

Ce mini-projet, à effectuer en binôme, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...). Un notebook avec le prototype des différentes fonctions à implémenter est disponible pour le mini-projet. Le rendu s'effectuera sur Moodle. La date limite de rendu est le 25 Avril 2025, aucun rendu ne sera possible après cela.

Tomographie à rayons X

La tomographie est une technique d'imagerie très utilisée dans les domaines de l'imagerie médicale ou des matériaux. Son principe est de mesurer l'absorption d'un faisceau de rayons X monochromatiques le long de différentes droites traversant l'objet qu'on cherche à imager, puis de reconstruire l'image d'origine à partir de ces différentes mesures d'absorption.

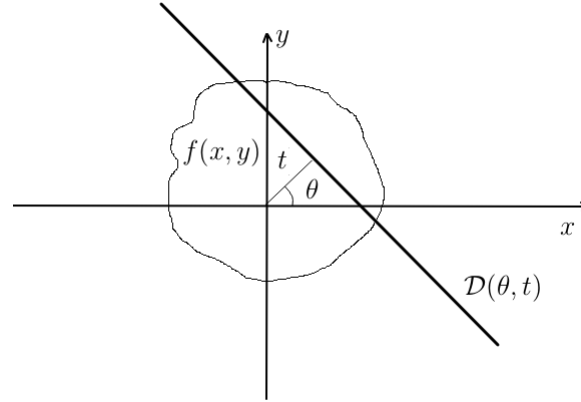


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une mesure de tomographie.

Notons $\mathcal{D}(\theta, t)$ la droite de direction $(-\sin \theta, \cos \theta)$ qui passe par le point de coordonnées $(t \cos \theta, t \sin \theta)$ situé à une distance t de l'origine. Supposons qu'on émette un faisceau de rayons X d'intensité I_0 le long de cette droite. On peut alors montrer que l'intensité transmise à un détecteur situé de l'autre côté de l'objet à imager est :

$$I = I_0 \exp(-\mathcal{R}f(\theta, t)) \quad (1)$$

où

$$\mathcal{R}f(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - \rho \sin \theta, t \sin \theta + \rho \cos \theta) d\rho. \quad (2)$$

Dans cette expression, la quantité $f(x, y)$ décrit l'atténuation du rayonnement en chaque point (x, y) de l'espace et correspond à la quantité qu'on cherche à déterminer. La quantité $\mathcal{R}f(\theta, t)$ est appelée

transformée de Radon de la fonction f .

L'objectif de ce mini-projet est d'étudier différentes méthodes de traitement du signal et d'optimisation permettant de reconstituer l'image d'origine à partir de mesures tomographiques. Nous utiliserons une image synthétique, le "Shepp-Logan phantom". Le Shepp-Logan phantom est une image de test standard créée par Larry Shepp et Benjamin F. Logan en 1974 et qui sert de modèle d'acquisition d'une tête humaine dans le développement et le test d'algorithmes de reconstruction d'images.

Rappel On définit la transformée de Fourier bi-dimensionnelle d'un signal continu $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ en posant, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}f(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

1 Transformée de Radon

1. Dans le notebook associé au mini-projet, implémenter le calcul de la transformée de Radon d'une image. On pourra notamment s'appuyer sur la fonction *rotate* de la librairie scikit-image.
2. Montrer que la transformée de Fourier de $t \mapsto \mathcal{R}f(\theta, t)$ est donnée, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, par :

$$\widehat{\mathcal{R}f(\theta, \cdot)}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

2 Reconstruction par rétro-projection

Notre objectif est de reconstruire l'image d'origine à partir des mesures tomographiques i.e. de sa transformée de Radon. Afin d'approcher $f(x, y)$, une première approche intuitive consiste à moyenner les observations $\mathcal{R}f(\theta, t)$ pour lesquelles la droite $\mathcal{D}(\theta, t)$ passe par le point (x, y) . La rétro-projection de f est ainsi définie par :

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta, \quad (3)$$

où la quantité $x \cos \theta + y \sin \theta$ correspond au produit scalaire des vecteurs $n_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ orthogonal à la droite $\mathcal{D}(\theta, t)$ et (x, y) .

1. Supposons que f soit la fonction indicatrice d'un disque de rayon $R = 1$. Donner alors une expression de la rétro-projection de f sous la forme d'une intégrale. La formule de rétro-projection est-elle une formule d'inversion ?
2. Dans le notebook, implémenter la reconstruction de l'image tomographique à partir de sa transformée de Radon en utilisant une version discrétisée de la formule de rétro-projection. Commenter le résultat obtenu. En particulier, la reconstruction est-elle très différente de l'image originale ?
3. On peut montrer que

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\mathcal{R}f(\theta, \cdot) * h](x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (4)$$

où la transformée de Fourier du filtre h est donnée pour les basses fréquences par

$$\hat{h}(\omega) = |\omega|.$$

Implémenter la reconstruction par rétro-projection filtrée dans le notebook en discrétisant le calcul de l'intégrale (4).

4. Que se passe-t-il lorsqu'on applique la formule de rétro-projection filtrée en présence d'un bruit de haute fréquence ? Que peut-on en déduire sur la stabilité de la méthode ?