Ayudantía 8 - Mat044

10 de noviembre de 2021

Considerar la v.a. $X_1 \sim Bernoulli(p)$ que describe el evento de obtener un voto.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener el voto de la persona X con este modelo?
- Considerando un grupo de 7 personas, cuál es la probabilidad de obtener 5 o más votos?
- Considerando 1000 de personas, ¿Cuál es la probabilidad aproximada de obtener más de 510 votos?

De lo anterior, obtener la función de distribución, densidad, esperanza y varianza considerando $p = 0{,}517$

Considerando el primer caso, recordando que para una distribución Bernoulli se tiene que su función de probabilidad es

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Luego, su esperanza $E(X) = p$ y su varianza $V(X) = p(1 - p)$. Entonces, la probabilidad de obtener el voto de la persona X es $P(X = 1) = p = 0{,}517$.

En particular, se tiene que

- $E(X) = 0{,}0517$
- $V(X) = 0{,}2497$

En cuanto al segundo caso, considerando $X = \sum X_i$ donde $X_i \sim Bernoulli(p)$ los votos individuales, se tiene que

- $X = \sum_{i=1}^{7} X_i \sim Bin(7, p)$

Recordando la función de probabilidad de una Binomial:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener 5 o más votos estaría dada por

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{7} \binom{7}{x} p^x (1-p)^{7-x}$$

que es aproximadamente:

$$P(X \geq 5) = 0{,}25554$$

Recordando la esperanza y varianza de una binomial:

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

para el caso anterior $(n = 7,\ p = 0,517)$ se tiene que

- $E(X) = 3{,}619$
- $V(X) = 1{,}748$

En cuanto al caso para 1000 votos, se tiene que

$$P(X = x) = \binom{1000}{x} 0{,}517^x 0{,}483^{1000-x}$$

Calcular esto es poco práctico, por lo que recurrimos al teorema del límite central:

Definiendo $X_n =_i$ con $n = 1000$, se tiene que $E(x_i)$ y $V(X_i)$ son finitas para todo i, con $X_i \sim^{iid} Bernoulli(p)$, es decir $X_n \sim Bin(n, p)$, definimos la nueva v.a.

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

por lo tanto, se tiene que $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$, considerando que n es suficientemente grande, podemos aproximar nuestro problema considerando distribución normal, donde

- $np = 517$
- $\sqrt{np(1-p)} = 15, 80$

Por lo tanto, se tiene que

$$X_n = np + \sqrt{np(1-p)}Z_n$$

luego,

$$X_n \xrightarrow{d} np + \sqrt{np(1-p)}Z \sim N(np, np(1-p))$$

con $Z \sim N(0,1)$.

Entonces,

$$P(Z_n \leq x) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right)$$

o bien,

$$P(X_n \leq np + \sqrt{np(1-p)}x)$$

Esta cantidad la aproximamos como:

$$P(Z_n \leq x) \approx P(Z \leq x)$$

Considerando que se quiere obtener la cantidad

$$P(X_n \leq 510)$$

se tiene para el x anterior

$$np + \sqrt{np(1-p)}x = 510 \iff x = -0{,}443$$

$$\int_{-\infty}^{-0{,}443} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0{,}3289$$

Entonces,

$$P(X_n \geq 510) = 1 - P(X_n \leq 510) \approx 0{,}6711$$

Considerar la v.a. $X \sim U[a, b]$ con $0 \leq a < b$, obtener los siguientes valores:

- $E(X)$
- $E(X^2)$
- $V(X)$
- $P(X > \lambda b + (1 - \lambda)a)$ con $\lambda \in [0, 1]$

La densidad de $U[a,b]$ es $1/(b-a)$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

recordando que $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$ entonces $E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(b-a)^2}{4}$$

entonces, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$P(X > (1-\lambda)a + \lambda b), \quad \lambda \in [0,1]$$

$$P(X > (1-\lambda)a + \lambda b) = 1 - P(X \leq (1-\lambda)a + \lambda b)$$

luego,

$$P(X \leq (1-\lambda)a + \lambda b) = \int_a^{(1-\lambda)a+\lambda b} \frac{1}{b-a} dx$$
$$= \frac{(1-\lambda)a + \lambda b - a}{b-a} = \frac{\lambda(b-a)}{b-a} = \lambda$$

entonces,

$$P(X > (1-\lambda)a + \lambda b) = 1 - \lambda$$

Considerando ahora $a = 0$, y $0 < b < \infty$, obtener las cantidades anteriores, y calcular la distribución de $Z = \max\{X, Y\}$ con $X \sim U[0, b]$, $Y \sim U[0, b]$ y $X \perp Y$, esto es,

- $F_Z(x) = P(Z \leq x)$

Luego, calcular $E(Z)$ y $V(Z)$, posteriormente comparar con X: $E(Z)/E(X)$ y $V(Z)/V(X)$

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\text{máx}\{X, Y\} \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x)$$

Como $X \perp Y$ se tiene que

$$P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = F_X(x)F_Y(x) = \frac{x}{b}\frac{x}{b}$$

Entonces, $F_Z(x) = x^2/b^2$, luego la función de densidad es $\frac{dF_Z}{dx}(x) = 2x/b^2$

Vemos que en efecto, es densidad de probabilidad:

$$\int_0^b 2x/b^2 dx = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{2} = 1.$$

$$E(Z) = \int_0^b x \cdot \frac{2x}{b^2} dx = b\frac{2}{3}$$

$$V(Z) = \int_0^b x^2 \cdot \frac{2x}{b^2} dx = \frac{b^2}{18}$$

considerando $X \sim U[0, b]$ entonces $E(X) = b/2$ y $V(X) = b^2/12$

$$\frac{E(Z)}{E(X)} = 4/3$$

$$\frac{V(Z)}{V(X)} = 2/3$$

entonces, teniendo 2 oportunidades de una uniforme y quedándose con la mejor, se tiene una esperanza $\frac{1}{3}$ más alta y una varianza en $\frac{1}{3}$ más baja!