Ayudantía 7 - Mat044

4 de noviembre de 2021

Problema 1

Considerar la función de densidad Gumbell

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} \exp(-e^{-(x-\theta)}), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0$$

entonces, si X es Gumbell:

1. Escribir la densidad de la v.a. $Z = X - \theta$
2. Calcular la función generadora de momentos $M_Z(t)$
3. Calcular $E(X) = M'_X(t)|_{t=0}$

Para esto, considerar la cunción Gammma:

$$(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du, \quad a > 0$$

y la constante de *Euler-Mascheroni:* $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0{,}577216$

Realizando el cambio de variable $z = x - \theta$

$$f(z) = e^{-z} exp(-e^{-z})$$

Entonces, la MGF de Z:

$$M_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} e^{-z} exp(-e^{-z}) dz$$

considerando el cambio de variable $y = e^{-z}$, $dy = -e^{-z} dz$,

$$M_Z(t) = \int_0^\infty y^{-t} e^{-y} dy = \int_0^\infty y^{(1-t)-1} e^{-y} dy$$

viendo que el último término corresponde a la función Gamma:

$$\int_0^\infty y^{(1-t)-1} e^{-y} dy = \Gamma(1-t)$$

por lo tanto,

$$M_Z(t) = \Gamma(1-t)$$

Finalmente, como $M_Z(t) = \Gamma(1-t)$

$$E(Z) = M_Z'(t)|_{t=0} = \Gamma'(1-t)\frac{d}{dt}(1-t) = -\Gamma'(1-t)|_{t=0}$$

por lo tanto,

$$E(Z) = -\Gamma'(1) = \gamma$$

Considerando que $Z = X - \theta$, se tiene que

$$E(Z) = E(X-\theta) = E(X) - \theta$$

entonces,

$$E(X) = \gamma + \theta$$

Problema 2

Considerando $Y \sim Exp(\lambda)$ tal que $Var(Y) = 25$.

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

- Calcular $E(Y)$
- Calcular $E(Y^2)$
- Deducir el parámetro λ de Y
- Calcular $P(Y > 5)$

Tenemos que

$$E(Y) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Cambiando la variable $x\lambda = z$ se tiene

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

Integrando por partes:

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} dy = (-e^{-y} y)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-y} dy = 1$$

entonces,

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

Para el segundo momento:

$$E(Y^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

utilizando el mismo cambio de variable se obtiene

$$E(Y^2) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = (-e^{-y} y^2)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -2ye^{-y} dy$$

entonces del calculo para la esperanza se tiene:

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = 2 \int_0^\infty ye^{-y} dy = 2$$

por lo tanto,

$$E(Y^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Finalmente,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

por lo tanto, si $V(Y) = 25 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$.

Luego,

$$P(Y > 5) = 1 - F_Y(5)$$

donde

$$F_Y(x) = \int_0^x \lambda e^{-y\lambda} dy = 1 - e^{-\lambda x}$$

entonces $F_Y(5) = 1 - e^{-\frac{1}{5}5} \approx 0{,}63$ y finalmente

$$P(Y > 5) \approx 0{,}37$$

Problema 3

Considerando $X \sim Erlang(n, \lambda)$ con $\lambda = 1/3$ y $E(X) = 15$ con densidad

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0$$

Además, se tiene que si $X_i \sim^{iid} Exp(\lambda)$ entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim Erlang(k, \lambda)$

- Obtener el parámetro n
- Calcular $V(X)$

De lo anterior podemos asumir que si $Z_i \sim^{idd} Exp(\lambda)$ entonces $\sum Z_i \stackrel{d}{=} X$.

Recordando que

$$F_X(x; n, \lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^n$$

entonces

$$P(X > x) = 1 - F_X(x; n, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^n$$

lo cual queda como una CDF de una v.a. $poisson(\lambda x)$