Ayudantía 7 - Mat270

18 de junio de 2021

Polinomio de interpolación de Hermite

Interpolador de Hermite

Considerando $n+1$ puntos $(x_0, \ldots, x_n)$ y una función suave f, el polinomio de interpolación de Hermite de grado a lo más $2n+1$ $H_{2n+1}(x)$ es tal que:

$$\begin{aligned} f(x_j) &= H_{2n+1}(x_j) \\ f'(x_j) &= H'_{2n+1}(x_j) \end{aligned} \qquad j = 0, 1, \ldots n$$

Entonces se tiene un polinomio de la forma:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\psi_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\Psi_{n,j}(x)$$

donde los polinomios $\psi_{n,j}, \Psi_{n,j}$ son tales que

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}(x_i) &= \delta_{i,j}, & \Psi_{n,j}(x_i) &= 0 \\ \psi'_{n,j}(x_i) &= 0, & \Psi'_{n,j}(x_i) &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Interpolación de Hermite

Además, los polinomios ψ, Ψ se pueden expresar en términos del polinomio de interpolación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}(x) = & \quad \left(1 - 2\phi'_{n,j}(x_j)(x - x_j)\right) \phi^2_{n,j}(x) \\ \Psi_{n,j}(x) = & \quad (x - x_j)\phi^2_{n,j}(x) \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{n,j}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_n)}$$

luego, considerando la notación $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ se puede escribir el polinomio de Lagrange como:

$$\phi_{n,j} = \frac{w_n(x)}{(x - x_j)w'_n(x)}$$

así, se tiene que el error está dado por:

$$f(x) - H_{1n+1}(x) = \frac{w_n^2(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)(\xi)}, \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

Considerando $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$, aproximar f(1.03) usando un polinomio interpolante de Hermite de grado a lo más 3 y 5 utilizando x_0=1, x_1=1.05 y x_0=1, x_1=1.05, x_2=1.07

x_i	1,00	1,05	1,07
$f(x_i)$	−4,39	0,84	0,86
$f'(x_i)$	1,53	1,24	1,11

X	$f(x)$	$f'(x)$	$f[a,b,c]$	$f[a,b,c,d]$
$x_0 = 1$	$-4{,}39$			
$x_0 = 1$	$-4{,}39$	$1{,}53$		
$x_1 = 1{,}05$	$0{,}84$	$f[x_0, x_1] = 104{,}60$	$f[x_0, x_0, x_1] = 2061{,}4$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$
$x_1 = 1{,}05$	$0{,}84$	$1{,}24$	$f[x_0, x_1, x_1] = -41203{,}2$	$= -5{,}8$

$$H_{2n+}(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^2(x - x_1)$$

$$= -4,39 + 1{,}53(x - 1) + 2061{,}4(x - 1)^2 - 5{,}8(x - 1)^2(x - 1{,}05)$$

$$= 2061,57 - 4139{,}25x + 2079{,}09x^2 - 5{,}80x^3$$

ahora, con x_0=1.00, x_1=1.05, x_2=1.07

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[1,2,3]$	$f[1,2,3,4]$	$f[1,2,3,4,5]$
x_0					
x_0					
x_1					
x_1					
x_2					
x_2					

Construír el polinomio de menor grado que interpole la función:
$f(1) = 2, \quad f'(1) = 3, \quad f(2) = 6, \quad f'(2) = 7, \quad f''(2) = 8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 0 & 1 & 2*1 & 3*1^2 & 4*1^3 \\ 0 & 1 & 2*2 & 3*2^2 & 4*2^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6*2 & 12*2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f'(1) \\ f'(2) \\ f''(1) \end{pmatrix}$$

de este modo obtenemos el polinomio:

$$p(x) = -8 + 23x - 20x^2 + 8x^3 - x^4$$

considerando la función

$$f(x)=\begin{cases} 3+x-9x^2 & ,x\in[0,1] \\ a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3 & ,x\in[1,2] \end{cases}$$

determinar valores para que f sea un spline cúbico en los nodos 0,1,2. Luego, encontrar d tal que $||f''||^2_{L^2([0,2])}$ sea mínima

$$\begin{aligned} S_0(x) = & \quad a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 \\ S_1(x) = & \quad a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 \end{aligned}$$

entonces se tiene que $a_0 = 3, b_0 = 1, c_0 = -9, d_0 = 0$,
luego como $S_0(x_1) = S_1(x_1) \implies a_1 = -5$
después $S_0'(1) = S_1'(1)$ y $S_0''(1) = S_1''(1) \implies b_1 = -17 \wedge c_1 = -9$
Finalmente

$$d_1 \in argmin_d \int_0^2 |f''(x)|^2 dx$$

equivalentemente:

$$\min_{d\in\mathbb{R}} \int_1^2 |-18+6d(x-1)|^2 dx$$

$$\int_0^1 (-18 + 6du)^2 du = 324 - 108d + 36d^2$$

entonces se tiene que $d = 1{,}5$

encontrar el polinomio $p(x) = a + bx$ tal que el error cuadrático sea mínimo para los datos:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.35	0.5	0.45	0.55	0.6	0.1	0.9	0.75	0.8	0.8

definiendo el sistema $Y = X\beta$

considerando $\beta = (a, b)^T$, $Y = (y_1, y_2, ..y_{10})$, $X = (\mathbf{1}_{10}, (x_1, x_2, ...x_{10})^T)$

se tiene la solución que minimiza el error cuadrático

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Un automóvil realiza un recorrido por una carretera recta y cronometra su recorrido en varios puntos.

Tiempo[s]	0	3	5	8	13
Distancia[ft]	0	225	383	623	993
Velocidad[ft/s]	75	77	80	74	72

Utilizar el polinomio de Hermite para aproximar la velocidad en $t = 10$, luego determinar si el auto exede la velocidad de 80.66[ft/s] y si lo hace en que momento, luego aproximar la velocidad máxima.