Ayudantía 2 - Mat044

23 de abril de 2021

Espacio de Probabilidad

Para un espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- Ω: espacio muestral
- $\mathcal{F}$: sigma álgebra, $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{F}$ son eventos.
- P: medida de Probabilidad $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$

$\sigma-$Álgebra

Para una $\sigma-$Álgebra sobre Ω:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (de lo anterior se concluye que $\Omega \in \mathcal{F}$)
3. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Por leyes de Morgan se concluye también que:
$\cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow (\cup A_n)^c \in \mathcal{F}$ donde $(\cup A_n)^c \iff \cap A_n^c$.
Ejemplo de sigma álgebra:
Conjunto de las partes $\mathcal{P}(\Omega)$
$\sigma-$Álgebra trivial $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Medida de Probabilidad

$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Sigma aditividad:
   $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos ($A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$)

$$P(\cup_{\mathbb{N}} A_n) = \sum_{\mathbb{N}} P(A_n)$$

Medida de Probabilidad

De lo anterior se pueden concluir otras propiedades:

1. $P(A^c) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$
3. $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ se tiene que
   $P(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_n) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots (-1)^n P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$

Medida de Probabilidad

De lo anterior se pueden concluir otras propiedades:

4. P es no decreciente: Para eventos A, B si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
5. P es subaditiva: Para eventos $(A_n)_{n\geq 1}$ se tiene :

$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

Probaremos 1,2,4 y 5:

1. $P(A^c) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$

Tenemos que $P(\Omega) = 1$, entonces reescribiendo Ω como $A \cup A^c$: $P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A^c) + P(A)$ pues $A^c \cap A = \emptyset$, entonces se concluye que $P(A^c) = 1 - P(A)$ ∎

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$

Sabiendo que :

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \\
P(B) &= P(B \cap A^c) + P(B \cap A)
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)) \\
&= P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) + P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

pues $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$,

4. P es no decreciente: Para eventos A, B si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Como $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ y se tiene que $P(C) \geq 0 \quad \forall C \in \mathcal{F}$, entonces $P(B \setminus A) \geq 0$ y se concluye que $P(A) \leq P(B)$ ▪

5. P es subaditiva: Para eventos $(A_n)_{n\geq 1}$ se tiene :

$$P(\cup_{n\geq 1}A_n) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

reescribiendo el término $\cup_{n\geq 1}A_n = A_1 + A_1^c \cap A_2 + A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c + \dots,$ tomando medida de probabilidad :

$$P(\cup_{n\geq 1}A_n) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) + \dots$$

por la sigma actividad, luego utilizando que P es no decreciente se obtiene que

$$\begin{aligned} P(\cup_{n\geq 1}A_n) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) + \dots \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots \end{aligned}$$

Independencia

Definición (Independencia)

Dos eventos A *y* B *son independientes* $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Probaremos que si A y B son independientes entonces A y B^c, A^c y B^c también son independientes.

$A \perp B \Rightarrow A^c \perp B^c$: Sabemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces hay que ver que sucede con $P(A^c \cap B^c)$: notamos que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
&= P(A^c)P(B^c) \,\blacksquare
\end{aligned}
$$

$A \perp B \Rightarrow A \perp B^c$:
$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B^c)) = P(A) - P(A)P(B^c)$, por otro lado se tiene que $A \cap B^c = A \setminus A \cap B$ y $A \cap B \subset A$, entonces tomando probabilidad se tiene que $P(A \cap B) \leq P(A)$ por lo tanto
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.
Juntando ambos resultados se tiene que
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - (P(A) - P(A)P(B^c)) = P(A)P(B^c)$ ▮

Probabilidad condicional

Definición (Probabilidad Condicional)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ con } P(B) > 0.$$

1. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$, análogamente $P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$ entonces $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.
2. Considerando $P(A^c|B) = \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$.
3. $A \perp B \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

muchas def y demostraciones..

Ejercicios:

1) En la UTFSM el 60 % de los sansanos ven monos chinos y el 80 % tiene cuenta de Netflix. Además el 50 % tiene Netflix y ve monos chinos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un sansano vea monos chinos o tenga cuenta en Netflix?

b. ¿Cuál de la probabilidad de que vea monos chinos y tenga Netflix?

2) En un lanzamiento de 2 dados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor o igual a 3? ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor o igual 4?

3) En un estante del Unimarc que tiene 50 paquetes de galletas tritón, hay 2 que tienen elementos extraños. Si se sacan 5 paquetes (sin reposición) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga algún elemento extraño? Dado que sacó un paquete con elementos extraños ¿Cuál es la probabilidad de que no saque más paquetes con elementos extraños?

4) Al lanzar 1 dado dos veces, defina dos eventos: $A := \{$ la suma de los dados sea 7$\}$ y $B := \{$el segundo dado sea par$\}$. Calcular la probabilidad de ambos eventos y determinar si son independientes.

5) Si en una casa viven 2 mascotas, ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean macho?, si una es macho ¿Cuál es la probabilidad de que la otra sea macho?.