

  $$(P+Q)(x) = (x^2 - 5x + 6) + (2x + 4) = \\ = x^2 - 3x + 10$$

  $$(P-Q)(x) = (x^2 - 5x + 6) + (-2x - 4) = \\ = x^2 - 7x + 2$$

- **Produto:** O produto entre P e Q é feito utilizando a propriedade distributiva da multiplicação. Exemplo:

  $\Rightarrow$ $P(x) = x^3 - 4x^2 - 1$ e $Q(x) = 3x^2 - 2$

  $$(P \cdot Q)(x) = (x^3 - 4x^2 - 1)(3x^2 - 2) = \\ = 3x^5 - 2x^3 - 12x^4 + 8x^2 - 3x^2 + 2 = \\ = 3x^5 - 12x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$$

- **Divisão:** A divisão entre dois polinômios é feita utilizando o método da chave, assim como fazemos com números.

  $$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

  Se dividimos um polinômio $P(x)$ por um outro $D(x)$, onde **obrigatoriamente** $gr(P) \geq gr(D)$, obtemos um quociente $Q(x)$ e um resto $R(x)$, onde $gr(D)>gr(R)$. Ao utilizar esse método para divisão, podemos reescrever o polinômio $P(x)$ como $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Ex5: Vamos dividir o polinômio $\mathrm{P}(x) = -6x^4+5x^3-4x^2+7x-11$ pelo polinômio $\mathrm{D}(x)=2x^2-x+3$.

⇒ Passo 1: Escrevemos os polinômios na chave. Caso algum esteja incompleto, escreva-o em sua forma completa (segundo exemplo do tópico **(6)**). Também é necessário escrever os polinômios com seus termos ordenados com seus graus em ordem decrescente.

$$\begin{array}{l|l} -6x^4+5x^3-4x^2+7x-11 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

⇒ Passo 2: Vamos dividir o termo de maior grau do dividendo P pelo termo de maior grau do divisor D.

$$\frac{-6x^4}{2x^2}=-3x^2$$

Então, multiplicamos o resultado pelo divisor D:

$$-3x^2\left(2x^2-x+3\right)=-6x^4+3x^3-9x^2$$

Então colocamos o resultado da divisão sobre a chave e o resultado do produto sobre o dividendo **com todos os seus sinais trocados**:

$$\begin{array}{l|l} -6x^4+5x^3-4x^2+7x-11 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} +6x^4-3x^3+9x^2 & -3x^2 \end{array}$$

Após isso, somamos os termos de mesmo grau e repetimos os que não foram usados.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{-6x^4}+5x^3-4x^2+7x-11 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{+6x^4}-3x^3+9x^2} & -3x^2 \\ \qquad +2x^3+5x^2+7x-11 & \end{array}$$

Ao polinômio $2x^3+5x^2+7x-11$ chamamos de resto parcial.

⇒ Passo 3: Repetir o processo, agora considerando o resto parcial como o divisor.

$$\frac{2x^3}{2x^2}=+x$$

$$+x\left(2x^2-x+3\right)=+2x^3-x^2+3x$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{-6x^4}+5x^3-4x^2+7x-11 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{+6x^4}-3x^3+9x^2} & -3x^2+x \\ \qquad \cancel{+2x^3}+5x^2+7x-11 & \\ \qquad \underline{\cancel{-2x^3}+x^2-3x} & \\ \qquad\qquad +6x^2+4x-11 & \end{array}$$

⇒ Passo 4: Repetir o processo com o próximo resto parcial.

$$\frac{6x^2}{2x^2}=3$$

$$3\left(2x^2-x+3\right)=6x^2-3x+9$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{-6x^4}+5x^3-4x^2+7x-11 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{+6x^4}-3x^3+9x^2} & -3x^2+x+3 \\ \qquad \cancel{+2x^3}+5x^2+7x-11 & \\ \qquad \underline{\cancel{-2x^3}+x^2-3x} & \\ \qquad\qquad \cancel{+6x^2}+4x-11 & \\ \qquad\qquad \underline{\cancel{-6x^2}+3x-9} & \\ \qquad\qquad\quad +7x-20 & \end{array}$$

Como o grau do resto já é menor que o do divisor, podemos encerrar a divisão.

A divisão anterior resultou num quociente $\mathrm{Q}(x)=-3x^2+x+3$ e num resto $\mathrm{R}(x)=7x-20$. Isso significa que:

$$\mathrm{P}(x)=\left(2x^2-x+3\right)\left(-3x^2+x+3\right)+7x-20$$

Ex6: Vamos dividir o polinômio $\mathrm{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6$ por $\mathrm{D}(x)=x-3$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}-6x^2+11x-6 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{x^3}+3x^2} & x^2-3x+2 \\ \quad \cancel{-3x^2}+11x-6 & \\ \quad \underline{\cancel{+3x^2}-9x} & \\ \qquad \cancel{+2x}\cancel{-6} & \\ \qquad \underline{\cancel{-2x}\cancel{+6}} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Quando o resto é 0, dizemos que P é divisível por D, ou que D divide P.

Ex7: Vamos dividir $\mathrm{P}(x)=x^3-1$ por $\mathrm{D}(x)=x-1$. Lembre-se que devemos completar o polinômio ao colocá-lo na chave.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{+x^3}+0x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{-x^3}+x^2} & x^2+x+1 \\ \quad \cancel{+x^2}+0x-1 & \\ \quad \underline{\cancel{-x^2}+\ x} & \\ \qquad \cancel{+\ x}\cancel{-1} & \\ \qquad \underline{\cancel{-\ x}\cancel{+1}} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

9) Teorema do resto:

O teorema do resto diz que a divisão de um polinômio P(x) por um binômio do primeiro grau do tipo $x - a$ terá resto igual P(a). Isso ocorre pois se efetuamos a divisão, o polinômio pode ser escrito como:

$$\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)(x-a)+\mathrm{R}(x)$$

Se acharmos o valor numérico do polinômio para $x = a$, teremos:

$$\mathrm{P}(a)=\mathrm{Q}(a)(a-a)+\mathrm{R}(a)$$

Perceba que a parte marcada se anula. Por isso, teremos:

$$\mathrm{P}(a)=\cancel{\mathrm{Q}(a)\cdot 0}+\mathrm{R}(a)=\mathrm{R}(a)$$

Como o divisor é um polinômio de primeiro grau, o resto será um número, então podemos representa-lo por R. Logo, podemos dizer que o resto da divisão de P(x) por $x-a$ é $\mathrm{R}=\mathrm{P}(a)$.

Ex8: Calcule o resto da divisão de:

$$\mathrm{P}(x)=x^6-5x^5+x^4-7x^3+4x^2+10x-138$$

por $x-3$:

$\Rightarrow$ O resto será:

$$\mathrm{P}(3)=3^6-5\cdot3^5+3^4-7\cdot3^3+4\cdot3^2+10\cdot3-138$$
$$\mathrm{P}(3)=-666$$

10) Teorema de D'Alembert:

O teorema de D'Alembert diz que um polinômio P(x) é divisível por $x-a$ quando a é raiz de P, ou seja, se P(a) = 0.

11) Dispositivo prático de Briot-Ruffini:

Para dividir um polinômio P(x) cujo gr(P) > 1 por um binômio do tipo $x-a$ podemos utilizar um algoritmo ou dispositivo denominado dispositivo prático de Briot-Ruffini ou algoritmo de Briot-Ruffini. Esse dispositivo é distribuído da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & \downarrow & a.a_n+a_{n-1} & a.q_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a.q_3+a_2 & a.q_2+a_1 & a.q_1+a_0 \\
 & a_n & q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots & q_2 & q_1 & \text{resto}
\end{array}$$

Nesse dispositivo, nós repetimos o coeficiente dominante e para os próximos nós utilizamos o algoritmo. Esse algoritmo diz que o coeficiente resultante q_k será resultado do produto $a\cdot q_{k+1}$ somado à a_k. Ou seja, $q_k=a\cdot q_{k+1}+a_k$. O quociente Q(x) será o polinômio cujos coeficientes dos termos serão os resultantes q_k, sendo que esses termos tem grau k – 1. O coeficiente q_0 será o resto da divisão.

Ex9: Vamos dividir o polinômio $\mathrm{P}(x)=x^3-7x^2+3x+2$ por $\mathrm{D}(x)=x-5$.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
5 & 1 & -7 & 3 & 2 \\
\hline
 & \downarrow & 1\cdot5-7 & -2\cdot5+3 & -7\cdot5+2 \\
 & 1 & -2 & -7 & -33
\end{array}$$

Logo, a divisão de P por D resulta no quociente $\mathrm{Q}(x)=x^2-2x-7$ com resto R = –33. Podemos confirmar isso pois:

$$(x^2-2x-7)(x-5)-33=x^3-7x^2+3x+2.$$

Ex10: Dividir $\mathrm{P}(x)=3x^4-7x+5$ por $x+3$. Lembre-se sempre de completar o polinômio caso seja necessário.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
-3 & 3 & 0 & 0 & -7 & 5 \\
\hline
 & 3 & -9 & 27 & -88 & 269
\end{array}$$

Logo, o quociente é o polinômio $\mathrm{Q}(x)=3x^3-9x^2+27x-88$ e o resto é 269.

- **Caso especial: divisão por $ax + b$**

  No caso da divisão de um polinômio P de gr(P) > 1 por um binômio do tipo $ax + b$ também é possível utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini. Para isso, fatoramos $ax + b$ na forma $a(x+b/a)$ e dividimos o polinômio por $x+b/a$. Para compensar, dividimos os coeficientes resultantes **EXCETO O RESTO** por a e então temos o quociente.

  Ex11: Dividir $\mathrm{P}(x)=4x^3-2x^2+7$ por $2x-4$. Fatoramos o divisor em $2(x-2)$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
2 & 4 & -2 & 0 & 7 \\
\hline
 & 4 & 6 & 12 & 31
\end{array}$$

  Logo, temos um quociente $\mathrm{Q}'(x)=4x^2+6x+12$ e 31 de resto. Porém, vale lembrar que esse é o quociente da divisão por x – 2. **O quociente Q será o polinômio** $\mathrm{Q}(x)=2x^2+3x+6$. O resto permanece 31. A explicação para isso é:

$$\mathrm{P}(x)=(4x^2+6x+12)(x-2)+31=$$
$$=2(2x^2+3x+6)(x-2)+31=$$
$$=(2x^2+3x+6)\cdot2(x-2)+31=$$
$$=(2x^2+3x+6)(2x-4)+31$$

12) Divisões sucessivas:

Se temos um P(x) com $\mathrm{gr}(\mathrm{P})\geq 2$ e P é divisível simultaneamente por $x-a$ e por $x-b$, ele obrigatoriamente também é divisível por $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$.

Para provar, vamos considerar P divisível simultaneamente por $x-a$ e por $x-b$. Na divisão por $(x-a)(x-b)$, o resto R(x) deve ser no máximo de grau 1, por isso o chamaremos de $mx+n$. Podemos então reescrever P como $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)(x-a)(x-b)+\mathrm{R}(x)$.

Como sabemos, P(a) = 0 já que P é divisível por $x - a$ e que P(b) = 0 já que P é divisível por $x - b$. Portanto, temos:

$$\mathrm{P}(a)=\mathrm{Q}(a)(a-a)(a-b)+\mathrm{R}(a)=0$$
$$\mathrm{P}(a)=\cancel{\mathrm{Q}(a)\cdot 0\cdot(a-b)}+\mathrm{R}(a)=0$$
$$\mathrm{R}(a)=0 \therefore m\cdot a+n=0$$
$$\mathrm{P}(b)=\mathrm{Q}(b)(b-a)(b-b)+\mathrm{R}(b)=0$$
$$\mathrm{P}(b)=\cancel{\mathrm{Q}(b)(b-a)\cdot 0}+\mathrm{R}(b)=0$$
$$\mathrm{R}(b)=0 \therefore m\cdot b+n=0$$

Logo, teremos o sistema

$$\begin{cases} m\cdot a+n=0 \\ m\cdot b+n=0 \end{cases}$$

Desse sistema, tiramos m = 0 e n = 0. Portanto, o resto R(x) é 0, logo, P(x) é divisível por $(x-a)(x-b)$.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

1) **Definição:**

Seja n um número tal que $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 1$, k um número tal que $k\in\mathbb{N}$ e $0\leq k\leq n$ e a_k coeficientes tais que $a_k\in\mathbb{C}$ e $a_n\neq 0$. Definimos como equação polinomial toda equação P(x) = 0, ou seja:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

O conjunto solução dessa equação é o conjunto com todos os valores de x que satisfazem a equação, ou seja, todas as raízes de P.

Ex$_{12}$: $\mathrm{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6$ tem raízes $x=1$, $x=2$ e $x=3$ pois temos P(1) = 0, P(2) = 0 e P(3) = 0. Logo, seu conjunto solução é o conjunto $\mathrm{S}=\{1, 2, 3\}$.

2) **Teorema fundamental da Álgebra (T.F.A.):**

O T.F.A. diz que para qualquer polinômio P de grau n, com $n\geq 1$, existe ao menos uma raiz complexa que satisfaz a equação P(x) = 0.

3) **Teorema da Decomposição:**

Um polinômio P de grau n, tal que $n\geq 1$ e $\mathrm{P}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau. Pelo teorema de D'Alembert, sabemos que se P é divisível por $x - a$, então a é raiz do polinômio. Considere os números $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ como raízes de P. O polinômio P pode ser reescrito da forma:

$$\mathrm{P}(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$$

Ex$_{13}$: O polinômio $\mathrm{P}(x)=2x^3-12x^2+22x-12$ tem como raízes os números 1, 2 e 3. Decomponha ele utilizando o teorema da decomposição.

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$.

Como consequência desse teorema, sabemos que um polinômio P qualquer tem exatamente n raízes complexas que **podem** ser distintas ou não.

- **Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para decompor polinômios e achar raízes:** Graças ao teorema da decomposição, é possível utilizar Briot-Ruffini para decompor um polinômio ou até achar suas raízes.

Ex$_{14}$: Sabendo que 4 é raiz de $\mathrm{P}(x)=x^3-4x^2+4x-16$, determine o conjunto solução da equação $\mathrm{P}(x)=0$.

$\Rightarrow$ Se 4 é raiz, sabemos pelo teorema de D'Alembert que P é divisível por $x - 4$. Logo, usamos Briot-Ruffini para achar o resultado da divisão.

$$\begin{array}{r|rrr|r} 4 & 1 & -4 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Logo, sabemos que P pode ser reescrito como $\mathrm{P}(x)=(x-4)(x^2+4)$. Como queremos o conjunto solução da equação $\mathrm{P}(x)=0$, temos então $(x-4)(x^2+4)=0$. Fica fácil resolver dessa forma.

$$\begin{cases} x-4=0\Rightarrow x=4 \\ x^2+4=0\Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução de P é $\mathrm{S}=\{-2i,\ 2i,\ 4\}$.

Ex$_{15}$: Sabendo que 5 e 6 são raízes de $\mathrm{P}(x)=x^4-16x^3+91x^2-216x+180$, decomponha P em fatores de primeiro grau.

$\Rightarrow$ Para isso, usaremos divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 5 & 1 & -16 & 91 & -216 & 180 \\ \hline 6 & 1 & -11 & 36 & -36 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Logo, $\mathrm{P}(x)=(x-5)(x-6)(x^2-5x+6)$, então as outras duas raízes vêm de $x^2-5x+6=0$. Por soma e produto achamos facilmente essas raízes, que são 2 e 3. Logo, decompondo P, temos: $P(x)=(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)$.

4) Multiplicidade de uma raiz:

Se um polinômio P pode ser escrito como $P(x)=(x-k)^m Q(x)$, com $m \geq 1$ e $Q(k) \neq 0$ dizemos que a raiz *k* tem multiplicidade *m*.

Ex16: O polinômio:

$$P(x)=x^6-15x^5+92x^4-296x^3+528x^2-496x+192$$

é divisível por $(x-2)^4$, e tem outras duas raízes que são 3 e 4. Diga a multiplicidade de cada raiz.

$\Rightarrow$ O polinômio pode ser reescrito da forma $P(x)=(x-2)^4(x-3)(x-4)$. A raiz 2 tem multiplicidade 4, a raiz 3 tem multiplicidade 1 e a raiz 4 tem multiplicidade 1.

Ex17: Sabe-se que 1 é raiz com multiplicidade maior que 1 do polinômio $P(x)=x^5-8x^4+24x^3-34x^2+23x-6$. Determine a multiplicidade da raiz 1 e decomponha P em fatores do primeiro grau.

$\Rightarrow$ Para achar a multiplicidade de 1, precisamos fazer divisões sucessivas utilizando Briot-Ruffini, e 1 será raiz todas as vezes que o resto der 0.

1	1	−8	24	−34	23	−6
1	1	−7	17	−17	6	0
1	1	−6	11	−6	0	
1	1	−5	6	0		
	~~1~~	~~−4~~	~~2~~			

1 é raiz apenas onde ele foi marcado em verde. Perceba que ele não foi raiz na quarta vez pois o resto da divisão foi 2, então ignoraremos a última divisão e pararemos na penúltima. Sabemos então que $P(x)=(x-1)^3(x^2-5x+6)$, logo as outras duas raízes vêm de $x^2-5x+6=0$. Por soma e produto achamos facilmente essas raízes, que são 2 e 3. Logo, podemos decompor P na forma $P(x)=(x-1)^3(x-2)(x-3)$, e a raiz 1 tem multiplicidade 3.

5) Raízes complexas não reais:

Se temos um polinômio $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ onde $a_k \in \mathbb{R}$, ou seja, todos os coeficientes são reais (chamamos de polinômio de corpo real) e esse polinômio tem como uma de suas raízes o número $Z=a+bi$, com $b \neq 0$, **obrigatoriamente** o seu conjugado $\overline{Z}=a-bi$ também é raiz de P. Como consequência disso, se a raiz Z tem multiplicidade *m*, a raiz $\overline{Z}$ também terá multiplicidade *m*. Isso também nos mostra que **todo polinômio de corpo real de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real**, visto que as raízes complexas não reais aparecem em duplas.

Ex18: Resolva a equação $x^5-3x^4+3x^3-9x^2-4x+12=0$ sabendo que duas de suas raízes são 3 e 2*i*.

$\Rightarrow$ Se 2*i* é raiz, seu conjugado –2*i* também é raiz, portanto sabemos três raízes: 3, 2*i* e –2*i*. Utilizando Briot-Ruffini, teremos:

3	1	-3	3	-9	-4	12
$2i$	1	0	3	0	-4	0
$-2i$	1	$2i$	-1	$-2i$	0	
	1	0	-1	0		

Logo, podemos reescrever a equação na forma fatorada:

$$(x-3)(x+2i)(x-2i)(x^2-1)=0$$

Portanto, suas duas ultimas raízes vêm de $x^2-1=0$. Disso, tiramos que $x=\pm 1$. Logo, o conjunto solução da equação será $S=\{-1, 1, 3, 2i, -2i\}$.

Ex19: Se um polinômio de corpo real tem como raízes os números 1, 2, $2-i$, $1+3i$ e $3i$, determine o menor grau possível para esse polinômio:

$\Rightarrow$ De acordo com o teorema das raízes complexas não reais, se $2-i$, $1+3i$ e $3i$ são raízes, logo esse polinômio obrigatoriamente também tem como raízes os seus respectivos conjugados, ou seja, $2+i$, $1-3i$ e $-3i$ também são raízes. Portanto, ele tem um total de oito raízes (duas reais e seis não reais), logo esse polinômio é no mínimo de oitavo grau.

6) Relações de Girard:

- **Para grau 2:** Sabemos que, pelo teorema da decomposição, todo polinômio de segundo grau $P(x)=ax^2+bx+c$, cujas raízes são r_1 e r_2, pode ser escrito da forma $P(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$.

Podemos desenvolver isso, e assim chegamos no polinômio $\mathrm{P}(x)=a\left(x^2-r_1x-r_2x+r_1r_2\right)$.

Desenvolvendo mais ainda, chegamos em $\mathrm{P}(x)=ax^2-a\left(r_1+r_2\right)x+ar_1r_2$. Por igualdade de polinômios, sabemos que $ax^2-a\left(r_1+r_2\right)x+ar_1r_2\equiv ax^2+bx+c$.

Logo, tiramos que:

$$\begin{cases} -a\left(r_1+r_2\right)=b\Rightarrow r_1+r_2=-\dfrac{b}{a} \\ ar_1r_2=c\Rightarrow r_1r_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Daí vem a relação de soma e produto.

- **Para grau 3:** Sabemos que, pelo teorema da decomposição, todo polinômio de terceiro grau $\mathrm{P}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, cujas raízes são r_1, r_2 e r_3 pode ser escrito da forma $\mathrm{P}(x)=a\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)\left(x-r_3\right)$. Podemos desenvolver isso e chegaremos em $\mathrm{P}(x)=a\left(x^3-r_1x^2-r_2x^2-r_3x^2+r_1r_2x+r_2r_3x+r_1r_3x-r_1r_2r_3\right)$

  Desenvolvendo mais, teremos:

  $$\mathrm{P}(x)=ax^3-a\left(r_1+r_2+r_3\right)x^2+a\left(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3\right)x-ar_1r_2r_3$$

  Por identidade de polinômios, temos:

  $$ax^3-a\left(r_1+r_2+r_3\right)x^2+a\left(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3\right)x-ar_1r_2r_3\equiv ax^3+bx^2+cx+d$$

  Logo, tiramos as seguintes relações:

  $$\begin{cases} -a\left(r_1+r_2+r_3\right)=b\Rightarrow r_1+r_2+r_3=-\dfrac{b}{a} \\ a\left(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3\right)=c\Rightarrow r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\dfrac{c}{a} \\ -a\left(r_1r_2r_3\right)=d\Rightarrow r_1r_2r_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

- **Para grau *n*:** Se repetirmos o raciocínio anterior para polinômios de graus maiores, chegaremos nas relações de Girard, que dizem que para um polinômio de grau n definido por $\mathrm{P}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ com raízes r_1, r_2, ..., r_n, a relação entre as raízes e os coeficientes serão:

$$\Rightarrow\ r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\Rightarrow\ r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+\cdots+r_{n-1}r_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\Rightarrow\ r_1r_2r_3+r_1r_3r_4+r_1r_2r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$\Rightarrow$ De forma geral, a soma das raízes tomadas k a k, ou seja, todas as combinações possíveis entre as raízes, será igual a $(-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

$$\Rightarrow\ r_1r_2r_3\cdots r_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Ex20: Sobre as raízes de $\mathrm{P}(x)=8x^4+ax^3-201x^2-bx+c$, sendo a, b e c coeficientes reais, sabe-se que a soma de duas raízes é igual a zero, enquanto o produto das outras duas é $-\dfrac{1}{8}$. Calcule o produto das raízes de P.

$\Rightarrow$ De acordo com o enunciado, sabemos que $r_1+r_2=0\Rightarrow r_1=-r_2$ e $r_3r_4=-\dfrac{1}{8}$.

Sabemos, pelas relações de Girard, que

$$r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=-\frac{201}{8}.$$

Se substituímos nessa equação $r_1=-r_2$, teremos:

$$r_1r_2+\left(-r_2\right)r_3+\left(-r_2\right)r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=-\frac{201}{8}$$

$$r_1r_2-r_2r_3-r_2r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=-\frac{201}{8}$$

$$r_1r_2\cancel{-r_2r_3}\cancel{-r_2r_4}\cancel{+r_2r_3}\cancel{+r_2r_4}+r_3r_4=-\frac{201}{8}$$

Logo, teremos:

$$r_1r_2+r_3r_4=-\frac{201}{8}$$

Porém, sabemos que $r_3r_4=-\dfrac{1}{8}$, logo:

$$r_1r_2+\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{201}{8}\Rightarrow r_1r_2=-\frac{201}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{200}{8}$$

Portanto, sabemos que $r_1r_2=-\dfrac{200}{8}$ e $r_3r_4=-\dfrac{1}{8}$, logo:

$$r_1r_2r_3r_4=\left(-\frac{200}{8}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{200}{64}$$

$$r_1r_2r_3r_4=\frac{25}{8}$$

7) **Teorema das raízes racionais:**

Seja P um polinômio tal que $\mathrm{P}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, onde os coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ são **inteiros.** Se o número racional $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio P, logo p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Em outras palavras, se temos um conjunto com todos os divisores de a_0 e um número p pertence a ele, e um outro conjunto com todos os divisores de a_n e um número q pertence a ele, o conjunto formado pelos números $\frac{p}{q}$ nos dá todas as **possíveis** raízes racionais do polinômio. **Isso não garante a existência de raízes racionais em polinômios de corpo inteiro, mas caso existam raízes racionais, elas obrigatoriamente estão nesse conjunto.**

Ex$_{21}$: Resolva a equação $3x^3+5x^2+4x-2=0$

- $\Rightarrow$ Seja o polinômio $P(x)=3x^3+5x^2+4x-2$. Primeiro, vamos formar o conjunto com as possíveis raízes racionais dessa equação. Os divisores de a_0 são ±1 e ±2, logo temos $p\in\{\pm1,\ \pm2\}$. Os divisores de a_n são ±1 e ±3, logo temos $q=\{\pm1,\ \pm3\}$. Portanto, teremos $\frac{p}{q}\in\left\{\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}\right\}$. Para ver qual será raiz, utilizaremos o teorema do resto. O primeiro que der 0 será a primeira raiz.

$$P(1)=3+5+4-2=10$$
$$P(-1)=-3+5-4-2=-4$$
$$P(2)=24+20+8-2=50$$
$$P(-2)=-24+20-8-2=-14$$
$$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{3}-2=\frac{1+5+12-18}{9}=0$$

Logo, sabemos que $\frac{1}{3}$ é raiz, então vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para fatorar o polinômio.

$$\begin{array}{c|ccc|c} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 6 & 6 & 0 \end{array}$$

Portanto, a equação pode ser fatorada como $(x-1/3)(3x^2+6x+6)=0$. Logo as outras raízes vêm de $3x^2+6x+6=0$. Resolvendo por Bhaskara, teremos:

$$\Delta=6^2-4\cdot3\cdot6=36-72=-36$$
$$x=\frac{-(6)\pm\sqrt{-36}}{2\cdot3}=\frac{-6\pm6i}{6}=-1\pm i$$

Logo, o conjunto solução dessa equação é S=$\left\{\frac{1}{3},\ -1+i,\ -1-i\right\}$.

Ex$_{22}$: Determine os números inteiros a e b sabendo que a equação $3x^3+ax^2+bx+1=0$ tem duas de raízes sendo distintas e inteiras. Determine também o conjunto solução da equação.

- $\Rightarrow$ Se utilizarmos o teorema das raízes racionais no polinômio $P(x)=3x^3+ax^2+bx+1$, teremos $p\in\{\pm1\}$ e $q\in\{\pm1,\ \pm3\}$, portanto $\frac{p}{q}=\left\{\pm1,\ \pm\frac{1}{3}\right\}$. Como P tem duas raízes inteiras, essas raízes só podem ser 1 ou –1. Pelo teorema do resto temos:

$$\begin{cases} P(1)=0\Rightarrow 3+a+b+1=0\Rightarrow a+b=-4 \\ P(-1)=0\Rightarrow -3+a-b+1=0\Rightarrow a-b=2 \end{cases}$$

Disso, tiramos o sistema:

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ a-b=2 \end{cases}$$

Resolvendo, achamos $a=-1$ e $b=-3$, logo, $P(x)=3x^3-x^2-3x+1$.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini para determinar a terceira, temos:

$$\begin{array}{r|ccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

Disso, tiramos que a equação pode ser fatorada na forma $(x-1)(x+1)(3x-1)=0$. Logo, a terceira raiz vem de $3x-1=0$. Disso, tiramos $x=\frac{1}{3}$. O conjunto solução dessa equação é S=$\left\{-1,\ \frac{1}{3},\ 1\right\}$.