Resumen Periodo Octubre-Enero

Gabriel Vergara Schifferli

22 Abril 2022

Teoría de la viabilidad y gestión de riesgo en criptoactivos

Teoría de la Viabilidad

- **Componentes :**
  - Tiempo (Dinámica)
  - Objetivos (Restricciones)
  - Decisiones (acciones, controles)
  - Incertidumbre (aleatoriedad)

- **Objetos de estudio :**
  - Estudiar la consistencia entre un sistema dinámico y sus restricciones
  - Determinar las mejores restricciones y acciones para cumplirlas

- Horizonte de tiempo : $[0, T]$
- Estado inicial: $\xi \in \mathbf{X}$
- Secuencia de controles: $\mathbf{u} = (u_t)_{t=0}^{T}$
- Escenario: $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0}^{T}$

Se tiene el sistema de control estocástico:

$$\textbf{Dinámica :} \ (D_{\xi}^{\mathbf{u}}(\mathbf{w})) \qquad x_{t+1} = F_t(x_t, u_t, w_t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 = \xi$$

con espacio de estados $\mathbf{X}$, espacio de controles $\mathbf{U}$ y escenarios $\mathbf{W}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \{\mathbf{u} | u_0, \dots, u_{T-1} \in \mathbf{U}\} \cong \mathbf{U}^{T+1} \\
\mathbb{W} &= \{\mathbf{w} | w_t \in \Omega_t, \quad \forall t \in [0, T]\} \cong \textstyle\prod_{t=0}^{T} \Omega_t \\
\mathbb{X} &= \{\mathbf{x} | x_0, \dots, x_{T+1} \in \mathbf{X}\} \cong \mathbf{X}^{T+2}
\end{aligned}$$

donde $\Omega_t \subset \mathbf{W}$ para el cual $w_t \in \Omega_t$

- Horizonte de tiempo : $[0, T]$
- Estado inicial: $\xi \in \mathbf{X}$
- Secuencia de controles: $\mathbf{u} = (u_t)_{t=0}^{T}$
- Escenario: $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0}^{T}$

Sistema dinámico :

$$(D_{\xi}^{\mathbf{u}}(\mathbf{w})) \quad x_{t+1} = \quad F_t(x_t, u_t, w_t)$$

Restricciones :

$$(\mathbf{I}^c) \quad g^t(x_t, u_t) \geq \quad c$$

Condición de término :

$$(\mathbf{E}^c) \quad \theta(x_{T+1}) \geq \quad \theta$$

Kernel de viabildad y umbrales sostenibles estocásticos

Conjunto de Umbrales Sostenibles

$$\mathbb{S}^{\beta}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\ P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle| \begin{array}{ll} g^t(x_t, u_t) \geq c & ,\forall t \in [0, T] \\ \theta(x_{T+1}) \geq c & \end{array} \right) \geq \beta \right\}$$

- Restricciones posibles dado un estado inicial

Kernel de Viabilidad

$$\mathbb{V}^{\beta}(c) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\ P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle| \begin{array}{ll} g^t(x_t, u_t) \geq c & ,\forall t \in [0, T] \\ \theta(x_{T+1}) \geq c & \end{array} \right) \geq \beta \right\}$$

- Estados iniciales dado restricciones

A nivel determinista se tiene:

$$\xi \in \mathbb{V}(c) \iff c \in \mathbb{S}(\xi)$$

Modelo para la gestión de riesgo

Sistema Dinámico

- Horizonte de tiempo : $[0, T]$
  Horizonte de inversión/operación

- Estado inicial: $\xi \in \mathbf{X}$
  Composición inicial de la cartera

- Secuencia de controles: $\mathbf{u} = (u_t)_{t=0}^{T}$
  Estrategias o medidas de gestión empeladas

- Escenario: $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0}^{T}$
  Trayectoria de los retornos en el tiempo

Formulación 1: (Relativa)

- Pesos de Activos Riesgosos: $x_t^{(i)}, \; i = 1, \ldots, n$
- Peso Activo Libre de Riesgo : y_t
- Capital Total: W_t

$\Rightarrow$ Se tienen $n+1$ estados : Capital total + distribución en activos riesgosos

$$\text{Posición en activo (i) en tiempo t} : \; W_t \cdot x_t^i$$

$$\text{Capital total en tiempo t} : \; W_t$$

Formulación 2: (Absoluta)

- Posición Total por Activos Riesgosos : $x_t^i, \; i = 1, \ldots, n$
- Provisión Total en Activo Libre de Riesgo : y_t

$\Rightarrow$ Se tienen $n+1$ estados : Cantidad de capital por activo riesgoso y libre de riesgo

$$\text{Posición en activo (i) en tiempo t} : \; x_t^{(i)}$$

$$\text{Capital total en tiempo t} : \; y_t + \sum_i x_t^{(i)}$$

$u^{(i)} = 0.1 \Rightarrow$ se compra un 10% del Capital total en activo $x^{(i)}$

Se tiene que $u_t^{(i)} \in [-1, 1]$ por lo que el espacio de controles es $[-1, 1]^n$.

Considerando las condiciones del portafolio:

1. No se admiten cantidades negativas de fiat: $0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1$
2. No se admiten posiciones cortas en $x^{(i)}$: $0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1$

Se define el conjunto de los controles como :

$$\mathbb{U} := \{u_t \in [-1, 1]^n : 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1 \text{ y } 0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1 \, \forall i = 1, \ldots, n, \forall t \in [0, T]\}$$

- Condición 1: No se admite apalancamiento,
- Condición 2: No se admiten posiciones cortas, solo largas.

Modelos de retornos

- **Tiempo discreto :**

  Modelos para la media : AR, ARMA, ARFIMA ...
  Modelos para la volatilidad : tipo GARCH
  Modelos de correlación dinámica : DCC
  Modelos de relación entre variables : Copulas

- **Tiempo continuo :**

  Proceso de Wiener
  Procesos de Levy
  Vasicek, Ornstein–Uhlenbeck, Ornstein–Uhlenbeck generalizado
  SDE...

Métricas de Riesgo tradicionales

Value at Risk

Pérdida máxima esperada con una probabilidad α sobre un periodo:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

Expected Shortfall

ES corresponde a la pérdida esperada dado que la pérdida excede el $\alpha-$cuantil del VaR:

$$ES_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma VaR_\alpha(X)d\alpha$$

donde $ES_\gamma(X)$ es el *Expected Shortfall* de la v.a. X a un nivel γ, esto es, dada una pérdida r se tiene que $ES = E[r|r < VaR]$.

Expectiles

$\tau-$expectile $e_\tau(X)$ de X , es la única solución $y = e_\tau(X)$ de la ecuación

$$\tau E[(X-y)^-] = (1-\tau)E[(X-y)^+]$$

es una medida de riesgo elicitable y coherente para $\tau \in [1/2, 1)$, es una generalización de la esperanza.

- VaR : Mide la máxima pérdida a un nivel α, es un umbral
- ES : Mide el riesgo de cola que no mide el VaR, es la pérdida esperada dado que pasó el umbral del VaR
- Expectiles : ¿?

$\Rightarrow$ Procedimiento estadístico para la validación de estas métricas

$\Rightarrow$ Comparación entre modelos de riesgo

$\Rightarrow$ Modelar apropiadamente una serie de retornos

Características deseables en una métrica de riesgo

- **¿Tiene una interpretación económica clara?**
- **¿Mide el riesgo apropiadamente para combinaciones de distintos activos ?**
  $\Rightarrow$ la propiedad de Coherencia intenta responder esto
- **¿Conociendo la medida de riesgo en cada tiempo y los valores realizados puedo validarla estadísticamente?**
  $\Rightarrow$ la propiedad de Consistencia y Elicitabilidad intenta responder esto

Pruebas

Sistema dinámico

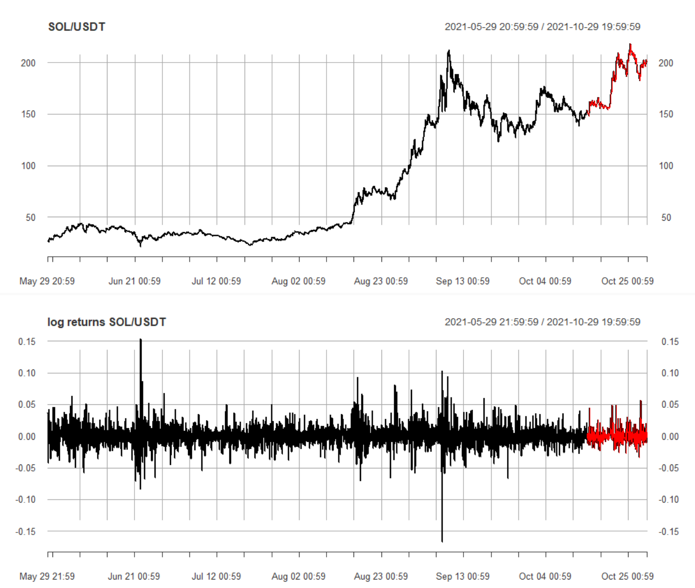
- Activos riesgosos : i, $i = 1, \dots n$, con peso del activo i en el portafolio: $x^{(i)}$
- Activo libre de riesgo: y con peso en el portafolio : y
- Capital total : P
- Horizonte de tiempo : $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} y_{t+1} = \frac{y_t - u_t T \mathbf{1}}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} \\ x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)} + u_t^{(i)}}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} e^{r_t^{(i)}} \\ P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t) P_t \\ \\ (x_0^T, y_0, P_0)^T = (x_0^T, y_0, P_0)^T \\ \\ 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1 \\ 0 \leq u_t + x_t \leq 1 \text{ (por componente)} \\ \frac{1 - x_t}{x_t} \geq \theta \; \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

donde

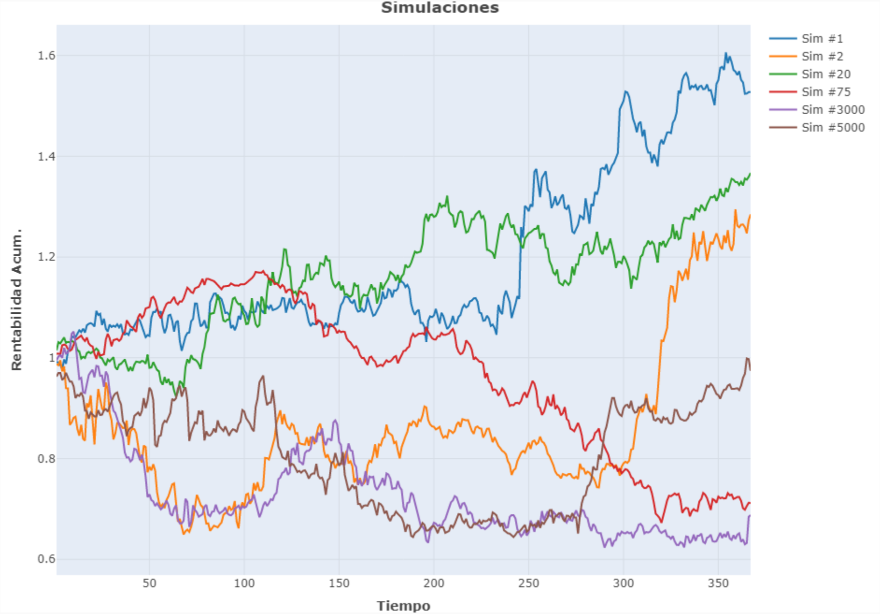
$$H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}$$

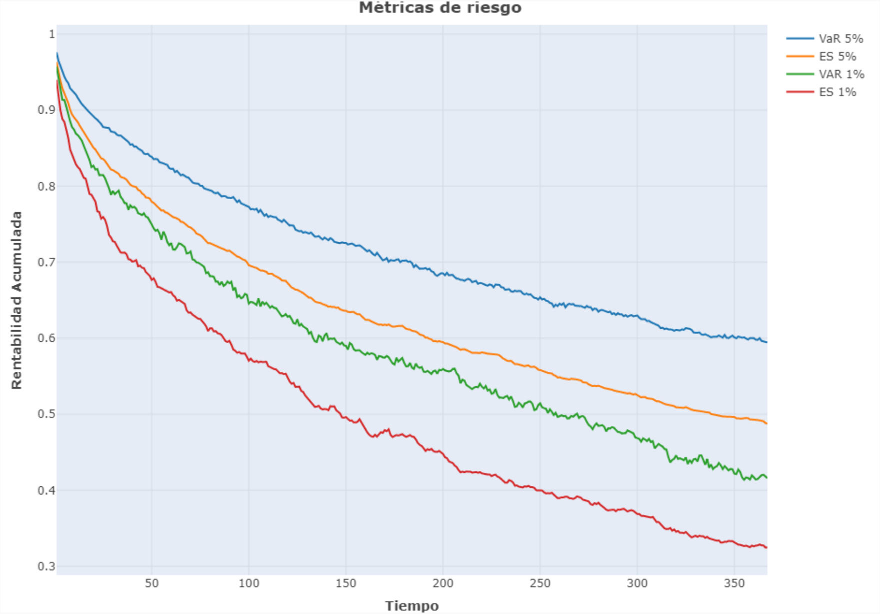
Muestra

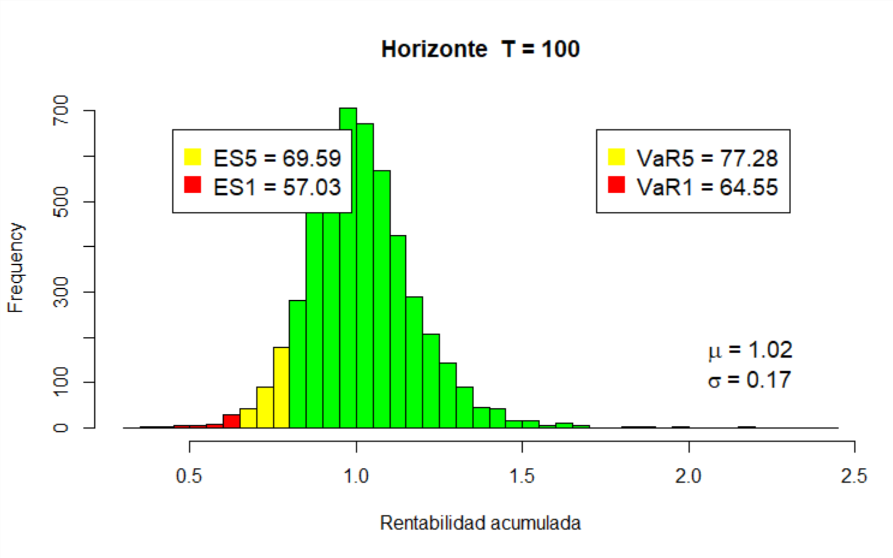

SOL/USDT
2021-05-29 20:59:59 / 2021-10-29 19:59:59
200
150
100
50
May 29 20:59
Jun 21 00:59
Jul 12 00:59
Aug 02 00:59
Aug 23 00:59
Sep 13 00:59
Oct 04 00:59
Oct 25 00:59
log returns SOL/USDT
2021-05-29 21:59:59 / 2021-10-29 19:59:59
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
May 29 21:59
Jun 21 00:59
Jul 12 00:59
Aug 02 00:59
Aug 23 00:59
Sep 13 00:59
Oct 04 00:59
Oct 25 00:59

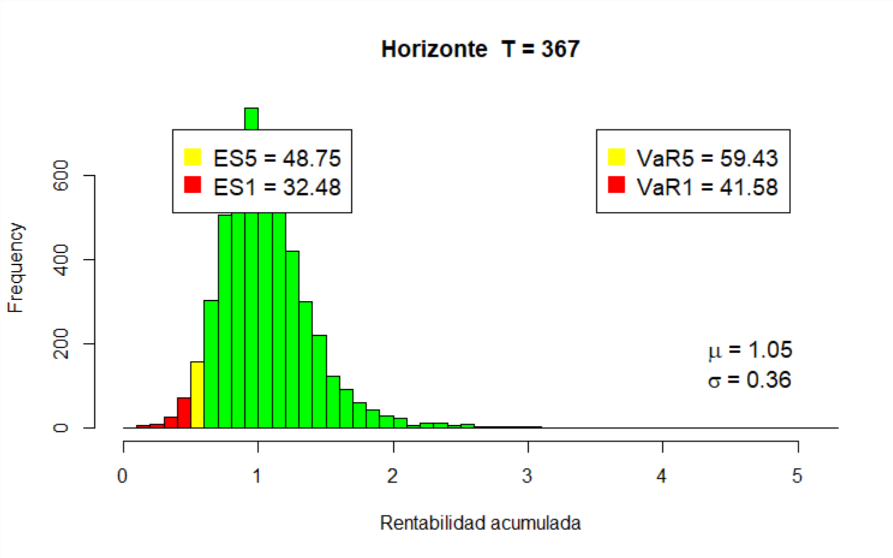
Simulaciones

- Horizonte de simulación : 367
- Cantidad de simulaciones : 5000


Simulaciones
Sim #1
Sim #2
Sim #20
Sim #75
Sim #3000
Sim #5000
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
Rentabilidad Acum.
50
100
150
200
250
300
350
Tiempo


Métricas de riesgo
VaR 5%
ES 5%
VAR 1%
ES 1%
Rentabilidad Acumulada
Tiempo
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
50
100
150
200
250
300
350


Horizonte T = 100
ES5 = 69.59
ES1 = 57.03
VaR5 = 77.28
VaR1 = 64.55
μ = 1.02
σ = 0.17
Frequency
0
100
300
500
700
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Rentabilidad acumulada

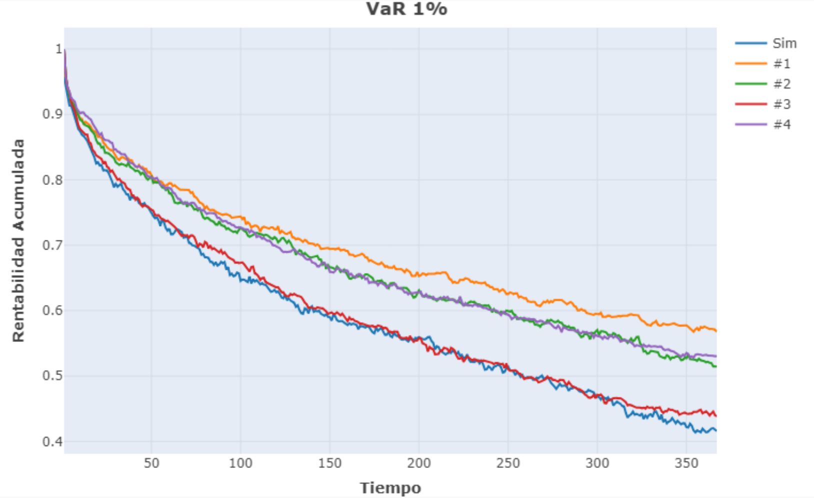

Horizonte T = 367
ES5 = 48.75
ES1 = 32.48
VaR5 = 59.43
VaR1 = 41.58
μ = 1.05
σ = 0.36
Frequency
0
200
400
600
0
1
2
3
4
5
Rentabilidad acumulada

Estrategias / Secuencia de Controles

Se consideraron 3 estrategias con el siguiente esquema general de umbrales:

- Strong Sale $\rightarrow$ Vender cantidad SS
- Sale $\rightarrow$ Vender cantidad S
- Buy $\rightarrow$ Comprar cantidad B
- Strong Buy $\rightarrow$ Comprar cantidad SB

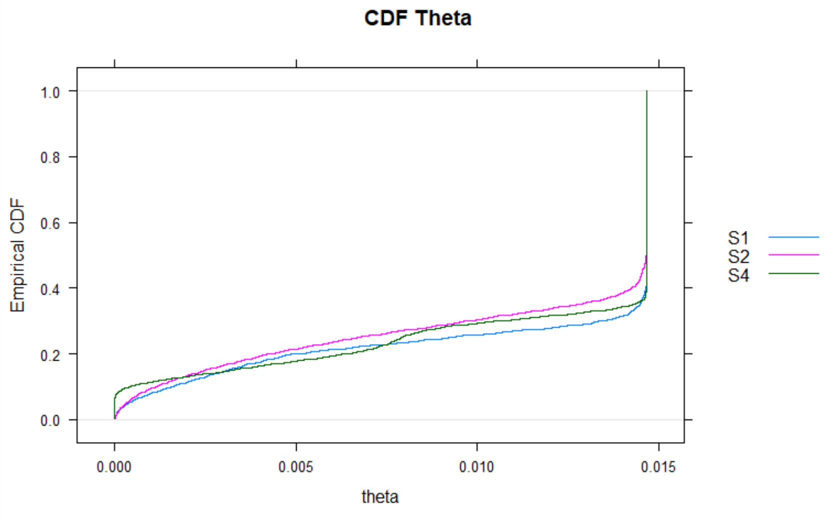
Estrategias
Capital Total
Tiempo
10k
9k
8k
7k
6k
5k
50
100
150
200
250
300
350
Mercado Sim #3000
Strat #1
Strat #2
Strat #3
Strat #4


VaR 1%
Rentabilidad Acumulada
Tiempo
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
50
100
150
200
250
300
350
Sim
#1
#2
#3
#4

Considerando la medida anterior

Si se busca que

$$P\left(g_t = \frac{1 - x_t}{x_t} = \frac{\text{Provisión total}}{\text{Exposición total}} \geq \theta \ \forall t \in [0, T]\right) \geq \beta$$


CDF Theta
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Empirical CDF
0.000
0.005
0.010
0.015
theta
S1
S2
S4

Kernel de viabildad y umbrales sostenibles estocásticos

$$\mathbb{S}^{\beta}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\; P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle| \; g^t(x_t, u_t) \geq c \quad, \forall t \in [0, T] \;\right) \geq \beta \right\}$$

$$\mathbb{V}^{\beta}(c) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\; P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle| \; g^t(x_t, u_t) \geq c \quad, \forall t \in [0, T] \;\right) \geq \beta \right\}$$

tomando $g(x_t, u_t) = g_t$,

$$P\left(g_t \leq \theta, \forall t \in [0, T]\right)$$

$$P\left(g_0 \leq \theta, \ldots, g_T \leq \theta\right) = P(\max_t\{g_t\} \leq \theta)$$

Considerando $G_X(u) = \max\{g_1(u_1, x_1), g_2(u_2, x_2), \ldots, g_T(u_T, x_T)\}$

$$P(\max_t\{g_t\} \leq \theta) = F_{G_X(u)}(\theta)$$

$$\mathbb{S}^\beta(\xi) = \left\{c \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\ F_{G_X(u)}(\theta) \geq \beta\right\}$$

Extreme Value Theory :

estudia temas relacionado a probabildiades respectivas a

- $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
- Threshold Exceedances:
  $F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = (F(x + u) - F(u))/(1 - F(u))$

Umbrales sostenibles estocásticos

Considerando $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$ y la función g "anterior",

- ▷ $P(g(x_t, u_t) \geq c) \geq \beta$
  Capital en riesgo está cubierto a lo menos c veces el β% de las ocaciones
- ▷ $P(g(x_t, u_t) \geq c, \forall t \in [0, T]) \geq \beta$
  Capital en riesgo está cubierto a lo menos c veces el β% de las ocasiones en cualquier momento durante el periodo.
- ▷ $\theta(x_{T+1}) \geq c$
  Para algún estado apropiado, se puede tomar como función de pago *e.g.*
  - Opción Call: $\max\{S(T) - K, 0\}$
  - Opción Put: $\max\{K - S(T), 0\}$
  - "*Buy & Hold*" : $S_0 - S(T)$

$$\mathbb{S}^{\beta}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\; P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle| \begin{array}{ll} g^t(x_t, u_t) \geq c & , \forall t \in [0, T] \\ \theta(x_{T+1}) \geq c & \end{array} \right) \geq \beta \right\}$$

- Posición inicial ξ
- Estrategia de inversión/regla de gestión $\mathbb{U}$

$\Rightarrow$ el umbral c **podría** entregar noción de riesgo y valorización de una estrategia y posición durante un periodo T.

Resumen Periodo Octubre-Enero

Gabriel Vergara Schifferli

22 Abril 2022

Teoría de la viabilidad y gestión de riesgo en criptoactivos