Ayudantía 10 - Mat044

24 de noviembre de 2021

Ejercicio 2

Una compañía de taxis está tratando de decidir si compra la marca A o la B de neumáticos para su flota. Para estimar la diferencia entre las dos marcas, se lleva a cabo un experimento con 12 neumáticos de cada marca. Para esto, se usaron hasta su agotamiento:

Marca	Media [Km]	std. [Km]
A	36.300	5.00
B	38.100	6.100

- Calcular un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, suponiendo que ambas poblaciones son normales y homocedásticas.

Considerando que $X_A \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ y $X_B \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ además se tiene que podemos suponer que $X_A \perp X_B$ entonces $X_A - X_B \sim N(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma^2)$.

Considerando que

$$\bar{X}_A \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_A) \ y \ \bar{X}_B \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_B)$$

entonces ,

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(1/n_A + 1/n_B))$$

luego, considerando el estimador ponderado de la varianza:

$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

por lo tanto se tiene el estadístico t:

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_p\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \sim t(n_A + n_B - 2)$$

Se desea buscar un intervalo de confianza: a un nivel α:

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \sim t(n_A + n_B - 2)$$

donde $\bar{X}_A - \bar{X}_B = -1{,}800$ y $S_p = 5{,}577$ entonces,

$$\frac{-1{,}800 - (\mu_1 - \mu_2)}{2{,}277} \sim t(22)$$

por lo tanto se tiene un intervalo del tipo

$$1{,}800 - 2{,}277 t_{\alpha/2}(22) \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 1{,}800 + 2{,}277 t_{\alpha/2}(22)$$

Ejercicio 2

Encontrar un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, si se asigna un neumático de cada compañía en forma aleatoria a las reudas traseras de ocho taxis y se registra, en Km las siguientes distancias:

Taxi	Marca A	Marca B
1	34.400	36.700
2	45.500	46.800
3	36.700	37.700
4	32.000	31.100
5	48.400	47.800
6	32.800	36.400
7	38.100	38.900
8	30.100	31.500

Al igual que el caso anterior, calculamos las cantiades:

$$\bar{X}_A = 37{,}250, \quad \bar{X}_B = 38{,}363$$

$$s_A = 6{,}547, \quad s_B = 6{,}181$$

donde $n_A = n_B = 8$ por lo que se tiene el intervalo del tipo:

$$\mu_2 - \mu_1 \in 1{,}113 \pm 3{,}183 t_{\alpha/2}(12)$$

Ejercicio 3

Dos tipos diferentes de aleación, A y B, se han utilizado para fabricar especímenes experimentales de un pequeño eslabón de tensión, empleado en cierta aplicación de ingeniería. Se determinó la resistencia máxima (en ksi) de cada espécimen y los resultados se resumen en la siguiente tabla de distribución de frecuencia.

	A	B
26-30	6	4
30-34	12	9
34-38	15	19
38-42	7	10
TOTAL	40	42

Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia entre las proporciones reales de todos los especímenes de aleaciones A y B que tengan una resistencia máxima de por lo menos 34 [ksi] hay que obtener las proporciones muestrales:

$$\hat{p}_A = \frac{15+7}{40} = 0{,}55, \;\; y \; \hat{p}_B = \frac{19+10}{42} = 0{,}69$$

luego se tiene el estadístico T :

$$T = \frac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - (p_A - p_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{n_B}}} \sim F \xrightarrow{d} N(0,1)$$

es decir, se tiene que T se distribuye $N(0,1)$ asintóticamente, por lo tanto, llenando numerítos:

$$T = \frac{-0{,}14 - (p_A - p_B)}{0{,}106}$$

entonces, considerando un $\alpha = 0{,}05$ se tienen los Z-cuantiles:

$$|Z_{0{,}025}| = |Z_{0{,}975}| = 1{,}96$$

$$P\left(\frac{-0{,}14-(p_A-p_B)}{0{,}106}\leq Z_{0{,}025}\right)=0{,}025$$

$$P\left(\frac{-0{,}14-(p_A-p_B)}{0{,}106}\geq Z_{0{,}975}\right)=0{,}025$$

$$P\left(\frac{-0{,}14-(p_A-p_B)}{0{,}106}\leq -1{,}96\right)=0{,}025$$

$$P\left(\frac{-0{,}14-(p_A-p_B)}{0{,}106}\geq 1{,}96\right)=0{,}025$$

$$P\left(-1{,}96\leq\frac{-0{,}14-(p_A-p_B)}{0{,}106}\leq 1{,}96\right)=0{,}95$$

entonces,

$$-0{,}348\leq(p_A-p_B)\leq 0{,}068 \text{ ,con 95 \% de confianza}$$