Ayudantía 9 - Mat270

8 de julio de 2021

Resolución Numérica de ODEs : Método de Euler

Se busca resolver numéricamente el problema general:

$$y' = F(x, y)$$
$$y_0 = y(x_0)$$

utilizando una desratización del dominio de x, *e.g.* intervalos de tiempo pequeños, donde se busca un esquema del tipo:

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t$$
$$y_{t+1} = y_t + \Delta t F(x_t, y_t)$$

donde el error de estimación asociado es del orden de Δt^2 :

$$E_a = \frac{F'(x, y)}{2!} \Delta t^2$$

Para esto se realiza una aproximación del tipo:

$$y'(x) \approx \frac{y(x_t) - y(x_{t-1})}{\Delta t}$$

$$y' = F(x, y) \rightarrow \frac{y(x_t) - y(x_{t-1})}{\Delta t} \approx F(x_{t-1}, y_{t-1})$$

(Explicit) Forward Euler

$$y_t = y_{t-1} + \Delta t F(x_{t-1}, y_{t-1})$$

(Implicit) Backward Euler

$$y_t = y_{t-1} + \Delta t F(x_t, y_t)$$

se debe despejar y_t en función de y_{t-1}, x_t y resolver.

Método de Taylor

Utilizando una expansión de Taylor:

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(t_i)}{2}h^2 + \frac{y^{(3)}(t_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{y^{(n)(t_i)}}{n!}h^n + h_n(t_i)h^n$$

con $h = t - t_i$ suficientemente pequeño y $h_n(t_i)$ el resto $\mathcal{O}(|t - t_i|^n)$ como y' es solución del problema, $y'(x) = F(x, y)$ entonces $y'(t_i) = F(t_i, y_i)$ y sigue

$$y_{i+1} = y_i + F(t_i, y_i)h + \frac{h^2}{2}F'(t_i, y_i) + \frac{h^3}{6}F''(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}F^{(n-1)}(t_i, y_i) + \mathcal{O}(h^n)$$

con una expansión de segundo orden:

$$y_{i+1} = y_i + F(t_i, y_i)h + \frac{h^2}{2}F'(t_i, y_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

Luego, considerando el caso particular de una expansión de primer orden se obtiene el método de Euler.

Ejemplo 1

Considerar la ODE

$$\begin{cases} y' = F(x, y) = 3 + x - y & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para el método de Euler se tiene $y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k)$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hF(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + h(3 + x_k + y_k) \\ y_1 &= 2 + h(3 + 0 + 2) \end{aligned}$$

Utilizando desratizaciones de 10, 50, 100 y 500

la solución de la ecuación homogénea $y_h' + y_h = 0$ tiene la forma $y_h = Ae^{-x}$, luego para la solución particular $y_p' + y_p = 3 + x$ se tiene $y_p = 2 + x$ entonces la solución general está dada por $y = Ae^{-x} + 2 + x$, considerando $y(0) = 1$ entonces $y = 2 + x - e^{-x}$

Viendo como queda el método Backward

$$y_i = y_{i-1} + h(3 + x_i - y_i)$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + h(3 + x_i)}{1 + h}$$

Ejemplo 2

Considerar la ODE

$$\begin{cases} y' = ty & t \in [0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando el método de Taylor de 2do orden:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hF(t_i, y_i) + \tfrac{h^2}{2} F'(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h(t_i y_i) + \tfrac{h^2}{2}(y_i) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = ty \Rightarrow \frac{1}{y} dy = tdt \Rightarrow ln(y) = \frac{t^2}{2} + c$$

con la condición inicial, se obtiene que $y = e^{\frac{t^2}{2}}$

Método de Runge Kutta Orden 2 (RK2)

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(t_0) \\
y_{i+1} &= y_i + h\tfrac{1}{2}(F(t_i, y_i) + F(t_i + h, y_i + hF(t_i, y_i)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hF(t_i, y_i) \\
k_2 &= hF(t_i + h, y_i + k_1) \\
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

Resolver:

$$
\begin{cases}
y' &= \frac{5x^2 - y}{e^{x+y}} \quad x \in [0, 1] \\
y(0) &= 1
\end{cases}
$$

Método de Crank-Nicolson

Es una combinación de el método de Euler Forward y Backward

$$\frac{y_t - y_{t-1}}{h} = \frac{1}{2}\left(F(x_t, t_t) + F(x_{t-1}, y_{t-1})\right)$$

Para el ejemplo 1, $y' = 3 + x - y$:

$$y_{t+1} = y_t + \frac{h}{2}\left((3 + x_t - y_t) + (3 + x_{t+1} - y_{t+1})\right)$$

resolviendo para y_{t+1},

$$y_{t+1} + \frac{h}{2} y_{t+1} = y_t + \frac{h}{2}\left((3 + x_t - y_t) + (3 + x_{t+1})\right)$$

$$y_{t+1} = \frac{2}{2+h} y_t + \frac{h}{2+h}(6 + x_t + x_{t+1} - y_t)$$

considerando que $x_{t+1} = x_t + h$

$$y_{t+1} = y_t \frac{2-h}{2+h} + \frac{h}{2+h}(6 + 2x_t + h)$$