MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U7

CLASE N° 11

- ►**Capítulo 6**
  - ►**Parábolas.**
  - ►**Hipérbolas.**

► PARÁBOLAS

Parábola.

La ecuación de la parábola es:

$$ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(1)}$$

Existen dos formas de representar esta ecuación: forma vértice y forma raíz.

a. Forma vértice.

La forma vértice tiene por expresión:

$$a(x - V_x)^2 + V_y \qquad \textbf{(2)}$$

Donde V_x y V_y son las coordenadas x e y respectivamente del vértice. Para pasar de la ecuación **(1)** a la ecuación **(2)** aplicaremos el método de completación de cuadrados.

► **PARÁBOLAS**

b. Forma raíz

La forma raíz tiene por expresión:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \textbf{(3)}$$

Donde x_1 y x_2 son los puntos de corte con el eje x. Para encontrar los puntos de corte con el eje x se iguala a 0 la forma vértice y se despeja x.

Pasos para graficar una parábola a partir de la ecuación cuadrática.

1. Expresar la ecuación cuadrática en forma vértice **(vía completación de cuadrados)** y determinar las coordenadas del vértice.
2. Determinar los puntos de corte de la parábola con el eje x y expresar la ecuación cuadrática en forma raíz.
3. Hallar el punto de corte de la parábola con respecto al eje y.
4. Verificar si la parábola tiene un máximo o un mínimo (si el coeficiente del término cuadrático es negativo, la parábola tiene un máximo, en caso contrario tiene un mínimo).
5. Ubicar los puntos y graficar la parábola.

► PARÁBOLAS

Graficar la expresión $y = 3x^2 + 6x - 4$

<u>Solución:</u>

Escribiendo la ecuación en forma vértice se obtiene:

$$3\left(x^2 + 2x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow 3\left(x^2 + 2(1)x + 1 - 1 - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow 3\left((x+1)^2 - 1 - \frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 3\left((x+1)^2 - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow 3(x+1)^2 - 7$$

$\Rightarrow 3(x - (-1))^2 - 7$ **Forma Vértice**

Luego, $V_x = -1$ y $V_y = -7$. Por lo tanto el vértice es $(-1, -7)$

► PARÁBOLAS

Escribiendo la ecuación en forma raíz se obtiene:

$$3(x-(-1))^2-7=0 \quad \Rightarrow \quad 3(x-(-1))^2=7 \quad \Rightarrow \quad (x-(-1))^2=\frac{7}{3} \quad \Rightarrow |x-(-1)|=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\Rightarrow |x+1|=\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad \Rightarrow \; x+1=\pm\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Luego, $x_1=-1+\sqrt{\frac{7}{3}}$ y $x_2=-1-\sqrt{\frac{7}{3}}$.

La forma raíz es $3\left(x-\left(-1+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right)\left(x-\left(-1-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right)$

► PARÁBOLAS

Los puntos de corte de la parábola con el eje x son: $\left(-1+\sqrt{\frac{7}{3}},0\right)$ y $\left(-1-\sqrt{\frac{7}{3}},0\right)$

Hallar el punto de corte de la parábola con respecto al eje y, para ello hacemos $x=0$.

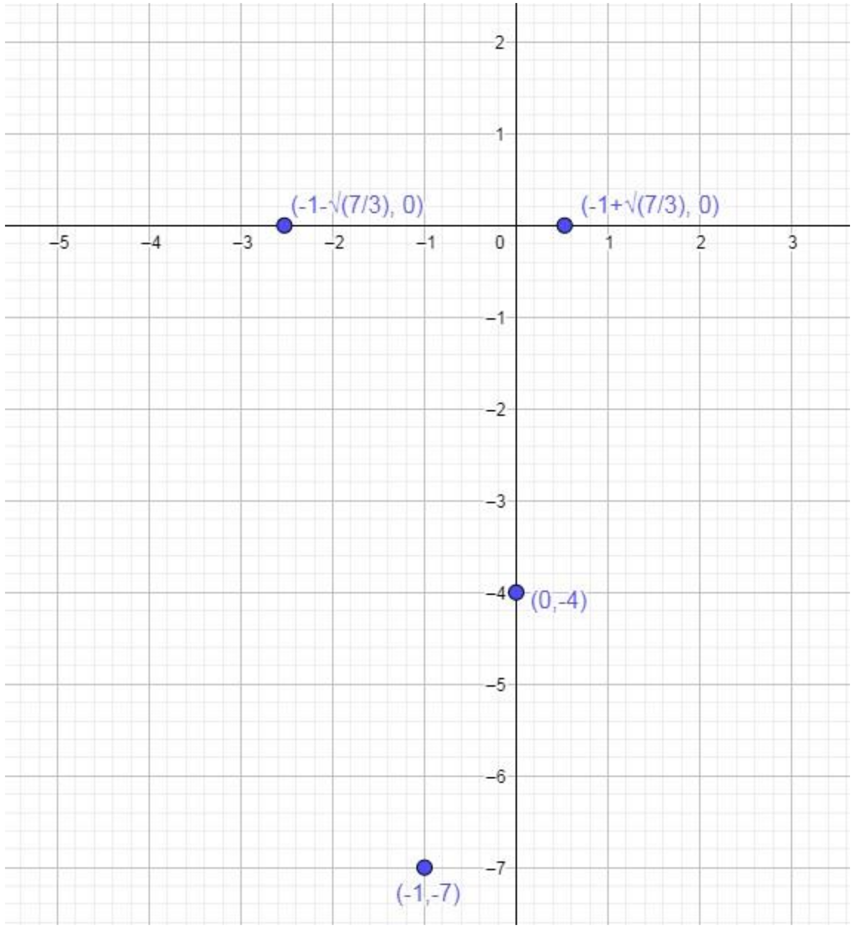
$$y=3x^2+6x-4 \quad \Rightarrow y=3(0)^2+6(0)-4 \quad \Rightarrow \quad y=-4$$

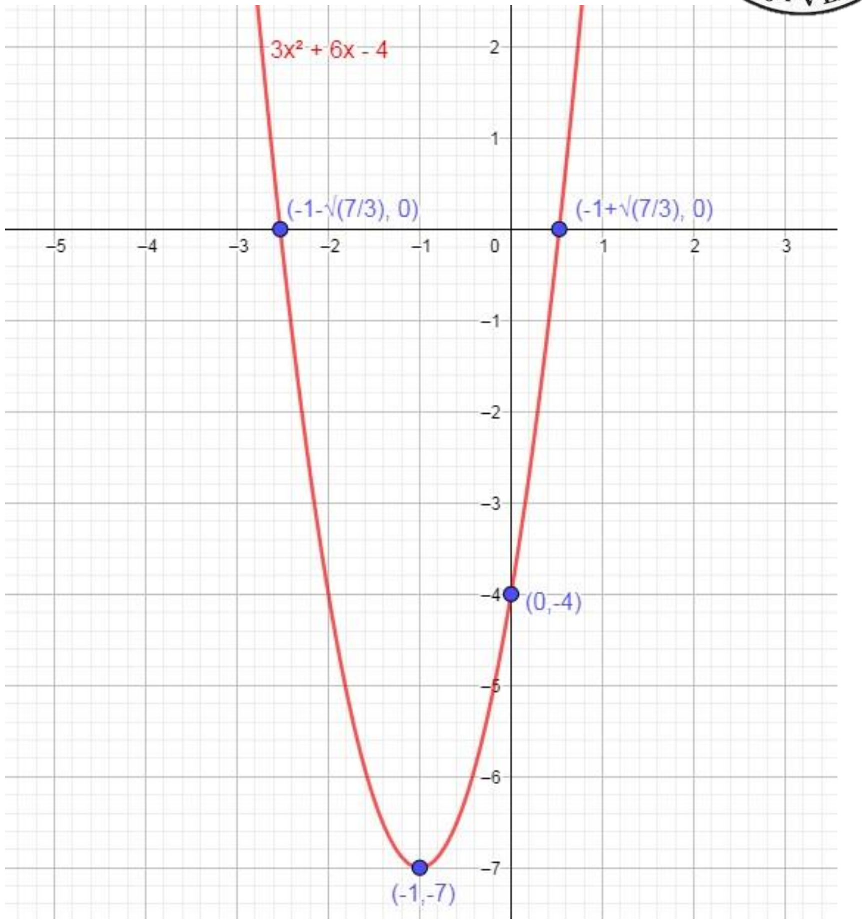
El punto de corte de la parábola con el eje y es $(0,-4)$

La parábola tiene un mínimo ya que el coeficiente del término cuadrático es positivo.

Ahora graficamos

► **PARÁBOLAS**





► PARÁBOLAS

Graficar la expresión $y = -x^2 + 7x - 6$

Solución:

Escribiendo la ecuación en forma vértice se obtiene:

$$-(x^2 - 7x + 6) \Rightarrow -\left(x^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6\right)$$

$$\Rightarrow -\left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6\right) \Rightarrow -\left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$ **Forma Vértice**

Luego, $V_x = \frac{7}{2}$ y $V_y = \frac{25}{4}$. Por lo tanto el vértice es $\left(\frac{7}{2}, \frac{25}{4}\right)$

► PARÁBOLAS

Escribiendo la ecuación en forma raíz se obtiene:

$$\Rightarrow -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{25}{4}=0 \qquad \Rightarrow -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{25}{4} \qquad \Rightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad \Rightarrow \left|x-\frac{7}{2}\right|=\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{7}{2}\right|=\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \; x-\frac{7}{2}=\pm\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow x=\frac{7}{2}\pm\frac{5}{2}$$

Luego, $x_1=\frac{7}{2}+\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x_1=6$ y $x_2=\frac{7}{2}-\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x_2=1$

La forma raíz es $-(x-6)(x-1)$

► PARÁBOLAS

Los puntos de corte de la parábola con el eje x son: $(1, 0)$ y $(6, 0)$

Hallar el punto de corte de la parábola con respecto al eje y, para ello hacemos $x = 0$.

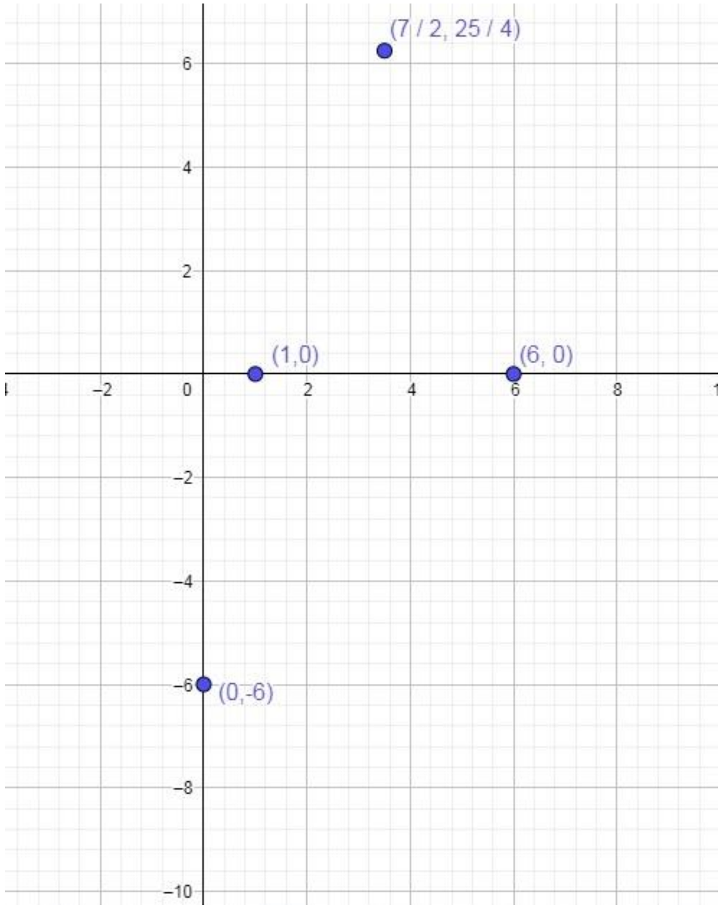
$$y = -x^2 + 7x - 6 \Rightarrow y = -(0)^2 + 7(0) - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -6$$

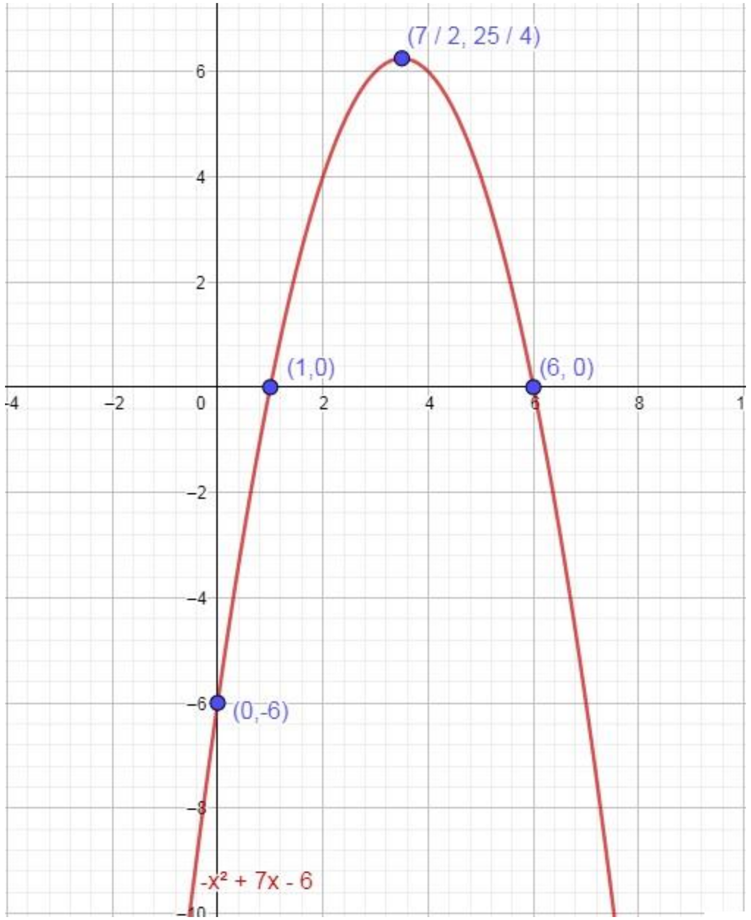
El punto de corte de la parábola con el eje y es $(0, -6)$

La parábola tiene un máximo ya que el coeficiente del término cuadrático es negativo.

Ahora graficamos

► **PARÁBOLAS**

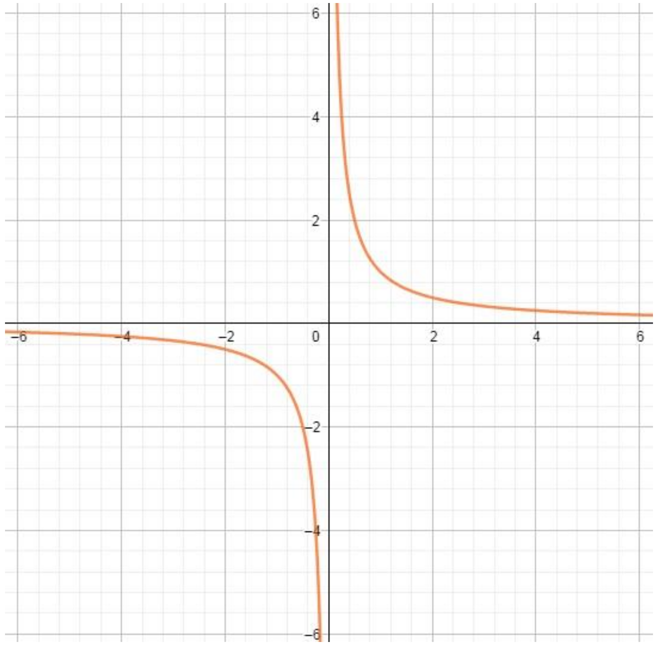




► **HIPERBOLA**

<u>Hipérbola</u>

Veamos la hipérbola básica $f(x) = \frac{1}{x}$



Asíntota horizontal $y = 0$

Asíntota vertical $x = 0$

► HIPERBOLA

En el caso de hipérbolas de la forma

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

la asíntota horizontal esta dado por el cociente de los coeficientes de x, es decir

$$y=\frac{a}{c}$$

La asíntota vertical esta dado por el valor de x que anula al denominador, es decir

$$cx+d=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{d}{c}$$

► HIPERBOLA

Pasos para graficar una hipérbola de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$:

1. Determinar las asíntotas vertical y horizontal.

Asíntota vertical: $x = -\frac{d}{c}$ Asíntota horizontal: $y = \frac{a}{c}$

2. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje x (si existe), para ello hacemos $y = 0$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

3. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje y (si existe), para ello hacemos $x = 0$

$$y = \frac{a(0)+b}{c(0)+d} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{d}$$

4. Determinar convenientemente dos puntos por donde pasa la hipérbola.

$$\left(x_1, \frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right) \quad \text{y} \quad \left(x_2, \frac{ax_2+b}{cx_2+d}\right)$$

5. Ubicar los puntos, las asíntotas y graficar la hipérbola.

► HIPERBOLA

Graficar la expresión $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

Solución:

1. Determinamos las asíntotas vertical y horizontal.

Asíntota vertical: $x = -\frac{d}{c} \Rightarrow x = -\frac{3}{1} \Rightarrow x = -3$ Asíntota horizontal: $y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 2$.

2. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje x, para ello hacemos $y = 0$

$$\frac{2x+1}{x+3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}, \qquad \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

3. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje y, para ello hacemos $x = 0$

$$y = \frac{2(0)+1}{0+3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}, \qquad \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

HIPERBOLA

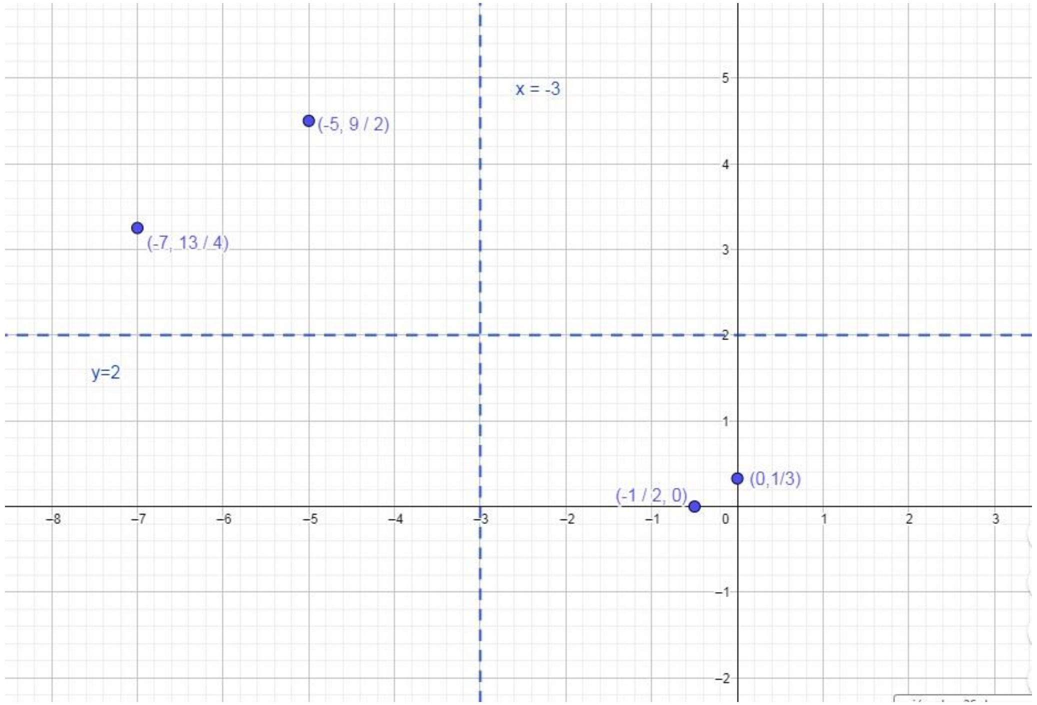
4. Determinar convenientemente dos puntos por donde pasa la hipérbola, por ejemplo $x = -5$ y $x = -7$.

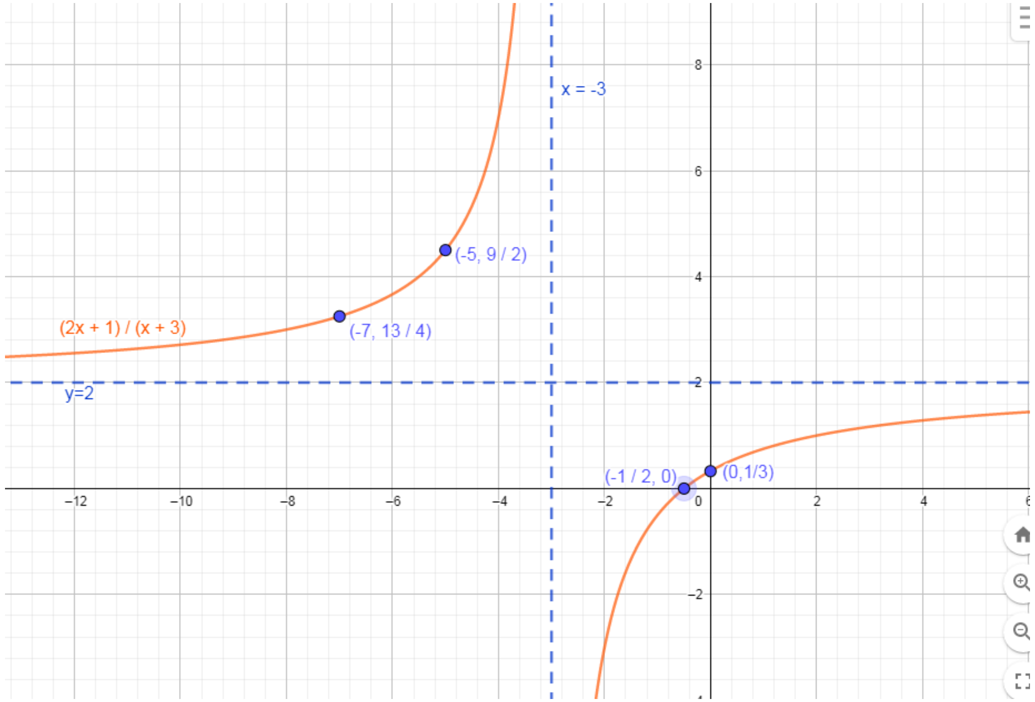
$$\left(-5, \frac{2(-5)+1}{-5+3}\right) \Rightarrow \left(-5, \frac{-9}{-2}\right) \Rightarrow \left(-5, \frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-7, \frac{2(-7)+1}{-7+3}\right) \Rightarrow \left(-7, \frac{-13}{-4}\right) \Rightarrow \left(-7, \frac{13}{4}\right)$$

5. Ubicar los puntos, las asíntotas y graficar la hipérbola

► HIPERBOLA





► HIPERBOLA

Graficar la expresión $f(x) = \frac{3-2x}{x-2}$

Solución:

1. Determinamos las asíntotas vertical y horizontal.

Asíntota vertical: $x = -\frac{-2}{1} \Rightarrow x = 2$

Asíntota horizontal: $y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{-2}{1} \Rightarrow y = -2$

2. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje x, para ello hacemos $y = 0$

$$\frac{3-2x}{x-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3-2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}, \qquad \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

3. Determinar el punto de corte de la hipérbola con respecto al eje y, para ello hacemos $x = 0$

$$y = \frac{3-2(0)}{0-2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{-2}, \qquad \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

► **HIPERBOLA**

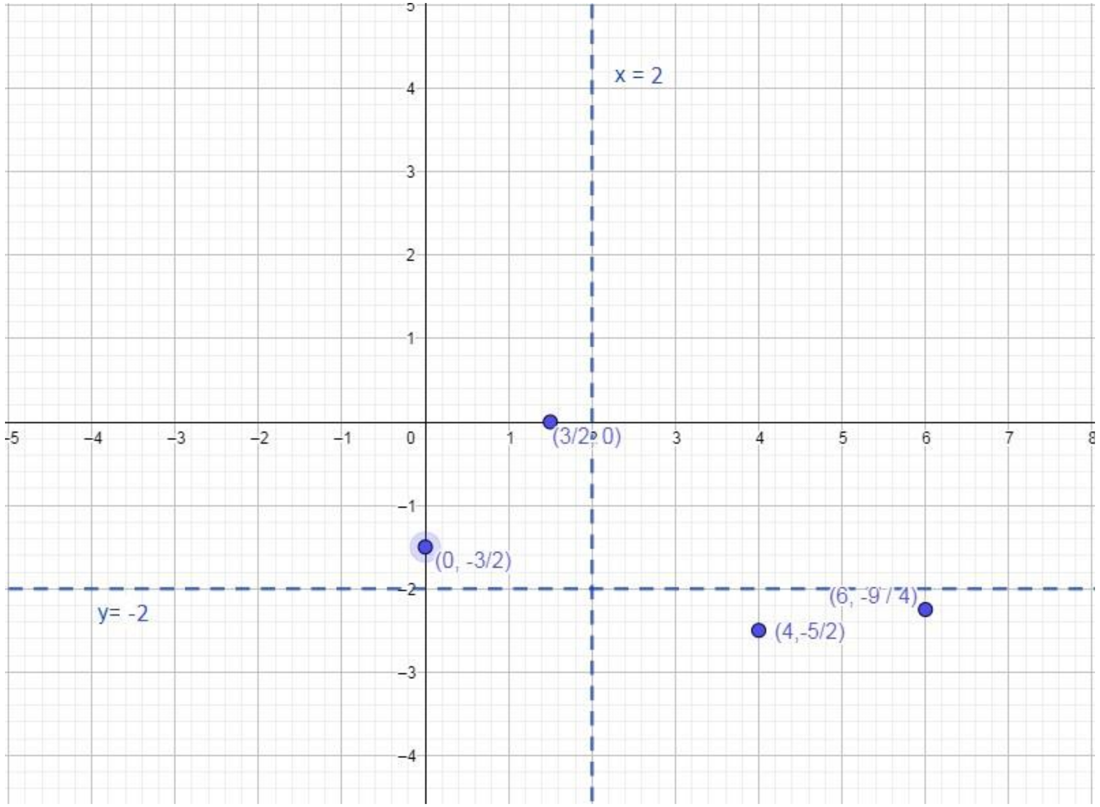
4. Determinar convenientemente dos puntos por donde pasa la hipérbola, por ejemplo $x = 4$ y $x = 6$.

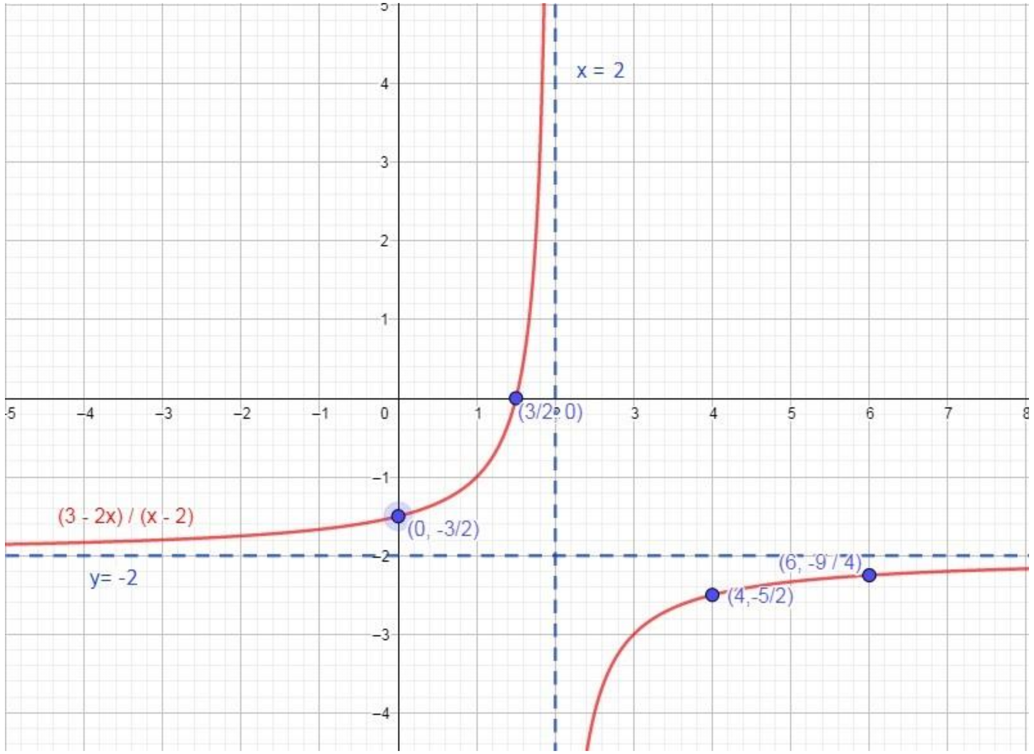
$$\left(4, \frac{3-2(4)}{4-2}\right) \Rightarrow \left(4, \frac{-5}{2}\right) \Rightarrow \left(4, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\left(6, \frac{3-2(6)}{6-2}\right) \Rightarrow \left(6, \frac{-9}{4}\right) \Rightarrow \left(6, -\frac{9}{4}\right)$$

5. Ubicar los puntos, las asíntotas y graficar la hipérbola

► HIPERBOLA





► HIPERBOLA

- ✓ Realizar las actividades del libro Métodos de graficación, desde la página 6-22 hasta la página 6-34.