Ayudantía 4 - Mat044

7 de mayo de 2021

Modelos de Probabilidad Discreta

Simplificando la notación : $P(X = x) = p(x)$ y considerando X, Y variables aleatorias y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que :

1. $\sum_x p(x) = 1$
2. $E(X) = \sum_x xp(x)$
3. $E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x)$
4. $E((X-\mu)^2) = \sum_x (x-\mu)^2 p(x)$
5. $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$
6. $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
7. $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$

donde $p(x)$ es la distribución de X y $F(x) = P(X \leq x)$ su función de distribución.

Dado cargado

Se tiene un dado, el cual en la cara del 1 tiene una placa metálica dentro, por lo que tiende a caer mayoritariamente en ella, aumentando la probabilidad de que salga un 6. Realizando pruebas se propuso un modelo de probabilidad que describe bien el hecho. Entonces se tiene que $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el siguiente modelo de probabilidad

$$P(X = x) = p(x) = c0{,}7^{x}0{,}3^{6-x}$$

Entonces se desea obtener:

a) El valor de c.

b) Su tabla de distribución y función de distribución

c) $P(2 \leq x \leq 4)$ y $P(x > 2)$

d) $E(X)$ y $V(X)$

Dado cargado

a) Como $p(x) = c0{,}7^x 0{,}3^{6-x}$ es la distribución de X, se tiene que $\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1$, entonces calculamos el valor de $p(x)$ para $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$p(1) = c0{,}7^1 0{,}3^5 = 0{,}001701c$$
$$p(2) = c0{,}7^2 0{,}3^4 = 0{,}003969c$$
$$p(3) = c0{,}7^3 0{,}3^3 = 0{,}009261c$$
$$p(4) = c0{,}7^4 0{,}3^2 = 0{,}021609c$$
$$p(5) = c0{,}7^5 0{,}3^1 = 0{,}050421c$$
$$p(6) = c0{,}7^6 0{,}3^0 = 0{,}117649c$$

Entonces, se tiene que $\sum_{x=1}^{6} p(x) = 0{,}20461c = 1$, por lo tanto, $c = 4{,}8873$.

$$p(x) = 4{,}8873 \cdot 0{,}7^x 0{,}3^{6-x}$$

Dado cargado

b) Construimos una tabla con los valores solicitados:

X	p(x)	F(x)
1	0.83 %	0.83 %
2	1.94 %	2.77 %
3	4.53 %	7.30 %
4	10.56 %	17.86 %
5	24.64 %	42.50 %
6	57.50 %	100 %

c)

$$P(2 \leq x \leq 4) = \sum_{x=2}^{4} p(x) = 17,03\,\%$$

$$P(x > 2) = \sum_{x=3}^{6} p(x) = 97{,}23\,\%$$

Dado cargado

d) Utilizando la tabla anterior, le agregamos valores útiles para calcular la esperanza y varianza, se tiene que $E(x) = \sum_{x=1}^{6} xp(x)$ y que la varianza está dada por: $V(x) = \sum_{x=1}^{6}(x - E(X))^2 p(x)$

X	p(x)	xp(x)	(x-E(x))^2	(x-E(x))$^2 p(x)$
1	0.83 %	0.83 %	18.40	15.27 %
2	1.94 %	3.88 %	10.82	20.99 %
3	4.53 %	13.59 %	5.24	23.74 %
4	10.56 %	42.24 %	1.66	17.53 %
5	24.64 %	123.20 %	0.08	1.97 %
6	57.50 %	345.00 %	0.50	28.75 %

Entonces $E(X) = 5{,}29$ y $V(X) = 1{,}08$.

Modelo de Probabilidad Bernoulli

Para una variable aleatoria $X \in \{0,1\}$, binaria, donde puede interpretarse como, $1 =$ éxito y $0 =$ fracaso.
Se tiene que X sigue un modelo Bernoulli ssi su distribución está dada como $p(x) = p^x(x-p)^{1-x}$ y se expresa como

$$X \sim Bernoulli(p) \iff p(x) = p^x(1-p)^{x-1}$$

donde p es la probabilidad de éxito. Entonces calculemos su esperanza y varianza:
Vemos que $p(1) = p$ y $p(0) = 1-p$, entonces $p(1)+p(2) = 1$, por lo tanto la suma de las probabilidades suma... 1. Luego $E(X) = p$, por otro lado se tiene que

$$V(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x) = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)$$

Entonces:

$$X \sim Ber(p) \Longrightarrow E(X) = p \quad , V(X) = p(1-p)$$

Modelo de Probabilidad Binomial

Para una variable aleatoria $X \in \{1, 2, \ldots, N\}$ se tiene el modelo de probabilidad Binomial, el cual se define como la suma de experimentos Bernoulli, es decir, si $X_i \sim Bernoulli(p)$ con $i = 1, ..., N$ independientes o más compactamente $X_i \sim^{iid} Bernoulli(p)$ se tiene que $\sum X_i = X \sim Binomial(N, p)$, esto es, X representa la cantidad de éxitos en los ensayos Bernoulli.

$$X \sim Bin(N, p) \iff p(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

Calculemos su esperanza y varianza:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{N} x \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

Modelo de Probabilidad Binomial

Vemos que se puede simplificar un poco la expresión:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x!)} = \frac{n}{x}\frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x > 1$$

entonces, reemplazando esto en la esperanza:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{N-1} x\binom{N}{x} p^x(1-p)^{N-x} = \sum_{x=1}^{N} x\frac{N}{x}\binom{N-1}{x-1} p^x(1-p)^{N-x}$$

cambiando de variable $k = x - 1$ se obtiene que

$$E(X) = Np\sum_{k=0}^{N}\binom{N-1}{k} p^k(1-p)^{(N-1)-x}$$

cambiando $n = N - 1$

$$E(X) = Np\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-x}$$

Modelo de Probabilidad Binomial

Recordando el binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

se tiene que

$$E(X) = Np \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-x} = Np(p+(1-p))^n = Np.$$

La varianza es un poco mas engorrosa pero se puede obtener de una forma bastante práctica, dado que :

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

es fácil de calcular y se tiene que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$$

Modelo de Probabilidad Binomial

Entonces,

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-x}$$

cancelando el término $x(x-1)$ en el número combinatorio se tiene que

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^k (1-p)^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x}$$

luego, cambiando $m = n-2$ e $y = x-2$ se tiene que la suma es un binomio de newton, y por lo tanto como $(p+(1-p))^n = 1$ se tiene que la suma vale 1.
Por tanto,

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$$

restandole $E(X)^2$ y sumando $E(X)$ se obtiene que

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Modelo de Probabilidad Geométrico

Este modelo se define como la cantidad de intentos de un ensayo Bernoulli que se requieren para tener un éxito, por lo tanto si X es la cantidad de intentos hasta 1 éxito , puede tomar infinitos valores : $\{1, 2, \dots\}$. También, se puede utilizar como $Y = X - 1$ la cantidad de fallos hasta obtener 1 éxito, entonces $Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Dependiendo del contexto, es conveniente uno sobre el otro.
Entonces,

$$X \sim Geo(p) \iff p(x) = (1-p)^{x-1}p$$

o bien,

$$Y : \quad p(y) = (1-p)^y p$$

Vemos que en efecto, esta es una distribución:

$$\sum_{y \geq 0} (1-p)^y p = p \sum_{y \geq 0} (1-p)^y$$

como $0 < 1 - p < 1$, entonces es una serie geomérica:

$$\sum_{y \geq 0} r^y = \frac{1}{1-r}, \quad r = 1 - p$$

Modelo de Probabilidad Geométrico

Luego, sigue que $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{p}$, entonces

$$\sum_{y \geq 0} (1-p)^y p = \frac{p}{p} = 1$$

Para calcular su esperanza:

$$E(Y) = \sum_{y \geq 0} y(1-p)^y p = p(1-p) \sum_{y \geq 0} y(1-p)^{y-1}$$

Naturalmente, se observa que

$$\sum_{y \geq 0} y(1-p)^{y-1} = \frac{d}{dp} \left(- \sum_{y \geq 0 (1-p)^y} \right) = \frac{d}{dp} (-\frac{1}{p})$$

lo cual esta definido puesto que la suma es convergente.

Modelo de Probabilidad Geométrico

Finalmente, se tiene que

$$E(Y) = p(1-p)\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

luego, volviendo a la variable original X:

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$