Ayudantía 3 - Mat270

3 de mayo de 2021

Principio multiplicativo

Si una operación se puede realizar de n_1 formas, y si por cada una de éstas se puede realizar una segunda en n_2, y así para n_k operaciones, entonces la sucesión de k operaciones se puede realizar de $n_1 n_2 \ldots n_k$ formas.

Ejemplo

¿ Cuántos menús de sopa, postre y bebida existen si se pueden seleccionar entre 4 sopas, 5 postre y 4 bebidas diferentes?

Permutación

El número de permutaciones de n distintos objetos es $!n$.

Ahora, si se considera seleccionar n elementos tomando k a la vez:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo

¿De cuántas maneras se puede escoger 3 frutas para comer entre desayuno, almuerzo y cena si se dispone de 10 frutas?

$$P_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot = 720.$$

Permutación cíclica

El número de permutaciones de n objetos distintos en un ciclo es $(n-1)!$

Ejemplo

Considerando 6 estudiantes sentados en un circulo compartiendo, pueden permutarse 6! veces, pero 6 de ellas serán equivalentes, si todos se corren un puesto al lado es una permutación pero no cambia el orden, pues se pueden realizar 6 de esas permutaciones.

Permutación con categorías

El número de permutaciones de n objetos distintos de los cuales hay k categorías distintas con n_i elementos cada una es :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Ejemplo

¿De cuántas formas diferentes pueden acomodarse 3 leds rojos, 4 amarillos y 2 azules en un circuito con 9 conexiones posibles?

Son 9! permutaciones posibles, pero 4! permutaciones de los amarillos son equivalentes, 2! de los azules son equivalentes y 3! rojos son equivalentes, por lo tanto se tiene

$$\frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

Combinatoria

El número de combinaciones de n objetos distintos, seleccionando k a la vez es:

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo

Considerando en un supermercado que hay 50 productos (iguales) en un estante y 7 de ellos están vencidos ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar 1 vencido tomando 3?

Considerando que la cantidad de posibilidades de seleccionar 3 elementos de 50 es $C_{50,3}$ (casos totales), y se busca seleccionar 2 de 43 no vencidos y sacar 1 de 7 (casos favorables y principio multiplicativo)

$$P(\ \{seleccionar\ 1\ vencidos\}) = \frac{C_{43,2} \cdot C_{7,1}}{C_{50,7}}$$

Probabilidad Condicional

Para dos eventos A, B la probabilidad condicional a que A ocurra dado que B ha ocurrido se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Regla de Bayes

Si $\{E_i\}_{i=1}^{k}$ es una partición de Ω y A un evento de Ω, entonces:

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Ejemplo

Considerando el lanzamiento de 3 dados (6 caras).
¿Cuál es la probabilidad de que la el promedio sea mayor a 4?
¿Cuál es la probabilidad de que el promedio sea menor o igual a 4 si se conoce que solo pueden salir valores pares?

Tenemos que $\bar{x} > 4$ equivale a que la suma sea mayor a 12, entonces definimos el evento A que sea ≤ 4:

$$\begin{array}{lllll}
1 & +1 & +\{1,2\ldots 6\} & \leq 12 & (6) \\
1 & +2 & +\{1,2\ldots 6\} & \leq 12 & (6) \\
\vdots & & & & \\
1 & +5 & +\{1,2,\ldots 6\} & \leq 12 & (6) \\
1 & +6 & +\{1,2,3,4,5\} & \leq 12 & (5) \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

entonces
$P(A) = \frac{165}{216} \approx 0{,}76 \Longrightarrow P(\bar{x} > 4) = P(x_1 + x_2 + x_3 > 12) = P(A^c) = 0{,}24$

Ejemplo (continuación)

Ahora, consideramos una partición de Ω como $E_{i,e}$ ={Dado i es par} y $E_{i,o}$ ={Dado i es impar} o convenientemente B_e ={todos son valores pares} ,B_o ={todos son valores impares} y $B = B_e^c \cap B_i^c$ también es una partición de Ω, entonces

$$P(A|B_e) = \frac{P(A \cap B_e)}{P(B_e)}$$

entonces vemos que $|B_e| = 27$, luego $|A \cap B_e| = 22$, por lo tanto $P(A|B_e) = 0{,}81$.

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es una función (medible) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, esto es, para cada $w \in \Omega$ se tiene que $X(w) \in \mathbb{R}$.
Entonces, para el ejemplo anterior ¿Es la suma de los dados una variable aleatoria?¿Es el promedio de los dados una variable aleatoria?

Podemos considerar $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\text{X(w)} = \text{suma de los dados, el cual es un valor real.}$$

Se tiene que suma de variables aleatorias es una variable aleatoria, también la multiplicación por un escalar, el producto entre otras son variables aleatorias.

Vemos que el evento A que el promedio sea menor igual a 4, o que la suma sea menor igual a 12 está en Ω, es decir $A = \{w \in \Omega : X(w) \leq 12\}$ por lo tanto $P(A) = P(X(w) \leq 12)$ o bien $P(X \leq 12)$.