Ayudantía 3 - Mat270

2 de mayo de 2021

Problema 1

Considerar $g(x) = 2x - cos(x)$. Utilizar una iteración de punto fijo para aproximar $x \in [1, 2]$ tal que satisfaga:

$$\int_0^x g(u)du = 1$$

Encontrar una función de punto fijo adecuada para asegurar la convergencia para cualquier $x_0 \in [1, 2]$.

¿Cuántas iteraciones necesita para aproximar el valor buscado con una presición de 10^{-3} si $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

Solución:

Calculando $\int_0^x g(u)du = \int_0^x 2u - cos(u)du = 1$ se tiene que $x^2 - sin(x) = 1$, por lo tanto planteando el esquema de punto fijo:

$$x = \sqrt{1 + sin(x)} \quad \Longrightarrow \quad h(x) = \sqrt{1 + sin(x)}$$

Para asegurar la convergencia en $[1, 2]$ se debe probar que h es contractiva en $[1, 2]$:

Problema 1

Hay que ver que sucede con $\sup_{x,y\in[1,2]} \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|}$:
Si $h(x)$ es diferenciable entonces es suficiente probar que $|h'(x)| \leq 1 \forall x \in [1,2]$.
Entonces, vemos que

$$|h'(x)| = \left|\frac{1}{2}\frac{cos(x)}{\sqrt{1+sin(x)}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{1+sin(x)}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in (1,2)$$

Por teorema del valor medio se tiene que existe $c \in (x,y)$ tal que

$$\frac{h(x)-h(y)}{x-y} = h'(z) \quad c \in (x,y)$$

entonces, se tiene que $\left|\frac{h(x)-h(y)}{x-y}\right| = |h'(c)| \leq \sup_{x\in(1,2)} |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$|h(x)-h(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y| \quad \forall x,y \in [1,2]$$

por lo tanto h es conractiva (al menos localmente en (1,2))

Problema 1

iterando con $x_{k+1} = h(x_k), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{llll}
x_1 = & 1.414214 & |x_1 - x_0| = & 0.156583 \\
x_2 = & 1.409882 & |x_2 - x_1| = & 0.004332 \\
x_3 = & 1.409637 & |x_3 - x_2| = & 0.000243 \\
x_4 = & 1.409625 & |x_4 - x_3| = & 0.000010 \\
x_5 = & 1.409621 & |x_1 - x_0| = & < 10^{-5} \\
x_1 = & 1.409620 & |x_1 - x_0| = & < 10^{-5}
\end{array}$$

para la 3ra iteración el error es menor al buscado.

Problema 2

Considerar $F(x) = exp(-x) - sin(x) - 2$.

a) Probar que $F(x)$ tiene única raíz negativa.

b) Determinar intervalo para que el método de Newton converja cuadráticamente y aproximar solución con precisión 10^{-5}.

c) ¿Converge el método para cualquier $x < 0$?

Solución:

a) Vemos que F es infinitamente diferenciable, en particular dos veces diferenciable. Notar que para $x > 0$ grande se tiene que $F(x) \approx -2 - sin(x)$ y para $x < 0$ muy negatrivos $F(x) \approx exp(-x) - 2$, en particular se tiene que $F(0) = -1$ y es más :

$$e^{-x} < 1 \iff x > 0 \Longrightarrow F(x) = e^{-x} - sin(x) - 2 \leq e^{-x} - 1 < 0 \quad \forall x > 0.$$

esto es, $F(x) < 0 \quad \forall x \geq 0$.

Problema 2

Luego, vemos para el otro sentido:

$$F(x) = e^{-x} - sin(x) - 2 \geq e^{-x} - 3 \Longrightarrow e^{-x} \geq 3 \iff x \leq -ln(3) \approx -1{,}1$$

en particular se cumple para $\frac{-\pi}{2}$. Entonces, considerando $[\frac{-\pi}{2}, 0]$ se tiene que $F(-\pi/2)F(0) \leq 0$ entonces, por Bolzano-Weierstrass se tiene que existe $x \in (-\pi/2, 0)$ tal que $F(x) = 0$.
Supongamos que existen al menos 2, $x_1, x_2 \in (-\pi/2, 0)$ tales que $F(x_1) = F(x_2) = 0$.
Esto es,

$$e^{-x_1} - sin(x_1) - 2 = e^{-x_2} - sin(x_2) - 2$$

notamos que $sin(x)$ es creciente en $[-\pi/2, 0]$, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 < x_2$, por tanto, $sin(x_1) < sin(x_2)$.
Luego,

$$e^{-x_1} - e^{-x_2} = sin(x_1) - sin(x_2) < 0$$

pero $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ por lo que se tiene una contradicción, se concluye que existe una única raíz negativa.

Problema 2

b) Vemos que $F'(x) = -e^{-x} - cos(x)$ es creciente en $[-\pi/2, 0]$ y $F'(0) = -2$, por lo tanto $F'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-\pi/2, 0]$, es más, es estrictamente negativa para todo x negativo.

$$F'(x) \leq -e^{-x} + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0]$$

en particular $F'(0) = -2$, entonces $F'(x) < 0$ para $x \leq 0$. Luego, el método de Newton converge y además converge cuadráticamente.
Utilizando el esquema de Newton: (estos números consideraron $x_0 = \pi/2$, considere $-\pi/2$).

$$x_{k+1} = x_k + \frac{e^{-x_K} - sin(x_k) - 2}{e^{-x_k} + cos(x_k)}$$

x_1 =-11.860635816101153	
x_2 =-10.860659899000618	
$\vdots$	
x_5 = -7.860881840800187	
$\vdots$	
x_{15} =-0.448672999462851	
x_{16} =-0.448671916351542	$\lvert x_{16} - x_{15}\rvert$ =1.083111308974871e-06

Problema 2

c) las condiciones de convergencia del método de Newton se satisfacen para cualquier $x < 0$.

Problema 3

Considerando $f(x) = (x-p)^3 h(x)$ con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $h(p), h'(p) \neq 0$. Es conocide que el método de Newton converege a la raíz $x = p$ de $f(x)$ linealmente.
Probar que

$$x_{k+1} = x_k - 3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge a la raíz cuadráticamente.

Solución:
Recordar que una la multiplicidad de una raíz es la potencia m si una función puede escribirse como $f(x) = (x-p)^m h(x)$ con $h(p) \neq 0$.
Vemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-p)^2 h(x) + (x-p)^3 h'(x) \\ &= (x-p)^2(3h(x) + (x-p)h'(x)) \\ &= (x-p)^2 h_2(x) \\ h_2(x) &= 3h(x) + (x-p)h'(x) \end{aligned}$$

vemos que $h_2(p) = 3h(p) \neq 0$

Problema 3

entonces se tiene que p es una raíz de $f'(x)$ con multiplicidad 2. Análogamente definimos $f''(x) = (x-p)h_3(x)$ y $f^{(3)}(x) = h_4(x)$.
Considerando el método de Newton como un esquema de punto fijo:

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

sustituyendo por $f(x) = (x-p)^3 h(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) \quad &= x - \tfrac{(x-p)^3 h(x)}{3(x-p)^2 h(x) + (x-p)^3 h'(x)} \\ &= x - \tfrac{(x-p)h(x)}{3h(x) + (x-p)h'(x)} \end{aligned}$$

se tiene que $g(p) = p$ y además que $g'(p) = \frac{2}{3}$. ahora considerando $g(x) = x - 3f(x)/f'(x)$ se tiene que $g'(p) = 0$
(más generalmente $g'(p) = 1 - \frac{1}{m}$ donde m es la multiplicidad de la raíz)

Problema 3

Considerando la expansión de Taylor

$$f(p) = f(x_k) + f'(x_k)(p - x_k) + \frac{1}{2}f''(\chi)(p - x_k)^2$$

para algún χ cerca de p, entonces, definiendo el error $e_n = x_n - p$:
$e_{n+1} = x_{n+1} - p \approx g(p) + g'(p)(x_n - p) - p + \frac{1}{2}g''(p)(x_n - p)^2$

$$e_{n+1} = g'(p)e_n + \frac{1}{2}g''(p)e_n^2 = \frac{1}{2}g''(p)e_n^2$$

por lo tanto se tiene que $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}g''(p)$ entonces se tiene la convergencia cuadrática.

Problema 4

COnsiderando la situación que un punto en $\mathbb{R}^2$ está definido como la intersección entre las curvas $f_1(x) = ax$ y $f_2(x) = \sqrt(x)$ con $a, x > 0$, Estudiar el problema de encontrar el parámetro a dada la coordenada x del punto de intersección.

Solución:
Vemos que $ax = \sqrt{x} \iff a = x^{-1/2}$ por lo tanto vemos el numero de condición relativo y absoluto considerando $f(x) = x^{-1/2}$:

$$\hat{\kappa}(x) = |f'(x)| = \frac{1}{2}x^{-3/2} \quad (absoluto)$$

$$\kappa(x) = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{2x} \quad (relativo)$$

Problema 5

Considerar la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

calcular $Cond_\infty(A)$, $Cond_1(A)$, $Cond_2(A)$

Solución:

$||A||_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n} \left|\sum_j^n |a_{i,j}|\right|$

$||A||_1 = \text{máx}_{1\leq j\leq n} \left|\sum_i^n |a_{i,j}|\right|$

$||A||_2 = \sqrt{tr[A^* A]}$

donde $Cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ entonces tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}25 & 1{,}375 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}, \quad A'A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 17 & 7 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$Cond_\infty = 4 \cdot 1{,}375$

Problema 5