Ayudantia 2 - MAT270

1. Método de Bisección

Considerando el problema general $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, encontrar $\bar{x} : f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Theorem 1.1 (Valor Intermedio)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en [a,b]. Si x es tal que* $\min\{f(a), f(b)\} \leq x \leq \max\{f(a), f(b)\}$, *entonces $\exists c \in [a, b] : f(c) = x$.*

Considerando $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces por TVI $\exists x \in [a, b] : f(x) = 0$

Resolver:

$$P1 : \quad \arg\max_{\mathbb{R}+} f(x) = \frac{1-exp(-x)}{x} - exp(-x)$$

se tiene que es diferenciable y además $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ entonces $\arg\max_{\mathbb{R}+} f(x) \neq \emptyset$
Por lo tanto buscamos $f'(\bar{x}) = 0$ donde

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(x^2 + x + 1) - 1}{x^2}$$

la cual es continua, entonces definimos el intervalo : $[0, 6]$ y vemos que $f'(0) = 0{,}5$ y $f'(6) = -0{,}0248$ entonces $f(a)f(b) < 0$.

2. Método de Punto fijo

Definición:(Lipschitz continua)

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz continua si $\exists \alpha > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Si se cumple la condición para $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ entonces se dice que es localemente Lipschitz. Si $\alpha < 1$ entonces se dice que es una contracción.

Theorem 2.1 (Punto fijo de Banach caso real)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función contractiva de constante $\alpha \in [0, 1)$, entonces $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Además, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ definida como $x_{n+1} = f(x_n)$ converge y es más $x_n \longrightarrow x$ donde $f(x) = x$, esto es, $|x_n - x| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$*

Resolver:

$$x = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$x = ln\left(\frac{1}{x^2+2}\right)$$

utilizando $x_0 = 0$.

3. Método de Newton-Raphson

Para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, considerar la ecuación

$$f(x) = 0$$

Si se conoce una solución próxima x_n a la raíz de la ecuación x^*, entonces realizando una expansión de Taylor de primer orden:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^*) \\ &= f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + o(|x^* - x_n|) \\ &\approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) \end{aligned}$$

entonces

$$f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

$$x^* \approx x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

por lo tanto se tiene el esquema iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Theorem 3.1 (Convergencia Local)**.** *Asumiendo que x^* es solución de la ecuación $f(x) = 0$ tal que $[f'(x^*)]^{-1}$ existe y es continua, además que $f'(x)$ es localmente Lipschitz continua en x^*,*

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y| \ \forall x, y \in \mathcal{N}_{x^*}$$

donde $\mathcal{N}_{x^*}$ es una vecindad de x^* y $L > 0$ constante. Entonces $\exists \delta > 0$ tal que si $|x_0 - x^*| \leq \delta$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida y converge a x^*. Además, para alguna constante M con $M\delta < 1$, se tiene una cota para el error:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$$

y

$$|x_n - x^*| \leq (M\delta)^{2^n}/M.$$

Resolver:

$$x^5 - 12 + tan(x), \quad x_0 = 0.$$

$$x^5 + 5x + 8 = 0, \quad x_0 = -2.$$

4. Método de Newton-Raphson sistema de ecuaciones

Para sistemas de ecuaciones no lineales, si $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuamente diferenciable y el sistema de la forma

$$x \in \mathbb{R}^d, \quad F(x) = 0$$

el método de Newton queda de la forma:

$$x_{n+1} = x_n - [DF(x_n)]^{-1}F(x_n)$$

Resolver:

$$\begin{aligned} &exp(x^2) + 8x^2 sin(y) = 0 \\ &x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

utilizando x_0 =(0.2, 0.8).

5. Rendimiento de Bono Cupón

Un bono es un instrumento de deuda que emite una empresa o administración pública para financiarse. Existen diferentes tipos de bonos como por ejemplo un bono cupón, el cual paga un interés constante en cada periodo (e.g. anual) y al final del periodo (vencimiento) para el último interés junto con el capital.

Se tiene un bono del banco central por 100.000.000$ a 5 años con un interés anual del 3.18 %, el dueño del bono cada año recibe 3.180.000$ y al año 5 recibe 100.000.000$ + 3.180.000$. Si al bono le quedan 4 años y se está transando en 105.000.000$ se desea calcular el rendimiento del bono, lo que es equivalente a calcular la tasa interna de retorno o resolver el siguiente problema:

$$VAN(i) = -P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} = 0$$

donde P_0 =105.000.000 el valor al cual se transa, C_k el pago al tiempo k que se recibe, n la cantidad de periodos y i el rendimiento (yield) o tasa interna de retorno.

Por lo tanto el problema se traduce en resolver:

$$VAN(i) = -105{,}000{,}000 + \frac{3{,}180{,}000}{(1+i)^1} + \frac{3{,}180{,}000}{(1+i)^2} + \frac{3{,}180{,}000}{(1+i)^3} + \frac{103{,}180{,}000}{(1+i)^4} = 0$$