UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CAMPUS SANTIAGO
ANÁLISIS NUMÉRICO MAT270

Ayudantia 3.

1. Sea $g(x) = 2x - \cos(x)$ una función.

   Se quiere utilizar la iteración de punto fijo para aproximar el valor de $x \in [1, 2]$ tal que se satisfaga:

   $$\int_0^x g(\xi) d\xi = 1.$$

   Encontrar una función de punto fijo adecuada para asegurar la convergencia para cualquier $x_0 \in [1, 2]$. ¿ Cuántas iteraciones necesita para aproximar el valor buscado con una precisión 10^{-3}, si $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$? Encontrar dicha aproximación.

2. Considere la función $F(x) = e^{-x} - \operatorname{sen}(x) - 2$.

   a) Demuestre que $F(x)$ tiene una única raíz negativa.

   b) Determinar un intervalo en el que el método de Newton converja cuadráticamente (basta con verificar las condiciones para asegurar convergencia local del método de Newton), y encontrar una aproximación con una precisión 10^{-5}.

   c) ¿Converge el método para cualquier $x < 0$?

3. Sea $f(x) = (x - p)^3 h(x)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $h(p), h'(p) \neq 0$. Es conocido que el método de Newton converge a la raíz $x = p$ de $f(x)$ con orden lineal. Demuestre que el método:

   $$x_{k+1} = x_k - 3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k = 0, 1, \cdots$$

   converge a la raíz $x = p$ con orden cuadrático.

4. Considere la situación que un punto en $\mathbb{R}^2$ está de

   nido como punto de intersección entre las curvas dadas por las funciones $f_1(x) = ax$ y $f_2(x) = \sqrt{x}$ con $x > 0$ y parámetro $a > 0$.

   i. Estudie el problema de encontrar el parámetro a, dada la coordenada x del punto de intersección . ¿Es bien condicionado este problema? Considere el condicionamiento absoluto y relativo.

5. Sea

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Calcular el $cond_\infty(A)$, $cond_1(A)$, y $cond_2(A)$.