Revisión de paper y ejemplo

Gabriel Vergara Schifferli

16 Noviembre 2021

Modelos de precios para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.

Agenda

1. Revisión paper *Jean-Pierre Aubin y Patrick Saint-Pierre*
2. Estructura de portafolio
3. Ejemplo

A Tychastic Approach to Guaranteed Pricing and Management of Portfolios under Transaction Constraints

Descripción del modelo

- **Activos**:
  Considerando $i = 0, \ldots, n$ los activos y reservando $i = 0$ para el activo libre de riesgo.
- **Horizonte**:
  Considerando T el tiempo de ejercicio u horizonte de tiempo y t el tiempo con $0 \leq t \leq T$.
  Llamando a $T - t$ el plazo al vencimiento o tiempo hasta la madurez.

1. Las variables de estado del sistema a considerar:
   - **Precio**:
     El precio del activo i en tiempo t denotado $S_i(t)$ con $S(t) = (S_0(t), \ldots, S_n(t))$ el vector de precios.
   - **N° Acciones**:
     Considerando $P(t) = (P_0(t), \ldots, P_n(t))$ la cantidad de acciones de cada activo en el portafolio
   - **Capital**:
     $W(t) = P_0(t)S_0(t) + \sum P_i(t)S_i(t) = S(t)^T P(t)$ el capital total del portafolio, donde $P_0(t)S_0(t)$ la componente liquida o caja del portafolio.
2. Los **controles** que se traducen en las *transacciones* de los distintos activos: $P'(t) = (P_0'(t), \ldots, P_n'(t))$ que describen la derivada temporal de la cantidad de acciones de cada activo.
3. La componente **estocástica** del sistema: $R(t) = (R_0(t), \ldots, R_n(t))$ siendo las rentabilidades de cada activo en tiempo t, donde

$$\forall t \geq 0, \quad R_i(t) = \frac{S_i'(t)}{S_i(t)} = \frac{dln(S_i(t))}{dt} \ si \ S_i(t) > 0,$$

Restricciones financieras en variables de estado

1. Restricciones en precios,

$$\forall t \in [0, T], \quad S(t) \in \mathbb{S}(t)$$

2. Restricciones en cantidad de acciones (restricciones de liquidez)

$$\forall t \in [0, T], \quad P(t) \in \mathbb{P}(t, S(t), W(t))$$

3. Restricciones en el valor del portafolio, que describen las garantías de una función de umbral $\mathbf{b}(t, S)$:

$$\forall t \in [0, T], \quad W(t) \geq \mathbf{b}(t, S(t))$$

4. **Flujos de caja** descritos en tiempos T_k con funciones de pago $(S, W) \mapsto \pi(T_k, S, W)$ restando al capital cantidades $\pi(T_k, S(T_k), W(T_k))$ en tiempo T_k

Los retornos deben seguir restricciones estocásticas:

$$\forall t \in [0, T], \quad R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t)),$$

donde el mapeo conjunto-valuado $\mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t))$ se denota mapeo estocástico.

A modo de ejemplo de un mapeo estocástico para el caso de un activo riesgoso, considerando $R(t)$ el retorno que satisface:

$$\forall t \in [0, T], \quad R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t)) := [R^{(-)}(t), R^{(+)}(t)]$$

en particular, considerando una 'media' R:

$$\forall t \in [0, T], \quad R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t)) := [R - \nu(t), R + \nu(t)]$$

con $\nu(t)$ un umbral de versatilidad estocástico.

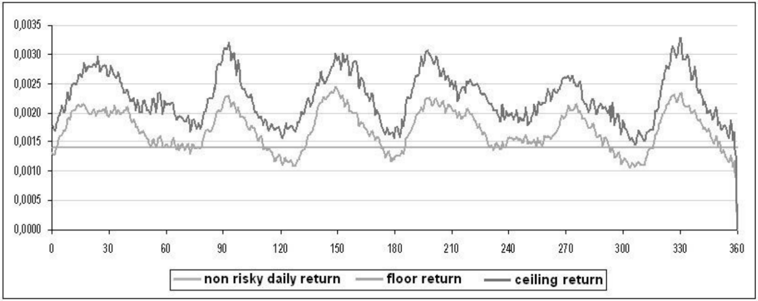

Figure 2.2. *Representation of tychastic uncertainty.*
The picture displays the daily interest rate of the non-risky asset (light gray line), of the daily floor (dark gray) and ceiling (black) returns of the risky asset describing the tychastic scenario.

Restricciones en controles

Las restricciones en controles son descritas por subconjuntos de $\mathbb{F}(t, S, P, W)$:

$$P'(t) \in \mathbb{F}(t, S(t), P(t), W(t)).$$

Ejemplos de restricciones:

1. *Restricciones de transacción*: en la forma $|P_i'(t)| \leq \gamma_i(t)$ $i = 0, \ldots, n$, $0 \leq \gamma_i \leq \infty$ donde $\gamma_i = 0$ imposibilitando transacciones del activo i, mientras que $\gamma_i = \infty$ sin restricción sobre el activo en cuestión en fecha t.
2. *Costos de transacción*,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i'(t) S_i(t) = P'(t)^T S(t) = -\delta(P'(t), P(t), S(t), W(t)).$$

Se considera como caso especial a 'Portafolios auto financiados' cuando no hay costos de transacción involucrados o la función de costo con contempla transacciones *e.g.*

$$P'(t)^T S(t) = 0, \text{ o más generalmente, } \quad S(t)^T P'(t) = \varphi(t, S(t)) W(t)$$

esto es, que el costo no depende de la cantidad de acciones transadas.

Dinámica

Las variables de estados (S_i, P_i, W) evolucionan en un conjunto restricto dependiente del tiempo $\mathcal{K}(t)$ definido como:

$$\mathcal{K}(t) = \{(S, P, W) : S \in \mathbb{S}(t), P \in \mathbb{P}(t, S, W), W \geq \mathbf{b}(t, S)\}.$$

Entonces, el sistema dinámico que describe la evolución de las variables de estado, para cada i;

$$\begin{cases} \text{(i)} & S_i'(t) = R_i(t)S_i(t),\ \ i = 0, \ldots, n \text{ donde } R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t)) \\ \text{(ii)} & P_i'(t) = u_i(t),\ \ i = 0, \ldots n \text{ donde } u(t) \in \mathbb{F}(t, S(t), P(t), W(t)), \\ \text{(iii)} & W'(t) = R_0(t)W(t) + \sum P_i(t)S_i(t)(R_i(t) - R_0(t)) + \sum u_i(t)S_i(t) \end{cases}$$

- $\mathbb{S}(t)$: Restricciones de precio
- $\mathbb{P}(t, S, W)$: Restricciones de liquidez (*shares*, *stocks*)
- $\mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t))$: Restricciones estocásticas (sobre los retornos)
- $\mathbb{F}(t, S(t), P(t), W(t))$: Restricciones sobre controles

Flujos de caja

Los flujos de caja se definen como secuencias finitas en las fechas $0 \leq T_0 < T_1 < \cdots < T_N \leq T$ las cuales se debe pagar cantidades $\pi(T_i, S, P, W)$.

Definimos $W(T_i^-) := \lim_{t \leq T_i, t \to -T_i}$, entonces a la fecha T_i se realiza el pago en forma de impulso donde el nuevo capital $W(T_i)$ a la fecha T_i se transforma en:

$$\forall i = 1, \ldots, N, \;\; W(T_i) = W(T_i^-) - \pi(T_i, S(T_i), W(T_i)).$$

Una condición necesaria es que al tiempo T_i , el capital $W(T_i^-)$ satisface:

$$\forall i = 1, \ldots, N, \;\; W(T_i^-) \geq \mathbf{b}(T_i, S(T_i)) + \pi(T_i, S(T_i), W(T_i)).$$

Se tiene el caso que :

$$P'(t)^T S(t) = \varphi(t, S(t))W(t)$$

entonces el sistema se reduce a

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad S_i'(t) = R_i(t)S_i(t), \quad R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t)), \\ \text{(ii)} \quad W'(t) = (R_0(t) + \varphi(t, S(t)))W(t) + \sum P_i(t)S_i(t)(R_i(t) - R_0(t)) \\ \qquad P(t) \in \mathbb{P}(t, S(t), W(t)) \end{cases}$$

con los retornos como componente estocástica y los controles son la cantidad de *shares* en vez de las transacciones.

Las variables de estado, (S, P, W) se mueven en el conjunto

$$\mathcal{K}(t) = \{(S, W) : S \in \mathbb{S}(t) \text{ y } W \geq \mathbf{b}(t, S)\}$$

Kernel de viabilidad garantizado (*Guaranteed viability kernel*)

Dado un horizonte de tiempo T, el conjunto restricto dependiente del tiempo $\mathcal{K}(t)$ definido anteriormente, el *time-dependant guaranteed capture basin*

$$\mathcal{V}(t) = \mathrm{GuarViab}(\mathcal{K})(t)$$

bajo el sistema de control estocástico es el tubo $\tau \mapsto \mathcal{V}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$,de estados $(S, P, W) \in \mathcal{V}(\tau)$ para el cual existe un feedback map $\mathbb{G}(t, S, P, W) \in \mathbb{F}(t, S, P, W)$ tal que para todo $R(t) \in \mathbb{R}(t, S(t), P(t), W(t))$ e la evolución de $(S(t), W(t))$ descrita por el sistema:

$$\begin{cases} \text{(i)} & S_i'(t) = & R_i(t)S_i(t),\ i = 0, \ldots, n \\ \text{(iii)} & W'(t) = & (R_0(t) + \varphi(t, S(t)))W(t) \\ & & + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{G}_i(t, S(t), W(t))S_i(t)(R_i(t) - R_0(t)) \end{cases}$$

y comenzando en tiempo τ desde (S, W) es viable en $\mathcal{K}(t)$ en el sentido

$$\forall t \in [\tau, T],\ (S(t), W(t)) \in \mathcal{K}(t)$$

Teorema (Valorización y gestión del portafolio)

Dado un horizonte de tiempo T y el conjunto restricto dependiente del tiempo $\mathcal{K}(t)$, el *time-dependent guaranteed viavility kernel*:

$$\mathcal{V}(t) := \text{GuarViab}(\mathcal{K})(t)$$

bajo el sistema de control estocástico provee para cada tiempo t:

1. **Capital inicial:**
$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{W}(t, S) = \inf_{(S,W)\in\mathcal{V}(t)} W,$$
2. **Regla de gestión :**
$$\mathbb{P}(t, S) = \mathbb{G}(t, S, \mathbb{W}(t, S))$$
definida por el feedback en la definición del *time-dependent guaranteed viability kernel.*

Entonces, para cualquier evolución del precio $S(t) \in \mathbb{S}(t)$, la cantidad de capital y *shares* están dadas por $W(t) = \mathbb{W}(t, S(t))$ y $P(t) = \mathbb{P}(t, S(t))$.

- PDE de primer orden no lineal con coeficientes discontinuos y restricto
- Black y Scholes PDE lineal de 2do orden

Maturity	Volatility	Black & Scholes	Capture Basin	Share π_0	Share π_1
1	10%	**6.72**	**6.82**	-64.06	0.7078
0.5	10%	**4.15**	**4.21**	-60.95	0.6507
0.1	10%	**1.52**	**1.53**	-55.47	0.5699
1	20%	**10.45**	**10.46**	-53.23	0.6368
0.5	20%	**6.89**	**6.89**	-52.91	0.5979
0.1	20%	**2.77**	**2.79**	-51.68	0.5446
1	25%	**12.27**	**12.34**	-50.41	0.6274
0.5	25%	**8.22**	**8.26**	-50.84	0.5910
0.1	25%	**3.39**	**3.42**	-50.72	0.5413
1	30%	**14.23**	**14.23**	-48.20	0.6242
0.5	30%	**9.65**	**9.64**	-49.24	0.5887
0.1	30%	**4.03**	**4.04**	-49.97	0.5401
1	50%	**21.73**	**21.76**	-41.69	0.6344
0.5	50%	**15.09**	**15.12**	-44.66	0.5977
0.1	50%	**6.53**	**6.54**	-47.87	0.5441

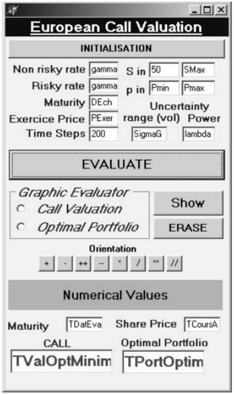

Figure 4.2. *Comparison of algorithms.*

Figure 1: Comparación de estimación de precios de opciones Call Europeas, para distintos parámetros con algoritmo de B-S o Viabilidad.

Products	Without Transaction Costs	With Transaction Costs	Liquidity Constraints	reba-lancing	CPPI (cushion)
Europan	XXX	XXX	XXX	XXX	X
Bermudian	XXX	XXX	XXX	X	X
Digital	XXX	XX	XXX	XX	X
Lookback	XX		XX		X
Barrier	XXX	X	XXX	X	X
Cash Flows	XXX	XXX	XXX	XXX	X

Lines denote the nature of portfolios replicating options or cash flows, column options indicate the availability of viability characterizations.
XXX: available executables XX: rapidly available executables on demand X: available executables on demand.

Estructura de portafolio
(Sistema dinámico)

Considerando el sistema dinámico

$$\begin{cases} w_{t+1} = D(w_t, R_t) & 0 \leq t \leq T \\ w_0 = w_0 \end{cases}$$

donde $w_t = (x_t, y_t)$ con x_t los cryptoactivos e y_t nuestro activo libre de riesgo (FIAT) e.g. USDT y R_t el vector de retornos de los activos en tiempo t.

Se tiene que $w_t^T 1 = 1$ y $0 \leq w_{i_t} \leq 1$ $\forall i, t$.

Entonces, si se tiene 700USD, con $w_t = (0.7, 0.3)$ y x_t tuvo una rentabilidad del 5% ($R_t = 0.05$)

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = D(w_t, R_t) = \frac{1}{x_t(1 + R_t) + y_t} \begin{pmatrix} x_t(1 + R_t) \\ y_t \end{pmatrix}$$

en monto se tendría 724.5USD y $w_{t+1} = (0.71, 0.29)$

o equivalentemente en monto $(514.5, 210)$

más generalmente, con $x_t = (x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(n)})^T$ y $R_t = (R_t^{(1)}, \ldots, R_t^{(n)})^T$

$$(x_{t+1}^T, y_{t+1})^T = \frac{1}{x_t^T(\mathbf{1}_n + R_t) + y_t} diag[\mathbf{1}_{n+1} + (R_t^T, 0)](x_t^T, y_t)^T$$

Considerando 1000USDT y un portafolio equiponderado con 3 activos y 1 fiat:

$R_t = (-0.02, 0.05, 0.07)$

$$(x_{t+1}^T, y_{t+1})^T = \frac{1}{x_t^T(\mathbf{1}_n + R_t) + y_t} diag[\mathbf{1}_{n+1} + (R_t^T, 0)](x_t^T, y_t)^T$$

donde

$$diag[\mathbf{1}_{n+1} + (R_t^T, 0)](x_t^T, y_t)^T = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2450 \\ 0.2625 \\ 0.2675 \\ 0.2500 \end{pmatrix}$$

luego,

$$x_t^T(\mathbf{1}_n + R_t) + y_t = 0.775 + 0.25 = 1.025$$

finalmente, se tiene aproximadamente

$$w_{t+1} = (0.239, 0.256, 0.261, 0.244).$$

Calculando directamente con las rentabilidades:

$$(245, 262.5, 267.5, 250)\,, \;\; Total = 1025$$

por lo tanto, los pesos son

$$w_{t+1} = (0.239, 0.256, 0.261, 0.244)$$

Entonces, aplicando una decisión de venta de activos en tiempo t, $u_t = (u_t^{(1)}, \ldots, u_t^{(n)})$ asumiendo que se realiza al inicio del periodo t, es decir, al momento de realizarse la proporción del activo $x^{(i)}$ es exactamente $x_t^{(i)}$, por lo tanto, la cantidad de FIAT y_t crece y se tiene que:

$$y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

utilizando la convención de signo que $u^{(i)} > 0$ es compra y $u^{(i)} < 0$ es venta

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)}(1 + u_t^{(i)})(1 + R_t^{(i)})}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

Para el mismo caso anterior, considerando el control

- se reduce en un 10% la posición de $x^{(2)}$
- se aumenta un 15% de $x^{(3)}$

$$y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{(x_t + \sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)}(1 + u_t^{(i)})(1 + R_t^{(i)})}{(x_t + \sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

se tiene que $u_t = (0, -0.1, 0.15)^T$

$$(x_t + \sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) = (0.25, 0.225, 0.2875)(0.98, 1.05, 1.07)^T = 0.788875$$

Se tiene el flujo de caja neto (relativo): $-u_t^T x_t = -0.0125 \Rightarrow y_t - u_t^T x_t = 0.2375$

$$y_{t+1} = \frac{0.25 - 0.0125 = 0.2375}{0.788875 + 0.2375 = 1.026375} = 0.2314$$

$$x_{t+1}^{(1)} = x_t^{(1)} * (1 + 0) * 0.98/1.026375 = 0.2387$$
$$x_{t+1}^{(2)} = 0.25 * 0.9 * 1.05/1.026375 = 0.2302$$
$$x_{t+1}^{(3)} = 0.25 * 1.15 * 1.07/1.026375 = 0.2997$$

1. Capital total de 1000USDT (P_t), se tienen 250USDT de cada cantidad.
2. Con las operaciones se obtiene $(250, 225, 287.5, 237, 5)$.
3. Luego en tiempo posterior queda $(245, 236.25, 307.625, 237.5)$.
4. Con total de $1026, 375$ con proporciones $(0.2387, 0.2302, 0.2997, 0.2314)$.

El flujo de caja neto es $P_t \cdot -u_t^T x_t = 1000 USDT \cdot -0.0125 = -12.5 USDT$

En término del log-retorno

Formulando el problema en términos de r_t, se tiene entonces que $(1 + R_t^{(i)}) = e^{r_t^{(i)}}$, por lo tanto:

$$\begin{cases} w_{t+1} = D(w_t, u_t, r_t) & 0 \leq t \leq T \\ w_0 = w_0 \end{cases}$$

considerando $\exp\{x\} = (e^{x^{(i)}}, \dots, e^{x^{(n)}})$ quedaría como:

$$y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t}$$

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)}(1 + u_t^{(i)})}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t} e^{r_t^{(i)}}$$

Luego, si inicialmente en tiempo t se tiene un capital P_t entonces la cantidad para cada activo es $P_t w_t$, en cuanto a la cantidad $P^{(i)}_{t+1} = x^{(i)}_t (1 + u^{(i)}_t) P_t e^{r^{(i)}_t}$ y la cantidad fiat $P^y_{t+1} = P_t(y_t - u_t^T x_t)$ así finalmente se tiene que

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Capital total en activo i :} & P^{(i)}_{t+1} = & x^{(i)}_t (1 + u^{(i)}_t) P_t e^{r^{(i)}_t} \\
\text{Capital total en fiat :} & P^y_{t+1} = & (y_t - u_t^T x_t) P_t \\
\text{Capital total de cartera :} & P_{t+1} = & ((x_t + \sum_{i=1}^n e_i x^{(i)}_t u^{(i)}_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t) P_t
\end{array}
$$

Considerando una restricción del tipo:

$$P_{t+1}^{y} \geq \hat{ES}_{\alpha}^{t+1}$$

donde $\hat{ES}_{\alpha}^{t+1}$ es el predictor de la métrica de riesgo a un nivel α, considerándolo en términos de cantidad de capital y con su respectivo signo.

La función:

$$H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + \sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t$$

$$\begin{cases} y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} \\ x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)}(1+u_t^{(i)})}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} e^{r_t^{(i)}} \\ P_{t+1}^{y} = (y_t - u_t^T x_t) P_t \\ P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t) P_t \\ \\ (x_0^T, y_0, P_0)^T = (x_0^T, y_0, P_0)^T \\ \\ \hat{P}_{t+1}^{y}(\hat{r}_{t+1}, x_t, y_t, u_t, P_t) \geq \hat{ES}_{\alpha}^{t+1}(\hat{r}_{t+1}, x_t, y_t, u_t, P_t) \\ u_t \in \mathbb{G}(x_t, y_t, r_t, P_t) \\ r_t \in \mathcal{F}_t \end{cases}$$

Ejemplo de sistema

Modelo de retornos correlacionados

Considerando la serie de log-retornos $\{r_{i,t},\ t \in \mathbb{N}\}$ para cada activo $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{cases} r_{i,t} = a_{i,t} \\ a_{i,t} = \sigma_{i,t}\varepsilon_{i,t} \\ \sigma^2_{i,t} = w_i + [\alpha_i + \gamma_i I_{a_{i,t-1}>0}]a^2_{i,t-1} + \beta_i \sigma^2_{i,t-1} \\ \varepsilon_{i,t} \sim t_\nu \end{cases}$$

esto es, $r_{i,t} \sim gjrGARCH(1,1) - std$.

Se tiene para el termino del error $\varepsilon_{i,t} \sim^{iid} t_\nu\ \forall t\ (\varepsilon_{i,t} \perp \varepsilon_{i,t+h}\ \forall h)$

Pero hay correlación entre los activos:

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \ldots, \varepsilon_{n,t}) \sim t_n(\nu, 0, \Sigma)\ \forall t$$

donde $\Sigma \neq I_n$, esto es, $Cov(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t}) \neq 0\ \Rightarrow \rho_{ij} = \frac{Cov(\varepsilon_{i,t},\varepsilon_{j,t})}{\sqrt{\sigma_i^2\sigma_j^2}}$

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\nu}{\nu - 2}\Sigma$$

Considerando $w^T = (w_1, \ldots, w_d)$ el capital invertido en cada activo riesgoso, y $X^T = (X_1, \ldots, X_d)$ el retorno aritmético, se define la pérdida:

$$L(w, X) = -w^T X$$

la pérdida del portafolio sobre un periodo de tiempo y F_L su distribución.

Considerando $X \sim N(\mu, \Sigma)$ o $X \sim t(\nu, \mu, \Sigma)$ entonces la pérdida se distribuye

$$L \sim N(-w^T \mu, w^T \Sigma w), \quad L \sim t(\nu, -w^T \mu, w^T \Sigma w)$$

Entonces, definiendo el VaR en este sentido,

VaR

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

ES

$$ES_\alpha = E(L|L \geq VaR_\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha}^{\infty} l dF_L(l)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{I\{-(w^T x)\geq VaR_\alpha\}} \left[-(w^T x)\right] f(x)dx$$

si $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ o $L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$ entonces se tienen formulas :

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\varphi(\Phi(\alpha)^{-1})}{1-\alpha}, \quad \text{Caso normal}$$

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{f_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right), \quad \text{caso t}$$

Se puede expresar el ES como:

$$ES_\alpha = VaR_\alpha + \frac{1}{1-\alpha}\int[-(w^T x) - VaR_\alpha]^+ f(x)dx$$

con $[x]^+ = \max\{0, x\}$, reemplazando VaR_α por p se tiene que

$$F_\alpha(w, p) = p + \frac{1}{1-\alpha}\int[-(w^T x) - p]^+ f(x)dx$$

donde Rockafellar y Uryasev (2002) probaron que $F_\alpha(w, p)$ es convexa en ambos parámetros y además

$$VaR_\alpha(x) \in \arg\min_p F_\alpha(x, p), \quad ES_\alpha(x) = F_\alpha(x, VaR_\alpha(x))$$

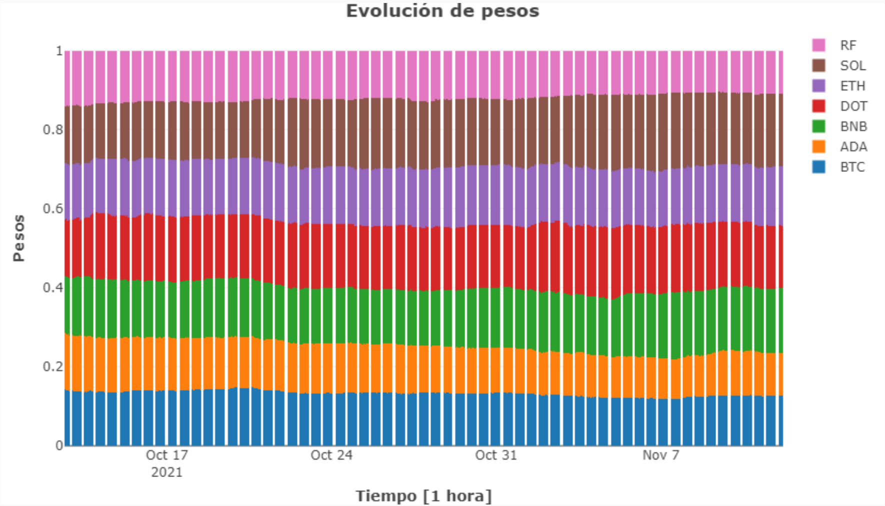

Figure 2: Considerando un portafolio equiponderado con 6 activos riesgosos más un activo fiat, durante 1 mes.

Figure 3: Considerando un portafolio equiponderado con 6 activos riesgosos más un activo fiat, durante 1 mes.

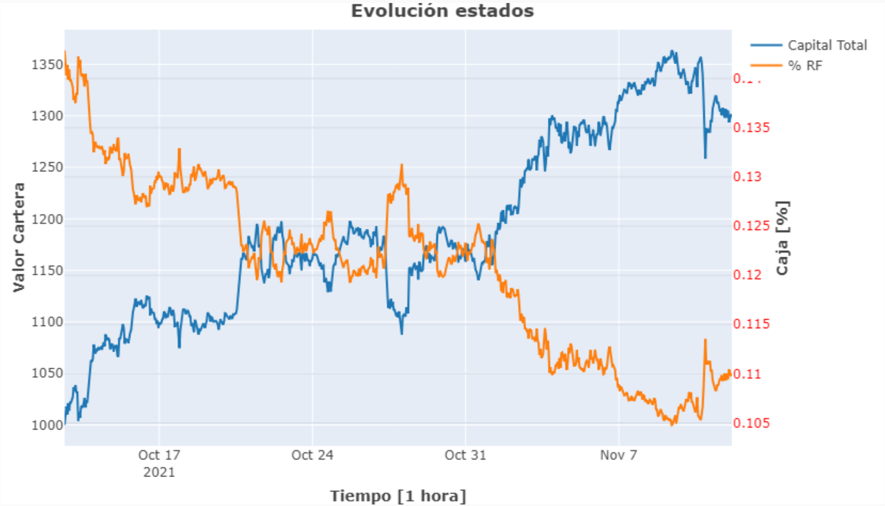

Figure 4: Evolución del capital total junto con el % del activo libre de riesgo respecto al capital total.

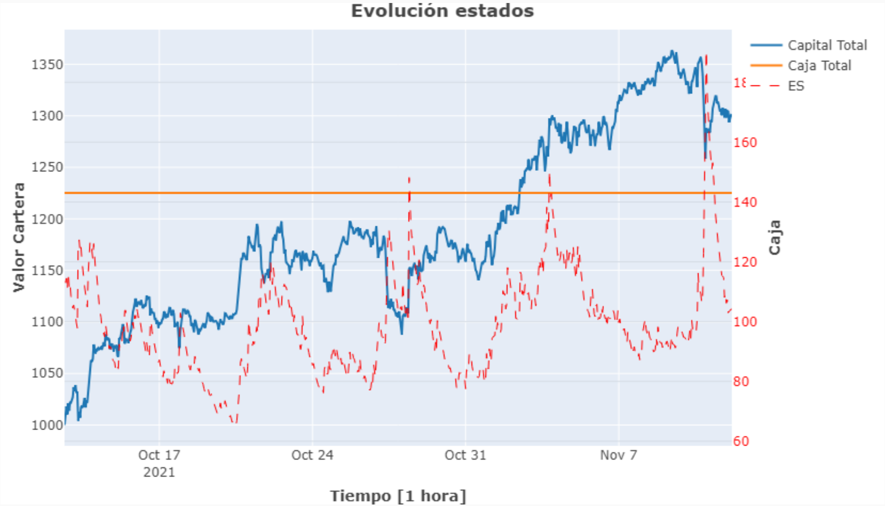

Figure 5: Capital total, junto con el valor total en fiat y el ES proyectado a 1 paso con gjrGARCH-std al 99%.

Revisión de paper y ejemplo

Gabriel Vergara Schifferli

16 Noviembre 2021

Modelos de precios para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.