Ayudantía 7 - Mat044

18 de junio de 2021

Distribución Normal

Considerando una muestra aleatoria de tamaño n iid $N(\mu, \sigma^2)$
Si consideramos $X = \sum x_i$ entonces

$$E(X) = E(\sum x_i) = \sum E(x_i) = \sum \mu = n\mu$$

luego, al considerar $X = \frac{1}{n} \sum x_i$ tenemos que

$$E(X) = E(\frac{1}{n} \sum x_i) = \frac{1}{n} \sum E(x_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \mu$$

por lo tanto,
el promedio $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ es un **estimador** de μ que tiene esperanza $E(\bar{x}) = \mu$

si $E(\bar{x}) = \mu$, ¿Cuál será su varianza?

$$V(\bar{x}) = V(\frac{1}{n}\sum x_i) = \frac{1}{n^2}V(\sum x_i)$$

luego,

$$V(\sum x_i) = E\left(((x_1 + x_2 + ...x_n) - n\mu)^2\right)$$
$$= E\left((x_1 + x_2 + ...x_n)^2 - 2n\mu(x_1 + x_2 + ... + x_n) + n^2\mu^2\right)$$
$$= E((x_1 + x_2 + ... + x_n)^2) - 2n^2\mu^2 + n^2\mu^2$$
$$= E((x_1 + x_2 + ... + x_n)^2) - n^2\mu^2$$

y con binomio de newton se puede seguir.... pero una forma más elegante y sencilla a continuación utilizando la covarianza:

$$Cov(x,y) = E((x - E(x))(y - E(y)))$$

se tiene el caso partiuclar :

$$V(x) = E((x - E(x))^2) = Cov(x,x)$$

además se tiene entre otras propiedades:

$$Cov(ax,y) = aCov(x,y)$$

$$Cov(x+z,y) = Cov(x,y) + Cov(z,y)$$

Luego, si x es independiente de y
$Cov(x,y) = E((x - E(x))(y - E(y))) = E(xy - E(x)y - xE(y) + E(x)E(y))$
cuando se tiene independencia $E(xy) = E(x)E(y)$ entonces $Cov(x,y) = 0$.

De lo anterior se tiene que

$$Cov(\sum x_i, \sum x_i) = \sum_k Cov(x_k, \sum x_i) = \sum_k \sum_h Cov(x_k, x_h)$$

como $x_i \perp x_k \quad \forall i \neq k \implies Cov(x_i, x_k) = 0 \quad \forall i \neq k$ por lo tanto se tiene

$$\sum_k \sum_h Cov(x_k, x_h) = \sum_k Cov(x_k, x_k) = \sum_k V(x_k) = \sum_k \sigma^2 = n\sigma^2$$

finalmente al considerar

$$Cov(\frac{1}{n}\sum x_i, \frac{1}{n}\sum x_i) = \frac{1}{n} Cov(\sum x_i, \frac{1}{n}\sum x_i) = \frac{1}{n^2} Cov(\sum x_i, \sum x_i)$$

concluyendo que

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Entonces, si $x_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ tenemos para $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$

$$E(\bar{x}) = \mu \quad , V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

como suma de normales es normal se tiene finalmente:

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

entonces $\bar{x}_n$ es

- **Insesgado :** La esperanza del estimador es el parámetro a estimar: $E(\bar{x}) = \mu$
- **Consistente :** $\text{lím}_{n\to\infty} \bar{x}_n = \mu$ $(\text{lím}_{n\to\infty} P(|\bar{x}_n - \mu| > \epsilon) = 0)$