Ayudantía 10 - Mat270

23 de julio de 2021

Integración numérica

Considerar una distribución normal estandar $N(0,1)$ cuya función de densidad esta dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$$

como es densidad de probabilidad se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

se tiene que

$$\int_{-3}^{3} f \approx 0{,}9973$$

por lo que se puede considerar que

$$\int_{-4}^{4} f \approx 1$$

entonces, definiendo

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P\left(X \leq x\right)$$

calcular $\Phi(1,5)$ con 10 intervalos utilizando trapecios y Simpson

- Trapecios
- Simpson

Para este efecto considerando lo anterior podemos aproximar

$$\Phi(x) \approx \int_{-4}^{x} f(x)dx$$

Considerando $h = 0{,}55$

x	-4	-3.45	-2.9	-2.35	-1.8	-1.25	-0.7	-0.15	0.4	0.95	1.5
f	0.0001	0.001	0.006	0.0252	0.079	0.1826	0.3123	0.3945	0.3683	0.2541	0.1295

Con trapecios:

$$\Phi(1{,}5) = \frac{h}{2}\left(f(-4) + 2\sum_{i=1}^{9} f(-4 + i * h) + f(1{,}5) \right) + \frac{(1{,}5 - -4)h^2}{12} f''(\xi)$$

entonces,

$$\Phi(1{,}5) \approx 0{,}9282$$

y fácilmente podemos obtener una cota para el error: $f''(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ si queremos encontrar una cota óptima:

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}(3 - x^2)x$$

se tiene que $f^{(3)}(x) = 0 \iff x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ luego, $f''(0) = -0{,}399$ y $f''(\pm\sqrt{3}) = 0{,}178$, por lo tanto

$$|f''(x)| \leq \sup_{x \in (-4, 1{,}5)} |f''(x)| = 0{,}399$$

asi

$$|\Phi(1{,}5) - I| = |E| = |\frac{(1{,}5 - -4)h^2}{12} f''(\xi)| \leq 0{,}399 \frac{(1{,}5 - -4)h^2}{12} = 0{,}055$$

Utilizando la regla de simpson:

$$\Phi(1{,}5) \approx \frac{h}{3}\left(f(-4) + 4I + 2P + f(1{,}5)\right)$$

donde

$$I = \sum_{i=1,impares}^{n-1} f(x_i)$$

$$P = \sum_{i=2,pares}^{n-2} f(x_i)$$

Calculando: $I = 0{,}8574$, $P = 0{,}7654$, finalmente

$$\Phi(1{,}5) \approx 0{,}9332$$

Luego, el valor exacto de $\Phi(1{,}5) = 0{,}9332$

Gauss - Chebyschev

$$\int_{-1}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(z_i)$$

Entonces, para un intervalo arbitrario cambiamos la variable: $x = \frac{(b-a)u+(b+a)}{2}$ de esta forma se tiene

$$u = 1 \iff x = b$$
$$u = -1 \iff x = a$$
$$dx = (b-a)/2du$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{(b-a)x+(b+a)}{2}\right) dx$$

Resolver mediante Gauss-Chebyschev:

$$\int_0^2 \frac{x^4+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

acomodando los límites de itegraicón : $x = \frac{(b-a)u+b+a}{2} = u+1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(u+1)^4+1}{\sqrt{2(u+1)-(u+1)^2}}du = \int_{-1}^{1} \frac{(u+1)^4+1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

entonces tenemos la estructura

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}f(u)du, \quad f(u) = (u+1)^4+1$$

Luego, la fórmula del error :

$$E_n = \frac{\pi/2}{2^{2n}(2n+2)!}f^{2n+2}(\xi),\ \xi \in (-1,1)$$

como f es un polinomio de grado 4, $f^k = 0\ \forall k \geq 5$, de esta forma el método es exacto para esta función, dado que si $n \geq 2 \Rightarrow E_n = 0$.
Por lo tanto con 2 o más nodos el método es exacto, entonces considerando 1, 2, 3 y 4 nodos, los pesos asociados $w_n = \pi/n$ con n la cantidad de puntos.
Los polinomios de Tchebyschev

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x & x_1 = 0 \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 & x_1 = -\sqrt{1/2},\ x_2 = \sqrt{1/2} \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x & x_1 = -\sqrt{3}/2,\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}/2 \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}/2 \ y\ \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}/2
\end{aligned}$$

y las evaluaciones de la función se realizan en las raíces de los polinomios:

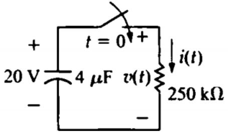
$$\begin{aligned}
n = 0 &\quad \pi f(0) & = 6{,}283 \\
n = 1 &\quad \pi/2(f(-\sqrt{1/2}) + f(\sqrt{1/2})) & = 16{,}493 \\
n = 2 &\quad \pi/3(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)) & = 16{,}886 \\
n = 3 &\quad \pi/4(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) & = 16{,}886
\end{aligned}$$

mientras que

$$\int_0^2 \frac{x^4+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = 16{,}886$$

Resolución ODE's
Respuesta natural RC

Consideremos el circuito RC paralelo



Considerando la ecuación diferencial asociada:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

entonces se tiene el siguiente problema

$$\begin{cases} v' & = -\frac{v}{RC} \\ v(0) & = 20V \end{cases}$$

Resolver analíticamente y numéricamente.

Luego, si se tiene que la resistencia varia según el tiempo

$$R(t) = R\left(5\frac{1-e^{-t/100}}{t/100} - 5e^{-t/100} + 1\right)$$

Resolver la el problema anterior.