MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 18

- **Límites**
  - **Teorema del Sándwich.**
  - **Reglas de crecimiento.**
  - **Ejercicios.**

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Teorema del Sándwich

Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ funciones, tales que $lim_{x \to a} f(x) = L$ y $lim_{x \to a} h(x) = L$ y $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, entonces

$$lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Propiedades:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad triangular)
2. $-|a| \leq a \leq |a|$
3. $-1 \leq Sen(x) \leq 1$
4. $-1 \leq Cos(x) \leq 1$
5. $|xy| = |x||y|$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

<u>Indeterminación $\infty \cdot \nexists$</u>

Ejemplo:

Calcular $lim_{x \to \infty} x(1 + \cos(x))$

Solución:

$lim_{x \to \infty} x(1 + \cos(x)) = \infty(1 + \cos(\infty)) = \infty(1 + \nexists) = \infty \cdot \nexists$ **Indeterminación**

Sabemos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$, luego

$-1 \leq cos(x) \leq 1 \ \Rightarrow 0 \leq 1 + cos(x) \leq 2$

$\Rightarrow 0x \leq x\big(1 + cos(x)\big) \leq 2x,$ con $x > 0$.

$\Rightarrow 0 \leq x\big(1 + cos(x)\big) \leq 2x$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Ahora

$$lim_{x\rightarrow\infty} 0 \leq lim_{x\rightarrow\infty} x\big(1+cos(x)\big) \leq lim_{x\rightarrow\infty} 2x$$

$lim_{x\rightarrow\infty} 0 = 0$

$lim_{x\rightarrow\infty} 2x = \infty$

Como el límite de las funciones a los extremos de la desigualdad son diferentes, entonces por el Teorema del Sándwich, el límite

$$lim_{x\rightarrow\infty} x\big(1+cos(x)\big)$$

suele no existir.

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Indeterminación $\infty + \nexists$

Ejemplo:

Calcular $lim_{x\to\infty}(x + \cos(x))$

Solución:

$lim_{x\to\infty}(x + \cos(x)) = \infty + cos(\infty) = \infty + \nexists$ **Indeterminación**

Sabemos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$, luego

$-1 \leq cos(x) \leq 1 \ \Rightarrow x - 1 \leq x + cos(x) \leq x + 1$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Ahora

$$lim_{x\longrightarrow\infty}(x-1) \leq lim_{x\rightarrow\infty}\big(x+cos(x)\big) \leq lim_{x\rightarrow\infty}(x+1)$$

$lim_{x\longrightarrow\infty}(x-1) = \infty - 1 = \infty$

$lim_{x\longrightarrow\infty}(x+1) = \infty + 1 = \infty$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite

$lim_{x\rightarrow\infty}\big(x+cos(x)\big)$ existe y toma el mismo valor

En consecuencia

$$lim_{x\rightarrow\infty}\big(x+cos(x)\big) = \infty$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

<u>Indeterminación $0 \cdot \nexists$</u>

Ejemplos:

Calcular $lim_{x \to 0} \sqrt{x} sen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución:

$lim_{x \to 0} \sqrt{x} sen\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{0^+} sen\left(\frac{1}{0^+}\right) = 0 sen(\infty) = 0 \cdot \nexists$ **Indeterminación**

Sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$, es decir

$$-\left|\sqrt{x} sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{x} sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|\sqrt{x} sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

Ahora,

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

$$\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$= \left|\sqrt{x}\right| \left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$ puesto que , $\left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

$$\leq \left|\sqrt{x}\right| \cdot 1$$

$$= \left|\sqrt{x}\right|$$

$$= \sqrt{x}$$

Por lo tanto, $\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sqrt{x}$.

Ahora,

$$lim_{x\to 0}\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq lim_{x\to 0}\sqrt{x}$$

$$lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$$

Realizando un razonamiento análogo a la desigualdad

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

$$-\left|\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Obtenemos que

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ahora,

$$lim_{x\to 0}\sqrt{x} \leq lim_{x\to 0}\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

$lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite.

$$lim_{x\to 0}\sqrt{x}sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Límites con otros tipos de indeterminaciones que se resuelve aplicando el Teorema del Sándwich

Ejemplo:

Calcular $lim_{x \to \infty} \frac{xsen(x)}{2+x^2}$

Solución:

$$lim_{x \to \infty} \frac{xsen(x)}{2+x^2} = \frac{\infty sen(\infty)}{2+\infty^2} = \frac{\infty \cdot \nexists}{\infty}$$ **Indeterminación**

Sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$, luego

$-1 \leq sen(x) \leq 1 \;\Rightarrow -1x \leq xsen(x) \leq 1x,$ con $x > 0$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

$$\Rightarrow -\frac{x}{2+x^2} \leq \frac{xsen(x)}{2+x^2} \leq \frac{x}{2+x^2}, \quad \text{con } 2+x^2>0$$

Ahora

$$lim_{x\to\infty} -\frac{x}{2+x^2} \leq lim_{x\to\infty} \frac{xsen(x)}{2+x^2} \leq lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+x^2}$$

$$lim_{x\to\infty} -\frac{x}{2+x^2} = lim_{x\to\infty} -\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}$$ ⟶ **Regla rápida**

$$= lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+x^2} = lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}$$ ⟶ **Regla rápida**

$$= lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite

$lim_{x\to\infty} \frac{xsen(x)}{2+x^2}$ existe y toma el mismo valor

En consecuencia

$$lim_{x\to\infty} \frac{xsen(x)}{2+x^2} = 0$$

❑ REGLAS DE CRECIMIENTO

Reglas de crecimiento

Comparación de polinomios con logaritmo neperiano y exponencial

Regla 1: el límite, cuando x tiende a infinito, del cociente entre la función logaritmo neperiano y un polinomio (de grado mayor o igual que 1) es cero.

$$lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{P(x)}=0$$

siendo $P(x)$ un polinomio de grado mayor o igual que 1.

Regla 2: la magnitud del límite (es decir, su valor absoluto), cuando x tiende a infinito, del cociente entre un polinomio y la función logaritmo neperiano, es infinito. El signo del limite depende del polinomio.

$$\left|lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{ln(x)}\right|=\infty$$

REGLAS DE CRECIMIENTO

Regla 3: la magnitud del límite (es decir, su valor absoluto), cuando x tiende a infinito, del cociente entre la función exponencial y un polinomio, es infinito. El signo del limite depende del polinomio.

$$\left| lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{P(x)} \right| = \infty$$

Regla 4: el límite, cuando x tiende a infinito, del cociente entre un polinomio y la función exponencial, es cero.

$$lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$$

Ejemplos:

1. Calcular $lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{e^{2x}}$

Solución:

$lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{e^{2x}}$, tiene una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

REGLAS DE CRECIMIENTO

Aplicando la regla 4, se tiene que

$$lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{e^{2x}}=0$$

2. Calcular $lim_{x\to\infty}e^{-x}x$

Solución:

$lim_{x\to\infty}e^{-x}x = lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$, tiene una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando la regla 4, se tiene que

$$lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

EJERCICIOS

1) Calcular $lim_{x\to\infty} x^2(2+\operatorname{sen}(x))$

Solución:

$$lim_{x\to\infty} x^2(2+\operatorname{sen}(x)) = \infty^2(2+\operatorname{sen}(\infty)) = \infty^2(2+\nexists) = \infty \cdot \nexists$$

Indeterminación

Sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$, luego

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + sen(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x^2 \leq x^2\big(2+sen(x)\big) \leq 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 \leq x^2\big(2+sen(x)\big) \leq 3x^2$$

EJERCICIOS

Ahora

$$lim_{x\to\infty}x^2 \leq lim_{x\to\infty}x^2\big(2+sen(x)\big) \leq lim_{x\to\infty}3x^2$$

$lim_{x\longrightarrow\infty}x^2 = \infty$

$lim_{x\longrightarrow\infty}3x^2 = \infty$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite

$lim_{x\to\infty}x^2\big(2+sen(x)\big)$ existe y toma el mismo valor

En consecuencia

$$lim_{x\to\infty}x^2\big(2+sen(x)\big) = \infty$$

❑ EJERCICIOS

2) Calcular $lim_{x \to -\infty} 5x(\cos(x) - 2)$

Solución:

$$lim_{x \to -\infty} 5x(\cos(x) - 2) = 5(-\infty)(cos(-\infty) - 2) = -\infty(\nexists - 2) = -\infty \cdot \nexists$$

Indeterminación

Sabemos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$, luego

$$-1 \leq cos(x) \leq 1 \ \Rightarrow -3 \leq cos(x) - 2 \leq -1$$

$$\Rightarrow 5x(-3) \geq 5x(\cos(x) - 2) \geq 5x(-1), \quad \text{con } x < 0$$

$$\Rightarrow -15x \geq 5x(\cos(x) - 2) \geq -5x$$

❑ EJERCICIOS

Ahora

$$lim_{x \longrightarrow -\infty} -5x \leq lim_{x \to -\infty} 5x(\cos(x) - 2) \leq lim_{x \to -\infty}(-15x)$$

$$lim_{x \longrightarrow -\infty} -5x = -5(-\infty) = \infty$$

$$lim_{x \longrightarrow -\infty} -15x = -15(-\infty) = \infty$$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite

$lim_{x \to -\infty} 5x(\cos(x) - 2)$ existe y toma el mismo valor

En consecuencia

$$lim_{x \to -\infty} 5x(\cos(x) - 2) = \infty$$

❑ EJERCICIOS

3) Calcular $lim_{x\to\infty}(sen(x)+x^2)$

Solución:

$$lim_{x\to\infty}(sen(x)+x^2) = sen(\infty)+\infty^2 = \nexists + \infty$$

Indeterminación

Sabemos que $-1 \le sen(x) \le 1$, luego

$$-1 \le sen(x) \le 1 \;\Rightarrow -1+x^2 \le sen(x)+x^2 \le 1+x^2$$

Ahora

$$lim_{x\to\infty}(-1+x^2) \le lim_{x\to\infty}(sen(x)+x^2) \le lim_{x\to\infty}(1+x^2)$$

❑ EJERCICIOS

$lim_{x\to\infty}(-1+x^2) = -1+\infty^2 = \infty$

$lim_{x\to\infty}(1+x^2) = 1+\infty^2 = \infty$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite

$lim_{x\to\infty}(sen(x)+x^2)$ existe y toma el mismo valor

En consecuencia

$$lim_{x\to\infty}(sen(x)+x^2) = \infty$$

❑ EJERCICIOS

4) Calcular $lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+\cos(x)}$

Solución:

$lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+\cos(x)} = \frac{2}{5\infty+\cos(\infty)} = \frac{2}{\infty+\nexists}$ **Indeterminación**

Sabemos que $-1 \leq Cos(x) \leq 1$, luego

$$-1 \leq Cos(x) \leq 1 \ \Rightarrow 5x - 1 \leq 5x + Cos(x) \leq 5x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5x-1} \geq \frac{1}{5x+Cos(x)} \geq \frac{1}{5x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5x+1} \leq \frac{1}{5x+Cos(x)} \leq \frac{1}{5x-1}$$

❑ EJERCICIOS

$$\Rightarrow \frac{2}{5x+1} \leq \frac{2}{5x+Cos(x)} \leq \frac{2}{5x-1}$$

Ahora

$$lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+1} \leq lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+Cos(x)} \leq lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x-1}$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+1} = \frac{2}{5\infty+1} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x-1} = \frac{2}{5\infty-1} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite.

$$lim_{x\to\infty} \frac{2}{5x+Cos(x)} = 0$$

EJERCICIOS

5) Calcular $lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Solución:

$$lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{\infty}\left[sen(\infty)+sen\left(\frac{1}{\infty}\right)\right]=0[\nexists+0]=0\cdot\nexists$$

Indeterminación

Sabemos que $-|a|\ \leq a\ \leq\ |a|$, es decir

$$-\left|\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right|\ \leq\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\leq\ \left|\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right|$$

Ahora,

❑ EJERCICIOS

$$\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq \left|\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right|$$

$$=\left|\frac{1}{x}\right|\left|sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{x}\right|\left(|sen(x)|+\left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|\right),$$ (Desigualdad triangular)

$$\leq \left|\frac{1}{x}\right|(1+1),$$ (puesto que , $|sen(\quad)|\leq 1$)

$$= 2\left|\frac{1}{x}\right|$$

$$= 2\frac{1}{x},$$ (ya que $x>0$)

Por lo tanto, $\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\leq 2\frac{1}{x}$

Ahora,

EJERCICIOS

$$lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\leq lim_{x\to\infty}2\frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to\infty}2\frac{1}{x}=2\frac{1}{\infty}=0$$

Por el Teorema del sándwich, se tiene que

$$lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[sen(x)+sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

$$\leq |x| \cdot 1$$
$$= |x|$$

Por lo tanto, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$.

Ahora,

$$lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq lim_{x\to 0}|x|$$

$lim_{x\to 0}|x| = 0$

Por el Teorema del Sándwich, el limite.

$$lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

EJERCICIOS

6) Calcular $lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{2\cos(x)}}{x^2}$

Solución:

$lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{2\cos(x)}}{x^2}=\dfrac{e^{2\cos(\infty)}}{\infty^2}=\dfrac{e^{\nexists}}{\infty}=\dfrac{\nexists}{\infty}$ **Indeterminación**

Sabemos que $-1\leq cos(x)\leq 1$, luego

$-1\leq cos(x)\leq 1\ \Rightarrow -2\leq 2cos(x)\leq 2$

$\Rightarrow e^{-2}\leq e^{2\cos(x)}\leq e^2$, por ser $e^{(\ )}$ positiva y creciente

$$\Rightarrow \frac{e^{-2}}{x^2}\leq\frac{e^{2\cos(x)}}{x^2}\leq\frac{e^2}{x^2}$$

❑ EJERCICIOS

Ahora

$$lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{-2}}{x^2}\leq lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{2\cos(x)}}{x^2}\leq lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{2}}{x^2}$$

$$lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{-2}}{x^2}=\frac{e^{-2}}{\infty^2}=0$$

$$lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{2}}{x^2}=\frac{e^{2}}{\infty^2}=0$$

Como el limite de las funciones a los extremos de la desigualdad son iguales, entonces por el Teorema del Sándwich, el limite.

$$lim_{x\to\infty}\frac{e^{2\cos(x)}}{x^2}=0$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

7) Calcular $lim_{x\to 0} xcos\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución:

$lim_{x\to 0} xcos\left(\frac{1}{x}\right) = 0cos\left(\frac{1}{0}\right) = 0cos(\nexists) = 0 \cdot \nexists$ **Indeterminación**

Sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$, es decir

$$-\left|xcos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq xcos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|xcos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

Ahora,

$$xcos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|xcos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$= |x|\left|cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$, puesto que , $\left|cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

8) Calcular $lim_{x\to-\infty}e^{-x}x$

Solución:

$$lim_{x\to-\infty}e^{-x}x = e^{-(-\infty)}(-\infty) = e^{\infty}(-\infty) = \infty(-\infty) = -\infty$$

9) Calcular $lim_{x\to\infty}\frac{ln(x+2)}{2x}$

Solución:

$lim_{x\to\infty}\frac{ln(x+2)}{2x}$, tiene una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando la regla 1, se tiene que

$$lim_{x\to\infty}\frac{ln(x+2)}{2x} = 0$$

➢TEOREMA DEL SÁNDWICH

10) Calcular $lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{\ln(x)}$

Solución:

$lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{\ln(x)}$, tiene una indeterminación de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$.

Aplicando la regla 2, se tiene que

$$lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{\ln(x)} = -\infty$$