MATEMATICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 20

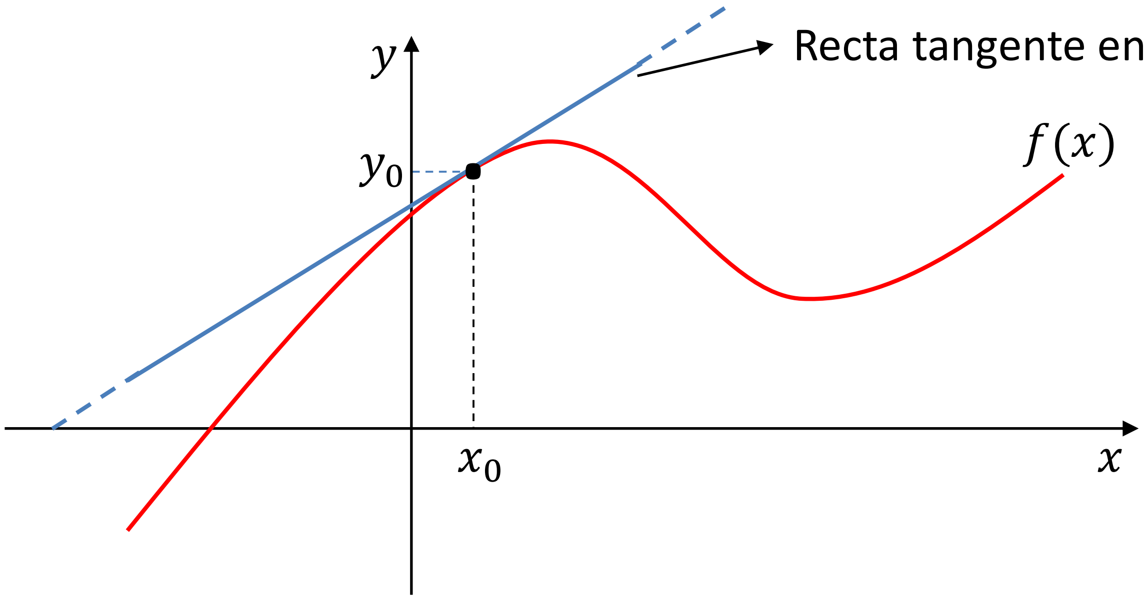
- Derivadas
    - Pendiente de la recta tangente.
    - Interpretación física de la derivada.
    - Derivada de una función.
    - Derivadas laterales.
    - Derivabilidad y continuidad.
    - Ejercicios

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

<u>Derivadas</u>

Pendiente de la Recta Tangente. (Interpretación geométrica de la Derivada).

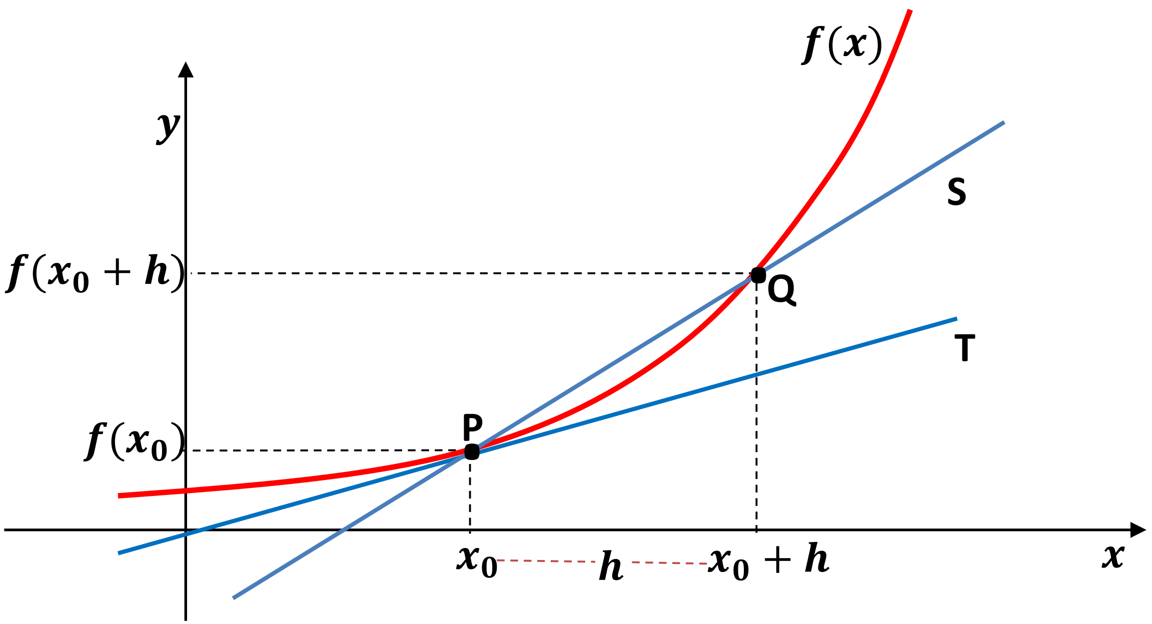
La derivada se define como la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0.



❑ PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

Cuando calculamos la derivada en un punto (x_0) estamos calculando la pendiente de la Recta Tangente a la función $f(x)$ en x_0.

Supongamos que deseamos encontrar la ecuación de la Recta Tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$.



PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

La pendiente de la recta secante al gráfico de f en los puntos $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ y $Q\big(x_0 + h\,, f(x_0 + h)\big)$ es la razón:

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{(Razón de cambio promedio)}$$

Si h tiende a cero $(h \to 0)$, geométricamente podemos observar que el punto Q (móvil) se acerca al punto P (fijo) y la recta secante tiende a la recta tangente. Con base en esta idea geométrica, la pendiente de la tangente de $y = f(x)$ en el punto P se obtendrá como el valor límite del cociente (razón) anterior, cuando h tienda a cero, es decir:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe y es finito recibe el nombre de derivada de f en x_0.

Se denota por: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y se dirá que f es derivable en x_0.
(Razón de cambio instantánea)

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

Ejemplo:

Determine la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 + 3x$ cuando $x = -\frac{2}{3}$

Solución:

El valor numérico de la función para $x = -\frac{2}{3}$ es:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cancel{3}\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{9} - 2 = -\frac{10}{9}$$

Es decir, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{9}$

Así,

$$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(-\frac{2}{3} + h\right) - f\left(-\frac{2}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\left(-{}^{2}/{}_{3} + h\right)^2 + 3\left(-{}^{2}/{}_{3} + h\right) - \left(-{}^{10}/{}_{9}\right)}{h} =$$

❑ PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{3}h+h^2\right)-2+3h+\frac{10}{9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\frac{8}{9}}-\frac{8}{3}h+2h^2-\cancel{2}+3h+\cancel{\frac{10}{9}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+\frac{h}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(2h+\frac{1}{3}\right)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}2h+\frac{1}{3}=2(0)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la pendiente de la curva en el punto $A\left(-\frac{2}{3},-\frac{10}{9}\right)$ tiene un valor de $\frac{1}{3}$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA.

Interpretación física de la derivada

Si $f(t)$ representa la posición instantánea de una partícula que se mueve en línea recta, entonces, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ viene dada por:

$$Vp = \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

y la velocidad instantánea es el límite cuando el tiempo transcurrido tiende a cero $(h \to 0)$. Es decir:

$$V(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

❑ INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA.

Ejemplo:

Suponga que un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado de modo que su distancia dirigida después de t segundos es $\sqrt{2t+1}m$.

a) Encuentre su velocidad instantánea en $t = \alpha$, $\alpha > 0$

b) Cuando alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ m/s

Solución:

a) $$V(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(\alpha+h)+1}-\sqrt{2\alpha+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2\alpha+2h+1}-\sqrt{2\alpha+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}-\sqrt{2\alpha+1}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}{\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\cancel{\sqrt{2\alpha+2h+1}}\right)^{\cancel{2}}-\left(\cancel{\sqrt{2\alpha+1}}\right)^{\cancel{2}}}{h\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA.

a) $V(\alpha) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\alpha+2h+1-(2\alpha+1)}{h\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2\alpha}+2h+\cancel{1}-\cancel{2\alpha}-\cancel{1}}{h\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2\alpha+2h+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\alpha+2(0)+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}$$

Así, $V(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}$ m/seg

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

b) $\frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2=\sqrt{2\alpha+1} \quad \Leftrightarrow \quad 4=2\alpha+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha=3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=\frac{3}{2}$

Por lo tanto, el objeto alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ m/seg cuando $t=\frac{3}{2}$ seg

Derivada de una función

La derivada de la función f es la función f', tal que su valor en un número x del dominio de f es la derivada de f en x. Es decir:

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (Límite del cociente incremental)

La derivada de una función $y=f(x)$ puede expresarse de diferentes formas, cada una de las cuales posee el mismo significado. Algunas de uso frecuente son:

y'	$f'(x)$	$D_x y$	$D_x f(x)$	$\frac{dy}{dx}(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$	$\left.\frac{df}{dx}\right\|_x$	$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_x$

- **DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.**

Ejemplo:

Probar que la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es: $D_x f(x) = -\frac{2}{x^3}$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x^2+2xh+h^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x^2+2xh+h^2)}{(x^2+2xh+h^2)x^2}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2xh - h^2}{h(x^4 + 2x^3h + h^2x^2)}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h(x^4+2x^3h+h^2x^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-2x-h)}{\cancel{h}(x^4+2x^3h+h^2x^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^4+2x^3h+h^2x^2}$$

$$= \frac{-2x-(0)}{x^4+2x^3(0)+(0)^2x^2}$$

$$= \frac{-2x}{x^4+0+0}$$

$$= \frac{-2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{-2}{x^3}$$

De modo que $D_x f(x) = \frac{-2}{x^3}$

DERIVADAS LATERALES.

Derivadas laterales.

Las derivadas laterales se definen usando la misma idea de los límites laterales:

- Derivada lateral derecha:

$$f'_{+}(x_0) = lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Derivada lateral izquierda:

$$f'_{-}(x_0) = lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si estos límites existen y son finitos.

Obviamente, si $f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)$ entonces, $f'(x_0)$ no existe.

- **DERIVADAS LATERALES.**

Ejemplo:

Determine la derivada de $f(x) = |x^2 - 4|$ en $x_0 = 2$.

Solución:

Derivada lateral derecha:

$$f'_+(2) = lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = lim_{h\to 0^+} \frac{|(2+h)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{h}$$

$$= lim_{h\to 0^+} \frac{|2^2 + 4h + h^2 - 4| - |0|}{h} = lim_{h\to 0^+} \frac{|4h + h^2|}{h} = lim_{h\to 0^+} \frac{|h(4+h)|}{h}$$

$$= lim_{h\to 0^+} \frac{|h||4+h|}{h} = lim_{h\to 0^+} \frac{h(4+h)}{h} = lim_{h\to 0^+}(4+h) = 4 + 0^+ = 4$$

Por lo tanto, $f'_+(2) = 4$.

DERIVADAS LATERALES.

Derivada lateral izquierda:

$$f'_-(2) = lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = lim_{h\to 0^-}\frac{|(2+h)^2-4|-|2^2-4|}{h}$$

$$= lim_{h\to 0^-}\frac{|2^2+4h+h^2-4|-|0|}{h} = lim_{h\to 0^-}\frac{|4h+h^2|}{h} = lim_{h\to 0^-}\frac{|h(4+h)|}{h}$$

$$= lim_{h\to 0^-}\frac{|h||4+h|}{h} = lim_{h\to 0^-}\frac{-h(4+h)}{h} = lim_{h\to 0^-} -(4+h) = -4-0^- = -4$$

Por lo tanto, $f'_-(2) = -4$.

En consecuencia la función $f(x) = |x^2-4|$ no es derivable en $x_0 = 2$.

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Derivabilidad y Continuidad

Teorema: Si f es derivable en x_0, entonces, f es continua en x_0.

El enunciado es equivalente a: Si f no es continua en x_0, entonces, f no es derivable en x_0.

El inverso de este teorema no es necesariamente cierto.

Ejemplo:

La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. Sin embargo, no tiene una derivada allí.

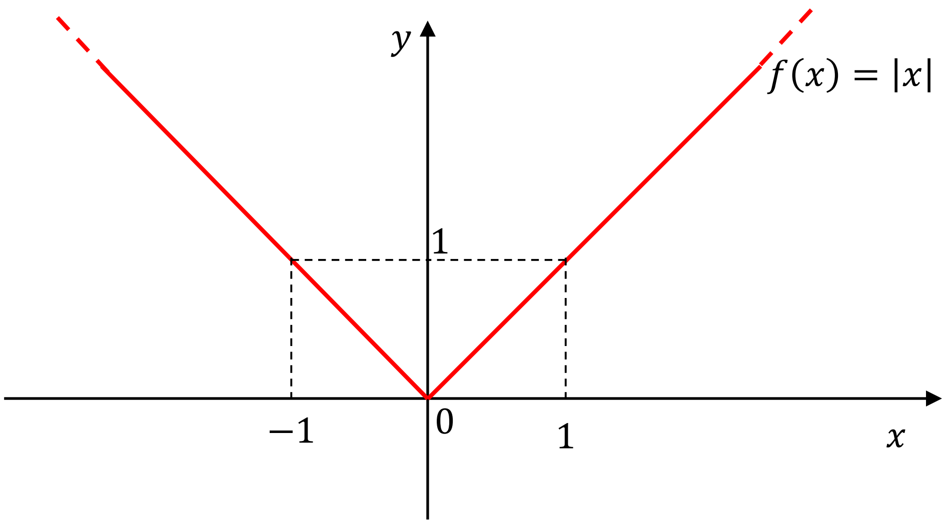
Veamos: $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Asi, $\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$

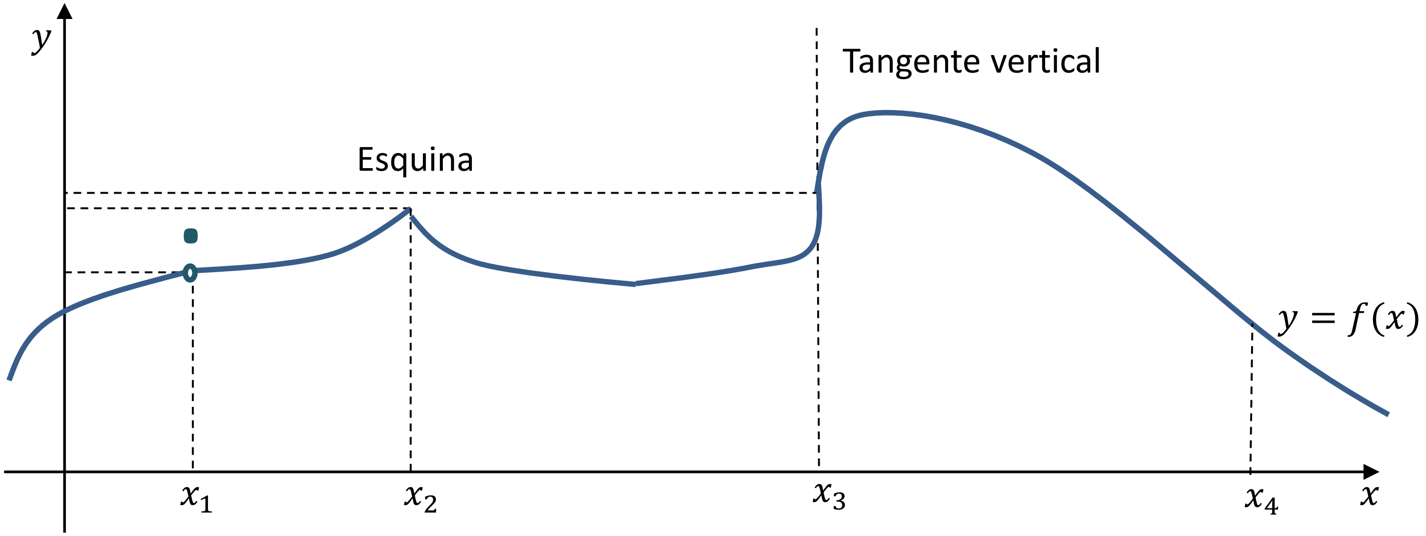
Mientras que $\lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$

Ahora, como los límites laterales son diferentes, entonces, $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ no existe y por lo tanto, $f'(0)$ no existe.



❑ DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Un argumento similar muestra que cualquier punto en donde la gráfica de una función continua tenga una esquina o vértice, la función no es derivable.



x_1: f no es continua, por lo tanto, no es derivable.

x_2 y x_3: f es continua, pero no es derivable.

x_4: f es continua y derivable.

- **EJERCICIOS.**

Ejercicios

Usando la definición, calcular las derivadas de:

a) $f(x) = 4x - 2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)-2-(4x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4x}+4h\cancel{-2}-\cancel{4x}+\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$$

Así, $f'(x) = 4$

- **EJERCICIOS.**

b) $f(x) = \frac{2x+3}{5}$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)+3}{5} - \left(\frac{2x+3}{5}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2x+2h+3}{5} - \left(\frac{2x+3}{5}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{2x} + 2h + \cancel{3} - \cancel{2x} - \cancel{3}}{5}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}}{5\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Es decir, $f'(x) = \frac{2}{5}$

- **EJERCICIOS.**

c) $f(x) = \frac{2}{2x-3}$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2(x+h)-3} - \frac{2}{2x-3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2x+2h-3} - \frac{2}{2x-3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(2x-3) - 2(2x+2h-3)}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4x} - \cancel{6} - \cancel{4x} - 4h + \cancel{6}}{h(2x+2h-3)(2x-3)} = \lim_{h\to 0} \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}(2x+2h-3)(2x-3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4}{(2x+2h-3)(2x-3)} = \frac{-4}{(2x+2(0)-3)(2x-3)} = \frac{-4}{(2x-3)(2x-3)}$$

$$= \frac{-4}{(2x-3)^2}$$

Así, $f'(x) = \frac{-4}{(2x-3)^2}$

- **EJERCICIOS.**

d) $g(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - 1$

Solución:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow g'(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^3 - 4(x+h)^2 + (x+h) - 1 - (5x^3 - 4x^2 + x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4(x^2 + 2xh + h^2) + x + h - 1 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{5x^3} + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - \cancel{4x^2} - 8xh - 4h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{1} - \cancel{5x^3} + \cancel{4x^2} \cancel{-} x + \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - 8xh - 4h^2 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(15x^2 + 15xh + 5h^2 - 8x - 4h + 1)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 15x^2 + 15xh + 5h^2 - 8x - 4h + 1$$

$$= 15x^2 + 15x(0) + 5(0)^2 - 8x - 4(0) + 1 = 15x^2 - 8x + 1$$

Es decir, $g'(x) = 15x^2 - 8x + 1$

- **EJERCICIOS.**

e) $f(x) = sen(x)$

Solución:

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0}\frac{[sen(x)\cos(h)-sen(x)]+sen(h)\cos(x)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0}\frac{sen(x)[\cos(h)-1]+sen(h)\cos(x)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0}\frac{sen(x)[\cos(h)-1]}{h} + lim_{h\to 0}\frac{sen(h)\cos(x)}{h}$$

- **EJERCICIOS.**

1

$$= sen(x)lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}$$

$$= sen(x)lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} + \cos(x)\cdot 1$$

$$= sen(x)lim_{h\to 0}\frac{cos^2(h)-1^2}{h(\cos(h)+1)} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)lim_{h\to 0}\frac{1-cos^2(h)}{h(\cos(h)+1)} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)lim_{h\to 0}\frac{sen^2(h)}{h(\cos(h)+1)} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(h)}{h}\cdot\frac{sen(h)}{\cos(h)+1}\right) + \cos(x)$$

- **EJERCICIOS.**

$$= -sen(x)\overbrace{lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}}^{1} \cdot lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{\cos(h)+1} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)\cdot 1 \cdot \frac{sen(0)}{\cos(0)+1} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)\cdot 1 \cdot \frac{0}{1+1} + \cos(x)$$

$$= -sen(x)\cdot 1 \cdot 0 + \cos(x)$$

$$= 0 + \cos(x)$$

$$= \cos(x)$$

Por lo tanto, $f'(x) = \cos(x)$

EJERCICIOS..

Usando la definición, calcular las derivadas de:

a) $cos(x)$
b) $\tan(x)$
c) $ctan(x)$
d) $\sec(x)$
e) $cosec(x)$
f) $\ln(x)$
g) e^x