Ayudantía 5 - Mat044

12 de octubre de 2021

Probabilidad Condicional

Para dos eventos A,B la probabilidad condicional a que A ocurra dado que B ha ocurrido se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad Total

Considerando $\{E_i\}_i^k$ una partición de Ω. Entonces para cualquier evento A se tiene que

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|E_i)P(E_i)$$

($\sum_i P(E_i) = 1$ es la probabilidad total, entonces se realiza una suma ponderada por su probabilidad de ocurrencia.)

Regla de Bayes

Si $\{E_i\}_i^k$ es una partición de Ω, entonces:

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Modelos de probabilidad discreta

Considerando la notación: $P(X = x) = p(x)$ y considerando X, Y variables aleatorias y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que :

1. $\sum_x p(x) = 1$
2. $E(X) = \sum_x xp(x)$
3. $E(g(x)) = \sum_x g(x)p(x)$
4. $E((x-\mu)^2) = \sum_x (x-\mu)^2 p(x)$
5. $E(\lambda x + y) = \lambda E(x) + E(y)$
6. $V(x) = E((x - E(x))^2) = E(x^2) - E(x)^2$
7. $V(\lambda x) = \lambda^2 V(x)$

donde $p(x)$ es la distribucio´n de X y $F_X(x) = P(X \leq x)$ su función de distribución.

Variables aleatorias discretas

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. diremos que es discreta si $Rec(X)$ es discreto.

1) $P(X = k) \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$
2) $\sum_{k \in \mathbb{R}} P(X = k) = 1$
3) $P(X \in B) = \sum_{k \in B} P(X = k)$

Considerando un dado cargado de 6 caras, la v.a. sería el número del dado, entonces $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donde su función de probabildad está dada por

$$p(x) = c \cdot 0{,}7^{x} \cdot 0{,}3^{6-x}, \ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Calcular c
- Realizar una tabla para la funcón de probabilidad y su distribución F.
- Calcular $P(x \in \{2, 3, 4\})$ y $P(x > 2)$

Como $p(x) = c0{,}7^x 0{,}3^{6-x}$ es la distribución de probabilidad de x, se tiene que $\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1$, entonces:

$$p(1) = c0{,}7^1 0{,}3^5 = 0{,}001701c$$
$$p(2) = c0{,}7^2 0{,}3^4 = 0{,}003969c$$
$$p(3) = c0{,}7^3 0{,}3^3 = 0{,}009261c$$
$$p(4) = c0{,}7^4 0{,}3^2 = 0{,}021609c$$
$$p(5) = c0{,}7^5 0{,}3^1 = 0{,}050421c$$
$$p(6) = c0{,}7^6 0{,}3^0 = 0{,}117649c$$

Entonces, se tiene que $\sum p(x) = 0{,}20461c = 1$, por lo tanto, $c = 4{,}8873$.

$$p(x) = 4{,}8873 \cdot 0{,}7^x \cdot 0{,}3^{6-x}$$

Tablita

X	p(x)	F(x)
1	0.83 %	0.83 %
2	1.94 %	2.77 %
3	4.53 %	7.3 %
4	10.56 %	17.86 %
5	24.64 %	42.50 %
6	57.50 %	100 %

Luego,

$$P(x \in \{2,3,4\}) = P(2 \leq x \leq 4) = \sum_{x=2}^{4} p(x) = 17{,}03\,\%$$

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F(2) = 97{,}23\,\%$$

Utilizando los valores anteriores, agregamos los valores pertinentes para calcular $E(x)$ y $V(x)$:

X	p(x)	xp(x)	(x - E(x))^2	(x - E(x))$^2 p(x)$
1	0.83 %	0.83 %	18.40	15.27 %
2	1.94 %	3.88 %	10.82	20.99 %
3	4.53 %	13.59 %	5.24	23.74 %
4	10.56 %	42.24 %	1.66	17.53 %
5	24.64 %	123.20 %	0.08	1.97 %
6	57.50 %	345.00 %	0.50	28.75 %

Modelo de probabildiad Bernoulli

Para una v.a. $X \in \{0, 1\}$ binaria, donde puede interpretarse como $1 =$ éxito y $0 =$ fracaso.

Se tiene que X sigue un modelo Bernoulli ssi su distribución está dada como $p(x) = p^x(1-p)^{x-1}$ y se expresa como

$$X \sim Bernoulli(p) \quad p(x) = p^x(1-p)^{x-1}$$

donde p es la probabilidad de éxito.

Entonces, calculando su esperanza y varianza:

$p(1) = p, p(0) = 1 - p$, entonces $p(1) + p(0) = 1$, por lo tanto es función de probabilidad.

$E(x) = p$, luego

$$V(x) = \sum_x (x - E(x))^2 p(x) = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)$$

Finalmente:

$$X \sim Ber(p) \Rightarrow E(x) = p,\, yV(x) = p(1-p)$$

$X \sim Poisson(\lambda)$ entonces su función de probabilidad está dada por

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

para valores de $k = 0, 1, 2 \ldots$ con $\lambda > 0$ donde $E[X] = \lambda$ y $V[X] = \lambda$.
Este modelo de probabilidad considera un intervalo de tiempo fijo en el cual al probabilidad de ocurrencia de un fenómeno es λ.

Evaluación de Seguro

Una pyme posee una flota de 12 colectivos, cada uno de estos avaluado en $\$15MM$ de pesos, debido a que la pyme posee poco años y la cantidad de accidentes ha aumentado, la empresa ha decidido contratar un seguro contra accidentes, principalmente para accidentes graves y/o de pérdida total. La empresa aseguradora Seguros 18 de octubre, posee varios tipos de seguros.

El primero es un seguro por el cual paga solamente la cuota mensual y no posee deducible en caso de accidente, este consiste en una cuota mensual de \$70.000 por cada vehículo. Mientras que el segundo corresponde a un seguro más económico, sin embargo, en caso de querer arreglar el vehículo se debe pagar un deducible de \$700.000, sumado al pago del seguro mensual que equivale a \$15.000 por automóvil. La aseguradora solo cubre hasta 6 siniestros durante el año, y tal como le ha explicado a la empresa, los siniestros siguen una distribución Poisson(4).

Evaluación de Seguro

Lamentablemente para la pyme, aparte del seguro existen ciertos gastos que no puede omitir, los cuales consisten en costos extras en caso de cada accidente por un total de \$400.000. Aparte de esto, existe un costo de oportunidad de \$20.000 diarios, y tal como sabe la empresa, el costo de reposición de un automóvil equivale al 50 % de \$15 MM de pesos y el promedio de días para el arreglo equivale a 5 días cuando le corresponde a la empresa.

Sin embargo, la aseguradora le explica que ellos cubren los gastos extras de hasta 6 siniestros, mientras que el costo de oportunidad no es cubierto por ellos y le explican que tardarán 10 días en reparar sus vehículos.

Entonces, ¿Qué le conviene a la empresa?

En resumen

Para la empresa:

- Se tienen 12 colectivos cada uno avaluado en \$15 MM.
- Los siniestros se modelan de acuerdo a un modelo de probabilidad Poisson(4).
- Por cada accidente hay un costo de \$400.000.
- Se tiene un costo de oportunidad de \$20.000 diarios, para vehículos fuera de circulación.
- Tarda 5 días por arreglo.
- El costo de reposición de vehículo es del 50 % del valor.

En resumen

Seguro 1

- Sin deducible.
- Cuota mensual de \$70.000 por vehículo.
- Cobertura: 6 siniestros.

Seguro 2

- Deducible de \$700.000.
- Cuota mensual de \$15.000 por vehículo.
- Cobertura: 6 siniestros.

Aseguradora cubre gastos extra de hasta 6 siniestros, no cubre el costo de oportunidad y tardarán 10 días en reparar un vehículo.