MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 17

- ►**Límites**
  - ►**Propiedades de los límites infinitos**
  - ►**Indeterminaciones $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$**

► PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

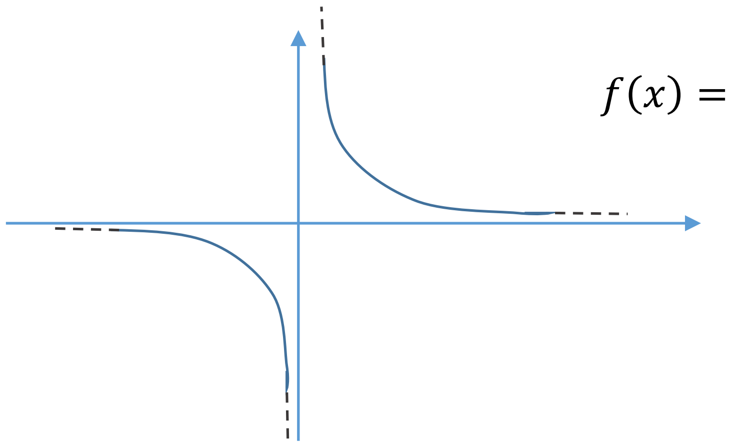
Límites infinitos y límites al infinito

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0^+$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Propiedades de los límites infinitos

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0^+$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \infty & si \;\; L > 0 \\ -\infty & si \;\; L < 0 \end{cases}$

2. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \pm\infty$

► PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \begin{cases} \infty & si\ \ L > 0 \\ -\infty & si\ \ L < 0 \end{cases}$

4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \begin{cases} -\infty & si\ \ L > 0 \\ \infty & si\ \ L < 0 \end{cases}$

5. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

6. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0^-$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} -\infty & si\ \ L > 0 \\ \infty & si\ \ L < 0 \end{cases}$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Indeterminaciones $\infty - \infty$ **e** $\frac{\infty}{\infty}$

Calcular los siguientes límites:

1) $lim_{x \to -\infty} 5x^2 - 2x + 1$

Solución:

$$lim_{x \to -\infty} 5x^2 - 2x + 1 = 5(-\infty)^2 - 2(-\infty) + 1$$

$$= 5(\infty) + \infty + 1$$

$$= \infty + \infty$$

$$= \infty$$

Así,

$$lim_{x \to -\infty} 5x^2 - 2x + 1 = \infty.$$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

2) $lim_{x\to\infty} 4x^2 - 2x + 7$

Solución:

$lim_{x\to\infty} 4x^2 - 2x + 7 = 4(\infty)^2 - 2(\infty) + 7 = 4(\infty) - \infty + 7 = \infty - \infty$ **Indeterminación.**

$lim_{x\to\infty} 4x^2 - 2x + 7 = lim_{x\to\infty} 4x^2 \longrightarrow$ **Regla rápida**

$$= 4(\infty)^2$$

$$= 4(\infty)$$

$$= \infty$$

Así,

$$lim_{x\to\infty} 4x^2 - 2x + 7 = \infty.$$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-1}{x^5+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-1}{x^5+1} = \frac{2(\infty)^4-1}{(\infty)^5+1} = \frac{\infty-1}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ **Indeterminación**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-1}{x^5+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x^4}}{\cancel{x^5}}$$ **Regla rápida**

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2}{\infty}$$

$$= 0$$

Así, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-1}{x^5+1} = 0$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+x+2}{x^2+1}$

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+x+2}{x^2+1} = \frac{9(\infty)^3+\infty+2}{(\infty)^2+1} = \frac{\infty+\infty+2}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ **Indeterminación**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+x+2}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{9\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}}$$ → **Regla rápida**

$$= \lim_{x \to \infty} 9x$$

$$= 9 \cdot \infty$$

$$= \infty$$

Por lo que, $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+x+2}{x^2+1} = \infty$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}}$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{(-\infty)^2+1}{\sqrt{(-\infty)^4+1}} = \frac{\infty+1}{\sqrt{\infty+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$ **Indeterminación**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^4}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$

Así, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} = 1$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

6) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{10+x^2\sqrt{-x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{10+x^2\sqrt{-x}} = \frac{(-\infty)^2}{10+(-\infty)^2\sqrt{-(-\infty)}} = \frac{\infty}{10+\infty\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminación

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{10 + x^2\sqrt{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{10}{x^2} + \frac{\cancel{x^2}\sqrt{-x}}{\cancel{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2}+\sqrt{-x}} = \frac{1}{\frac{10}{(-\infty)^2}+\sqrt{-(-\infty)}} = \frac{1}{\frac{10}{\infty}+\sqrt{\infty}} = \frac{1}{0+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que, $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{10+x^2\sqrt{-x}} = 0$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

7) $lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x^3\right)$

Solución:

$$lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x^3\right) = lim_{x \to \infty}\frac{x^2}{x+1} - lim_{x \to \infty}x^3$$

$$= lim_{x \to \infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} - lim_{x \to \infty}x^3 \longrightarrow$$ **Regla rápida**

$$= lim_{x \to \infty}x - lim_{x \to \infty}x^3$$

$$= \infty - (\infty)^{\mathbf{3}} = \infty - \infty$$ **Indeterminación**

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x^3\right) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(x^4+x^3)}{x+1}\right)$$

$$= lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^4-x^3}{x+1}\right)$$

$$= lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^{\cancel{4}}}{\cancel{x}}\right) \longrightarrow$$ **Regla rápida**

$$= lim_{x\to\infty}(-x^3)$$

$$= -(\infty)^{\mathbf{3}} = -\infty$$

Así**,**

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x^3\right) = -\infty$$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

8) $lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{3x+1} - 6x^2\right)$

Solución:

$lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{3x+1} - 6x^2\right) = \sqrt{3 \cdot \infty + 1} - 6(\infty)^2 = \sqrt{\infty} - \infty = \infty - \infty$ **Indeterminación**

$$lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{3x+1} - 6x^2\right) = lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{3x+1} - 6x^2\right)\left(\frac{\sqrt{3x+1} + 6x^2}{\sqrt{3x+1} + 6x^2}\right)$$

$$= lim_{x \to \infty} \frac{\left(\cancel{\sqrt{3x+1}}\right)^{\cancel{2}} - \left(6x^2\right)^2}{\sqrt{3x+1} + 6x^2}$$

$$= lim_{x \to \infty} \frac{3x+1-36x^4}{\sqrt{3x+1} + 6x^2}$$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{36\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}+\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x^4}}+\frac{1}{x^4}}{\frac{\sqrt{3x+1}}{x^4}+\frac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^4}}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{-36+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x^8}}+\frac{1}{x^8}}+\frac{6}{x^2}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{-36+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{3}{x^7}+\frac{1}{x^8}}+\frac{6}{x^2}}$$

$$= \frac{-36+\frac{3}{\infty^3}+\frac{1}{\infty^4}}{\sqrt{\frac{3}{\infty^7}+\frac{1}{\infty^8}}+\frac{6}{\infty^2}}$$

► INDETERMINACIONES $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \frac{-36+0^{+}+0^{+}}{\sqrt{0^{+}+0^{+}}+0^{+}}$$

$$= \frac{-36}{0^{+}+0^{+}}$$

$$= \frac{-36}{0^{+}}$$

$$= -\infty$$

Así,

$$lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1} - 6x^{2}\right) = -\infty$$

► EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

1) $lim_{x \to \infty} x^2 - 3x$

Solución:

$lim_{x \to \infty} x^2 - 3x = (\infty)^2 - 3(\infty) = \infty - \infty$ **Indeterminación**

$lim_{x \to \infty} x^2 - 3x = lim_{x \to \infty} x^2$ $\longrightarrow$ **Regla rápida**

$= \infty^2$

$= \infty$

Así,

$$lim_{x \to \infty} x^2 - 3x = \infty.$$

► EJERCICIOS

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+3x+2}{5x^3+2}$

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+3x+2}{5x^3+2} = \frac{6(\infty)^2+3(\infty)+2}{5(\infty)^3+2} = \frac{\infty+\infty+2}{\infty+2} = \frac{\infty}{\infty}$$ **Indeterminación**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+3x+2}{5x^3+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6\cancel{x^2}}{5\cancel{x^3}}$$ → **Regla rápida**

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6}{5x}$$

$$= \frac{6}{5\infty}$$

$$= \frac{6}{\infty} = 0$$

Así, $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+3x+2}{5x^3+2} = 0$

► **EJERCICIOS**

3) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)$

Solución:

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}-lim_{x\to\infty}x$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}-lim_{x\to\infty}x$$ **Regla rápida**

$$=lim_{x\to\infty}x-lim_{x\to\infty}x$$

$$=\infty-\infty$$ **Indeterminación**

► EJERCICIOS

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(x^2+x)}{x+1}\right)$$

$$=lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right)$$

$$=lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)\quad=-\frac{\infty}{\infty}$$

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)=lim_{x\to}\left(\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)$$ → **Regla rápida**

$$=lim_{x\to\infty}-1=-1$$

Así,

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1$$

► EJERCICIOS

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+2}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+2}} = \frac{(\infty)^2+1}{\sqrt[3]{\infty^3+2}} = \frac{\infty+1}{\sqrt[3]{\infty+2}} = \frac{\infty}{\infty}$$ **Indeterminación**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^6}} + \frac{2}{x^6}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^6}}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\infty^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{\infty^3}+\frac{2}{\infty^6}}} = \frac{1+0}{\sqrt[3]{0^+ + 0^+}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Así, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+2}} = \infty$

► EJERCICIOS

5) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x+2}-\frac{x^2-3}{x}\right)$

Solución:

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x+2}-\frac{x^2-3}{x}\right)=lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x+2}-lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}-lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$$ → **Regla rápida**

$$=lim_{x\to\infty}3x-lim_{x\to\infty}x$$

$$=3\cdot\infty-\infty$$

$$=\infty-\infty$$ **Indeterminación**

► EJERCICIOS

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x+2}-\frac{x^2-3}{x}\right)=lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+1)x-(x+2)(x^2-3)}{(x+2)x}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-(x^3-3x+2x^2-6)}{x^2+2x}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3x^3}\cancel{+x}-\cancel{x^3}+\cancel{3x}-2x^2+6}{x^2+2x}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^2+4x+6}{x^2+2x}$$

Regla rápida

$$=lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}}$$

$$=lim_{x\to\infty}2x$$

$$=2\cdot\infty$$

$$=\infty$$

Así,

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x+2}-\frac{x^2-3}{x}\right)=\infty$$

► EJERCICIOS

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Solución:

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{\infty^2+2\cdot\infty}-\sqrt{\infty^2+1}=\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$ **Indeterminación**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{(}\sqrt{x^2+2x}\cancel{)}^{\cancel{2}}-\cancel{(}\sqrt{x^2+1}\cancel{)}^{\cancel{2}}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

► EJERCICIOS

$$= lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}} \quad = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}+\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{1}{x^2}}}$$

► **EJERCICIOS**

$$= lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{2-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Así,

$$lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right) = 1$$