El modelo monatario clásico: desarrollo matemático del capítulo 2 de *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle*

Gabriel Tehozol

Noviembre de 2025

Hogares: definición del problema de optimización dinámica

En este apartado describimos qué hace el hogar en el modelo. La idea básica es:

- El hogar vive muchos periodos (t, t+1, t+2, ...).
- En cada periodo decide cuánto consumir (C_t) y cuánto trabajar (N_t).
- También puede ahorrar o endeudarse con bonos (B_t).
- Quiere que, en promedio, su "nivel de felicidad" (utilidad) a lo largo del tiempo sea lo más alto posible, pero está limitado por el dinero que tiene y el que puede conseguir.

A esto le llamamos un *problema de optimización dinámica*: el hogar toma decisiones hoy pensando en sus consecuencias mañana y en el futuro.

Ecuación (1): función objetivo (utilidad esperada descontada)

El objetivo del hogar se resume en la siguiente expresión:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t). \tag{1}$$

Esta ecuación se puede leer *de izquierda a derecha* como una frase:

"El hogar quiere maximizar el valor esperado, visto desde hoy, de la suma de su utilidad en cada periodo, ponderada por cuánto le importa el futuro."

Paso a paso.

1. $U(C_t, N_t; Z_t)$ es la **utilidad** del hogar en el periodo t. Depende de:
   - C_t: consumo del bien (comida, servicios, etc.).
   - N_t: horas de trabajo (más trabajo suele dar más ingreso, pero menos ocio).
   - Z_t: shock o desplazador de preferencias, que representa cambios en gustos, hábitos, etc.
2. La suma $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}$ indica que el hogar se preocupa por **todos** los periodos: $t = 0, 1, 2, \ldots$.
3. El factor β^t, donde $0 < \beta < 1$, *descuenta* la importancia de la utilidad de cada periodo. Cuanto mayor es t, menor es el peso β^t.
   - Si β es cercano a 1, el hogar es paciente (le importa mucho el futuro).
   - Si β es pequeño, el hogar es impaciente (valora más el presente).
4. $E_0[\cdot]$ es el **operador de expectativas**. Simplemente significa: "el valor promedio que el hogar espera hoy ($t = 0$) que tendrá esa suma, tomando en cuenta que el futuro es incierto".

Supuestos básicos sobre la utilidad. Para que el problema tenga sentido económico, se imponen algunos supuestos estándar sobre $U(C_t, N_t; Z_t)$:

- La utilidad aumenta con el consumo:
  $$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t} > 0,$$
  y la utilidad marginal del consumo es decreciente:
  $$U_{cc,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2} \leq 0.$$
  Es decir, consumir más siempre gusta, pero cada unidad extra aporta un poco menos que la anterior.
- El trabajo genera desutilidad:
  $$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial N_t} \leq 0,$$
  de modo que $-U_{n,t} > 0$ es la *desutilidad marginal del trabajo* (trabajar más cansa).
- El shock Z_t desplaza las preferencias. Supondremos que un aumento en Z_t eleva la utilidad marginal del consumo:
  $$U_{cz,t} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial C_t \, \partial Z_t} > 0.$$

La ecuación (1) dice: el hogar quiere elegir sus secuencias de C_t y N_t para que, en promedio, la suma de sus felicidades presentes y futuras sea lo más alta posible.

Ecuación (2): restricción presupuestaria de flujo

El hogar no puede elegir cualquier combinación de consumo y trabajo: cada periodo está limitado por sus ingresos y por lo que puede ahorrar o endeudarse. Esta idea se resume en la **restricción de flujo**:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t. \tag{2}$$

Podemos leer esta ecuación como:

"Uso de recursos en el periodo $t \leq$ Fuentes de recursos en el periodo t."

Lado izquierdo: usos (en qué se gasta).

- $P_t C_t$: gasto en consumo. P_t es el precio nominal del bien; C_t es la cantidad consumida.
- $Q_t B_t$: gasto en compra de bonos. Q_t es el precio hoy de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$; B_t es el número de bonos que compra el hogar.

Lado derecho: fuentes (de dónde vienen los recursos).

- B_{t-1}: bonos que se compraron en $t-1$ y pagan hoy (ingreso financiero).
- $W_t N_t$: ingreso laboral (salario nominal W_t por horas trabajadas N_t).
- D_t: dividendos que el hogar recibe como dueño de las empresas.

En equilibrio competitivo es natural que la desigualdad se cumpla con igualdad (el hogar no deja dinero sin usar), es decir:

$$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

Cada periodo, lo que el hogar gasta en consumo y bonos no puede superar lo que entra por salario, dividendos y bonos que vencen.

Ecuación (3): restricción de solvencia (no-Ponzi)

Hasta ahora, la restricción de flujo controla qué pasa *dentro* de cada periodo. Pero como el horizonte es infinito, en principio el hogar podría intentar endeudarse cada vez más, sin pagar nunca. Para evitar ese tipo de planes no realistas, se impone una **restricción de solvencia** o **restricción de no-Ponzi**:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

¿Qué significa esta condición?

- B_T/P_T es la *riqueza real en bonos* en el periodo T.
- $\Xi_{t,T}$ es un **factor de descuento estocástico**, definido como:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t}\frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}.$$

  Este factor combina:

  - el descuento puro del tiempo (β^{T-t}),
  - y el cambio en la utilidad marginal del consumo ($U_{c,T}/U_{c,t}$).

La expresión $E_t\{\Xi_{t,T}B_T/P_T\}$ se puede interpretar como el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos en el horizonte T, medido desde el punto de vista del periodo t.

La condición

$$\lim_{T\to\infty} E_t\left\{\Xi_{t,T}\frac{B_T}{P_T}\right\} \geq 0$$

dice que, en el límite, ese valor presente esperado no puede ser negativo. Intuitivamente:

"El hogar no puede sostener un esquema en el que su deuda crezca tanto que, incluso descontada, termine siendo impagable."

La ecuación (3) evita el endeudamiento explosivo. Es una condición técnica, pero muy importante, para que el problema infinito esté bien definido.

Ecuación (4): condición de optimalidad intratemporal

Ahora sí, pasamos a una de las **condiciones de primer orden** más importantes: la que relaciona consumo, trabajo y salarios *dentro* de un mismo periodo. Esta condición se escribe como:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}. \tag{4}$$

Esta ecuación se llama:

- **Condición de optimalidad intratemporal**, porque compara decisiones dentro del periodo t.
- **Condición de oferta de trabajo**, porque nos dice cómo el hogar decide cuántas horas trabajar dado el salario real.

Interpretación de los términos.

- $U_{c,t}$: utilidad marginal del consumo (cuánto aumenta la utilidad si el hogar consume un poco más).
- $U_{n,t}$: utilidad marginal del trabajo (cuánto cambia la utilidad si el hogar trabaja un poco más). Suele ser negativa: trabajar cansa.
- $-U_{n,t}/U_{c,t}$: **tasa marginal de sustitución** (TMS) entre ocio y consumo. Dice cuántas unidades extra de consumo necesita el hogar para aceptar trabajar una unidad extra.
- W_t/P_t: **salario real**, es decir, cuántas unidades de bien de consumo recibe el hogar por cada unidad de trabajo.

La ecuación (4) dice:

"El hogar elige sus horas de trabajo de modo que su TMS subjetiva entre ocio y consumo sea igual al salario real que ofrece el mercado."

Derivación paso a paso (argumento variacional). La idea es imaginar un pequeño cambio en las decisiones del hogar en el periodo t, y pedir que ese cambio *no mejore* la situación si ya estamos en el óptimo.

1. **Paso 1: pequeña desviación en consumo y trabajo.** Partimos de un plan óptimo (C_t, N_t) y consideramos una pequeña desviación (dC_t, dN_t) en el periodo t, manteniendo todo lo demás igual.

   El cambio en la utilidad instantánea es:

   $$dU_t = U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t.$$

   Si el plan es óptimo, cualquier desviación que respete el presupuesto no puede mejorar la utilidad. En el margen, esto implica que el cambio en utilidad asociado a una desviación factible debe ser cero:

   $$U_{c,t}\, dC_t + U_{n,t}\, dN_t = 0. \tag{1}$$

2. **Paso 2: pequeña desviación en la restricción de flujo.** Ahora miramos cómo se ve esa misma desviación en la restricción presupuestaria del periodo t:

   $$P_t C_t + Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t + D_t.$$

   Si mantenemos fijo B_t (no tocamos el ahorro) y sólo cambiamos C_t y N_t, la variación de esta igualdad es:

   $$P_t\, dC_t = W_t\, dN_t. \tag{2}$$

   Es decir, el gasto adicional en consumo tiene que ser financiado por un ingreso adicional de trabajo.

3. **Paso 3: expresar dC_t en función de dN_t.** De (2) despejamos:

$$dC_t = \frac{W_t}{P_t} dN_t. \tag{3}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.** Sustituimos (3) en (1):

$$U_{c,t} \left(\frac{W_t}{P_t} dN_t \right) + U_{n,t} dN_t = 0.$$

   Factorizamos dN_t:

$$\left[U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} \right] dN_t = 0.$$

   Como dN_t representa una desviación arbitraria (pequeña pero no necesariamente cero), para que el producto sea cero, el término entre corchetes debe ser:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} + U_{n,t} = 0.$$

5. **Paso 5: aislar la TMS.** Reordenando:

$$U_{c,t} \frac{W_t}{P_t} = -U_{n,t},$$

   y dividiendo entre $U_{c,t} > 0$:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t},$$

   que es exactamente la ecuación (4).

Entonces tenemos...

- La variación en la utilidad nos dice cómo cambian las preferencias del hogar ante pequeños ajustes en C_t y N_t.
- La variación en el presupuesto nos dice qué combinaciones de dC_t y dN_t son factibles (se pueden pagar).
- Al combinar ambas y exigir que no haya manera de mejorar la utilidad con una desviación factible, obtenemos la condición de primer orden.
- El resultado final iguala:
  - el *costo subjetivo* de trabajar más (perder ocio),
  - con el *beneficio objetivo* de mercado (el salario real).

Ecuación (5): condición de optimalidad intertemporal (Ecuación de Euler)

Además de decidir cuánto trabajar dentro de cada periodo (condición intratemporal), el hogar debe decidir *cuánto consumir hoy y cuánto dejar para consumir mañana*. Esta decisión se resume en la **condición de optimalidad intertemporal** o **Ecuación de Euler**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{5}$$

Lectura intuitiva. La ecuación (5) se puede leer como:

"El precio del bono hoy (Q_t) debe ser igual al valor presente esperado de la tasa a la que el hogar está dispuesto a intercambiar consumo de hoy por consumo de mañana, medido en unidades de bien de consumo y multiplicado por el factor de descuento β."

Donde:

- Q_t es el **precio del bono** nominal libre de riesgo.
- $\dfrac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}}$ mide cómo cambia la utilidad marginal del consumo entre t y $t+1$.
- $\dfrac{P_t}{P_{t+1}}$ ajusta por la inflación esperada (pasa de unidades nominales a reales y viceversa).
- β descuenta el futuro (impaciencia).

Desglose de los términos de (5).

- **Precio del bono:** Q_t es el precio en t de un bono que paga 1 unidad de dinero en $t+1$. El rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- **Utilidad marginal del consumo:** $U_{c,t} \equiv \partial U(C_t, N_t; Z_t)/\partial C_t$ es la utilidad marginal en el periodo t. La razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$ captura cómo el hogar valora una unidad extra de consumo mañana en comparación con hoy.
- **Relación de precios:** P_t/P_{t+1} es el inverso de la inflación bruta esperada entre t y $t+1$. Si los precios suben mucho, una misma cantidad de dinero rinde menos en términos de consumo futuro.
- **Operador de expectativas:** $E_t\{\cdot\}$ promedia sobre todos los escenarios posibles del futuro, dados los shocks, usando la información que el hogar tiene en t.

Derivación paso a paso La ecuación (5) se obtiene al analizar una pequeña reubicación de consumo entre los periodos t y $t+1$. La idea es:

> *"¿Qué pasa si reduzco mi consumo hoy y uso ese ahorro para aumentar mi consumo mañana, sin violar el presupuesto? En el óptimo, ese cambio no debe mejorar mi utilidad esperada."*

1. **Paso 1: variación en la utilidad intertemporal.**

   Consideremos un plan óptimo y una pequeña desviación (dC_t, dC_{t+1}) que sólo afecta al consumo en t y $t+1$. El cambio en la utilidad total (medida en t y descontando el futuro) es aproximadamente:

   $$U_{c,t}\, dC_t + \beta E_t\{U_{c,t+1}\, dC_{t+1}\} = 0. \tag{A}$$

   Explicación de cada término:

   - $U_{c,t} dC_t$: cambio en la utilidad del *periodo actual.*
   - $\beta E_t\{U_{c,t+1} dC_{t+1}\}$: cambio esperado en la utilidad del periodo siguiente, descontado a valor presente con β.

   En un óptimo, cualquier desviación factible en la que sólo movemos consumo entre t y $t+1$ no debe aumentar la utilidad, por lo que el cambio marginal debe ser cero.

2. **Paso 2: variación en el presupuesto intertemporal.**

   Ahora vemos cómo se traduce esa misma desviación en la restricción presupuestaria. La idea es:

   - Si reducimos el consumo hoy en una cantidad $dC_t < 0$, liberamos recursos por un monto nominal $P_t dC_t$.
   - Esos recursos se usan para comprar más bonos: el número adicional de bonos es

     $$dB_t = -\frac{P_t}{Q_t}\, dC_t,$$

     porque cada bono cuesta Q_t unidades de dinero.
   - Mañana, esos bonos pagan 1 unidad de dinero cada uno, de modo que el ingreso adicional nominal en $t+1$ es $(1) \cdot dB_t$.

   El cambio en la restricción de flujo en $t+1$ implica que ese ingreso adicional se destina a mayor consumo dC_{t+1}:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = dB_t = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t.$$

   Es decir:

   $$P_{t+1} dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t} dC_t. \tag{B}$$

3. **Paso 3: expresar dC_{t+1} en función de dC_t.**

   De (B) despejamos:
$$dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t. \tag{C}$$

4. **Paso 4: sustituir en la variación de utilidad.**

   Sustituimos (C) en (A):
$$U_{c,t} dC_t + \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \left(-\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t \right) \right\} = 0.$$

   Factorizamos dC_t:
$$\left[U_{c,t} - \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\} \right] dC_t = 0.$$

   Como dC_t representa una desviación arbitraria (pequeña, pero distinta de cero), el término entre corchetes debe ser nulo:
$$U_{c,t} = \beta E_t \left\{ U_{c,t+1} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} \right\}. \tag{4}$$

5. **Paso 5: aislar Q_t y obtener la Ecuación de Euler.**

   De (4), multiplicamos ambos lados por $Q_t/U_{c,t}$:
$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

   que es exactamente la ecuación (5).

Entonces tenemos...

- El hogar compara el "costo" de sacrificar consumo hoy con el "beneficio" de tener más consumo mañana.
- El costo se mide por la utilidad marginal actual $U_{c,t}$.
- El beneficio se mide por la utilidad marginal futura $U_{c,t+1}$, ajustada por:
  - el factor de descuento β,
  - la inflación esperada P_t/P_{t+1},
  - y el precio del bono Q_t.
- En el óptimo, no hay reubicación de consumo (entre hoy y mañana) que pueda mejorar la utilidad: eso es lo que recoge la Ecuación de Euler.

Ecuación (6): condición de transversalidad

La última pieza de las condiciones de optimalidad del hogar es la llamada **condición de transversalidad**. Esta condición está estrechamente ligada a la restricción de solvencia (3), pero ahora se impone como *igualdad* en el óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0. \tag{6}$$

Recordemos que:

$$\Xi_{t,T} \equiv \beta^{T-t} \frac{U_{c,T}}{U_{c,t}}$$

es el **factor de descuento estocástico** que mide cuánto vale, en términos de utilidad marginal en t, una unidad de consumo (o riqueza real) en T.

Relación con la restricción de solvencia. La restricción de solvencia (3) decía:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} \geq 0. \tag{3}$$

Es decir:

- En el límite, el *valor presente esperado* de la riqueza real en bonos no puede ser negativo.
- Esto impide que el hogar aplique esquemas de endeudamiento tipo Ponzi.

La **condición de transversalidad** (6) dice algo más fuerte:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0.$$

¿Por qué debe valer la igualdad en el óptimo?. Supongamos, para ver el argumento, que en el óptimo se cumpliera:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = L > 0.$$

- Entonces, incluso después de descontar por β^{T-t} y por el cociente $U_{c,T}/U_{c,t}$, el hogar estaría *dejando* una cantidad positiva de riqueza real en el infinito.
- Dado que la utilidad marginal del consumo es positiva ($U_{c,t} > 0$ para todo t), el hogar podría mejorar su plan: reducir ligeramente B_T (o, en la práctica, consumir un poco más en algún periodo finito) sin violar la restricción de solvencia, usando parte de ese "excedente" L.
- Al hacer esto, aumentaría su consumo en algún periodo sin disminuir el consumo en otros lo suficiente como para compensar, por lo que la utilidad total aumentaría.

Pero esto contradice la suposición de que el plan original era óptimo. Por tanto, en un óptimo:

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left\{ \Xi_{t,T} \frac{B_T}{P_T} \right\} = 0,$$

que es precisamente la ecuación (6).

En términos económicos...

- La ecuación (3) asegura que la deuda no crece de manera explosiva.
- La ecuación (6) asegura que el hogar *no deja recursos sin usar* en el límite: toda la riqueza potencial que pueda aumentar la utilidad se habrá utilizado en algún momento.
- En muchas aplicaciones, con un hogar representativo y oferta neta de deuda cero, se cumple en equilibrio que $B_t = 0$ para todo t, lo que hace que (6) sea automáticamente cierta. Aun así, es importante tenerla explícitamente como parte de las condiciones de optimalidad.

Con las ecuaciones (4), (5) y (6) tenemos ahora el conjunto completo de **condiciones de optimalidad del hogar**:

- (4): condición intratemporal (oferta de trabajo).
- (5): condición intertemporal (Ecuación de Euler para consumo/ahorro).
- (6): condición de transversalidad (uso eficiente de la riqueza en el tiempo).

En el siguiente paso, estas condiciones se combinarán con el comportamiento de las empresas y las identidades de equilibrio para construir el modelo macroeconómico completo.

Ecuación (7): especificación funcional de la utilidad y oferta de trabajo competitiva

En esta sección, seguimos el capítulo y adoptamos una **forma funcional particular** para la utilidad periódica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

donde $\sigma \geq 0$ y $\phi \geq 0$ son parámetros.

Parámetros: Para mayor claridad, presentamos los parámetros que aparecen en la ecuación (11):

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. En esta clase de modelos suele interpretarse como:
  - medida de **aversión relativa al riesgo** del hogar, y
  - (en muchas especificaciones) inverso de la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.

  Valores más altos de σ implican que la utilidad marginal del consumo cae más rápido cuando aumenta C_t.

- ϕ (*phi*): parámetro de curvatura de la desutilidad del trabajo. Controla qué tan rápido aumenta la desutilidad marginal de trabajar más horas. Suele interpretarse como el **inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo**: valores altos de ϕ indican que la oferta de trabajo es menos sensible a cambios en el salario real.

Nuestro objetivo ahora es: (1) calcular $U_{c,t}$ y $U_{n,t}$ a partir de (11), y (2) sustituirlos en (4) para obtener la versión *específica* de la oferta de trabajo, la **Ecuación (7)**.

Paso 1: utilidad marginal del consumo $U_{c,t}$. Partimos de:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos la derivada parcial respecto a C_t:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial C_t} = \frac{\partial}{\partial C_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{5}$$

Como Z_t está multiplicando todo, podemos sacarlo como constante:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El segundo término no depende de C_t, así que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{c,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right).$$

Ahora derivamos usando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) = \frac{1}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) C_t^{(1-\sigma)-1} = C_t^{-\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t. \tag{6}$$

Tenemos...

- Si $\sigma > 0$, entonces $U_{c,t} > 0$ y decrece cuando C_t aumenta (porque $C_t^{-\sigma}$ disminuye con C_t). Esto refleja la idea de *utilidad marginal decreciente del consumo*.

- El factor Z_t amplifica o reduce la utilidad marginal del consumo según el estado de las preferencias.

Paso 2: utilidad marginal del trabajo $U_{n,t}$. Volvemos a la función de utilidad:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t.$$

Tomamos ahora la derivada parcial respecto a N_t:

$$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial N_t} = \frac{\partial}{\partial N_t} \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \right]. \tag{7}$$

De nuevo, sacamos Z_t como constante:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

El primer término no depende de N_t, por lo que su derivada es cero. Nos queda:

$$U_{n,t} = Z_t \frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial N_t} \left(-\frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) = -\frac{1}{1+\phi}(1+\phi) N_t^{(1+\phi)-1} = -N_t^{\phi}.$$

Por lo tanto,

$$U_{n,t} = -N_t^{\phi} Z_t. \tag{8}$$

Tenmos...

- Para $N_t > 0$ y $Z_t > 0$, se cumple $U_{n,t} < 0$: trabajar más *reduce* la utilidad (desutilidad del esfuerzo).
- El término $-U_{n,t} = N_t^{\phi} Z_t$ es la *desutilidad marginal del trabajo*, creciente en N_t si $\phi > 0$.

Paso 3: sustitución en la condición intratemporal (4). La condición general de optimalidad intratemporal es:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}.$$

Sustituimos las expresiones obtenidas:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = -\frac{-N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t} = \frac{N_t^{\phi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t}.$$

Observamos que Z_t aparece como factor multiplicando tanto en el numerador como en el denominador, por lo que se cancela:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}}.$$

Usando que $1/C_t^{-\sigma} = C_t^{\sigma}$, obtenemos:

$$\frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = N_t^{\phi} C_t^{\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{9}$$

Igualando esto al salario real, según (4), llegamos a:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}, \tag{7}$$

que es la **Ecuación (7)**.

Interpretación económica de la Ecuación (7). La ecuación

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$$

puede leerse como:

"El salario real debe igualar el costo subjetivo marginal de trabajar una unidad adicional, medido en unidades de consumo, dado el nivel de consumo C_t y trabajo N_t."

Más concretamente:

- Si N_t aumenta (el hogar trabaja más), el término N_t^{ϕ} aumenta (para $\phi > 0$), por lo que el lado derecho crece. **Es decir:** para convencer al hogar de trabajar más, el salario real W_t/P_t debe ser mayor.
- Si C_t aumenta, el término C_t^{σ} también aumenta (para $\sigma > 0$). Esto refleja que, cuando el hogar ya consume mucho, la utilidad marginal del consumo es baja; por tanto, el hogar necesita un salario real más alto para renunciar a ocio (seguir trabajando) y mantener el equilibrio óptimo. Esto está relacionado con el *efecto ingreso* sobre la oferta de trabajo.
- El producto $C_t^{\sigma} N_t^{\phi}$ es, en este contexto, la **tasa marginal de sustitución** entre ocio y consumo bajo la forma funcional elegida.

Separabilidad y el papel de Z_t. Un detalle importante del resultado es que Z_t *desaparece* de la condición intratemporal:

- El choque de preferencias Z_t multiplica toda la utilidad, por lo que aparece tanto en $U_{c,t}$ como en $U_{n,t}$, y se cancela en el cociente $-U_{n,t}/U_{c,t}$.
- Esto implica que la **oferta de trabajo intratemporal** (ecuación 7) no se ve afectada directamente por Z_t.
- En cambio, Z_t sí influye en las decisiones *intertemporales* a través de la Ecuación de Euler (5), donde entra la razón $U_{c,t+1}/U_{c,t}$.

La Ecuación (7) es la versión concreta, para la utilidad (11), de la condición de optimalidad intratemporal del hogar. Representa la **curva de oferta de trabajo competitiva**: para cada nivel de consumo C_t, indica qué combinación de salario real W_t/P_t y horas trabajadas N_t es consistente con el óptimo del hogar.

Ecuación (8): Ecuación de Euler intertemporal específica

En la sección anterior obtuvimos la *Ecuación de Euler general* para el consumo y el ahorro del hogar:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}, \tag{5}$$

donde $U_{c,t}$ es la utilidad marginal del consumo en el periodo t.

Ahora queremos ver *cómo se ve* esta condición cuando usamos la función de utilidad específica:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t, \qquad \sigma \neq 1, \tag{11}$$

que introdujimos al derivar la ecuación (7).

Parámetros relevantes En esta ecuación de Euler aparecen de nuevo dos parámetros importantes:

- σ (*sigma*): parámetro de curvatura de la utilidad del consumo. Como ya se discutió, se interpreta habitualmente como una medida de **aversión relativa al riesgo** y está estrechamente relacionada con la **elasticidad intertemporal de sustitución del consumo**.
- β (*beta*): **factor de descuento intertemporal** del hogar, con $0 < \beta < 1$. Controla qué tanto valora el hogar la utilidad futura respecto a la presente; valores altos de β indican mayor paciencia.

Nuestro objetivo es expresar la ecuación (5) en términos de tasas de crecimiento de consumo y del factor de preferencias Z_t.

Paso 1: utilidades marginales del consumo. De la derivación previa (sección de la ecuación 7), recordamos que:

$$U_{c,t} = C_t^{-\sigma} Z_t, \qquad U_{c,t+1} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Estas expresiones provienen de derivar (11) respecto a C_t y C_{t+1}:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U(C_t, N_t; Z_t)}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} Z_t,$$
$$U_{c,t+1} \equiv \frac{\partial U(C_{t+1}, N_{t+1}; Z_{t+1})}{\partial C_{t+1}} = C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}.$$

Paso 2: razón de utilidades marginales $U_{c,t+1}/U_{c,t}$. Formamos la razón que aparece en la Ecuación de Euler:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \frac{C_{t+1}^{-\sigma} Z_{t+1}}{C_t^{-\sigma} Z_t}. \tag{10}$$

Agrupamos términos de consumo y de preferencias por separado:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}}\right)\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right).$$

En el primer cociente aplicamos la propiedad de potencias:

$$\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right). \tag{11}$$

Podemos leer...

- El término $(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ recoge cómo el crecimiento del consumo afecta la utilidad marginal relativa entre t y $t+1$.
- El término Z_{t+1}/Z_t refleja cómo cambian las preferencias (el "peso" que el hogar asigna a la utilidad del consumo) entre ambos periodos.

Paso 3: sustitución en la Ecuación de Euler general. Tomamos la Ecuación de Euler:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\},$$

y sustituimos la expresión de (11):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}.$$

Esto nos da la **Ecuación (8)**:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \right\}. \tag{8}$$

Interpretación de la Ecuación (8). La ecuación (8) es la versión *específica* de la condición de Euler del hogar bajo la utilidad (11). Podemos leerla así:

"El precio del bono hoy (Q_t) es igual al valor esperado, descontado, de lo que vale una unidad de consumo futuro en términos de utilidad marginal de hoy, ajustado por inflación y por cambios en preferencias."

Más en detalle:

- Q_t: precio actual de una promesa de 1 unidad de dinero en $t+1$. Como antes, el rendimiento nominal bruto del bono es $R_t^n = 1/Q_t$.
- β: factor de descuento (*beta*). Captura la impaciencia pura del hogar: cuanto menor es β, más "caro" le resulta postergar consumo.
- $\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}$: este término recoge la **sustitución intertemporal del consumo**.
  - Si se espera que C_{t+1} sea bajo respecto a C_t, la utilidad marginal futura será alta, y el hogar valora mucho poder aumentar C_{t+1}: esto tiende a elevar el valor del bono (sube Q_t).
  - El parámetro σ (*sigma*) gobierna qué tan sensible es esta valoración a cambios en la tasa de crecimiento del consumo.
- $\frac{Z_{t+1}}{Z_t}$: refleja la **tasa de crecimiento del factor de preferencias**.
  - Si Z_{t+1}/Z_t es grande, el consumo futuro "pesa más" en la función de utilidad; el hogar está dispuesto a pagar más hoy por una unidad de consumo mañana (aumenta Q_t).
  - Dicho de otra forma, Z_t actúa como un *choque al factor de descuento efectivo.*
- $\frac{P_t}{P_{t+1}}$: es el **inverso de la inflación bruta esperada**. Si se espera alta inflación, una unidad nominal de mañana vale menos en términos de consumo, lo que tiende a reducir Q_t (para un mismo nivel de utilidad marginal futura).

Tenemos...

La Ecuación (8) combina tres elementos fundamentales:

1. **Tiempo e impaciencia** (β): preferencia por el presente.
2. **Riesgo y crecimiento del consumo** ($(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ y σ): cómo valora el hogar el consumo en estados futuros donde C_{t+1} puede ser alto o bajo.
3. **Choques de preferencias e inflación** (Z_{t+1}/Z_t y P_t/P_{t+1}): cómo cambian la "importancia" del consumo futuro y el poder adquisitivo de los pagos nominales.

En conjunto, estos factores determinan el *precio justo* del bono Q_t en equilibrio.

Nota: Reescritura y descomposición de la ecuación (8)

Partimos de la condición de optimalidad intertemporal específica:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right\}. \tag{8}$$

Para fijar ideas, consideremos primero el caso sin incertidumbre (o el valor esperado como "escenario central"), de modo que el operador de expectativas puede omitirse. Definimos las tasas brutas de crecimiento

$$g_c \equiv \frac{C_{t+1}}{C_t}, \qquad g_z \equiv \frac{Z_{t+1}}{Z_t},$$

y escribimos la razón de precios en función de la inflación esperada π^e_{t+1}:

$$\frac{P_t}{P_{t+1}} = \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}.$$

Con estas definiciones, la ecuación (8) se puede reescribir como

$$Q_t = \beta \, g_c^{-\sigma} \, g_z \, \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}. \tag{12}$$

Esta expresión hace explícito que el precio del bono nominal de un período Q_t es el producto de cuatro componentes:

1. β: *impaciencia pura* del hogar.

2. $g_c^{-\sigma}$: componente de *sustitución intertemporal del consumo*, que recoge cómo el crecimiento esperado del consumo afecta la utilidad marginal futura.

3. g_z: componente asociado al *factor de preferencias* Z_t, que actúa como un shock al factor de descuento efectivo.

4. $\dfrac{1}{1+\pi^e_{t+1}}$: componente que recoge el *castigo por inflación esperada*, al corregir la pérdida de poder adquisitivo del bono nominal.

Tomando logaritmos naturales en (12), obtenemos una descomposición aditiva particularmente útil:

$$\ln Q_t = \ln \beta - \sigma \ln g_c + \ln g_z - \ln(1+\pi^e_{t+1}). \tag{13}$$

La ecuación (13) muestra cómo cada componente (crecimiento esperado del consumo, evolución del factor de preferencias y inflación esperada) contribuye (con signo y magnitud) al nivel de Q_t, y por tanto, de la tasa de interés nominal bruta $1 + i_t = 1/Q_t$.

Interpretación gráfica de la ecuación (8)

La expresión

$$Q_t \;=\; \beta\, g_c^{-\sigma}\, g_z\, \frac{1}{1+\pi^e_{t+1}}, \qquad g_c \equiv \frac{C_{t+1}}{C_t}, \quad g_z \equiv \frac{Z_{t+1}}{Z_t}, \tag{8 revisada}$$

muestra que el precio del bono nominal de un período Q_t depende de tres bloques económicos: (i) el crecimiento esperado del consumo g_c (sustitución intertemporal), (ii) la evolución del factor de preferencias g_z y (iii) la inflación esperada π^e_{t+1} que entra vía $P_t/P_{t+1} = 1/(1+\pi^e_{t+1})$. Las figuras siguientes ilustran cómo cambia Q_t cuando variamos cada uno de estos componentes, manteniendo constantes los demás.

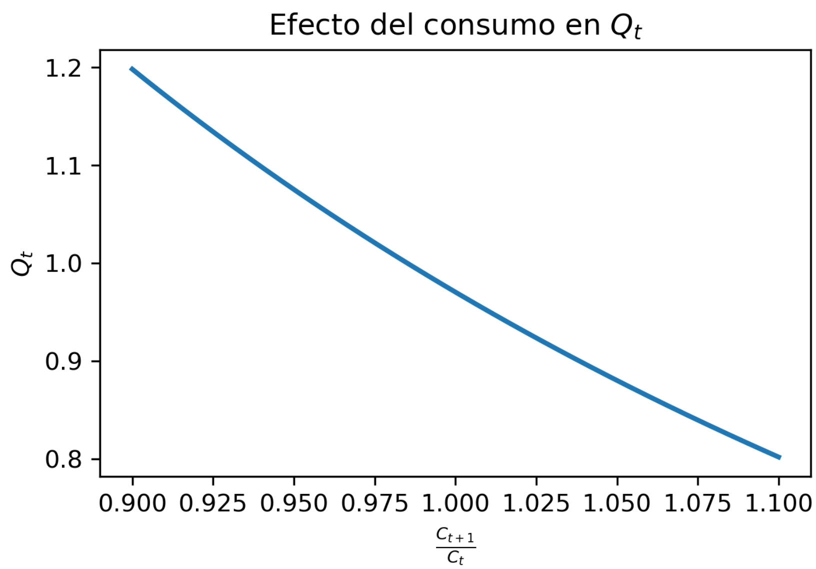

Figura 1: Efecto del crecimiento esperado del consumo $g_c = C_{t+1}/C_t$ sobre Q_t.

En la Figura 1 se representa Q_t como función del crecimiento esperado del consumo g_c. Dado que $Q_t \propto g_c^{-\sigma}$, la curva es decreciente: cuanto mayor es el crecimiento esperado del consumo ($g_c \uparrow$), menor es Q_t. Económicamente, si el hogar espera ser más "rico" mañana (mayor consumo futuro), la utilidad marginal futura es más baja y, por tanto, está dispuesto a pagar menos por una unidad de consumo futuro: el bono se vende más barato (Q_t cae) y la tasa de interés nominal $1 + i_t = 1/Q_t$ aumenta.
[1]

[1]El símbolo $\propto$ denota *proporcionalidad*. El precio del bono Q_t es *proporcional* a g_z elevado a la potencia menos sigma.

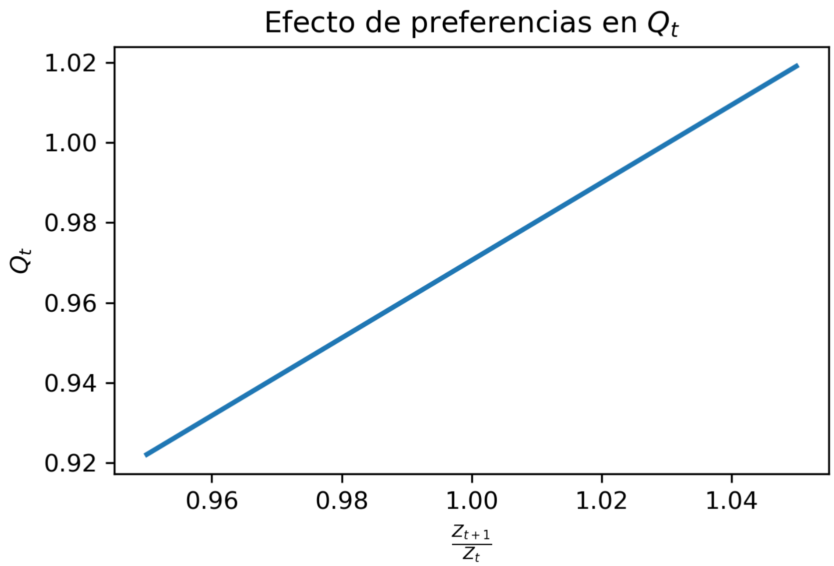

Figura 2: Efecto del factor de preferencias $g_z = Z_{t+1}/Z_t$ sobre Q_t.

La Figura 2 muestra el efecto del factor de preferencias g_z. Como $Q_t \propto g_z$, la relación es creciente: un aumento de Z_{t+1} en relación con Z_t desplaza al alza Q_t. En términos económicos, un incremento en g_z puede interpretarse como un shock que eleva la valoración relativa del consumo futuro; el hogar se vuelve más paciente y está dispuesto a pagar más por el bono hoy. En consecuencia, el precio del bono sube y la tasa de interés nominal cae.

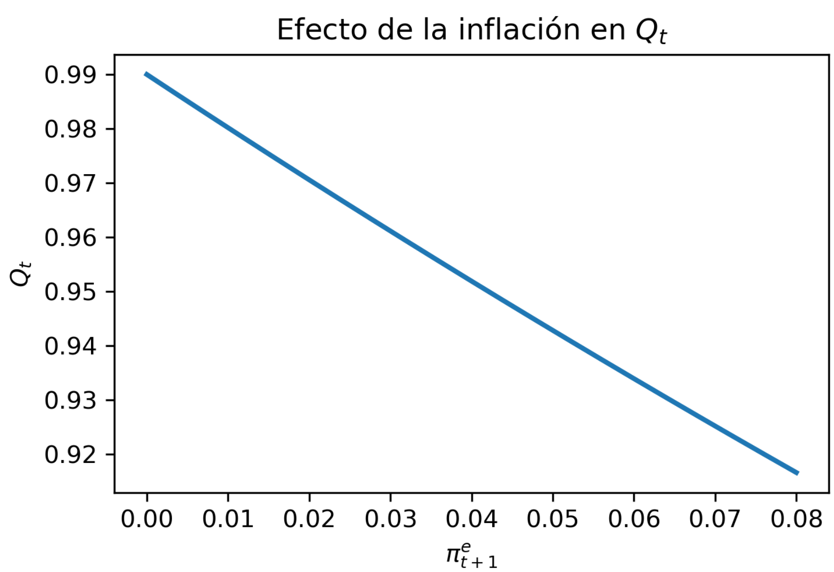

Figura 3: Efecto de la inflación esperada π^e_{t+1} sobre Q_t.

Por último, la Figura 3 representa la relación entre Q_t y la inflación esperada π^e_{t+1}, manteniendo constantes g_c y g_z. Como $Q_t \propto 1/(1+\pi^e_{t+1})$, la curva es decreciente: una mayor inflación esperada reduce el valor real del pago nominal del bono, de modo que los hogares sólo están dispuestos a comprarlo a un precio menor. Esto se traduce en un Q_t más bajo y, por tanto, en una tasa de interés nominal más alta.

En conjunto, las Figuras 1–3 ilustran que el precio del bono Q_t sintetiza tres tipos de consideraciones: (i) expectativas sobre el perfil de consumo, (ii) choques de preferencias que modifican el peso relativo del futuro y (iii) expectativas de inflación que erosionan el valor real de los pagos nominales.

Ecuación (9): Oferta de trabajo log-lineal

La ecuación (9) es la representación *log-lineal* de la **condición de optimalidad intratemporal** (ecuación (7)), que describe la *oferta de trabajo competitiva* del hogar. Se escribe como:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t. \tag{9}$$

En este contexto, adoptamos la convención estándar de que las letras minúsculas denotan el **logaritmo natural** de la variable correspondiente en niveles:

$$w_t \equiv \log W_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad c_t \equiv \log C_t, \quad n_t \equiv \log N_t.$$

I. Desglose riguroso de términos

Símbolo	Definición	Significado
w_t	$\log W_t$	Logaritmo del salario nominal.
p_t	$\log P_t$	Logaritmo del nivel de precios del bien de consumo.
$w_t - p_t$	$\log(W_t/P_t)$	Logaritmo del salario real (precio del trabajo en unidades de bien).
c_t	$\log C_t$	Logaritmo del consumo; indicador del nivel de consumo/riqueza.
n_t	$\log N_t$	Logaritmo de horas de trabajo/empleo.
σ	Curvatura de la utilidad del consumo	Mide el efecto ingreso del consumo sobre la oferta de trabajo.
ϕ	Parámetro de desutilidad del trabajo	Inverso de la elasticidad (Frisch) de la oferta de trabajo.

Recordemos que:

- σ (sigma) es el parámetro que controla la curvatura de la utilidad en consumo; cuanto mayor es σ, más sensible es la utilidad marginal ante cambios en C_t.
- ϕ (phi) está asociado a la desutilidad del trabajo; cuanto mayor es ϕ, más empinada es la desutilidad marginal de trabajar, y menor es la elasticidad (Frisch) de la oferta de trabajo.

II. Proceso de obtención (log-linealización)

La ecuación (9) se obtiene aplicando logaritmos a la **condición de optimalidad intratemporal específica** (ecuación (7)), derivada previamente a partir de la función de utilidad (ecuación (11)):

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{7}$$

Paso 1: aplicar logaritmo natural a ambos lados. Tomamos $\log(\cdot)$ en ambos lados de (7):

$$\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) \ = \ \log\left(C_t^{\sigma} N_t^{\phi}\right). \tag{14}$$

Paso 2: usar propiedades básicas de logaritmos. Utilizamos tres identidades elementales (que es útil que el lector tenga claras):

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{A}{B}\right) &= \log A - \log B, \\ \log(AB) &= \log A + \log B, \\ \log(A^x) &= x \log A. \end{aligned}$$

Aplicando estas propiedades en (14), obtenemos:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) &= \log W_t - \log P_t, \\ \log\left(C_t^{\sigma} N_t^{\phi}\right) &= \sigma \log C_t + \phi \log N_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\log W_t - \log P_t \ = \ \sigma \log C_t + \phi \log N_t. \tag{15}$$

Paso 3: sustituir notación log-lineal. Sustituyendo $w_t = \log W_t$, $p_t = \log P_t$, $c_t = \log C_t$ y $n_t = \log N_t$, llegamos a:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t, \tag{16}$$

que corresponde a la ecuación (9).

III. Interpretación didáctica y rigurosa

La ecuación (9) puede leerse como la *función de oferta de trabajo* del hogar en términos logarítmicos:

$$\underbrace{w_t - p_t}_{\text{salario real (en log)}} \quad = \quad \underbrace{\sigma c_t}_{\text{efecto ingreso vía consumo}} \quad + \quad \underbrace{\phi n_t}_{\text{respuesta de la oferta de trabajo}} \quad .$$

- **Relación con el salario real.** Para un nivel dado de consumo c_t, un aumento del salario real $w_t - p_t$ debe estar asociado a un aumento de n_t. Esto refleja el *efecto sustitución*: cuando el salario real sube, el ocio se encarece y el hogar está dispuesto a ofrecer más trabajo.

- **Efecto del consumo (efecto ingreso).** El término σc_t recoge que, cuanto más alto es el consumo (y, en cierto sentido, la "riqueza" del hogar), mayor debe ser el salario real para inducir la misma cantidad de trabajo. Intuitivamente: si el hogar ya consume mucho, necesita un incentivo mayor para sacrificar ocio.

- **Papel de ϕ y elasticidad de la oferta de trabajo.** Como ϕ es el inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo, un valor elevado de ϕ implica que n_t responde poco a cambios en el salario real: la oferta de trabajo es relativamente inelástica. En cambio, un ϕ pequeño implica una oferta de trabajo más sensible a los cambios en $w_t - p_t$.

IV. Invarianza a choques de preferencias

Un punto clave es que la posición de la curva de oferta de trabajo en (9) es **invariante** frente a los choques de preferencias Z_t. Esto se debe a que el factor Z_t se cancela en la razón $-U_{n,t}/U_{c,t}$ al derivar la condición intratemporal (7). Por tanto:

- Z_t *no* altera la decisión óptima de cuánto trabajar dado un salario real en el período t (ecuación (9));

- en cambio, sí afecta las decisiones *intertemporales* de consumo y ahorro a través de la ecuación de Euler (ecuación (8)).

Desde el punto de vista didáctico, esto permite separar claramente: (i) la determinación del salario real y la oferta de trabajo dentro del período, y (ii) las decisiones de ahorro/consumo entre períodos, que son las que sí resultan sensibles a los choques de preferencias Z_t.

Interpretación gráfica de la ecuación (9)

Recordemos la forma log-lineal de la condición de oferta de trabajo:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t. \tag{9}$$

Para fijar ideas, conviene reescribirla como:

$$w_t - p_t \;=\; \underbrace{\sigma c_t}_{\text{término constante}} \;+\; \underbrace{\phi n_t}_{\text{pendiente por unidad de empleo}}. \tag{17}$$

Si fijamos el nivel de consumo c_t, la ecuación (17) describe una recta en el plano cuyo eje horizontal es el empleo n_t y cuyo eje vertical es el salario real $w_t - p_t$:

- La **pendiente** de la curva es ϕ.

- La **ordenada al origen** (intersección con el eje vertical) es σc_t.

En la Figura 4 se representa el salario real de equilibrio $w_t - p_t$ en función del empleo n_t, manteniendo fijo el nivel de consumo c_t. La curva es creciente: para que el hogar esté dispuesto a ofrecer más trabajo (mayor n_t), el mercado debe ofrecer un salario real más alto. Esta relación recoge el *efecto sustitución*: al subir el salario real, el ocio se vuelve más caro y el hogar decide trabajar más.

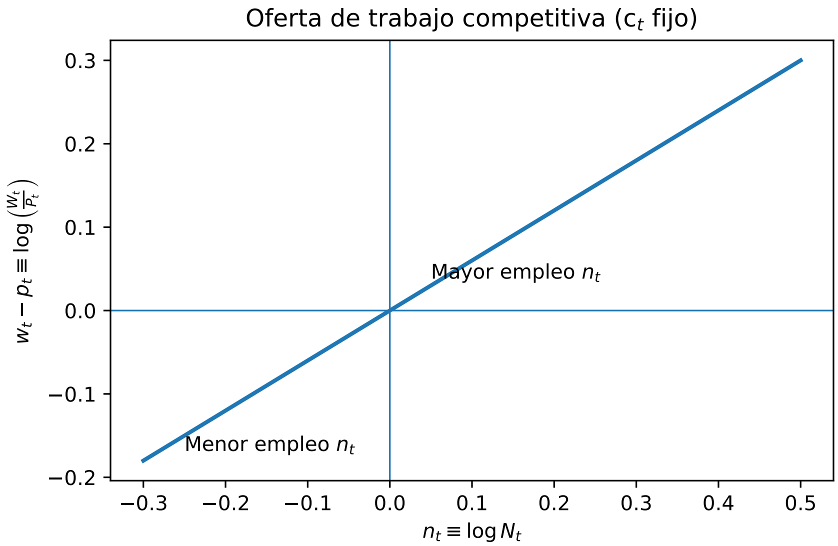

Figura 4: Oferta de trabajo competitiva: salario real vs. empleo, para un consumo dado c_t.

Desplazamientos por cambios en el consumo c_t

Si comparamos dos niveles de consumo, c_t^{bajo} y c_t^{alto}, con $c_t^{\text{alto}} > c_t^{\text{bajo}}$, la ecuación (9) implica:

$$(w_t - p_t)^{\text{alto}} = \sigma c_t^{\text{alto}} + \phi n_t, \qquad (w_t - p_t)^{\text{bajo}} = \sigma c_t^{\text{bajo}} + \phi n_t.$$

Como $\sigma > 0$, un mayor c_t desplaza la curva hacia arriba: para cualquier nivel dado de empleo n_t, el salario real compatible con la optimalidad intratemporal es más alto. Gráficamente:

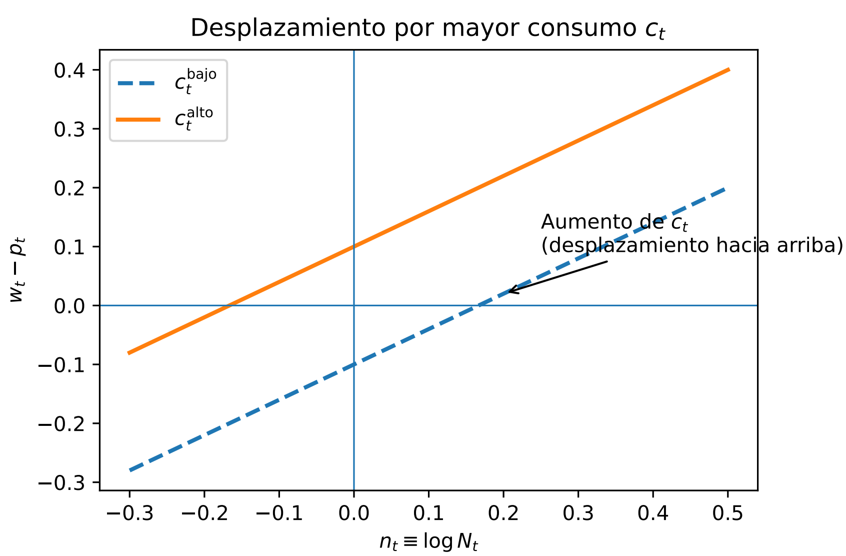

Figura 5: Desplazamiento de la oferta de trabajo ante un aumento en el consumo c_t.

En la Figura 5 se muestra cómo una curva de oferta de trabajo asociada a un bajo consumo c_t^{bajo} (línea inferior) se desplaza hacia arriba cuando el consumo aumenta a c_t^{alto} (línea superior). Económicamente:

- Si el hogar ya consume más (es "más rico"), necesita un salario real más alto para estar dispuesto a trabajar la misma cantidad de horas.
- Esto es precisamente el **efecto ingreso**: una mayor riqueza tiende a reducir la oferta de trabajo a un salario real dado.

El papel de ϕ: curvatura y elasticidad de la oferta de trabajo

El parámetro ϕ controla la sensibilidad de la oferta de trabajo al salario real. De (9), si mantenemos c_t fijo, podemos interpretar:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial(w_t - p_t)}{\partial n_t} = \phi.$$

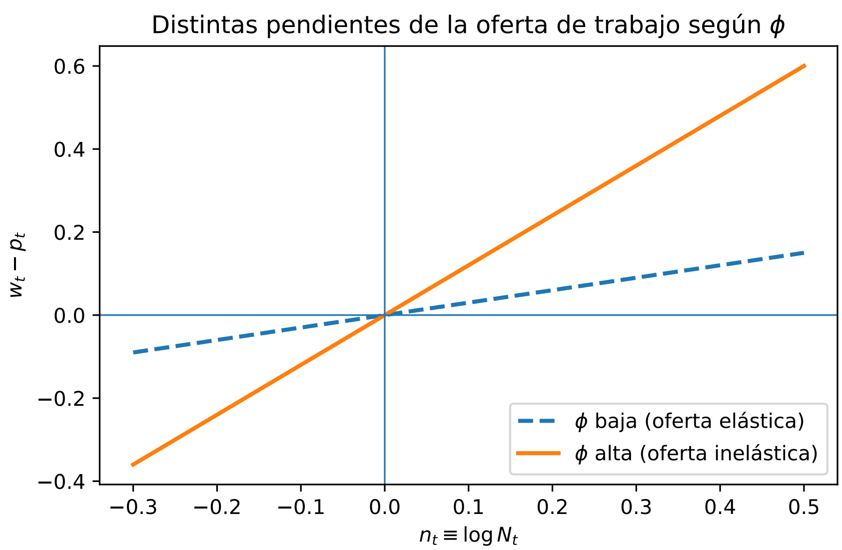

Figura 6: Curvas de oferta de trabajo con distinta pendiente ϕ.

En la Figura 6 se comparan dos curvas de oferta de trabajo que pasan por un mismo punto de referencia, pero con diferente valor de ϕ:

- Una curva con *baja* ϕ es más plana: pequeños cambios en el salario real generan cambios relativamente grandes en el empleo n_t. La oferta de trabajo es **más elástica**.
- Una curva con *alta* ϕ es más empinada: incluso cambios grandes en el salario real producen cambios modestos en n_t. La oferta de trabajo es **más inelástica**.

Dado que ϕ es el inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo, estas comparaciones gráficas ayudan a visualizar cómo la estructura de preferencias del hogar se traduce en distintas sensibilidades de la oferta de trabajo ante variaciones en el salario real.

Ecuación (10): Ecuación de Euler log-linealizada

Partimos de la ecuación de Euler específica:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right\}, \tag{18}$$

y queremos obtener su versión log-lineal, que en el texto se reporta como:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t. \tag{10}$$

Notación log-lineal. Recordamos que las letras minúsculas denotan logaritmos:

$$c_t \equiv \log C_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad z_t \equiv \log Z_t.$$

La inflación es

$$\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t,$$

y la tasa de interés nominal se define a partir del precio del bono Q_t como

$$I_t \equiv \frac{1}{Q_t} \quad \Rightarrow \quad i_t \equiv \log I_t = -\log Q_t.$$

Además, definimos

$$\rho \equiv -\log \beta,$$

de modo que ρ es la "tasa de descuento" en términos logarítmicos.

Símbolo	Definición y papel económico
c_t	$\log C_t$. Consumo actual (en logaritmos).
$E_t\{c_{t+1}\}$	Consumo futuro esperado. Resume las expectativas del hogar sobre su senda de consumo.
i_t	Logaritmo de la tasa de interés nominal bruta: $i_t = -\log Q_t$. Es el costo de oportunidad de consumir hoy en lugar de ahorrar.
$E_t\{\pi_{t+1}\}$	Inflación esperada entre t y $t+1$, donde $\pi_{t+1} = p_{t+1} - p_t$. Mide la pérdida esperada de poder adquisitivo de los activos nominales.
ρ	$\rho = -\log \beta$. Captura la impaciencia del hogar: cuanto mayor es ρ, más valora el consumo presente respecto al futuro.
z_t	$\log Z_t$. Choque de preferencias ("shifter"), que modifica la utilidad marginal del consumo.
σ	Curvatura de la utilidad del consumo. Controla la aversión al riesgo y la elasticidad de sustitución intertemporal ($1/\sigma$).
ρ_z	Parámetro de persistencia del proceso AR(1) de z_t: $z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t}$.

Desglose de términos en (10)**.**

Derivación paso a paso

1. Reescribir la ecuación de Euler en términos logarítmicos. Partimos de (18) y usamos que

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \exp(c_{t+1} - c_t), \quad \frac{Z_{t+1}}{Z_t} = \exp(z_{t+1} - z_t), \quad \frac{P_t}{P_{t+1}} = \exp(-\pi_{t+1}).$$

Sustituyendo en (18):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

Definimos $i_t \equiv -\log Q_t$ y $\rho \equiv -\log \beta$. Entonces $\log Q_t = -i_t$ y $\log \beta = -\rho$, y podemos escribir

$$\exp(-i_t) = \exp(-\rho)\, E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

Multiplicando ambos lados por $\exp(\rho)$:

$$\exp(\rho - i_t) = E_t \left\{ \exp\bigl(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\bigr) \right\}.$$

(Nota didáctica: aquí simplemente hemos pasado de una igualdad en términos de Q_t y β a una igualdad en términos de sus logaritmos i_t y ρ. Esto facilita la aproximación lineal posterior.)

2. Aproximación de primer orden (log-linealización). El siguiente paso consiste en aproximar la expresión anterior alrededor de un estado estacionario con inflación y crecimiento del consumo constantes. Para pequeñas desviaciones en torno a ese estado estacionario, usamos que

$$\exp(x) \approx 1 + x \quad \text{cuando } x \text{ es pequeño.}$$

La igualdad anterior se puede reescribir de forma esquemática como:

$$1 = E_t \left\{ \exp\bigl(i_t - \rho - \sigma(c_{t+1} - c_t) - \pi_{t+1} + (z_{t+1} - z_t)\bigr) \right\},$$

donde hemos reorganizado términos para que el lado izquierdo sea 1. Aplicando la aproximación de primer orden $\exp(x) \approx 1 + x$ y tomando desviaciones respecto al estado estacionario, obtenemos aproximadamente:

$$0 \;\approx\; E_t \left\{ i_t - \rho - \sigma(c_{t+1} - c_t) - \pi_{t+1} + (z_{t+1} - z_t) \right\}. \tag{19}$$

(Nota didáctica: la ecuación (19) dice que, en promedio, la combinación lineal de la tasa de interés, el crecimiento del consumo, la inflación y el choque de preferencias debe ser cercana a cero si el hogar está optimizando intertemporalmente.)

3. Reorganizar en términos de consumo. Tomando expectativas condicionales a la información en t, (19) se puede escribir como:

$$0 \approx i_t - \rho - \sigma\bigl(E_t\{c_{t+1}\} - c_t\bigr) - E_t\{\pi_{t+1}\} + E_t\{z_{t+1}\} - z_t.$$

Despejamos el término de consumo:

$$\sigma\bigl(E_t\{c_{t+1}\} - c_t\bigr) \approx i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho + E_t\{z_{t+1}\} - z_t,$$

$$E_t\{c_{t+1}\} - c_t \approx \frac{1}{\sigma} \left[i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho + E_t\{z_{t+1}\} - z_t \right].$$

4. Uso del proceso AR(1) para el choque de preferencias. Suponemos que el choque de preferencias z_t sigue un proceso AR(1):

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t},$$

de donde se obtiene

$$E_t\{z_{t+1}\} = \rho_z z_t \quad \Rightarrow \quad E_t\{z_{t+1}\} - z_t = (\rho_z - 1)z_t = -(1-\rho_z)z_t.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$E_t\{c_{t+1}\} - c_t \approx \frac{1}{\sigma}\left[i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho - (1-\rho_z)z_t\right].$$

Cambiamos de lado c_t y multiplicamos por -1:

$$c_t \approx E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t,$$

que es precisamente la ecuación (10), (10).

Interpretación económica de la ecuación (10)

Es útil reescribir (10) usando la tasa de interés real esperada:

$$r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}.$$

Entonces:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(r_t - \rho) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t. \tag{20}$$

- El término $r_t - \rho$ mide cuánto se desvía la tasa de interés real esperada r_t de la tasa de descuento del hogar ρ. Si r_t aumenta por encima de ρ, el término $-\frac{1}{\sigma}(r_t - \rho)$ es negativo: el hogar reduce el consumo actual c_t en relación con el consumo futuro esperado $E_t\{c_{t+1}\}$ para aprovechar el mayor rendimiento del ahorro. Esto es la **sustitución intertemporal del consumo**.

- El término $\frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t$ refleja el efecto del choque de preferencias. Si z_t aumenta (el hogar valora más el consumo actual) y $0 \leq \rho_z < 1$, el término es positivo: para que la condición de Euler vuelva a cumplirse, el consumo actual c_t debe aumentar, reduciendo así la utilidad marginal del consumo.

- El parámetro σ aparece en el denominador: cuanto mayor es σ (mayor aversión al riesgo y menor elasticidad de sustitución intertemporal), *menor* es la respuesta de c_t a un cambio dado en $(r_t - \rho)$ o en z_t. Es decir, las decisiones de consumo son menos sensibles a la tasa de interés real y a los choques de preferencias.

En resumen: la ecuación (10) muestra cómo el consumo actual se ajusta para equilibrar tres fuerzas: (i) las expectativas de consumo futuro, (ii) la comparación entre la tasa de interés real esperada y la tasa de descuento del hogar y (iii) los choques de preferencias que hacen más o menos atractivo consumir hoy.

Ecuación (11): demanda de saldos reales log-linealizada

En la versión del modelo donde la política monetaria se formula en términos de la oferta de dinero, es necesario introducir una ecuación de demanda de saldos reales. De forma log-lineal (ignorando una constante aditiva para no cargar la notación), Galí postula:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t. \tag{11}$$

Notación y símbolos. Recordamos que las letras minúsculas denotan logaritmos naturales de las variables correspondientes:

$$m_t \equiv \log M_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad c_t \equiv \log C_t, \quad i_t \equiv \log I_t,$$

donde M_t es la cantidad de dinero nominal, P_t el nivel de precios, C_t el consumo y I_t la tasa de interés nominal bruta.

Símbolo	Definición y papel económico
m_t	$\log M_t$. Logaritmo de la cantidad nominal de dinero.
p_t	$\log P_t$. Logaritmo del nivel de precios.
$m_t - p_t$	$\log(M_t/P_t)$. Saldos reales demandados: poder adquisitivo que los agentes mantienen en forma de dinero.
c_t	$\log C_t$. Logaritmo del consumo (escala de la actividad económica). Funciona como proxy de ingreso / volumen de transacciones.
i_t	Logaritmo de la tasa de interés nominal bruta. Representa el *costo de oportunidad* de mantener dinero en lugar de bonos.
η (eta)	*Semielasticidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés*, con $\eta \geq 0$. Mide cuán sensible es la demanda de saldos reales ante cambios en i_t.

De dónde sale la forma funcional

En esta sección del capítulo, la ecuación (11) se introduce de manera *reducida*: no se deriva explícitamente de un problema de optimización, sino que se postula como una relación empíricamente razonable entre saldos reales, nivel de actividad y tasa de interés.

Una forma estándar de partir es una función de demanda de dinero del tipo:

$$\frac{M_t}{P_t} = \Phi(C_t, i_t),$$

donde:

- Φ crece con el nivel de gasto/transacciones (C_t),
- Φ decrece con la tasa de interés nominal (i_t), que mide el rendimiento de los activos alternativos al dinero.

Si se asume una forma log-lineal simple:

$$\log\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \alpha + \psi\, c_t - \eta\, i_t, \tag{21}$$

con $\psi > 0$ y $\eta \geq 0$, entonces:

- el término ψc_t recoge el **motivo transacción**: más consumo $\Rightarrow$ más dinero demandado;
- el término $-\eta i_t$ recoge el **motivo de costo de oportunidad**: si sube i_t, mantener dinero es más caro $\Rightarrow$ menos saldos reales.

En el texto se simplifica esta expresión normalizando la pendiente respecto a c_t a la unidad ($\psi = 1$) y absorbiendo la constante α en el nivel estacionario de las variables. Con esa normalización, la ecuación (21) se reduce exactamente a:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t,$$

que es la ecuación (11).

Interpretación económica didáctica

La ecuación (11) puede leerse como:

(saldos reales demandados) = (escala de la actividad)−(penalización por el costo de oportunidad del dine

- **Efecto del consumo (c_t).** Si c_t aumenta (el hogar está consumiendo más, la economía está más activa), la demanda de saldos reales aumenta uno a uno:

$$\frac{\partial(m_t - p_t)}{\partial c_t} = 1.$$

  Didácticamente: más compras $\Rightarrow$ hace falta más dinero en la cartera para efectuar esas transacciones.

- **Efecto de la tasa de interés nominal (i_t).** El término $-\eta i_t$ indica que, si sube i_t, los saldos reales demandados caen:

$$\frac{\partial(m_t - p_t)}{\partial i_t} = -\eta < 0.$$

  Intuición: a mayor tasa de interés, más caro es "tener el dinero parado" en saldos líquidos en lugar de colocarlo en bonos que pagan interés. Entonces los hogares reducen su demanda de dinero.

- **El papel de η (eta).** Cuanto mayor es η, más sensible es la demanda de dinero al costo de oportunidad. Una η pequeña describe una demanda de dinero poco sensible a i_t (dinero casi "necesario" independientemente del interés); una η grande describe una demanda que responde mucho a los cambios en la tasa de interés.

Comentario sobre microfundamentos

Más adelante en el capítulo (cuando se introduce una función de utilidad que incluye explícitamente los saldos reales, o una restricción de tipo *cash-in-advance*), puede mostrarse que una ecuación de la forma (11) aparece como condición de primer orden del problema del hogar. Es decir, en una versión más rica del modelo, la demanda de dinero no es sólo una ecuación "ad hoc", sino el resultado de maximizar utilidad sujeto a restricciones tecnológicas y financieras.

Para los fines de la parte básica del capítulo, sin embargo, basta trabajar con la versión reducida:

$$m_t - p_t = c_t - \eta i_t,$$

que permite cerrar el modelo cuando la autoridad monetaria fija una senda para la oferta de dinero en lugar de fijar directamente la tasa de interés.

2.2 Firmas: tecnología y producción

En esta sección pasamos del problema de los hogares al comportamiento de las *firmas* (empresas). En el modelo, opera un número muy grande de firmas idénticas que producen un único bien de consumo. Cada firma toma como dados el precio de ese bien (P_t) y el salario nominal (W_t) y elige cuánto trabajar (empleo N_t) para maximizar sus beneficios en cada período.

Función de producción (Ecuación 12)

La tecnología disponible para la firma representativa se describe mediante una función de producción Cobb–Douglas con un único factor variable (trabajo):

$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha}, \tag{12}$$

donde:

- Y_t es el nivel de producción (output) en el período t.
- N_t es el empleo (horas trabajadas) en el período t.
- A_t es el nivel de productividad total de los factores (*Total Factor Productivity*, TFP) en t.
- α (alfa) es un parámetro con $0 < \alpha < 1$.

Lectura económica de (12)**.**

- La exponente $1 - \alpha$ es la **elasticidad del producto respecto al trabajo**.[2] Si el empleo aumenta un 1 %, la producción aumenta aproximadamente $(1 - \alpha)$ %.
- A_t multiplica a toda la función: un aumento de A_t eleva la producción para cualquier nivel dado de empleo N_t. Es un **choque de productividad**: la tecnología permite producir más con la misma cantidad de trabajo.

[2] En una versión más completa del modelo, puede pensarse que existe también un factor capital con exponente α, de modo que la suma de exponentes es 1 y hay rendimientos constantes a escala. Aquí el capital se mantiene implícito y fijo.

Proceso estocástico de la productividad

Como en el caso de las preferencias de los hogares, se supone que el nivel de productividad A_t es *exógeno* para las firmas: ninguna empresa lo controla individualmente. Trabajamos con su logaritmo:

$$a_t \equiv \log A_t,$$

y se asume que sigue un proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)):

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}, \tag{22}$$

donde:

- ρ_a es el parámetro de persistencia del shock tecnológico, con $|\rho_a| < 1$;
- $\varepsilon_{a,t}$ es una innovación (shock) de productividad en el período t, con media cero.

Intuición didáctica.

- Si $\varepsilon_{a,t} > 0$, entonces a_t aumenta, y por tanto $A_t = e^{a_t}$ es más alto: con la misma cantidad de trabajo, la firma puede producir más Y_t.
- Si ρ_a es grande (por ejemplo, $\rho_a \approx 0{,}9$), los efectos de un shock de productividad se *propagan en el tiempo*: un aumento de productividad hoy implica un nivel de productividad relativamente alto también mañana y en los periodos siguientes.

Versión log-lineal de la tecnología

Tomando logaritmos en la ecuación de producción (12):

$$\log Y_t = \log A_t + (1-\alpha)\,\log N_t.$$

Usando la notación log-lineal estándar del modelo:

$$y_t \equiv \log Y_t, \quad n_t \equiv \log N_t, \quad a_t \equiv \log A_t,$$

podemos escribir simplemente:

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\,n_t. \tag{23}$$

Esta versión logarítmica es muy útil porque:

- hace explícitas las elasticidades (el coeficiente $1-\alpha$ es directamente la elasticidad del producto respecto al empleo),
- y facilita las log-linealizaciones posteriores cuando combinemos esta ecuación con las condiciones de optimalidad de hogares y firmas.

Problema de maximización de beneficios de la firma

Cada firma toma como dados el precio del bien P_t y el salario nominal W_t, y elige cuánto empleo N_t demandar para maximizar sus beneficios en el período t:

$$\max_{N_t} \ \Pi_t \equiv P_t Y_t - W_t N_t \quad \text{sujeto a} \quad Y_t = A_t N_t^{1-\alpha}. \tag{24}$$

Sustituyendo la tecnología en la función de beneficios:

$$\max_{N_t} \ \Pi_t = P_t A_t N_t^{1-\alpha} - W_t N_t. \tag{25}$$

Condición de primer orden (idea general). Para encontrar el empleo óptimo N_t^*, derivamos la función de beneficios respecto a N_t e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial N_t} = P_t A_t (1-\alpha) N_t^{-\alpha} - W_t = 0.$$

Reordenando:

$$P_t (1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha} = W_t.$$

Dividiendo ambos lados entre P_t obtenemos:

$$(1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha} = \frac{W_t}{P_t}.$$

El lado izquierdo es el **producto marginal del trabajo** (en términos reales), y el lado derecho es el **salario real**. En palabras:

En un equilibrio competitivo, la firma contrata trabajo hasta el punto en que el producto marginal del trabajo es igual al salario real.

En la siguiente ecuación (Ecuación 14 del capítulo) escribiremos esta condición de forma más compacta y, posteriormente, en forma log-lineal para poder integrarla con el resto del sistema del modelo.

De la condición de primer orden en niveles (14) a su forma logarítmica (15)

En la sección de firmas vimos que, al maximizar beneficios en competencia perfecta, la condición de primer orden con respecto al empleo exige que el salario real sea igual al producto marginal del trabajo. En niveles, esto se escribe como:

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha}, \tag{14}$$

donde:

- W_t es el salario nominal.
- P_t es el nivel de precios.

- $\dfrac{W_t}{P_t}$ es el salario real.
- A_t es el nivel de productividad (TFP).
- N_t es el empleo.
- α (alfa) es el parámetro de participación del factor no observado (capital) en la función Cobb–Douglas.

La ecuación (14) dice: *la firma contrata trabajo hasta que el salario real iguala el producto marginal del trabajo*, dado por $(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}$.

Paso a paso: aplicación del logaritmo natural. El objetivo es obtener una versión *log-lineal* de esta condición, que será muy útil para combinarla con las ecuaciones de los hogares y las curvas de oferta y demanda agregadas. Para ello tomamos logaritmos a ambos lados de (14).

Paso 1. Aplicar log a ambos lados:

$$\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) = \log\big((1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}\big)\,. \tag{26}$$

Paso 2. Lado izquierdo (salario real).

Usamos la propiedad $\log(X/Y) = \log X - \log Y$:

$$\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) = \log W_t - \log P_t.$$

Paso 3. Lado derecho (producto marginal del trabajo).

Aplicamos dos reglas básicas de logaritmos:

- $\log(XY) = \log X + \log Y$,
- $\log(X^k) = k\,\log X$.

Primero, separamos el producto:

$$\log\big((1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}\big) = \log(1-\alpha) + \log A_t + \log(N_t^{-\alpha}).$$

Luego usamos $\log(N_t^{-\alpha}) = -\alpha \log N_t$:

$$\log(1-\alpha) + \log A_t - \alpha \log N_t.$$

Paso 4. Sustituir notación logarítmica.

Definimos, como en el resto del capítulo, las letras minúsculas como logaritmos naturales de las variables:

$$w_t \equiv \log W_t, \qquad p_t \equiv \log P_t, \qquad a_t \equiv \log A_t, \qquad n_t \equiv \log N_t.$$

Con esta notación, el lado izquierdo se escribe como

$$\log W_t - \log P_t = w_t - p_t,$$

y el lado derecho como

$$\log(1-\alpha) + a_t - \alpha n_t.$$

Igualando ambos lados obtenemos:

$$w_t - p_t = a_t - \alpha n_t + \log(1-\alpha). \tag{15}$$

Interpretación didáctica de la ecuación (15)

La ecuación (15) es la **función de demanda de trabajo de la firma en términos logarítmicos**:

$$w_t - p_t = a_t - \alpha n_t + \log(1-\alpha).$$

Podemos leerla así:

- **Relación inversa salario real–empleo.** El coeficiente de n_t es $-\alpha < 0$. Para un nivel dado de productividad a_t, si el empleo n_t aumenta, el término $-\alpha n_t$ se hace más negativo, de modo que el salario real de equilibrio $w_t - p_t$ debe ser menor.

  > *Cuanto más trabajo contrata la firma, menor es el producto marginal del último trabajador, y por tanto menor es el salario real que está dispuesta a pagar.*

- **Efecto de la productividad a_t.** El salario real se mueve en la misma dirección que a_t: un aumento de productividad desplaza la curva de demanda de trabajo hacia arriba (la firma está dispuesta a pagar un salario real más alto para cada nivel de empleo).

- **El término constante $\log(1-\alpha)$.** Afecta sólo la posición vertical de la curva (la ordenada al origen) en el plano $(n_t,\ w_t - p_t)$, pero no la pendiente. En muchas aplicaciones empíricas o teóricas se reabsorbe este término en una constante general.

Comparación con la oferta de trabajo. Es útil notar que:

- La ecuación de **oferta de trabajo** del hogar (ecuación (9)) tiene pendiente positiva en el espacio $(n_t,\ w_t - p_t)$.

- La ecuación de **demanda de trabajo** de la firma (ecuación (15)) tiene pendiente negativa $(-\alpha)$.

El equilibrio en el mercado laboral se obtiene precisamente en el punto en el que ambas rectas se cruzan: allí coincide el salario real que hace óptima la decisión de trabajo

Ecuación (16): Condición de vaciado del mercado de bienes

En el modelo clásico con un único bien de consumo y sin inversión, gasto público ni comercio exterior, el equilibrio en el mercado de bienes implica que toda la producción agregada se destina a consumo. En niveles, esto se escribe simplemente como:

$$Y_t = C_t.$$

Trabajando con la notación logarítmica utilizada en el resto del capítulo, definimos:

$$y_t \equiv \log Y_t, \qquad c_t \equiv \log C_t.$$

Al tomar logaritmos en ambos lados de la identidad $Y_t = C_t$ obtenemos:

$$y_t = c_t. \tag{16}$$

Significado de cada término.

- y_t representa el *logaritmo de la producción total* (oferta agregada de bienes).
- c_t representa el *logaritmo del consumo total* (demanda agregada de bienes).
- La igualdad $y_t = c_t$ expresa que, en cada período t, *la cantidad de bienes producidos es exactamente igual a la cantidad de bienes demandados para consumo.*

Interpretación económica. La ecuación (16) es la versión log-lineal de la identidad:

$$Y_t^{\text{oferta}} = C_t^{\text{demanda}}.$$

En una economía más general tendríamos:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + NX_t,$$

donde I_t es inversión, G_t gasto público y NX_t exportaciones netas. En este modelo básico, se *abstrae* de estos componentes: $I_t = G_t = NX_t = 0$. Por eso, toda la producción se destina a consumo, y la condición de equilibrio en el mercado de bienes se reduce a $Y_t = C_t$.

Desde el punto de vista de la solución del modelo, la ecuación (16) cumple un papel clave:

- Permite **identificar producción y consumo**: sólo necesitamos determinar una de estas variables reales, porque la otra viene dada por la igualdad $y_t = c_t$.
- Al combinarla con:
    - la oferta de trabajo del hogar (ecuación (9)),
    - la demanda de trabajo de la firma (ecuación (15)),
    - y la función de producción agregada (ecuación (17)),

  se obtiene un sistema que determina de manera conjunta empleo, producción, salario real y tasa de interés real.

Esta estructura es la que, en el modelo clásico con precios flexibles, lleva al resultado de que las *variables reales* (como y_t, n_t o el salario real) se determinan independientemente de la política monetaria: el dinero sólo fija el nivel de precios, mientras que la ecuación (16) ayuda a cerrar el lado real de la economía.

Ecuación (17): Relación de producción agregada log-lineal

Partimos de la función de producción Cobb–Douglas de la firma representativa:

$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha},$$

donde:

- Y_t es el *nivel de producción* (output) en el período t,
- N_t es el *empleo* o número de horas trabajadas,
- A_t es el *nivel de tecnología* o productividad total de los factores,
- α (alfa) $\in (0,1)$ es el parámetro asociado (implícitamente) al factor capital, por lo que $1-\alpha$ es la *participación del trabajo* en el ingreso.

Trabajando en la notación log-lineal del modelo, definimos:

$$y_t \equiv \log Y_t, \qquad a_t \equiv \log A_t, \qquad n_t \equiv \log N_t.$$

Derivación paso a paso. Aplicamos el logaritmo natural a ambos lados de la función de producción:

$$\log Y_t = \log\bigl(A_t N_t^{1-\alpha}\bigr).$$

Usamos ahora dos propiedades básicas de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \log(XY) &= \log X + \log Y, \\ \log(X^k) &= k \log X. \end{aligned}$$

Aplicándolas obtenemos:

$$\begin{aligned} \log Y_t &= \log A_t + \log\bigl(N_t^{1-\alpha}\bigr) \\ &= \log A_t + (1-\alpha)\,\log N_t. \end{aligned}$$

Sustituyendo la notación log-lineal (y_t, a_t, n_t), llegamos a:

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\, n_t. \tag{17}$$

Interpretación económica. La ecuación (17) resume la tecnología de la economía en términos logarítmicos:

- y_t es el *logaritmo de la producción agregada*, es decir, la oferta total de bienes.
- a_t es el *logaritmo del nivel de tecnología* o choque de productividad. Un aumento en a_t (por ejemplo, un avance tecnológico) desplaza hacia arriba la producción para cualquier nivel de empleo.

- n_t es el *logaritmo del empleo*. El coeficiente $(1-\alpha)$ mide la sensibilidad (elasticidad) de la producción con respecto al trabajo: un incremento de 1 % en N_t aumenta Y_t en aproximadamente $(1-\alpha)$ %.

En el contexto del equilibrio general del modelo clásico, la ecuación (17) es una pieza clave porque conecta el lado *real* de la economía:

- Por un lado, el empleo n_t se determina a partir de la interacción entre la *oferta de trabajo* del hogar (ecuación (9)) y la *demanda de trabajo* de la firma (ecuación (15)).
- Por otro lado, la producción y_t viene dada por la tecnología a_t y por ese nivel de empleo a través de (17).

De este modo, la relación de producción log-lineal permite expresar las variables reales de la economía (en particular y_t) en función de choques tecnológicos (a_t) y de decisiones de empleo (n_t), lo cual será fundamental para analizar cómo se determina el equilibrio y, más adelante, para estudiar la neutralidad del dinero en este entorno con precios totalmente flexibles.

Ecuación (18): Nivel de equilibrio del empleo

A partir de las condiciones de optimalidad del hogar y de la firma, junto con las condiciones de vaciado de mercado, podemos obtener una expresión cerrada para el empleo de equilibrio. El resultado central es que el logaritmo del empleo n_t depende únicamente del logaritmo del nivel de tecnología a_t:

$$n_t = \psi_{na}\, a_t + \psi_n. \tag{18}$$

En esta expresión:

- $n_t \equiv \log N_t$ es el logaritmo del empleo (o del número de horas trabajadas).
- $a_t \equiv \log A_t$ es el logaritmo del nivel de tecnología (productividad total de los factores).
- ψ_{na} es el coeficiente que mide la *sensibilidad del empleo* ante cambios en la tecnología.
- ψ_n es un término constante que recoge el efecto conjunto de los parámetros estructurales del modelo.

Parámetros estructurales. Recordamos el significado de los parámetros que intervienen:

- σ (sigma) ≥ 0 es el parámetro de curvatura de la utilidad del consumo; mide la aversión al riesgo y el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal.
- ϕ (phi) ≥ 0 es el parámetro asociado a la desutilidad del trabajo; es (aproximadamente) el inverso de la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo.
- α (alfa) $\in (0,1)$ es el parámetro de participación del capital en la función de producción Cobb–Douglas; el trabajo tiene participación $1-\alpha$.

Derivación a partir del sistema real

El sistema real que determina las variables *reales* de la economía está formado por:

- Oferta de trabajo del hogar (ecuación (9)):

$$w_t - p_t = \sigma\, c_t + \phi\, n_t.$$

- Demanda de trabajo de la firma (ecuación (15)):

$$w_t - p_t = a_t - \alpha\, n_t + \log(1-\alpha).$$

- Condición de equilibrio del mercado de bienes (ecuación (16)):

$$y_t = c_t.$$

- Relación de producción agregada (ecuación (17)):

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\, n_t.$$

El salario real $w_t - p_t$ debe ser el mismo para hogares y firmas, de modo que igualamos las ecuaciones (9) y (15):

$$\sigma\, c_t + \phi\, n_t = a_t - \alpha\, n_t + \log(1-\alpha). \tag{27}$$

Por la condición de vaciado del mercado de bienes (16) y la tecnología (17), podemos escribir el consumo como:

$$c_t = y_t = a_t + (1-\alpha)\, n_t.$$

Sustituyendo esta expresión de c_t en (27) obtenemos:

$$\sigma\big[a_t + (1-\alpha)\, n_t\big] + \phi\, n_t = a_t - \alpha\, n_t + \log(1-\alpha),$$
$$\sigma a_t + \sigma(1-\alpha)\, n_t + \phi\, n_t = a_t - \alpha\, n_t + \log(1-\alpha).$$

Reagrupamos por términos en n_t y en a_t:

$$\big[\sigma(1-\alpha) + \phi + \alpha\big]\, n_t = (1-\sigma)\, a_t + \log(1-\alpha).$$

Resolviendo para n_t:

$$n_t = \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}\, a_t + \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}.$$

Definimos entonces:

$$\psi_{na} \equiv \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$
$$\psi_{n} \equiv \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$

lo que nos lleva directamente a la forma compacta de la ecuación (18):

$$n_t = \psi_{na}\, a_t + \psi_n.$$

Interpretación económica de la Ecuación (18)

La expresión (18) contiene varios resultados clave del modelo clásico:

1. **El empleo depende sólo de la tecnología.**

   Obsérvese que en (18) *no* aparecen:

   - la tasa de interés nominal i_t,
   - la tasa de inflación esperada $E_t\{\pi_{t+1}\}$,
   - ni el choque de preferencias z_t.

   Esto refleja que, con precios totalmente flexibles y mercados competitivos, las variables *reales* (como el empleo n_t) se determinan únicamente por la tecnología a_t y los parámetros de preferencias y tecnología (σ, ϕ, α): es la idea de *neutralidad de la política monetaria* en el modelo clásico.

2. **El papel de ψ_{na}: respuesta del empleo a choques tecnológicos.**

   El coeficiente

   $$\psi_{na} = \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}$$

   mide la sensibilidad del empleo a cambios en la productividad a_t.

   - Si $\sigma < 1$ (sigma menor que uno), entonces $1-\sigma > 0$ y $\psi_{na} > 0$. Un aumento de la productividad (a_t más alto) incrementa el salario real y el efecto sustitución (trabajar más) domina al efecto ingreso (trabajar menos por ser más rico), de modo que el empleo n_t *aumenta*.
   - Si $\sigma > 1$, entonces $1-\sigma < 0$ y $\psi_{na} < 0$. En este caso, el efecto ingreso domina: un choque tecnológico positivo hace que los hogares estén dispuestos a trabajar menos, por lo que el empleo puede *disminuir*.
   - Si $\sigma = 1$ (utilidad logarítmica en consumo), se tiene $1-\sigma = 0$ y, por tanto, $\psi_{na} = 0$. En este caso, los efectos ingreso y sustitución se cancelan exactamente y el empleo de equilibrio no responde a la productividad: n_t es constante.

3. **El término constante ψ_n.**

   La constante

   $$\psi_n = \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}$$

   fija el *nivel medio* de empleo de equilibrio, dado el conjunto de parámetros estructurales. Un cambio en la participación del trabajo $(1-\alpha)$, o en la rigidez de la oferta de trabajo (capturada por ϕ), desplaza hacia arriba o hacia abajo toda la relación entre n_t y a_t.

La ecuación (18) sintetiza el equilibrio del mercado laboral en el modelo clásico: el empleo se ajusta únicamente a choques de productividad, y la política monetaria no tiene efecto permanente sobre esta variable real.

Ecuación (19): Nivel de equilibrio del producto

Una vez determinado el empleo de equilibrio, podemos caracterizar el *producto* de equilibrio. La Ecuación (19) expresa el logaritmo del *output* y_t como función lineal del único choque real del modelo: el nivel de tecnología a_t:

$$y_t = \psi_{ya}\, a_t + \psi_y. \tag{19}$$

Donde:

- $y_t \equiv \log Y_t$ es el logaritmo del producto agregado.
- $a_t \equiv \log A_t$ es el logaritmo del nivel de tecnología (choque de productividad).
- ψ_{ya} es el coeficiente (o *multiplicador*) que mide la sensibilidad del producto ante cambios en la tecnología.
- ψ_y es un término constante que fija el nivel medio de producto en equilibrio.

Parámetros estructurales. Recordamos el significado de los parámetros que intervienen en los coeficientes:

- σ (sigma) ≥ 0: parámetro de curvatura de la utilidad del consumo; mide la aversión al riesgo y el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal.
- ϕ (phi) ≥ 0: parámetro asociado a la desutilidad del trabajo; es (aprox.) el inverso de la elasticidad Frisch de la oferta laboral.
- α (alfa) $\in (0, 1)$: parámetro tecnológico de la función de producción Cobb–Douglas; el trabajo tiene participación $(1 - \alpha)$.
- ψ_{na} y ψ_n son los coeficientes obtenidos en la ecuación de equilibrio del empleo:

  $$n_t = \psi_{na}\, a_t + \psi_n,$$

  con

  $$\psi_{na} = \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}, \qquad \psi_n = \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}.$$

Derivación a partir de la tecnología agregada

Partimos de la relación de producción agregada log-lineal (ecuación (17)):

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\, n_t. \tag{28}$$

Y usamos el resultado para el empleo de equilibrio (ecuación (18)):

$$n_t = \psi_{na}\, a_t + \psi_n.$$

Sustituyendo n_t en (28):

$$\begin{aligned} y_t &= a_t + (1-\alpha)\big(\psi_{na}\, a_t + \psi_n\big) \\ &= \big[1 + (1-\alpha)\psi_{na}\big]\, a_t + (1-\alpha)\, \psi_n. \end{aligned}$$

Definimos entonces:

$$\psi_{ya} \equiv 1 + (1-\alpha)\psi_{na}, \tag{29}$$

$$\psi_y \equiv (1-\alpha)\, \psi_n. \tag{30}$$

Sustituyendo las expresiones explícitas de ψ_{na} y ψ_n:

$$\psi_{na} = \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}, \qquad \psi_n = \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$

obtenemos, tras simplificar,

$$\psi_{ya} = 1 + (1-\alpha)\,\frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha} = \frac{1+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}, \tag{31}$$

y

$$\psi_y = (1-\alpha)\,\psi_n = (1-\alpha)\,\frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}. \tag{32}$$

Sustituyendo (31) y (32) en (19) tenemos la forma explícita de la Ecuación (19):

$$y_t = \frac{1+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}\, a_t + (1-\alpha)\,\frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}.$$

Interpretación económica de la Ecuación (19)

La ecuación (19) resume cómo se determina el producto real de equilibrio en el modelo clásico:

1. **El producto depende sólo de la tecnología.**

   Al igual que en el caso del empleo, en (19) *no* aparecen:

   - la tasa de interés nominal i_t,
   - la inflación esperada $E_t\{\pi_{t+1}\}$,
   - ni el choque de preferencias z_t.

   En consecuencia, el producto de equilibrio y_t es una variable *real* que se determina únicamente por la productividad a_t y por los parámetros estructurales (σ, ϕ, α): es otra manifestación de la *neutralidad de la política monetaria* en este entorno clásico con precios perfectamente flexibles.

2. **Signo y magnitud de ψ_{ya}.**

   Del resultado explícito:
   $$\psi_{ya} = \frac{1+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$
   vemos que, bajo los supuestos estándar $\sigma \geq 0$, $\phi \geq 0$ y $\alpha \in (0,1)$:

   - El numerador $1+\phi$ es siempre estríctamente positivo.
   - El denominador $\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha$ es también estríctamente positivo.

   Por tanto,
   $$\psi_{ya} > 0.$$
   Conclusión: un choque tecnológico positivo (a_t más alto) *siempre* incrementa el producto de equilibrio y_t.

   Además, la magnitud de ψ_{ya} depende de los parámetros:

   - Un mayor ϕ (oferta de trabajo más rígida en sentido Frisch) incrementa el numerador y el denominador, teniendo un efecto ambiguo sobre ψ_{ya}; en general, ϕ tiende a moderar el ajuste del empleo, con lo que parte del ajuste ante el choque se refleja en salarios reales.
   - Un mayor σ (sigma; mayor aversión al riesgo y menor elasticidad de sustitución intertemporal) aumenta el término $\sigma(1-\alpha)$ en el denominador, tendiendo a reducir ψ_{ya}: el consumo (y por tanto el trabajo vía equilibrio general) reacciona menos ante cambios en las tasas reales implícitas.
   - El parámetro tecnológico α afecta tanto el peso del trabajo $(1-\alpha)$ en la producción como el denominador. Cuando $(1-\alpha)$ es grande (el trabajo tiene un peso elevado), cambios en el empleo inducidos por la tecnología tienen un impacto relativamente mayor en el producto.

3. **El término constante ψ_y.**

   La constante
   $$\psi_y = (1-\alpha)\,\psi_n = (1-\alpha)\,\frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}$$
   fija el *nivel medio* de y_t en relación con los parámetros estructurales. Cambios en la participación del trabajo $(1-\alpha)$ o en la rigidez de la oferta de trabajo (capturada por ϕ) desplazan hacia arriba o hacia abajo la relación entre y_t y a_t sin cambiar su pendiente ψ_{ya}.

La ecuación (19) completa la caracterización del equilibrio real del modelo clásico: tanto el empleo como el producto fluctúan exclusivamente en respuesta a los choques tecnológicos, mientras que la política monetaria sólo puede afectar variables nominales (como precios y nivel de dinero) pero no las cantidades reales de largo plazo.

Ecuación (20): Tasa de interés real de equilibrio

La tasa de interés real se define como

$$r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\},$$

es decir, la tasa nominal descontada por la inflación esperada entre t y $t+1$. En el modelo clásico, r_t se determina exclusivamente por factores reales.

La Ecuación (20) la expresa en dos formas equivalentes:

$$r_t = \rho + (1-\rho_z)\, z_t + \sigma\, E_t\{\Delta y_{t+1}\} = \rho + (1-\rho_z)\, z_t - \sigma(1-\rho_a)\, \psi_{ya}\, a_t. \tag{20}$$

Parámetros y variables.

- r_t: tasa de interés real de equilibrio.
- i_t: tasa de interés nominal.
- $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t$: inflación entre t y $t+1$.
- ρ (rho): tasa de descuento del hogar, definida como $\rho \equiv -\log \beta$; determina el nivel de r_t en estado estacionario.
- $z_t \equiv \log Z_t$: choque de preferencias; sigue un proceso AR(1) $z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t}$.
- ρ_z (rho sub z), con $0 \leq \rho_z < 1$: parámetro de persistencia del choque de preferencias.
- $a_t \equiv \log A_t$: choque de tecnología (nivel de productividad); sigue $a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$.
- ρ_a (rho sub a), con $0 \leq \rho_a < 1$: parámetro de persistencia del choque tecnológico.
- σ (sigma) ≥ 0: parámetro de curvatura de la utilidad del consumo; mide la aversión al riesgo y el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal.
- $y_t \equiv \log Y_t$: logaritmo del producto; $\Delta y_{t+1} \equiv y_{t+1} - y_t$ es su tasa de crecimiento.
- ψ_{ya} (psi sub ya): multiplicador del producto respecto a la tecnología, definido como

  $$\psi_{ya} \equiv \frac{1+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$

  donde ϕ (phi) es el inverso aproximado de la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo y α (alfa) es el parámetro tecnológico de la función de producción Cobb–Douglas.

Derivación a partir de la Ecuación de Euler

Partimos de la Ecuación de Euler log-linealizada (ecuación (10)):

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t. \tag{33}$$

Recordamos dos relaciones clave:

- Definición de la tasa de interés real:

$$r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}.$$

- Condición de vaciado del mercado de bienes (ecuación (16)):

$$y_t = c_t.$$

Paso 1: expresar r_t en función del crecimiento esperado del consumo. Sustituimos r_t en (33):

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(r_t - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t.$$

Reordenamos para aislar r_t:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma}(r_t - \rho) &= c_t - E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(1-\rho_z)\, z_t, \\ r_t - \rho &= -\sigma\big(c_t - E_t\{c_{t+1}\}\big) + (1-\rho_z)\, z_t, \\ r_t &= \rho + (1-\rho_z)\, z_t + \sigma\big(E_t\{c_{t+1}\} - c_t\big). \end{aligned}$$

Usando $c_t = y_t$ (ecuación (16)), obtenemos:

$$r_t = \rho + (1-\rho_z)\, z_t + \sigma\, E_t\{\Delta y_{t+1}\}, \tag{34}$$

donde $\Delta y_{t+1} \equiv y_{t+1} - y_t$.

Esta es la *primera forma* de la Ecuación (20): la tasa real es la tasa de descuento ajustada por los choques de preferencias y por el crecimiento esperado del producto.

Paso 2: sustituir la trayectoria de equilibrio del producto. De la ecuación (19) sabemos que el producto de equilibrio es:

$$y_t = \psi_{ya}\, a_t + \psi_y,$$

donde ψ_y es una constante. Dado que a_t sigue un proceso AR(1),

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + \varepsilon_{a,t+1},$$

tenemos, tomando expectativas condicionales a la información en t:

$$E_t\{a_{t+1}\} = \rho_a a_t.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E_t\{y_{t+1}\} &= \psi_{ya}\, E_t\{a_{t+1}\} + \psi_y = \psi_{ya}\, \rho_a a_t + \psi_y, \\ E_t\{\Delta y_{t+1}\} &= E_t\{y_{t+1} - y_t\} \\ &= \big(\psi_{ya}\, \rho_a a_t + \psi_y\big) - \big(\psi_{ya}\, a_t + \psi_y\big) \\ &= \psi_{ya}(\rho_a - 1)\, a_t = -(1-\rho_a)\, \psi_{ya}\, a_t. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (34) obtenemos la *segunda forma* de la Ecuación (20):

$$r_t = \rho + (1-\rho_z)\, z_t - \sigma(1-\rho_a)\, \psi_{ya}\, a_t, \tag{35}$$

que coincide con la línea final de (20).

Interpretación económica de la Ecuación (20)

La expresión (20) permite descomponer la tasa de interés real de equilibrio en tres componentes:

1. **Componente de estado estacionario:** ρ (rho)

   En ausencia de choques ($a_t = 0$, $z_t = 0$), la ecuación se reduce a

   $$r_t = \rho,$$

   es decir, la tasa de interés real de largo plazo coincide con la tasa de descuento subjetiva del hogar. Esto es coherente con la interpretación de ρ como el rendimiento real requerido para que el hogar esté dispuesto a trasladar consumo en el tiempo.

2. **Choque de preferencias:** $(1-\rho_z)\, z_t$

   El término $(1-\rho_z)z_t$ muestra cómo un choque de preferencias z_t (que desplaza la utilidad marginal del consumo) se traslada a la tasa real:

   - Si z_t aumenta (el hogar valora más el consumo presente respecto al futuro), la tasa de interés real de equilibrio *aumenta*. Intuitivamente, el hogar exige un mayor rendimiento real para estar dispuesto a ahorrar.
   - La magnitud del impacto depende de la persistencia ρ_z: si ρ_z es cercana a uno, el factor $(1-\rho_z)$ es pequeño y el efecto contemporáneo sobre r_t es más moderado.

3. **Choque tecnológico:** $-\sigma(1-\rho_a)\, \psi_{ya}\, a_t$

   El término asociado a a_t tiene signo negativo:

   $$-\sigma(1-\rho_a)\, \psi_{ya} < 0,$$

   dado que $\sigma > 0$, $1-\rho_a > 0$ y $\psi_{ya} > 0$ en el modelo. Por tanto:

   - Un choque tecnológico positivo (a_t mayor) tiende a *reducir* la tasa de interés real r_t.

- Intuitivamente, una mejora de la productividad eleva el producto (y el ingreso) esperado; esto hace que, para mantener el equilibrio intertemporal del consumo, el rendimiento real requerido sobre los activos pueda ser más bajo: los hogares no necesitan una tasa tan alta para inducir el mismo patrón de ahorro.
- La importancia cuantitativa de este efecto viene modulada por:
  - σ (sigma): cuanto mayor es la aversión al riesgo y menor la elasticidad de sustitución intertemporal, más fuerte es el ajuste de la tasa real ante cambios en el crecimiento esperado.
  - $(1-\rho_a)$: cuando la tecnología es muy persistente ($\rho_a \approx 1$), el término $(1-\rho_a)$ es pequeño y el impacto contemporáneo sobre r_t se atenúa.
  - ψ_{ya}: captura cómo un choque en a_t se traduce en cambios en el producto y_t; a mayor ψ_{ya}, mayor es el efecto de un mismo a_t sobre el crecimiento esperado y, por ende, sobre r_t.

En conjunto, la Ecuación (20) refuerza el mensaje central del modelo clásico: la tasa de interés real es una variable *real* determinada por preferencias intertemporales y choques productivos, mientras que la política monetaria sólo influye sobre variables nominales como la inflación y el nivel de precios.

Ecuación (21): Salario real de equilibrio

La última variable real por caracterizar en el modelo es el *salario real*, definido como

$$\omega_t \equiv w_t - p_t,$$

donde $w_t \equiv \log W_t$ es el logaritmo del salario nominal y $p_t \equiv \log P_t$ el logaritmo del nivel de precios.

En equilibrio, el salario real viene dado por la demanda de trabajo de la firma (Ecuación (15)):

$$\omega_t = a_t - \alpha n_t + \log(1-\alpha). \tag{36}$$

Al sustituir el nivel de empleo de equilibrio (Ecuación (18)):

$$n_t = \psi_{na} a_t + \psi_n,$$

se obtiene una expresión reducida para ω_t que depende únicamente de la tecnología:

$$\omega_t = \psi_{\omega a} a_t + \psi_\omega. \tag{21}$$

Coeficientes de la Ecuación (21). Al sustituir $n_t = \psi_{na} a_t + \psi_n$ en (36) se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_t &= a_t - \alpha(\psi_{na} a_t + \psi_n) + \log(1-\alpha) \\ &= \big[1 - \alpha\psi_{na}\big] a_t + \big[\log(1-\alpha) - \alpha\psi_n\big]. \end{aligned}$$

Por tanto, identificamos:

$$\psi_{\omega a} \equiv 1 - \alpha\psi_{na}, \qquad \psi_\omega \equiv \log(1-\alpha) - \alpha\psi_n.$$

Sustituyendo los valores de ψ_{na} y ψ_n obtenidos previamente en la Ecuación (18),

$$\psi_{na} \equiv \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}, \qquad \psi_n \equiv \frac{\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$

y simplificando, el texto recoge los coeficientes en la forma:

$$\psi_{\omega a} \equiv \frac{\sigma+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha},$$
$$\psi_{\omega} \equiv \frac{\big[\sigma(1-\alpha)+\phi\big]\log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha}.$$

Interpretación económica. La expresión reducida (21) muestra que el salario real de equilibrio depende únicamente del choque tecnológico a_t (y de parámetros):

- **Neutralidad monetaria.** Ninguna variable monetaria (como i_t o m_t) ni el choque de preferencias z_t aparece en (21). La política monetaria sólo puede afectar el salario nominal w_t a través del nivel de precios p_t, pero no el salario real ω_t.
- **Efecto de la productividad.** Dado que

  $$\psi_{\omega a} = \frac{\sigma+\phi}{\sigma(1-\alpha)+\phi+\alpha} > 0,$$

  un aumento en la tecnología a_t (*choque positivo de productividad*) incrementa siempre el salario real de equilibrio ω_t. La productividad más alta eleva el producto marginal del trabajo y, en competencia perfecta, esto se traduce en un salario real más elevado.
- **Contraste con el empleo.** Mientras que el producto y_t y el salario real ω_t aumentan de forma inequívoca ante un choque tecnológico positivo, la reacción del empleo n_t es ambigua y depende del parámetro σ:
  - si $\sigma < 1$, el efecto sustitución domina al efecto ingreso y el empleo tiende a aumentar;
  - si $\sigma > 1$, el efecto ingreso puede dominar y el empleo tender a disminuir;
  - si $\sigma = 1$, los efectos se compensan y el empleo es invariante a a_t.

  En todos los casos, sin embargo, el salario real se mueve en la misma dirección que la productividad.

La Ecuación (21) completa la caracterización de las variables reales del modelo clásico: producción, empleo, tasa de interés real y salario real se determinan exclusivamente por choques reales (tecnología y preferencias) y parámetros estructurales, confirmando la neutralidad de la política monetaria sobre estas magnitudes.

Ecuación (22): La ecuación de Fisher

La Ecuación (22) marca el inicio del análisis de la *determinación del nivel de precios y la política monetaria*. Es el puente entre las variables reales, ya determinadas en las secciones anteriores, y las variables nominales del modelo.

La ecuación se conoce como la *ecuación de Fisher*:

$$i_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t. \tag{22}$$

Desglose de términos y contexto. La Ecuación (22) relaciona tres objetos clave:

- i_t: tasa de interés nominal en t, entendida como el logaritmo del rendimiento bruto del bono nominal, $I_t \equiv 1/Q_t$. En el modelo, es la variable que el banco central puede fijar directamente cuando conduce la política monetaria mediante una *regla de tasa de interés*.
- $E_t\{\pi_{t+1}\}$: inflación esperada entre t y $t+1$, donde $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t$ y $p_t \equiv \log P_t$. Es una variable nominal ligada al sendero del nivel de precios.
- r_t: tasa de interés real, definida por

  $$r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}.$$

  En el modelo clásico, r_t está determinada exclusivamente por factores reales (tecnología y preferencias), como quedó recogido en la Ecuación (20).

Papel de la ecuación de Fisher en el modelo clásico. La Ecuación (22) es crucial por varias razones:

- **Ajuste uno a uno entre i_t y la inflación esperada.** Dado un valor de la tasa real r_t, la ecuación de Fisher implica que cambios en la inflación esperada $E_t\{\pi_{t+1}\}$ deben reflejarse uno a uno en la tasa nominal i_t. En otras palabras, para un r_t dado, la política monetaria que fija i_t determina implícitamente el sendero de la inflación esperada.
- **Restricción real sobre la política monetaria.** La Ecuación (20) mostró que r_t es una variable real, función de los choques tecnológicos a_t y de preferencias z_t, y de parámetros estructurales, pero independiente de la forma específica de la política monetaria. La ecuación de Fisher, al imponer

  $$i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} = r_t,$$

  obliga a que la combinación de tasa nominal e inflación esperada sea consistente con ese valor de equilibrio de la tasa real.
- **Determinación de las variables nominales.** Dado el sendero de r_t (fijado por la economía real) y una regla de política para i_t, la ecuación de Fisher se convierte en un elemento central para determinar el sendero de la inflación esperada y, en consecuencia, del nivel de precios p_t y de otras variables nominales. A diferencia de las variables reales (y_t, n_t, r_t, ω_t), los valores de equilibrio de las variables nominales no pueden determinarse sin especificar la política monetaria.

Implicación en estado estacionario. En un estado estacionario sin crecimiento y sin choques, la tasa de interés real coincide con la tasa de descuento del hogar:

$$r = \rho.$$

En un *perfect foresight steady state*, donde la inflación es constante e igual a π, la ecuación de Fisher se reduce a:

$$i = \rho + \pi.$$

Esta relación resume la idea básica de Fisher: en el largo plazo, la tasa de interés nominal se descompone en una parte real (la tasa de descuento) y una parte puramente nominal (la inflación).

Ecuación (23): Proceso del choque de política monetaria

La Ecuación (23), introducida en la Sección 2.4.1 (*"Una trayectoria exógena para la tasa de interés nominal"*), especifica la dinámica del *componente estocástico* de la política monetaria. No es una condición de equilibrio ni de optimalidad, sino una hipótesis sobre cómo se comporta la autoridad monetaria.

El choque de política monetaria v_t sigue un proceso autorregresivo de orden uno (AR(1)):

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \epsilon_{v,t}, \tag{23}$$

donde $|\rho_v| < 1$ garantiza que el proceso sea estacionario.

Desglose de términos.

- v_t: componente estocástico de la política monetaria en t. Representa la desviación transitoria de la conducta "habitual" de la tasa de interés nominal.
- ρ_v: coeficiente de persistencia del choque monetario. Si ρ_v es alto, un shock en v_t tiene efectos prolongados sobre la trayectoria de la tasa nominal; si es bajo, el efecto se disipa rápidamente.
- $\epsilon_{v,t}$: innovación estocástica, con media cero y varianza constante. Representa la parte totalmente inesperada (no anticipada) del shock de política monetaria.

Vínculo con la regla de política monetaria. La Ecuación (23) se inserta en una regla sencilla para la tasa de interés nominal:

$$i_t = \bar{i} + v_t,$$

donde:

- $\bar{i}$ es el nivel "normal" o de referencia de la tasa nominal que el banco central mantendría en ausencia de shocks.
- v_t introduce desviaciones transitorias alrededor de ese nivel normal, interpretadas como "*monetary policy shocks*".

Desde un punto de vista didáctico, v_t puede captar:

- cambios inesperados en las preferencias del formulador de política;
- respuestas puntuales a eventos no anticipados;
- errores o imperfecciones en la implementación de la regla usual.

Rol analítico en el modelo clásico. Aunque en la versión clásica del modelo las variables reales son neutrales a la política monetaria, la dinámica de v_t resulta crucial para entender la determinación de las variables nominales:

- En combinación con la ecuación de Fisher,

  $$i_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t,$$

  la regla $i_t = \bar{i} + v_t$ implica que la inflación esperada viene dada por

  $$E_t\{\pi_{t+1}\} = \bar{i} + v_t - r_t,$$

  donde r_t ya fue determinada por factores reales (Ecuación (20)).
- De este modo, el proceso (23) fija la dinámica de la inflación esperada y, por extensión, condiciona la trayectoria del nivel de precios p_t.
- En la estructura clásica, esto conduce a un resultado importante: aun cuando las variables reales estén bien determinadas, el *nivel de precios* puede ser indeterminado o susceptible a fluctuaciones no fundamentales (shocks tipo *sunspots*), mientras que la inflación esperada sí queda unívocamente determinada por la combinación de r_t e i_t.

La Ecuación (23) formaliza cómo la política monetaria introduce shocks estocásticos en la tasa nominal a través de un proceso AR(1), lo cual es clave para estudiar la transmisión de la política monetaria sobre las variables nominales, incluso en un entorno donde las variables reales son neutrales a dicha política.

Ecuación (24): Ecuación de diferencias para la inflación

La Ecuación (24) resulta de combinar la regla de política monetaria con la ecuación de Fisher y es el punto de partida para analizar la determinación y la unicidad del equilibrio de inflación y del nivel de precios.

La ecuación se escribe en términos de desviaciones respecto al estado estacionario:

$$\varphi_\pi \hat{\pi}_t = E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} + \hat{r}_t - v_t, \tag{24}$$

donde $\hat{\pi}_t \equiv \pi_t - \pi$ es la desviación de la inflación respecto a su valor estacionario, y $\hat{r}_t \equiv r_t - \rho$ es la desviación de la tasa de interés real respecto a la tasa de descuento del hogar.

Derivación rigurosa desde la regla de política y Fisher. El punto de partida es la regla sencilla de tasa de interés nominal utilizada en la Sección 2.4.2:

$$i_t = \rho + \pi + \varphi_\pi(\pi_t - \pi) + v_t,$$

donde:

- $\rho + \pi$ es el componente de estado estacionario de la tasa nominal,
- $\varphi_\pi(\pi_t - \pi)$ es la respuesta sistemática del banco central a desviaciones de la inflación respecto a su meta,
- v_t es el shock de política monetaria, que sigue el proceso AR(1) de la Ecuación (23).

Por otro lado, la ecuación de Fisher (Ecuación (22)) relaciona la tasa nominal, la inflación esperada y la tasa real:

$$i_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t.$$

Igualando ambas expresiones para i_t:

$$\rho + \pi + \varphi_\pi(\pi_t - \pi) + v_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t.$$

Reordenando términos y usando la notación de desviaciones, $\hat{\pi}_t = \pi_t - \pi$ y $\hat{r}_t = r_t - \rho$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi_\pi \hat{\pi}_t &= E_t\{\pi_{t+1}\} - \pi + r_t - \rho - v_t \\ &= E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} + \hat{r}_t - v_t,\end{aligned}$$

que es precisamente la Ecuación (24).

Contenido económico de la Ecuación (24). La Ecuación (24) puede interpretarse como una ecuación de diferencias hacia adelante para la inflación (en desviaciones), donde:

- $E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\}$ recoge las expectativas sobre la inflación futura,
- $\hat{r}_t$ está completamente determinada por los choques reales (a_t y z_t) a través de la Ecuación (20),
- v_t introduce la componente puramente monetaria (shock de política).

Es decir, una vez fijado el comportamiento de las variables reales, la dinámica de la inflación queda gobernada por (24) en función de φ_π, $\hat{r}_t$ y v_t.

El principio de Taylor y la unicidad del equilibrio. La Ecuación (24) es la base del resultado central sobre determinación del nivel de precios:

- **Caso $\varphi_\pi > 1$ (principio de Taylor).** Si el banco central ajusta la tasa nominal más que uno a uno frente a cambios en la inflación (es decir, la respuesta de i_t a π_t es "agresiva"), la solución hacia adelante de (24) es convergente y se obtiene una trayectoria de inflación única y no explosiva. En este caso, inflación y nivel de precios quedan determinados de forma unívoca por los fundamentos reales y la regla de política monetaria.

- **Caso $\varphi_\pi < 1$.** Si la respuesta de la política es débil, la solución hacia adelante no converge: aparecen múltiples trayectorias posibles para la inflación, y el nivel de precios se vuelve *indeterminado*. En este entorno, shocks no fundamentales (*sunspot shocks*) pueden generar fluctuaciones en precios e inflación sin cambios en los fundamentos reales.

- **Caso límite $\varphi_\pi = 1$.** El sistema se encuentra en el borde entre determinación e indeterminación; pequeños cambios en la regla de política o en la estructura del modelo pueden inclinar el resultado hacia uno u otro lado.

La Ecuación (24) muestra que, una vez fijado el bloque real del modelo, la agresividad de la respuesta de la tasa nominal a la inflación (φ_π) es el elemento decisivo que determina si la economía posee un equilibrio nominal bien definido o sufre de indeterminación del nivel de precios.

Ecuación (25): Solución de equilibrio única para la inflación

La Ecuación (25) proporciona la solución de equilibrio para la desviación de la inflación, $\hat{\pi}_t \equiv \pi_t - \pi$, cuando la política monetaria sigue una regla de tasa de interés que satisface el principio de Taylor ($\varphi_\pi > 1$). A partir de la ecuación de diferencias para la inflación (Ecuación (24)):

$$\varphi_\pi \hat{\pi}_t = E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} + \hat{r}_t - v_t, \tag{24}$$

la solución hacia adelante no explosiva viene dada por:

$$\hat{\pi}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\pi^{-(k+1)} E_t\{\hat{r}_{t+k} - v_{t+k}\}. \tag{25}$$

Derivación hacia adelante de la Ecuación (24). Partimos de (24) y resolvemos para $E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\}$:

$$E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} = \varphi_\pi \hat{\pi}_t - (\hat{r}_t - v_t).$$

Tomando expectativas condicionales un período adelante y usando la ley de iteración de expectativas ($E_t[E_{t+1}(\cdot)] = E_t(\cdot)$), se obtiene:

$$E_t\{\hat{\pi}_{t+2}\} = \varphi_\pi E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} - E_t\{\hat{r}_{t+1} - v_{t+1}\}.$$

Sustituyendo recursivamente $E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\}$ en términos de $\hat{\pi}_t$ y de las secuencias futuras de $(\hat{r}_s - v_s)$, se llega a la expresión general para un horizonte finito T:

$$E_t\{\hat{\pi}_{t+T+1}\} = \varphi_\pi^{T+1}\hat{\pi}_t - \sum_{k=0}^{T} \varphi_\pi^{T-k} E_t\{\hat{r}_{t+k} - v_{t+k}\}.$$

Reordenando:

$$\hat{\pi}_t = \varphi_\pi^{-(T+1)} E_t\{\hat{\pi}_{t+T+1}\} + \sum_{k=0}^{T} \varphi_\pi^{-(k+1)} E_t\{\hat{r}_{t+k} - v_{t+k}\}.$$

Para obtener una solución bien comportada cuando $T \to \infty$, se impone la condición de no explosión (condición de transversalidad en términos de inflación):

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_\pi^{-(T+1)} E_t\{\hat{\pi}_{t+T+1}\} = 0.$$

Esta condición es válida si y solo si $\varphi_\pi > 1$, es decir, si la respuesta de la tasa nominal a la inflación es lo suficientemente agresiva. Bajo este supuesto, el primer término desaparece en el límite y obtenemos la solución hacia adelante:

$$\hat{\pi}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\pi^{-(k+1)} E_t\{\hat{r}_{t+k} - v_{t+k}\},$$

que coincide con la Ecuación (25).

Condiciones para la existencia y unicidad de la solución. La Ecuación (25) es:

- *No explosiva*: las contribuciones de los términos lejanos en el tiempo se atenúan geométricamente gracias al factor $\varphi_\pi^{-(k+1)}$.
- *Única*: una vez impuesta la condición de no explosión, no hay grados de libertad adicionales para elegir una senda alternativa de inflación; cualquier otra solución implicaría trayectorias explosivas.

La condición clave es:

$$\varphi_\pi > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{el banco central sube } i_t \text{ más que uno a uno ante cambios en } \pi_t.$$

Esta condición es exactamente el *principio de Taylor*.

Contenido económico de la Ecuación (25). La expresión (25) deja claras varias ideas:

- **Determinación de la inflación por fuerzas reales y monetarias.** Dado que $\hat{r}_t$ está determinado exclusivamente por los choques reales (tecnología a_t y preferencias z_t) a través de la Ecuación (20), la inflación queda anclada por:
  1. la senda esperada de las variables reales ($\{\hat{r}_{t+k}\}_{k\geq 0}$), y

2. la senda esperada de choques de política monetaria ($\{v_{t+k}\}_{k\geq 0}$).

- **Papel estabilizador de φ_π.** Cuanto mayor es φ_π, más pequeño es el peso $\varphi_\pi^{-(k+1)}$ asociado a cada choque futuro. En términos didácticos: una respuesta más agresiva de la tasa de interés a la inflación reduce la sensibilidad de la inflación a cualquier secuencia de choques reales o monetarios.

- **Choques de política monetaria.** El término $-v_{t+k}$ muestra que los shocks de política introducen fluctuaciones adicionales e "innecesarias" en la inflación: incluso si los fundamentos reales no cambiaran, una secuencia de v_t distintos de cero generaría variación en $\hat{\pi}_t$.

- **Determinación del nivel de precios.** Una vez determinada la senda de $\hat{\pi}_t$, la trayectoria del nivel de precios p_t queda fijada (hasta una constante inicial) mediante la acumulación de la inflación. Bajo $\varphi_\pi > 1$, inflación y nivel de precios dejan de ser indeterminados.

La Ecuación (25) muestra que, en una economía donde el bloque real ya está determinado, la elección de una regla de tasa de interés que satisfaga el principio de Taylor es suficiente para anclar de manera única la senda de la inflación y del nivel de precios.

Ecuación (26): Solución estacionaria e indeterminación del equilibrio nominal

La Ecuación (26) describe la dinámica de la inflación cuando la regla de tasa de interés del banco central *no* satisface el principio de Taylor, es decir, cuando el coeficiente de respuesta φ_π es menor que uno ($\varphi_\pi < 1$). En este caso, la solución de la ecuación de diferencias para la inflación es *hacia atrás* y da lugar a indeterminación del nivel de precios:

$$\pi_t = (1-\varphi_\pi)\,\pi + \varphi_\pi \pi_{t-1} - \hat{r}_{t-1} + v_{t-1} + \xi_t, \tag{26}$$

donde $\hat{r}_t \equiv r_t - \rho$ es la desviación de la tasa de interés real respecto a su valor estacionario y v_t es el choque de política monetaria definido en la Sección 2.4.1.

I. Punto de partida: ecuación de diferencias de inflación. Recordemos la ecuación de diferencias para la desviación de la inflación (Ecuación (24)):

$$\varphi_\pi \hat{\pi}_t = E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} + \hat{r}_t - v_t, \tag{24}$$

donde $\hat{\pi}_t \equiv \pi_t - \pi$ y $\hat{r}_t \equiv r_t - \rho$. Cuando $\varphi_\pi > 1$, esta ecuación admite una solución *hacia adelante* bien comportada (Ecuación (25)). En cambio, si $\varphi_\pi < 1$, la solución hacia adelante no converge y debemos considerar la solución *hacia atrás*.

II. Solución hacia atrás cuando $\varphi_\pi < 1$. Para ver la lógica, partimos de (24), pero ahora tomamos expectativas condicionales en $t-1$:

$$\varphi_\pi E_{t-1}\{\hat{\pi}_t\} = E_{t-1}\{\hat{\pi}_{t+1}\} + E_{t-1}\{\hat{r}_t - v_t\}.$$

Una solución genérica para $\hat{\pi}_t$ que permite *no unicidad* es:

$$\hat{\pi}_t = \varphi_\pi \hat{\pi}_{t-1} - \hat{r}_{t-1} + v_{t-1} + \xi_t,$$

donde el término ξ_t está construido de forma tal que:

$$E_{t-1}\{\xi_t\} = 0,$$

y asegura que la ecuación en expectativas (24) se siga cumpliendo. Volviendo a niveles ($\pi_t = \pi + \hat{\pi}_t$ y $\hat{r}_t = r_t - \rho$), se obtiene precisamente la forma en niveles de la Ecuación (26):

$$\pi_t = (1 - \varphi_\pi)\,\pi + \varphi_\pi \pi_{t-1} - \hat{r}_{t-1} + v_{t-1} + \xi_t.$$

III. El papel del término $\boldsymbol{\xi_t}$ y la indeterminación. El término ξ_t es una secuencia de shocks que:

- no está directamente vinculada a los fundamentos reales del modelo (productividad a_t, preferencias z_t), ni a la regla sistemática de política monetaria, y
- sólo está restringida por la condición $E_{t-1}\{\xi_t\} = 0$.

En la literatura, estos shocks se conocen como *sunspot shocks* o choques de "expectativas autocumplidas":

- Cualquier trayectoria de inflación $\{\pi_t\}$ que satisfaga (26) para alguna realización admisible de $\{\xi_t\}$ es consistente con equilibrio.
- Por tanto, la inflación (y el nivel de precios p_t) dejan de estar determinados de forma única por los fundamentos reales y monetarios.

IV. Interpretación económica. La Ecuación (26) permite extraer varias conclusiones:

- **Respuesta insuficiente de la política monetaria.** Cuando $\varphi_\pi < 1$, el banco central ajusta la tasa nominal *menos que uno a uno* frente a un aumento de la inflación. En términos de la Ecuación de Fisher, esto implica que la tasa real $r_t = i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}$ no aumenta lo suficiente como para estabilizar las expectativas de inflación.
- **Indeterminación del nivel de precios.** A diferencia del caso $\varphi_\pi > 1$, donde existe una única solución hacia adelante para $\hat{\pi}_t$, aquí hay un conjunto continuo de soluciones. Distintas realizaciones de $\{\xi_t\}$ generan diferentes trayectorias de inflación y de precios, todas compatibles con equilibrio.
- **Amplificación de choques no fundamentales.** Puesto que ξ_t no está anclado por los fundamentos, cambios puramente "psicológicos" o de expectativas pueden generar fluctuaciones en inflación y precios sin que haya variación en la productividad o en las preferencias. En este sentido, la política monetaria débil ($\varphi_\pi < 1$) abre la puerta a ciclos impulsados por sunspots.

La Ecuación (26) muestra que, si la regla de tasa de interés no satisface el principio de Taylor, el modelo admite múltiples trayectorias de inflación compatibles con equilibrio, y el nivel de precios se vuelve indeterminado. La estabilidad nominal ya no está garantizada por la política monetaria.

1. Capítulo 3: El modelo Keynesiano básico

Ecuación (1): Demanda individual de bienes diferenciados

La Ecuación (1) describe la *demanda óptima del hogar por cada variedad* de bien $i \in [0,1]$ en el modelo básico nuevo keynesiano con bienes diferenciados y competencia monopolística en el mercado de bienes. Su forma es:

$$C_t(i) \;=\; \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\epsilon} C_t \tag{1}$$

Cada productor fija el precio de su variedad i, pero enfrenta esta curva de demanda con elasticidad constante ϵ. El hogar representativo elige, en cada periodo t, un conjunto de cantidades $\{C_t(i)\}_{i\in[0,1]}$ de bienes diferenciados, sujeto a una restricción presupuestaria agregada. El consumo total se resume mediante un índice CES de consumo C_t, mientras que los precios $\{P_t(i)\}$ se combinan en un índice de precios agregado P_t.

La ecuación (1) relaciona el consumo del bien i con:

- el nivel de consumo agregado C_t, y
- el precio relativo del bien i, $\frac{P_t(i)}{P_t}$, elevado a la potencia $-\epsilon$.

Así, la demanda por cada variedad es proporcional al consumo agregado y decreciente en su precio relativo, con elasticidad de sustitución constante ϵ.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 1)

Término	**Definición rigurosa**	**Rol económico**
$C_t(i)$	Cantidad del bien i consumida en el periodo t.	Demanda individual por la variedad i.
C_t	Índice de consumo agregado definido por un agregador CES.	Nivel de consumo total ("cesta compuesta").
$P_t(i)$	Precio nominal del bien i en el periodo t.	Precio fijado por la empresa i.
P_t	Índice de precios agregado ("nivel general de precios").	Precio mínimo por unidad del índice C_t.
$\epsilon > 1$	Elasticidad de sustitución entre variedades de bienes.	Mide la sensibilidad de la demanda ante cambios en precios relativos.

Cuadro 1: Símbolos usados en la Ecuación (1).

Derivación matemática de la Ecuación (1)

La Ecuación (1) se obtiene resolviendo el *problema intraperiódico* del hogar: dado un nivel de gasto en consumo, el hogar elige la combinación de variedades que maximiza el índice de consumo C_t.

1. Agregador CES de consumo El índice de consumo se define como:

$$C_t \;\equiv\; \left(\int_0^1 C_t(i)^{\,1-\frac{1}{\epsilon}}\,di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}. \tag{1.a}$$

Este es un agregador de tipo CES (elasticidad de sustitución constante) con elasticidad de sustitución entre variedades igual a ϵ.

2. Gasto total en consumo Dado el vector de precios $\{P_t(i)\}_{i\in[0,1]}$, el gasto total en consumo es:

$$X_t \;\equiv\; \int_0^1 P_t(i)\,C_t(i)\,di. \tag{1.b}$$

En el problema intraperiódico, X_t se toma como dado: el hogar ya decidió cuánto gastar en total en consumo y ahora decide cómo repartir ese gasto entre variedades.

3. Problema de maximización intraperiódico El hogar resuelve, para cada t,

$$\max_{\{C_t(i)\}_{i\in[0,1]}} C_t \quad \text{sujeto a} \quad \int_0^1 P_t(i)\,C_t(i)\,di = X_t, \tag{1.c}$$

donde C_t está dado por (1.a). El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \left(\int_0^1 C_t(i)^{\,1-\frac{1}{\epsilon}}\,di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \lambda_t\left(\int_0^1 P_t(i)\,C_t(i)\,di - X_t\right). \tag{1.d}$$

4. Condición de primer orden Para un i genérico, la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_t(i)} = \frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} - \lambda_t P_t(i) = 0. \tag{1.e}$$

Definamos

$$S_t \;\equiv\; \int_0^1 C_t(j)^{\,1-\frac{1}{\epsilon}}\,dj, \quad \text{de modo que} \quad C_t = S_t^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}.$$

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} &= \frac{\epsilon}{\epsilon-1} S_t^{\frac{1}{\epsilon-1}} \frac{\partial S_t}{\partial C_t(i)} \\
&= \frac{\epsilon}{\epsilon-1} S_t^{\frac{1}{\epsilon-1}} \left(1-\frac{1}{\epsilon}\right) C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}} \\
&= S_t^{\frac{1}{\epsilon-1}} C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{1.f}$$

Como $C_t = S_t^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$, se verifica que

$$C_t^{\frac{1}{\epsilon}} = \left(S_t^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} = S_t^{\frac{1}{\epsilon-1}},$$

y por tanto

$$\frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} = C_t^{\frac{1}{\epsilon}}\, C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}. \tag{1.g}$$

Sustituyendo (1.g) en la condición de primer orden (1.e), obtenemos:

$$C_t^{\frac{1}{\epsilon}}\, C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}} = \lambda_t P_t(i). \tag{1.h}$$

Elevando ambos lados de (1.h) a la potencia ϵ:

$$C_t\, C_t(i)^{-1} = \lambda_t^{\epsilon} P_t(i)^{\epsilon}, \tag{1.i}$$

de donde:

$$C_t(i) = C_t\, \lambda_t^{-\epsilon} P_t(i)^{-\epsilon}. \tag{1.j}$$

Tomando dos variedades cualesquiera i y j, el cociente de demandas es:

$$\frac{C_t(i)}{C_t(j)} = \left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\epsilon}, \tag{1.k}$$

lo que muestra directamente que ϵ es la elasticidad de sustitución entre variedades.

5. Índice de precios P_t y condición de gasto mínimo El índice de precios ideal se define como:

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}\, di\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}, \tag{1.l}$$

y el gasto mínimo necesario para alcanzar un consumo C_t viene dado por:

$$X_t = P_t C_t. \tag{1.m}$$

Sustituyendo (1.j) en la definición de gasto (1.b):

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^1 P_t(i)\, C_t(i)\, di \\ &= \int_0^1 P_t(i)\, C_t \lambda_t^{-\epsilon} P_t(i)^{-\epsilon}\, di \\ &= C_t \lambda_t^{-\epsilon} \int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}\, di. \end{aligned} \tag{1.n}$$

Por la definición de P_t en (1.l),

$$\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}\, di = P_t^{1-\epsilon},$$

de modo que:

$$X_t = C_t \lambda_t^{-\epsilon} P_t^{1-\epsilon}. \tag{1.o}$$

Imponiendo la condición de gasto mínimo (1.m), $X_t = P_t C_t$, se obtiene:

$$P_t C_t = C_t \lambda_t^{-\epsilon} P_t^{1-\epsilon} \quad \Rightarrow \quad P_t = \lambda_t^{-\epsilon} P_t^{1-\epsilon}. \tag{1.p}$$

Dividiendo por $P_t^{1-\epsilon}$ (suponiendo $P_t > 0$):

$$P_t^{\epsilon} = \lambda_t^{-\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = P_t^{-1}.$$

Sustituyendo $\lambda_t = P_t^{-1}$ en (1.j):

$$\begin{aligned} C_t(i) &= C_t \left(P_t^{-1}\right)^{-\epsilon} P_t(i)^{-\epsilon} \\ &= C_t \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\epsilon}, \end{aligned} \tag{1.q}$$

con lo cual recuperamos exactamente la Ecuación (1).

Interpretación económica de la Ecuación (1)

La ecuación (1) resume que:

- La demanda por la variedad i es *proporcional* al consumo agregado C_t.
- Es *inversamente proporcional* al precio relativo $\frac{P_t(i)}{P_t}$, con elasticidad (en valor absoluto) ϵ.

Desde el punto de vista de la empresa i, (1) es la *curva de demanda* que enfrenta: dado C_t y P_t, si fija un precio por encima del agregado, la cantidad demandada cae según una función de elasticidad constante.

Ecuación (2): Condición de oferta de trabajo log-linealizada

La Ecuación (2) es la versión log-linealizada de la condición de optimalidad que determina la *oferta de trabajo* del hogar representativo. En notación logarítmica, se escribe como:

$$w_t - p_t \;=\; \sigma\, c_t \;+\; \phi\, n_t \tag{2}$$

donde el lado izquierdo es el salario real en logaritmos y el lado derecho recoge cómo dicho salario real debe compensar, en equilibrio, la desutilidad marginal del trabajo y la utilidad marginal del consumo.

Tabla de símbología relevante (Ecuación 2)

Derivación matemática de la Ecuación (2)

1. Función de utilidad periódica El hogar representativo tiene una función de utilidad instantánea del tipo:

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} Z_t, \qquad \sigma \neq 1. \tag{2.a}$$

Aquí Z_t es un factor que escala la desutilidad del trabajo (choque o preferencia sobre el trabajo).

Término	Definición rigurosa	Rol económico
w_t	Logaritmo del salario nominal W_t.	Contribuye al salario real $w_t - p_t$.
p_t	Logaritmo del índice de precios agregado P_t.	Deflaciona el salario nominal para obtener el salario real.
c_t	Logaritmo del índice de consumo agregado C_t.	Afecta la utilidad marginal del consumo.
n_t	Logaritmo del empleo u horas trabajadas N_t.	Afecta la desutilidad marginal del trabajo.
$\sigma > 0$	Inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.	Sensibilidad de la utilidad marginal del consumo al nivel de c_t.
$\phi > 0$	Parámetro de curvatura de la desutilidad del trabajo.	Controla la sensibilidad de la desutilidad marginal del trabajo a n_t.

Cuadro 2: Símbolos usados en la Ecuación (2).

2. Utilidades marginales Derivamos la utilidad con respecto a consumo y trabajo:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma}, \tag{2.b}$$

$$U_{n,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial N_t} = -Z_t\, N_t^{\phi}. \tag{2.c}$$

3. Condición de optimalidad intraperiódica La condición de primer orden respecto al trabajo iguala el salario real con la RMS entre trabajo y consumo:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = \frac{W_t}{P_t}. \tag{2.d}$$

En el lado derecho aparece el salario real $\frac{W_t}{P_t}$. El lado izquierdo es la RMS entre trabajo y consumo.

Sustituyendo (2.b) y (2.c) en (2.d), se obtiene:

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}} = -\frac{-Z_t N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{Z_t N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = Z_t\, C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{2.e}$$

Bajo el supuesto estándar de que el término Z_t es constante en el entorno del estado estacionario (o que se absorbe en el nivel de los parámetros), la condición no lineal puede escribirse como:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\phi}. \tag{2.f}$$

4. Paso a logaritmos Definimos los logaritmos de las variables reales y nominales:

$$w_t \equiv \log W_t, \qquad p_t \equiv \log P_t, \qquad c_t \equiv \log C_t, \qquad n_t \equiv \log N_t. \tag{2.g}$$

Tomando logaritmos en ambos lados de (2.f), se tiene:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{W_t}{P_t}\right) &= \log\left(C_t^{\sigma} N_t^{\phi}\right)\\ w_t - p_t &= \sigma \, \log C_t \; + \; \phi \log N_t\\ w_t - p_t &= \sigma c_t \; + \; \phi n_t. \end{aligned} \tag{2.h}$$

Esta relación es lineal en términos de logaritmos y puede interpretarse como la versión log-lineal de la condición de oferta de trabajo alrededor de un estado estacionario no estocástico.

Identificando (2.h) como la ecuación de oferta de trabajo log-linealizada, recuperamos precisamente la Ecuación (2):

$$w_t - p_t = \sigma\, c_t \; + \; \phi\, n_t.$$

Interpretación económica de la Ecuación (2)

La Ecuación (2) proporciona una relación de equilibrio entre:

- **Salario real (lado izquierdo):** $w_t - p_t$ es el pago real por unidad de trabajo.
- **Condiciones de preferencia (lado derecho):**
  - σc_t: cuanto mayor es el consumo c_t, menor es la utilidad marginal del consumo; para que el hogar esté dispuesto a trabajar, el salario real debe compensar esta menor utilidad marginal.
  - ϕn_t: cuanto mayor es el trabajo n_t, mayor es la desutilidad marginal del trabajo, lo que exige un salario real más alto para inducir una mayor oferta laboral.

En términos intuitivos:

1. Un **aumento del salario real** incentiva una mayor oferta de trabajo n_t, pues el beneficio de trabajar (medido en consumo adicional) crece respecto al costo en términos de ocio.
2. Un **aumento del consumo** c_t reduce la utilidad marginal del consumo; para mantener la condición de optimalidad, el hogar requerirá un salario real más alto o ajustará su oferta laboral.
3. El parámetro ϕ controla la *elasticidad de la oferta laboral*: cuanto más grande es ϕ, más rápido crece la desutilidad marginal del trabajo y menos elástica es la respuesta de n_t ante cambios en el salario real.

Ecuación (3): Ecuación de Euler log-linealizada para el consumo

La Ecuación (3) es la versión log-linealizada de la condición de optimalidad intertemporal del hogar (Ecuación de Euler), que determina la relación entre consumo presente, consumo futuro esperado y la tasa de interés real. En el modelo básico nuevo keynesiano se escribe como:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\big(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\big) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t. \tag{3}$$

El lado izquierdo es el consumo presente (en logaritmos o desviaciones logarítmicas). El lado derecho combina:

- el consumo futuro esperado $E_t\{c_{t+1}\}$,
- la tasa de interés real esperada $i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}$, ajustada por la preferencia temporal ρ,
- y un término que recoge los efectos del shock de preferencias z_t.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 3)

Término	Definición rigurosa	Rol económico
c_t	Logaritmo (o desviación logarítmica) del consumo agregado C_t.	Consumo presente.
$E_t\{c_{t+1}\}$	Expectativa condicional en t del logaritmo del consumo C_{t+1}.	Consumo futuro esperado.
i_t	Tasa de interés nominal a corto plazo. Definida por $i_t \equiv -\log Q_t$.	Entra en la tasa de interés real esperada.
π_{t+1}	Inflación entre t y $t+1$: $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t$.	Corrige la tasa nominal para obtener la tasa real.
$E_t\{\pi_{t+1}\}$	Inflación esperada para el periodo $t+1$.	Determina la tasa de interés real esperada.
ρ	$\rho \equiv -\log\beta$, donde $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento subjetivo.	Captura la impaciencia del hogar (tasa de descuento subjetiva).
z_t	Logaritmo del shock de preferencias Z_t. Satisface $z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_t^z$.	Shifter de preferencias intertemporales (choque de demanda).
ρ_z	Parámetro de persistencia del shock de preferencias, $0 \le \rho_z < 1$.	Determina cuán persistente es z_t.
$\sigma > 0$	Inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.	Controla la sensibilidad del consumo a la tasa de interés real.

Cuadro 3: Símbolos usados en la Ecuación (3).

Derivación matemática de la Ecuación (3)

1. Problema intertemporal y condición de Euler El hogar maximiza la utilidad esperada:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, U(C_t, N_t; Z_t),$$

sujeto a una restricción presupuestaria intertemporal. Para la derivación de la Ecuación de Euler, nos centramos en la utilidad marginal del consumo. Suponemos que la parte relevante de la utilidad puede escribirse de forma que la utilidad marginal del consumo sea:

$$U_{c,t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t} = Z_t \, C_t^{-\sigma}, \tag{3.a}$$

es decir, Z_t desplaza (escala) la utilidad marginal del consumo y σ gobierna su curvatura.

La condición de Euler para el bono nominal de un periodo, cuyo precio en términos nominales es Q_t, es:

$$Q_t = \beta \, E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \, \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{3.b}$$

Aquí P_t es el nivel de precios en t, de modo que P_t/P_{t+1} es el inverso de la inflación bruta.

2. Sustitución de la utilidad marginal del consumo Sustituyendo $U_{c,t}$ de (3.a) en (3.b):

$$\begin{aligned} Q_t &= \beta \, E_t \left\{ \frac{Z_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}}{Z_t C_t^{-\sigma}} \, \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \\ &= \beta \, E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.c}$$

3. Definiciones logarítmicas y de tasas de interés Definimos logaritmos:

$$c_t \equiv \log C_t, \quad p_t \equiv \log P_t, \quad z_t \equiv \log Z_t. \tag{3.d}$$

La inflación se define como:

$$\pi_{t+1} \equiv p_{t+1} - p_t. \tag{3.e}$$

Definimos también el logaritmo del precio del bono:

$$q_t \equiv \log Q_t \quad \Rightarrow \quad i_t \equiv -q_t, \tag{3.f}$$

de forma que i_t representa (aproximadamente) la tasa de interés nominal de corto plazo.

Tomando logaritmos dentro de la esperanza en (3.c) y linealizando alrededor de un estado estacionario no estocástico, usamos las aproximaciones de primer orden:

$$\log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \approx c_{t+1} - c_t, \quad \log \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \approx z_{t+1} - z_t, \quad \log \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \approx -\pi_{t+1}.$$

La condición de Euler (3.c) implica, en forma log-lineal aproximada:

$$q_t \approx \log \beta + E_t \left[-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1} \right]. \tag{3.g}$$

4. Uso de $\rho \equiv -\log \beta$ y tasa real Definimos:

$$\rho \equiv -\log \beta > 0, \tag{3.h}$$

de modo que $\log \beta = -\rho$. Además, con $i_t \equiv -q_t$, de (3.g) se obtiene:

$$\begin{aligned}
-i_t &\approx -\rho + E_t \left[-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\right] \\
i_t &\approx \rho - E_t \left[-\sigma(c_{t+1} - c_t) + (z_{t+1} - z_t) - \pi_{t+1}\right] \\
i_t &\approx \rho + \sigma E_t(c_{t+1} - c_t) - E_t(z_{t+1} - z_t) + E_t(\pi_{t+1}). \qquad (3.\mathrm{i})
\end{aligned}$$

Reordenando para aislar $c_t - E_t\{c_{t+1}\}$, tenemos:

$$\sigma\big(c_t - E_t\{c_{t+1}\}\big) \approx i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho - \big(E_t z_{t+1} - z_t\big). \tag{3.j}$$

Dividiendo entre σ:

$$c_t - E_t\{c_{t+1}\} \approx -\frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right) - \frac{1}{\sigma}\left(E_t z_{t+1} - z_t\right). \tag{3.k}$$

5. Proceso para el shock de preferencias z_t Suponemos que el shock de preferencias sigue un proceso AR(1):

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_t^z, \qquad 0 \leq \rho_z < 1. \tag{3.l}$$

Entonces:

$$E_t\{z_{t+1}\} = \rho_z z_t, \quad \Rightarrow \quad E_t z_{t+1} - z_t = (\rho_z - 1) z_t.$$

Sustituyendo en (3.k):

$$\begin{aligned}
c_t - E_t\{c_{t+1}\} &\approx -\frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right) - \frac{1}{\sigma}(\rho_z - 1)\, z_t \\
&= -\frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t. \qquad (3.\mathrm{m})
\end{aligned}$$

Finalmente, reordenando para despejar c_t:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t, \tag{37}$$

que coincide exactamente con la Ecuación (3).

Interpretación económica de la Ecuación (3)

La Ecuación (3) puede leerse como:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t.$$

- **Consumo futuro esperado:** El consumo presente c_t está positivamente relacionado con el consumo futuro esperado $E_t\{c_{t+1}\}$. Si el hogar anticipa un nivel alto de consumo futuro, será óptimo suavizar el consumo y mantener un nivel relativamente alto también en t.

- **Tasa de interés real esperada:** El término $i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}$ es la tasa de interés real ex-ante. La ecuación muestra que:

$$\frac{\partial c_t}{\partial(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\})} = -\frac{1}{\sigma} < 0.$$

  Es decir, un aumento de la tasa de interés real (por encima de ρ) encarece el consumo presente respecto al consumo futuro, induciendo al hogar a reducir c_t y ahorrar más. La magnitud de esta respuesta está inversamente relacionada con σ: una menor σ (mayor elasticidad de sustitución intertemporal) implica una respuesta más fuerte del consumo a la tasa real.

- **Choques de preferencias z_t:** El término $\frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z)\, z_t$ muestra cómo los shocks de preferencias afectan el consumo actual. Si ρ_z es bajo (shock poco persistente), el ajuste $(1-\rho_z)$ es grande y el shock afecta más intensamente al consumo de hoy; si ρ_z se acerca a 1 (shock muy persistente), el efecto se reparte a lo largo del tiempo.

- **Interpretación como DIS (Ecuación IS Dinámica):** Al combinar esta ecuación con la condición de equilibrio del mercado de bienes (en el modelo básico, $Y_t = C_t$), puede reescribirse reemplazando c_t por y_t, dando lugar a la llamada *Ecuación IS dinámica*, que liga el nivel de actividad (producto) con la tasa de interés real esperada y con choques de demanda.

Ecuación (5): Función de producción de la empresa

La Ecuación (5) introduce la tecnología de producción utilizada por cada empresa i en el modelo. Se asume que todas las empresas comparten una *misma* función de producción, dada por:

$$Y_t(i) \;=\; A_t\, N_t(i)^{1-\alpha} \tag{5}$$

donde el único insumo variable es el trabajo $N_t(i)$ y A_t representa el nivel agregado de tecnología o productividad total de los factores.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 5)

Derivación y propiedades básicas de la función de producción

La Ecuación (5) se postula como una función de producción de tipo Cobb–Douglas con un único factor de producción explícito: el trabajo. Aquí no se modela el capital como input variable, por lo que la parte relevante de la tecnología se condensa en A_t.

1. Forma funcional y rendimientos respecto al trabajo La función

$$Y_t(i) = A_t\, N_t(i)^{1-\alpha} \tag{5.a}$$

tiene las siguientes propiedades:

Término	Definición rigurosa	Rol económico
$Y_t(i)$	Producción del bien diferenciado i en el periodo t.	Oferta individual de la variedad i.
A_t	Nivel de tecnología común a todas las empresas.	Factor de productividad total, exógeno.
$N_t(i)$	Empleo (u horas trabajadas) utilizadas por la empresa i en el periodo t.	Único insumo variable en la producción.
$\alpha \in [0, 1)$	Parámetro de la función de producción. El exponente del trabajo es $1 - \alpha$.	Determina la elasticidad del producto respecto al trabajo.

Cuadro 4: Símbolos usados en la Ecuación (5).

- **Elasticidad del producto respecto al trabajo:** La elasticidad del producto de la empresa i respecto a su insumo de trabajo $N_t(i)$ es $1 - \alpha$. Es decir, un cambio proporcional en $N_t(i)$ genera un cambio proporcional en $Y_t(i)$ de magnitud $1 - \alpha$.
- **Rendimientos a escala en el trabajo:** Dado que sólo varía $N_t(i)$:
    - Si $\alpha = 0$, entonces $Y_t(i) = A_t N_t(i)$: hay rendimientos constantes a escala en el trabajo (una duplicación de $N_t(i)$ duplica la producción).
    - Si $\alpha > 0$, el exponente $1 - \alpha \in (0, 1)$ implica rendimientos *decrecientes* en el trabajo: duplicar $N_t(i)$ aumenta $Y_t(i)$ menos que proporcionalmente.

2. Producto marginal del trabajo El *producto marginal del trabajo* (PMN o MPN) de la empresa i se obtiene derivando $Y_t(i)$ respecto a $N_t(i)$:

$$\begin{aligned} MPN_t(i) &\equiv \frac{\partial Y_t(i)}{\partial N_t(i)} \\ &= A_t \, (1 - \alpha) \, N_t(i)^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{5.b}$$

Propiedades:

- $MPN_t(i)$ es proporcional a A_t: un mayor nivel de tecnología aumenta el producto marginal del trabajo en la misma proporción.
- Si $\alpha > 0$, el producto marginal del trabajo es *decreciente* en $N_t(i)$: al aumentar el empleo, el rendimiento adicional de una unidad extra de trabajo disminuye.

Esta expresión será central en la determinación del *costo marginal* de la empresa, ya que el costo marginal real se obtiene como salario real dividido entre el producto marginal del trabajo:

$$MC_t(i) \propto \frac{W_t/P_t}{MPN_t(i)}. \tag{5.c}$$

En el modelo, con empresas idénticas y competencia monopolística, el costo marginal será un determinante clave del precio óptimo.

3. Versión en logaritmos Definimos:

$$y_t(i) \equiv \log Y_t(i), \quad a_t \equiv \log A_t, \quad n_t(i) \equiv \log N_t(i). \tag{5.d}$$

Tomando logaritmos en (5.a):

$$\begin{aligned} \log Y_t(i) &= \log A_t + (1-\alpha)\, \log N_t(i) \\ y_t(i) &= a_t + (1-\alpha)\, n_t(i). \end{aligned} \tag{5.e}$$

Esta relación lineal en logaritmos es la base para la posterior *log-linealización agregada*. Más adelante, cuando se agreguen las decisiones de todas las empresas (bajo simetría en A_t y en ciertos casos en $N_t(i)$), se obtendrá una relación agregada entre el producto total, el empleo total y la tecnología.

Interpretación económica de la Ecuación (5)

La Ecuación (5) cumple varios roles clave en el modelo:

- **Tecnología común y choques de productividad:** El término A_t representa el nivel de productividad total de la economía. Un aumento de A_t (choque tecnológico positivo) desplaza hacia arriba la función de producción de todas las empresas: para un mismo nivel de trabajo $N_t(i)$, la producción es mayor. Estos choques son responsables de variaciones en el producto natural y en el equilibrio de largo plazo del modelo.

- **Demanda de trabajo de la empresa:** Dado un salario real W_t/P_t y un precio de venta $P_t(i)$, cada empresa elige $N_t(i)$ para maximizar beneficios. La condición de primer orden iguala el valor del producto marginal del trabajo con el salario real. Por lo tanto, el $MPN_t(i)$ derivado en (5.b) entra directamente en la ecuación de demanda de trabajo de la empresa.

- **Costo marginal y fijación de precios:** En un mercado de bienes con competencia monopolística, cada empresa fija su precio como un margen sobre el costo marginal:

  $$P_t(i) \propto \mu \times MC_t(i),$$

  donde μ es el mark-up. Dado que $MC_t(i)$ depende del $MPN_t(i)$ y por tanto de A_t y $N_t(i)$, la tecnología de producción condiciona el comportamiento de precios y, en última instancia, la inflación.

- **Relación agregada producto-trabajo-tecnología:** Bajo aproximaciones de primer orden y simetría entre empresas, la versión agregada de (5.e) implica una relación del tipo:

  $$y_t \approx a_t + (1-\alpha)\, n_t,$$

  que será usada más adelante para conectar empleo agregado, producto agregado y choques tecnológicos, así como para definir el nivel de producto natural.

Ecuación (6): Proceso AR(1) para la tecnología

La Ecuación (6) describe la dinámica estocástica del nivel de tecnología agregada en el modelo. En términos logarítmicos, se supone que la tecnología sigue un proceso autorregresivo de primer orden:

$$a_t = \rho_a \, a_{t-1} + \varepsilon_{a,t} \tag{6}$$

donde a_t es el logaritmo del nivel de tecnología A_t, ρ_a mide la persistencia del proceso y $\varepsilon_{a,t}$ es un shock puramente exógeno.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 6)

Término	Definición rigurosa	Rol económico
A_t	Nivel de tecnología agregada en el periodo t.	Multiplicador de productividad en la función de producción.
a_t	Logaritmo de A_t, es decir $a_t \equiv \log A_t$.	Representa la tecnología en unidades logarítmicas.
ρ_a	Coeficiente autorregresivo del proceso de a_t, con $0 \leq \rho_a < 1$.	Mide la persistencia del shock tecnológico.
$\varepsilon_{a,t}$	Shock de tecnología, ruido blanco con media cero y varianza constante.	Fuente exógena de fluctuaciones en la productividad.

Cuadro 5: Símbolos usados en la Ecuación (6).

Origen y formulación del proceso tecnológico

1. Tecnología en la función de producción En la Ecuación (5) se postuló la función de producción de cada empresa:

$$Y_t(i) = A_t \, N_t(i)^{1-\alpha}, \tag{6.a}$$

donde A_t es un factor de productividad común a todas las firmas. Para analizar la dinámica del modelo, es necesario especificar cómo evoluciona A_t a lo largo del tiempo.

2. Paso a logaritmos Definimos:

$$a_t \equiv \log A_t. \tag{6.b}$$

En estos términos, las variaciones en a_t miden cambios porcentuales (aproximados) en el nivel de tecnología A_t.

3. Suposición AR(1) sobre la tecnología Se postula que a_t sigue un proceso autorregresivo de primer orden:

$$a_t = \rho_a \, a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}, \tag{6.c}$$

donde:

- $|\rho_a| < 1$: garantiza que el proceso sea estacionario en torno a una media (que tomamos como cero en desviaciones).
- $\varepsilon_{a,t}$ es un shock de ruido blanco: $E(\varepsilon_{a,t}) = 0$, $E(\varepsilon_{a,t}\varepsilon_{a,s}) = 0$ para $t \neq s$.

Este tipo de proceso es estándar en macroeconomía para modelar variables exógenas que muestran persistencia en el tiempo, como la productividad agregada.

4. Propiedades básicas del proceso Repitiendo (6.c) hacia atrás recursivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} a_t &= \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{a,t} \\ &= \rho_a(\rho_a a_{t-2} + \varepsilon_{a,t-1}) + \varepsilon_{a,t} \\ &= \rho_a^2 a_{t-2} + \rho_a \varepsilon_{a,t-1} + \varepsilon_{a,t} \\ &\;\vdots \\ &= \rho_a^k a_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_a^j \varepsilon_{a,t-j}. \end{aligned} \tag{6.d}$$

Para k grande y $|\rho_a| < 1$, el término $\rho_a^k a_{t-k}$ se vuelve despreciable, y la dinámica actual de a_t está dominada por el historial descontado de shocks pasados:

$$a_t \approx \sum_{j=0}^{\infty} \rho_a^j \varepsilon_{a,t-j}. \tag{6.e}$$

Esto muestra que un shock $\varepsilon_{a,t}$ tiene efectos persistentes, pero decrecientes, sobre la trayectoria futura de la productividad.

Interpretación económica de la Ecuación (6)

La Ecuación (6) cumple el papel de *proceso generador de shocks de oferta*:

- **Persistencia de los shocks tecnológicos:** Si ρ_a está cerca de 1, un aumento de a_t (choque tecnológico positivo) afecta la productividad durante muchos periodos, aproximándose a un shock casi permanente. Si ρ_a es pequeño, el impacto se disipa rápidamente.
- **Impacto sobre la oferta agregada y el producto natural:** Dado que la tecnología entra multiplicativamente en la función de producción, un shock positivo $\varepsilon_{a,t} > 0$ eleva A_t, desplaza hacia arriba la productividad de todas las empresas, reduce el costo marginal y tiende a aumentar el nivel de producción que prevalecería con precios flexibles (producto natural).

- **Relación con la tasa natural de interés:** En el equilibrio con precios flexibles, un aumento persistente de la productividad modifica el perfil óptimo de consumo intertemporal, afectando la tasa de interés real que iguala ahorro e inversión (tasa natural). Por ello, a_t aparece como determinante de $y_{n,t}$ y de $r_{n,t}$ en las ecuaciones posteriores del modelo.

- **Generador de ciclos económicos:** En el modelo, las innovaciones $\varepsilon_{a,t}$ constituyen una de las fuentes fundamentales de fluctuaciones macroeconómicas: al alterar la productividad, cambian el producto, el empleo y, a través del costo marginal, la inflación.

Ecuación (7): Ley de movimiento del nivel de precios bajo Calvo

La Ecuación (7) describe la dinámica del índice de precios agregado en presencia de rigideces nominales a la Calvo. Bajo el supuesto de que en cada periodo sólo una fracción $1-\theta$ de las empresas puede reajustar su precio, la evolución del nivel de precios viene dada por:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} \; = \; \theta \; + \; (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}, \tag{7}$$

donde $\Pi_t \equiv \dfrac{P_t}{P_{t-1}}$ es la inflación bruta entre $t-1$ y t, P_t es el nivel agregado de precios y P_t^* es el precio fijado por las empresas que reajustan en el periodo t.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 7)

Término	**Definición rigurosa**	**Rol económico**
P_t	Índice de precios agregado en t: $P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$.	Nivel general de precios de la economía.
P_{t-1}	Índice de precios agregado en el periodo $t-1$.	Referencia para medir la inflación entre $t-1$ y t.
Π_t	Inflación bruta entre $t-1$ y t: $\Pi_t \equiv P_t/P_{t-1}$.	Tasa de crecimiento del nivel de precios.
P_t^*	Precio fijado en t por las empresas que pueden reajustar.	Precio óptimo común de la cohorte que reoptimiza.
$\epsilon > 1$	Elasticidad de sustitución entre variedades de bienes.	Determina el grado de competencia monopolística.
$\theta \in [0,1)$	Probabilidad (fraccción) de *no* reajustar el precio en un periodo.	Índice de rigidez nominal; $1/(1-\theta)$ es la duración media de un precio.

Cuadro 6: Símbolos usados en la Ecuación (7).

Derivación de la ley de movimiento del nivel de precios

1. Índice de precios CES El índice de precios agregado se define a partir de la estructura CES de preferencias sobre las variedades $i \in [0, 1]$:

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \, di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}, \tag{7.a}$$

lo que implica, elevando a la potencia $1 - \epsilon$:

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \, di. \tag{7.b}$$

2. Estructura de fijación de precios de Calvo Bajo el esquema de Calvo:

- En cada periodo t, una fracción $1 - \theta$ de empresas puede reajustar su precio y elige un mismo precio óptimo P_t^*.
- Una fracción θ de empresas *no* reajusta su precio y mantiene el precio fijado en algún periodo anterior. En particular, las que no reajustan en t conservan el precio que tenían en $t - 1$.

Sea $\mathcal{N}_t$ el conjunto de empresas que no reajustan en t y $\mathcal{R}_t$ el conjunto de empresas que sí reajustan. La medida (masa) de cada conjunto es:

$$\text{medida}(\mathcal{N}_t) = \theta, \qquad \text{medida}(\mathcal{R}_t) = 1 - \theta.$$

3. Descomposición del índice de precios Usando (7.b) y descomponiendo la integral en los dos subconjuntos:

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_{\mathcal{N}_t} P_t(i)^{1-\epsilon} di \; + \; \int_{\mathcal{R}_t} P_t(i)^{1-\epsilon} di. \tag{7.c}$$

(i) Empresas que no reajustan: Si una empresa no reajusta en t, su precio permanece igual al que tenía en $t - 1$:

$$P_t(i) = P_{t-1}(i), \quad \forall i \in \mathcal{N}_t.$$

Bajo el supuesto de que la distribución de precios entre estas empresas es la misma que la distribución general de precios en el periodo anterior, la integral sobre $\mathcal{N}_t$ se puede escribir como:

$$\int_{\mathcal{N}_t} P_t(i)^{1-\epsilon} di = \theta \int_0^1 P_{t-1}(i)^{1-\epsilon} di = \theta \, P_{t-1}^{1-\epsilon}, \tag{7.d}$$

donde en el último paso hemos usado la definición (análoga a (7.b)) para P_{t-1}.

(ii) Empresas que sí reajustan: Las firmas en $\mathcal{R}_t$ fijan todas el mismo precio optimizado P_t^*. Por lo tanto:

$$P_t(i) = P_t^*, \quad \forall i \in \mathcal{R}_t,$$

y la integral sobre $\mathcal{R}_t$ es:

$$\int_{\mathcal{R}_t} P_t(i)^{1-\epsilon} di = (1 - \theta) \, (P_t^*)^{1-\epsilon}. \tag{7.e}$$

4. Combinación y normalización por P_{t-1} Sustituyendo (7.d) y (7.e) en (7.c), obtenemos:

$$P_t^{1-\epsilon} = \theta\, P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)\,(P_t^*)^{1-\epsilon}. \tag{7.f}$$

Dividimos ambos lados de (7.f) por $P_{t-1}^{1-\epsilon}$:

$$\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}. \tag{7.g}$$

Finalmente, al definir la inflación bruta como

$$\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}, \tag{7.h}$$

podemos reescribir (7.g) como:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}, \tag{38}$$

que coincide exactamente con la Ecuación (7).

Interpretación económica de la Ecuación (7)

La Ecuación (7) es la *ley de movimiento del nivel de precios agregado* bajo rigideces de Calvo:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}.$$

- **Peso de los precios viejos vs precios nuevos:** El lado derecho es una combinación de:
  - un peso θ asociado a los precios que permanecen sin cambio y reflejan la estructura de P_{t-1};
  - un peso $1-\theta$ asociado a los precios nuevos P_t^* fijados por las firmas que ajustan.

  Cuanto mayor es θ, más inercia presenta el índice de precios agregado, pues una mayor fracción de empresas mantiene su precio anterior.
- **Inflación como resultado del precio óptimo P_t^*:** Si el precio óptimo de las firmas que ajustan está por encima del nivel general de precios anterior ($P_t^* > P_{t-1}$), la nueva cohorte de precios tiende a empujar hacia arriba el nivel agregado P_t, generando inflación ($\Pi_t > 1$). Si $P_t^* = P_{t-1}$, entonces los precios nuevos no introducen presiones adicionales y se obtiene $\Pi_t = 1$ (inflación cero).
- **Duración media de los precios y rigideces nominales:** El parámetro θ puede interpretarse como la probabilidad de no reajuste en un periodo; la duración media de un precio es $1/(1-\theta)$. Valores altos de θ implican precios muy rígidos y, por tanto, una respuesta gradual del nivel de precios agregado a shocks.

- **Punto de partida para la Curva de Phillips Nuevo Keynesiana:** La Ecuación (7) es el paso previo a la derivación de la Curva de Phillips Nuevo Keynesiana (NKPC). La log-linealización de (7) alrededor de un estado estacionario con inflación constante (a menudo $\Pi = 1$) conduce a una relación aproximada entre la inflación π_t y el precio óptimo en desviaciones $(p_t^* - p_{t-1})$, que luego se combina con la condición de fijación óptima de precios para obtener la NKPC en su forma estándar.

Sugerencia de gráfico y código: inflación bruta vs precio óptimo relativo

Para un valor dado de θ y ϵ, la Ecuación (7) establece una relación entre la inflación bruta Π_t y el precio relativo P_t^*/P_{t-1}. Fijando θ y ϵ, podemos resolver numéricamente Π_t a partir de:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}.$$

Un pequeño script en `Python` + `matplotlib` para ilustrar esta relación:

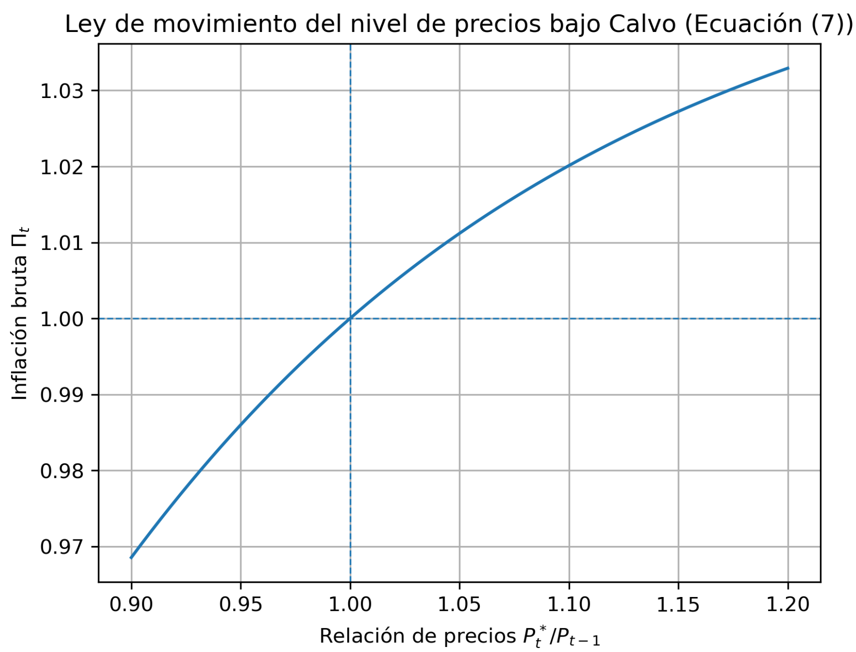

Figura 7: Relación entre la inflación bruta y el precio óptimo relativo según la Ecuación (7).

Ecuación (8): Log-linealización de la ley de movimiento de precios

La Ecuación (8) es la versión log-linealizada de la ley de movimiento del nivel de precios bajo rigideces de Calvo (Ecuación (7)). En términos de inflación (en logaritmos) y del precio óptimo fijado por las empresas que reajustan, se escribe como:

$$\pi_t = (1-\theta)\left(p_t^* - p_{t-1}\right), \tag{8}$$

donde $\pi_t \equiv p_t - p_{t-1}$ es la inflación (en desviaciones logarítmicas), p_t^* es el logaritmo del precio óptimo fijado en t por las empresas que ajustan, y θ es la probabilidad de *no* poder ajustar el precio en un periodo dado.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 8)

Término	**Definición rigurosa**	**Rol económico**
p_t	Logaritmo del nivel de precios agregado P_t.	Nivel de precios vigente en el periodo t.
p_{t-1}	Logaritmo del nivel de precios agregado en $t-1$.	Nivel de precios de referencia (periodo anterior).
π_t	Inflación (aproximada) entre $t-1$ y t: $\pi_t \equiv p_t - p_{t-1}$.	Variación logarítmica del nivel de precios.
p_t^*	Logaritmo del precio óptimo P_t^* fijado por las empresas que reajustan en t.	Precio de la nueva cohorte de empresas que reoptimiza.
$\theta \in [0, 1)$	Probabilidad de *no* reajuste del precio en cada periodo.	Índice de rigidez nominal; $1-\theta$ es la fracción que ajusta en t.

Cuadro 7: Símbolos usados en la Ecuación (8).

Derivación de la Ecuación (8) a partir de la Ecuación (7)

Partimos de la ley exacta de movimiento del nivel de precios bajo Calvo, expresada en términos de inflación bruta $\Pi_t \equiv P_t/P_{t-1}$:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}, \tag{7}$$

donde ϵ es la elasticidad de sustitución entre variedades.

1. Definiciones en logaritmos Definimos:

$$p_t \equiv \log P_t, \quad p_{t-1} \equiv \log P_{t-1}, \quad p_t^* \equiv \log P_t^*. \tag{8.a}$$

La inflación logarítmica (aproximada) es:

$$\pi_t \equiv p_t - p_{t-1}. \tag{8.b}$$

Además, observamos que:

$$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad \Rightarrow \quad \log \Pi_t = \log P_t - \log P_{t-1} = p_t - p_{t-1} = \pi_t.$$

2. Expresión de los términos en desviaciones alrededor del estado estacionario Consideramos un estado estacionario con inflación constante $\bar{\Pi} = 1$, de modo que $\bar{P}_t = \bar{P}_{t-1} = \bar{P}$. Para log-linealizar, trabajamos con pequeñas desviaciones alrededor de este estado estacionario. Definimos:

$$\tilde{\Pi}_t \equiv \Pi_t - 1, \quad \tilde{x} \approx \log(1 + \tilde{x}) \text{ para } |\tilde{x}| \text{ pequeño.}$$

Similarmente, para el precio relativo de las empresas que ajustan:

$$\frac{P_t^*}{P_{t-1}} = \frac{P_t^*/\bar{P}}{P_{t-1}/\bar{P}} \approx \exp\big(p_t^* - p_{t-1}\big), \tag{8.c}$$

de modo que, para desviaciones pequeñas:

$$\log\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right) \approx p_t^* - p_{t-1}.$$

3. Aproximación de primer orden de los términos $\Pi_t^{1-\epsilon}$ y $\big(P_t^*/P_{t-1}\big)^{1-\epsilon}$ Para valores pequeños de π_t, tenemos:

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \exp\big((1-\epsilon)\log \Pi_t\big) = \exp\big((1-\epsilon)\pi_t\big) \approx 1 + (1-\epsilon)\,\pi_t. \tag{8.d}$$

De forma análoga, para el precio relativo de las empresas que ajustan:

$$\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} = \exp\big((1-\epsilon)\log(P_t^*/P_{t-1})\big) \approx 1 + (1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1}). \tag{8.e}$$

4. Sustitución en la Ecuación (7) y simplificación Sustituimos las aproximaciones (8.d) y (8.e) en (7):

$$1 + (1-\epsilon)\,\pi_t \approx \theta + (1-\theta)\left[\,1 + (1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1})\right]. \tag{8.f}$$

Desarrollando el lado derecho:

$$\begin{aligned}\theta + (1-\theta)\,[1 + (1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1})] &= \theta + (1-\theta) + (1-\theta)(1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1})\\ &= 1 + (1-\theta)(1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1}).\end{aligned} \tag{8.g}$$

Igualando ambos lados de (8.f) y (8.g), los términos constantes 1 se cancelan y obtenemos:

$$(1-\epsilon)\,\pi_t \approx (1-\theta)(1-\epsilon)\,(p_t^* - p_{t-1}). \tag{8.h}$$

Suponiendo $\epsilon \neq 1$, podemos dividir ambos lados por $(1-\epsilon)$ y, por lo tanto, la relación se simplifica a:

$$\pi_t = (1-\theta)\,(p_t^* - p_{t-1}), \tag{39}$$

que es exactamente la Ecuación (8).

Interpretación económica de la Ecuación (8)

La Ecuación (8),

$$\pi_t = (1-\theta)\,(p_t^* - p_{t-1}),$$

tiene una interpretación directa y muy útil:

- **Inflación como promedio ponderado de cambios de precios:** La inflación logarítmica π_t es proporcional al diferencial entre:
  - el logaritmo del precio óptimo fijado por las empresas que reajustan en t, p_t^*,
  - y el logaritmo del nivel de precios agregado heredado del periodo anterior, p_{t-1}.

  Si $p_t^* > p_{t-1}$, las empresas que reajustan tienden a aumentar el nivel de precios agregado, generando inflación positiva.
- **Rol de la fracción que ajusta $(1-\theta)$:** El factor $(1-\theta)$ refleja que sólo una fracción de empresas actualiza su precio en cada periodo.
  - Si θ es grande (precios muy rígidos), la inflación responde *poco* a una dada diferencia $p_t^* - p_{t-1}$; los cambios de precios se difunden lentamente.
  - Si θ es pequeña (precios muy flexibles), la inflación se ajusta rápidamente al "gap" entre el precio óptimo y el nivel de precios pasado.
- **Puente hacia la Curva de Phillips Nuevo Keynesiana (NKPC):** La Ecuación (8) conecta directamente la inflación con el precio óptimo p_t^*. Una vez que se derive la decisión óptima de fijación de precios (donde p_t^* se expresa como función del costo marginal presente y futuro), sustituir esa expresión en (8) permite obtener la NKPC en su forma habitual:

  $$\pi_t = \beta E_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa\,\hat{mc}_t,$$

  donde $\hat{mc}_t$ es el costo marginal real en desviaciones, y κ es un coeficiente que depende de θ, β y ϵ.

Sugerencia de gráfico y código: inflación vs gap de precios $(p_t^* - p_{t-1})$

La Ecuación (8) establece una relación lineal muy sencilla:

$$\pi_t = (1-\theta)\,(p_t^* - p_{t-1}).$$

Para un θ dado, la inflación es una recta con pendiente $1-\theta$ en el plano $\big(p_t^* - p_{t-1},\, \pi_t\big)$.

Ecuación (9): Restricción de demanda de la empresa que reajusta precios

La Ecuación (9) recoge la secuencia de restricciones de demanda que enfrenta una empresa que reoptimiza su precio en el periodo t. Dado el precio que fija en t, P_t^*, la cantidad demandada de su bien en cada periodo futuro $t+k$ viene determinada por:

$$Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} C_{t+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

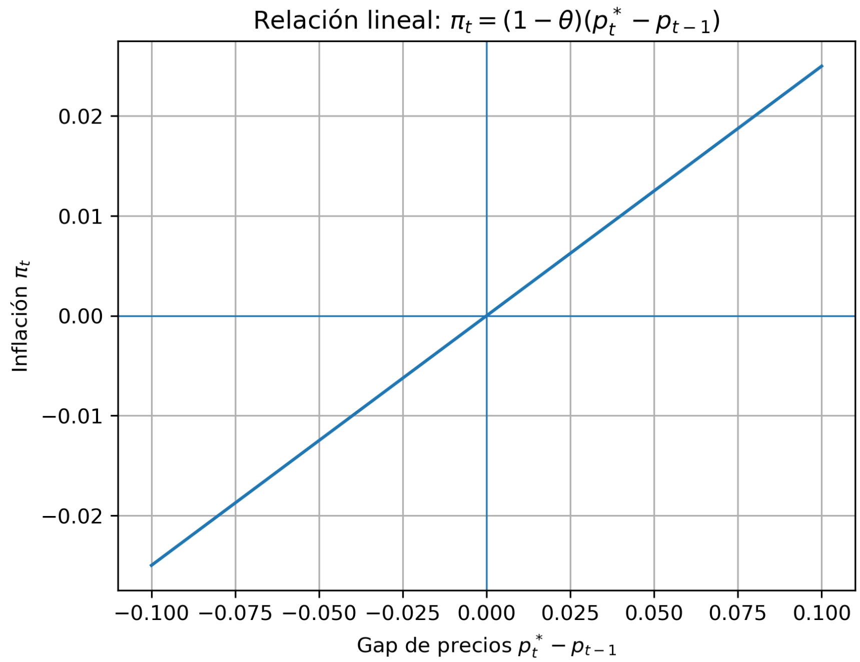

Figura 8: Relación entre la inflación y el gap entre el precio óptimo y el nivel de precios pasado, según la Ecuación (8).

donde $Y_{t+k|t}$ denota la producción (o ventas) en el periodo $t+k$ de una empresa cuyo último reajuste de precios tuvo lugar en t.

Tabla de símbolos relevantes (Ecuación 9)

Derivación de la restricción de demanda a partir de la Ecuación (1)

El punto de partida es la función de demanda individual para cada variedad i que se obtuvo del problema de maximización del hogar (Ecuación (1)):

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\epsilon} C_t, \tag{1}$$

donde $C_t(i)$ es la cantidad del bien i demandada en el periodo t, $P_t(i)$ es el precio de la variedad i y P_t es el índice agregado de precios.

En el contexto de Calvo, consideramos una empresa genérica que reajusta su precio en t y fija un precio P_t^*. A partir de ahí:

- En el periodo t, esta empresa cobra $P_t(i) = P_t^*$.
- En el periodo $t+1$, si no ha vuelto a reajustar, sigue cobrando $P_{t+1}(i) = P_t^*$.
- Más generalmente, mientras no vuelva a reajustar, en $t+k$ su precio sigue siendo:

$$P_{t+k}(i) = P_t^*, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.a}$$

Término	Definición rigurosa	Rol económico
$Y_{t+k\|t}$	Producción (o ventas) en el periodo $t+k$ de una empresa que fijó su precio por última vez en t.	Cantidad demandada del bien de esa empresa; coincide con su oferta efectiva.
P_t^*	Precio nominal fijado por la empresa en el periodo t cuando tiene la oportunidad de reajustar.	Permanece fijo mientras la empresa no vuelva a tener oportunidad de reajustar.
P_{t+k}	Índice de precios agregado de la economía en el periodo $t+k$.	Referencia para el precio relativo del bien de la empresa.
C_{t+k}	Índice de consumo agregado en el periodo $t+k$.	Mide la demanda agregada de bienes en la economía.
$\epsilon > 1$	Elasticidad de sustitución entre variedades de bienes diferenciados.	Determina la sensibilidad de la demanda al precio relativo.

Cuadro 8: Símbolos usados en la Ecuación (9).

1. Demanda de la variedad i en el periodo $t+k$ Aplicando la fórmula de demanda (1) al periodo $t+k$:

$$C_{t+k}(i) = \left(\frac{P_{t+k}(i)}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} C_{t+k}. \tag{9.b}$$

Para una empresa que fijó su precio por última vez en t, usamos $P_{t+k}(i) = P_t^*$ (según (9.a)), de modo que:

$$C_{t+k}(i) = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} C_{t+k}. \tag{9.c}$$

2. Identificación con la producción $Y_{t+k|t}$ Se supone que la empresa siempre ajusta su oferta para satisfacer la demanda al precio vigente, esto es:

$$Y_{t+k|t} = C_{t+k}(i), \tag{9.d}$$

para la empresa que fijó su precio en t. Sustituyendo (9.c) en (9.d) obtenemos:

$$Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} C_{t+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

que es exactamente la Ecuación (9).

Interpretación económica de la Ecuación (9)

La Ecuación (9) es la *restricción de demanda* que enfrenta cada empresa que reajusta su precio. Sus elementos clave son:

- **Demanda condicionada al precio relativo:** La cantidad que vende la empresa en cada periodo futuro $(t+k)$ depende de:

- su precio fijo P_t^*,
- el índice de precios agregado futuro P_{t+k},
- y el nivel de demanda agregada C_{t+k}.

Todo esto entra a través del precio relativo $\dfrac{P_t^*}{P_{t+k}}$: si la empresa fija un precio por encima del nivel general de precios futuro, $\frac{P_t^*}{P_{t+k}}$ es alto, y la demanda de su producto se reduce, ya que el exponente $-\epsilon < 0$ hace decreciente la demanda en el precio relativo.

- **Elasticidad de sustitución ϵ:** El parámetro ϵ determina cuán sensible es la demanda a cambios en el precio relativo.
  - Un ϵ grande implica que los bienes son fácilmente sustituibles, por lo que pequeñas desviaciones del precio relativo con respecto al promedio tienen un gran efecto sobre la cantidad demandada.
  - Un ϵ cercano a 1 implica una sustitución limitada; la demanda es menos sensible al precio relativo.
- **Conexión con beneficios y fijación óptima de precios:** Dado que los beneficios de la empresa en cada periodo futuro dependen de:

$$\Pi_{t+k|t} = P_t^* Y_{t+k|t} - TC_{t+k|t},$$

  y $Y_{t+k|t}$ viene determinado por (9), la empresa debe escoger P_t^* tomando en cuenta cómo este precio condiciona toda la senda de demanda futura (y por tanto de costos y beneficios). Esta consideración intertemporal es central para derivar la condición de primer orden de fijación de precios (la "NKPC no lineal").
- **Hipótesis de demanda satisfecha:** Implícitamente se asume que la empresa *no raciona* la demanda: siempre produce $Y_{t+k|t}$ para igualar la demanda al precio vigente. Esto es coherente con la idea de competencia monopolística con fijación de precios, donde la cantidad se ajusta para satisfacer la demanda dada la decisión de precios.

Sugerencia de gráfico y código: demanda de la empresa como función del precio relativo

Para un periodo futuro $t+k$ dado, y tomando P_{t+k} y C_{t+k} como dados, la Ecuación (9) implica una curva de demanda decreciente en el precio relativo $\frac{P_t^*}{P_{t+k}}$:

$$Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} C_{t+k}.$$

Podemos fijar $P_{t+k} = 1$ sin pérdida de generalidad (normalización) y representar Y en función de P_t^*.

2. Conclusion