



Aplicação prática do algoritmo de Ford-Fulkerson (problema do fluxo máximo)

Grupo 13:

Gabriel A. Velasco
Luis Gustavo S. Teteishi



Transporte de torcedores da cidade de Uberlândia até Belo Horizonte

No dia 13 de Fevereiro de 2023 vai ocorrer o clássico do futebol mineiro Atlético vs Cruzeiro em Belo Horizonte.

Existe uma rivalidade muito grande entre as duas torcidas, o Cruzeiro acaba de subir para a série A depois de quase falir passar TRÊS anos na Série B e o Atlético vem de conquistas recentes do Campeonato Brasileiro 2021, Copa do Brasil 2021, Supercopa do Brasil 2022 e o tricampeonato mineiro nos anos de 2020, 2021 e 2022, de fato o maior campeão do estado.

Uma empresa realiza o transporte de pessoas (utilizando vans) entre algumas cidades, incluindo Uberlândia, Uberaba, Araxá, Sete Lagoas, Divinópolis e Belo Horizonte (local do jogo).



Transporte de torcedores da cidade de Uberlândia até Belo Horizonte

Um grupo de amigos atleticanos da cidade de Uberlândia se organizam para ir ao jogo e verificam que existe as seguintes vagas para viagens disponíveis:

- Uberlândia para Araxá: 16 vagas.
- Uberlândia para Uberaba: 13 vagas.
- Uberaba para Araxá: 4 vagas.
- Araxá para Uberaba: 10 vagas.
- Araxá para Sete Lagoas: 12 vagas.
- Uberaba para Divinópolis: 14 vagas.
- Divinópolis para Sete Lagoas: 7 vagas.
- Divinópolis para Belo Horizonte: 4 vagas.
- Sete Lagoas para Belo Horizonte: 20 vagas.



Transporte de torcedores da cidade de Uberlândia até Belo Horizonte

Visto que esta é a única forma de transporte disponível, **o grupo se depara com o seguinte problema:**

Dada as limitações de transporte, **qual a maior quantidade de torcedores** do grupo que pode sair de Uberlândia e chegar a Belo Horizonte para ver o jogo?



Solução?

Vamos modelar o problema utilizando um digrafo com arestas capacitadas.

Mapa:





Modelando o problema para um dígrafo

Cada aresta representa uma rodovia que liga duas cidades.

A capacidade de cada aresta é a quantidade de lugares disponíveis na van que percorre esta rodovia (aresta).

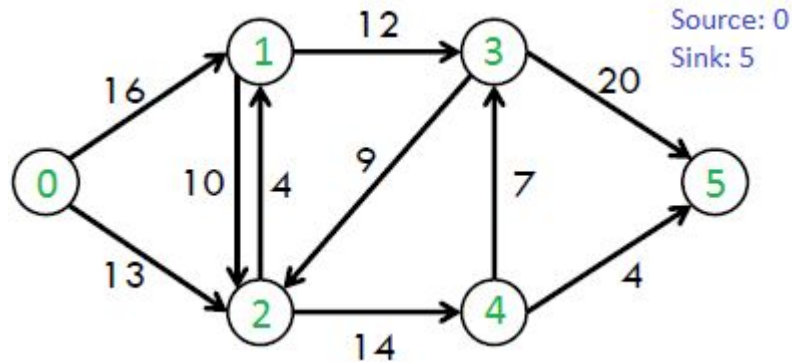
Cada vértice do dígrafo representará uma cidade, sendo:

Uberlândia = 0, Araxá = 1, Uberaba = 2, Sete Lagoas = 3, Divinópolis = 4 e Belo Horizonte = 5.

Vamos considerar que os horários de partida e de chegada das vans entre as cidades permite que os torcedores façam as viagens.

Modelando o problema para um dígrafo

Dada as considerações sobre vértices e arestas obtemos o seguinte dígrafo do mapa:

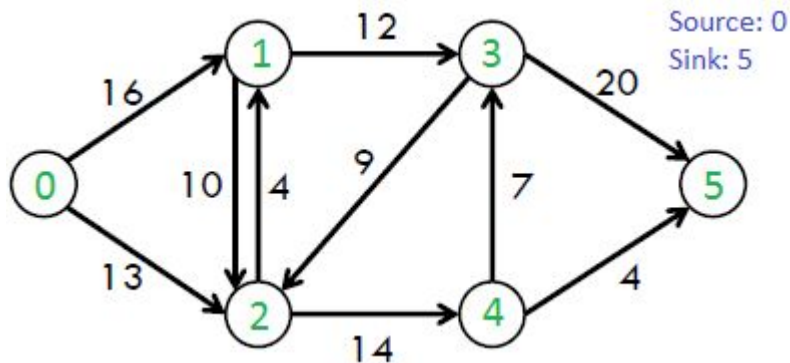


Note no dígrafo tem um vértice fonte (0 = Uberlândia) e um sumidouro (5 = Belo Horizonte), logo vamos olhar para o dígrafo como sendo uma Rede de Fluxo.

Solução para o problema

A partir de agora vamos pensar somente na rede de fluxo obtida na conversão.

Existe algum jeito de calcular a maior quantidade de fluxo que pode sair da fonte e chegar ao sumidouro?





SIM! Algoritmo de Ford-Fulkerson

Mas antes, lembrando algumas propriedades:

- Fluxo de uma aresta não pode exceder a sua capacidade: $f(u-v) \leq c(u-v)$
- Conservação de fluxo nos vértices comuns (não fonte/sumidouro): $\text{inflow}(v) = \text{outflow}(v)$, ninguém fica para trás!
- $\text{outflow}(\text{Source}) = \text{inflow}(\text{Sink})$, fluxo que sai da fonte entre no sumidouro.
- **Capacidade residual** de uma aresta ou de um caminho é a quantidade de fluxo que está aresta ou caminho ainda pode receber, aumentando o fluxo original.



Algoritmo de Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp

Entrada: Uma rede de fluxo = Grafo direcionado G com as capacidades das arestas.

Saída: Fluxo de intensidade máxima max_flow .

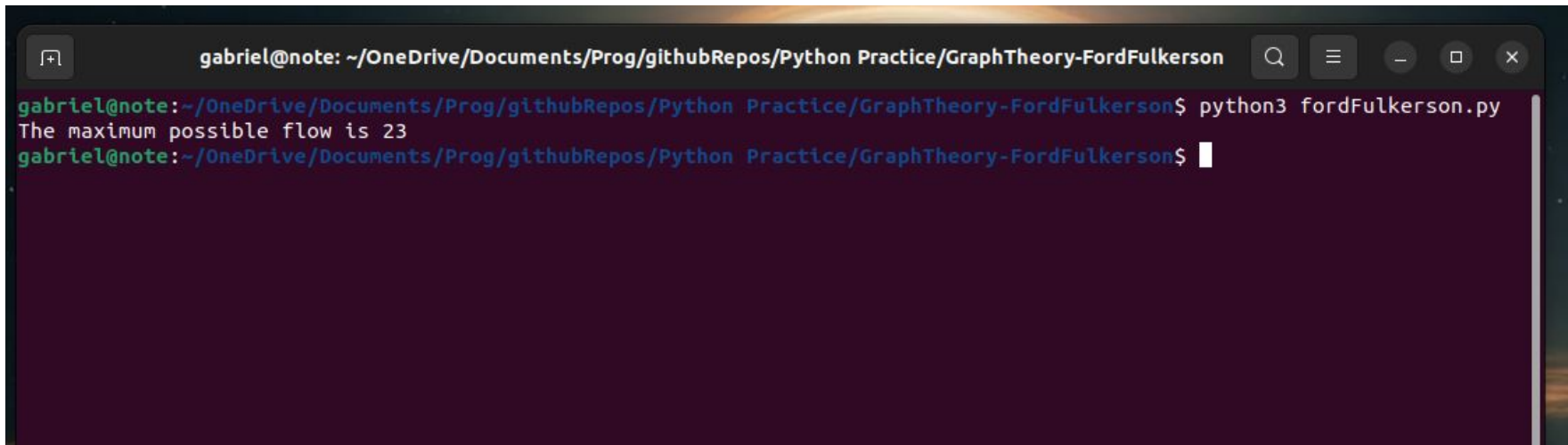
Complexidade lista adjacência: $O(V E^2)$

Complexidade matriz adjacência: $O(E V^3)$



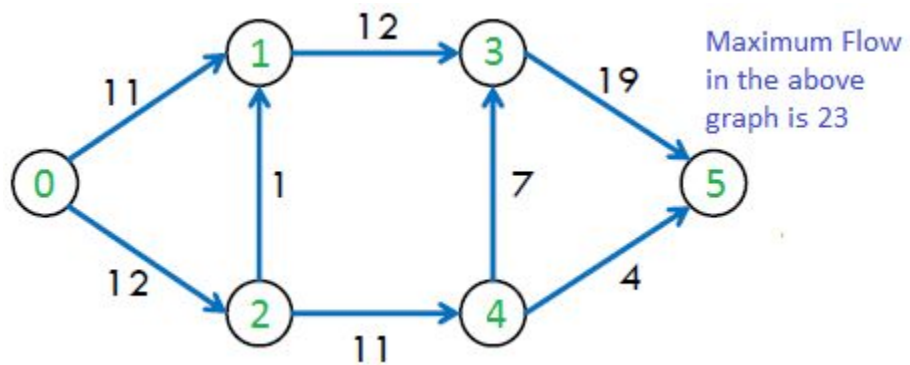
Código e execução

<https://github.com/GabrielVelasco/Python/blob/main/GraphTheory-FordFulkerson/fordFulkerson.py>



```
gabriel@note: ~/OneDrive/Documents/Prog/githubRepos/Python Practice/GraphTheory-FordFulkerson
gabriel@note:~/OneDrive/Documents/Prog/githubRepos/Python Practice/GraphTheory-FordFulkerson$ python3 fordFulkerson.py
The maximum possible flow is 23
gabriel@note:~/OneDrive/Documents/Prog/githubRepos/Python Practice/GraphTheory-FordFulkerson$
```

Fluxo por arestas



Conclusão

Nessas condições, **23** atleticanos terão a oportunidade de ver o Atlético destruir o Cruzeiro.

Agora que já temos o modelo podemos rodar o método FordFulkerson usando uma rede de fluxo mais complexa.





Referências

<https://www.geeksforgeeks.org/ford-fulkerson-algorithm-for-maximum-flow-problem/>

https://cp-algorithms.com/graph/edmonds_karp.html#implementation