MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 16

- Límites.
  - **Indeterminación $0/0$**
  - **Indeterminación k/0**
  - **Ejercicios**

INDETERMINACIÓN $0/0$

Indeterminación $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ Indeterminación

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

Por lo que, $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$

INDETERMINACIÓN $0/0$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2+2x-2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{(1)^2-1}{(1)^3-(1)^2+2(1)-2}$$

$$= \frac{1-1}{1-1+2-2}$$

$= \frac{0}{0}$ Indeterminación

INDETERMINACIÓN $0/0$

Así,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+2}$$

$$=\frac{1+1}{(1)^2+2}$$

$$=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

		1	-1	2	-2
1			1	0	2
		1	0	2	0

Así, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{2}{3}$

INDETERMINACIÓN $0/0$

3) $\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}$

Solución:

$$\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A}}{A-A}=\frac{0}{0}$$ indeterminación

$$\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}=\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{A}}{\sqrt{x}+\sqrt{A}}$$

$$=\lim_{x\to A}\frac{\cancel{(\sqrt{x})^2}-\cancel{(\sqrt{A})^2}}{(x-A)(\sqrt{x}+\sqrt{A})}$$

INDETERMINACIÓN $0/0$

$$\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}=\lim_{x\to A}\frac{\cancel{x-A}}{\cancel{(x-A)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{A}\right)}$$

$$=\lim_{x\to A}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{A}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{A}}=\frac{1}{2\sqrt{A}}\cdot\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{A}}{2A}$$

Así, $\lim_{x\to A}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{A}}{x-A}=\frac{\sqrt{A}}{2A}$.

INDETERMINACIÓN $0/0$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt[4]{x-3}}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt[4]{x-3}}=\frac{(3)^2-5(3)+6}{\sqrt[4]{3-3}}=\frac{9-15+6}{\sqrt[4]{0}}=\frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt[4]{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt[4]{x-3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{(x-3)^3}}{\sqrt[4]{(x-3)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-5x+6)\cdot\sqrt[4]{(x-3)^3}}{\cancel{\sqrt[4]{(x-3)^4}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)\sqrt[4]{(x-3)^3}}{\cancel{(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x-2)\sqrt[4]{(x-3)^3}=(3-2)\sqrt[4]{(3-3)^3}=(1)\sqrt[4]{(0)^3}=(1)\sqrt[4]{(0)}=1\cdot 0=0$$

Así, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt[4]{x-3}}=0$

INDETERMINACIÓN $k/0$

Indeterminación $\frac{k}{0}$

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x^2+2x-8}$

Solución:

$\lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x^2+2x-8} = \frac{2+7}{(2)^2+2(2)-8} = \frac{9}{4+4-8} = \frac{9}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x^2+2x-8} = \lim_{x \to 2} \frac{x+7}{(x-2)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x+7}{x+4} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x+4}$$

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+-2} = \frac{1}{0^+} = \infty$; $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^--2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x+4} = \nexists \cdot \frac{9}{6} = \nexists$. Así, $\lim_{x \to 2} \frac{x+7}{x^2+2x-8} = \nexists$

INDETERMINACIÓN $k/0$

2) $\lim_{x\to -2} \frac{16x+12}{x^3+x^2-8x-12}$

Solución:

$$\lim_{x\to -2} \frac{16x+12}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{16(-2)+12}{(-2)^3+(-2)^2-8(-2)-12} = \frac{-32+12}{-8+4+16-12} = \frac{-20}{0}$$ Indeterminación

	1	1	-8	-12
-2		-2	2	12
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

Por lo que,

$$\lim_{x\to -2} \frac{16x+12}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x\to -2} \frac{16x+12}{(x+2)^2(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \left(\frac{1}{(x+2)^2} \cdot \frac{16x+12}{x-3}\right)$$

INDETERMINACIÓN $k/0$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)^2}\cdot\lim_{x\to-2}\frac{16x+12}{x-3}$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(-2^+ + 2)^2}=\frac{1}{0^+}=\infty \quad ;$$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(-2^-+2)^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)^2}\cdot\lim_{x\to-2}\frac{16x+12}{x-3}=\infty\cdot\frac{(-20)}{-5}=\infty\cdot 4=\infty$$

Así, $\lim_{x\to-2}\frac{16x+12}{x^3+x^2-8x-12}=\infty$

INDETERMINACIÓN $k/0$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{5}{\sqrt{3-x}}$

Solución:

$\lim_{x\to 3} \frac{5}{\sqrt{3-x}} = \frac{5}{\sqrt{3-3}} = \frac{5}{\sqrt{0}} = \frac{5}{0}$ Indeterminación

$\lim_{x\to 3^-} \frac{5}{\sqrt{3-x}} = \frac{5}{\sqrt{3-3^-}} = \frac{5}{\sqrt{0^+}} = \frac{5}{0^+} = \infty$;

$\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{\sqrt{3-x}}$ No tiene sentido calcular, ya que el dominio de la función es $(-\infty, 3)$ y los valores de x a la derecha de 3 no pertenece al dominio.

De modo que, $\lim_{x\to 3} \frac{5}{\sqrt{3-x}} = \infty$

EJERCICIOS

Calcular los siguientes limites:

1) $lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-x-1}{x^2-3x-2}$

Solución:

$$lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-x-1}{x^2-3x-2}=\frac{3^3-4(3)^2-3-1}{3^2-3(3)-2}$$
$$=\frac{27-36-3-1}{9-9-2}$$
$$=\frac{-13}{-2}$$

Asi, $lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-x-1}{x^2-3x-2}=\frac{13}{2}$

EJERCICIOS

2) $lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$

Solución:

$$lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}=\frac{2^2+2(2)-8}{2^2-3(2)+2}=\frac{4+4-8}{4-6+2}=\frac{0}{0}$$ Indeterminación

$$lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}=lim_{x\to 2}\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$$

$$=lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-1}$$

$$=\frac{2+4}{2-1}=\frac{6}{1}=6$$

Asi, $lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}=6$

EJERCICIOS

3) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6} = \frac{2-\sqrt{2+2}}{2^2+2-6} = \frac{2-\sqrt{4}}{4+2-6} = \frac{2-2}{6-6} = \frac{0}{0}$$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-\cancel{(\sqrt{x+2})^2}}{(x^2+x-6)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{(x^2+x-6)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x+3)\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})}$$

EJERCICIOS

$$lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6} = lim_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x+3)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$= \frac{(2+1)}{(2+3)\left(2+\sqrt{2+2}\right)}$$

$$= \frac{3}{(5)\left(2+\sqrt{4}\right)}$$

$$= \frac{3}{(5)(4)}$$

$$= \frac{3}{20}$$

Asi, $lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6} = \frac{3}{20}$

EJERCICIOS

4) $lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

Solución:

$lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{-1+1}{-1+\sqrt{-1+2}} = \frac{0}{-1+\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x+2}}$$

$$= lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{x^2-\cancel{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}}$$

$$= lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{x^2-x-2}$$

$$= lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{(x-2)\cancel{(x+1)}}$$

EJERCICIOS

$$lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = lim_{x \to -1} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{-1+2}}{-1-2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{1}}{-3}$$

$$= \frac{-1-1}{-3}$$

$$= \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Asi, $lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{2}{3}$

EJERCICIOS

5) $lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}}$

Solución:

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}}=\frac{\sqrt{1^2+8}-3}{1-\sqrt{3(1)-2}}=\frac{\sqrt{1+8}-3}{1-\sqrt{3-2}}=\frac{\sqrt{9}-3}{1-\sqrt{1}}=\frac{3-3}{1-1}=\frac{0}{0}$$ Indeterminación

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}}=lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3}\cdot\frac{1+\sqrt{3x-2}}{1+\sqrt{3x-2}}$$

$$=lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\cancel{\sqrt{x^2+8}}\right)^{\cancel{2}}-3^2\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(1^2-\left(\cancel{\sqrt{3x-2}}\right)^{\cancel{2}}\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+8-9\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(1-(3x-2)\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(1-3x+2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

EJERCICIOS

$$lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}} = lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(3-3x)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$= lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{-3\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$= lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{-3\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$= \frac{(1+1)\left(1+\sqrt{3(1)-2}\right)}{-3\left(\sqrt{(1)^2+8}+3\right)}$$

$$= \frac{(2)\left(1+\sqrt{3-2}\right)}{-3\left(\sqrt{1+8}+3\right)}$$

$$= \frac{(2)\left(1+\sqrt{1}\right)}{-3\left(\sqrt{9}+3\right)} = \frac{2(1+1)}{-3(3+3)} = \frac{2(2)}{-3(6)} = \frac{4}{-18} = -\frac{2}{9}$$

Asi, $lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{1-\sqrt{3x-2}} = -\frac{2}{9}$

EJERCICIOS

6) $lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+3x-10}$

Solución:

$$lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+3x-10}=\frac{2+3}{(2)^2+3(2)-10}=\frac{5}{4+6-10}=\frac{5}{10-10}=\frac{5}{0}$$ Indeterminación

$$\begin{aligned} lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+3x-10} &= lim_{x\to 2}\frac{x+3}{(x+5)(x-2)} \\ &= lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x+3}{x+5}\right) \\ &= lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right) lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{x+5}\right) \\ &= \nexists\cdot\frac{2+3}{2+5}=\nexists\cdot\frac{5}{7}=\nexists \end{aligned}$$

$$lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2^+-2}=\frac{1}{0^+}=\infty \qquad lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2^--2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Asi, $lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+3x-10}=\nexists$