Ayudantía 7 - Mat044

11 de junio de 2021

Función Generadora de Momentos

Considerando una variable aleatoria X, su función generadora de momentos se define como:

Función Generadora de Momentos

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int e^{xt} f_x(x) dx$$

esta función tiene la particularidad que satisface:

$$m_n = E(X^n) = M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n M_X(t)}{dt^n}(0)$$

entonces se puede calcular la esperanza y varianza a partir de esta, dado que

$$E(X) = m_1 = M_X^{'}(0)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2$$

Problema 1

Considerar la función de densidad de Gumbell

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} exp\{-e^{-(x-\theta)}\}, \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0$$

entonces, calcular $E(X)$.

- Escribir la densidad de la v.a. $Z = X - \theta$
- Calcular la MGF de X, $M_x(t)$
- Calcular la esperanza: $E(X) = M_x'(t)|_{t=0}$

Considerar la función Gamma:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du, \quad a > 0$$

y la constante de *Euler-Mascheroni*: $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0{,}577216$

Problema 1

Realizando el cambio de variable $z = x - \theta$:

$$f(z) = e^{-z} exp\{-e^{-z}\}$$

Luego, la MGF la escribimos en términos de la nueva variable Z:

$$M_z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} e^{-z} exp\{-e^{-z}\} dz$$

considerando el cambio de variable $y = e^{-z}$, el diferencial que $dy = -e^{-z} dz$, entonces

$$M_z(t) = \int_0^\infty y^{-t} e^{-y} dy = \int_0^\infty y^{(1-t)-1} e^{-y} dy$$

entonces el último término corresponde a la función Gamma:

$$\int_0^\infty y^{(1-t)-1} e^{-y} dy = \Gamma(1-t)$$

Problema 1

Finalmente, se tiene que $M_z(t) = \Gamma(1-t)$ entonces

$$E(Z) = M_z'(t)|_{t=0} = \Gamma'(1-t)\frac{d}{dt}(1-t) = -\Gamma'(1-t)|_{t=0}$$

por lo tanto, $E(Z) = -\Gamma'(1) = \gamma$ entonces, volviendo a la variable X:

$$E(Z) = E(X-\theta) = E(X) - \theta \Longrightarrow E(X) = \gamma + \theta$$

Problema 2

Considerar la v.a. $X_1 \sim Bernoulli(p)$ que describe el evento de obtener un voto

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener el voto del señor X bajo este modelo?
- Si consideramos un grupo de 7 personas, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 o más votos?
- Considerando 1MM de personas, ¿ Cuál es la probabilidad (aproximada) de obtener más de 520.000 votos?

de lo anterior, obtener la función de distribución o densidad, su esperanza y varianza asociadas considerando $p = 0{,}517$.

Problema 2

Considerando el primer caso, recordando que para una distribución Bernoulli se tiene que su función de probabilidad es

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

luego, su esperanza $E(X) = p$ y su varianza $V(X) = p(1-p)$. Entonces, la probabilidad de obtener el voto del señor X es $P(X = 1) = p = 0,517$.
Su esperanza $E(X) = 0,517$ y su varianza $V(X) = 0{,}2497$.

Problema 2

Para el segundo caso, considerando la v.a. $X = \sum X_i$ donde X_i son los votos de cada persona, $X \sim Bin(7, p)$.
Recordando la función de probabilidad de una Binomial:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

entonces la probabilidad de obtener 5 o más votos estaría dada por:

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{7} \binom{7}{k} p^k (1-p)^{7-k}$$

esto sería:

$$\binom{7}{5} p^5 (1-p)^2 + \binom{7}{6} p^6 (1-p) + \binom{7}{7} p^7$$

aproximadamente $0,18095 + 0,06456 + 0,00987 \approx 0,25554$

Problema 2

Recordando la esperanza y varianza de una binomial:

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 3{,}619 \\ V(X) &= np(1-p) = 1{,}748 \end{aligned}$$

Problema 2

Consdierando el modelo anterior, se tiene que la distribución de probabilidad estaría dada por

$$P(X = x) = \binom{1MM}{x} 0,517^x 0,483^{1MM-x}$$

y calcular factoriales para estos órdenes no es una muy buena idea, entonces habría que aproximar de alguna manera.
Tenemos que la v.a. que representa la cantidad de votos para 1MM de personas $X_n = \sum X_i$ con $n = 1MM$,
además de que tiene primer y segundo momento finito : $E(X_i) = p$ y $V(X_i) = p(1-p) < \infty$ con $X_i \sim^{iid} Bernoulli(p)$,
entonces definiendo la nueva v.a.

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}}$$

Problema 2

Por teorema del límite central tenemos que $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, como n = 1MM podemos aproximar nuestro problema mediante una distribución normal, donde

$$\begin{aligned} np &= 517000 \\ \sqrt{p(1-p)n} &= 499{,}711 \end{aligned}$$

entonces tenemos que $X_n = np + \sqrt{p(1-p)n}Z_n \implies X_n \sim N(np, p(1-p)n)$ por lo tanto,

$$P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}} < x\right)$$

$$P(X_n < np + \sqrt{p(1-p)n}x)$$

para que sea menor a 520.000, x debe ser aproximadamente 6, por lo tanto

$$P(X_n > 520{,}000) = 1 - P(X_n < 520{,}000) \iff 1 - P(Z_n < 6) \approx 1 - 1 = 0$$