MATEMATICA I
SECCIÓN: U1

CLASE N° 21

- Derivadas.
  - Reglas de derivación.
  - Regla de la cadena.

- **DERIVADAS.**

Derivada por definición. Ejemplo.

1. Usando la definición, calcular la derivada de la función

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 - x}$$

Solución:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(x+h)}{(x+h)^2 - (x+h)} - \frac{2x}{x^2 - x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2x + 2h}{x^2 + 2xh + h^2 - x - h} - \frac{2x}{x^2 - x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x + 2h)(x^2 - x) - 2x(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)}{h(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)(x^2 - x)}$$

DERIVADAS.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^2} + 2x^2h - \cancel{2xh} - \cancel{2x^3} - 4x^2h - 2xh^2 + \cancel{2x^2} + \cancel{2xh}}{h(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)(x^2 - x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x^2h - 2xh^2}{h(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)(x^2 - x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-2x^2 - 2xh)}{\cancel{h}(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)(x^2 - x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2x^2 - 2xh}{(x^2 + 2xh + h^2 - x - h)(x^2 - x)}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x(0)}{(x^2 + 2x(0) + (0)^2 - x - 0)(x^2 - x)}$$

$$= \frac{-2x^2}{(x^2 - x)(x^2 - x)} = \frac{-2x^2}{(x^2 - x)^2}$$

Así,

$$g'(x) = -\frac{2x^2}{(x^2 - x)^2}$$

DERIVADAS.

2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$, y a partir de ésta encuentre la ecuación de la recta normal

Solución:

Para encontrar la ecuación de la recta tangente, utilizamos la ecuación punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, para lo cual necesitamos la pendiente m y el punto (x_0, y_0), que viene dada por: $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

Busquemos la pendiente en $x = 2$

$$m_{tan} = f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{2} - h}{4h + 2h^2}$$

- **DERIVADAS.**

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(4+2h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{4+2h}$$

$$= \frac{-1}{4+2(0)} = \frac{-1}{4}$$

Así, $m_{tan} = -\frac{1}{4}$

De manera que la ecuación buscada viene dada por:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

Ahora, la ecuación de la recta normal viene dada por

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = 4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = 4x - 8$$

$$\Rightarrow \quad y = 4x - 8 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 4x - \frac{15}{2}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN.

Reglas de derivación

1) $f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

2) $f(x) = x \quad \Rightarrow f'(x) = 1$

3) $f(x) = kx \quad \Rightarrow f'(x) = k$

4) $f(x) = x^n \quad \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

5) $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

6) $f(x) = e^x \quad \Rightarrow f'(x) = e^x$

7) $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

8) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

9) $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

10) $f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \sec^2(x)$

11) $f(x) = \operatorname{ctan}(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -\csc^2(x)$

12) $f(x) = \sec(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

13) $f(x) = \csc(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -\csc(x)\operatorname{ctan}(x)$

14) $f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

15) $f(x) = g(x)h(x) \quad \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

16) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$ con $h(x) \neq 0$

■ **REGLAS DE DERIVACIÓN.**

Ejemplos:

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

Solución:

$f'(x) = (2x^2)' + (3x)'$

$(2x^2)' = (2)'x^2 + (2)(x^2)' = 0 \cdot x^2 + 2(2x) \quad \Rightarrow \quad (2x^2)' = 4x$

$(3x)' = 3$

Así, $f'(x) = 4x + 3$

REGLAS DE DERIVACIÓN.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(1)'x^2 - (1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot (2x)}{x^4} = -\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x^4}} = -\frac{2}{x^3}$$

ó

$$f(x) = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Así,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN.

c) $f(x) = e^x \cdot x^2$

Solución:

$$f(x) = e^x \cdot x^2 \quad \Rightarrow f'(x) = (e^x)' \cdot x^2 + e^x \cdot (x^2)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x \cdot x^2 + 2e^x x$$

$$\Rightarrow f'(x) = xe^x(x + 2)$$

REGLAS DE DERIVACIÓN.

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\text{sen}(x)}$

Solución:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\text{sen}(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln(x))'\text{sen}(x) - \ln(x)\big(\text{sen}(x)\big)'}{(\text{sen}(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\text{sen}(x) - \ln(x)\cos(x)}{\text{sen}^2(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\text{sen}(x) - x\ln(x)\cos(x)}{x}}{\frac{\text{sen}^2(x)}{1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\text{sen}(x) - x\ln(x)\cos(x)}{x\,\text{sen}^2(x)}$$

REGLA DE LA CADENA.

Regla de la Cadena (Derivada de la función compuesta)

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ ambas derivables en cada punto de su dominio, entonces también es derivable $y = f\left(g(x)\right)$ y además, $y' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$.

Para aplicar la regla de la cadena, o sea, derivar una función compuesta, resulta eficiente descomponerla en dos partes a saber:

$y = f\left(g(x)\right)$; donde f es la función externa y g es la función interna.

Así, $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

Se lee: derivada de la función externa evaluada en $g(x)$ por la derivada de la función interna, también la podemos denotar como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

REGLA DE LA CADENA.

Ejemplos:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 + x^{10})^{20}$

Solución:

Función externa: $(\quad)^{20}$

Función interna: $(x^5 + x^{10})$

Así, $y' = 20(x^5 + x^{10})^{19} \cdot (x^5 + x^{10})'$

$$\Rightarrow \quad y' = 20(x^5 + x^{10})^{19} \cdot (5x^4 + 10x^9)$$

REGLA DE LA CADENA.

b) $f(x) = \cos^3(x)$

Solución:

Función externa: $(\quad)^3$

Función interna: $\cos(x)$

Así, $f'(x) = 3(\cos(x))^2 \cdot (\cos(x))'$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\text{sen}(x))$

$\Rightarrow$ $f'(x) = -3\cos^2(x) \cdot \text{sen}(x)$

REGLA DE LA CADENA.

c) $f(x) = \ln(\text{sen}(\cos(x^2)))$

Solución:

Función externa: $\ln(\ \ )$

Función interna: $\text{sen}(\cos(x^2))$

Así, $f'(x) = \frac{1}{\text{sen}(\cos(x^2))} \cdot \left(\text{sen}(\cos(x^2))\right)'$

Función externa: $sen(\ \ )$

Función interna: $\cos(x^2)$

Así, $f'(x) = \frac{1}{\text{sen}(\cos(x^2))} \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot (\cos(x^2))'$

REGLA DE LA CADENA.

Función externa: $\cos(\quad)$

Función interna: x^2

Así, $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\cos(x^2))} \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\operatorname{sen}(x^2))(x^2)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\cos(x^2))} \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\operatorname{sen}(x^2))2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2x\cos(\cos(x^2))\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}(\cos(x^2))}$$

REGLA DE LA CADENA.

d) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Solución:

Función externa: $\sqrt{(\quad)}$; Funcion interna: $\frac{1+x}{1-x}$

Así, $y' = \dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \cdot \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{2\left(\frac{1+x}{\cancel{1-x}}\right)} \cdot \frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{2(1+x)} \cdot \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{1-x}$$

REGLA DE LA CADENA.

$$y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{2(1+x)} \cdot \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{2(1+x)} \cdot \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{1-x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\cancel{2}(1+x)} \cdot \frac{\cancel{2}}{(1-x)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(1+x)(1-x)} = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+x}{1+x}}}{(1+x)(1-x)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}}}{(1+x)(1-x)} = \frac{\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{(1+x)(1-x)}{1}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cancel{1+x}}{\sqrt{1-x^2}(\cancel{1+x})(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)}$$

REGLA DE LA CADENA.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)(1-x)}$$

De modo que:

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^2(1+x)}$$

REGLA DE LA CADENA.

e) $y = \sqrt{\ln(\sqrt{x})}$

Solución:

$$y' = \frac{\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{2\ln(\sqrt{x})} \cdot (\ln(\sqrt{x}))'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{2\ln(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{2\ln(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{4x\ln(\sqrt{x})}$$

■ **EJERCICIOS.**

Ejercicios

a) $l(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}$

Solución:

$$l(x) = \frac{x^4}{4} - 5x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow l'(x) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot x^3 - 5\left(\frac{-1}{3}\right)x^{-4/3}$$

$$\Rightarrow l'(x) = x^3 + \frac{5}{3x^{4/3}}$$

$$\Rightarrow l'(x) = x^3 + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

- **EJERCICIOS.**

$$\Rightarrow \quad l'(x) = x^3 + \frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow \quad l'(x) = \frac{3x^4\sqrt[3]{x} + 5}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow \quad l'(x) = \frac{3x^4\sqrt[3]{x} + 5}{3x\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad l'(x) = \frac{3x^4\cancel{\sqrt[3]{x^3}} + 5\sqrt[3]{x^2}}{3x\cancel{\sqrt[3]{x^3}}}$$

$$\Rightarrow \quad l'(x) = \frac{3x^4 \cdot x + 5\sqrt[3]{x^2}}{3 \cdot x \cdot x}$$

De forma que: $l'(x) = \frac{3x^5+5\sqrt[3]{x^2}}{3x^2}$

■ EJERCICIOS.

b) $m(x) = (1-\sqrt{x})(x+e^{x})$

Solución:

$$m'(x) = (1-\sqrt{x})'(x+e^{x}) + (1-\sqrt{x})(x+e^{x})'$$

$$= \left(0-\frac{\sqrt{x}}{2x}\right)(x+e^{x}) + (1-\sqrt{x})(1+e^{x})$$

$$= \frac{-\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}e^{x}}{2x} + 1 + e^{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x}e^{x}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{x}+2x+2xe^{x}-2\sqrt{x}\cdot x-2x\sqrt{x}e^{x}}{2x}$$

$$= \frac{-3x\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{x}+2x+2xe^{x}-2xe^{x}\sqrt{x}}{2x}$$

Así, $m'(x) = \dfrac{-3x\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{x}+2x+2xe^{x}-2xe^{x}\sqrt{x}}{2x}$

EJERCICIOS.

c) $n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+\ln(x)}$

Solución:

$$n'(x) = \frac{(\ln(x))'(x^2 + \ln(x)) - \ln(x)\,(x^2 + \ln(x))'}{(x^2 + \ln(x))^2}$$

$$n'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,(x^2 + \ln(x)) - \ln(x)\left(2x + \frac{1}{x}\right)}{(x^2 + \ln(x))^2}$$

$$\Rightarrow n'(x) = \frac{x + \cancel{\frac{\ln(x)}{x}} - 2x\ln(x) - \cancel{\frac{\ln(x)}{x}}}{(x^2+\ln(x))^2}$$

$$\Rightarrow n'(x) = \frac{x - 2x\ln(x)}{(x^2+\ln(x))^2} = \frac{x(1-2\ln(x))}{(x^2+\ln(x))^2}$$

Es decir, $n'(x) = \frac{x(1-2\ln(x))}{(x^2+\ln(x))^2}$

EJERCICIOS.

d) $p(x)=\frac{x^3e^x+x\ln(x)}{e^x(2x+1)}$

Solución:

$$p'(x)=\frac{(x^3e^x+xln(x))'[e^x(2x+1)]-(x^3e^x+x\ln(x))[e^x(2x+1)]'}{[e^x(2x+1)]^2}\quad\Rightarrow$$

$$p'(x)=\frac{\left((x^3e^x)'+(x\ln(x))'\right)[e^x(2x+1)]-(x^3e^x+x\ln(x))[(e^x)'(2x+1)+e^x(2x+1)']}{[e^x(2x+1)]^2}\quad\Rightarrow$$

$$p'(x)=\frac{\left(3x^2e^x+x^3e^x+\ln(x)+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\right)[e^x(2x+1)]-(x^3e^x+x\ln(x))[e^x(2x+1)+e^x(2+0)]}{[e^x(2x+1)]^2}\quad\Rightarrow$$

$$p'(x)=\frac{(3x^2e^x+x^3e^x+\ln(x)+1)[e^x(2x+1)]-(x^3e^x+x\ln(x))[e^x(2x+1)+2e^x]}{[e^x(2x+1)]^2}$$

Así, $p'(x)=\frac{\left(3x^2e^x+x^3e^x+\ln(x)+1\right)[e^x(2x+1)]-\left(x^3e^x+x\ln(x)\right)[e^x(2x+1)+2e^x]}{[e^x(2x+1)]^2}$

EJERCICIOS.

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) + 3\tan(x)$

Solución:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) + 3\tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\operatorname{sen}(x)\cos(x))' + (3\tan(x))'$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \left(\operatorname{sen}(x)\right)'\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(\cos(x))' + 3(\tan(x))'$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x)) + 3(sec^2(x))$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos^2(x) - sen^2(x) + 3sec^2(x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(2x) + \ 3sec^2(x)$$

EJERCICIOS.

f) $f(x) = \frac{x+\sec(x)}{ctan(x)+2}$

Solución:

$$f(x) = \frac{x + \sec(x)}{ctan(x) + 2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(x + \sec(x))'(ctan(x) + 2) \; - \; (x + \sec(x))(ctan(x) + 2)'}{(ctan(x) + 2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(1 + \sec(x)\tan(x))(ctan(x) + 2) \; - \; (x + \sec(x))(-csc^2(x) + 0)}{(ctan(x) + 2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(1 + \sec(x)\tan(x))(ctan(x) + 2) + xcsc^2(x) + \sec(x)csc^2(x)}{(ctan(x) + 2)^2}$$

EJERCICIOS.

g) $h(x) = tan^4(x)$

Solución:

Función externa: $(\quad)^4$

Función interna: $\tan(x)$

Así, $h'(x) = 4(\tan(x))^3 \cdot (\tan(x))'$ $\quad\Rightarrow\quad$ $h'(x) = 4(\tan(x))^3 \cdot sec^2(x)$

$\Rightarrow \quad h'(x) = 4\tan^3(x) \cdot sec^2(x)$

EJERCICIOS.

h) $g(x) = \sqrt[3]{\tan(x)}$

Solución:

$$g(x) = \sqrt[3]{\tan(x)} = (\tan(x))^{1/3}$$

Función externa: $(\quad)^{1/3}$

Función interna: $\tan(x)$

Así, $g'(x) = \frac{1}{3}(\tan(x))^{\frac{1}{3}-1} \cdot (\tan(x))'$ $\Rightarrow$ $g'(x) = \frac{1}{3}(\tan(x))^{-\frac{2}{3}} \cdot sec^2(x)$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{sec^2(x)}{3tan^{2/3}(x)}$$

■ EJERCICIOS.

i) $f(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \tan(x^2)$

Solución:

$f(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \tan(x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\cos(\ln(x)))' \cdot \tan(x^2) + \cos(\ln(x)) \cdot (\tan(x^2))'$ **(I)**

Para $(\cos(\ln(x)))'$

Función externa: $\cos(\ \ )$

Función interna: $\ln(x)$

Así, $(\cos(\ln(x)))' = -sen(\ln(x)) \cdot (\ln(x))' \quad \Rightarrow (\cos(\ln(x)))' = -sen(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow (\cos(\ln(x)))' = -\frac{sen(\ln(x))}{x}$ **(II)**

EJERCICIOS.

Para $(\tan(x^2))'$

Función externa: $\tan(\ \ )$

Función interna: x^2

Así, $(\tan(x^2))' = sec^2(x^2) \cdot (x^2)' \quad \Rightarrow \quad (\tan(x^2))' = sec^2(x^2) \cdot (2x) \quad \Rightarrow \quad (\tan(x^2))' = 2xsec^2(x^2)$ **(III)**

Sustituyendo **(II)** y **(III)** en **(I)**, se obtiene

$$f(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \tan(x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{sen(\ln(x))}{x} \cdot \tan(x^2) + \cos(\ln(x)) \cdot 2xsec^2(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{sen(\ln(x))\tan(x^2)}{x} + 2x\cos(\ln(x))\,sec^2(x^2)$$

EJERCICIOS.

j) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Solución:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)} \cdot (x^2+1)'\right) \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{\cancel{2}(x^2+1)} \cdot \cancel{2}x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\right)$$

EJERCICIOS.

k) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

Solución:

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}\right)$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$$

Así,

$$y' = \frac{-2e^{\frac{x+1}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

EJERCICIOS.

1) $f(x) = \sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}$

Solución:

$$f(x) = \sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)} = \sqrt{(x^2+5x-6x-30)(9-x)} = \sqrt{(x^2-x-30)(9-x)} = \sqrt{9x^2-x^3-9x+x^2-270+30x}$$

$$f(x) = \sqrt{-x^3+10x^2+21x-270}$$

Así,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x^3+10x^2+21x-270}}{2(-x^3+10x^2+21x-270)} \cdot (-x^3+10x^2+21x-270)' \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\sqrt{-x^3+10x^2+21x-270}}{2(-x^3+10x^2+21x-270)} \cdot (-3x^2+20x+21)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(-3x^2+20x+21)\sqrt{-x^3+10x^2+21x-270}}{-2x^3+20x^2+42x-540}$$

EJERCICIOS.

m) $f(q) = \ln[(q+1)^2(q+2)^3]$

Solución:

$$f'(q) = \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^3} \cdot \left((q+1)^2(q+2)^3\right)' \quad \Rightarrow f'(q) = \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^3} \cdot \left(\left((q+1)^2\right)'(q+2)^3 + (q+1)^2 \cdot \left((q+2)^3\right)'\right) \quad \Rightarrow$$

$$f'(q) = \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^3}\left((2(q+1) \cdot (q+1)')(q+2)^3 + (q+1)^2 \cdot (3(q+2)^2 \cdot (q+2)')\right) \quad \Rightarrow$$

$$f'(q) = \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^3}\left((2 \cdot (q+1) \cdot 1)(q+2)^3 + (q+1)^2(3(q+2)^2 \cdot 1)\right) \quad \Rightarrow f'(q) = \frac{2\cancel{(q+1)}\cancel{(q+2)^3}}{(q+1)^{\cancel{2}}\cancel{(q+2)^3}} + \frac{\cancel{(q+1)^2}\left(3\cancel{(q+2)^2}\right)}{\cancel{(q+1)^2}(q+2)^{\cancel{3}}}$$

$$f'(q) = \frac{2}{q+1} + \frac{3}{q+2}$$

Así, $f'(q) = \frac{2(q+2)+3(q+1)}{(q+1)(q+2)} = \frac{2q+4+3q+3}{(q+1)(q+2)} \quad \Rightarrow f'(q) = \frac{5q+7}{(q+1)(q+2)}$