MATEMATICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 23

- **Derivación logarítmica.**
- **Ejercicios.**

DERIVADAS.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3y + y^3x = 30$ en el punto $(1,3)$

Solución:

Derivando implícitamente tenemos:

$$(x^3)'y + (x^3)y' + (y^3)'x + y^3(x)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2y + x^3y' + 3y^2y'\,x + y^3(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3y' + 3xy^2y' = -3x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x^3 + 3xy^2) = -3x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

DERIVADAS.

Ahora, sustituimos $(1{,}3)$ y obtenemos la pendiente:

$$y' = \frac{-3(1)^2(3) - (3)^3}{(1)^3 + 3(1)(3)^2} = \frac{-3(3) - 27}{1 + 27} = \frac{-9 - 27}{28} = -\frac{36}{28} = -\frac{9}{7}$$

Es decir, $y' = m_{tan} = -\frac{9}{7}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1{,}3)$ es:

$$y - 3 = -\frac{9}{7}(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{9}{7}x + \frac{9}{7} + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{9}{7}x + \frac{30}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 7y = -9x + 30 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 7y - 30 = 0$$

➢ DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

Derivación logarítmica

Permite simplificar el trabajo de derivar expresiones que incluyen cocientes, productos o potencias, aplicando primero la función logaritmo y usando sus propiedades.

Ejemplo:

Derive las siguientes funciones:

➢ DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

a) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$

Solución:

Primero tomamos logaritmo a ambos lados de la igualdad y después derivamos implícitamente con respecto a x. Es decir:

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = \ln\left((1-x^2)^{1/2}\right) - \ln\left((x+1)^{2/3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

Derivando se tiene:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}(1-x^2)' - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{1-x^2}(-\cancel{2}x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}(1)$$

➢ DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1-x^2}(-\cancel{2}x) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1}(1) \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{-x}{1-x^2} - \frac{2}{3(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-3x - 2(1-x)}{3(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{-3x - 2 + 2x}{3(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{-x-2}{3(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)}$$

➢ DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

$$y' = \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}} \cdot (x+2)}{3(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-\sqrt{1-x^2}(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)^{1/2}}$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

b) $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

Solución:

Aplicamos logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(x^{3/4}(x^2+1)^{1/2}\right) - \ln\left((3x+2)^5\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(x^{3/4}\right) + \ln\left((x^2+1)^{1/2}\right) - \ln\left((3x+2)^5\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \frac{3}{4}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

Derivando se tiene:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' - 5\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot(3x+2)' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\cancel{2}x - 5\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

➢ DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

c) $y = x^{6x^2}$

Solución:

$$\ln(y) = \ln\left(x^{6x^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = 6x^2\ln(x)$$

Derivando tenemos:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (6x^2)'\ \ln(x) + 6x^2(\ln(x))' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = 12x\ln(x) + 6x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = 12x\ln(x) + 6x$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = y\left(6x(2\ln(x) + 1)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = x^{6x^2}6x(2\ln(x) + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = 6x^{6x^2+1}(2\ln(x) + 1)$$

EJERCICIOS.

Ejercicios:

1) Derive la siguiente función: $y = (\text{Sen}(x))^{\ln(x^2)}$

Solución:

$$\ln(y) = \ln\left((\text{Sen}(x))^{\ln(x^2)}\right) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(x^2)\ln(\text{Sen}(x))$$

Derivando tenemos:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\ln(x^2))'\ \ln\big(\text{Sen}(x)\big) + \ln(x^2)\big(\ln\big(\text{Sen}(x)\big)\big)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{\cancel{x^2}}2\cancel{x}\ln\big(\text{Sen}(x)\big) + \ln(x^2)\cdot\frac{1}{\text{Sen}(x)}\cdot\text{Cos}(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}\ln(\text{Sen}(x)) + \ln(x^2)\cdot\frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(x)}$$

$$\Leftrightarrow y' = y\left(\frac{2}{x}\ln(\text{Sen}(x)) + \ln(x^2)\cdot\frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(x)}\right)$$

EJERCICIOS.

$$\Leftrightarrow \quad y' = (\mathrm{Sen}(x))^{\ln(x^2)}\left(\frac{2}{x}\ln(\mathrm{Sen}(x)) + \ln(x^2)\cdot\frac{\mathrm{Cos}(x)}{\mathrm{Sen}(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{2}{x}(\mathrm{Sen}(x))^{\ln(x^2)}\ln(\mathrm{Sen}(x)) + \ln(x^2)\cdot\mathrm{Cos}(x)(\mathrm{Sen}(x))^{\ln(x^2)-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{2(\mathrm{Sen}(x))^{\ln(x^2)}\ln(\mathrm{Sen}(x)) + x\ln(x^2)\cdot\mathrm{Cos}(x)(\mathrm{Sen}(x))^{\ln(x^2)-1}}{x}$$

EJERCICIOS.

2) Suponga que la derivada de cierta función L es $L'(x) = \frac{3}{(5-2x)^2}$ Si la función g está definida por $g(x) = x^2 - 2x - 1$, encuentre el valor de $h'(3)$ si h es la función compuesta $h(x) = L\big(g(x)\big)$.

Solución: Queremos encontrar el valor de $h'(3)$, en donde $h(x) = L\big(g(x)\big)$. Así, $h'(x) = L'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ **(1)**

Ahora, sabemos que $L'(x) = \frac{3}{(5-2x)^2}$ y que $g'(x) = 2x - 2$

De modo que al sustituir estas expresiones en **(1)** se tiene: $h'(x) = \frac{3}{(5-2[x^2-2x-1])^2}(2x-2)$

En consecuencia, $h'(3) = \frac{3}{(5-2[(3)^2-2(3)-1])^2} \cdot (2(3)-2) \Rightarrow h'(3) = \frac{3}{(5-2[9-6-1])^2} \cdot (6-2) \Rightarrow h'(3) = \frac{3}{(5-2[2])^2} \cdot (4)$

$$\Rightarrow h'(3) = \frac{12}{(5-4)^2} \Rightarrow h'(3) = \frac{12}{(1)^2} \Rightarrow h'(3) = 12$$

➢ EJERCICIOS.

3) Considere la curva $e^x - e^y = xy$. Usando derivación implícita, muestre que la ecuación de la recta normal a la curva en el origen de coordenadas es $y = -x$

Solución: Se denomina recta normal a una curva en un punto dado a la recta perpendicular a la recta tangente de la curva en dicho punto. Al derivar implícitamente tenemos:

$$e^x - e^y y' = y + xy' \quad \Leftrightarrow \quad -e^y y' - xy' = y - e^x \quad \Leftrightarrow \quad y'(-e^y - x) = y - e^x \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y-e^x}{-e^y-x}$$

Ahora, para obtener la pendiente de la recta tangente a la curva en el origen de coordenadas, evaluamos y' en $(0,0)$.

Es decir, $y' = \frac{o-e^{(0)}}{-e^{(0)}-0} = \frac{0-1}{-1-0} = \frac{-1}{-1} = 1$

Como queremos la ecuación de la recta normal, buscamos su pendiente, la cual será: $\frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{1} = -1$

De modo que la ecuación de la recta normal a la curva en el origen de coordenadas viene dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = -1(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

➤ EJERCICIOS.

4) Derive la siguiente función: $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{3e^{3x}(1-x^3)^2}\right)$

Solución:

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{3e^{3x}(1-x^3)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right) - \ln(3e^{3x}(1-x^3)^2) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}\ln(x) - \left[\ln(3e^{3x}) + \ln\left((1-x^3)^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}\ln(x) - [\ln(3) + \ln(e^{3x}) + 2\ln(1-x^3)] \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}\ln(x) - \ln(3) - 3x\ln(e) - 2\ln(1-x^3)$$

Así, $f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} - 0 - 3 - 2\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot(-3x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1-x^3-12x+12x^4+24x^3}{4x-4x^4} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{12x^4+23x^3-12x+1}{-4x^4+4x}$

EJERCICIOS.

5) Derive implícitamente la función: $[\ln(3x^2y)+1]y=\sqrt{3}$

Solución:

$$[\ln(3x^2y)+1]y=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad [\ln(3x^2)+\ln(y)+1]y=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad [2\ln(3x)+\ln(y)+1]y=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2y\ln(3x)+y\ln(y)+y=\sqrt{3}$$

Ahora, derivando implícitamente tenemos:

$$2y'\ln(3x)+2y\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3+y'\ln(y)+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'+y'=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y'\ln(3x)+\frac{2y}{x}+y'\ln(y)+y'+y'=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y'\ln(3x)+y'\ln(y)+2y'=\frac{-2y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y'[2\ln(3x)+\ln(y)+2]=\frac{-2y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y'[\ln(3x^2)+\ln(y)+2]=\frac{-2y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y'[\ln(3x^2y)+2]=\frac{-2y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y'=\frac{-2y}{x[\ln(3x^2y)+2]}$$

EJERCICIOS.

6) Determine los puntos en la gráfica de la función $h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$, en los cuales la recta tangente es paralela al eje x.

Solución:

$$h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \quad ; \quad h'(x) = \frac{3}{3}x^2 + \frac{2}{2}x - 6 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = x^2 + x - 6$$

Ahora, como se quieren determinar los puntos en la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela al eje x, igualamos $h'(x)$ a 0, pues si, la recta tangente es paralela al eje x, es porque tiene pendiente 0.

Así, $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \quad$ ó $\quad x = 2$

De modo que los puntos buscamos son: $x = -3$ y $x = 2$

EJERCICIOS.

7) Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = 3$.

Solución:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

Evaluando en $x = 3$, se obtiene

$$y' = 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad y' = 6$$

Para determinar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$, necesitamos la pendiente y un punto por donde pasa la recta.

La pendiente es $m = y' = 6$ y un punto, $f(3) = 3^2 = 9$. Un punto de la recta es $(3,9)$

Utilizando la ecuación punto-pendiente, obtenemos

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 9 = 6(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad y - 9 = 6x - 18$$

EJERCICIOS.

$$\Rightarrow \quad y = 6x - 18 + 9$$

$$\Rightarrow \quad y = 6x - 9$$ Ecuacion de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$.

Para determinar la ecuación de la recta normal a la función $f(x) = x^2$, necesitamos la pendiente y un punto por donde pasa la recta.

La pendiente es $m = -\frac{1}{6}$ y un punto seria: $(3,9)$

Utilizando la ecuación punto-pendiente, obtenemos

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad y - 9 = -\frac{1}{6}x + \frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} + 9 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$

Ecuacion de la recta normal a la función $f(x) = x^2$.