Ayudantía 6 - Mat044

4 de junio de 2021

Distribución Normal

Normal estandar

Considerando $Z \sim N(0,1)$, tiene función de densidad

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y su función de densidad acumulada:

$$\Phi(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

considerando una v.a. normal : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se tiene que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$, luego, notar que $X \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z$ pues

$$E(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma E(Z) = \mu$$

$$Var(\mu + \sigma Z) = Var(\sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

Luego, la densidad de una normal no estandar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

vemos que en efecto, integra 1:

Asumiendo que $\int_{\mathbb{R}} f_z(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} f_x x dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

considerando $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1$$

Función Generadora de Momentos

Considerando una variable aleatoria X, su función generadora de momentos se define como:

Función Generadora de Momentos

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int e^{xt} f_x(x) dx$$

esta función tiene la particularidad que satisface:

$$m_n = E(X^n) = M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n M_X(t)}{dt^n}(0)$$

entonces se puede calcular la esperanza y varianza a partir de esta, dado que

$$E(X) = m_1 = M_X^{'}(0)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2$$

MGF Distribución Normal

si $Z \sim N(0,1)$, entonces

$$M_z(t) = E(e^{xt}) = \int_{\mathbb{R}} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

notamos que

$$e^{xt} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}x^2 + xt} = e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xt)}$$

luego, $x^2 - 2xt = (x-t)^2 - t^2$, entonces se tiene que

$$e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xt)} = e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} e^{\frac{1}{2}t^2}$$

por lo tanto

$$M_z(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} e^{\frac{1}{2}t^2} dx$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

MGF Distribución Normal

si $Z \sim N(0,1)$, entonces $M_z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, considerando ahora $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_x(t) = \int e^{xt} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

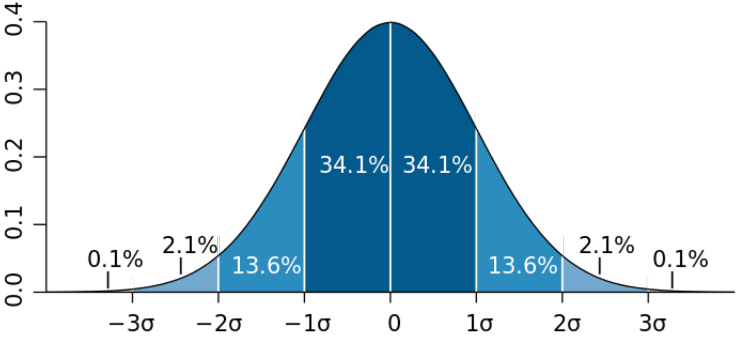
cambiando $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ entonces $x = \mu + \sigma z$ y así

$$M_x(t) = \int e^{\mu t + \sigma t z} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz$$

$$= e^{\mu t} \int e^{z\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Normal Estandar



Value at Risk (VaR)

Value at Risk

$$VaR_{1-\alpha}(X) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{t : P(X \leq t) \geq 1 - \alpha\}$$

es decir, si X es v.a. con densidad $f_x(x)$ entonces el $VaR_{1-\alpha}(X)$ es el mínimo valor tal que $P(X \leq t) \leq 1 - \alpha$, esto es,

$$VaR_{1-\alpha}(X) = t$$

donde t satisface que

$$\int_{-\infty}^{t} f_x(x) dx = 1 - \alpha$$

VaR

Considerando que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $X \overset{d}{=} \mu + \sigma Z$ con $Z \sim N(0,1)$ donde $Z_{0,05} = -1{,}645$.
Entonces si $X \sim N(5,2)$ se tiene que el $\text{VaR95} = 5 + \sqrt{2} Z_{0,05} = 2{,}67$, en un contexto donde la v.a X es la rentabilidad de una inversión, que tiene rentabilidad esperada del 5 %, su VaR95 es el valor tal que X es 2.67 % o más en el 95 % de los casos.