El modelo monatario clásico: desarrollo matemático del capítulo 2 de *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle*

Gabriel Tehozol

18 de noviembre de 2025

Hogares: definición del problema de optimización dinámica

En este apartado describimos qué hace el hogar en el modelo. La idea básica es:

- El hogar vive muchos periodos (t, t+1, t+2, ...).
- En cada periodo decide cuánto consumir (C_t) y cuánto trabajar (N_t).
- También puede ahorrar o endeudarse con bonos (B_t).
- Quiere que, en promedio, su "nivel de felicidad" (utilidad) a lo largo del tiempo sea lo más alto posible, pero está limitado por el dinero que tiene y el que puede conseguir.

A esto le llamamos un *problema de optimización dinámica*: el hogar toma decisiones hoy pensando en sus consecuencias mañana y en el futuro.

Ecuación (1): función objetivo (utilidad esperada descontada)

El objetivo del hogar se resume en la siguiente expresión:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t). \tag{1}$$

Esta ecuación se puede leer *de izquierda a derecha* como una frase:

"El hogar quiere maximizar el valor esperado, visto desde hoy, de la suma de su utilidad en cada periodo, ponderada por cuánto le importa el futuro."

Paso a paso.

1. $U(C_t, N_t; Z_t)$ es la **utilidad** del hogar en el periodo t. Depende de:
   - C_t: consumo del bien (comida, servicios, etc.).
   - N_t: horas de trabajo (más trabajo suele dar más ingreso, pero menos ocio).
   - Z_t: shock o desplazador de preferencias, que representa cambios en gustos, hábitos, etc.
2. La suma $\sum_{t=0}^{\infty}$ indica que el hogar se preocupa por **todos** los periodos: $t = 0, 1, 2, \ldots$.
3. El factor β^t, donde $0 < \beta < 1$, *descuenta* la importancia de la utilidad de cada periodo. Cuanto mayor es t, menor es el peso β^t.
   - Si β es cercano a 1, el hogar es paciente (le importa mucho el futuro).
   - Si β es pequeño, el hogar es impaciente (valora más el presente).
4. $E_0[\cdot]$ es el **operador de expectativas**. Simplemente significa: "el valor promedio que el hogar espera hoy ($t = 0$) que tendrá esa suma, tomando en cuenta que el futuro es incierto".

Supuestos básicos sobre la utilidad. Para que el problema tenga sentido económico, se imponen algunos supuestos estándar sobre $U(C_t, N_t; Z_t)$:

- La utilidad aumenta con el consumo:
  $$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t} > 0,$$
  y la utilidad marginal del consumo es decreciente:
  $$U_{cc,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2} \leq 0.$$
  Es decir, consumir más siempre gusta, pero cada unidad extra aporta un poco menos que la anterior.
- El trabajo genera desutilidad:
  $$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial N_t} \leq 0,$$
  de modo que $-U_{n,t} > 0$ es la *desutilidad marginal del trabajo* (trabajar más cansa).
- El shock Z_t desplaza las preferencias. Supondremos que un aumento en Z_t eleva la utilidad marginal del consumo:
  $$U_{cz,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t \, \partial Z_t} > 0.$$

La ecuación (1) dice: el hogar quiere elegir sus secuencias de C_t y N_t para que, en promedio, la suma de sus felicidades presentes y futuras sea lo más alta posible.

Ecuación (2): restricción presupuestaria de flujo

El hogar no puede elegir cualquier combinación de consumo y trabajo: cada periodo está limitado por sus ingresos y por lo que puede ahorrar o endeudarse. Esta idea se resume en la **restricción de flujo**:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t. \tag{2}$$

Podemos leer esta ecuación como:

"Uso de recursos en el periodo $t \leq$ Fuentes de recursos en el periodo t."

Lado izquierdo: usos (en qué se gasta).

- $P_t C_t$: gasto en consumo. P_t es el precio nominal del bien; C_t es la cantidad consumida.
- $Q_t B_t$: gasto en compra de bonos. Q_t es el precio hoy de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$; B_t es el número de bonos que compra el hogar.

Lado derecho: fuentes (de dónde vienen los recursos).

- B_{t-1}: bonos que se compraron en $t-1$ y pagan hoy (ingreso financiero).
- $W_t N_t$: ingreso laboral (salario nominal W_t por horas trabajadas N_t).
- D_t: dividendos que el hogar recibe como dueño de las empresas.

En equilibrio competitivo es natural que la desigualdad se cumpla con igualdad (el hogar no deja dinero sin usar), es decir:

$$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

Cada periodo, lo que el hogar gasta en consumo y bonos no puede superar lo que entra por salario, dividendos y bonos que vencen.

Ecuación (3): restricción de solvencia (no-Ponzi)

Hasta ahora, la restricción de flujo controla qué pasa *dentro* de cada periodo. Pero como el horizonte es infinito, en principio el hogar podría intentar endeudarse cada vez más, sin pagar nunca. Para evitar ese tipo de planes no realistas, se impone una **restricción de solvencia** o **restricción de no-Ponzi**:

$$\lim_{T \to \infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

¿Qué significa esta condición?

- B_T/P_T es la *riqueza real en bonos* en el periodo T.
- $\Xi_{t,T}$ es un **factor de descuento estocástico**, definido como:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t}\frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}.$$

  Este factor combina:

  - el descuento puro del tiempo (β^{T-t}),
  - y el cambio en la utilidad marginal del consumo ($U_{c,T}/U_{c,t}$).

La expresión $E_t\{\Xi_{t,T}B_T/P_T\}$ se puede interpretar como el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos en el horizonte T, medido desde el punto de vista del periodo t.

La condición

$$\lim_{T\to\infty} E_t\left\{\Xi_{t,T}\frac{B_T}{P_T}\right\} \geq 0$$

dice que, en el límite, ese valor presente esperado no puede ser negativo. Intuitivamente:

> *"El hogar no puede sostener un esquema en el que su deuda crezca tanto que, incluso descontada, termine siendo impagable."*

La ecuación (3) evita el endeudamiento explosivo. Es una condición técnica, pero muy importante, para que el problema infinito esté bien definido.

Ecuación (4): condición de optimalidad intratemporal

Ahora sí, pasamos a una de las **condiciones de primer orden** más importantes: la que relaciona consumo, trabajo y salarios *dentro* de un mismo periodo. Esta condición se escribe como:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}. \tag{4}$$

Esta ecuación se llama:

- **Condición de optimalidad intratemporal**, porque compara decisiones dentro del periodo t.
- **Condición de oferta de trabajo**, porque nos dice cómo el hogar decide cuántas horas trabajar dado el salario real.

Interpretación de los términos.

- $U_{c,t}$: utilidad marginal del consumo (cuánto aumenta la utilidad si el hogar consume un poco más).
- $U_{n,t}$: utilidad marginal del trabajo (cuánto cambia la utilidad si el hogar trabaja un poco más). Suele ser negativa: trabajar cansa.
- $-U_{n,t}/U_{c,t}$: **tasa marginal de sustitución** (TMS) entre ocio y consumo. Dice cuántas unidades extra de consumo necesita el hogar para aceptar trabajar una unidad extra.
- W_t/P_t: **salario real**, es decir, cuántas unidades de bien de consumo recibe el hogar por cada unidad de trabajo.

La ecuación (4) dice:

"El hogar elige sus horas de trabajo de modo que su TMS subjetiva entre ocio y consumo sea igual al salario real que ofrece el mercado."

Derivación paso a paso (argumento variacional). La idea es imaginar un pequeño cambio en las decisiones del hogar en el periodo t, y pedir que ese cambio *no mejore* la situación si ya estamos en el óptimo.

1. **Paso 1: pequeña desviación en consumo y trabajo.** Partimos de un plan óptimo (C_t, N_t) y consideramos una pequeña desviación (dC_t, dN_t) en el periodo t, manteniendo todo lo demás igual.

   El cambio en la utilidad instantánea es:

   $$dU_t = U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t.$$

   Si el plan es óptimo, cualquier desviación que respete el presupuesto no puede mejorar la utilidad. En el margen, esto implica que el cambio en utilidad asociado a una desviación factible debe ser cero:

   $$U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t = 0. \tag{1}$$

2. **Paso 2: pequeña desviación en la restricción de flujo.** Ahora miramos cómo se ve esa misma desviación en la restricción presupuestaria del periodo t:

   $$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

   Si mantenemos fijo B_t (no tocamos el ahorro) y sólo cambiamos C_t y N_t, la variación de esta igualdad es:

   $$P_t\, dC_t = W_t\, dN_t. \tag{2}$$

   Es decir, el gasto adicional en consumo tiene que ser financiado por un ingreso adicional de trabajo.

3. **Paso 3: expresar dC_t en función de dN_t.** De (2) despejamos:

$$dC_t = \frac{W_t}{P_t} dN_t. \tag{3}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.** Sustituimos (3) en (1):

$$U_{c,t} \left(\frac{W_t}{P_t} dN_t \right) + U_{n,t} dN_t = 0.$$

   Factorizamos dN_t:

$$\left[U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} \right] dN_t = 0.$$

   Como dN_t representa una desviación arbitraria (pequeña pero no necesariamente cero), para que el producto sea cero, el término entre corchetes debe ser:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} = 0.$$

5. **Paso 5: aislar la TMS.** Reordenando:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} = -U_{n,t},$$

   y dividiendo entre $U_{c,t} > 0$:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t},$$

   que es exactamente la ecuación (4).

Entonces tenemos...

- La variación en la utilidad nos dice cómo cambian las preferencias del hogar ante pequeños ajustes en C_t y N_t.
- La variación en el presupuesto nos dice qué combinaciones de dC_t y dN_t son factibles (se pueden pagar).
- Al combinar ambas y exigir que no haya manera de mejorar la utilidad con una desviación factible, obtenemos la condición de primer orden.
- El resultado final iguala:
  - el *costo subjetivo* de trabajar más (perder ocio),
  - con el *beneficio objetivo* de mercado (el salario real).

Ecuación (5): condición de optimalidad intertemporal (Ecuación de Euler)

Además de decidir cuánto trabajar dentro de cada periodo (condición intratemporal), el hogar debe decidir *cuánto consumir hoy y cuánto dejar para consumir mañana.* Esta decisión se resume en la **condición de optimalidad intertemporal** o **Ecuación de Euler**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{5}$$

Lectura intuitiva. La ecuación (5) se puede leer como:

"El precio del bono hoy (Q_t) debe ser igual al valor presente esperado de la tasa a la que el hogar está dispuesto a intercambiar consumo de hoy por consumo de mañana, medido en unidades de bien de consumo y multiplicado por el factor de descuento β."

Donde:

- Q_t es el **precio del bono** nominal libre de riesgo.
- $\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}}$ mide cómo cambia la utilidad marginal del consumo entre t y $t+1$.
- $\frac{P_t}{P_{t+1}}$ ajusta por la inflación esperada (pasa de unidades nominales a reales y viceversa).
- β descuenta el futuro (impaciencia).

Desglose de los términos de (5).

- **Precio del bono:** Q_t es el precio en t de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$. El rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- **Utilidad marginal del consumo:** $U_{c,t} \equiv \partial U(C_t, N_t; Z_t)/\partial C_t$ es la utilidad marginal en el periodo t. La razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$ captura cómo el hogar valora una unidad extra de consumo mañana en comparación con hoy.
- **Relación de precios:** P_t/P_{t+1} es el inverso de la inflación bruta esperada entre t y $t+1$. Si los precios suben mucho, una misma cantidad de dinero rinde menos en términos de consumo futuro.
- **Operador de expectativas:** $E_t\{\cdot\}$ promedia sobre todos los escenarios posibles del futuro, dados los shocks, usando la información que el hogar tiene en t.

Derivación paso a paso La ecuación (5) se obtiene al analizar una pequeña reubicación de consumo entre los periodos t y $t+1$. La idea es:

"¿Qué pasa si reduzco mi consumo hoy y uso ese ahorro para aumentar mi consumo mañana, sin violar el presupuesto? En el óptimo, ese cambio no debe mejorar mi utilidad esperada."

1. **Paso 1: variación en la utilidad intertemporal.**

   Consideremos un plan óptimo y una pequeña desviación (dC_t, dC_{t+1}) que sólo afecta al consumo en t y $t+1$. El cambio en la utilidad total (medida en t y descontando el futuro) es aproximadamente:

   $$U_{c,t}\, dC_t + \beta E_t\{U_{c,t+1}\, dC_{t+1}\} = 0. \tag{A}$$

   Explicación de cada término:

   - $U_{c,t} dC_t$: cambio en la utilidad del *periodo actual*.
   - $\beta E_t\{U_{c,t+1} dC_{t+1}\}$: cambio esperado en la utilidad del periodo siguiente, descontado a valor presente con β.

   En un óptimo, cualquier desviación factible en la que sólo movemos consumo entre t y $t+1$ no debe aumentar la utilidad, por lo que el cambio marginal debe ser cero.

2. **Paso 2: variación en el presupuesto intertemporal.**

   Ahora vemos cómo se traduce esa misma desviación en la restricción presupuestaria. La idea es:

   - Si reducimos el consumo hoy en una cantidad $dC_t < 0$, liberamos recursos por un monto nominal $P_t dC_t$.
   - Esos recursos se usan para comprar más bonos: el número adicional de bonos es

     $$dB_t = -\frac{P_t}{Q_t}\, dC_t,$$

     porque cada bono cuesta Q_t unidades de dinero.
   - Mañana, esos bonos pagan 1 unidad de dinero cada uno, de modo que el ingreso adicional nominal en $t+1$ es $(1) \cdot dB_t$.

   El cambio en la restricción de flujo en $t+1$ implica que ese ingreso adicional se destina a mayor consumo dC_{t+1}:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = dB_t = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t.$$

   Es decir:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t. \tag{B}$$

3. **Paso 3: expresar dC_{t+1} en función de dC_t.**

   De (B) despejamos:

$$dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t. \tag{C}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.**

   Sustituimos (C) en (A):

$$U_{c,t} dC_t + \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \left(-\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t \right) \right\} = 0.$$

   Factorizamos dC_t:

$$\left[U_{c,t} - \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\} \right] dC_t = 0.$$

   Como dC_t representa una desviación arbitraria (pequeña, pero distinta de cero), el término entre corchetes debe ser nulo:

$$U_{c,t} = \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\}. \tag{4}$$

5. **Paso 5: aislar Q_t y obtener la Ecuación de Euler.**

   De (4), multiplicamos ambos lados por $Q_t / U_{c,t}$:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

   que es exactamente la ecuación (5).

Entonces tenemos...

- El hogar compara el "costo" de sacrificar consumo hoy con el "beneficio" de tener más consumo mañana.
- El costo se mide por la utilidad marginal actual $U_{c,t}$.
- El beneficio se mide por la utilidad marginal futura $U_{c,t+1}$, ajustada por:
  - el factor de descuento β,
  - la inflación esperada P_t / P_{t+1},
  - y el precio del bono Q_t.
- En el óptimo, no hay reubicación de consumo (entre hoy y mañana) que pueda mejorar la utilidad: eso es lo que recoge la Ecuación de Euler.

Ecuación (6): condición de transversalidad

La última pieza de las condiciones de optimalidad del hogar es la llamada **condición de transversalidad**. Esta condición está estrechamente ligada a la restricción de solvencia (3), pero ahora se impone como *igualdad* en el óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0. \tag{6}$$

Recordemos que:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t} \frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}$$

es el **factor de descuento estocástico** que mide cuánto vale, en términos de utilidad marginal en t, una unidad de consumo (o riqueza real) en T.

Relación con la restricción de solvencia. La restricción de solvencia (3) decía:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

Es decir:

- En el límite, el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos no puede ser negativo.
- Esto impide que el hogar aplique esquemas de endeudamiento tipo Ponzi.

La **condición de transversalidad** (6) dice algo más fuerte:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0.$$

¿Por qué debe valer la igualdad en el óptimo?. Supongamos, para ver el argumento, que en el óptimo se cumpliera:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = L > 0.$$

- Entonces, incluso después de descontar por β^{T-t} y por el cociente $U_{c,T}/U_{c,t}$, el hogar estaría *dejando* una cantidad positiva de riqueza real en el infinito.
- Dado que la utilidad marginal del consumo es positiva ($U_{c,t} > 0$ para todo t), el hogar podría mejorar su plan: reducir ligeramente B_T (o, en la práctica, consumir un poco más en algún periodo finito) sin violar la restricción de solvencia, usando parte de ese "excedente" L.
- Al hacer esto, aumentaría su consumo en algún periodo sin disminuir el consumo en otros lo suficiente como para compensar, por lo que la utilidad total aumentaría.

Pero esto contradice la suposición de que el plan original era óptimo. Por tanto, en un óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0,$$

que es precisamente la ecuación (6).

En términos económicos...

- La ecuación (3) asegura que la deuda no crece de manera explosiva.
- La ecuación (6) asegura que el hogar *no deja recursos sin usar* en el límite: toda la riqueza potencial que pueda aumentar la utilidad se habrá utilizado en algún momento.
- En muchas aplicaciones, con un hogar representativo y oferta neta de deuda cero, se cumple en equilibrio que $B_t = 0$ para todo t, lo que hace que (6) sea automáticamente cierta. Aun así, es importante tenerla explícitamente como parte de las condiciones de optimalidad.

Con las ecuaciones (4), (5) y (6) tenemos ahora el conjunto completo de **condiciones de optimalidad del hogar**:

- (4): condición intratemporal (oferta de trabajo).
- (5): condición intertemporal (Ecuación de Euler para consumo/ahorro).
- (6): condición de transversalidad (uso eficiente de la riqueza en el tiempo).

En el siguiente paso, estas condiciones se combinarán con el comportamiento de las empresas y las identidades de equilibrio para construir el modelo macroeconómico completo.

Ecuación (7): especificación funcional de la utilidad y oferta de trabajo competitiva

En esta sección, seguimos el capítulo y adoptamos una **forma funcional particular** para la utilidad periódica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

donde $\sigma \geq 0$ y $\phi \geq 0$ son parámetros.

Parámetros: Para mayor claridad, presentamos los parámetros que aparecen en la ecuación (11):

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. En esta clase de modelos suele interpretarse como:
  - medida de **aversión relativa al riesgo** del hogar, y
  - (en muchas especificaciones) inverso de la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.

  Valores más altos de σ implican que la utilidad marginal del consumo cae más rápido cuando aumenta C_t.

- ϕ (*phi*): parámetro de curvatura de la desutilidad del trabajo. Controla qué tan rápido aumenta la desutilidad marginal de trabajar más horas. Suele interpretarse como el **inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo**: valores altos de ϕ indican que la oferta de trabajo es menos sensible a cambios en el salario real.

Nuestro objetivo ahora es: (1) calcular $U_{c,t}$ y $U_{n,t}$ a partir de (11), y (2) sustituirlos en (4) para obtener la versión *específica* de la oferta de trabajo, la **Ecuación (7)**.

Paso 1: utilidad marginal del consumo $U_{c,t}$. Partimos de:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos la derivada parcial respecto a C_t:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial C_t} = \frac{\partial}{\partial C_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{5}$$

Como Z_t está multiplicando todo, podemos sacarlo como constante:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El segundo término no depende de C_t, así que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right).$$

Ahora derivamos usando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) = \frac{1}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) C_t^{(1-\sigma)-1} = C_t^{-\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t. \tag{6}$$

Tenemos...

- Si $\sigma > 0$, entonces $U_{c,t} > 0$ y decrece cuando C_t aumenta (porque $C_t^{-\sigma}$ disminuye con C_t). Esto refleja la idea de *utilidad marginal decreciente del consumo.*

- El factor Z_t amplifica o reduce la utilidad marginal del consumo según el estado de las preferencias.

Paso 2: utilidad marginal del trabajo $U_{n,t}$. Volvemos a la función de utilidad:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos ahora la derivada parcial respecto a N_t:

$$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial N_t} = \frac{\partial}{\partial N_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{7}$$

De nuevo, sacamos Z_t como constante:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El primer término no depende de N_t, por lo que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) = -\frac{1}{1+\phi}(1+\phi) N_t^{(1+\phi)-1} = -N_t^{\phi}.$$

Por lo tanto,

$$U_{n,t} = -N_t^{\phi} Z_t. \tag{8}$$

Tenmos...

- Para $N_t > 0$ y $Z_t > 0$, se cumple $U_{n,t} < 0$: trabajar más *reduce* la utilidad (desutilidad del esfuerzo).
- El término $-U_{n,t} = N_t^{\phi} Z_t$ es la *desutilidad marginal del trabajo*, creciente en N_t si $\phi > 0$.

Paso 3: sustitución en la condición intratemporal (4). La condición general de optimalidad intratemporal es:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}.$$

Sustituimos las expresiones obtenidas:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = -\frac{-N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t} = \frac{N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t}.$$

Observamos que Z_t aparece como factor multiplicando tanto en el numerador como en el denominador, por lo que se cancela:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}}.$$

Usando que $1/C_t^{-\sigma} = C_t^{\sigma}$, obtenemos:

$$\frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = N_t^{\phi} C_t^{\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{9}$$

Igualando esto al salario real, según (4), llegamos a:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}, \tag{7}$$

que es la **Ecuación (7)**.

Interpretación económica de la Ecuación (7). La ecuación

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$$

puede leerse como:

> *"El salario real debe igualar el costo subjetivo marginal de trabajar una unidad adicional, medido en unidades de consumo, dado el nivel de consumo C_t y trabajo N_t."*

Más concretamente:

- Si N_t aumenta (el hogar trabaja más), el término N_t^{ϕ} aumenta (para $\phi > 0$), por lo que el lado derecho crece. **Es decir:** para convencer al hogar de trabajar más, el salario real W_t/P_t debe ser mayor.

- Si C_t aumenta, el término C_t^{σ} también aumenta (para $\sigma > 0$). Esto refleja que, cuando el hogar ya consume mucho, la utilidad marginal del consumo es baja; por tanto, el hogar necesita un salario real más alto para renunciar a ocio (seguir trabajando) y mantener el equilibrio óptimo. Esto está relacionado con el *efecto ingreso* sobre la oferta de trabajo.

- El producto $C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$ es, en este contexto, la **tasa marginal de sustitución** entre ocio y consumo bajo la forma funcional elegida.

Separabilidad y el papel de Z_t. Un detalle importante del resultado es que Z_t *desaparece* de la condición intratemporal:

- El choque de preferencias Z_t multiplica toda la utilidad, por lo que aparece tanto en $U_{c,t}$ como en $U_{n,t}$, y se cancela en el cociente $-U_{n,t}/U_{c,t}$.
- Esto implica que la **oferta de trabajo intratemporal** (ecuación 7) no se ve afectada directamente por Z_t.
- En cambio, Z_t sí influye en las decisiones *intertemporales* a través de la Ecuación de Euler (5), donde entra la razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$.

La Ecuación (7) es la versión concreta, para la utilidad (11), de la condición de optimalidad intratemporal del hogar. Representa la **curva de oferta de trabajo competitiva**: para cada nivel de consumo C_t, indica qué combinación de salario real W_t/P_t y horas trabajadas N_t es consistente con el óptimo del hogar.

Ecuación (8): Ecuación de Euler intertemporal específica

En la sección anterior obtuvimos la *Ecuación de Euler general* para el consumo y el ahorro del hogar:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}, \tag{5}$$

donde $U_{c,t}$ es la utilidad marginal del consumo en el periodo t.

Ahora queremos ver *cómo se ve* esta condición cuando usamos la función de utilidad específica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

que introdujimos al derivar la ecuación (7).

Parámetros relevantes En esta ecuación de Euler aparecen de nuevo dos parámetros importantes:

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. Como ya se discutió, se interpreta habitualmente como una medida de **aversión relativa al riesgo** y está estrechamente relacionada con la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.
- β (*beta*): **factor de descuento intertemporal** del hogar, con $0 < \beta < 1$. Controla qué tanto valora el hogar la utilidad futura respecto a la presente; valores altos de β indican mayor paciencia.

Nuestro objetivo es expresar la ecuación (5) en términos de tasas de crecimiento de consumo y del factor de preferencias Z_t.

Paso 1: utilidades marginales del consumo. De la derivación previa (sección de la ecuación 7), recordamos que:

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t, \qquad U_{c,t+1} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Estas expresiones provienen de derivar (11) respecto a C_t y C_{t+1}:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} Z_t,$$
$$U_{c,t+1} \equiv \frac{\partial U(C_{t+1}, N_{t+1}; Z_{t+1})}{\partial C_{t+1}} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Paso 2: razón de utilidades marginales $U_{c,t+1}/U_{c,t}$. Formamos la razón que aparece en la Ecuación de Euler:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \frac{C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}}{C_t^{-\sigma} Z_t}. \tag{10}$$

Agrupamos términos de consumo y de preferencias por separado:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}}\right)\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right).$$

En el primer cociente aplicamos la propiedad de potencias:

$$\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right). \tag{11}$$

Podemos leer...

- El término $(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ recoge cómo el crecimiento del consumo afecta la utilidad marginal relativa entre t y $t+1$.
- El término Z_{t+1}/Z_t refleja cómo cambian las preferencias (el "peso" que el hogar asigna a la utilidad del consumo) entre ambos periodos.

Paso 3: sustitución en la Ecuación de Euler general. Tomamos la Ecuación de Euler:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

y sustituimos la expresión de (11):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}.$$

Esto nos da la **Ecuación (8)**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \right\}. \tag{8}$$

Interpretación de la Ecuación (8). La ecuación (8) es la versión *específica* de la condición de Euler del hogar bajo la utilidad (11). Podemos leerla así:

> *"El precio del bono hoy (Q_t) es igual al valor esperado, descontado, de lo que vale una unidad de consumo futuro en términos de utilidad marginal de hoy, ajustado por inflación y por cambios en preferencias."*

Más en detalle:

- Q_t: precio actual de una promesa de 1 unidad de dinero en $t+1$. Como antes, el rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- β: factor de descuento (*beta*). Captura la impaciencia pura del hogar: cuanto menor es β, más "caro" le resulta postergar consumo.
- $\left(\dfrac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}$: este término recoge la **sustitución intertemporal del consumo**.
  - Si se espera que C_{t+1} sea bajo respecto a C_t, la utilidad marginal futura será alta, y el hogar valora mucho poder aumentar C_{t+1}: esto tiende a elevar el valor del bono (sube Q_t).
  - El parámetro σ (*sigma*) gobierna qué tan sensible es esta valoración a cambios en la tasa de crecimiento del consumo.
- $\dfrac{Z_{t+1}}{Z_t}$: refleja la **tasa de crecimiento del factor de preferencias**.
  - Si Z_{t+1}/Z_t es grande, el consumo futuro "pesa más" en la función de utilidad; el hogar está dispuesto a pagar más hoy por una unidad de consumo mañana (aumenta Q_t).
  - Dicho de otra forma, Z_t actúa como un *choque al factor de descuento efectivo.*
- $\dfrac{P_t}{P_{t+1}}$: es el **inverso de la inflación bruta esperada**. Si se espera alta inflación, una unidad nominal de mañana vale menos en términos de consumo, lo que tiende a reducir Q_t (para un mismo nivel de utilidad marginal futura).

Tenemos...

La Ecuación (8) combina tres elementos fundamentales:

1. **Tiempo e impaciencia** (β): preferencia por el presente.
2. **Riesgo y crecimiento del consumo** ($(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ y σ): cómo valora el hogar el consumo en estados futuros donde C_{t+1} puede ser alto o bajo.
3. **Choques de preferencias e inflación** (Z_{t+1}/Z_t y P_t/P_{t+1}): cómo cambian la "importancia" del consumo futuro y el poder adquisitivo de los pagos nominales.

En conjunto, estos factores determinan el *precio justo* del bono Q_t en equilibrio.

Nota: Reescritura y descomposición de la ecuación (8)

Partimos de la condición de optimalidad intertemporal específica:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right\}. \tag{8}$$

Para fijar ideas, consideremos primero el caso sin incertidumbre (o el valor esperado como "escenario central"), de modo que el operador de expectativas puede omitirse. Definimos las tasas brutas de crecimiento

$$g_c \;\equiv\; \frac{C_{t+1}}{C_t}, \qquad g_z \;\equiv\; \frac{Z_{t+1}}{Z_t},$$

y escribimos la razón de precios en función de la inflación esperada π^e_{t+1}:

$$\frac{P_t}{P_{t+1}} \;=\; \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}.$$

Con estas definiciones, la ecuación (8) se puede reescribir como

$$Q_t \;=\; \beta\, g_c^{-\sigma}\, g_z\, \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}. \tag{12}$$

Esta expresión hace explícito que el precio del bono nominal de un período Q_t es el producto de cuatro componentes:

1. β: *impaciencia pura* del hogar.
2. $g_c^{-\sigma}$: componente de *sustitución intertemporal del consumo*, que recoge cómo el crecimiento esperado del consumo afecta la utilidad marginal futura.
3. g_z: componente asociado al *factor de preferencias* Z_t, que actúa como un shock al factor de descuento efectivo.
4. $\dfrac{1}{1+\pi^e_{t+1}}$: componente que recoge el *castigo por inflación esperada*, al corregir la pérdida de poder adquisitivo del bono nominal.

Tomando logaritmos naturales en (12), obtenemos una descomposición aditiva particularmente útil:

$$\ln Q_t \;=\; \ln\beta \;-\; \sigma \ln g_c \;+\; \ln g_z \;-\; \ln(1+\pi^e_{t+1}). \tag{13}$$

La ecuación (13) muestra cómo cada componente (crecimiento esperado del consumo, evolución del factor de preferencias y inflación esperada) contribuye (con signo y magnitud) al nivel de Q_t, y por tanto, de la tasa de interés nominal bruta $1 + i_t = 1/Q_t$.

Interpretación gráfica de la ecuación (8)

La expresión

$$Q_t \;=\; \beta\, g_c^{-\sigma}\, g_z\, \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}, \qquad g_c \equiv \frac{C_{t+1}}{C_t}, \quad g_z \equiv \frac{Z_{t+1}}{Z_t}, \tag{8 revisada}$$

muestra que el precio del bono nominal de un período Q_t depende de tres bloques económicos: (i) el crecimiento esperado del consumo g_c (sustitución intertemporal), (ii) la evolución del factor de preferencias g_z y (iii) la inflación esperada π^e_{t+1} que entra vía $P_t/P_{t+1} = 1/(1+\pi^e_{t+1})$. Las figuras siguientes ilustran cómo cambia Q_t cuando variamos cada uno de estos componentes, manteniendo constantes los demás.

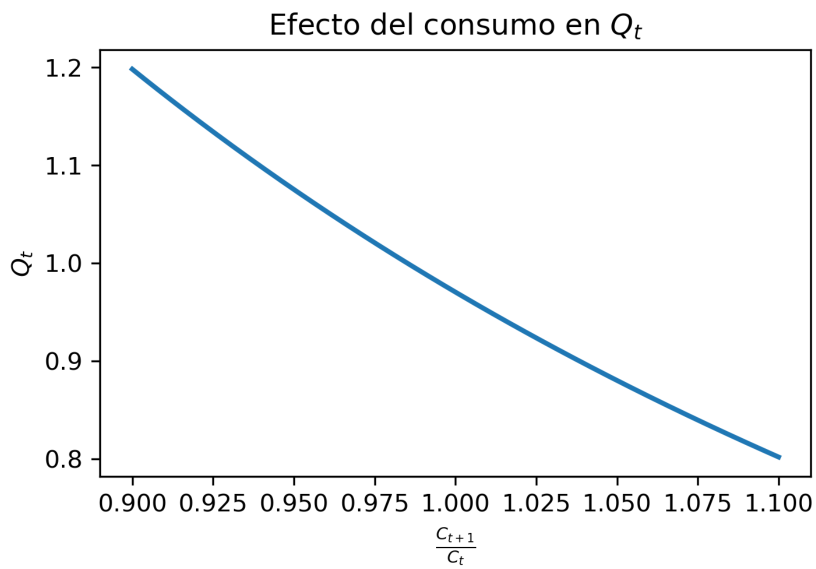

Figura 1: Efecto del crecimiento esperado del consumo $g_c = C_{t+1}/C_t$ sobre Q_t.

En la Figura 1 se representa Q_t como función del crecimiento esperado del consumo g_c. Dado que $Q_t \propto g_c^{-\sigma}$, la curva es decreciente: cuanto mayor es el crecimiento esperado del consumo ($g_c \uparrow$), menor es Q_t. Económicamente, si el hogar espera ser más "rico" mañana (mayor consumo futuro), la utilidad marginal futura es más baja y, por tanto, está dispuesto a pagar menos por una unidad de consumo futuro: el bono se vende más barato (Q_t cae) y la tasa de interés nominal $1 + i_t = 1/Q_t$ aumenta.

[1]

[1]El símbolo $\propto$ denota *proporcionalidad*. El precio del bono Q_t es *proporcional* a g_z elevado a la potencia menos sigma.

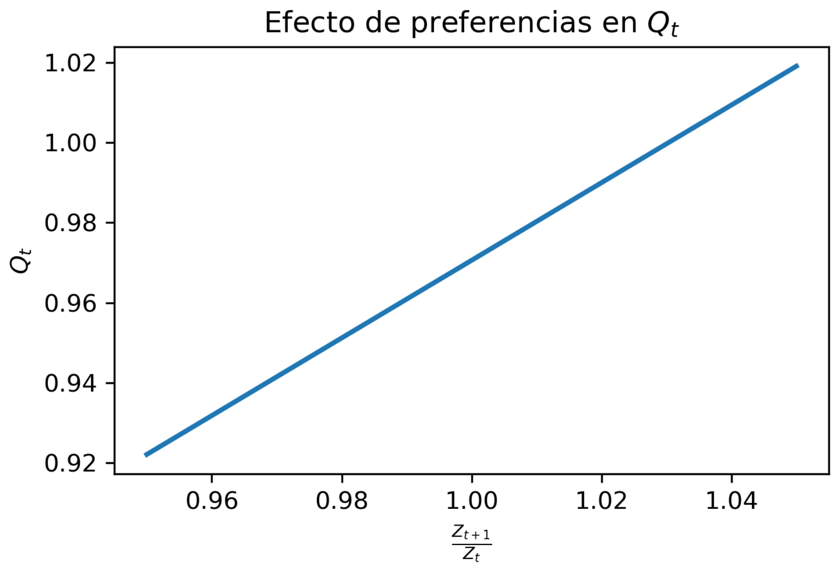

Figura 2: Efecto del factor de preferencias $g_z = Z_{t+1}/Z_t$ sobre Q_t.

La Figura 2 muestra el efecto del factor de preferencias g_z. Como $Q_t \propto g_z$, la relación es creciente: un aumento de Z_{t+1} en relación con Z_t desplaza al alza Q_t. En términos económicos, un incremento en g_z puede interpretarse como un shock que eleva la valoración relativa del consumo futuro; el hogar se vuelve más paciente y está dispuesto a pagar más por el bono hoy. En consecuencia, el precio del bono sube y la tasa de interés nominal cae.

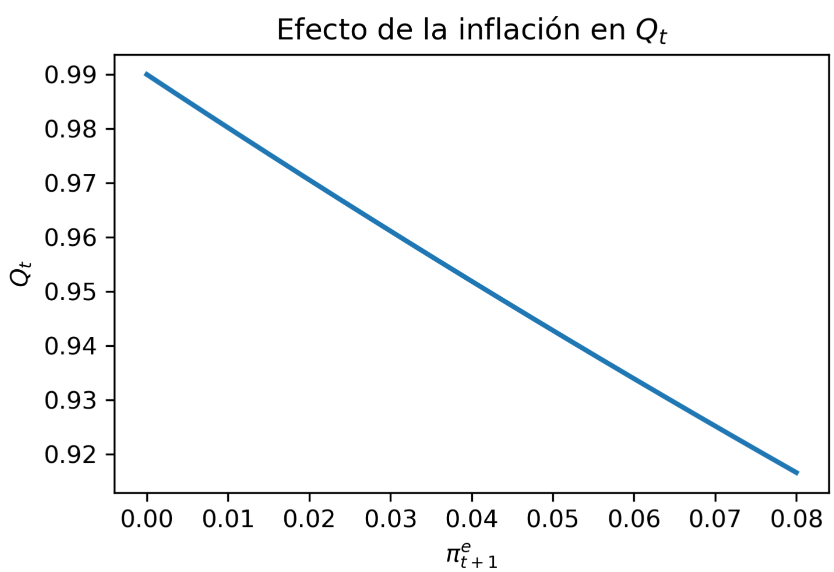

Figura 3: Efecto de la inflación esperada π^e_{t+1} sobre Q_t.

Por último, la Figura 3 representa la relación entre Q_t y la inflación esperada π^e_{t+1}, manteniendo constantes g_c y g_z. Como $Q_t \propto 1/(1+\pi^e_{t+1})$, la curva es decreciente: una mayor inflación esperada reduce el valor real del pago nominal del bono, de modo que los hogares sólo están dispuestos a comprarlo a un precio menor. Esto se traduce en un Q_t más bajo y, por tanto, en una tasa de interés nominal más alta.

En conjunto, las Figuras 1–3 ilustran que el precio del bono Q_t sintetiza tres tipos de consideraciones: (i) expectativas sobre el perfil de consumo, (ii) choques de preferencias que modifican el peso relativo del futuro y (iii) expectativas de inflación que erosionan el valor real de los pagos nominales.

Ecuación (9): Oferta de trabajo log-lineal

La ecuación (9) es la representación *log-lineal* de la **condición de optimalidad intratemporal** (ecuación (7)), que describe la *oferta de trabajo competitiva* del hogar. Se escribe como:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t. \tag{9}$$

En este contexto, adoptamos la convención estándar de que las letras minúsculas denotan el **logaritmo natural** de la variable correspondiente en niveles:

$$w_t \equiv \log W_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad c_t \equiv \log C_t, \quad n_t \equiv \log N_t.$$

I. Desglose riguroso de términos

Símbolo	Definición	Significado
w_t	$\log W_t$	Logaritmo del salario nominal.
p_t	$\log P_t$	Logaritmo del nivel de precios del bien de consumo.
$w_t - p_t$	$\log(W_t/P_t)$	Logaritmo del salario real (precio del trabajo en unidades de bien).
c_t	$\log C_t$	Logaritmo del consumo; indicador del nivel de consumo/riqueza.
n_t	$\log N_t$	Logaritmo de horas de trabajo/empleo.
σ	Curvatura de la utilidad del consumo	Mide el efecto ingreso del consumo sobre la oferta de trabajo.
ϕ	Parámetro de desutilidad del trabajo	Inverso de la elasticidad (Frisch) de la oferta de trabajo.

Recordemos que:

- σ (sigma) es el parámetro que controla la curvatura de la utilidad en consumo; cuanto mayor es σ, más sensible es la utilidad marginal ante cambios en C_t.
- ϕ (phi) está asociado a la desutilidad del trabajo; cuanto mayor es ϕ, más empinada es la desutilidad marginal de trabajar, y menor es la elasticidad (Frisch) de la oferta de trabajo.

II. Proceso de obtención (log-linealización)

La ecuación (9) se obtiene aplicando logaritmos a la **condición de optimalidad intratemporal específica** (ecuación (7)), derivada previamente a partir de la función de utilidad (ecuación (11)):

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{7}$$

Paso 1: aplicar logaritmo natural a ambos lados. Tomamos $\log(\cdot)$ en ambos lados de (7):

$$\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) \;=\; \log\left(C_t^{\sigma} N_t^{\phi}\right). \tag{14}$$

Paso 2: usar propiedades básicas de logaritmos. Utilizamos tres identidades elementales (que es útil que el lector tenga claras):

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{A}{B}\right) &= \log A - \log B, \\
\log(AB) &= \log A + \log B, \\
\log(A^x) &= x \log A.
\end{aligned}$$

Aplicando estas propiedades en (14), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) &= \log W_t - \log P_t, \\
\log\left(C_t^{\sigma} N_t^{\phi}\right) &= \sigma \log C_t + \phi \log N_t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\log W_t - \log P_t \;=\; \sigma \log C_t + \phi \log N_t. \tag{15}$$

Paso 3: sustituir notación log-lineal. Sustituyendo $w_t = \log W_t$, $p_t = \log P_t$, $c_t = \log C_t$ y $n_t = \log N_t$, llegamos a:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t, \tag{16}$$

que corresponde a la ecuación (9).

III. Interpretación didáctica y rigurosa

La ecuación (9) puede leerse como la *función de oferta de trabajo* del hogar en términos logarítmicos:

$$\underbrace{w_t - p_t}_{\text{salario real (en log)}} \quad = \quad \underbrace{\sigma c_t}_{\text{efecto ingreso vía consumo}} \quad + \quad \underbrace{\phi n_t}_{\text{respuesta de la oferta de trabajo}}.$$

- **Relación con el salario real.** Para un nivel dado de consumo c_t, un aumento del salario real $w_t - p_t$ debe estar asociado a un aumento de n_t. Esto refleja el *efecto sustitución*: cuando el salario real sube, el ocio se encarece y el hogar está dispuesto a ofrecer más trabajo.

- **Efecto del consumo (efecto ingreso).** El término σc_t recoge que, cuanto más alto es el consumo (y, en cierto sentido, la "riqueza" del hogar), mayor debe ser el salario real para inducir la misma cantidad de trabajo. Intuitivamente: si el hogar ya consume mucho, necesita un incentivo mayor para sacrificar ocio.
- **Papel de ϕ y elasticidad de la oferta de trabajo.** Como ϕ es el inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo, un valor elevado de ϕ implica que n_t responde poco a cambios en el salario real: la oferta de trabajo es relativamente inelástica. En cambio, un ϕ pequeño implica una oferta de trabajo más sensible a los cambios en $w_t - p_t$.

IV. Invarianza a choques de preferencias

Un punto clave es que la posición de la curva de oferta de trabajo en (9) es **invariante** frente a los choques de preferencias Z_t. Esto se debe a que el factor Z_t se cancela en la razón $-U_{n,t}/U_{c,t}$ al derivar la condición intratemporal (7). Por tanto:

- Z_t *no* altera la decisión óptima de cuánto trabajar dado un salario real en el período t (ecuación (9));
- en cambio, sí afecta las decisiones *intertemporales* de consumo y ahorro a través de la ecuación de Euler (ecuación (8)).

Desde el punto de vista didáctico, esto permite separar claramente: (i) la determinación del salario real y la oferta de trabajo dentro del período, y (ii) las decisiones de ahorro/consumo entre períodos, que son las que sí resultan sensibles a los choques de preferencias Z_t.

Interpretación gráfica de la ecuación (9)

Recordemos la forma log-lineal de la condición de oferta de trabajo:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t. \tag{9}$$

Para fijar ideas, conviene reescribirla como:

$$w_t - p_t = \underbrace{\sigma c_t}_{\text{término constante}} + \underbrace{\phi n_t}_{\text{pendiente por unidad de empleo}}. \tag{17}$$

Si fijamos el nivel de consumo c_t, la ecuación (17) describe una recta en el plano cuyo eje horizontal es el empleo n_t y cuyo eje vertical es el salario real $w_t - p_t$:

- La **pendiente** de la curva es ϕ.
- La **ordenada al origen** (intersección con el eje vertical) es σc_t.

En la Figura 4 se representa el salario real de equilibrio $w_t - p_t$ en función del empleo n_t, manteniendo fijo el nivel de consumo c_t. La curva es creciente: para que el hogar esté dispuesto a ofrecer más trabajo (mayor n_t), el mercado debe ofrecer un salario real más alto. Esta relación recoge el *efecto sustitución*: al subir el salario real, el ocio se vuelve más caro y el hogar decide trabajar más.

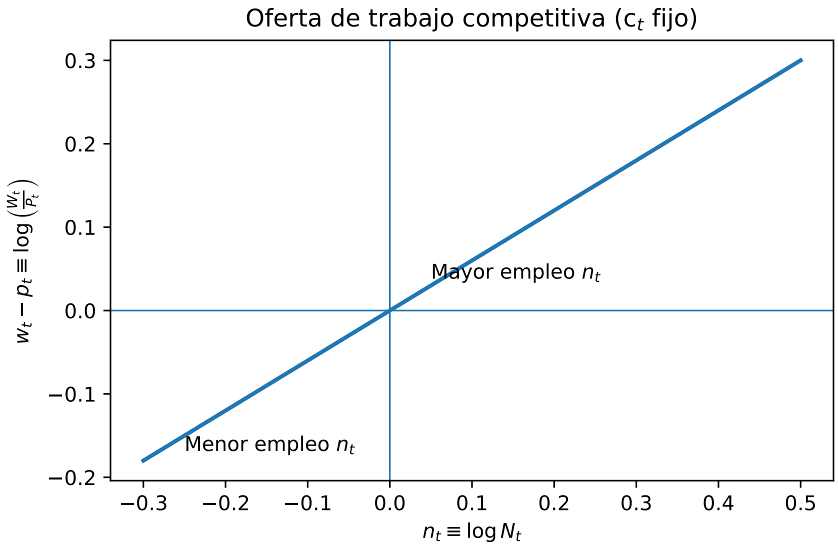

Figura 4: Oferta de trabajo competitiva: salario real vs. empleo, para un consumo dado c_t.

Desplazamientos por cambios en el consumo c_t

Si comparamos dos niveles de consumo, c_t^{bajo} y c_t^{alto}, con $c_t^{\text{alto}} > c_t^{\text{bajo}}$, la ecuación (9) implica:

$$(w_t - p_t)^{\text{alto}} = \sigma c_t^{\text{alto}} + \phi n_t, \qquad (w_t - p_t)^{\text{bajo}} = \sigma c_t^{\text{bajo}} + \phi n_t.$$

Como $\sigma > 0$, un mayor c_t desplaza la curva hacia arriba: para cualquier nivel dado de empleo n_t, el salario real compatible con la optimalidad intratemporal es más alto. Gráficamente:

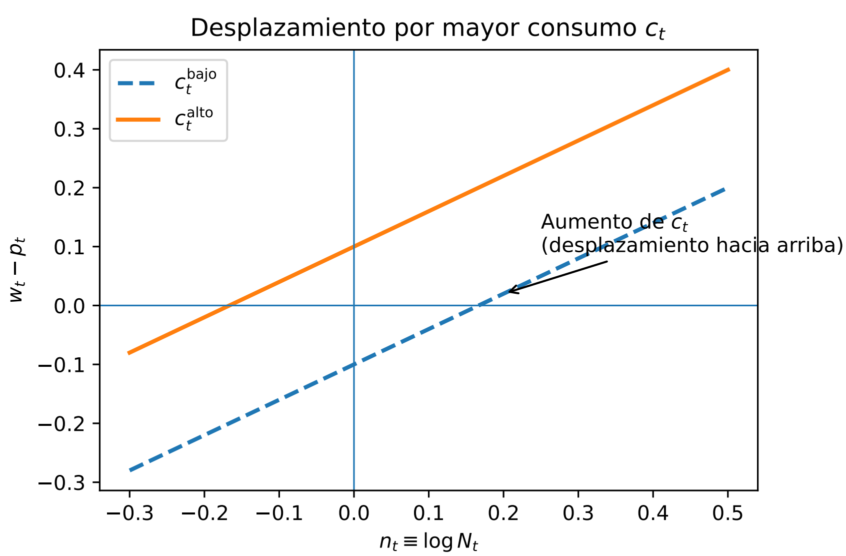

Figura 5: Desplazamiento de la oferta de trabajo ante un aumento en el consumo c_t.

En la Figura 5 se muestra cómo una curva de oferta de trabajo asociada a un bajo consumo c_t^{bajo} (línea inferior) se desplaza hacia arriba cuando el consumo aumenta a c_t^{alto} (línea superior). Económicamente:

- Si el hogar ya consume más (es "más rico"), necesita un salario real más alto para estar dispuesto a trabajar la misma cantidad de horas.
- Esto es precisamente el **efecto ingreso**: una mayor riqueza tiende a reducir la oferta de trabajo a un salario real dado.

El papel de ϕ: curvatura y elasticidad de la oferta de trabajo

El parámetro ϕ controla la sensibilidad de la oferta de trabajo al salario real. De (9), si mantenemos c_t fijo, podemos interpretar:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial(w_t - p_t)}{\partial n_t} = \phi.$$

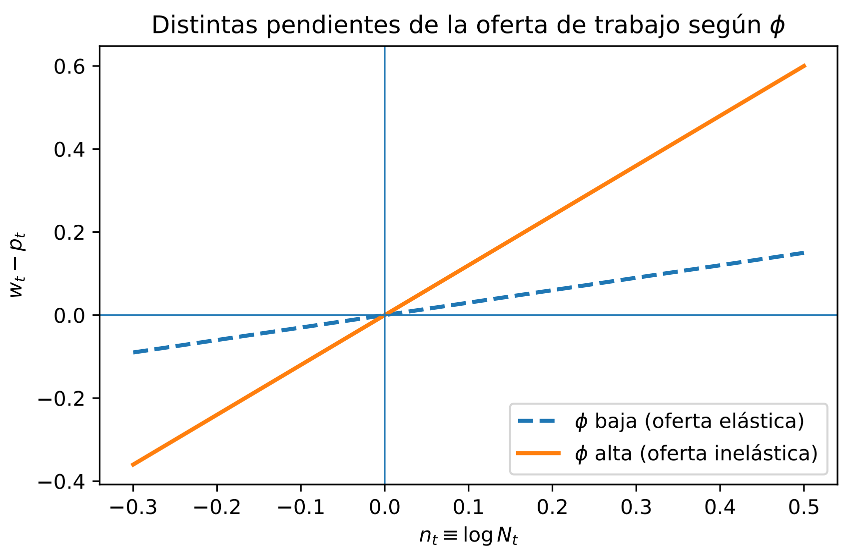

Figura 6: Curvas de oferta de trabajo con distinta pendiente ϕ.

En la Figura 6 se comparan dos curvas de oferta de trabajo que pasan por un mismo punto de referencia, pero con diferente valor de ϕ:

- Una curva con *baja* ϕ es más plana: pequeños cambios en el salario real generan cambios relativamente grandes en el empleo n_t. La oferta de trabajo es **más elástica**.
- Una curva con *alta* ϕ es más empinada: incluso cambios grandes en el salario real producen cambios modestos en n_t. La oferta de trabajo es **más inelástica**.

Dado que ϕ es el inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo, estas comparaciones gráficas ayudan a visualizar cómo la estructura de preferencias del hogar se traduce en distintas sensibilidades de la oferta de trabajo ante variaciones en el salario real.

Ecuación (10): Ecuación de Euler log-linealizada

Partimos de la ecuación de Euler específica:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \right\}, \tag{18}$$

y queremos obtener su versión log-lineal, que en el texto se reporta como:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t. \tag{10}$$

Notación log-lineal. Recordamos que las letras minúsculas denotan logaritmos:

$$c_t \equiv \log C_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad z_t \equiv \log Z_t.$$

La inflación es

$$\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t,$$

y la tasa de interés nominal se define a partir del precio del bono Q_t como

$$I_t \equiv \frac{1}{Q_t} \quad \Rightarrow \quad i_t \equiv \log I_t = -\log Q_t.$$

Además, definimos

$$\rho \equiv -\log\beta,$$

de modo que ρ es la "tasa de descuento" en términos logarítmicos.

Símbolo	Definición y papel económico
c_t	$\log C_t$. Consumo actual (en logaritmos).
$E_t\{c_{t+1}\}$	Consumo futuro esperado. Resume las expectativas del hogar sobre su senda de consumo.
i_t	Logaritmo de la tasa de interés nominal bruta: $i_t = -\log Q_t$. Es el costo de oportunidad de consumir hoy en lugar de ahorrar.
$E_t\{\pi_{t+1}\}$	Inflación esperada entre t y $t+1$, donde $\pi_{t+1} = p_{t+1} - p_t$. Mide la pérdida esperada de poder adquisitivo de los activos nominales.
ρ	$\rho = -\log\beta$. Captura la impaciencia del hogar: cuanto mayor es ρ, más valora el consumo presente respecto al futuro.
z_t	$\log Z_t$. Choque de preferencias ("shifter"), que modifica la utilidad marginal del consumo.
σ	Curvatura de la utilidad del consumo. Controla la aversión al riesgo y la elasticidad de sustitución intertemporal $(1/\sigma)$.
ρ_z	Parámetro de persistencia del proceso AR(1) de z_t: $z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t}$.

Desglose de términos en (10).

Derivación paso a paso

1. Reescribir la ecuación de Euler en términos logarítmicos. Partimos de (18) y usamos que

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \exp(c_{t+1} - c_t), \quad \frac{Z_{t+1}}{Z_t} = \exp(z_{t+1} - z_t), \quad \frac{P_t}{P_{t+1}} = \exp(-\pi_{t+1}).$$

Sustituyendo en (18):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

Definimos $i_t \equiv -\log Q_t$ y $\rho \equiv -\log \beta$. Entonces $\log Q_t = -i_t$ y $\log \beta = -\rho$, y podemos escribir

$$\exp(-i_t) = \exp(-\rho)\, E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

Multiplicando ambos lados por $\exp(\rho)$:

$$\exp(\rho - i_t) = E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

(Nota didáctica: aquí simplemente hemos pasado de una igualdad en términos de Q_t y β a una igualdad en términos de sus logaritmos i_t y ρ. Esto facilita la aproximación lineal posterior.)

2. Aproximación de primer orden (log-linealización). El siguiente paso consiste en aproximar la expresión anterior alrededor de un estado estacionario con inflación y crecimiento del consumo constantes. Para pequeñas desviaciones en torno a ese estado estacionario, usamos que

$$\exp(x) \approx 1 + x \quad \text{cuando } x \text{ es pequeño.}$$

La igualdad anterior se puede reescribir de forma esquemática como:

$$1 = E_t \left\{ \exp\bigl(i_t - \rho - \sigma(c_{t+1} - c_t) - \pi_{t+1} + (z_{t+1} - z_t)\bigr) \right\},$$

donde hemos reorganizado términos para que el lado izquierdo sea 1. Aplicando la aproximación de primer orden $\exp(x) \approx 1 + x$ y tomando desviaciones respecto al estado estacionario, obtenemos aproximadamente:

$$0 \;\approx\; E_t \left\{ i_t - \rho - \sigma(c_{t+1} - c_t) - \pi_{t+1} + (z_{t+1} - z_t) \right\}. \tag{19}$$

(Nota didáctica: la ecuación (19) dice que, en promedio, la combinación lineal de la tasa de interés, el crecimiento del consumo, la inflación y el choque de preferencias debe ser cercana a cero si el hogar está optimizando intertemporalmente.)

3. Reorganizar en términos de consumo. Tomando expectativas condicionales a la información en t, (19) se puede escribir como:

$$0 \approx i_t - \rho - \sigma\bigl(E_t\{c_{t+1}\} - c_t\bigr) - E_t\{\pi_{t+1}\} + E_t\{z_{t+1}\} - z_t.$$

Despejamos el término de consumo:

$$\sigma\bigl(E_t\{c_{t+1}\} - c_t\bigr) \approx i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho + E_t\{z_{t+1}\} - z_t,$$

$$E_t\{c_{t+1}\} - c_t \approx \frac{1}{\sigma} \left[i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho + E_t\{z_{t+1}\} - z_t \right].$$

4. Uso del proceso AR(1) para el choque de preferencias. Suponemos que el choque de preferencias z_t sigue un proceso AR(1):

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t},$$

de donde se obtiene

$$E_t\{z_{t+1}\} = \rho_z z_t \quad \Rightarrow \quad E_t\{z_{t+1}\} - z_t = (\rho_z - 1)z_t = -(1 - \rho_z)z_t.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$E_t\{c_{t+1}\} - c_t \approx \frac{1}{\sigma}\left[i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho - (1 - \rho_z)z_t\right].$$

Cambiamos de lado c_t y multiplicamos por -1:

$$c_t \approx E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t,$$

que es precisamente la ecuación (10), (10).

Interpretación económica de la ecuación (10)

Es útil reescribir (10) usando la tasa de interés real esperada:

$$r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}.$$

Entonces:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(r_t - \rho) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t. \tag{20}$$

- El término $r_t - \rho$ mide cuánto se desvía la tasa de interés real esperada r_t de la tasa de descuento del hogar ρ. Si r_t aumenta por encima de ρ, el término $-\frac{1}{\sigma}(r_t - \rho)$ es negativo: el hogar reduce el consumo actual c_t en relación con el consumo futuro esperado $E_t\{c_{t+1}\}$ para aprovechar el mayor rendimiento del ahorro. Esto es la **sustitución intertemporal del consumo**.

- El término $\frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t$ refleja el efecto del choque de preferencias. Si z_t aumenta (el hogar valora más el consumo actual) y $0 \leq \rho_z < 1$, el término es positivo: para que la condición de Euler vuelva a cumplirse, el consumo actual c_t debe aumentar, reduciendo así la utilidad marginal del consumo.

- El parámetro σ aparece en el denominador: cuanto mayor es σ (mayor aversión al riesgo y menor elasticidad de sustitución intertemporal), *menor* es la respuesta de c_t a un cambio dado en $(r_t - \rho)$ o en z_t. Es decir, las decisiones de consumo son menos sensibles a la tasa de interés real y a los choques de preferencias.

En resumen: la ecuación (10) muestra cómo el consumo actual se ajusta para equilibrar tres fuerzas: (i) las expectativas de consumo futuro, (ii) la comparación entre la tasa de interés real esperada y la tasa de descuento del hogar y (iii) los choques de preferencias que hacen más o menos atractivo consumir hoy.

Ecuación (11): demanda de saldos reales log-linealizada

En la versión del modelo donde la política monetaria se formula en términos de la oferta de dinero, es necesario introducir una ecuación de demanda de saldos reales. De forma log-lineal (ignorando una constante aditiva para no cargar la notación), Galí postula:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t. \tag{11}$$

Notación y símbolos. Recordamos que las letras minúsculas denotan logaritmos naturales de las variables correspondientes:

$$m_t \equiv \log M_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad c_t \equiv \log C_t, \quad i_t \equiv \log I_t,$$

donde M_t es la cantidad de dinero nominal, P_t el nivel de precios, C_t el consumo y I_t la tasa de interés nominal bruta.

Símbolo	Definición y papel económico
m_t	$\log M_t$. Logaritmo de la cantidad nominal de dinero.
p_t	$\log P_t$. Logaritmo del nivel de precios.
$m_t - p_t$	$\log(M_t/P_t)$. Saldos reales demandados: poder adquisitivo que los agentes mantienen en forma de dinero.
c_t	$\log C_t$. Logaritmo del consumo (escala de la actividad económica). Funciona como proxy de ingreso / volumen de transacciones.
i_t	Logaritmo de la tasa de interés nominal bruta. Representa el *costo de oportunidad* de mantener dinero en lugar de bonos.
η (eta)	*Semielasticidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés*, con $\eta \geq 0$. Mide cuán sensible es la demanda de saldos reales ante cambios en i_t.

De dónde sale la forma funcional

En esta sección del capítulo, la ecuación (11) se introduce de manera *reducida*: no se deriva explícitamente de un problema de optimización, sino que se postula como una relación empíricamente razonable entre saldos reales, nivel de actividad y tasa de interés.

Una forma estándar de partir es una función de demanda de dinero del tipo:

$$\frac{M_t}{P_t} = \Phi(C_t, i_t),$$

donde:

- Φ crece con el nivel de gasto/transacciones (C_t),
- Φ decrece con la tasa de interés nominal (i_t), que mide el rendimiento de los activos alternativos al dinero.

Si se asume una forma log-lineal simple:

$$\log\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \alpha + \psi\, c_t - \eta\, i_t, \tag{21}$$

con $\psi > 0$ y $\eta \geq 0$, entonces:

- el término ψc_t recoge el **motivo transacción**: más consumo $\Rightarrow$ más dinero demandado;
- el término $-\eta i_t$ recoge el **motivo de costo de oportunidad**: si sube i_t, mantener dinero es más caro $\Rightarrow$ menos saldos reales.

En el texto se simplifica esta expresión normalizando la pendiente respecto a c_t a la unidad ($\psi = 1$) y absorbiendo la constante α en el nivel estacionario de las variables. Con esa normalización, la ecuación (21) se reduce exactamente a:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t,$$

que es la ecuación (11).

Interpretación económica didáctica

La ecuación (11) puede leerse como:

$$\text{(saldos reales demandados)} = \text{(escala de la actividad)} - \text{(penalización por el costo de oportunidad del dine}$$

- **Efecto del consumo (c_t).** Si c_t aumenta (el hogar está consumiendo más, la economía está más activa), la demanda de saldos reales aumenta uno a uno:

  $$\frac{\partial(m_t - p_t)}{\partial c_t} = 1.$$

  Didácticamente: más compras $\Rightarrow$ hace falta más dinero en la cartera para efectuar esas transacciones.

- **Efecto de la tasa de interés nominal (i_t).** El término $-\eta i_t$ indica que, si sube i_t, los saldos reales demandados caen:

  $$\frac{\partial(m_t - p_t)}{\partial i_t} = -\eta < 0.$$

  Intuición: a mayor tasa de interés, más caro es "tener el dinero parado" en saldos líquidos en lugar de colocarlo en bonos que pagan interés. Entonces los hogares reducen su demanda de dinero.

- **El papel de η (eta).** Cuanto mayor es η, más sensible es la demanda de dinero al costo de oportunidad. Una η pequeña describe una demanda de dinero poco sensible a i_t (dinero casi "necesario" independientemente del interés); una η grande describe una demanda que responde mucho a los cambios en la tasa de interés.

Comentario sobre microfundamentos

Más adelante en el capítulo (cuando se introduce una función de utilidad que incluye explícitamente los saldos reales, o una restricción de tipo *cash-in-advance*), puede mostrarse que una ecuación de la forma (11) aparece como condición de primer orden del problema del hogar. Es decir, en una versión más rica del modelo, la demanda de dinero no es sólo una ecuación “ad hoc”, sino el resultado de maximizar utilidad sujeto a restricciones tecnológicas y financieras.

Para los fines de la parte básica del capítulo, sin embargo, basta trabajar con la versión reducida:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t,$$

que permite cerrar el modelo cuando la autoridad monetaria fija una senda para la oferta de dinero en lugar de fijar directamente la tasa de interés.

1. Conclusion