MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 14

- ►Límite de una función
    - ►Definición de límite
    - ►Límites laterales
    - ►Existencia de límite en un valor
    - ►Estudio de límites usando diagramas

► DEFINICIÓN DE LÍMITE

Límite

Definición intuitiva: Estudiar el comportamiento de $f(x) = 3x - 2$ en torno a $x = 2$.

Algunos valores de $f(x)$ cuando nos acercamos a 2 por la izquierda $(x < 2)$ y cuando nos acercamos a 2 por la derecha $(x > 2)$ son los siguientes:

$\boldsymbol{x < 2}$	
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1,5	2,5
1,6	2,8
1,8	3,4
1,99	3,97
1,999	3,997

$\boldsymbol{x > 2}$	
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
2,5	5,5
2,3	4,9
2,1	4,3
2,09	4,27
2,009	4,027

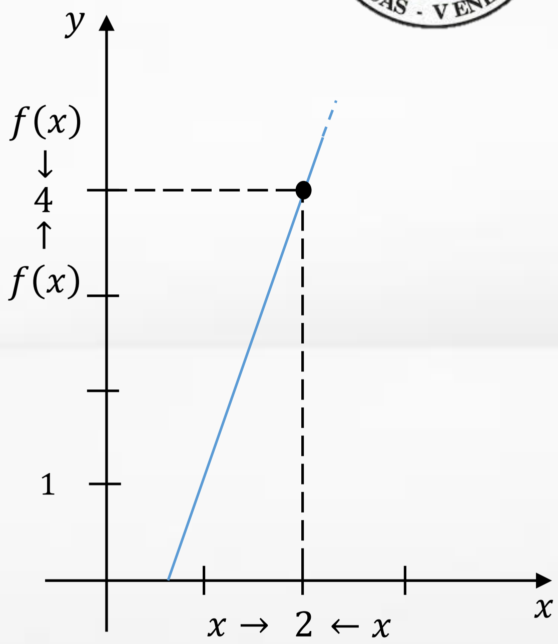
► DEFINICIÓN DE LÍMITE

Observemos que independientemente de como nos acerquemos al valor 2, pero sin llegar a ser 2, la función se aproxima progresivamente a 4. Este resultado se expresa diciendo que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

O bien,

$$\lim_{x \to 2} 3x - 2 = 4$$



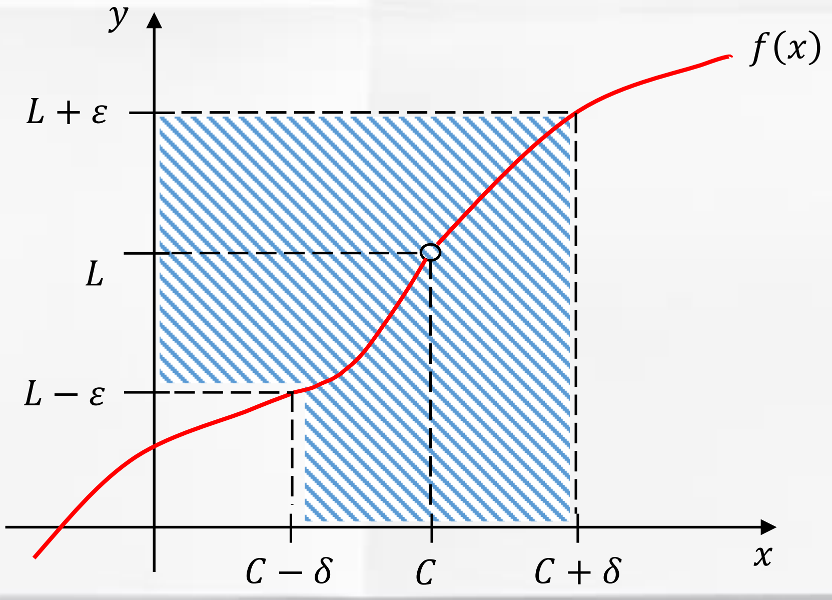
Es importante tener en cuenta que el límite de una función cuando x tiende a un cierto número no siempre es equivalente al valor numérico de la función para ese número. Además, es importante resaltar que se puede calcular el límite de una función cuando x tiende a un cierto número a pesar de que la función no este definida en dicho número.

► DEFINICIÓN DE LÍMITE

Definición formal

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \text{ con } 0 < |x - c| < \delta \text{ se cumple que } |f(x) - L| < \varepsilon$$



► LÍMITES LATERALES

Límites laterales

Para hallar el límite de una función en un punto "c" nos aproximamos a "c" por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Si sólo nos aproximamos a "c" por un solo lado, bien sea por la izquierda o por la derecha, tenemos los límites laterales.

- Diremos que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si cuando x esta cerca de "c" por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a L.

- Diremos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si cuando x esta cerca de "c" por la derecha, $f(x)$ se aproxima a L.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

► EXISTENCIA DE LIMITE EN UN VALOR

Existencia de límite en un valor

1. La curva existe a ambos lados del valor.
   a) Existen los dos límites laterales.
      i. Si son iguales el límite existe.
      ii. Si son diferentes el límite no existe.
   b) Uno de los límites laterales no existe, entonces el límite no existe.

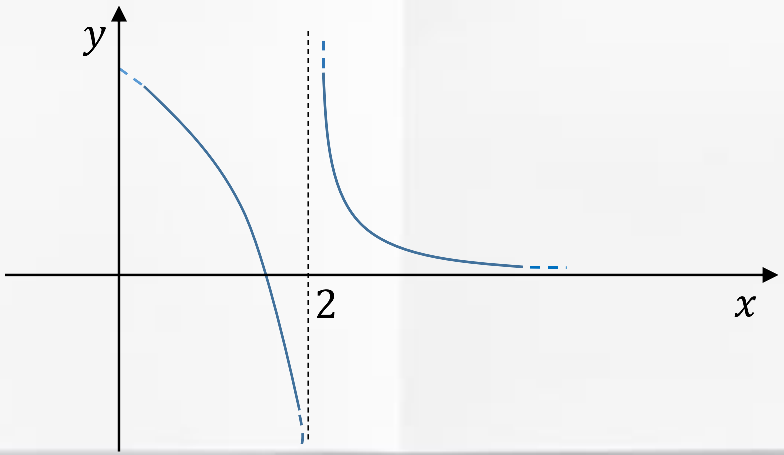
2. La curva existe sólo de un lado del valor, entonces existe el límite si existe el límite lateral que corresponde al lado donde hay curva.

Ejemplo:

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

c) $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists}$

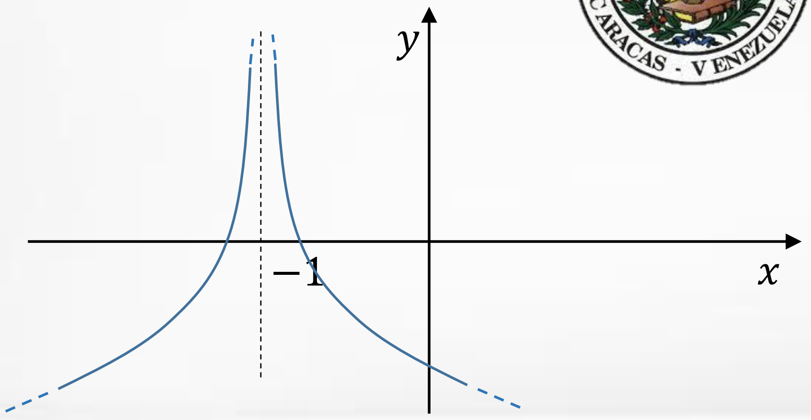


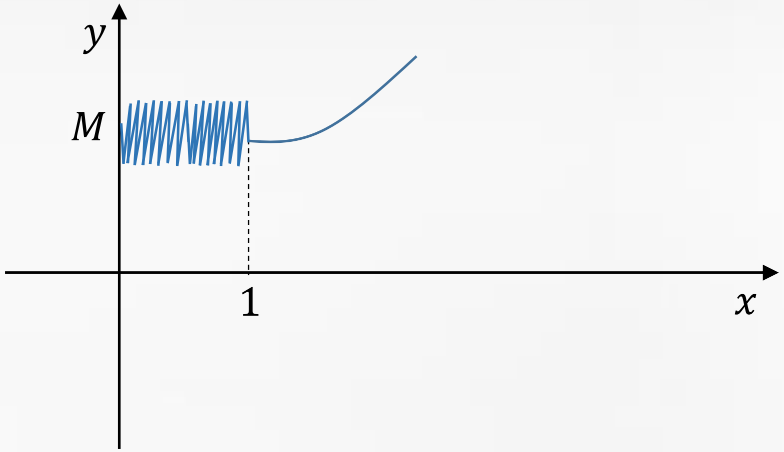
► EXISTENCIA DE LIMITE EN UN VALOR

a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$

c) $\boldsymbol{\lim_{x \to -1} f(x) = \infty}$





a) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = M$

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \nexists$

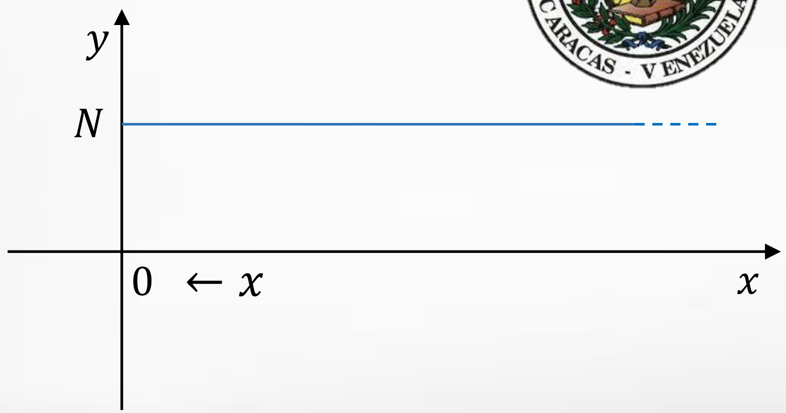
c) $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists}$

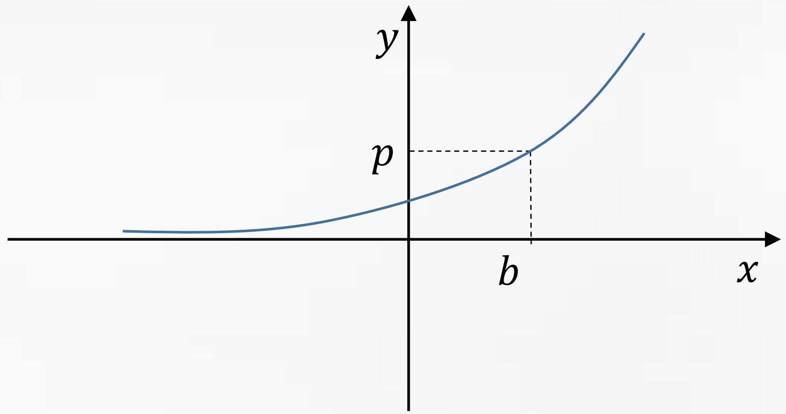
► EXISTENCIA DE LIMITE EN UN VALOR

a) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = N$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$ No hay curva

c) $\boldsymbol{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = N}$





a) $\lim_{x \longrightarrow b^+} f(x) = p^+$

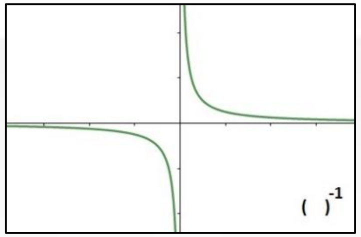
b) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = p^-$

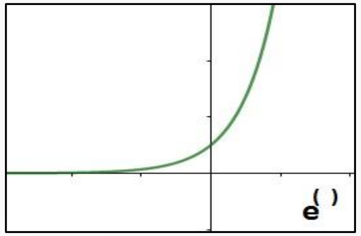
c) $\boldsymbol{\lim_{x \rightarrow b} f(x) = p}$

► ESTUDIO DE LIMITES USANDO DIAGRAMAS

1. $lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$

Solución:





$$\begin{array}{c} 0^+ \qquad 0^- \\ \downarrow \\ \infty \qquad -\infty \\ \downarrow \\ \infty \qquad 0^+ \end{array}$$

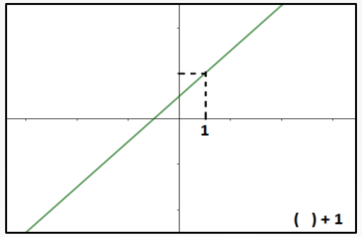
$$lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

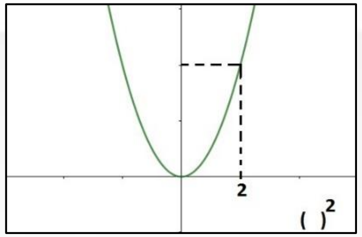
$lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ por encima

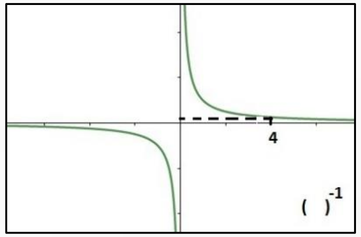
$$\boldsymbol{lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \nexists}$$

2. $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)^2}$

Solución:







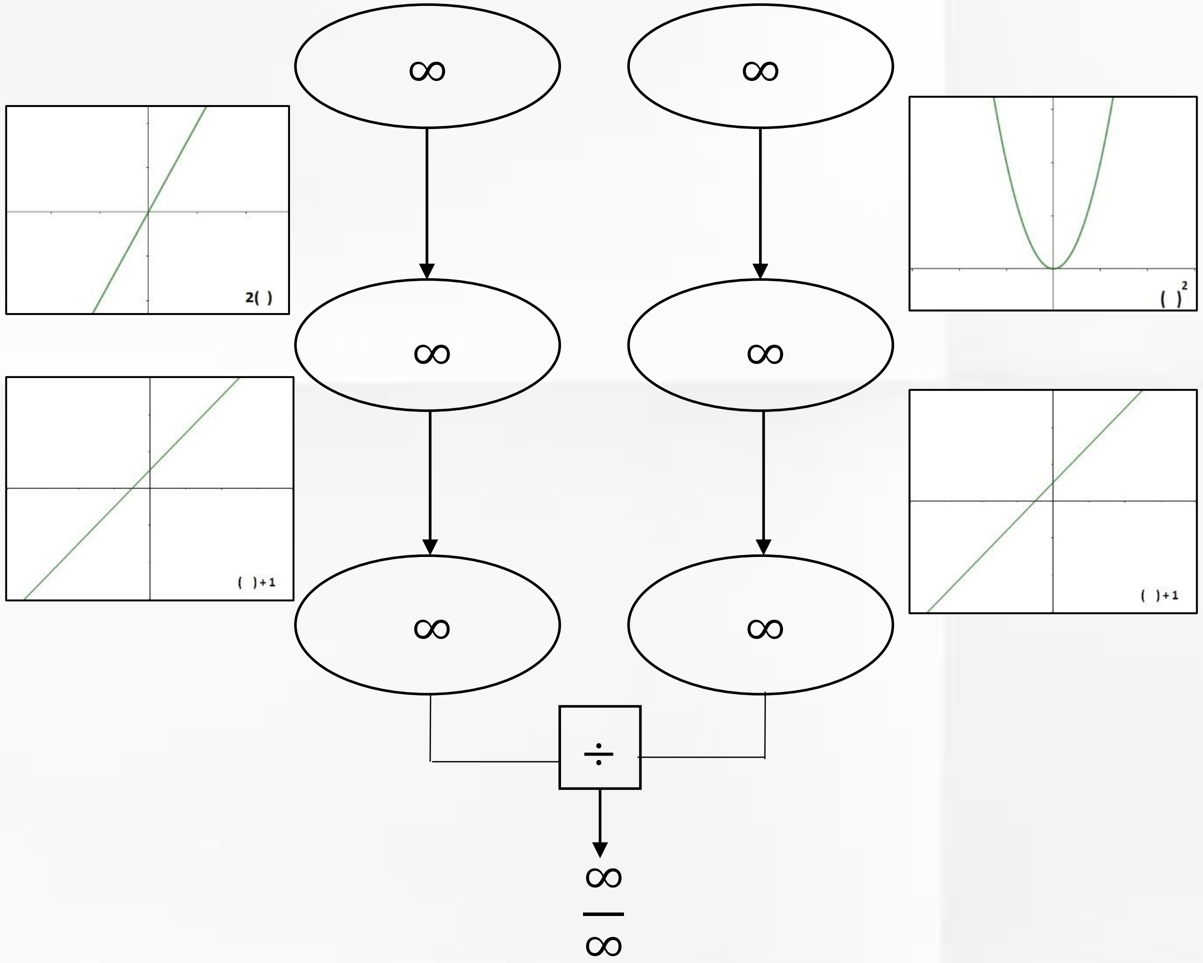
$$1^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow \frac{1}{4}^-$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}}$$

(Por debajo)

3. $lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$

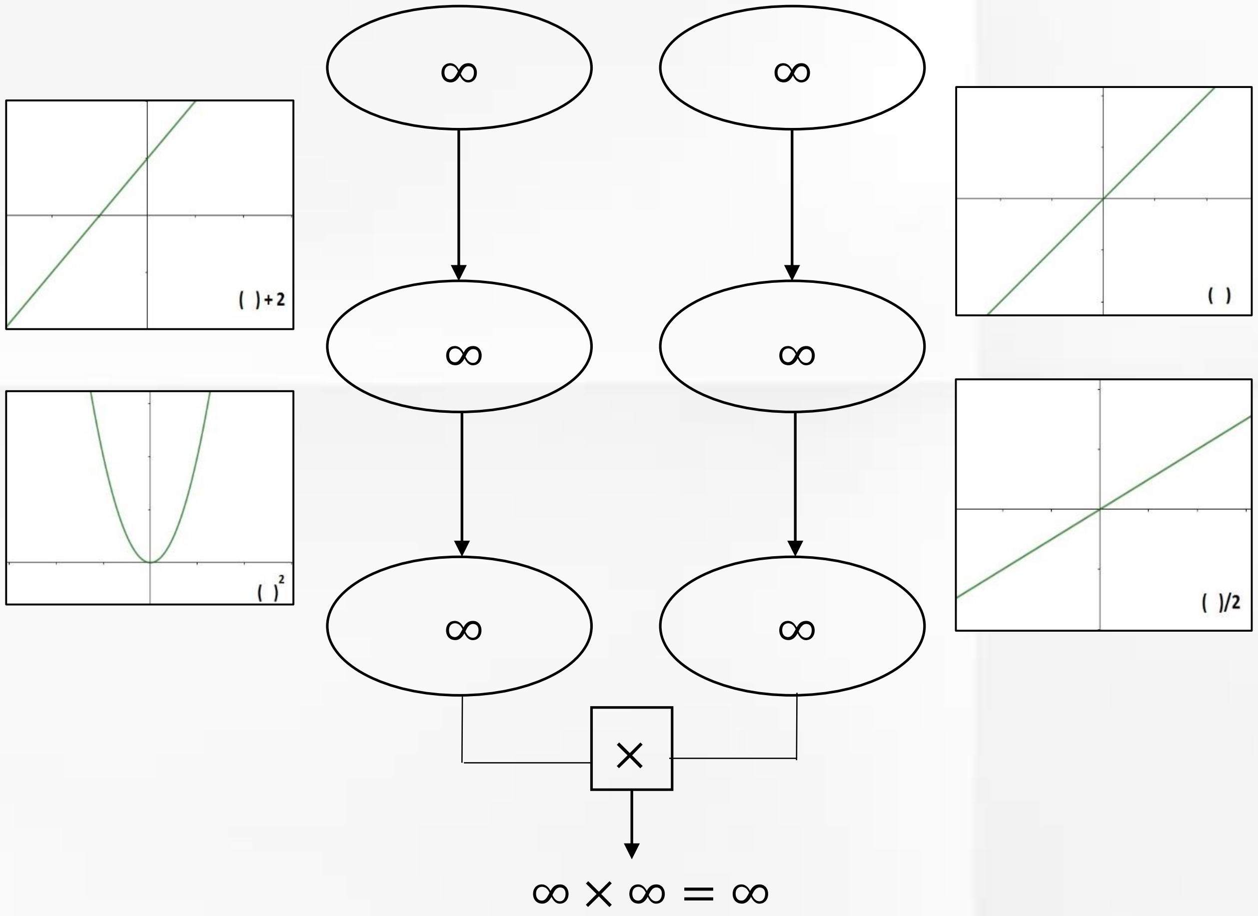
Solución:



$$lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} =?$$

4. $lim_{x \to \infty}(x+2)^2 \frac{x}{2}$

Solución:



$$\boldsymbol{lim_{x \to \infty}(x+2)^2 \frac{x}{2} = \infty}$$