

# Title

Gabriel Tehozol

November 17, 2025

## 0.1 Hogares: definición del problema de optimización dinámica

El modelo asume un *hogar representativo* que resuelve un problema de *optimización dinámica*. El objetivo es maximizar la utilidad a lo largo de un horizonte infinito, sujeta a restricciones presupuestarias de flujo y a una restricción de solvencia que descarta esquemas de tipo Ponzi.

### 0.1.1 Ecuación (1): función objetivo (utilidad esperada descontada)

El hogar busca maximizar la utilidad intertemporal dada por:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t), \quad (1)$$

donde  $C_t$  es el consumo,  $N_t$  las horas de trabajo y  $Z_t$  un desplazador exógeno de preferencias. El parámetro  $\beta \in (0, 1)$  es el factor de descuento intertemporal, y  $E_0\{\cdot\}$  denota el operador de expectativas condicional a la información disponible en  $t = 0$ .

#### Definiciones de términos en (1).

$E_0\{\cdot\}$  Operador de expectativas. Indica que el hogar maximiza el valor esperado de la utilidad futura, condicional a la información disponible en  $t = 0$ .

$\beta^t$  Factor de descuento (*discount factor*), con  $\beta \in (0, 1)$ . Descuenta la utilidad de los periodos futuros a su valor presente.

$U(\cdot)$  Función de utilidad periódica, continua y dos veces diferenciable. Mide la satisfacción instantánea del hogar.

$C_t$  Cantidad consumida del único bien disponible en la economía. La utilidad marginal del consumo es

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial C_t} > 0,$$

y es no creciente ( $U_{cc,t} \leq 0$ ).

$N_t$  Horas de trabajo u oferta de empleo. La utilidad marginal del trabajo es

$$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial N_t} \leq 0,$$

es decir, el trabajo genera desutilidad;  $-U_{n,t}$  es positiva y no decreciente.

$Z_t$  Factor exógeno de desplazamiento de preferencias (*exogenous preference shifter*). Un aumento en  $Z_t$  eleva la utilidad marginal del consumo:

$$U_{cz,t} \equiv \frac{\partial^2 U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial C_t \partial Z_t} > 0.$$

Dada la forma funcional específica que se adopta en el texto principal, el efecto de  $Z_t$  se restringe a las decisiones intertemporales (a través de la razón  $U_{c,t+k}/U_{c,t}$ ), sin afectar directamente las decisiones intratemporales (la razón  $U_{n,t}/U_{c,t}$ ).

**Integración.** La ecuación (1) define el *objetivo* del hogar: elegir secuencias  $\{C_t, N_t\}_{t=0}^\infty$  que maximizan la utilidad esperada descontada. Sin embargo, estas elecciones están restringidas por la capacidad del hogar para generar ingreso y endeudarse/ahorrar, lo que da lugar a la restricción presupuestaria de flujo.

### 0.1.2 Ecuación (2): restricción presupuestaria de flujo

En cada periodo  $t$ , el gasto del hogar y sus decisiones de ahorro deben estar limitados por su ingreso corriente:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t, \quad (2)$$

donde el lado izquierdo recoge el gasto en consumo y en bonos, y el lado derecho el ingreso disponible.

#### Definiciones de términos en (2).

$P_t$  Precio nominal del bien de consumo.

$P_t C_t$  Gasto nominal en consumo.

$Q_t$  Precio del bono nominal libre de riesgo a un periodo; pagar una unidad de dinero en  $t+1$  cuesta  $Q_t$  unidades de dinero en el periodo  $t$ .

$B_t$  Cantidad de bonos nominales libres de riesgo comprados en el periodo  $t$ . El término  $Q_t B_t$  es el gasto en ahorro financiero.

$B_{t-1}$  Valor nominal de los bonos que maduran y se pagan al hogar en el periodo  $t$ .

$W_t$  Salario nominal (por hora o por trabajador).

$W_t N_t$  Ingreso nominal del trabajo.

$D_t$  Dividendos que recibe el hogar como propietario de las empresas.

**Integración.** La secuencia de restricciones como (2) determina el *conjunto factible* de planes  $(C_t, N_t, B_t)$  para el hogar. El problema del hogar consiste en elegir la secuencia  $\{C_t, N_t, B_t\}_{t=0}^{\infty}$  que maximiza (1) sujeta a (2), dado el vector de precios  $(P_t, Q_t, W_t)$  y los dividendos  $(D_t)$ .

### 0.1.3 Ecuación (3): restricción de solvencia (no-Ponzi)

Además de la restricción de flujo, el hogar enfrenta una *restricción de solvencia* que impide esquemas de endeudamiento tipo Ponzi, garantizando que su deuda pueda ser pagada en el largo plazo:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0, \quad (3)$$

donde  $\Xi_{t,T}$  es el factor de descuento estocástico asociado a la utilidad marginal del consumo.

#### Definiciones de términos en (3).

$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \{\cdot\}$  Límite del valor esperado condicional en  $t$  a medida que el horizonte  $T$  tiende a infinito.

$B_T/P_T$  Riqueza real terminal asociada a los bonos en el horizonte  $T$ .

$\Xi_{t,T}$  Factor de descuento estocástico, definido como

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t} \frac{U_{c,T}}{U_{c,t}},$$

que descuenta los flujos reales futuros a su valor presente, incorporando tanto la impaciencia ( $\beta$ ) como la evolución de la utilidad marginal del consumo.

**Integración.** La ecuación (3) asegura que el plan dinámico del hogar es sostenible a larga plazo. En equilibrio, con un hogar representativo y oferta neta de deuda igual a cero, esta condición suele cumplirse con igualdad (lo que se expresará más adelante en forma de condición de transversalidad).

### 0.1.4 Ecuación (4): condición de optimalidad intratemporal (oferta de trabajo)

Una de las condiciones de primer orden resultantes de la maximización de (1) sujeta a (2) y (3) es la *condición de optimalidad intratemporal*, que rige la elección óptima entre consumo y trabajo dentro de un mismo periodo  $t$ :

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}. \quad (4)$$

### Definiciones de términos en (4).

$U_{n,t}$  Utilidad marginal del trabajo,  $U_{n,t} \equiv \partial U(C_t, N_t; Z_t) / \partial N_t \leq 0$ . El trabajo genera desutilidad, por lo que  $-U_{n,t} > 0$ .

$U_{c,t}$  Utilidad marginal del consumo,  $U_{c,t} \equiv \partial U(C_t, N_t; Z_t) / \partial C_t > 0$ .

$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}$  *Tasa marginal de sustitución* (TMS) entre ocio y consumo: mide cuántas unidades adicionales de consumo son necesarias para compensar la desutilidad de trabajar una unidad extra.

$W_t/P_t$  Salario real, es decir, el precio del trabajo en términos del bien de consumo.

**Derivación (argumento variacional).** La ecuación (4) puede obtenerse a partir de un argumento de variación en el periodo  $t$ :

1. **Variación en la utilidad.** Considérese una pequeña desviación  $(dC_t, dN_t)$  respecto al plan óptimo en el periodo  $t$ . La variación de la utilidad instantánea es:

$$dU_t = U_{c,t} dC_t + U_{n,t} dN_t.$$

En un óptimo, cualquier desviación factible que mantenga constantes las demás variables no debe elevar la utilidad, por lo que un cambio marginalmente factible debe cumplir  $dU_t = 0$ .

2. **Variación en la restricción presupuestaria.** Si solo se ajustan  $C_t$  y  $N_t$  en el periodo  $t$ , manteniendo fijo  $B_t$ , la variación de la restricción de flujo (2) es:

$$P_t dC_t = W_t dN_t,$$

es decir, el gasto adicional en consumo debe igualar el ingreso adicional por trabajar más.

3. **Combinación de ambas condiciones.** De la variación presupuestaria se obtiene:

$$dC_t = \frac{W_t}{P_t} dN_t.$$

Sustituyendo en la variación de utilidad:

$$U_{c,t} \left( \frac{W_t}{P_t} dN_t \right) + U_{n,t} dN_t = 0.$$

Dividiendo por  $dN_t \neq 0$  y reordenando términos se llega a:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t},$$

que coincide con la ecuación (4).

**Interpretación.** La ecuación (4) es la condición de *oferta de trabajo* del hogar: en el óptimo, el hogar iguala su tasa marginal de sustitución entre ocio y consumo (costo de oportunidad de trabajar) con el salario real ofrecido en el mercado.

Content here.

## 1 Conclusion

## References

[1] Reference here.