

Modelos de precios y teoría de portafolio

Gabriel Vergara Schifferli

2 Noviembre 2021

Modelos de precios para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.

1. Retornos
2. Ejemplos de series
3. Variables exógenas
4. Teoría de portafolio
5. Estructura de portafolio

Retornos

Manteniendo un activo por un periodo simple desde $t - 1$ hasta t , se tiene el rendimiento bruto considerando el precio en tiempo t , P_t :

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \iff P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$$

entonces el retorno simple :

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Retorno multiperiodo

Ahora, considerando el mantener un activo por k periodos, se tiene el rendimiento bruto $R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$:

$$\begin{aligned} 1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \end{aligned}$$

Como $R_t[k]$ es un rendimiento sobre k periodos para "anualizarlo" o llevarlo a la misma unidad de periodo:

$$\text{Annualized}\{R_t[k]\} = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{1/k} - 1 = \exp \left\{ \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 + R_{t-j}) \right\} - 1$$

esto es, el rendimiento bruto medio es la media geométrica de los rendimientos brutos de cada periodo.

Si R_t es suficientemente pequeño, entonces $\ln(1 + R_t) \approx R_t$

considerando $p_t = \ln(P_t)$ el log-precio, se tiene que:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \left[\frac{P_t}{P_{t-1}} \right] = p_t - p_{t-1}$$

luego, el log-retorno en k periodos:

$$r_t[k] = \ln(1 + R_t[k]) = \sum_j \ln(1 + R_{t-j}) = \sum_j r_{t-j}$$

y se tiene las relaciones

$$\begin{aligned} r_t = \ln(1 + R_t) &\iff R_t = e^{r_t} - 1 \\ P_t = P_{t-1}(1 + R_t) &\iff P_t = P_{t-1}e^{r_t} \end{aligned}$$

Además,

$$R_t \in [-1, \infty), \quad r_t \in \mathbb{R}$$

Por expansión de Taylor:

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) + h(x)(x - x_0)$$

Considerando que $x = 1 + R_t$ y $x_0 = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(1 + R_t) &= \ln(1) + \frac{1}{1}(1 + R_t - 1) + h(1 + R_t)(R_t) \\ r_t &= R_t + h(1 + R_t)R_t \end{aligned}$$

Considerando la serie de log-retornos $\{r_t, t \in \mathbb{N}\}$ y el modelo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_t = \mu_t + a_t & \text{return ec.} \\ \mu_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} & \text{mean ec.} \\ a_t = \sigma_t \varepsilon_t & \\ \sigma_t^2 = \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) a_{t-1}^2 & \text{volatility ec.} \\ \varepsilon_t \sim N(0, 1) & \text{error dist.} \end{array} \right.$$

esto es, $r_t \sim AR(1) - IGARCH(1, 1) - norm$,

se tiene que $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \Rightarrow r_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

Luego considerando los predictores a paso h :

$$\begin{aligned} r_t(h) &= E(r_{t+h} | \mathcal{F}_t) \\ \sigma_t^2(h) &= E(\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

donde \mathcal{F}_t es la información disponible hasta t .

Entonces, bajo errores normales ($\epsilon_t \sim N(0, 1)$), se tiene que

$$\begin{aligned}r_t(1) &= E(r_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \phi_0 + \phi_1 r_t \\ \sigma_t^2(1) &= E(\sigma_{t+1}^2|\mathcal{F}_t) = \alpha\sigma_t^2 + (1 - \alpha)a_t^2 \\ \hat{r}_{t+1} &\sim N(r_t(1), \sigma_t^2(1))\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que el predictor del precio P_{t+1} viene dado por:

$$\hat{P}_{t+1} = P_t e^{\hat{r}_{t+1}} \iff \hat{p}_{t+1} = p_t + \hat{r}_{t+1}$$

luego,

$$\hat{p}_{t+1} \sim N(p_t + r_t(1), \sigma_t^2(1)) \iff P_{t+1}|\mathcal{F}_t \sim LN(p_t + r_t(1), \sigma_t^2(1))$$

Ejemplos de series

Proceso fuertemente estacionario :

Un proceso $\{x_t : t \in T\}$ se dice fuertemente estacionario si la distribución conjunta de cualquier conjunto finito $\{x_{t_1} \dots x_{t_n}\}$ es invariante ante traslaciones, es decir, si $t_1, \dots, t_n \in T$ y h tal que $\{t_1 + h, \dots, t_n + h\} \in T$ se debe cumplir que

$$\mathbb{P}[x_{t_1} \leq x_1, \dots, x_{t_n} \leq x_n] = \mathbb{P}[x_{t_1+h} \leq x_1, \dots, x_{t_n+h} \leq x_n].$$

Corolario :

Para un proceso $\{x_t : t \in T\}$ fuertemente estacionario tal que $\mathbb{E}[x_t] < \infty \forall t$, entonces la media $\mathbb{E}[x_t]$ es constante para todo t . El caso análogo para la varianza.

Proceso débilmente estacionario :

Un proceso $\{x_t : t \in T\}$ se dice débilmente estacionario si $\mathbb{E}[x_t^2] < \infty$ para todo t , y su media $\mathbb{E}[x_t]$ es constante y además la covarianza $\text{Cov}[x_t, x_{t+h}]$ solo depende del rezago h para todo h tal que $t + h \in T$.

- Propiedades estadísticas del proceso se mantienen constantes en el tiempo.
- Todos los valores del proceso son comparables.

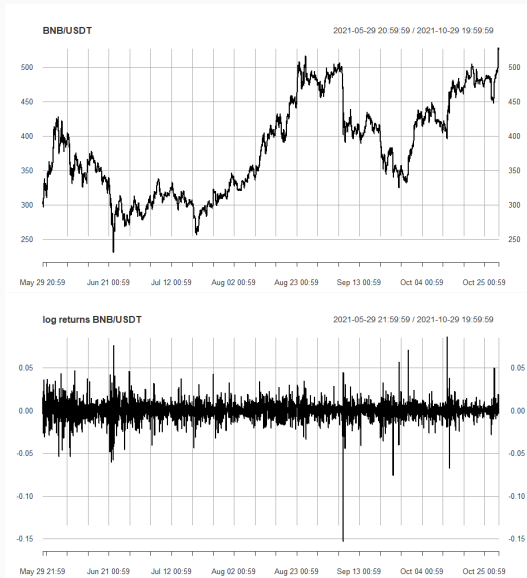
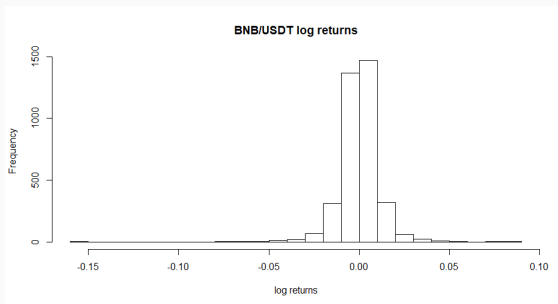


Figure 1: Gráficos de precios de BNB/USDT y retornos logarítmicos con frecuencia horaria en un periodo de 5 meses. Descargados desde *Binance-python* API.

Estadísticas	BNB/USDT
N° obs.	3665
Mínimo	-0.153333
Q1	-0.004623
Mediana	0.000269
Media	0.000152
Q3	0.005320
Máximo	0.086442
Desv. std.	0.010651
Asimetría	-0.844992
Curtosis	20.77724



(a) Tabla resumen de estadísticas.

(b) Histograma de retornos logarítmicos.

- Augmented Dickey-Fuller H_0 : Serie no estacionaria
 $P\text{Value} < 0.01 \Rightarrow$ Serie estacionaria
- Phillips-Perron H_0 : Serie tiene raíz unitaria
 $P\text{Value} < 0.01 \Rightarrow$ Serie estacionaria

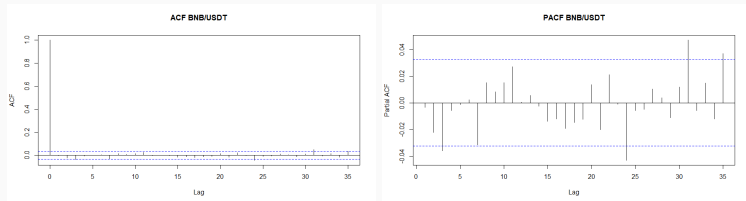


Figure 3: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial para log-retornos de BNB USDT.

- Ljung-Box H_0 : Son independientes
 - Lag 1 PValue = 0.8441 \Rightarrow No hay autocorrelación de orden 1
 - Lag 2 PValue = 0.4034 \Rightarrow No hay autocorrelación de orden 2
 - Lag 3 PValue = 0.0911 \Rightarrow No hay autocorrelación de orden 3

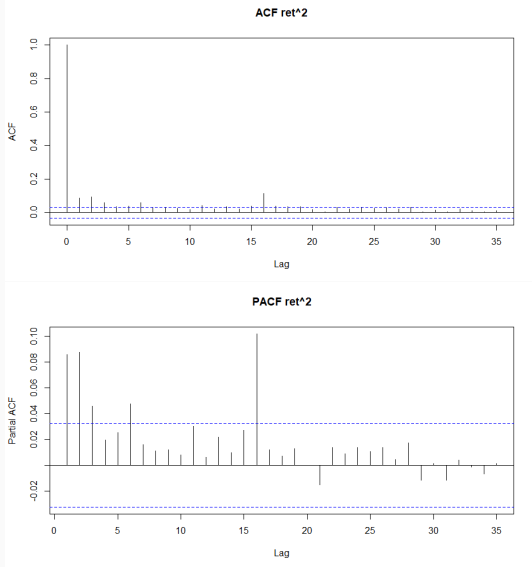


Figure 4: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial para log-retornos cuadráticos de BNB USDT.

Para la serie de retornos se estimaron los siguientes modelos para luego realizar una simulación de una serie de precios.

- ARMA-norm
- GARCH-norm
- IGARCH-norm
- gjrGARCH-sstd
- ARMA-eGARCH-std
- MS-GARCH-gjrGARCH-norm-sstd

Se estimó el modelo, se generó la data sintética r_t para una trayectoria de 1000 valores, luego se construyó la serie de precios sumando una constante para deja la escala similar a la serie de BNB/USDT.

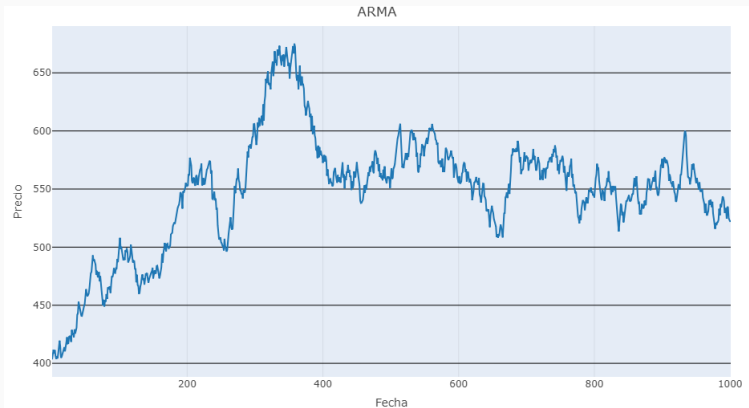
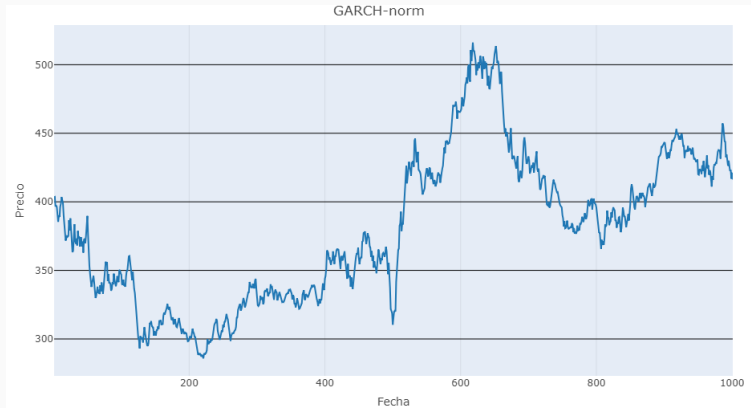
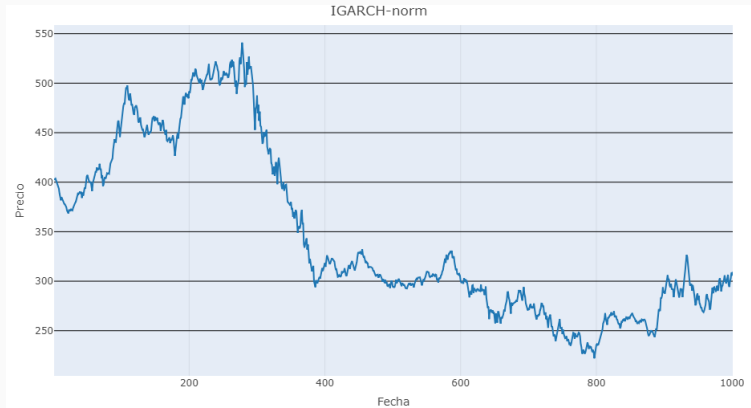
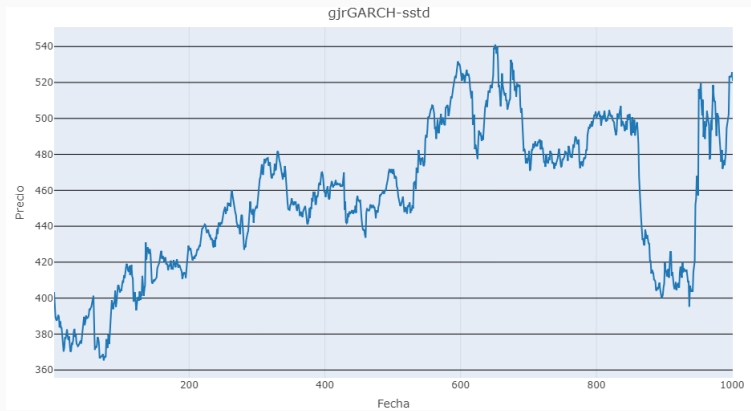


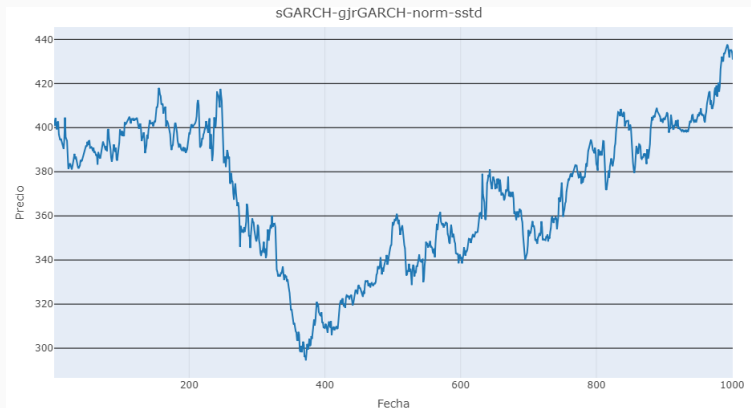
Figure 5: $p_t = -0.3p_{t-1} + 0.1p_{t-2} + 0.1a_{t-1} + a_t$,
 $std = 0.01065058$, $a_t \sim N(0, std^2)$











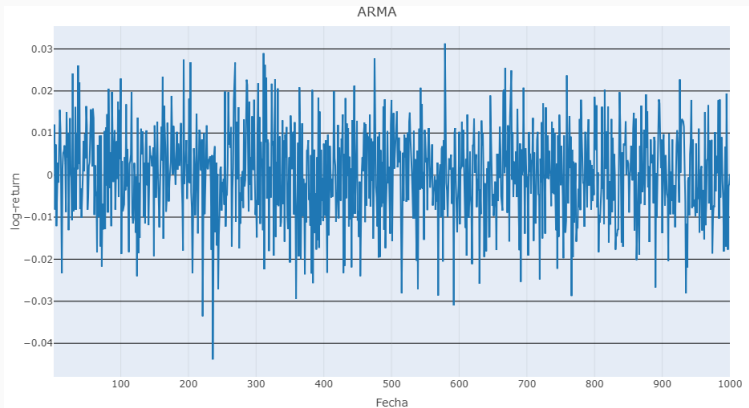
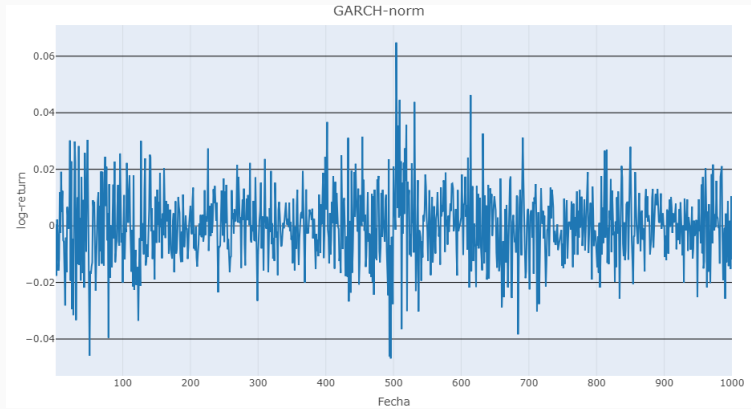
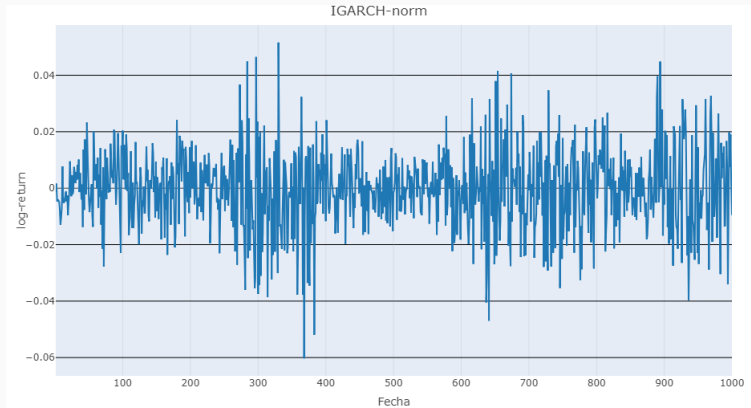
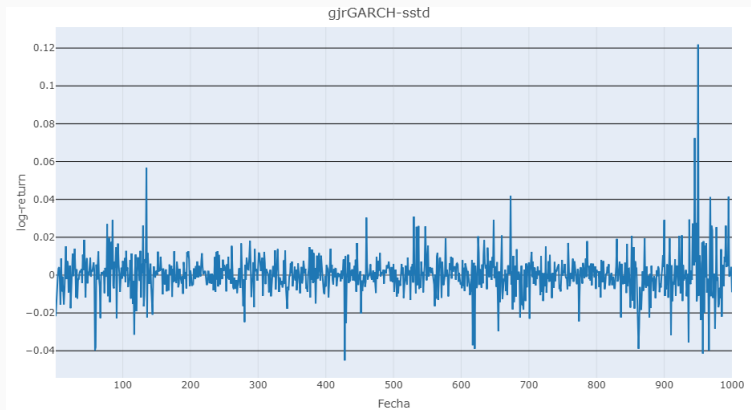
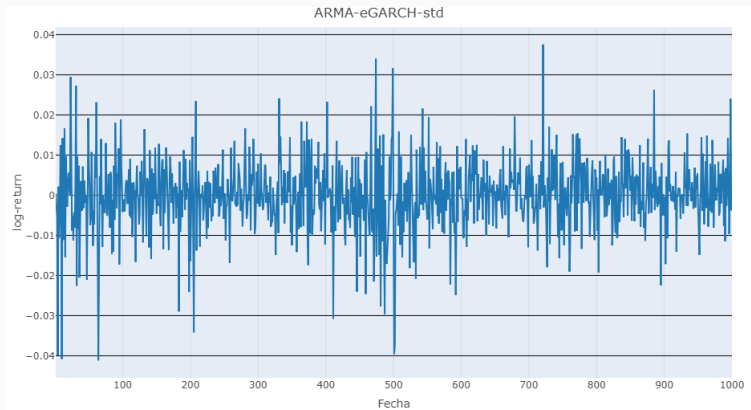


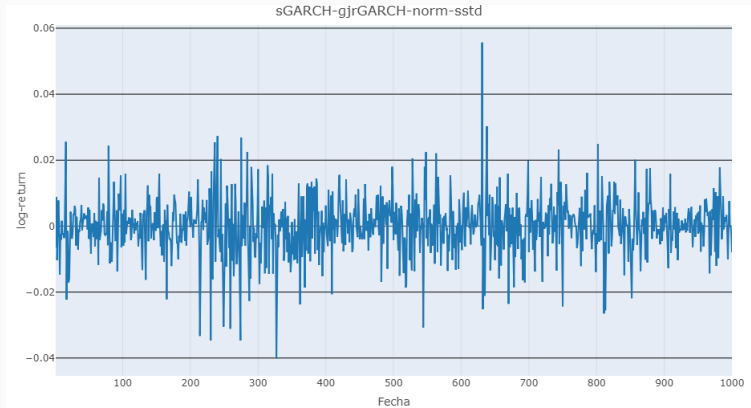
Figure 6: $p_t = -0.3p_{t-1} + 0.1p_{t-2} + 0.1a_{t-1} + a_t$,
 $std = 0.01065058$, $a_t \sim N(0, std^2)$











Incluyendo información adicional

ARMA-X

$$r_t = \phi + \underbrace{\sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i}}_{\text{autorregresivo}} + \underbrace{\sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}}_{\text{media móvil}} + \underbrace{\sum_{i=1}^b \eta_i u_i}_{\text{exógeno}} + \underbrace{a_t}_{\text{innovación}}$$

- Volumen de transacción
- Índice de sentimiento
- Índice de volatilidad (VIX)
- RSI, RVI, TRIX, VI, SMI...

- $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ proceso de baja frecuencia (LF)
- $\{x_\tau, \tau \in \mathbb{Z}\}$ un proceso de alta frecuencia (HF)

entonces en cada periodo t se observa el proceso x_τ en $m \in \mathbb{N}$ periodos de alta frecuencia con $\tau = (t - 1)m + j$, $j = 1, \dots, m$. entonces se tiene la regresión MIDAS:

MIDAS Regression

$$y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{tm-j} + \varepsilon_t$$

$m = 6, p = 1$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} x_6 & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{3n} & \dots & x_{3n-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Por cada observación de y_t se tienen 6 observaciones de x_τ

Teoría de portafolio

- Considerando r_i los retornos de los activos x_i
- Además, si r_i no es independiente de r_j
- Considerando una distribución normal

Entonces se tiene que $r = (r_1, \dots, r_n)^T \sim N_n(\mu, \Sigma)$.

Por lo tanto, si $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ son los pesos asignados a cada activo x_i :

- $w^T \mathbf{1} = 1$
- $w_i \geq 0 \ \forall i$ si no hay short selling
- $\Rightarrow w^T r \sim N(w^T \mu, w^T \Sigma w)$

Considerando el portafolio $P_w = w^T r$, se tiene que

- $E(P_w) = \mu_P = w^T \mu$
- $Var(P_w) = \sigma_P^2 = w^T \Sigma w \Rightarrow$ volatilidad o riesgo: $\sqrt{w^T \Sigma w}$
- $\min_i \mu_i \leq \mu_P \leq \max_i \mu_i$

Portafolio de mínima varianza

$$\begin{array}{ll} (PMV) & \min_w Var(P_w) = w^T \Sigma w \\ & s.a. \\ & w^T \mathbf{1} - 1 = 0 \\ & w_i \geq 0 \quad \forall i \end{array}$$

EF

$$\begin{aligned} (EF) \quad & \min_w \text{Var}(P_w) = w^T \Sigma w \\ & \text{s.a.} \\ & w^T \mathbf{1} - 1 = 0 \\ & E(P_w) = w^T r = r_p \\ & w_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Se resuelve para $r_p = w^T r_{PMV}$ hasta $r_p = \max\{r_i\}$ si es que no existe dominancia sobre $(r_{\max}, \sigma_{\max}^2)$, entonces se tiene una frontera en la cual se tienen todas las combinaciones de máximo retorno esperado dado un nivel de riesgo σ_p^2

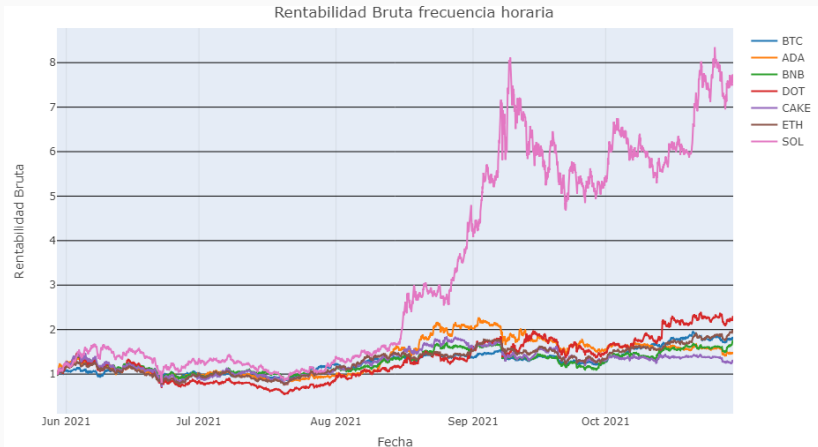
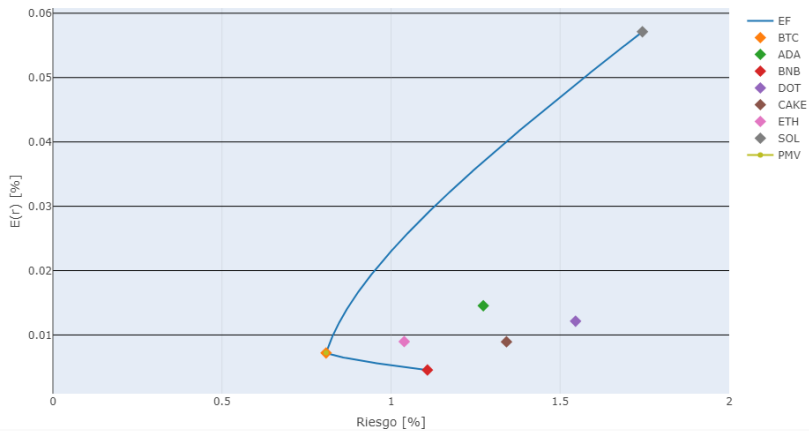
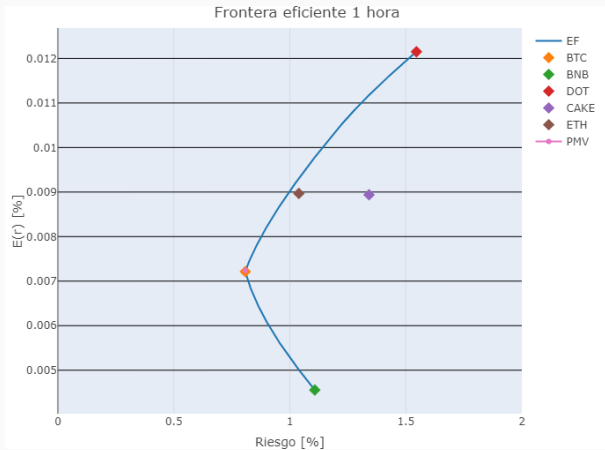


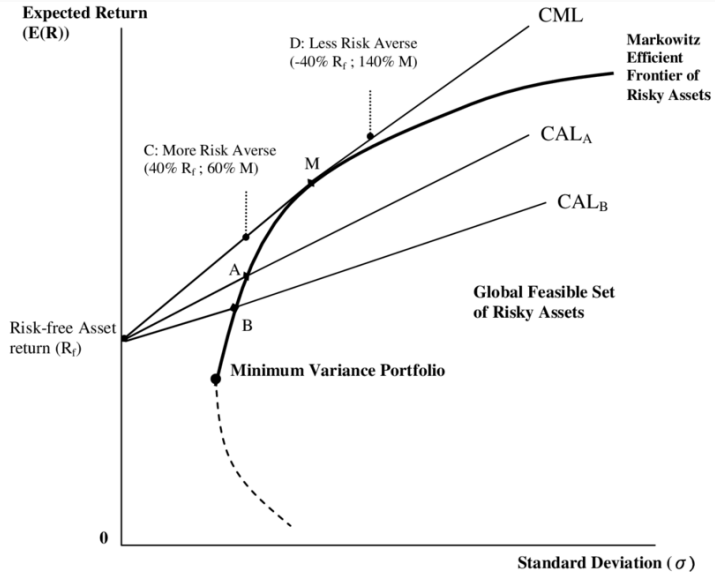
Figure 7: Rentabilidad bruta de los activos durante un periodo de 5 meses.

$$\text{Rentabilidad Bruta} = \frac{P_t}{P_0}.$$

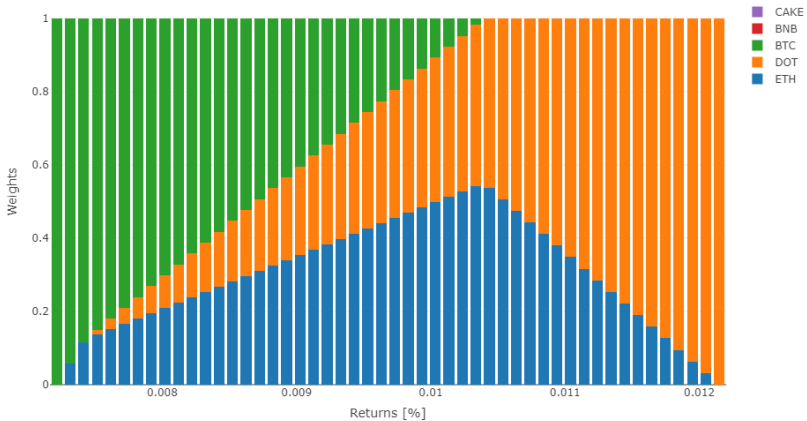
Frontera eficiente 1 hora







Distribución Markowitz



Estructura de portafolio

Considerando el sistema dinámico

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{t+1} = D(w_t, u_t, R_t) & 0 \leq t \leq T \\ w_0 = w_0 \\ I_j(t, w_t, u_t, R_t) \geq \theta_j & j = 1, 2, \dots, p \end{array} \right.$$

donde $w_t = (x_t, y_t)$ con x_t los cryptoactivos e y_t nuestro activo libre de riesgo (FIAT)
e.g. USDT y R_t el vector de retornos de los activos en tiempo t .

Se tiene que $w_t^T \mathbf{1} = 1$ y $0 \leq w_{i_t} \leq 1 \forall i, t$.

Entonces, si se tiene 700USD, con $w_t = (0.7, 0.3)$ y x_t tuvo una rentabilidad del 5% ($R_t = 0.05$)

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = D(w_t, R_t) = \frac{1}{x_t(1 + R_t) + y_t} \begin{pmatrix} x_t(1 + R_t) \\ y_t \end{pmatrix}$$

en monto se tendría 724.5USD y $w_{t+1} = (0.71, 0.29)$

o equivalentemente en monto (514.5, 210)

más generalmente, con $x_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n)})^T$ y $R_t = (R_t^{(1)}, \dots, R_t^{(n)})^T$

$$(x_{t+1}^T, y_{t+1})^T = \frac{1}{x_t^T(\mathbf{1}_n + R_t) + y_t} \text{diag}[\mathbf{1}_{n+1} + (R_t^T, 0)](x_t^T, y_t)^T$$

Entonces, aplicando una decisión de venta de activos en tiempo t , $u_t = (u_t^{(1)}, \dots, u_t^{(n)})$ asumiendo que se realiza al inicio del periodo t , es decir, al momento de realizarse la proporción del activo $x^{(i)}$ es exactamente $x_t^{(i)}$, por lo tanto, la cantidad de FIAT y_t crece y se tiene que:

$$y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

utilizando la convención de signo que $u^{(i)} > 0$ es compra y $u^{(i)} < 0$ es venta

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)} (1 + u_t^{(i)}) (1 + R_t^{(i)})}{(x_t + \sum_{i=1}^n e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T (\mathbf{1}_n + R_t) + y_t - u_t^T x_t}$$

En el caso de 2 activos:

$$\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(r_{1t}, r_{2t})}{\sqrt{\text{VaR}(r_{1t}) \text{VaR}(r_{2t})}}$$

entonces,

$$\text{VaR} = \sqrt{\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2\rho_{12} \text{VaR}_1 \text{VaR}_2}$$

En el caso de m activos:

$$\text{VaR} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \text{VaR}_i^2 + 2 \sum_{i < j}^m \rho_{ij} \text{VaR}_i \text{VaR}_j}$$

Coherencia

Una métrica de riesgo ρ aplicada a las posiciones \mathcal{Y} , \mathcal{Y}_1 y \mathcal{Y}_2 es coherente ssi cumple las siguientes condiciones ([Artzner et al. 1999](#)):

1. *Invarianza ante traslaciones:*

Sumando un retorno constante c al retorno total, el riesgo se reduce en la misma cantidad

$$\rho(\mathcal{Y} + c) = \rho(\mathcal{Y}) - c$$

2. *Homogeneidad:*

$$\rho(\lambda \mathcal{Y}) = \lambda \rho(\mathcal{Y}), \quad \lambda > 0$$

3. *Monotonicidad:*

Si la posición \mathcal{Y}_1 es 1° orden-estocásticamente dominante de la posición \mathcal{Y}_2 (\mathcal{Y}_1 tiene mayor retorno que \mathcal{Y}_2 en cualquier estado), entonces se tiene que

$$F_{\mathcal{Y}_1}(x) \leq F_{\mathcal{Y}_2}(x); \quad \rho(\mathcal{Y}_1) \leq \rho(\mathcal{Y}_2)$$

esto es, \mathcal{Y}_1 domina a \mathcal{Y}_2

4. *Subaditividad:*

$$\rho(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2) \leq \rho(\mathcal{Y}_1) + \rho(\mathcal{Y}_2)$$

Consistencia y Elicitabilidad

Considerando I el intervalo de los posibles resultados, y \mathcal{F} la CDF concentrada en I .

1. una función de Scoring es una función \mathcal{F} -integrable $S : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$
2. S es F -consistente para un funcional $T : \mathcal{F} \rightarrow I$ si
$$E(S(T(F)), F) \leq E(S(x, F)) \quad \forall F \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in I$$
3. S es estrictamente \mathcal{F} -consistente para T si es \mathcal{F} -consistente para T y
$$E(S(T(F)), F) = E(S(x, F)) \Rightarrow x = T(F) \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad \forall x \in I$$
4. Un funcional $T : \mathcal{F} \rightarrow I$ es elicitable si existe función de scoring estrictamente \mathcal{F} -consistente para la función T .

- **Coherencia** \Rightarrow medir riesgo apropiadamente en multiples posiciones.
- **Consistencia y Elicitabilidad** \Rightarrow Necesario para construir tests.

Quantile Loss

$$QL_t^\alpha(r_t) = (\alpha - I_t(\alpha))(r_t - VaR_t^\alpha)$$

FZL

De una familia más general (Fissler y Ziegel 2016), una forma particular:
(funciones de scoring fuertemente consistentes para VaR y ES)

$$S(VaR_t^\alpha, ES_t^\alpha, r_t) = \frac{1}{-ES_t^\alpha} \left(ES_t^\alpha - VaR_t^\alpha + \frac{(VaR_t^\alpha - r_t)1_{\{r_t < VaR_t^\alpha\}}}{\alpha} \right) + \ln(-ES_t^\alpha)$$

- **VaR** falla en la subaditividad (coherencia).
- **ES** falla en elicabilidad.
- **(VaR, ES)** es elicitable.

Modelos de precios y teoría de portafolio

Gabriel Vergara Schifferli

2 Noviembre 2021

Modelos de precios para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.