Title

Gabriel Tehozol

17 de noviembre de 2025

Hogares: definición del problema de optimización dinámica

En este apartado describimos qué hace el hogar en el modelo. La idea básica es:

- El hogar vive muchos periodos (t, t+1, t+2, ...).
- En cada periodo decide cuánto consumir (C_t) y cuánto trabajar (N_t).
- También puede ahorrar o endeudarse con bonos (B_t).
- Quiere que, en promedio, su "nivel de felicidad" (utilidad) a lo largo del tiempo sea lo más alto posible, pero está limitado por el dinero que tiene y el que puede conseguir.

A esto le llamamos un *problema de optimización dinámica*: el hogar toma decisiones hoy pensando en sus consecuencias mañana y en el futuro.

Ecuación (1): función objetivo (utilidad esperada descontada)

El objetivo del hogar se resume en la siguiente expresión:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t). \tag{1}$$

Esta ecuación se puede leer *de izquierda a derecha* como una frase:

"El hogar quiere maximizar el valor esperado, visto desde hoy, de la suma de su utilidad en cada periodo, ponderada por cuánto le importa el futuro."

Paso a paso.

1. $U(C_t, N_t; Z_t)$ es la **utilidad** del hogar en el periodo t. Depende de:
   - C_t: consumo del bien (comida, servicios, etc.).
   - N_t: horas de trabajo (más trabajo suele dar más ingreso, pero menos ocio).
   - Z_t: shock o desplazador de preferencias, que representa cambios en gustos, hábitos, etc.

2. La suma $\sum_{t=0}^{\infty}$ indica que el hogar se preocupa por **todos** los periodos: $t = 0, 1, 2, \ldots$.
3. El factor β^t, donde $0 < \beta < 1$, *descuenta* la importancia de la utilidad de cada periodo. Cuanto mayor es t, menor es el peso β^t.
   - Si β es cercano a 1, el hogar es paciente (le importa mucho el futuro).
   - Si β es pequeño, el hogar es impaciente (valora más el presente).
4. $E_0[\cdot]$ es el **operador de expectativas**. Simplemente significa: "el valor promedio que el hogar espera hoy ($t = 0$) que tendrá esa suma, tomando en cuenta que el futuro es incierto".

Supuestos básicos sobre la utilidad. Para que el problema tenga sentido económico, se imponen algunos supuestos estándar sobre $U(C_t, N_t; Z_t)$:

- La utilidad aumenta con el consumo:

  $$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t} > 0,$$

  y la utilidad marginal del consumo es decreciente:

  $$U_{cc,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2} \leq 0.$$

  Es decir, consumir más siempre gusta, pero cada unidad extra aporta un poco menos que la anterior.

- El trabajo genera desutilidad:

  $$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial N_t} \leq 0,$$

  de modo que $-U_{n,t} > 0$ es la *desutilidad marginal del trabajo* (trabajar más cansa).

- El shock Z_t desplaza las preferencias. Supondremos que un aumento en Z_t eleva la utilidad marginal del consumo:

  $$U_{cz,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t \, \partial Z_t} > 0.$$

La ecuación (1) dice: el hogar quiere elegir sus secuencias de C_t y N_t para que, en promedio, la suma de sus felicidades presentes y futuras sea lo más alta posible.

Ecuación (2): restricción presupuestaria de flujo

El hogar no puede elegir cualquier combinación de consumo y trabajo: cada periodo está limitado por sus ingresos y por lo que puede ahorrar o endeudarse. Esta idea se resume en la **restricción de flujo**:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t. \tag{2}$$

Podemos leer esta ecuación como:

"Uso de recursos en el periodo $t \leq$ Fuentes de recursos en el periodo t."

Lado izquierdo: usos (en qué se gasta).

- $P_t C_t$: gasto en consumo. P_t es el precio nominal del bien; C_t es la cantidad consumida.
- $Q_t B_t$: gasto en compra de bonos. Q_t es el precio hoy de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$; B_t es el número de bonos que compra el hogar.

Lado derecho: fuentes (de dónde vienen los recursos).

- B_{t-1}: bonos que se compraron en $t-1$ y pagan hoy (ingreso financiero).
- $W_t N_t$: ingreso laboral (salario nominal W_t por horas trabajadas N_t).
- D_t: dividendos que el hogar recibe como dueño de las empresas.

En equilibrio competitivo es natural que la desigualdad se cumpla con igualdad (el hogar no deja dinero sin usar), es decir:

$$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

Cada periodo, lo que el hogar gasta en consumo y bonos no puede superar lo que entra por salario, dividendos y bonos que vencen.

Ecuación (3): restricción de solvencia (no-Ponzi)

Hasta ahora, la restricción de flujo controla qué pasa *dentro* de cada periodo. Pero como el horizonte es infinito, en principio el hogar podría intentar endeudarse cada vez más, sin pagar nunca. Para evitar ese tipo de planes no realistas, se impone una **restricción de solvencia** o **restricción de no-Ponzi**:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

¿Qué significa esta condición?

- B_T/P_T es la *riqueza real en bonos* en el periodo T.
- $\Xi_{t,T}$ es un **factor de descuento estocástico**, definido como:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t}\frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}.$$

  Este factor combina:

  - el descuento puro del tiempo (β^{T-t}),
  - y el cambio en la utilidad marginal del consumo ($U_{c,T}/U_{c,t}$).

La expresión $E_t\{\Xi_{t,T}B_T/P_T\}$ se puede interpretar como el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos en el horizonte T, medido desde el punto de vista del periodo t.

La condición

$$\lim_{T\to\infty} E_t\left\{\Xi_{t,T}\frac{B_T}{P_T}\right\} \geq 0$$

dice que, en el límite, ese valor presente esperado no puede ser negativo. Intuitivamente:

> *"El hogar no puede sostener un esquema en el que su deuda crezca tanto que, incluso descontada, termine siendo impagable."*

La ecuación (3) evita el endeudamiento explosivo. Es una condición técnica, pero muy importante, para que el problema infinito esté bien definido.

Ecuación (4): condición de optimalidad intratemporal

Ahora sí, pasamos a una de las **condiciones de primer orden** más importantes: la que relaciona consumo, trabajo y salarios *dentro* de un mismo periodo. Esta condición se escribe como:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}. \tag{4}$$

Esta ecuación se llama:

- **Condición de optimalidad intratemporal**, porque compara decisiones dentro del periodo t.
- **Condición de oferta de trabajo**, porque nos dice cómo el hogar decide cuántas horas trabajar dado el salario real.

Interpretación de los términos.

- $U_{c,t}$: utilidad marginal del consumo (cuánto aumenta la utilidad si el hogar consume un poco más).
- $U_{n,t}$: utilidad marginal del trabajo (cuánto cambia la utilidad si el hogar trabaja un poco más). Suele ser negativa: trabajar cansa.
- $-U_{n,t}/U_{c,t}$: **tasa marginal de sustitución** (TMS) entre ocio y consumo. Dice cuántas unidades extra de consumo necesita el hogar para aceptar trabajar una unidad extra.
- W_t/P_t: **salario real**, es decir, cuántas unidades de bien de consumo recibe el hogar por cada unidad de trabajo.

La ecuación (4) dice:

"El hogar elige sus horas de trabajo de modo que su TMS subjetiva entre ocio y consumo sea igual al salario real que ofrece el mercado."

Derivación paso a paso (argumento variacional). La idea es imaginar un pequeño cambio en las decisiones del hogar en el periodo t, y pedir que ese cambio *no mejore* la situación si ya estamos en el óptimo.

1. **Paso 1: pequeña desviación en consumo y trabajo.** Partimos de un plan óptimo (C_t, N_t) y consideramos una pequeña desviación (dC_t, dN_t) en el periodo t, manteniendo todo lo demás igual.

   El cambio en la utilidad instantánea es:

   $$dU_t = U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t.$$

   Si el plan es óptimo, cualquier desviación que respete el presupuesto no puede mejorar la utilidad. En el margen, esto implica que el cambio en utilidad asociado a una desviación factible debe ser cero:

   $$U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t = 0. \tag{1}$$

2. **Paso 2: pequeña desviación en la restricción de flujo.** Ahora miramos cómo se ve esa misma desviación en la restricción presupuestaria del periodo t:

   $$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

   Si mantenemos fijo B_t (no tocamos el ahorro) y sólo cambiamos C_t y N_t, la variación de esta igualdad es:

   $$P_t\, dC_t = W_t\, dN_t. \tag{2}$$

   Es decir, el gasto adicional en consumo tiene que ser financiado por un ingreso adicional de trabajo.

3. **Paso 3: expresar dC_t en función de dN_t.** De (2) despejamos:

$$dC_t = \frac{W_t}{P_t} dN_t. \tag{3}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.** Sustituimos (3) en (1):

$$U_{c,t} \left(\frac{W_t}{P_t} dN_t \right) + U_{n,t} dN_t = 0.$$

   Factorizamos dN_t:

$$\left[U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} \right] dN_t = 0.$$

   Como dN_t representa una desviación arbitraria (pequeña pero no necesariamente cero), para que el producto sea cero, el término entre corchetes debe ser:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} = 0.$$

5. **Paso 5: aislar la TMS.** Reordenando:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} = -U_{n,t},$$

   y dividiendo entre $U_{c,t} > 0$:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t},$$

   que es exactamente la ecuación (4).

Entonces tenemos...

- La variación en la utilidad nos dice cómo cambian las preferencias del hogar ante pequeños ajustes en C_t y N_t.
- La variación en el presupuesto nos dice qué combinaciones de dC_t y dN_t son factibles (se pueden pagar).
- Al combinar ambas y exigir que no haya manera de mejorar la utilidad con una desviación factible, obtenemos la condición de primer orden.
- El resultado final iguala:
  - el *costo subjetivo* de trabajar más (perder ocio),
  - con el *beneficio objetivo* de mercado (el salario real).

Ecuación (5): condición de optimalidad intertemporal (Ecuación de Euler)

Además de decidir cuánto trabajar dentro de cada periodo (condición intratemporal), el hogar debe decidir *cuánto consumir hoy y cuánto dejar para consumir mañana.* Esta decisión se resume en la **condición de optimalidad intertemporal** o **Ecuación de Euler**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{5}$$

Lectura intuitiva. La ecuación (5) se puede leer como:

"El precio del bono hoy (Q_t) debe ser igual al valor presente esperado de la tasa a la que el hogar está dispuesto a intercambiar consumo de hoy por consumo de mañana, medido en unidades de bien de consumo y multiplicado por el factor de descuento β."

Donde:

- Q_t es el **precio del bono** nominal libre de riesgo.
- $\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}}$ mide cómo cambia la utilidad marginal del consumo entre t y $t+1$.
- $\frac{P_t}{P_{t+1}}$ ajusta por la inflación esperada (pasa de unidades nominales a reales y viceversa).
- β descuenta el futuro (impaciencia).

Desglose de los términos de (5).

- **Precio del bono:** Q_t es el precio en t de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$. El rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- **Utilidad marginal del consumo:** $U_{c,t} \equiv \partial U(C_t, N_t; Z_t)/\partial C_t$ es la utilidad marginal en el periodo t. La razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$ captura cómo el hogar valora una unidad extra de consumo mañana en comparación con hoy.
- **Relación de precios:** P_t/P_{t+1} es el inverso de la inflación bruta esperada entre t y $t+1$. Si los precios suben mucho, una misma cantidad de dinero rinde menos en términos de consumo futuro.
- **Operador de expectativas:** $E_t\{\cdot\}$ promedia sobre todos los escenarios posibles del futuro, dados los shocks, usando la información que el hogar tiene en t.

Derivación paso a paso La ecuación (5) se obtiene al analizar una pequeña reubicación de consumo entre los periodos t y $t+1$. La idea es:

"¿Qué pasa si reduzco mi consumo hoy y uso ese ahorro para aumentar mi consumo mañana, sin violar el presupuesto? En el óptimo, ese cambio no debe mejorar mi utilidad esperada."

1. **Paso 1: variación en la utilidad intertemporal.**

   Consideremos un plan óptimo y una pequeña desviación (dC_t, dC_{t+1}) que sólo afecta al consumo en t y $t+1$. El cambio en la utilidad total (medida en t y descontando el futuro) es aproximadamente:

   $$U_{c,t}\, dC_t + \beta E_t\{U_{c,t+1}\, dC_{t+1}\} = 0. \tag{A}$$

   Explicación de cada término:

   - $U_{c,t} dC_t$: cambio en la utilidad del *periodo actual.*
   - $\beta E_t\{U_{c,t+1} dC_{t+1}\}$: cambio esperado en la utilidad del periodo siguiente, descontado a valor presente con β.

   En un óptimo, cualquier desviación factible en la que sólo movemos consumo entre t y $t+1$ no debe aumentar la utilidad, por lo que el cambio marginal debe ser cero.

2. **Paso 2: variación en el presupuesto intertemporal.**

   Ahora vemos cómo se traduce esa misma desviación en la restricción presupuestaria. La idea es:

   - Si reducimos el consumo hoy en una cantidad $dC_t < 0$, liberamos recursos por un monto nominal $P_t dC_t$.
   - Esos recursos se usan para comprar más bonos: el número adicional de bonos es

     $$dB_t = -\frac{P_t}{Q_t}\, dC_t,$$

     porque cada bono cuesta Q_t unidades de dinero.
   - Mañana, esos bonos pagan 1 unidad de dinero cada uno, de modo que el ingreso adicional nominal en $t+1$ es $(1) \cdot dB_t$.

   El cambio en la restricción de flujo en $t+1$ implica que ese ingreso adicional se destina a mayor consumo dC_{t+1}:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = dB_t = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t.$$

   Es decir:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t. \tag{B}$$

3. **Paso 3: expresar dC_{t+1} en función de dC_t.**

   De (B) despejamos:

$$dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t. \tag{C}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.**

   Sustituimos (C) en (A):

$$U_{c,t} dC_t + \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \left(-\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t \right) \right\} = 0.$$

   Factorizamos dC_t:

$$\left[U_{c,t} - \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\} \right] dC_t = 0.$$

   Como dC_t representa una desviación arbitraria (pequeña, pero distinta de cero), el término entre corchetes debe ser nulo:

$$U_{c,t} = \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\}. \tag{4}$$

5. **Paso 5: aislar Q_t y obtener la Ecuación de Euler.**

   De (4), multiplicamos ambos lados por $Q_t / U_{c,t}$:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

   que es exactamente la ecuación (5).

Entonces tenemos...

- El hogar compara el "costo" de sacrificar consumo hoy con el "beneficio" de tener más consumo mañana.
- El costo se mide por la utilidad marginal actual $U_{c,t}$.
- El beneficio se mide por la utilidad marginal futura $U_{c,t+1}$, ajustada por:
  - el factor de descuento β,
  - la inflación esperada P_t / P_{t+1},
  - y el precio del bono Q_t.
- En el óptimo, no hay reubicación de consumo (entre hoy y mañana) que pueda mejorar la utilidad: eso es lo que recoge la Ecuación de Euler.

Ecuación (6): condición de transversalidad

La última pieza de las condiciones de optimalidad del hogar es la llamada **condición de transversalidad**. Esta condición está estrechamente ligada a la restricción de solvencia (3), pero ahora se impone como *igualdad* en el óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0. \tag{6}$$

Recordemos que:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t} \frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}$$

es el **factor de descuento estocástico** que mide cuánto vale, en términos de utilidad marginal en t, una unidad de consumo (o riqueza real) en T.

Relación con la restricción de solvencia. La restricción de solvencia (3) decía:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

Es decir:

- En el límite, el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos no puede ser negativo.
- Esto impide que el hogar aplique esquemas de endeudamiento tipo Ponzi.

La **condición de transversalidad** (6) dice algo más fuerte:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0.$$

¿Por qué debe valer la igualdad en el óptimo?. Supongamos, para ver el argumento, que en el óptimo se cumpliera:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = L > 0.$$

- Entonces, incluso después de descontar por β^{T-t} y por el cociente $U_{c,T}/U_{c,t}$, el hogar estaría *dejando* una cantidad positiva de riqueza real en el infinito.
- Dado que la utilidad marginal del consumo es positiva ($U_{c,t} > 0$ para todo t), el hogar podría mejorar su plan: reducir ligeramente B_T (o, en la práctica, consumir un poco más en algún periodo finito) sin violar la restricción de solvencia, usando parte de ese "excedente" L.
- Al hacer esto, aumentaría su consumo en algún periodo sin disminuir el consumo en otros lo suficiente como para compensar, por lo que la utilidad total aumentaría.

Pero esto contradice la suposición de que el plan original era óptimo. Por tanto, en un óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0,$$

que es precisamente la ecuación (6).

En términos económicos...

- La ecuación (3) asegura que la deuda no crece de manera explosiva.
- La ecuación (6) asegura que el hogar *no deja recursos sin usar* en el límite: toda la riqueza potencial que pueda aumentar la utilidad se habrá utilizado en algún momento.
- En muchas aplicaciones, con un hogar representativo y oferta neta de deuda cero, se cumple en equilibrio que $B_t = 0$ para todo t, lo que hace que (6) sea automáticamente cierta. Aun así, es importante tenerla explícitamente como parte de las condiciones de optimalidad.

Con las ecuaciones (4), (5) y (6) tenemos ahora el conjunto completo de **condiciones de optimalidad del hogar**:

- (4): condición intratemporal (oferta de trabajo).
- (5): condición intertemporal (Ecuación de Euler para consumo/ahorro).
- (6): condición de transversalidad (uso eficiente de la riqueza en el tiempo).

En el siguiente paso, estas condiciones se combinarán con el comportamiento de las empresas y las identidades de equilibrio para construir el modelo macroeconómico completo.

Ecuación (7): especificación funcional de la utilidad y oferta de trabajo competitiva

En esta sección, seguimos el capítulo y adoptamos una **forma funcional particular** para la utilidad periódica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

donde $\sigma \geq 0$ y $\phi \geq 0$ son parámetros.

Parámetros: Para mayor claridad, presentamos los parámetros que aparecen en la ecuación (11):

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. En esta clase de modelos suele interpretarse como:
  - medida de **aversión relativa al riesgo** del hogar, y
  - (en muchas especificaciones) inverso de la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.

  Valores más altos de σ implican que la utilidad marginal del consumo cae más rápido cuando aumenta C_t.

- ϕ (*phi*): parámetro de curvatura de la desutilidad del trabajo. Controla qué tan rápido aumenta la desutilidad marginal de trabajar más horas. Suele interpretarse como el **inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo**: valores altos de ϕ indican que la oferta de trabajo es menos sensible a cambios en el salario real.

Nuestro objetivo ahora es: (1) calcular $U_{c,t}$ y $U_{n,t}$ a partir de (11), y (2) sustituirlos en (4) para obtener la versión *específica* de la oferta de trabajo, la **Ecuación (7)**.

Paso 1: utilidad marginal del consumo $U_{c,t}$. Partimos de:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos la derivada parcial respecto a C_t:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial C_t} = \frac{\partial}{\partial C_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{5}$$

Como Z_t está multiplicando todo, podemos sacarlo como constante:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El segundo término no depende de C_t, así que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right).$$

Ahora derivamos usando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) = \frac{1}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) C_t^{(1-\sigma)-1} = C_t^{-\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t. \tag{6}$$

Tenemos...

- Si $\sigma > 0$, entonces $U_{c,t} > 0$ y decrece cuando C_t aumenta (porque $C_t^{-\sigma}$ disminuye con C_t). Esto refleja la idea de *utilidad marginal decreciente del consumo*.

- El factor Z_t amplifica o reduce la utilidad marginal del consumo según el estado de las preferencias.

Paso 2: utilidad marginal del trabajo $U_{n,t}$. Volvemos a la función de utilidad:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos ahora la derivada parcial respecto a N_t:

$$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial N_t} = \frac{\partial}{\partial N_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{7}$$

De nuevo, sacamos Z_t como constante:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El primer término no depende de N_t, por lo que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) = -\frac{1}{1+\phi}(1+\phi) N_t^{(1+\phi)-1} = -N_t^{\phi}.$$

Por lo tanto,

$$U_{n,t} = -N_t^{\phi} Z_t. \tag{8}$$

Tenmos...

- Para $N_t > 0$ y $Z_t > 0$, se cumple $U_{n,t} < 0$: trabajar más *reduce* la utilidad (desutilidad del esfuerzo).
- El término $-U_{n,t} = N_t^{\phi} Z_t$ es la *desutilidad marginal del trabajo*, creciente en N_t si $\phi > 0$.

Paso 3: sustitución en la condición intratemporal (4). La condición general de optimalidad intratemporal es:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}.$$

Sustituimos las expresiones obtenidas:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = -\frac{-N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t} = \frac{N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t}.$$

Observamos que Z_t aparece como factor multiplicando tanto en el numerador como en el denominador, por lo que se cancela:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}}.$$

Usando que $1/C_t^{-\sigma} = C_t^{\sigma}$, obtenemos:

$$\frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = N_t^{\phi} C_t^{\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{9}$$

Igualando esto al salario real, según (4), llegamos a:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}, \tag{7}$$

que es la **Ecuación (7)**.

Interpretación económica de la Ecuación (7). La ecuación

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$$

puede leerse como:

"El salario real debe igualar el costo subjetivo marginal de trabajar una unidad adicional, medido en unidades de consumo, dado el nivel de consumo C_t y trabajo N_t."

Más concretamente:

- Si N_t aumenta (el hogar trabaja más), el término N_t^{ϕ} aumenta (para $\phi > 0$), por lo que el lado derecho crece. **Es decir:** para convencer al hogar de trabajar más, el salario real W_t/P_t debe ser mayor.
- Si C_t aumenta, el término C_t^{σ} también aumenta (para $\sigma > 0$). Esto refleja que, cuando el hogar ya consume mucho, la utilidad marginal del consumo es baja; por tanto, el hogar necesita un salario real más alto para renunciar a ocio (seguir trabajando) y mantener el equilibrio óptimo. Esto está relacionado con el *efecto ingreso* sobre la oferta de trabajo.
- El producto $C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$ es, en este contexto, la **tasa marginal de sustitución** entre ocio y consumo bajo la forma funcional elegida.

Separabilidad y el papel de Z_t. Un detalle importante del resultado es que Z_t *desaparece* de la condición intratemporal:

- El choque de preferencias Z_t multiplica toda la utilidad, por lo que aparece tanto en $U_{c,t}$ como en $U_{n,t}$, y se cancela en el cociente $-U_{n,t}/U_{c,t}$.
- Esto implica que la **oferta de trabajo intratemporal** (ecuación 7) no se ve afectada directamente por Z_t.
- En cambio, Z_t sí influye en las decisiones *intertemporales* a través de la Ecuación de Euler (5), donde entra la razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$.

La Ecuación (7) es la versión concreta, para la utilidad (11), de la condición de optimalidad intratemporal del hogar. Representa la **curva de oferta de trabajo competitiva**: para cada nivel de consumo C_t, indica qué combinación de salario real W_t/P_t y horas trabajadas N_t es consistente con el óptimo del hogar.

Ecuación (8): Ecuación de Euler intertemporal específica

En la sección anterior obtuvimos la *Ecuación de Euler general* para el consumo y el ahorro del hogar:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}, \tag{5}$$

donde $U_{c,t}$ es la utilidad marginal del consumo en el periodo t.

Ahora queremos ver *cómo se ve* esta condición cuando usamos la función de utilidad específica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

que introdujimos al derivar la ecuación (7).

Parámetros relevantes En esta ecuación de Euler aparecen de nuevo dos parámetros importantes:

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. Como ya se discutió, se interpreta habitualmente como una medida de **aversión relativa al riesgo** y está estrechamente relacionada con la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.
- β (*beta*): **factor de descuento intertemporal** del hogar, con $0 < \beta < 1$. Controla qué tanto valora el hogar la utilidad futura respecto a la presente; valores altos de β indican mayor paciencia.

Nuestro objetivo es expresar la ecuación (5) en términos de tasas de crecimiento de consumo y del factor de preferencias Z_t.

Paso 1: utilidades marginales del consumo. De la derivación previa (sección de la ecuación 7), recordamos que:

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t, \qquad U_{c,t+1} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Estas expresiones provienen de derivar (11) respecto a C_t y C_{t+1}:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} Z_t,$$
$$U_{c,t+1} \equiv \frac{\partial U(C_{t+1}, N_{t+1}; Z_{t+1})}{\partial C_{t+1}} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Paso 2: razón de utilidades marginales $U_{c,t+1}/U_{c,t}$. Formamos la razón que aparece en la Ecuación de Euler:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \frac{C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}}{C_t^{-\sigma} Z_t}. \tag{10}$$

Agrupamos términos de consumo y de preferencias por separado:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}}\right)\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right).$$

En el primer cociente aplicamos la propiedad de potencias:

$$\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right). \tag{11}$$

Podemos leer...

- El término $(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ recoge cómo el crecimiento del consumo afecta la utilidad marginal relativa entre t y $t+1$.
- El término Z_{t+1}/Z_t refleja cómo cambian las preferencias (el "peso" que el hogar asigna a la utilidad del consumo) entre ambos periodos.

Paso 3: sustitución en la Ecuación de Euler general. Tomamos la Ecuación de Euler:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

y sustituimos la expresión de (11):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}.$$

Esto nos da la **Ecuación (8)**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \right\}. \tag{8}$$

Interpretación de la Ecuación (8). La ecuación (8) es la versión *específica* de la condición de Euler del hogar bajo la utilidad (11). Podemos leerla así:

"El precio del bono hoy (Q_t) es igual al valor esperado, descontado, de lo que vale una unidad de consumo futuro en términos de utilidad marginal de hoy, ajustado por inflación y por cambios en preferencias."

Más en detalle:

- Q_t: precio actual de una promesa de 1 unidad de dinero en $t+1$. Como antes, el rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- β: factor de descuento (*beta*). Captura la impaciencia pura del hogar: cuanto menor es β, más "caro" le resulta postergar consumo.
- $\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}$: este término recoge la **sustitución intertemporal del consumo**.
  - Si se espera que C_{t+1} sea bajo respecto a C_t, la utilidad marginal futura será alta, y el hogar valora mucho poder aumentar C_{t+1}: esto tiende a elevar el valor del bono (sube Q_t).
  - El parámetro σ (*sigma*) gobierna qué tan sensible es esta valoración a cambios en la tasa de crecimiento del consumo.
- $\frac{Z_{t+1}}{Z_t}$: refleja la **tasa de crecimiento del factor de preferencias**.
  - Si Z_{t+1}/Z_t es grande, el consumo futuro "pesa más" en la función de utilidad; el hogar está dispuesto a pagar más hoy por una unidad de consumo mañana (aumenta Q_t).
  - Dicho de otra forma, Z_t actúa como un *choque al factor de descuento efectivo.*
- $\frac{P_t}{P_{t+1}}$: es el **inverso de la inflación bruta esperada**. Si se espera alta inflación, una unidad nominal de mañana vale menos en términos de consumo, lo que tiende a reducir Q_t (para un mismo nivel de utilidad marginal futura).

Tenemos...

La Ecuación (8) combina tres elementos fundamentales:

1. **Tiempo e impaciencia** (β): preferencia por el presente.
2. **Riesgo y crecimiento del consumo** ($(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ y σ): cómo valora el hogar el consumo en estados futuros donde C_{t+1} puede ser alto o bajo.
3. **Choques de preferencias e inflación** (Z_{t+1}/Z_t y P_t/P_{t+1}): cómo cambian la "importancia" del consumo futuro y el poder adquisitivo de los pagos nominales.

En conjunto, estos factores determinan el *precio justo* del bono Q_t en equilibrio.

1. Conclusion

Referencias

[1] Reference here.