



Escola Politécnica da USP  
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos

## Experiência 5: Beamforming

Allan E. Feitosa

Vítor H. Nascimento

Outubro de 2019

### 1 Princípios básicos

Imagine um arranjo de  $M$  antenas. Para simplificar, vamos supor que as antenas estejam distribuídas uniformemente em linha reta, como na figura abaixo.

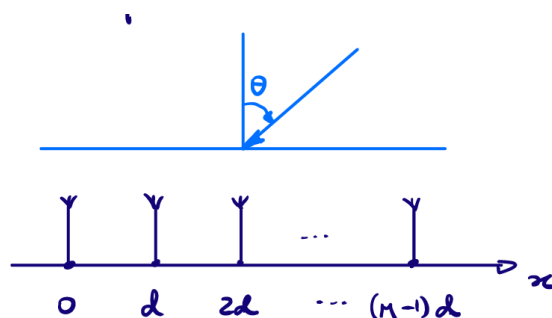


Figura 1: Arranjos de antenas e sinal de onda plana.

Imagine que uma onda se propaga no espaço, vinda da direção dada pelo ângulo  $\theta$ . Defina o sinal chegando na antena  $m$  como sendo  $x_m(t)$ . Suponha inicialmente que haja apenas uma frente de onda chegando ao arranjo, vinda da direção  $\theta$  (Figura 1). Se a fonte estiver bem distante do arranjo, podemos aproximar a frente de onda por uma onda plana, ou seja, o sinal observado é constante num plano perpendicular à direção de propagação, como pode ser visto na Figura 2.

O sinal recebido na antena  $m = 0$  pode ser representado por

$$x_0(t) = f(t).$$

Então, o sinal chegando na antena 1 será  $x_1(t)$ , e deverá chegar na antena  $m = 1$  antes de chegar na antena  $m = 0$ , se  $\theta$  for positivo. O adiantamento será  $\tau = \frac{d \sin \theta}{c}$ , em que  $c$  é a velocidade de propagação (Figura 3).

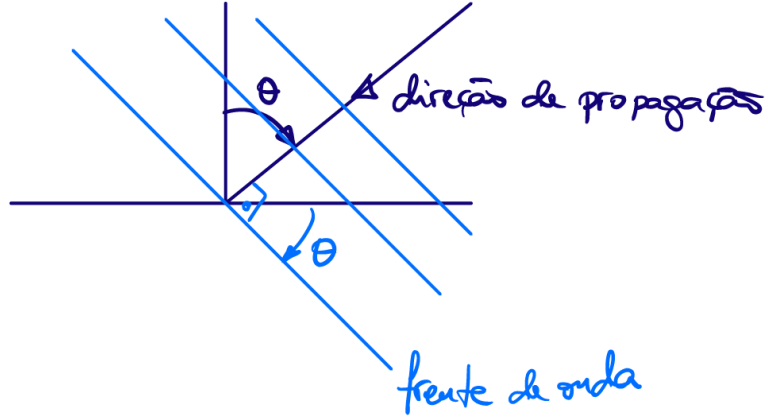


Figura 2: Ondas planas perpendiculares à direção de propagação.

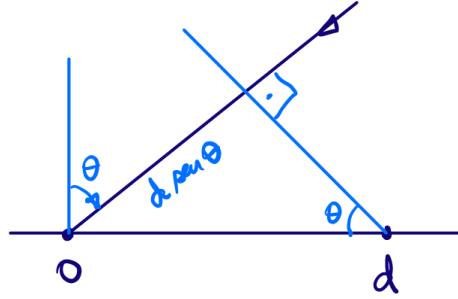


Figura 3: Cálculo do atraso  $\tau$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t + \tau) = f\left(t + \frac{d \sin \theta}{c}\right), \\ x_2(t) &= f(t + 2\tau) = f\left(t + \frac{2d \sin \theta}{c}\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Defina  $\tau_m = m \frac{d \sin \theta}{c}$  e vamos considerar um sinal complexo  $f(t) = A e^{j\Omega t}$ , para uma dada frequência angular  $\Omega$  dada em rad/s. Na ausência de ruído, vale

$$x_m(t) = A e^{j\Omega(t+\tau_m)} = e^{j\Omega\tau_m} A e^{j\Omega t} = e^{j\Omega m(\frac{d \sin \theta}{c})} A e^{j\Omega t}. \quad (1)$$

Defina o vetor de sinais recebidos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{\Omega d \sin \theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\frac{\Omega d \sin \theta}{c}} \end{bmatrix} A e^{j\Omega t} = \mathbf{v}(\Omega, \theta) A e^{j\Omega t}, \quad (2)$$

em que  $\mathbf{v}(\Omega, \theta)$  é chamado de vetor diretor.

Suponha que os sinais em cada microfone ou antena sejam amostrados a uma taxa  $f_a = \frac{1}{T_a}$ . Então

$$x_m[n] = x_m(nT_a) = e^{j\frac{\Omega m d \sin \theta}{c}} A e^{j\Omega T_a n} = e^{j\frac{\omega m d \sin \theta}{T_a c}} A e^{j\omega n}, \quad (3)$$

pois  $\omega = \Omega T_a$ .

Vamos reforçar os sinais que vêm de uma certa direção  $\theta_0$ . Definindo  $u(\theta) = \frac{d \sin \theta}{T_a c}$ , podemos então somar em fase os sinais que vêm da direção  $\theta_0$ :

$$y[n] = \frac{1}{M} \left[ 1 \cdot x_0[n] + e^{-j\omega u(\theta_0)} x_1[n] + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} x_2[n] + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} x_{M-1}[n] \right] = A e^{j\omega n}. \quad (4)$$

O que acontece com sinais vindos de outras direções? Suponha que tenhamos projetado nosso sistema para reforçar sinais vindos da direção  $\theta_0$ , mas veio um sinal da direção  $\theta$ . Então,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M} \left[ 1 \cdot A e^{j\omega n} + e^{-j\omega u(\theta_0)} e^{-j\omega u(\theta)} A e^{j\omega n} + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} e^{-j\omega 2u(\theta)} A e^{j\omega n} + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} e^{-j\omega(M-1)u(\theta)} A e^{j\omega n} \right] \\ &= \frac{1}{M} \left[ 1 \cdot + e^{-j\omega u(\theta_0)} e^{-j\omega u(\theta)} + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} e^{-j\omega 2u(\theta)} + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} e^{-j\omega(M-1)u(\theta)} \right] A e^{j\omega n} \\ &= B(\theta, \theta_0) A e^{j\omega n}, \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$B(\theta, \theta_0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\omega(u(\theta)-u(\theta_0))m} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - e^{j\omega M(u(\theta)-u(\theta_0))}}{1 - e^{j\omega(u(\theta)-u(\theta_0))}}.$$

Assim, o módulo e fase do sinal  $y[n]$  reconstruído em (5) são afetados segundo  $B(\theta, \theta_0)$ . Por exemplo, na figura 4, temos o gráfico de  $|B(\theta, \theta_0)|$  para  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $M = 11$  e  $d = \lambda/2$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda do sinal que chega ao arranjo de antenas. Perceba como o módulo é máximo e igual a um para  $\theta_0 = 30^\circ$ , e que para outros sinais vindos de outros valores de  $\theta$  há uma considerável atenuação de sua amplitude.

Suponha agora que duas frentes de onda,  $f_0(t)$  e  $f_1(t)$ , cheguem ao arranjo de antenas simultaneamente, uma vinda da direção  $\theta_0$ , e outra da direção  $\theta_1$ , e ambas na mesma frequência  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) f_0(nT_a) + \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) f_1(nT_a) \\ &= \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) A_0 e^{j\Omega T_a n} + \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) A_1 e^{j\Omega T_a n} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 e^{j\Omega T_a n} \\ A_1 e^{j\Omega T_a n} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V} \cdot [\mathbf{n}], \end{aligned} \quad (6)$$

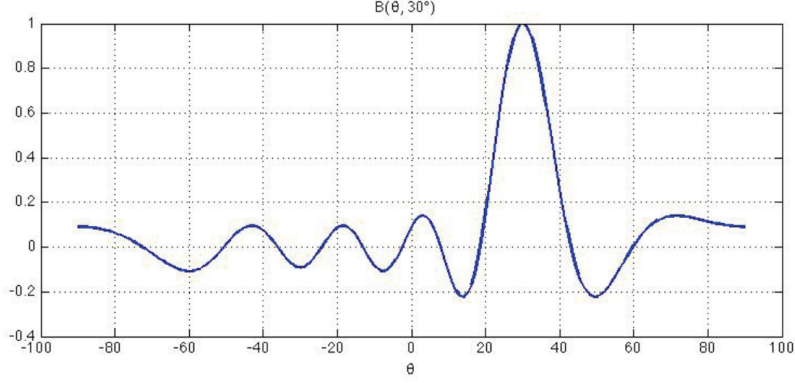


Figura 4: Exemplo de  $|B(\theta, \theta_0)|$ .

em que  $\mathbf{V}$  é a matriz diretora que depende da frequência  $\Omega$ , das posições das antenas e dos ângulos dos sinais, e  $[\mathbf{n}]$  o vetor com os sinais.

Em geral, fazemos a saída do arranjo como sendo

$$y[n] = w_0^* x_0[n] + w_1^* x_1[n] + \dots + w_{M-1}^* x_{M-1}[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n], \quad (7)$$

em que  $\mathbf{w}^H = [w_0^* \ w_1^* \ \dots \ w_{M-1}^*]$  é o hermitiano ou “transposto conjugado” do vetor  $\mathbf{w}$ . Escolhendo então

$$\mathbf{w} = \frac{1}{M} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0), \quad (8)$$

resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{V}[\mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) \end{bmatrix} [\mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) \end{bmatrix} [\mathbf{n}] \\ &= \begin{bmatrix} B(\theta_0, \theta_0) & B(\theta, \theta_0) \end{bmatrix} [\mathbf{n}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & B(\theta, \theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 e^{j\Omega T_a n} \\ A_1 e^{j\Omega T_a n} \end{bmatrix} = A_0 e^{j\Omega T_a n} + B(\theta, \theta_0) A_1 e^{j\Omega T_a n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Como  $|B(\theta, \theta_0)| \leq 1$ , o sinal vindo da direção  $\theta_0$  é recebido sem distorções, enquanto o sinal vindo da direção  $\theta_1$  é atenuado. O que construímos então é um filtro espacial, que permite escolher apenas sinais que venham de direções de interesse, e cancelar interferências vindas de outras direções. Tal sistema como descrito acima é chamada de “formador de feixe” (*beamformer*), já que permite modificar o diagrama de radiação equivalente do arranjo de antenas (ou microfones).

A escolha  $\mathbf{w}^H = \frac{1}{M} \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0)$  é chamada de *beamformer Delay-and-Sum*, pois corresponde a equalizar os atrasos em todos os sensores de sinais vindos da direção  $\theta_0$ , de forma a que a soma seja de sinais em fase (e assim o efeito é de reforçar o sinal). Repare que os valores dos coeficientes dependem da frequência  $\Omega$ .

## 2 Parte Experimental 1

1. Imagine que queiramos projetar um sistema com 8 antenas, dispostas numa linha plana, operando no padrão IEEE 802.11ad (WiGig) a 60GHz. A distância entre cada antena adjacente é  $d$ . Desenhe o gráfico de  $|B(\theta, \theta_0)|$  considerando  $d = \lambda/4$  (comprimento de onda do sinal transmitido),  $\theta_0 = 20^\circ$  e  $\theta$  variando entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ . Considere a velocidade de propagação  $c = 3 \cdot 10^8$ . Comente o que acontece com sinais vindos de diferentes direções quando recebidos por este sistema.
2. Desenhe gráficos de  $|B(\theta, \theta_0)|$  para  $d = \lambda/2$ ,  $d = 3\lambda/4$  e  $d = \lambda$ . Comente o que acontece, comparando os 4 gráficos de  $|B(\theta, \theta_0)|$ , conforme aumentamos o valor de  $d$ . Qual seria o nome do fenômeno que está sendo observado? Qual o valor máximo de  $d$  que evita esse fenômeno?

Dica: Este fenômeno é muito parecido com o que acontece quando amostramos um sinal abaixo de 2 vezes sua máxima frequência de banda.

Obs 1: A função **sin** do MATLAB calcula o seno de um ângulo medido em radianos, enquanto a função **sind** já calcula o seno de um ângulo medido em graus.

3. Fixe  $d = \lambda/2$ . Suponha que uma frente de onda de frequência 60 GHz com amplitude  $A_1 = 1$  incida sobre as antenas com ângulo  $\theta_0 = 20^\circ$ , juntamente com um outro sinal de interferência de mesma frequência e com amplitude  $A_2 = 0,5$ , que incide em um ângulo  $\theta_2$ . Plote a amplitude do sinal estimada pelo *Beamforming Delay-and-Sum* em função de  $\theta_2$ . Comente o resultado.

## 3 Beamforming de banda estreita usando sinais reais

Como vimos anteriormente, toda a formulação do *Beamforming Delay-and-Sum* supõe que os sinais incidentes sejam sinais complexos da forma

$$f(t) = A e^{j\Omega t}.$$

Como já sabemos nesta altura da nossa vida, os sinais recebidos só podem ser sinais reais; entretanto, o processamento do *Beamforming*, como feito na Equação (7), depende dos coeficientes do vetor  $\mathbf{w}$ , que são números complexos. Como podemos utilizar esta técnica se os sinais recebidos são reais?

Uma das maneira possíveis é (1) utilizar uma codificação dos sinais a serem transmitidos utilizando símbolos no domínio complexo, então (2) realizar um processamento que transforme estes símbolos em sinais reais na transmissão, e finalmente (3) recuperar os símbolos complexos num novo processamento e utilizar o *Beamforming Delay-and-Sum* no sistema de recepção.

Para (1), podemos utilizar uma modulação de amplitude em quadratura, ou QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), bastante utilizada em transmissão de tv digital,

Código decimal	Código binário	Símbolo
0	0000	$-3 + 3j$
1	0001	$-3 + 1j$
2	0010	$-3 - 3j$
3	0011	$-3 - 1j$
4	0100	$-1 + 3j$
5	0101	$-1 + 1j$
6	0110	$-1 - 3j$
7	0111	$-1 - 1j$
8	1000	$3 + 3j$
9	1001	$3 + 1j$
10	1010	$3 - 3j$
11	1011	$3 - 1j$
12	1100	$1 + 3j$
13	1101	$1 + 1j$
14	1110	$1 - 3j$
15	1111	$1 - 1j$

Tabela 1: Relação entre informação a ser transmitida e símbolo no 16-QAM

internet 4G e conexões radio-satélite. Por exemplo, a codificação em 16-QAM transforma sequências de 4 bits em símbolos no plano complexo segundo a tabela 1.

Seja  $z(t)$  o sinal já codificado segundo o QAM, portanto complexo. Para transmitir este sinal, fazemos

$$x(t) = \text{Re}\{z(t)\} \cos(\Omega_0 t) - \text{Im}\{z(t)\} \sin(\Omega_0 t),$$

sendo  $x(t)$  o sinal real que será transmitido e  $\Omega_0$  a frequência de portadora tal que  $\Omega_0 \gg$  banda de  $z(t)$  (banda estreita).

Por fim, os sinais  $x_m(t)$  recebidos nas antenas do arranjo são processados segundo o esquema da Figura 5. O filtro  $H(j\Omega)$  é um filtro passa-baixas com corte em  $\Omega_0$ .

Pode-se demonstrar que (ver apostila em separado no Moodle)

$$x_{im}(t) \approx \text{Re}\{z(t)\} \quad \text{e} \quad x_{qm}(t) \approx \text{Im}\{z(t)\},$$

e, portanto,

$$x_{im}(t) + jx_{qm}(t) \approx z(t).$$

A igualdade na equação acima só seria possível se um filtro passa-baixas ideal fosse aplicado.

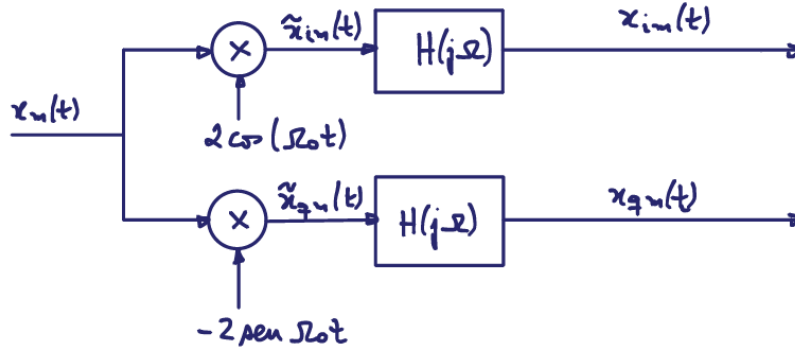


Figura 5: Processamento para recuperar o sinal original após transmissão.

## 4 Parte experimental 2

Considere que o arranjo de antenas da parte 1 do experimento receba uma sequência de dados modulados usando 16-QAM (Tabela 1). O sinal de interesse tem amplitude máxima  $A_0 = 3$  e incide com ângulo  $\theta_0 = 20^\circ$ . Há também dois sinais de interferência incidindo sobre o arranjo, vindos das direções  $\theta_1 = 45^\circ$  e  $\theta_2 = -15^\circ$ , ambos com amplitude 1 e com mesma frequência. Há também em cada antena um ruído na medida, de potência unitária. O que é de fato medido pelo arranjo (“sinal de interesse” + “interferências” + “ruído”) está no arquivo **sinais.mat**. Considerando as condições da parte 1 do experimento, vamos projetar um sistema *beamforming Delay-and-Sum* para recuperar o sinal de interesse.

1. A partir dos sinais fornecidos, vamos realizar o processamento necessário para trabalhar com sinais reais, como descrito na Figura 5. Utilize para o passa-baixas um filtro Butterworth de ordem 6 com a devida frequência de corte — ela deve ser igual à frequência de portadora dos sinais. Use a função **butter** para adquirir os parâmetros  $a$  e  $b$  do filtro, como descrito abaixo:

$$[b,a] = \text{butter}(6, w_n),$$

em que  $w_n$  é a frequência de corte do filtro em  $\pi$  rad. A frequência de amostragem utilizada é  $f_a = 10^{12}$  Hz. Plote a resposta em frequência do filtro projetado. Plote também os gráficos de  $x_{im}$  e  $x_{qm}$  filtrados para uma das 8 antenas. Comente o que você observa.

2. Projete os coeficientes do vetor  $\mathbf{w}$  e realize o *Delay-and-Sum* (Equação (7)) para recuperar o sinal. Plote as partes reais e imaginárias do  $y[n]$  obtido. Comente o resultado.
3. Agora vamos recuperar os símbolos que foram transmitidos. Para isto precisamos saber por quanto tempo cada símbolo foi transmitido, e juntamente com a informação da taxa de amostragem, obter o número  $N$  de amostras no sinal correspondente a cada símbolo. Sabendo que cada símbolo foi transmitido por 1ns, calcule  $N$  e

comente se está coerente com o que se observa nos gráficos das parte real e imaginária de  $y[n]$ . Para cada trecho de símbolo, calcule o valor médio das  $N$  amostras. Quantos símbolos foram transmitidos?

4. Escreva num trecho do seu código um algoritmo que decide a qual símbolo do 16-QAM cada símbolo reconstruído na etapa anterior se refere, utilizando a mínima distância em módulo para cada símbolo reconstruído em relação aos símbolos do 16-QAM.

**Dica:** crie um vetor com os símbolos do 16-QAM utilizando o comando:

`symbols_16_qam = qammod(0:15,16).`

Isto criará a terceira coluna da tabela 1.

5. Compare os símbolos reconstruídos com o vetor **mensagem** fornecido e diga se houve erros na transmissão. O vetor fornecido está em decimal, então utilize a Tabela 1 para conversão. Plote num mesmo gráfico as partes reais e imaginárias da mensagem e do sinal reconstruído em 16-QAM, utilizando a função *scatter* do matlab. Se feito corretamente, o gráfico deve apresentar um mapa no plano complexo com os pontos de ambos os vetores.
6. Vamos observar o que acontece se diminuirmos a relação sinal/ruído nas antenas. Ao sinal fornecido no vetor **sinais.mat** some em cada antena ruídos brancos gaussianos de média nula com amplitude 10, 30 e 50, utilizando a função *randn*. Realize novamente o *Delay-and-Sum* para cada caso, plote os gráficos das partes reais e imaginárias de  $y[n]$  e comente o que você observa nos gráficos. O que acontece com os símbolos reconstruídos? Eles apresentam erros? Plote os símbolos reconstruídos e os da mensagem original utilizando o *scatter* e comente o que você observa.