Ayudantía 4 - Mat043

7 de octubre de 2021

Modelos de probabilidad discreta

Considerando la notación: $P(X = x) = p(x)$ y considerando X, Y variables aleatorias y $\lambda \in \mathbb{R}$, entocnes se tiene que :

1. $\sum_x p(x) = 1$
2. $E(X) = \sum_x xp(x)$
3. $E(g(x)) = \sum_x g(x)p(x)$
4. $E((x-\mu)^2) = \sum_x (x-\mu)^2 p(x)$
5. $E(\lambda x + y) = \lambda E(x) + E(y)$
6. $V(x) = E((x - E(x))^2) = E(x^2) - E(x)^2$
7. $V(\lambda x) = \lambda^2 V(x)$

donde $p(x)$ es la distribucio´n de X y $F_X(x) = P(X \leq x)$ su función de distribución.

Variables aleatorias discretas

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. diremos que es discreta si $Rec(X)$ es discreto.

1) $P(X = k) \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$
2) $\sum_{k \in \mathbb{R}} P(X = k) = 1$
3) $P(X \in B) = \sum_{k \in B} P(X = k)$

Considerando un dado cargado de 6 caras, la v.a. sería el número del dado, entonces $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donde su función de probabildad está dada por

$$p(x) = c \cdot 0{,}7^x \cdot 0{,}3^{6-x}, \ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Calcular c
- Realizar una tabla para la funcón de probabilidad y su distribución F.
- Calcular $P(x \in \{2, 3, 4\})$ y $P(x > 2)$

Como $p(x) = c0{,}7^x 0{,}3^{6-x}$ es la distribución de probabilidad de x, se tiene que $\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
p(1) &= c0{,}7^1 0{,}3^5 = 0{,}001701c \\
p(2) &= c0{,}7^2 0{,}3^4 = 0{,}003969c \\
p(3) &= c0{,}7^3 0{,}3^3 = 0{,}009261c \\
p(4) &= c0{,}7^4 0{,}3^2 = 0{,}021609c \\
p(5) &= c0{,}7^5 0{,}3^1 = 0{,}050421c \\
p(6) &= c0{,}7^6 0{,}3^0 = 0{,}117649c
\end{aligned}
$$

Entonces, se tiene que $\sum p(x) = 0{,}20461c = 1$, por lo tanto, $c = 4{,}8873$.

$$p(x) = 4{,}8873 \cdot 0{,}7^x \cdot 0{,}3^{6-x}$$

Tablita

X	p(x)	F(x)
1	0.83 %	0.83 %
2	1.94 %	2.77 %
3	4.53 %	7.3 %
4	10.56 %	17.86 %
5	24.64 %	42.50 %
6	57.50 %	100 %

Luego,

$$P(x \in \{2, 3, 4\}) = P(2 \leq x \leq 4) = \sum_{x=2}^{4} p(x) = 17{,}03\,\%$$

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F(2) = 97{,}23\,\%$$

Utilizando los valores anteriores, agregamos los valores pertinentes para calcular $E(x)$ y $V(x)$:

X	p(x)	xp(x)	(x - E(x))^2	(x - E(x))$^2 p(x)$
1	0.83 %	0.83 %	18.40	15.27 %
2	1.94 %	3.88 %	10.82	20.99 %
3	4.53 %	13.59 %	5.24	23.74 %
4	10.56 %	42.24 %	1.66	17.53 %
5	24.64 %	123.20 %	0.08	1.97 %
6	57.50 %	345.00 %	0.50	28.75 %

Considerando la función $p : X \to \mathbb{R}$ como:

$$p(x) = \begin{cases} a/3 & si\ x = -1 \\ 5/9 & si\ x = 2 \\ a/3 & si\ x = 3 \\ a^2 & si\ x = 4 \\ a/3 & si\ x = 7 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Donde $X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Encontrar el valor de a para que p sea una función de probabilidad y obtener $F_X(x) = P(X \leq x)$ su función de distribución.

Luego, calcular los siguientes

- $E[x]$
- $V[x]$
- $P(x > 3)$
- $P(x > 2 | x \geq 1)$

Modelo de probabildiad Bernoulli

Para una v.a. $X \in \{0, 1\}$ binaria, donde puede interpretarse como 1 = éxito y 0 = fracaso.

Se tiene que X sigue un modelo Bernoulli ssi su distribución está dada como $p(x) = p^x(1-p)^{x-1}$ y se expresa como

$$X \sim Bernoulli(p) p(x) = p^x(1-p)^{x-1}$$

donde p es la probabilidad de éxito.

Entonces, calculando su esperanza y varianza:

$p(1) = p, p(0) = 1 - p$, entonces $p(1) + p(0) = 1$, por lo tanto es función de probabilidad.

$E(x) = p$, luego

$$V(x) = \sum_x (x - E(x))^2 p(x) = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)$$

Finalmente:

$$X \sim Ber(p) \Rightarrow E(x) = p,\ y V(x) = p(1-p)$$