MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U7

CLASE N° 8

- Completación de cuadrados.

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

<u>Método de completación de cuadrados</u>

El método de completación de cuadrados consiste en reescribir un polinomio cuadrático de manera que éste contenga un trinomio de cuadrado perfecto el cual será más fácil de graficar y resolver.

Para ello seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Dada la expresión $x^2 + bx + c = 0,$ al término lineal bx lo multiplicamos y dividimos entre 2.

$$bx = 2\left(\frac{b}{2}\right)x$$

Paso 2: El término $\frac{b}{2}$ lo elevamos al cuadrado y este número lo sumamos y restamos en la expresión cuadrática

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + c = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

Paso 3: Agrupamos los tres primeros términos y lo factorizamos

$$\left(x^2+2\left(\frac{b}{2}\right)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0 \quad \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

Por lo tanto el trinomio cuadrado perfecto es:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0 \quad \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

Ejemplos:

1) Aplique completación de cuadrados a la expresión $x^2 - 2x - 15 = 0$

Solución:

Al término lineal $2x$ lo multiplicamos y dividimos entre 2.

$$x^2 - 2\left(\frac{2}{2}\right)x - 15 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 2(1)x - 15 = 0$$

Ahora sumamos y restamos 1^2

$$x^2 - 2(1)x + 1^2 - 1^2 - 15 = (x^2 - 2(1)x + 1^2) - 1^2 - 15 = 0$$

Factorizamos lo que esta dentro del paréntesis, y se obtiene

$$(x-1)^2 - 1 - 15 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)^2 - 16 = 0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

2) Aplique completación de cuadrados a la expresión $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución:

$$x^2 - 5x + 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + 6$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 6$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

3) Aplique completación de cuadrados a la expresión $8x + 1 = -2x^2$

Solución:

Pasamos los términos al primer miembro de la igualdad y factorizamos el coeficiente de x^2

$$8x + 1 = -2x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 8x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(x^2 + 4x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Ahora completamos el cuadrado dentro del paréntesis

$$2\left(x^2 + 2\left(\frac{4}{2}\right)x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(x^2 + 2(2)x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Procedemos a sumar y restar 2^2 dentro del paréntesis

$$2\left(x^2 + 2(2)x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow 2\left(x^2 + 2(2)x + 2^2 - 2^2 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

Agrupamos los tres primeros términos dentro del paréntesis y factorizamos

$$2\left((x^2+2(2)x+2^2)-2^2+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2\left((x+2)^2-4+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow 2\left((x+2)^2-\frac{7}{2}\right)=0$$

Aplicando distributiva se obtiene

$$\Rightarrow 2(x+2)^2-2\frac{7}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad 2(x+2)^2-7=0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

4) Aplique completación de cuadrados a la expresión $-3x^2+8=-5x$

Solución:

$$-3x^2+5x+8=0 \quad \Rightarrow -3\left(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x^2-2\left(\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{1}}\right)x-\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x^2-2\left(\frac{5}{6}\right)x-\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x^2-2\left(\frac{5}{6}\right)x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{8}{3}\right]=0$$

❖ COMPLETACION DE CUADRADOS

$$\Rightarrow -3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{121}{36}\right]=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+3\left(\frac{121}{36}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+3\left(\frac{121}{3\cdot 12}\right)=0$$

$$\Rightarrow -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{121}{12}=0$$

Aplique completación de cuadrados a las siguientes expresiones:

1) $x^2 + 5x + 4 = 0$
2) $6x - 27 = -x^2$
3) $x^2 + 11x + 30 = 0$
4) $y^2 + 10 = 6y$
5) $w^2 - 40 = 3w$
6) $z^2 - 30 = 13z$
7) $x^2 - 10x + 24 = 0$
8) $x^2 + 8x = 240$
9) $2x + 5 = -x^2$
10) $3x^2 = x + 2$
11) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
12) $10w^2 - 13w - 3 = 0$
13) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$
14) $36x = 13 + 36x^2$
15) $2x^2 + 8x + 1 = 0$
16) $4x^2 - x = 0$
17) $3x^2 - 6x - 1 = 0$
18) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$
19) $-2x^2 + 8x - 3 = 0$
20) $3x^2 + 5x + 1 = 0$
21) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
22) $9x^2 - 30x + 25=0$