Ayudantía 6 - Mat270

10 de junio de 2021

Nociones Básicas

Considerando dos vectores x, y de tamaño m, el comando *MATLAB* ***polyfit*** determina los coeficientes del polinomio de grado n:

$$p(x) =_{i=1}^{n} c_i x^i$$

cuya gráfica se ajusta los puntos (x_i, y_i) por LS, cuando $n = m - 1$ entonces $p(x)$ es el polinomio de interpolación.

1 justificar por qué es el polinomio de interpolación (e.g. Lagrange, Newton, LS)

2 *polyfit* retorna un vector con los coeficientes del polinomio

$$c = polyfit(x, y, n), \quad retorna \quad (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$$

donde los coeficientes corresponden a los del polinomio

$$p(x) = c_1 x^n + \cdots + c_n x + c_{n+1}$$

De lo anterior generar los puntos $(x, f(x))$ para $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Graficar las funciones y sus polinomios de interpolación de grado 5 y 10 utilizando *polyfit* y *polyval* considerando $f(x) = sin(x)$.
Luego, repetir para la siguiente funcione con polinomios de grado 6 y 10.

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \{-5, -4, \ldots, 5\}$

explicar el motivo de las oscilaciones observadas.
Luego, para la misma función anterior y mismos puntos graficar el spline cúbico natural que los interpola.

Splines

Consideramos el spline $S(x)$

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

con $j = 0, 1, \dots, n-1$ el número de intervalos o nodos de los puntos a interpolar. Luego, para la continuidad del interpolador se obtiene que

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

entonces se tiene que

$$a_{j+1} = S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \tag{1}$$

para que el spline sea un interpolador se tiene que $a_j = f(x_j)$, entonces del mismo modo anterior se obtiene que

$$b_j = S'(x_j) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

Análogamente, para la continuidad de la derivada se tiene que

$$S_j'(x_j) = S_{j+1}'$$

entonces, igualando y considerando la notación $h_j = x_{j+1} - x_j$ obtenemos

$$b_{j+1} = S_j'(x_j) = S_{j+1}' = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \tag{2}$$

Luego, considerando la segunda derivada:

$$c_n = \frac{S''(x_n)}{2}$$

utilizando la condición de continuidad en los splines

$$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$$

se obtiene que

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$$

entonces, dejamos d_j expresado en términos de los demás

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \tag{3}$$

Utilizando la ecuación 1 :

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

reemplazando la ecuación 3 en 2 y 1 se tiene que

$$a_{j+1} b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(3c_j + c_{j+1})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_J(c_j + c_{j+1}) \tag{4}$$

entonces, si dejamos b_j en términos de $a_j, a_{j+1}, c_j, c_{j+1}$ se obtiene

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{5}$$

En resumen

Considerando la ecuación 4 y se evalúa en j en vez de $j+1$ se puede reemplazar la ecuación 5 evaluada en j y $j-1$, por lo tanto es posible formular el siguiente esquema recursivo y plantear un sistema lineal

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} - h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{hj}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

Las incógnitas vendrían siendo los coeficientes c_j, puesto que los valores de h_j están dados por los puntos a interpolar (x) y los coeficientes a_j son la evaluación de los puntos.
Planteándolo como un sistema lineal $Ax = b$ donde b corresponde a los valores a interpolar, x los coeficientes c_j y A la matriz de diseño correspondiente.
Como dejamos los coeficientes b_j en términos de los demás, una vez calculados los c_j tenemos que

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

donde $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$

Construyendo la matriz de diseño:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el lado derecho del sistem :

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

considerando $x = (c_0, c_1, \dots c_n)^T$

Revisando la matriz del sistema, se tiene que es estrictamente diagonal dominante

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$$

para la primera fila y la última se tiene $1 > 0 + 0 + 0 + \dots$ mientras que para las demás: $2(h_j + h_{j+1}) > h_j + h_{j+1}$ por lo tanto es invertible, y el sistema admite solución única.

Contornos

Considerando mediciones en un sistema de coordenadas rectangulares de la sección de una pieza mecánica, su contorno se constituye de 3 curvas suaves que se intersectan en distintos ángulos. Por este motivo se almacenan en 3 grupos distintos de pares de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ para cada uno de ellos.

- Dibujar en un mismo gráfico los grupos de puntos y verificar que describen un contorno cerrado.
- Justificar por qué no se puede utilizar un único spline cúbico para dibujar la sección de la pieza.
- Dibujar la sección mediante 3 splines, uno para cada curva.

Utilizando otra figura, se tienen coordenadas de una espiral

- Graficar los puntos y la espiral correspondiente
- Interpolar por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos y graficar la curva parametrizada obtenida.