Ayudantía 5 - Mat270

28 de mayo de 2021

Problema 1

Sea $f(x) = cos(x)$. Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange de f en los nodos $x - 0 = \pi/4$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$ y calcular el error de aproximación para $x \in (\pi/4, \pi)$.

Interpolador de Lagrange:

Dado un conjunto de $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots (x_n, y_n)$, entonces el interpolador de Lagange es:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

donde

$$l_i(x) = \Pi_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad l_i(x_i) = 1 \quad \wedge \quad l_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i$$

Problema 1

Construyendo el polinomio de interpolación de Lagrange:

x	$\pi/4$	$\pi/2$	π
f(x)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1

$$L(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_0)}$$

mas generalmente se puede resolver el problema lineal asociado a la matriz de Vandermonde definida por los puntos a interpolar.

Problema 1

$$
\begin{aligned}
L(x) = \quad & -\tfrac{8}{\sqrt{2}\pi^2}(x-\pi/2)(x-\pi) \\
& +0(x-\pi/4)(x-\pi) \\
& -\tfrac{8}{3\pi^2}(x-\pi/4)(x-\pi/2)
\end{aligned}
$$

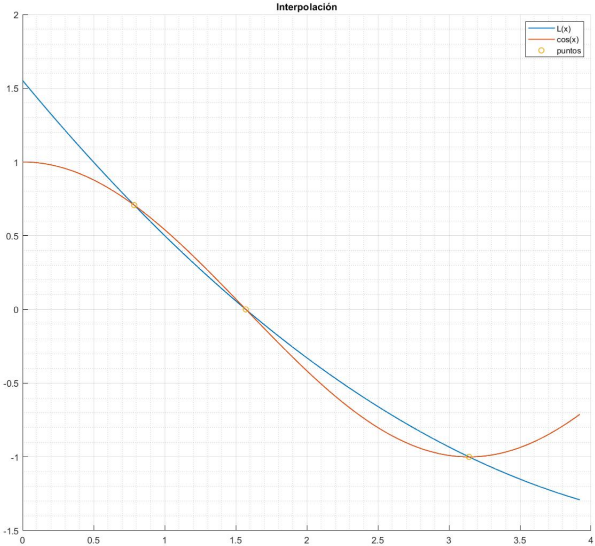
resolviendo la expreisón,

$$
L(x) = -\frac{6\sqrt{2}+1}{3} + \frac{6\sqrt{2}+2}{\pi}x - \frac{20\sqrt{2}}{3\pi^2}x^2
$$

Problema 1

Base de polinomios de Lagrange
l1
l2
l3
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Problema 1


Interpolación
L(x)
cos(x)
puntos
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Problema 2

Obtener el polinomio de interpolación de los puntos:

$$(0,-5), \quad (1,-3) \quad (2,1), \quad (3,13)$$

Utilizando la base de polinomios de Newton.

Interpolador de Newton

Dado un conjunto de $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \dots (x_n, y_n)$ y las diferencias divididas definidas recursivamente como:

$$y[j] = y_j, \quad y[j, \dots, k] = \frac{y[j+1, \dots, k] - y[j, \dots, k-1]}{x_k - x_j}$$

El polinomio de interpolación de Newton es:

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \lambda_n \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Problema 2

Calculando las diferencias divididas:

$$
\begin{array}{llll}
x_0 = 0 & y[0] = -5 & y[0,1] = \frac{y[1]-y[0]}{x_1-x_0} = 2 & y[0,1,2] = \frac{y[1,2]-y[0,1]}{x_2-x_0} = 1 \\
x_1 = 1 & y[1] = -3 & y[1,2] = \frac{y[2]-y[1]}{x_2-x_1} = 4 & y[1,2,3] = \frac{y[2,3]-y[1,2]}{x_3-x_1} = 4 \\
x_2 = 2 & y[2] = 1 & y[2,3] = \frac{y[3]-y[2]}{x_3-x_2} = 12 & \\
x_3 = 3 & y[3] = 13 & &
\end{array}
$$

finalmente

$$y[0,1,2,3] = \frac{y[1,2,3] - y[0,1,2]}{x_3 - x_0} = 1$$

entonces,

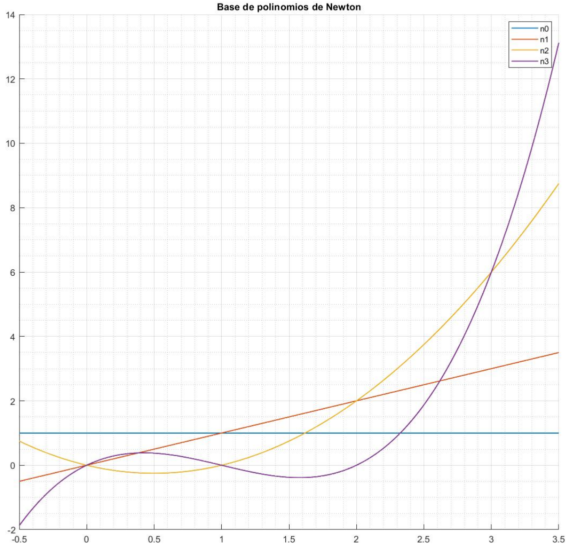
$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \quad -5 \\
\lambda_1 &= \quad 2 \\
\lambda_2 &= \quad 1 \\
\lambda_3 &= \quad 1
\end{aligned}
$$

Problema 2

Por lo tanto el polinomio de interpolación de Newton queda:

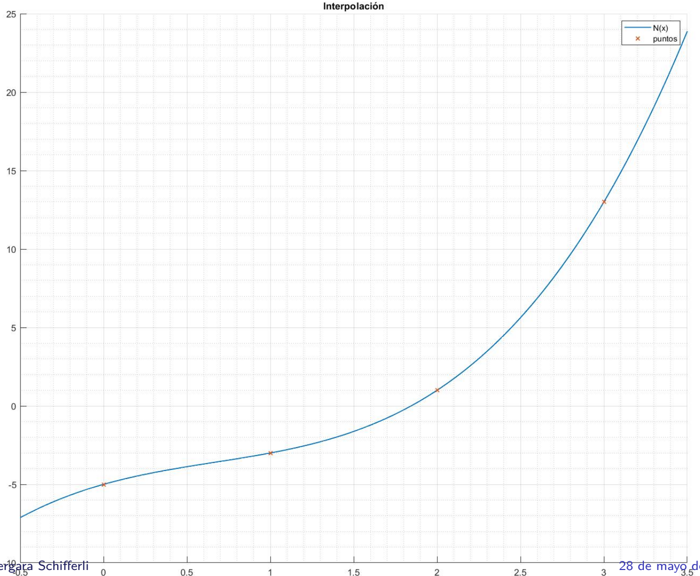
$$
\begin{aligned}
p(x) = \quad & -5 + 2(x-0) + 1(x-0)(x-1) \\
& +1(x-0)(x-1)(x-2) \\
= \quad & -5 + 3x - 2x^2 + x^3
\end{aligned}
$$

Problema 2



Base de polinomios de Newton
n0
n1
n2
n3
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Problema 2



Problema 3

Construir los polinomios interpolantes para las siguientes funciones y obtenga una cota del error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

1. $f(x) = \exp 2x \cos 3x$, $x = \{0; 0{,}3; 0,6\}$
2. $f(x) = \sin \ln x$, $x = \{2; 2{,}4; 2{,}6\}$
3. $f(x) = \ln x$, $x = \{1; 1,1; 1,3; 1,4\}$

Problema 3

1. $f(x) = \exp 2x \cos 3x$, $x = \{0; 0{,}3; 0,6\}$
$f(0) = 1, \quad f(0,3) \approx 1,13, \quad f(0,6) \approx -0,75,$
formulando el sistema matricial mediante la matriz de Vandermonde:
$p(x) = a + bx + cx^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}3^2 \\ 1 & 0{,}6 & 0,6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(0,3) \\ f(0,6) \end{pmatrix}$$

entonces $p(x) = 1 + 3,81x - 11,22x^2$

Problema 3

2. $f(x) = sin(ln(x))$, $x = \{2; 2{,}4; 2,6\}$
$f(2) \approx 0{,}64, \quad f(2{,}4) \approx 0{,}77, \quad f(2,6) \approx 0{,}82,$
formulando el sistema matricial mediante la matriz de Vandermonde:
$p(x) = a + bx + cx^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2{,}4 & 2{,}4^2 \\ 1 & 2{,}6 & 2,6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(2,4) \\ f(2,6) \end{pmatrix}$$

entonces $p(x) = -0{,}63 + 0,90x - 0{,}13x^2$

Problema 3

3. $f(x) = ln(x)$, $x = \{1; 1,1; 1,3; 1,4\}$
$f(1) = 0, \quad f(1,1) \approx 9,53e-2, \quad f(1,3) \approx 0{,}26, \quad f(1,4) \approx 0{,}33,$
formulando el sistema matricial mediante la matriz de Vandermonde:
$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}1 & 1{,}1^2 & 1{,}1^3 \\ 1 & 1{,}3 & 1{,}3^2 & 1{,}3^3 \\ 1 & 1{,}4 & 1{,}4^2 & 1{,}4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(1{,}1) \\ f(1{,}3) \\ f(1{,}4) \end{pmatrix}$$

entonces $p(x) = -1{,}67 + 2,53x - 1{,}06x^2 + 0{,}19x^3$

Problema 4

Con una función f las diferencias divididas progresiva están dadas por:

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0{,}4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0{,}7$	$f[x_2] = 6$		

Determinar los datos que faltan en la tabla.

Problema 5

Sea $f(x) = x^{n-1}$ para $x \geq 1$. Encontrar $f[x_1, \ldots, x_n]$ y $f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Donde $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$, son números distintos.