MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 22

- ►Regla de la cadena.
- ►Derivada de funciones inversas.
- ►Derivadas de orden superior.
- ►Derivación implícita.
- ►Ejercicios.

► REGLA DE LA CADENA.

Derive las siguientes funciones

a) $y = \log_2(8x+5)^2$

Solución:

$$y = \log_2(8x+5)^2$$

$$y = \frac{\ln(8x+5)^2}{\ln(2)}$$

$$y = \frac{2\ln(8x+5)}{\ln(2)}$$

$$y = \frac{2}{\ln(2)} \cdot \ln(8x+5)$$

► REGLA DE LA CADENA.

Así,

$$y' = \left(\frac{2}{\ln(2)}\right)' \cdot \ln(8x+5) + \frac{2}{\ln(2)}(\ln(8x+5))'$$

$$\Rightarrow \quad y' = 0 \cdot \ln(8x+5) + \frac{2}{\ln(2)} \cdot \left(\frac{1}{8x+5} \cdot (8x+5)'\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{\ln(2)}\left(\frac{1}{8x+5} \cdot 8\right)$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{16}{(8x+5)\ln(2)}$$

► REGLA DE LA CADENA.

b) $f(\theta) = \sqrt{\ln(\tan(\theta))}$

Solución:

$$f(\theta) = \sqrt{\ln(\tan(\theta))} \qquad \Rightarrow f'(\theta) = \frac{\sqrt{\ln(\tan(\theta))}}{2\ln(\tan(\theta))} \cdot \frac{1}{tan(\theta)} \cdot sec^2(\theta)$$

$$\Rightarrow f'(\theta) = \frac{sec^2(\theta)\sqrt{\ln(\tan(\theta))}}{2tan(\theta)\ln(\tan(\theta))}$$

► DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS.

Derivada de funciones inversas.

Por definición de función inversa, tenemos que

$$\boldsymbol{f\left(f^{-1}(x)\right) = x}$$

Derivando en ambos miembros de la igualdad y aplicando Regla de la cadena, obtenemos

$$\boldsymbol{f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad \Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1}$$

Despejando $\left(\boldsymbol{f^{-1}(x)}\right)'$, se tiene

$$\boxed{\boldsymbol{\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}}$$

► DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS.

Ejemplo:

Hallar la derivada de $ArcCos(x)$

Solución:

Sea $f^{-1}(x) = ArcCos(x)$, $\quad f(x) = \text{Cos}(x)$, $\quad f'(x) = -\text{Sen}(x)$,

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \Rightarrow \left(ArcCos(x)\right)' = \frac{1}{-Sen\left(ArcCos(x)\right)} = -\frac{1}{Sen\left(ArcCos(x)\right)} \qquad \text{(I)}$$

Además, sabemos que $Sen^2(x) + Cos^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad Sen(x) = \sqrt{1 - Cos^2(x)}$, luego

$$Sen\left(ArcCos(x)\right) = \sqrt{1 - Cos^2(ArcCos(x))} = \sqrt{1 - (Cos\ (ArcCos(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I), tenemos

$$\boxed{\left(ArcCos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

► DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS.

Con un razonamiento análogo al anterior, se puede demostrar que

$$\boxed{\left(ArcSen(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\left(ArcTan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ejemplos:

a) $f(x) = 3ArcTan(6e^x) + \ln(2x)$

Solución:

$$f(x) = 3ArcTan(6e^x) + \ln(2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\frac{1}{1+(6e^x)^2}\cdot(6e^x)' + \frac{1}{2x}\cdot(2x)'$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3\frac{1}{1+(6e^x)^2}\cdot 6e^x + \frac{1}{\cancel{2}x}\cdot\cancel{2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{18e^x}{1+36e^{2x}} + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{18xe^x + 1 + 36e^{2x}}{x + 36xe^{2x}}$$

► **DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS.**

b) $f(y) = \frac{1}{ArcSen(y)}$

Solución:

$$f(y) = \frac{1}{ArcSen(y)} \quad \Rightarrow \quad f'(y) = \frac{(1)'(ArcSen(y)) - (1)\big(ArcSen(y)\big)'}{(ArcSen(y))^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(y) = \frac{\dfrac{0 - \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{(ArcSen(y))^2}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}(ArcSen(y))^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(y) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{(1-y^2)(ArcSen(y))^2}$$

► DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Derivadas de Orden Superior.

Dado que la derivada de una función es, a su vez, una función, ella también se puede derivar. Una vez hecho esto, el resultado, que también es una función, puede ser derivado de nuevo. Las sucesivas derivadas que se obtienen de este proceso se denominan derivadas de orden superior.

Si $y = f(x)$, entonces $f'(x)$ se denomina la primera derivada de y con respecto a x. La derivada de $f'(x)$ que se denota $f''(x)$, recibe el nombre de segunda derivada de y con respecto a x, y también se puede expresar como $\frac{d^2y}{dx^2}$. En general, la enésima derivada se denota $f^{(n)}(x)$ o $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Ejemplos:

► DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

1. Dada $f(x) = \frac{3-x}{3+x}$ hallar $f''(x)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(3-x)'(3+x)-(3-x)(3+x)'}{(3+x)^2} = \frac{(-1)(3+x)-(3-x)(1)}{(3+x)^2} = \frac{-3-\cancel{x}-3+\cancel{x}}{(3+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-6}{(3+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -6(3+x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-6)'(3+x)^{-2} + (-6)\left((3+x)^{-2}\right)' = 0 \cdot (3+x)^{-2} + (-6)\left((-2)(3+x)^{-3} \cdot (3+x)'\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -6\left((-2)(3+x)^{-3} \cdot 1\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{12}{(3+x)^3}$$

► DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

2. Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ hallar $f^{(IV)}(x)$

Solución:

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^{-1}$

Así,

$$f'(x) = (-1)x^{-2} \quad ;$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3} \quad ;$$
$$f'''(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} \quad ;$$
$$f^{(IV)}(x) = -6(-4)x^{-5}$$

Por lo tanto,

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

► DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

3. Dada $f(x) = \frac{x+Sen(x)}{Cos(x)}$ hallar $f''(x)$

Solución:

Hallamos $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x + Sen(x)}{Cos(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(1 + Cos(x))(Cos(x)) - \big(x + Sen(x)\big)(-Sen(x))}{Cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{Cos(x) + Cos^2(x) + xSen(x) + Sen^2(x)}{Cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{Cos(x) + xSen(x) + 1}{Cos^2(x)}$$

Ahora hallamos $f''(x)$

► DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

$$f'(x) = \frac{Cos(x) + xSen(x) + 1}{Cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{(\cancel{-Sen(x)} + \cancel{1 \cdot Sen(x)} + xCos(x))(Cos^2(x)) - (Cos(x) + xSen(x) + 1)\big(2Cos(x)(-Sen(x))\big)}{Cos^4(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{x\cancel{Cos(x)}\big(Cos^2(x)\big) + (Cos(x) + xSen(x) + 1)(2\cancel{Cos(x)}Sen(x)\,)}{Cos^{\cancel{4}}(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{x\big(Cos^2(x)\big) + (Cos(x) + xSen(x) + 1)(2Sen(x)\,)}{Cos^3(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{xCos^2(x) + 2Sen(x)Cos(x) + 2xSen^2(x) + 2Sen(x)}{Cos^3(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{xCos^2(x) + Sen(2x) + 2xSen^2(x) + 2Sen(x)}{Cos^3(x)}$$

► DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

Derivación Implícita

La ecuación de una curva puede expresarse en forma explícita como $y = f(x)$ o bien en forma implícita, $f(x, y) = 0$ de esta última, es posible, a veces, despejar y como función de x en forma única y otras resulta algebraicamente imposible.

Ejemplos:

1. $x^2 \ln(y) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \ln(y) = 1$

$$\Rightarrow \quad \ln(y) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\ln(y)} = e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\frac{1}{x^2}}$$

Se despejo y en forma única.

► DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

2. $x^2 + y^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{3 - x^2}$

Se despejo y pero no de forma única.

3. $x^3 + 3xy^2 - y^6 + 5 = 0$ Imposible despejar y.

Para derivar este tipo de expresiones se considera a y como función de x, derivamos ambos lados de la ecuación original y despejamos y' en la ecuación resultante. Este proceso de derivación se conoce como derivación implícita.

► DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

Ejemplos:

1. Hallar y' sabiendo que:

$$x^3 + 4xy^2 - y^4 - 27 = 0$$

Solución:

Derivando ambos miembros respecto a x, tenemos:

$$3x^2 + (4x)'y^2 + (4x)(y^2)' - 4y^3 \cdot y' - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 + 4x2yy' - 4y^3y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 + 8xyy' - 4y^3y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8xyy' - 4y^3y' = -3x^2 - 4y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2$$

Por lo tanto,

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3}$$

► DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

2. Hallar y'', si $x^2 - xy + y^2 = 3$

Solución:

$$2x - \left((x)'y + x(y)'\right) + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - (1 \cdot y + xy') + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - y - xy' + 2yy' = 0$$

Se vuelve a derivar implícitamente

$$2 - y' - \left((x)'\, y' + x(y')'\right) + (2y)'y' + 2y(y')' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - y' - (1 \cdot y' + xy'') + 2y'y' + 2yy'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

$$\Leftrightarrow -xy'' + 2yy'' = -2 + 2y' - 2(y')^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y''(-x + 2y) = -2 + 2y' - 2(y')^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y'' = \frac{-2+2y'-2(y')^2}{-x+2y}$$

► EJERCICIOS.

1. Derive las siguientes funciones

a) $f(u) = \ln\left(u^2\sqrt{1-u}\right)$

Solución:

$$f'(u) = \frac{1}{u^2\sqrt{1-u}} \cdot \left(u^2\sqrt{1-u}\right)'$$

$$\Rightarrow \quad f'(u) = \frac{1}{u^2\sqrt{1-u}} \cdot \left((u^2)'\sqrt{1-u} + u^2\left(\sqrt{1-u}\right)'\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(u) = \frac{1}{u^2\sqrt{1-u}} \cdot \left(2u\sqrt{1-u} + u^2\,\frac{\sqrt{1-u}}{2(1-u)} \cdot (1-u)'\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(u) = \frac{1}{u^2\sqrt{1-u}} \cdot \left(2u\sqrt{1-u} + \frac{u^2\sqrt{1-u}}{2(1-u)}(-1)\right)$$

► **EJERCICIOS.**

$$f'(u) = \frac{1}{u^2\sqrt{1-u}} \cdot \left(\frac{4u\sqrt{1-u}(1-u) - u^2\sqrt{1-u}}{2(1-u)} \right)$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u^2\cancel{\sqrt{1-u}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-u}} \left(\frac{4u(1-u) - u^2}{2(1-u)} \right)$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u^{\cancel{2}}} \left(\frac{\cancel{u}(4-4u-u)}{2(1-u)} \right)$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u} \left(\frac{4-5u}{2-2u} \right)$$

Así,

$$f'(u) = \frac{-5u+4}{-2u^2+2u} = \frac{-(5u-4)}{-(2u^2-2u)} \quad \Rightarrow f'(u) = \frac{5u-4}{2u^2-2u}$$

► EJERCICIOS.

b) $y=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+5}}$

Solución:

$$y'=\frac{(x^2+6)'\left(\sqrt{x^2+5}\right)-(x^2+6)\left(\sqrt{x^2+5}\right)'}{\left(\cancel{\sqrt{}}x^2+5\right)^{\cancel{2}}} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{2x\sqrt{x^2+5}-(x^2+6)\frac{\sqrt{x^2+5}}{2(x^2+5)}\cdot(x^2+5)'}{x^2+5}$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{2x\sqrt{x^2+5}-(x^2+6)\frac{\sqrt{x^2+5}}{\cancel{2}(x^2+5)}\cdot\cancel{2}x}{x^2+5} \quad\Rightarrow y'=\frac{2x(x^2+5)\sqrt{x^2+5}-x(x^2+6)\sqrt{x^2+5}}{(x^2+5)^2}$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{\sqrt{x^2+5}(2x^3+10x-x^3-6x)}{(x^2+5)^2}=\frac{\sqrt{x^2+5}(x^3+4x)}{(x^2+5)^2}$$

Así,

$$y'=\frac{x\sqrt{x^2+5}(x^2+4)}{(x^2+5)^2}$$

► **EJERCICIOS.**

c) $y = \ln\left(\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

Solución:

$$y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \left(\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{1/4}\right)' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-3/4} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-3/4} \cdot \frac{(1+x^2)'(1-x^2)-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-3/4} \cdot \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}\right)$$

► EJERCICIOS.

$$y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-3/4}\cdot\frac{2x(1-\cancel{x^2}+1+\cancel{x^2})}{(1-x^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^3}}\cdot\frac{\cancel{4}x}{(1-x^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x}{\sqrt[\cancel{4}]{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\cancel{4}}}(1-x^2)^2} = \frac{x}{\frac{1+x^2}{\cancel{1-x^2}}\cdot(1-x^2)^{\cancel{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

Así,

$$y' = \frac{x}{1-x^4}$$

► **EJERCICIOS.**

d) $f(\theta) = \theta ArcTan(\sqrt{\theta})$

Solución:

$$f(\theta) = \theta ArcTan(\sqrt{\theta}) \quad \Rightarrow \quad f'(\theta) = 1 \cdot ArcTan(\sqrt{\theta}) + \theta \frac{1}{1 + \cancel{(\sqrt{\theta})^2}} \cdot (\sqrt{\theta})'$$

$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = ArcTan(\sqrt{\theta}) + \cancel{\theta} \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{2\cancel{\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = ArcTan(\sqrt{\theta}) + \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = ArcTan(\sqrt{\theta}) + \frac{\sqrt{\theta}}{2(1+\theta)}$$

► EJERCICIOS.

2. Dada $y = xe^x$ hallar $y'''(x)$

Solución:

$$y' = (x)'e^x + x(e^x)' \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot e^x + xe^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x(1+x)$$

$$y'' = (e^x)'(1+x) + (e^x)(1+x)' \quad \Rightarrow \quad y'' = e^x(1+x) + e^x(1)$$

$$\Rightarrow \quad y'' = e^x(1+x+1) \quad \Rightarrow \quad y'' = e^x(2+x)$$

$$y''' = (e^x)'(2+x) + (e^x)(2+x)' \quad \Rightarrow \quad y''' = e^x(2+x) + e^x(1)$$

$$\Rightarrow \quad y''' = e^x(2+x+1) \quad \Rightarrow \quad y''' = e^x(3+x)$$

► EJERCICIOS.

3. Hallar la segunda derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$, para $x = \sqrt{e - 1}$

Solución:

$y' = \frac{1}{x^2-1} \cdot (x^2 - 1)' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x$

Así, $y' = \frac{2x}{x^2-1}$

$$y'' = \frac{(2x)'(x^2 - 1) - (2x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

► EJERCICIOS.

De modo que:

$$y''\left(\sqrt{e-1}\right)=\frac{-2\left(\cancel{\sqrt{}}e-1\right)^{\cancel{2}}-2}{\left(\left(\cancel{\sqrt{}}e-1\right)^{\cancel{2}}-1\right)^{2}}$$

$$=\frac{-2(e-1)-2}{(e-1-1)^2}$$

$$=\frac{-2e+2-2}{(e-2)^2}$$

Es decir,

$$y''\left(\sqrt{e-1}\right)=\frac{-2e}{(e-2)^2}$$

EJERCICIOS.

b) $y = \frac{x+1}{1-x}$, para $x = 0$

Solución:

$$y' = \frac{(x+1)'\,(1-x) - (x+1)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1)(1-x) - (x+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}+1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}$$

Es decir,

$$y'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

► EJERCICIOS.

$$y'' = \frac{(2)'(1-x)^2 - (2)\big((1-x)^2\big)'}{\big((1-x)^2\big)^2} = \frac{0\cdot(1-x)^2 - 2(2(1-x)(1-x)')}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{-2\big(2(1-x)(-1)\big)}{(1-x)^4} = \frac{-2(-2+2x)}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow \quad y''(x) = \frac{4-4x}{(1-x)^4}$$

De modo que:

$$y''(0) = \frac{4-4(0)}{(1-0)^4}$$

$$\Rightarrow \quad y''(0) = \frac{4}{(1)^4} = 4$$

Es decir,

$$y''(0) = 4$$

► EJERCICIOS.

4. Hallar y' sabiendo que

$$x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$$

Solución:

$$(x^2)'(y) + (x^2)(y)' - \left((x)'y^2 + x(y^2)'\right) + 2x + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy + x^2y' - (1 \cdot y^2 + x2yy') + 2x + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy + x^2y' - y^2 - 2xyy' + 2x + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2y' - 2xyy' + 2yy' = -2xy + y^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x^2 - 2xy + 2y) \quad = -2xy + y^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-2xy + y^2 - 2x}{x^2 - 2xy + 2y}$$

► EJERCICIOS.

5. Hallar y'' en el punto $(0,1)$ si $x^4 - xy + y^4 = 1$

Solución:

Derivando implícitamente tenemos:

$$4x^3 - \left((x)'y + xy'\right) + 4y^3y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - (1 \cdot y + xy') + 4y^3y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0$$

Ahora, sustituimos las coordenadas del punto $(0,1)$ para calcular y'.

Así, $4(0)^3 - 1 - (0)y' + 4(1)^3y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 - 1 - 0 + 4y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y' = 1$

De modo que $y' = \frac{1}{4}$

► EJERCICIOS.

Se vuelve a derivar implícitamente:

$$12x^2 - y' - \left((x)'y' + x(y')'\right) + (4y^3)'y' + 4y^3(y')' = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - y' - (1 \cdot y' + xy'') + 12y^2y'y' + 4y^3y'' = 0$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 - y' - y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

Ahora, sustituyendo de nuevo las coordenadas del punto $(0,1)$ y el valor de y' se obtiene:

$$12(0)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - (0)y'' + 12(1)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4(1)^3y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 0 + \frac{3}{4} + 4y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y'' = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow y'' = -\frac{1}{16}$$