MATEMÁTICA I
SECCIÓN: U7

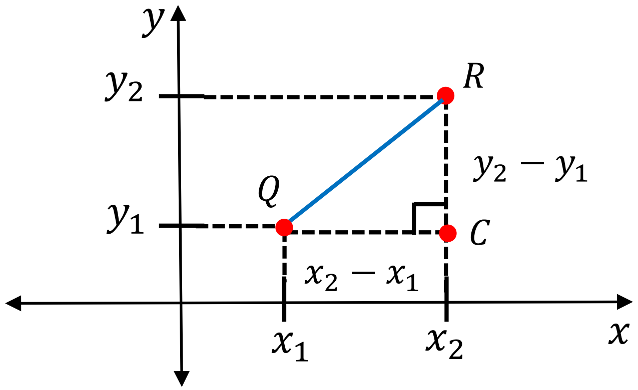
CLASE N° 10

- **Capítulo 6.**
  - **Estudio de las curvas llamadas rectas.**

- **SEGMENTO**

Segmento

Dados dos puntos diferentes $Q(x_1, y_1)$ y $\mathrm{R}(x_2, y_2)$ de un plano, representamos gráficamente al $\overline{QR}$ en el plano cartesiano, de la siguiente manera:



Distancia entre dos puntos

Sean $Q(x_1, y_1)$ y $\mathrm{R}(x_2, y_2)$ dos puntos del plano. La distancia entre ellos es un número real denotado por QR o $d(Q, R)$. Observando el triángulo QRC de la figura anterior, podemos afirmar que: $RC = y_2 - y_1$ y $QC = x_2 - x_1$

➢ SEGMENTO

Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $(QR)^2 = (RC)^2 + (QC)^2$

Es decir, $QR = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

Luego, $d(Q, R) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$ **Fórmula de la distancia entre dos puntos**

Ejemplo:

Calcular la distancia entre los puntos $M(-2, -5)$ y $N(-1, -2)$

<u>Solución:</u>

Al aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos:

SEGMENTO

$$d(M,N)=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{\left(-2-(-5)\right)^2+\left(-1-(-2)\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-2+5)^2+(-1+2)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2+(1)^2}$$

$$= \sqrt{9+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

Punto medio de un segmento

Dado un segmento QR. Las coordenadas del punto medio del segmento están dadas por:

$$PM_{\overline{QR}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

SEGMENTO

Ejemplo:

Calcular el punto medio del segmento cuyos extremos son: $K\left(\frac{-2}{3}\,,3\right)$ y $L\left(2,\frac{1}{2}\right)$

Solución:

Al aplicar la fórmula del punto medio obtenemos:

$$PM_{\overline{KL}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\frac{y_1+y_2}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad PM_{\overline{KL}}=\left(\frac{-\frac{2}{3}+2}{2}\,,\frac{3+\frac{1}{2}}{2}\right)$$

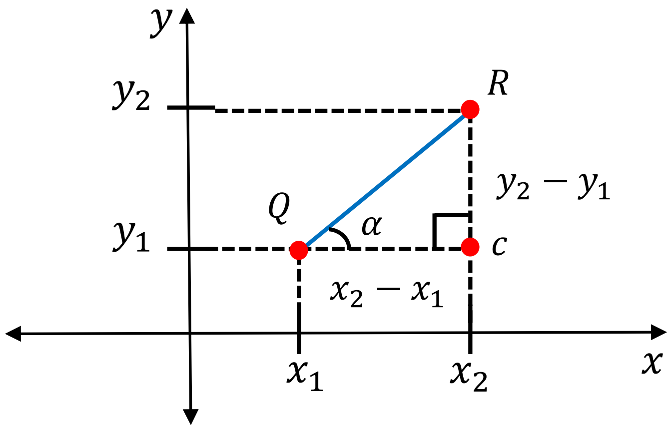
$$\Rightarrow\quad PM_{\overline{KL}}=\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\,,\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad PM_{\overline{KL}}=\left(\frac{4}{6}\,,\frac{7}{4}\right)$$

Es decir, $PM_{\overline{KL}}=\left(\frac{2}{3}\,,\frac{7}{4}\right)$

➢ INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UN SEGMENTO O UNA RECTA.

Inclinación y pendiente de un segmento o una recta.



La inclinación de un segmento se define como el ángulo α positivo comprendido entre $0°$ y $180°$ (ambos inclusive) que dicho segmento (o su prolongación) forma con el eje x.

Llamamos pendiente de una recta a la tangente del ángulo de inclinación. La cual denotaremos por:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

➢ INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UN SEGMENTO O UNA RECTA.

Ejemplo:

Calcular la pendiente del segmento determinado por los puntos: $M(-3,2)$ y $N(1,-2)$

Solución:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \Rightarrow \quad m=\frac{-2-2}{1-(-3)}$$

$$\Rightarrow \quad m=\frac{-4}{1+3}$$

$$\Rightarrow \quad m=\frac{-4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad m=-1$$

Así, $m=-1$

➢ ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA.

Ecuación general de una recta.

$$Ax + By + C = 0$$

Donde, A, B y C son números reales con A y B no nulos simultáneamente.

Si a la ecuación general la escribimos como:

$$Ax + By = C$$

A esta forma se le conoce como forma estándar. La cual no es más que una ecuación lineal en dos variables.

➢ ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA.

Si despejamos y en la ecuación general, obtenemos una expresión conocida como forma canónica o forma pendiente-intercepto:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \Rightarrow \quad y = mx + b$$

Donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Para obtener la gráfica de una recta, es necesario ubicar en el plano cartesiano al menos dos puntos de la misma.

Ejemplo:

Representar gráficamente la recta cuya ecuación es: $3y - x + 3 = 0$ y calcule su pendiente

➢ ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA.

Solucion:

$$3y - x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = x - 3$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{3} - 1$$

Así, $m = \frac{1}{3}$

Puntos de corte con los ejes cartesianos.

➢ Eje x

$$y = \frac{x}{3} - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{x}{3} - 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} = 1$$
$$\Rightarrow \quad x = 3$$

Así, $(3,0)$

➢ ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA.

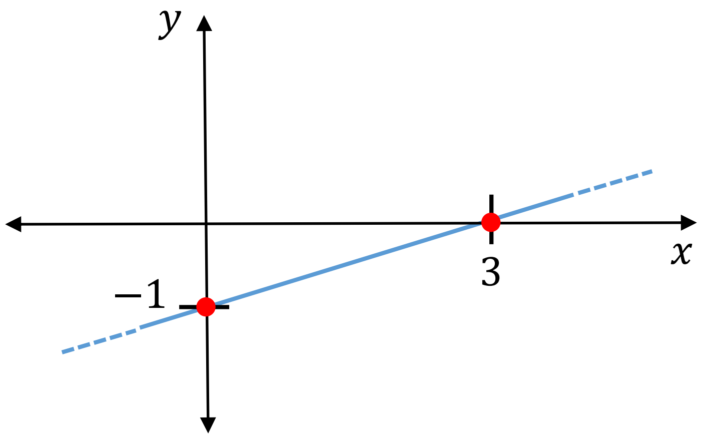
➢ Eje y

Solución:

$$y = \frac{x}{3} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0}{3} - 1$$

$$\Rightarrow \quad y = -1$$

Así, $(0, -1)$



➢ RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES.

Rectas horizontales y verticales

A partir de la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ se deduce que:

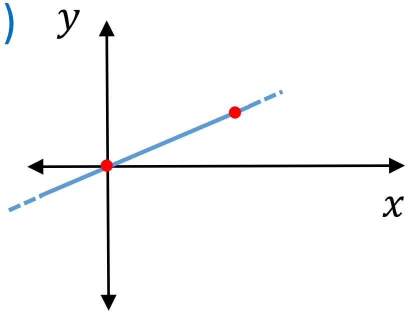
Si $C = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas.
Si $A = 0$, la recta es horizontal y si $B = 0$, la recta es vertical.

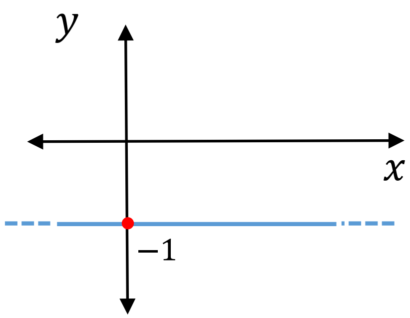
Ejemplos:

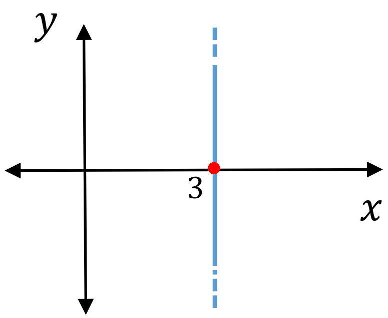
$a)\; 3y - x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x$ La recta pasa por el origen.

$b)\; 3y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -1$ La recta es horizontal.

$c)\; -x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ La recta es vertical.

a)


b)


c)


➢ RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

Rectas paralelas y perpendiculares

Las rectas paralelas son aquellas que poseen la misma pendiente. Por lo tanto,

$$\text{Rectas paralelas} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Las rectas perpendiculares son aquellas cuyas pendientes multiplicadas dan como resultado -1 y les corresponde un ángulo de $90°$. Por lo tanto,

$$\text{Rectas perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

Forma de obtener la ecuación general de una recta.

Si a la ecuación para calcular la pendiente de una recta:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

la multiplicamos por $(x - x_1)$

obtenemos:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

La cual se conoce como la ecuación punto-pendiente.

➢ RECTAS

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos: $(2,2)$ y $(-1,3)$.

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3-2}{-1-2}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-1}{3}$$

Ahora, al sustituir en la ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{-1}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} + 2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1}{3}x + \frac{8}{3} \qquad \text{(Forma pendiente-intercepto)}$$

Por lo que la ecuación general de la recta es:

$$\frac{1}{3}x + y - \frac{8}{3} = 0 \quad \text{ó} \quad x + 3y - 8 = 0$$

RECTAS

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,-4)$ y es perpendicular a la recta $L_2: 5x-3y+7=0$

Solución:

Busquemos la pendiente de L_2

$$
\begin{aligned}
5x-3y+7=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -3y=-5x-7\\
&\Leftrightarrow \quad 3y=5x+7\\
&\Leftrightarrow \quad y=\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Así, $m_2=\frac{5}{3}$

Ahora, como $L_1 \perp L_2$ se cumple que:

$m_1 \cdot m_2 = -1$

➢ RECTAS

Es decir,

$$m_1 \cdot \frac{5}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{-3}{5}$$

Finalmente, aplicando la ecuación punto-pendiente tenemos: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Es decir,

$$\begin{aligned} y - y_1 = m(x - x_1) \quad &\Rightarrow \quad y - (-4) = \frac{-3}{5}(x - 3) \\ &\Rightarrow \quad y + 4 = \frac{-3}{5}x + \frac{9}{5} \\ &\Rightarrow \quad \frac{3}{5}x + y + 4 - \frac{9}{5} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{3}{5}x + y + \frac{11}{5} = 0 \end{aligned}$$

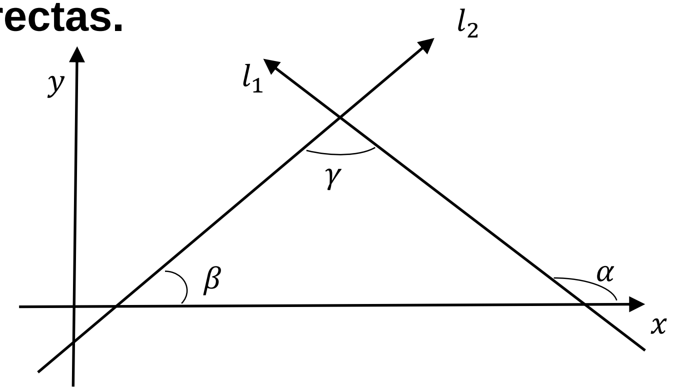
Por lo que $L_1: 3x + 5y + 11 = 0$

➢ INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.

Intersección de dos rectas.

Para conocer el punto de intersección entre dos rectas debemos de igualar la forma pendiente-intercepto de cada una de ellas, para de esta manera conocer la componente x del par ordenado. Finalmente, el valor de x obtenido lo sustituimos en cualquiera de las formas pendiente-intercepto para así conocer la componente y del par ordenado.

Angulo entre dos rectas.



$$\alpha = \beta + \gamma$$
$$\gamma = |\alpha - \beta|$$

➢ INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.

Ejemplo:

Encontrar el punto de intersección, si existe, entre las rectas $l_1: 2x + y - 7 = 0$ y $l_2: x + 2y - 2 = 0$ y encuentre la medida del ángulo que se forma entre ellas.

Solución:

De $l_1: 2x + y - 7 = 0$ se tiene: $y = -2x + 7$ **(I)**
De $l_2: x + 2y - 2 = 0$ se tiene: $2y = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x}{2} + 1$ **(II)**

Igualando **(I)** y **(II)** tenemos:

$$-2x + 7 = \frac{-x}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad -2x + \frac{x}{2} = 1 - 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{2}x = -6 \quad \Rightarrow \quad -3x = -12$$
$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad \textbf{(III)}$$

Finalmente, sustituyendo **(III)** en **(I)** tenemos:

➢ INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.

$$y = -2(4) + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -8 + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

En consecuencia, el punto de intersección entre las rectas l_1 y l_2 es: $(4, -1)$

Ahora, encontremos el valor del ángulo entre ellas.

$$m_1 = tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad -2 = \tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(-2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -63{,}43^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 116{,}57^o$$

$$m_2 = tan(\beta) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = \tan(\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \beta = -26{,}57^o \quad \Rightarrow \quad \beta = 153{,}43^o$$

Luego, $\gamma = |\alpha - \beta| \quad \Rightarrow \quad \gamma = |116{,}57^o - 153{,}43^o| \quad \Rightarrow \quad \gamma = |-36{,}86^o| \quad \Rightarrow \quad \gamma = 36{,}86^o$