



Modelo de Z-Spread Crediticio para Mercado de Bonos Corporativos Nacionales

Gabriel Vergara S.^a

^a Estudiante Ingeniería Civil Matemática

Resumen

En este trabajo se propone un modelo de z-spread para cuantificar riesgo de crédito de contraparte utilizando información diaria de mercado de bonos corporativos nacionales. La novedad del modelo propuesto yace en la segregación de clases, donde no solo se comparan diferentes clasificaciones crediticias sino también diversos sectores industriales. Para esto se emplea un modelo basado en filtro de kalman para aprovechar la estructura de input dinámica y tener un modelo que responda a cambios estructurales en el mercado. Se obtuvo en total 46 clasificaciones diferentes de z-spread desde un universo de 26 sectores industriales y 18 califiaciones crediticias.

Palabras Clave:

Credit Risk, Counterparty Credit Risk, Z-Spread, Bond Market, Illiquid Market, Kalman Filter, PD-LGD

1. Introducción

El mercado de Bonos Corporativos Nacionales es un mercado de transacción infrecuente el cual contiene más de 20 sectores industriales diferentes de los cuales muy pocos de ellos son transados de manera diaria. A diferencia de los Bonos emitidos por instituciones consideradas libres de riesgo e.g. Banco Central de Chile, estos Bonos presentan un riesgo asociado a la capacidad de cumplimiento de sus obligaciones y es por este motivo que se cobra un premio por riesgo adicional en comparación a un Bono libre de riesgo de crédito. En el caso de un evento de Default, o un evento de crédito en el cual el emisor del Bono no pueda afrontar su obligación existe una pérdida asociada a los flujos de dinero futuros que se dejan de percibir como consecuencia del incumplimiento. Es por este motivo que el premio por riesgo de crédito cobrado se materializa en un castigo al precio del Bono. En este sentido, se puede descomponer este castigo como una probabilidad asociada a los eventos crediticios (Probabilidad de Default, o PD) y una pérdida asociada a este evento (LGD o Loss Given Default). Sin embargo, para poder cuantificar este castigo es necesario tener un valor referencial asociado a cómo sería el precio si el emisor estuviera libre de riesgo. Por ello, se establecen curvas de tasas asociadas al descuento empleado para cada flujo de dinero utilizando los Bonos libres de riesgo de crédito y en base a ello se obtiene un valor equivalente a si el emisor del Bono Corporativo fuese libre de riesgo por lo que sobre el valor presente libre de riesgo se cobra un premium en el cual se puede identificar, entre otros factores, la Probabilidad de Incumplimiento (o PD) y a la Pérdida dado el incumplimiento. Sumado a lo anterior, el problema que yace en el mercado de Bonos Corporativos Nacionales es el hecho de que se hace muy difícil establecer un valor

para este evento de crédito de un sector industrial y esto es aún más difícil en el caso de un emisor en particular. Para ello, se tienen distintas categorías crediticias de los emisores pero estas son generales para cualquier Bono y no necesariamente representan la condición del emisor puesto que no son actualizadas frecuentemente. En este sentido, es necesario cuantificar de manera segregada por sector industrial y clasificación crediticia esta Probabilidad de Incumplimiento y Pérdida asociada al incumplimiento para poder medir efectivamente los riesgos asociados a las posiciones generadas por la posesión de estos Bonos y así generar mecanismos que puedan cubrir estos riesgos de manera adecuada entre otras aplicaciones. Es en este contexto que se propone un modelo de Spreads Crediticios cuyo objetivo es establecer una cuantificación lo más segregada posible mediante una curva de descuento para cada sector y clasificación que relaciona esta Probabilidad de Incumplimiento con el castigo por riesgo observado en el precio de las transacciones diarias de los Bonos Corporativos.

1.1. Contexto General

En el marco de un mercado de Bonos Corporativos de transacción infrecuente, resulta ser difícil cuantificar el riesgos crediticio que afecta el precio de las transacciones, por lo que entre otros factores, la principal dificultad es tener un estado diario acerca de la calidad crediticia reflejada en los precios de mercado diarios, principalmente por su baja frecuencia de transacción. Actualmente, se cuenta con RiskAmerica para tener esta información, sin embargo, solo se tiene disponibilidad de curvas de descuento diarias con una segregación bien gruesa para bonos corporativos; AAA, AA y A, pero no se tiene información más fina acerca de las diferencias entre los sectores industriales.

Correo electrónico: gabriel.vergara@sansano.usm.cl (Gabriel Vergara S.)

2. Fundamentos Financieros

Esta sección tiene por objetivo establecer los fundamentos financieros necesarios para el desarrollo del modelo.

2.1. Bonos

Los bonos son instrumentos de deuda emitido por alguna entidad que busca financiamiento en el mercado como alternativa a créditos, emisión de acciones entre otros métodos de financiamientos. Estos instrumentos de renta fija consisten en un contrato de deuda desde el emisor del bono hacia el tenedor del bono. El contrato pactado contiene entre diferentes cláusulas un monto inicial denominado nominal, principal o nocional sobre el cual se otorgan pagos de interés según una tasa a fechas o plazos determinados los cuales son especificados por el emisor al momento de la emisión del bono.

Estos instrumentos son clasificados en dos grandes grupos; bonos soberanos y bonos corporativos.

Los bonos soberanos son aquellos que su emisor corresponde a una entidad gubernamental generalmente, en Chile corresponde a la Tesorería General de la República y al Banco Central de Chile, en Estados Unidos corresponden a la Reserva Federal por ejemplo.

Los Bonos Corporativos son emitidos por corporaciones que buscan fuentes de financiamiento en el mercado como alternativa a emisión o venta de acciones y créditos bancarios entre otros. Estos Bonos son contratos de deuda contra el emisor quien se compromete a pagar los intereses asociados de acuerdo a distintas estructuras como sería un Bono Cupón Cero o un Bono Bullet entre otros, los cuales tienen estructuras de pago diferentes, montos y plazos de vencimiento diferentes. A diferencia de Bonos emitidos por Instituciones libres de riesgo como por ejemplo el Banco Central de Chile, existe la posibilidad de que estas corporaciones no puedan cumplir con su obligación de deuda en cuyo caso, el bono se ve directamente afectado en un atraso de pago o en el peor caso un quiebre del contrato y pierda todo su valor. Es por ello que los bonos corporativos son castigados en su precio para reflejar esta componente de crédito que no existe en las instituciones libres de riesgo. Aún así, existen diferentes calidades crediticias de las corporaciones y estas mismas pertenecen a sectores económicos diferentes y por lo tanto están afectas a diferentes riesgos propios de su región, ciclo económico, estructura patrimonial entre otros.

2.2. Curvas de Tasas

En la forma más básica las tasas de interés pueden considerarse como tasa a interés simple o compuesto, en el primer caso considerando un monto unitario a una tasa del 5 % anual durante 2 años termina incrementando en $5\% \times 2$ o sea, al cabo de 2 años si se invierte una unidad a esta tasa por 2 años se obtiene un monto de 1.1, para el caso del interés compuesto, considerando una tasa nominal del 5 % con capitalización semestral, al cabo de 2

años se obtiene un monto de $(1 + \frac{5}{2 \times 100})^4 = 1,104$ aproximadamente. En ambas ocasiones se asume que la tasa futura seguirá siendo la misma, en el caso del interés simple, la tasa anual de hoy corresponde al 5 % pero también se asume que la tasa anual en un año más también será de 5 %.

En la realidad las tasas no se comportan de esta manera, las tasas de interés cambian diariamente de acuerdo a las expectativas económicas futuras reflejadas en las condiciones de mercado. Existen diferentes tasas para diferentes plazos y modelos que rescatan las dinámicas y estructuras que estas presentan, entonces para cada tiempo t se tiene una curva de tasa $r(\cdot, t)$ que determina la tasa a cada madurez o plazo de vencimiento. Como las tasas observadas son las tasas transadas en el mercado, existen diferentes componentes y riesgos que hacen variar esta estructura, entonces es común ajustar modelos para obtener las tasas de interés a cualquier plazo. Para esto se busca una curva cero cupón que permite descontar flujos futuros en plazos determinados a la tasa de mercado, e.g. si se espera un flujo en tiempo t de 1 unidad monetaria en 34 días, entonces el valor presente de ese flujo estará dado por $1 \cdot (1 + r(34 \text{ días}, t))^{-34 \text{ días}}$ o equivalentemente, $1 \cdot DF_t(34 \text{ días})$. Como no se tienen valores de tasa de mercado para todos los plazos posibles, es común ajustar un modelo o interpolar las tasas de mercado y obtener una curva interpolada para todos los plazos, generalmente utilizando splines.

Para obtener tasas libres de riesgo, o más bien curvas de tasas cero libres de riesgo, se utilizan las tasas de mercado dadas por instrumentos de renta fija soberanos como son los bonos en CLP (pesos chilenos) y CLF (uf) del Banco Central de Chile (BCP y BCU) y la Tesorería General de la República (BTP y BTU) cuyos plazos llegan hasta los 30 años.

2.3. Riesgo de Crédito

El riesgo de crédito se entiende como la pérdida generada por el incumplimiento de una obligación por una contraparte. Esto presume el riesgo de quiebra (la pérdida generada por la quiebra del prestatario dejando de percibir la deuda correspondiente) o una riesgo por baja en la calificación crediticia (riesgo de pérdida producida por el deterioro en la calidad crediticia de la contraparte que se traduce en un deterioro en algún sistema de calificación). El riesgo de crédito está siempre presente en los portafolios, dado que siempre que hay pagos futuros existe probabilidad de que estos no se cumplan, ya sean en bonos, acciones u otros instrumentos.

Producto de esto, existen diversos instrumentos derivados e.g. los *credit default swaps* o CDS los cuales conforman un contrato en base a un bono o institución en donde el comprador del CDS se compromete a pagar a plazos pactados un cierto monto (usualmente un porcentaje del interés del bono subyacente) hasta una determinada fecha (puede ser hasta el vencimiento del bono subyacente) a cambio de que el emisor del CDS se compromete

a cubrir parte del monto asociado a la pérdida generada por el default del bono subyacente e.g. un 60 % del valor nominal del bono. Entonces una institución A puede emitir un bono a 10 años que paga un 3 % de interés semestralmente, entonces una institución B emite un CDS de este bono, donde se asume que si la institución A hace default entonces paga inmediatamente el 40 % del nominal del bono y deja de pagar los intereses generados por lo que si el CDS cubre el 60 % del nominal, un inversionista puede comprar el bono de la institución A generando un interés del 3 % semestralmente pero expandiéndose a que el emisor del bono haga default y pague en ese momento el 40 % del bono, por lo que este opta por asegurar esta pérdida comprando un CDS de este bono con una prima del 1 % generando efectivamente un 2 % de interés y no un 3 % pero asegurando de que en caso de que la institución A quiebre recibe un pago del 40 % + 60 % sin generar pérdidas.

Esto motiva la necesidad de tener mecanismo que puedan cuantificar adecuadamente los riesgos de crédito que se exponen al adquirir diferentes instrumentos financieros, y la necesidad de cubrir los riesgos genera la existencia de mercados de instrumentos derivados que permitan responder a la necesidad.

2.4. Clasificación de Crédito

Existen diversas agencias internacionales que se dedican a establecer calificaciones crediticias que suministran calificaciones de crédito tanto al corto como al largo plazo para la deuda de corporaciones, bonos e instrumentos financieros en general. Para esto se establecen sistemas alfabéticos que determina la calificación, siendo propios de cada agencia.

Las principales agencias son Moody's, Standard & Poor's y Fitch donde en la tabla adjunta se muestra los rangos y tipos de calificaciones según sus sistemas:

donde la mayor calificación es Aaa en Moody's, AAA en S&P y Fitch.

El segmento *Investment Grade* se considera para calificaciones superiores a BBB o Baa mientras que instrumentos bajo esta calificación se asumen altamente especulativos y no son considerados como inversión (ver Figura 1).

2.5. PD-LGD-EAD

Independiente del instrumento de crédito que se opte, siempre estarán presentes 3 componentes principales; la exposición en el default (EAD), la probabilidad de default (PD) y la pérdida dado el default (LGD).

La exposición en el default o *exposure at default* corresponde al monto valorizado al momento del default. Si se realiza un préstamo o se compra un bono la exposición correspondería al principal en cuestión. Sin embargo, no es directo determinar efectivamente cuanto es la exposición e.g. si se tiene un bono cupón cero, con plazo al vencimiento en 2 años, considerando el valor nominal o principal como el 100 % (independiente del monto, sean 10.000

Moody'sSTANDARD & POOR'SFitchRatings						Rating description	
Long-term	Short-term	Long-term	Short-term	Long-term	Short-term		
Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+	Prime	
Aa1		AA+		AA+		High grade	
Aa2		AA		AA			
Aa3		AA-	AA-				
A1		A+	A-1	A+	F1	Upper medium grade	
A2	A	A					
A3	A-	A-		A-	F2		
Baa1	P-2	BBB+	A-2	BBB+		Lower medium grade	
Baa2		BBB		BBB	F3		
Baa3		BBB-		BBB-			
Ba1	P-3	BB+	A-3	BB+	B	Non-investment grade speculative	
Ba2		BB		BB			
Ba3		BB-		BB-			
B1		B+		B+		Highly speculative	
B2		B		B			
B3		B-		B-			
Caa1		CCC+	C	CCC+	C	Substantial risks	
Caa2		CCC		CCC			D
Caa3		CCC-		CCC-			
Ca		CC		CC	Extremely speculative		
C		C		C		Default imminent	
/		RD	D	RD	D		In default
/		SD		D			
/		D			/		

Figura 1: Tabla de clasificaciones de calidad crediticia por diferentes agencias.

UF, 1.000UF u otro valor todos los flujos y descuentos son en términos porcentuales utilizando este monto como base, de modo que se toma el valor nominal como 100 %) entonces si se toma el valor como el valor presente descontado a tasa libre de riesgo $r_f(\cdot, t)$:

$$Exp(t) = C_T \frac{1}{(1 + r_f(T - t, t))^{T-t}} \quad (1)$$

donde C_T corresponde al flujo del bono en tiempo T , luego el tiempo de madurez corresponde al tiempo que le queda para vencer, esto es, la diferencia del tiempo actual respecto al vencimiento $T - t$. De este ejemplo se puede ver que si se asume la exposición como el valor presente descontado a tasa libre de riesgo este valor va a variar conforme a la madurez del bono y por sobre todo las variaciones en las tasas producto por cambios en el mercado. Además de esto, si se desea buscar la EAD, se buscaría el valor de la exposición definida anteriormente al momento del default, por lo tanto ya no sería posible obtener una cantidad determinista.

Luego, cuando se mide el riesgo de pérdida producto por el incumplimiento o default de una contraparte durante un horizonte fijo, se está particularmente interesado en la probabilidad de default o PD a ese horizonte. Esta componente está estrechamente relacionada con la calidad crediticia del deudor. Por ejemplo, si se compra un bono cupón cero con vencimiento en tiempo T con una probabilidad de que al vencimiento de este el emisor haga default y no pueda pagar su obligación PD, entonces considerando que si este hace default se pierde todo el valor y no se realiza ningún pago entonces se podría considerar

como precio justo:

$$P(t) = (1 - PD)C_T \frac{1}{(1 + r_f(T - t, t))^{T-t}} \quad (2)$$

siendo el valor esperado en tiempo t . En este modelo se está asumiendo que la probabilidad de default PD es constante para todo tiempo en $[t, T]$ y además de que el evento de default ocurre solo en tiempo T . Por lo tanto, si se desea considerar algo más realista se debe buscar para cada tiempo t una probabilidad de default para cada tiempo $PD(\cdot, t)$.

Finalmente, la última componente esencial corresponde a la pérdida dado el default o *loss given default* (LGD). Este valor corresponde a la pérdida generada por el evento de default. En el ejemplo anterior se asumió que si ocurre un evento de default se realiza una pérdida total, es decir, la LGD corresponde al 100 %, pero este valor se determina por estudios financieros y sobre la estructura patrimonial del emisor entre otras. Como valor estándar en la industria financiera es usual utilizar una LGD del 60 %. Volviendo al ejemplo anterior, bajo este criterio se tiene un modelo algo más complejo:

$$P(t) = (1 - PD) \frac{C_T}{1 + r_f} + PD \cdot (1 - LGD) \frac{C_T}{1 + r_f} \quad (3)$$

Finalmente, si se consideran todos estos factores para un bono con flujos de pagos futuros $\{F_{t_i}\}_{i=1}^N$ con $t_N = T$ el tiempo de vencimiento, formulando el precio de mercado:

$$P(t) = G(T)VP(t) + (1 - LGD) \int_t^T VP(s) dPD(t, s) \quad (4)$$

donde $G(T)$ corresponde a la probabilidad de supervivencia del bono, la probabilidad de que se realice el último pago F_{t_N} , $dPD(t, s)$ el diferencial de la probabilidad de default desde t a s y $VP(t)$ el valor presente descontado a tasa libre de riesgo:

$$VP(t) = \sum_i^N \mathbf{1}_{t < t_i}(t) \frac{F_{t_i}}{(1 + r_f(t_i - t, t))^{t_i-t}} \quad (5)$$

Finalmente, se construye la ecuación anterior en términos de la exposición esperada:

$$E[P(t)] = G(T)VP(t) + (1 - LGD) \int_t^T EE(s) dPD(t, s) \quad (6)$$

donde $EE(s)$ corresponde al valor presente de la exposición esperada en tiempo $s > t$. Por lo tanto, se tienen esencialmente dos fuentes de incertidumbre producto de movimientos de mercado (EE) y por calidad crediticia (PD).

2.6. Zero Volatility Spread

EL z-spread corresponde a un spread constante tal que al descontar los flujos de un bono utilizando la curva libre

de riesgo más el z-spread coincide con el precio de mercado.

$$P(t) = \sum_i^N \frac{C_{t_i}}{(1 + r_f(t_i) + z)^{t_i}} \quad (7)$$

considerando $r_f(t_i) = r_f(t_i - t, t)$. De esta manera, este z-spread corresponde a un descuento que se le aplica al valor del bono producto por fuentes de incertidumbre relacionadas con la componente crediticia del emisor. Entonces, para un bono cupón cero se puede establecer una relación sencilla en términos de la PD y LGD considerando el z-spread:

$$P(t) = C_T \left(\frac{(1-PD)+PD(1-LGD)}{1+r_f+z} \right) \quad (8)$$

$$PD(z) = \frac{1}{LGD} - \frac{P(t)}{C_T \cdot LGD} (1 + r_f) - \frac{P(t)}{C_T \cdot LGD} z$$

por lo que este sencillo modelo permite ver que el par PD-LGD pueden determinarse a través del spread de crédito que se le cobra al bono.

2.7. Credit Value Adjustment

El *credit value adjustment* o ajuste de valoración crediticia (CVA) es la diferencia entre el valor del activo libre de riesgo y el valor real del activo que tiene en cuenta la posibilidad de incumplimiento de una contraparte. En otras palabras, CVA es el valor de mercado del riesgo de crédito de contraparte. Este precio depende de los diferenciales de crédito de la contraparte, así como de los factores de riesgo de mercado que impulsan los valores de los derivados y, por lo tanto, la exposición. CVA es uno de una familia de ajustes de valoración relacionados, colectivamente XVA. Luego, considerando independencia entre la exposición y la calidad crediticia de la contraparte y una LGD constante e invariante en el tiempo simplifica enormemente el análisis. Bajo esta suposición esto se simplifica a:

$$CVA = LGD \int_0^T EE(s) dPD(0, s) \quad (9)$$

donde T es el vencimiento del activo, LGD es la *Loss Given Default*, $E(t)$ es la exposición a tiempo t y $PD(0, t)$ es la probabilidad neutral al riesgo de incumplimiento de la contraparte entre los tiempos 0 y t . Este valor corresponde justamente la pérdida esperada que se genera por efectos de crédito en la ecuación (6). Además, este valor se considera para una cartera de activos no solo un único activo.

3. Objetivo del Modelo

El modelo desarrollado tiene por objetivo obtener un z-spread que refleje la calidad crediticia asociado a los diferentes sectores industriales del mercado nacional así también como las diferentes clasificaciones crediticias que cada emisor tiene. En el contexto nacional se presentan 26

sectores industriales diferentes, e.g. sector bancario, financiero, forestal, energético, eléctrico entre otros. Además de la etiqueta de sector industrial cada emisor tiene una calificación crediticia propia, en donde para este efecto se utilizará la escala de S&P.

La importancia de realizar esta segregación se da producto de que si bien se puede tener un bono emitido por una corporación perteneciente al sector bancario con calificación AA y otro correspondiente e.g. Foresta, también AA, el descuento que se le aplica al precio de sus bonos transados es diferente a pesar de que ambos tengan la misma calificación crediticia. Esta discrepancia se produce principalmente porque son industrias diferentes con ciclos productivos diferentes que también están sujetas a riesgos completamente diferente, por lo que sus fundamentos no permiten considerar el riesgo de ambos como iguales.

Finalmente, el uso esperado del modelo, si bien se entrega en un formato bastante general, es para cuantificar el riesgo de crédito asociado a las contrapartes del banco, en particular, obtener valores de CVA para la cartera de contrapartes, donde actualmente la segregación y gruesa y no se diferencian tipos de industria diferente, de esta manera, se busca obtener valores de CVA por contraparte individualizados por sector para la cartera en su totalidad.

4. Filtro de Kalman

El modelo de espacio de estado gaussiano lineal general se puede escribir de varias maneras, una de ellas es la siguiente

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q_t), \quad t = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

Donde y_t es un vector $p \times 1$ de observaciones y α_t es el vector no observado $m \times 1$. La idea que subyace al modelo es que el desarrollo del sistema en el tiempo está determinado por α_t de acuerdo con la segunda ecuación de (10), pero debido a que α_t no se puede observar directamente, debemos basar el análisis en las observaciones y_t .

La primera ecuación es llamada ecuación de observación mientras que la segunda se llama ecuación de estado. Las matrices Z_t , T_t , R_t , H_t y Q_t son asumidas conocidas y el error ε_t y η_t son asumidos independientes e independientes unos de otros en todos los puntos de tiempo.

Lemma 1: La distribución condicional de x dado y es normal con vector de media:

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \text{Var} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma'_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}(x | y) = \mu_x + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y) \quad (12)$$

y con matriz de varianza

$$\text{Var}(x|y) = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{xy} \quad (13)$$

Denotamos Y_{t-1} al conjunto de observaciones y_1, \dots, y_{t-1} para $t = 2, 3, \dots$ donde Y_0 indica que no existe información a priori antes de $t = 1$. En lo que sigue definimos Y_t como el vector (y_1^T, \dots, y_t^T) Partiendo de $t = 1$ en (10) y construyendo las distribuciones de α_t y y_t recursivamente es fácil ver que se satisface la propiedad markoviana $\mathbb{P}(y_t | \alpha_1, \dots, \alpha_t, Y_{t-1}) = \mathbb{P}(y_t | \alpha_t)$ y $\mathbb{P}(\alpha_t | \alpha_1, \dots, \alpha_t, Y_t) = \mathbb{P}(\alpha_{t+1} | \alpha_t)$.

En base a esto y al Lemma 1 es posible probar que la recursión de Kalman (Anexo 1) queda descrita por lo siguiente

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - Z_t a_t \\ a_{t|t} &= a_t + P_t Z_t' F_t^{-1} v_t \\ a_{t+1} &= T_t a_t + K_t v_t \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t \\ P_{t|t} &= P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t \\ P_{t+1} &= T_t P_t (T_t - K_t Z_t')' + R_t Q_t R_t' \end{aligned} \quad (15)$$

Para $t = 1, \dots, n$ donde $K_t = P_t Z_t' F_t^{-1}$ con a_1 y P_1 como el vector de medias y matriz de varianza para el vector inicial α_1 . La recursión (14),(15) es llamada **Filtro de Kalman**. Como $a_{t|t}$ y $P_{t|t}$ son calculados es suficiente adoptar la siguiente relación

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= T_t a_{t|t} \\ P_{t+1} &= T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t' \end{aligned}$$

Estimador de máxima verosimilitud: Consideraremos el caso particular de $R_t = I$ para todo t , es decir el filtro es

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q_t), \quad t = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

Luego

$$L(\theta, \{y_t\}_{t=1, \dots, n}) = \mathbb{P}(y_1(\theta)) \prod_{t=2}^n \mathbb{P}(y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}) \quad (17)$$

Donde θ son los parámetros del modelo y \mathcal{F}_t es la sigma álgebra con la información a tiempo t . Por lo tanto la log-verosimilitud conjunta será

$$\ln L_n(\theta) = \sum_{t=1}^n \ln \mathbb{P}(y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}) \quad (18)$$

Con $\mathbb{P}(y_0(\theta) | \mathcal{F}_0) = \mathbb{P}(y_1(\theta))$. Consecuentemente la probabilidad condicionada a la sigma álgebra tiene distribución normal con los siguientes parámetros

$$y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mathbb{E}[y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}], \text{Var}(y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1})) \quad (19)$$

La idea es calcular la esperanza y la varianza, como sabemos están distribuidos normales por lo tanto la función de log-verosimilitud conjunta es

$$\begin{aligned} \ln L_n(\theta) &= -\frac{np}{2} \ln 2\pi \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln |\text{Var}(y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1})| \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [y_t - \mathbb{E}[y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}]]' [\text{Var}(y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1})]^{-1} [y_t - \mathbb{E}[y_t(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}]] \end{aligned}$$

(20)

El cálculo de la esperanza condicional y la varianza se siguen de la estructura del Filtro de Kalman

$$\mathbb{E}[y_t(\theta)|\mathcal{F}_{t-1}] = Z_t \mathbb{E}[\alpha_t|\mathcal{F}_{t-1}] \quad (21)$$

$$\text{Var}(y_t(\theta)|\mathcal{F}_{t-1}) = Z_t \text{Var}(\alpha_t|\mathcal{F}_{t-1})Z_t' + H_t \quad (22)$$

Algorithm 1 Filtro de Kalman

Require: Θ, α_0, P_0

loglike $\leftarrow 0$

$\alpha_{0|0} = \alpha_0, P_{0|0} = P_0$

for $t = 1:N$ **do**

Predict Step:

$\alpha_{t|t-1} := E[\alpha_t|\alpha_{t-1}|_{t-1}] \leftarrow T_t \alpha_{t-1|t-1}$

$P_{t|t-1} := \text{Var}[\alpha_t|\alpha_{t-1}|_{t-1}] \leftarrow T_t P_{t-1|t-1} T_t' + Q_t$

Update Step:

$\hat{y}_t := E[y_t|\alpha_{t|t-1}] \leftarrow Z_t \alpha_{t|t-1}$

$F_t := \text{Var}[y_t|\alpha_{t|t-1}] \leftarrow Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t$

$K_t \leftarrow P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1}$

$\alpha_{t|t} \leftarrow \alpha_{t|t-1} + K_t (y_t - \hat{y}_t)$

$P_{t|t} \leftarrow (I - K_t Z_t) P_{t|t-1}$

$p_t \leftarrow \text{len}(y_t)$

 loglike $+= -\frac{p_t}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |F_t| - \frac{1}{2} (y_t - \hat{y}_t)' F_t^{-1} (y_t - \hat{y}_t)$

Además, se tiene que el filtro de kalman es óptimo en términos de error cuadrático y es más, la recursión sigue siendo válida para el caso no gaussiano.

4.1. Estructura de data incompleta

Este algoritmo tiene tres ventajas fundamentales; En primer lugar si para un tiempo t no se tienen observaciones y_t , entonces se tiene el valor estimado $\hat{y}_t = Z_t \alpha_{t-1}$ y se salta el paso de corrección aumentando la incertidumbre sobre el estado α_t , en segundo lugar, la dimensión de la variable observable no necesita ser determinada a priori, sino que esta puede ir variando en el tiempo y por último lugar, el algoritmo cambia los estados de manera dinámica conforme se obtiene nueva información incorporando cambios estructurales en la data, esto se lleva a cabo por la ganancia de kalman o también conocida como tasa de aprendizaje del modelo.

El Algoritmo 1 está implementado para estructura de data variable y en caso de no observar y_t el paso de corrección se omite.

5. Modelo de Z-Spread Corporativo

Considerando que se tienen las transacciones de bonos corporativos de diferentes sectores industriales y diferentes clasificaciones de riesgo, denotando a un bono del sector X con calificación crediticia Y en tiempo t como $B_{X,Y}^Y(t)$,

entonces se tienen sus flujos de pagos: $\{F_{X,k}^Y\}_k^N$. Luego considerando las tasas de interés continuamente compuesta, de este modo se tiene el valor presente:

$$VP(t) = \sum_i^N F_i e^{-r_f(t_i-t) \cdot (t-t_i)} \mathbf{1}_{t < t_i}(t) \quad (23)$$

entonces, considerando solo los flujos F de los bonos y m el tiempo al vencimiento ($m = t_i - t$), añadiendo el z-spread:

$$P(t) = F e^{-(r_f(m;t)+z) \cdot m} = F \cdot DF_{rf}(t) \cdot DF_{crd}(t) \quad (24)$$

luego, linealizando la ecuación anterior:

$$\ln(P_t) = \ln(F) - r_f(m; t)m - zm \quad (25)$$

considerando que el z-spread cambia con el tiempo y pertenece a una clase $j \in \mathcal{J}$ (sector industria y calificación crediticia) y el flujo pertenece a un bono k , se tiene que

$$\ln(P_t^k) = \ln(F^{k,j}) - r_f(m; t)m - z_t^j m \quad (26)$$

finalmente, considerando que hay un término de ruido producto de que el z-spread z_t^j es para el sector j y no para el bono k se tiene que

$$\ln(P_t^k) = \ln(F^{k,j}) - r_f(m; t)m - z_t^j m + v_t \quad (27)$$

entonces, considerando de que el z-spread tiene una estructura autorregresiva:

$$z_t^j = \mu_j + \phi z_{t-1}^j + \varepsilon_t \quad (28)$$

se puede reescribir en una estructura de espacio de estados lineal considerando $y_t^k = \ln(P_t^k) - \ln(F^{k,j}) + r_f(m; t)m$:

$$\begin{aligned} z_t^j &= \mu_j + \phi z_{t-1}^j + \varepsilon_t \\ y_t^{k_i} &= -m_{k_i} z_t^j + v_t \end{aligned} \quad (29)$$

donde el índice k_i corresponde al cupón i del bono k . Finalmente, ajustando el modelo en media $\tilde{y}_t^k = y_t^k + m\mu_j$ y expresándolo en forma matricial para todos los sectores y clasificaciones $j \in \mathcal{J}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \Phi \mathbf{x}_{t-1} + \varepsilon_t \\ \tilde{\mathbf{y}}_t &= H_t \mathbf{x}_t + v_t \end{aligned} \quad (30)$$

donde $x_t = z_t - \mu$, $\varepsilon_t \sim N_{\mathcal{J}}(0, Q)$ y $v_t \sim N_{n_t}(0, R_t)$.

Utilizando la característica del algoritmo de Kalman que si bien el espacio de estados \mathbf{x}_t está determinado por la cantidad de clases \mathcal{J} , la dimensionalidad de las observaciones y_t es variable en el tiempo, de esta manera, las matrices H_t y R_t son de dimensión variable, la cual corresponde a la cantidad de observaciones. La matriz R_t corresponde a la covarianza de las observaciones, donde para cada clase j se tiene un ruido homocedástico σ_j^2 mientras que para la matriz Φ se consideran que todos los z-spreads

dependen del sector bancario AAA ($j = 1$) puesto que es el sector más líquido y con mayor volumen de transacción diaria y también dependen de si mismo.

Considerando $J \in \mathbb{N}$ la cantidad de clasificaciones en \mathcal{J} , $N_t \in \mathbb{N}$ la cantidad de observaciones en tiempo t y considerando que las observaciones $\tilde{\mathbf{y}}_t$ están ordenadas por clase $j = 1, 2, 3, \dots, J$, con N_t^j la cantidad de observaciones de clase j en tiempo t , $\sum_{j \in \mathcal{J}} N_t^j = N_t$, entonces las matrices del sistema quedan con la estructura:

$$\begin{aligned} H_t &= \begin{pmatrix} -m_{k_1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -m_{N_t^1+1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -m_{\dots}^J \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -m_{N_t}^J \end{pmatrix} \\ R_t &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \sigma_J^2 \end{pmatrix} \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{3,1} & 0 & \phi_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{J,1} & 0 & 0 & \dots & \phi_{J,J} \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & v_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v_J^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

donde se tiene que $H_t \in \mathbb{R}^{N_t \times J}$, $R_t \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{J \times J}$, $Q \in \mathbb{R}^{J \times J}$, $\mu \in \mathbb{R}^J$, $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^J$ y $\tilde{\mathbf{y}}_t \in \mathbb{R}^{N_t}$.

Adicionalmente, se debe tomar en cuenta que para clases que son de baja transacción, el precio transado suele ser muy variable respecto a los demás sectores. Es por este motivo que se debe añadir al modelo un factor de descuento por iliquidez del activo, para esto en la ecuación (25) se incorpora un factor de descuento que aplica para cada bono individualizado considerando como métrica de interés el monto de la transacción puesto que si la transacción es de un monto muy elevado el precio se moverá demasiado. Entonces, se define la métrica de excedencia como:

$$DF_{iliq}(k; j) = e^{-\beta_j Ex(k; j)}, \quad Ex(k; j) = \frac{\max\{V(k) - q(0, 9; j), 0\}}{q(0, 9; j)} \quad (32)$$

donde $q(\alpha; j)$ corresponde al α cuantil histórico de los volúmenes de transacción de la clase j mientras que $V(k)$ corres-

ponde al volumen de la transacción k . Entonces la ecuación (24) con este elemento queda en la forma:

$$F_{k_i}^j e^{-(r_f(m; t) + z_t^j) \cdot m - \beta_j Ex(k; j)} = F_{k_i}^j DF_{rf}(t) DF_{crd}(t) DF_{iliq}(k) \quad (33)$$

y el modelo anterior sigue exactamente igual con un término adicional a considerar en $\tilde{\mathbf{y}}_t^{k_i}$ en la ecuación (30).

6. Datos

La principal fuente de los datos de mercado son obtenidos desde RiskAmerica quien también proporciona las curvas de tasas libres de riesgo obtenidas en base a los bonos de la Tesorería General de la República y del Banco Central de Chile.

Los datos utilizados para el estudio y calibración de parámetros corresponden a todas las transacciones de bonos corporativos nacionales registradas desde el 2016 en RiskAmerica, donde se tiene toda la información necesaria para desarrollar el modelo propuesto.

En la figura 2 se encuentra la cantidad de transacciones diarias disponibles por sector junto con otras estadísticas se

6.1. Estructura de Bono

Desde los bonos transados se tiene la información del emisor, la fecha de emisión, el flujo de pagos del bono, la fecha de vencimiento del bono, el sector industrial al que pertenece el emisor y por último la calificación crediticia del emisor.

6.2. Información de Mercado

La información de mercado obtenida desde RiskAmerica corresponde a una muestra de 1239 días hábiles, donde se tienen 26 sectores industriales y calificaciones crediticias desde AAA hasta D (Ver figura A.15).

	count	mean	std	min	25%	50%	75%	max
Banco	1239.0	61.142050	17.595275	18.0	50.0	60.0	72.0	147.0
Financiero	1239.0	8.377724	3.697708	0.0	6.0	8.0	11.0	28.0
Comercio	1239.0	5.288136	2.601437	0.0	3.0	5.0	7.0	17.0
Holding	1239.0	3.475383	1.941595	0.0	2.0	3.0	5.0	11.0
Eléctrico	1239.0	3.436642	1.979454	0.0	2.0	3.0	5.0	11.0
Sanitario	1239.0	2.573850	1.798176	0.0	1.0	2.0	4.0	10.0
Forestal	1239.0	2.368039	1.500720	0.0	1.0	2.0	3.0	9.0
Telecomunicaciones	1239.0	1.906376	1.318178	0.0	1.0	2.0	3.0	7.0
Transporte	1239.0	1.836965	1.519147	0.0	1.0	2.0	3.0	9.0
Energía	1239.0	1.764326	1.232694	0.0	1.0	2.0	3.0	7.0
Industrial	1239.0	1.534302	1.182223	0.0	1.0	1.0	2.0	7.0
Construcción	1239.0	1.216303	1.207820	0.0	0.0	1.0	2.0	9.0
Minero	1239.0	1.206618	1.063837	0.0	0.0	1.0	2.0	6.0
Bebidas	1239.0	0.979822	0.980626	0.0	0.0	1.0	2.0	6.0
Concesionaria	1239.0	0.792575	1.094003	0.0	0.0	0.0	1.0	6.0
Salud	1239.0	0.720743	0.796487	0.0	0.0	1.0	1.0	4.0
Vitivinicola	1239.0	0.615012	0.702730	0.0	0.0	1.0	1.0	4.0
Tecnológico	1239.0	0.589185	0.724538	0.0	0.0	0.0	1.0	3.0
Alimentos	1239.0	0.557708	0.747437	0.0	0.0	0.0	1.0	4.0
Factoring	1239.0	0.362389	0.604431	0.0	0.0	0.0	1.0	4.0
Educación	1239.0	0.348668	0.525117	0.0	0.0	0.0	1.0	2.0
Securizadora	1239.0	0.287328	0.594612	0.0	0.0	0.0	0.0	4.0
Entretenimiento	1239.0	0.277643	0.567347	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0
Inmobiliario	1239.0	0.128329	0.379818	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0
Leasing	1239.0	0.029056	0.168030	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
Infraestructura	1239.0	0.012107	0.109406	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

Figura 2: Resumen de estadísticas correspondientes a la cantidad de transacciones diarias por sector industrial del periodo de muestra de 1239 días hábiles.

6.3. Curvas soberanas

Las curvas soberanas corresponden a las curvas de tasas CLP y CLF correspondiente a los bonos soberanos, emitidos por la Tesorería General de la República y el Banco Central de Chile. Posteriormente estos valores que van de 1 día a 30 años son interpolados utilizando splines cúbicos para obtener las tasas a periodos arbitrarios durante el intervalo de interpolación.

7. Resultados

Debido a la falta de transacciones de algunos sectores y diferentes clasificaciones de riesgo, las clasificaciones fueron agrupadas en términos de su parte positiva y negativa, es decir, las clasificaciones AA+, AA y AA- fueron agrupadas en una sola clase denotada AA y del mismo modo se realiza para el resto. Entonces, considerando estas nuevas

clases agrupadas se obtuvo un total de 46 curvas de descuento o mas bien 46 z-spreads para estos sectores, los cuales se detallan en la figura 3. Se confirma la hipótesis de que a pesar de tener la misma calificación crediticia, los descuentos aplicados a los precios producto del riesgo de crédito medido a través del z-spread es diferente para diferentes industrias.

	AAA	AA	A	BBB
Alimentos	0	X	X	0
Banco	X	X	X	0
Bebidas	0	X	0	0
Comercio	0	X	X	X
Concesionaria	0	X	X	0
Construcción	0	0	0	X
Educación	0	0	X	0
Eléctrico	0	X	X	0
Energía	X	X	X	0
Entretenimiento	0	0	0	X
Factoring	0	X	X	0
Financiero	0	X	X	X
Forestal	0	X	0	0
Holding	0	X	X	0
Industrial	0	X	X	0
Inmobiliario	0	0	X	0
Minero	0	X	X	0
Salud	0	X	X	0
Sanitario	0	X	0	0
Securizadora	X	0	0	0
Tecnológico	0	X	0	0
Telecomunicaciones	0	X	X	0
Transporte	X	X	X	0
Vitivinicola	0	X	0	0

Figura 3: Curvas generadas, se marcan con X el sector y clasificación de riesgo agrupada disponible mientras que se denota con 0 las que no se tiene suficiente información diaria de mercado para poder inferir un valor razonable.

también se presentan algunos ejemplos de la valorización de bonos utilizando el modelo de z-spread en las figuras 4 hasta 8.

Bono: BAGRS-L Emisor: AGROSUPER Sector: Alimentos



Figura 4: Ejemplo de valorización de un bono correspondiente a Agrosuper, perteneciente al sector de alimentos con clasificación AA-. Línea calipso corresponde al valor presente del bono utilizando las curvas de tasas soberanas mientras que la línea roja corresponde al valor estimado con el modelo propuesto. Los puntos azules corresponden a los precios de mercado transados del bono durante el periodo.

Bono: BSTDSG1014 Emisor: BBSANT-CHI Sector: Banco

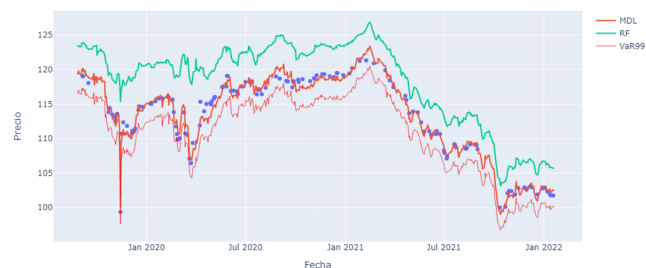


Figura 7: Ejemplo de valorización de un bono correspondiente a Santander Chile, perteneciente al sector banca con clasificación AAA. Línea calipso corresponde al valor presente del bono utilizando las curvas de tasas soberanas mientras que la línea roja corresponde al valor estimado con el modelo propuesto. Los puntos azules corresponden a los precios de mercado transados del bono durante el periodo.

Bono: BENDE-H Emisor: ENDESA Sector: Eléctrico

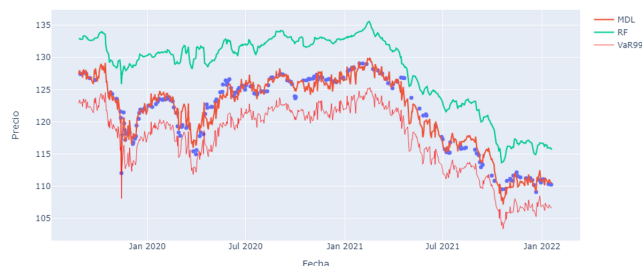


Figura 5: Ejemplo de valorización de un bono correspondiente a Endesa, perteneciente al sector eléctrico con clasificación AA. Línea calipso corresponde al valor presente del bono utilizando las curvas de tasas soberanas mientras que la línea roja corresponde al valor estimado con el modelo propuesto. Los puntos azules corresponden a los precios de mercado transados del bono durante el periodo.

Bono: BSPED-D Emisor: SAN PEDRO Sector: Vitivinícola



Figura 8: Ejemplo de valorización de un bono correspondiente a San Pedro, perteneciente al sector vitivinícola con clasificación AA-. Línea calipso corresponde al valor presente del bono utilizando las curvas de tasas soberanas mientras que la línea roja corresponde al valor estimado con el modelo propuesto. Los puntos azules corresponden a los precios de mercado transados del bono durante el periodo.

Bono: BSOQU-H Emisor: SOQUIMICH Sector: Minero



Figura 6: Ejemplo de valorización de un bono correspondiente a Soquimich, perteneciente al sector minero con clasificación AA. Línea calipso corresponde al valor presente del bono utilizando las curvas de tasas soberanas mientras que la línea roja corresponde al valor estimado con el modelo propuesto. Los puntos azules corresponden a los precios de mercado transados del bono durante el periodo.

7.1. Z - Spreads

Respecto a los z-spreads obtenidos de la información de mercado utilizada, se muestran para los mismos ejemplos de valorización las series de los z-spreads obtenidas para estos 5 sectores en la figura 9 junto a las volatilidades condicionales medidas mediante un modelo EWMA en la figura 10. Se logra apreciar para las fechas de mediados de octubre de 2019 correspondientes al estallido social hay un aumento sustancial en el z-spread de todos los sectores y también para la fecha del inicio de la pandemia de COVID a inicios del 2020. Para el sector vitivinícola el cual presenta una muy baja transaccionalidad, se logra tras pasar la volatilidad y el incremento sistémico del riesgo crediticio del sector utilizando la información de mercado disponible.

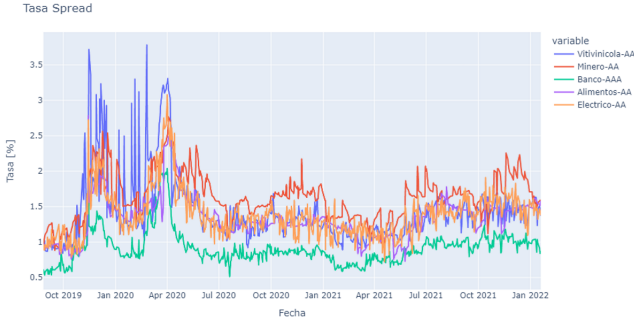


Figura 9: Serie de z-spreads para las clases Vitivinícola-AA, Minero-AA, Alimentos-AA, Eléctrico-AA y Banco-AAA.

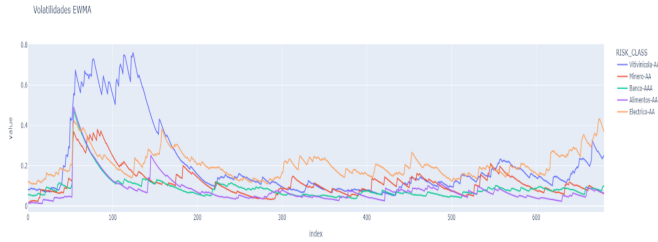


Figura 10: Volatilidades de serie de z-spreads para las clases Vitivinícola-AA, Minero-AA, Alimentos-AA, Eléctrico-AA y Banco-AAA.

7.2. Backtest de riesgo

El backtest de validación consiste en contrastar los precios de transacciones observados para las fechas posteriores a la ventana de tiempo empleada para la estimación de parámetros y distribución de errores.

El error del modelo se estructura como un error multiplicativo respecto al precio transado:

$$\text{Precio Transado} = \text{Precio Modelo} \times (1 + \text{error}) \quad (34)$$

Para estimar la distribución del error, se utilizó la distribución empírica histórica estimada a través de una ventana de tiempo móvil en la cual también se realiza la estimación de los parámetros del modelo. Esto fue considerando transacciones desde 2018-12-06 hasta 2022-01-19 siendo un total de 778 días de registro utilizando 545 días para la estimación de los parámetros.

Con este error, se procedió a obtener los cuantiles empíricos, para esto se utilizaron los intervalos de confianza de 1 %, 5 %, 10 % y 20 % a dos colas junto con los mismos a una cola. Es importante considerar que en muchas ocasiones es de mayor relevancia obtener la cola izquierda o inferior de la distribución, puesto que esto da a conocer el valor mínimo con cierto nivel de confianza y en particular para este caso, el valor máximo puede considerarse el precio sin descuento de crédito, es decir, el valor equivalente libre de riesgo como valor máximo. Luego, con estos resultados se obtuvo los errores para las transacciones del periodo que quedó fuera de la estimación. Entonces se

testean los respectivos cuantiles para estos valores, para esto se utilizó el test de cobertura incondicional, UC (Kupiec 1995). Para esto, se cuenta la cantidad de veces que el error cae fuera del intervalo de confianza, si es un intervalo a dos colas, se denomina hit cuando el error cae fuera de estos dos límites, si es un intervalo a una cola, e.g. $q(0.01)$, se considera hit cuando el error es menor a $q(0.01)$. Luego, si estos hits son independientes, entonces:

$$I(x) = 1 \text{ si } x \in \Theta$$

$$I(x) = 0 \text{ e.o.c.} \quad (35)$$

donde Θ el intervalo $(-\infty, q(\alpha))$ o bien $(q(\alpha), q(1 - \alpha))$ en caso de ser un intervalo de confianza. Entonces, bajo la correcta especificación, se tiene que $I(x) \sim \text{Bernoulli}(\alpha)$ por lo tanto se construye el test de razón de verosimilitudes donde la función de verosimilitud de la muestra es:

$$L(\pi) = \prod_i (1 - \pi)^{1 - I(x_i)} \pi^{I(x_i)} = (1 - \pi)^{T_0} \pi^{T_1} \quad (36)$$

donde T_0 es la cantidad total de veces que $I(x) = 0$, mientras que T_1 es la cantidad total de hits. Luego, el estimado máximoverosimil de α :

$$p_{MLE} = \frac{T_1}{T_0 + T_1} \quad (37)$$

finalmente, se tiene el estadístico de razón de verosimilitudes:

$$LR_{UC} = -2 \ln \left(\frac{L(p)}{L(p_{MLE})} \right) \sim F \xrightarrow{d} \chi^2(1) \quad (38)$$

el cual tiene una distribución asintótica chi cuadrado con 1 grado de libertad, por lo tanto, se prueba la hipótesis:

$$H_0: \pi = p \text{ v/s } H_1: \pi \neq p \quad (39)$$

Por tanto, se tiene la regla de rechazo:

$$\begin{aligned} \text{Se acepta } H_0 \text{ si: } LR_{UC} &< \chi^2_{1-\alpha}(1) \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si: } LR_{UC} &\geq \chi^2_{1-\alpha}(1) \end{aligned} \quad (40)$$

Para el caso de que $p_{MLE} = 0$ el estadístico no está definido, por lo tanto se testea directamente con la distribución binomial:

$$\begin{aligned} \text{Se acepta } H_0 \text{ si: } P(X = 0) &> \alpha \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si: } P(X = 0) &\leq \alpha \end{aligned} \quad (41)$$

Implementar otros test para validar el modelo se vuelve complicado, dado que las curvas obtenidas son globales para el sector y cada bono tiene su propia estructura de flujos y tiempo por lo que utilizar otros tests sobre la independencia es poco factible dado que se tendría que tener transacción de un mismo bono durante todo el periodo, lo cual no se tiene. Este último elemento hace difícil construir un test con dependencia temporal y deben ser realizados sobre el resultado global de cada sector y no individualizado por bono. En la figura 11 se muestran los resultados del test aplicado para las diferentes clases.

RISK_CLASS	hit99_2s	hit95_2s	hit95_1s	hit80_2s	hit99_1s	hit95_1s	hit80_1s
Banco-AA	22.170000	0.140000	0.000000	0.000000	0.090000	0.000000	0.000000
Holding-AA	25.750000	9.770000	88.530000	0.060000	25.750000	46.970000	0.030000
Industrial-AA	51.000000	3.220000	9.420000	45.270000	51.000000	41.470000	77.210000
Energía-AA	94.150000	73.510000	53.140000	26.210000	94.150000	73.510000	53.140000
Banco-AAA	0.000000	21.880000	19.450000	0.430000	3.800000	0.000000	0.000000
Electrico-AA	48.990000	10.280000	0.290000	0.220000	48.990000	2.620000	18.490000
Financiero-A	35.640000	0.760000	0.160000	0.490000	35.640000	81.810000	73.790000
Financiero-AA	11.190000	0.910000	0.010000	0.900000	2.940000	0.000000	0.000000
Salud-AA	98.010000	6.840000	15.290000	34.480000	98.010000	90.250000	81.000000
Telecomunicaciones-AA	1.920000	19.670000	5.870000	4.660000	58.120000	64.750000	78.880000
Banco-A	19.210000	82.050000	8.740000	14.280000	50.490000	3.060000	2.430000
Sanitario-A	83.780000	24.850000	97.040000	53.380000	44.300000	35.200000	30.560000
Energía-AAA	18.750000	0.020000	0.000000	0.000000	82.620000	37.740000	13.510000
Vitivinícola-AA	83.450000	39.720000	15.010000	81.610000	83.450000	39.720000	12.930000
Bebidas-AA	17.640000	91.530000	87.710000	71.770000	83.450000	91.530000	87.710000
Forestal-AA	58.700000	23.600000	8.720000	9.120000	56.330000	66.910000	25.520000
Educación-A	94.150000	73.510000	53.140000	26.210000	94.150000	73.510000	53.140000
Construcción-BBB	52.560000	46.100000	3.440000	0.040000	52.560000	3.750000	0.590000
Alimentos-AA	0.340000	9.450000	7.950000	14.890000	0.340000	9.450000	34.600000
Holding-A	67.600000	14.240000	11.750000	11.270000	52.560000	3.750000	11.750000
Electrico-A	64.910000	37.080000	72.800000	87.950000	64.910000	8.620000	3.410000
Tecnológico-AA	75.470000	23.780000	5.230000	0.190000	75.470000	23.780000	5.230000
Telecomunicaciones-A	81.790000	36.340000	100.000000	66.260000	81.790000	100.000000	41.370000
Comercio-AA	31.170000	0.260000	0.000000	0.000000	31.170000	0.260000	0.000000
Financiero-BBB	72.500000	60.220000	0.000000	0.000000	72.500000	60.220000	1.510000
Transporte-AAA	91.350000	46.530000	28.340000	34.900000	91.350000	7.520000	28.340000
Alimentos-A	86.870000	48.770000	61.310000	5.240000	86.870000	72.890000	5.200000
Transporte-AA	3.840000	68.960000	51.960000	100.000000	73.970000	21.460000	51.960000
Transporte-A	94.150000	73.510000	53.140000	26.210000	94.150000	73.510000	53.140000
Comercio-A	46.590000	29.930000	13.350000	0.340000	46.590000	29.930000	4.760000
Concesionaria-A	23.250000	0.000000	0.020000	3.530000	79.360000	88.340000	31.390000
Industrial-A	62.980000	32.410000	1.940000	0.100000	62.980000	0.960000	12.600000
Inmobiliario-A	92.270000	66.340000	43.050000	73.110000	92.270000	66.340000	43.050000
Minero-AA	97.030000	85.740000	27.180000	58.870000	97.030000	12.310000	27.180000
Salud-A	79.360000	88.340000	27.930000	23.580000	79.360000	30.740000	31.390000
Securitizadora-AAA	96.060000	81.450000	65.610000	40.960000	96.060000	81.450000	65.610000
Comercio-BBB	86.010000	0.000000	0.000000	0.000000	86.010000	0.060000	0.030000
Energía-A	94.150000	73.510000	53.140000	26.210000	94.150000	73.510000	53.140000
Concesionaria-AA	83.450000	39.720000	49.610000	7.920000	83.450000	39.720000	15.010000
Minero-A	54.720000	4.610000	0.880000	8.550000	54.720000	4.610000	15.680000
Factoring-A	85.150000	44.010000	29.160000	62.690000	85.150000	44.010000	59.370000
Factoring-AA	86.010000	46.330000	20.590000	100.000000	86.010000	46.330000	64.880000
Entretimiento-BBB	97.030000	85.740000	72.900000	51.200000	97.030000	85.740000	72.900000

Figura 11: Tabla resumen de p-valores de backtest de riesgo utilizado. Para una significancia del 5% el p-valor debe ser menor al 5% para rechazar la hipótesis nula, es decir, para invalidar el cuantil estimado utilizando la distribución empírica histórica estimada.

7.3. Benchmark CVA: Yields

Para utilizar el modelo de z-spread en la valorización del CVA de contrapartes del banco es necesario realizar una homologación de calificación crediticia, esta homologación se presenta en la figura 12.

	MOODY'S	S & P	FITCH	Equiv. Categ.	Equiv. Categ.	Fitch Chile	Humphrey	ICR Chile	DBRS
	Largo plazo	Largo plazo	Largo plazo	Escala Interna	Escala Nac.				
Premium	Aaa	AAA	AAA	A1	A1	AAA	AAA	Aaa	AAA
Alto grado	Aa1	AA+	AA+			AA+	AA+	Aa1	AA+
	Aa2	AA	AA			AA	AA	Aa2	AA
	Aa3	AA-	AA-			AA-	AA-	Aa3	AA-
Grado alto medio	A1	A+	A+			A+	A+	A1	A+
	A2	A	A			A	A	A2	A
	A3	A-	A-	A2		A3	A3	A-	A-
Grado bajo medio	Baa1	BBB+	BBB+			BBB+	BBB+	Baa1	BBB+
	Baa2	BBB	BBB			BBB	BBB	Baa2	BBB
	Baa3	BBB-	BBB-			BBB-	BBB-	Baa3	BBB-
Grado de no inversión	Ba1	BB+	BB+			BB+	BB+	Ba1	BB+
	Ba2	BB	BB			BB	BB	Ba2	BB
	Ba3	BB-	BB-			BB-	BB-	Ba3	BB-
Altamente especulativo	B1	B+	B+			B+	B+	B1	B+
	B2	B	B			B	B	B2	B
	B3	B-	B-			B-	B-	B3	B-
Riesgos sustanciales	Caa1	CCC+	CCC						

Figura 12: Tabla de equivalencia de clasificaciones crediticias en diferentes sistemas de clasificación.

Los CVA son calculados por el proveedor Yields, quien se encarga de realizar los procesos de cuantificación de la cartera de contrapartes del banco y explicar el detalle de todos los movimientos respecto a los CVA de la cartera. El método utilizado para la estimación de CVA consiste en ajustar un modelo de tasa que rescate las característi-

cas fundamentales que describen las curvas de tasas y su dinámica. Para esto se emplea un modelo de vacisek:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (42)$$

el cual corresponde a un proceso de Ornstein-uhlenbeck, donde $r(t)$ corresponde a la tasa corta o tasa de interés instantánea, θ corresponde a la media, σ la volatilidad, κ la velocidad de reversión a la media y $dW(t)$ al diferencial browniano. Luego, con este modelo se simulan las tasas soberanas hasta el plazo al vencimiento T .

Respecto a la PD, para obtener las curvas de PD se utilizan un modelo de cadenas de markov discretas $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ con $X_t \in \mathcal{S}$, donde el espacio de estados \mathcal{S} es discreto y corresponde a las diferentes clasificaciones crediticias A1, A2,... A6, B1, ... B4 y C1 donde este último corresponde a una contraparte en default. De esta manera, se estiman las probabilidades de transición de los estados $P(X_t = j|X_{t-1} = i) = \pi_{ij}$ con $j, i \in \mathcal{S}$ representando la clasificación de crédito. Entonces, se obtiene la matriz de transición $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$, de esta manera dado el estado actual $X_0 = j$, se tienen las transiciones

$$\pi(t) = \pi(t-1)\Pi, \quad \pi(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (43)$$

$$\pi(t) = \pi(0)\Pi^t \quad (44)$$

donde $\pi(t)$ corresponde a la distribución de probabilidad en tiempo t , por lo que si se conoce el estado inicial la probabilidad de pertenecer a ese estado es 1.

De esta manera, asumiendo $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, D\}$, donde un estado con un mayor valor representa un riesgo de crédito más alto hasta llegar al estado terminal y absorbente D de default. Entonces, para obtener la probabilidad de default en tiempo t dado un estado inicial j se calcula :

$$PD(T) = P(X_T = D|X_0 = j) = (\pi(0)\Pi^T)_D \quad (45)$$

de esta manera se obtiene una curva de PD en función del tiempo.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1
A1	98.0%	1.7%	0.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A2	0.3%	98.4%	1.2%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A3	0.0%	0.4%	97.6%	1.6%	0.3%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A4	0.0%	0.0%	0.5%	98.1%	1.1%	0.2%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A5	0.0%	0.0%	0.1%	1.3%	97.8%	0.4%	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%
A6	0.0%	0.0%	0.1%	0.4%	1.0%	97.9%	0.6%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%
B1	0.0%	0.0%	0.1%	1.1%	1.3%	1.7%	94.1%	0.5%	0.3%	0.3%	0.5%
B2	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.8%	1.1%	0.5%	93.3%	0.9%	1.6%	1.6%
B3	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	1.0%	0.7%	1.0%	0.7%	88.8%	2.6%	4.8%
B4	0.0%	0.0%	0.0%	0.6%	1.0%	0.4%	1.1%	0.3%	0.3%	91.1%	5.2%
C1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%

Figura 13: Matriz de transición de clasificaciones crediticias.

La simulación de tasas junto con las transiciones de estado crediticio se realizan a una frecuencia mensual. Finalmente, para obtener la estimación del CVA:

$$CVA = (1 - LGD) \sum_{j=1}^T DF_{r_f}(t_j) EE(t_j) (PD(t_j) - PD(t_{j-1})) \quad (46)$$

Por lo tanto, para no fabricar el motor de simulación nuevamente, para realizar una comparación del modelo de z-spread contra el modelo proporcionado por Yields, para la estimación del CVA se utilizan los mismos valores de exposición esperada y factores de descuento siendo el la PD el único elemento que cambia en la forma de cálculo.

Para estimar la curva de PD utilizando el z-spread se puede realizar una aproximación reemplazando $(PD(t_j) - PD(t_{j-1})) \approx 1 - e^{-X t_j}$ donde X corresponde a la clasificación crediticia. A modo de ejemplo se muestra la valorización del CVA para una contraparte correspondiente al sector bancario con clasificación interna A1 utilizando el z-spread de la clase banco-AAA.

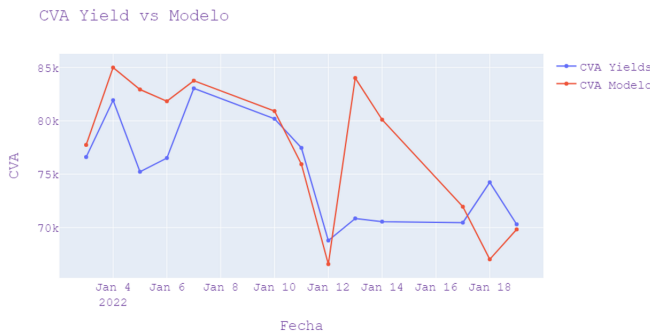


Figura 14: Comparación de CVA estimado por modelo de z-spread versus el valor entregado por el proveedor Yields. Curva azul corresponde al valor de Yields mientras que curva roja al modelo de z-spread. En el periodo del 13 de enero hasta 17 de enero el valor entregado por Yields es erróneo, puesto que desde la mesa de XVA, quienes operan los productos financieros para gestionar los riesgos de contraparte, notificaron que ingresaron mal la data a Yields.

8. Conclusiones

Este trabajo ha abordado distintos aspectos dentro de los bonos corporativos. Se destacan algunos aspectos como por ejemplo el modelamiento de curvas de bonos corporativos a partir de bonos libres de riesgo o soberanos, diferentes clasificaciones crediticias y sectores industriales además de utilizar todas las transacciones de bonos corporativos.

Por el lado del modelo, el Filtro de Kalman se adapta a situaciones en donde se tiene data incompleta, rellenando ese valor con un estimado. También se adapta a un input variable pues las dimensiones de variable observada no están fijas y pueden variar con el tiempo, lo que no afecta el algoritmo. Esta característica es fundamental para poder modelar la estructura de datos que se tiene. Por último el filtro de Kalman es un modelo adaptivo que se corrige por sí solo y responden de manera adecuada a cambios estructurales o sistémicos del mercado. Esto se aprecia directamente para los eventos del estallido social en octubre del 2019 y el inicio de la pandemia para marzo de 2020.

Por el lado el test diseñado (Figura 11) a pesar de que

son intertemporales (se utilizan ventanas de tiempo acotadas para acumular suficiente información) estos reflejan el riesgo de cada sector de manera consistente en términos de volatilidad o variabilidad del z-spread, pero en los sectores bancarios más líquidos siendo el sector bancario AAA y AA, el modelo no logra capturar de manera adecuada la complejidad de su dinámica utilizando 1 solo factor. Para una investigación futura implementar un modelo de curvas con mayor estructura como podría ser modelos de 3 factores de Nelson & Siegel o un modelo de Vasicek o multifactorial que son ampliamente utilizados para modelar curvas de tasas.

Referencias

- [1] Dourbin J. Koopman S.J., 2012. *Time Series Analysis by State Space Methods*, Second Edition. Oxford Statistical Science Series.
- [2] Lütkepohl H., 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- [3] McNeil A. J. Frey R. Embrechts P., 2015. *Quantitative Risk Management, Concepts, techniques & Tools*. Princeton Series in Finance.
- [4] Gregory J., 2012. *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment, A Continuous Challenge for Global Finance*, Second Edition. Wiley.
- [5] Gonzalo Cortazar, Eduardo S. Schwartz & Claudio Tapia (2012) *Credit Spreads in Illiquid Markets: Model and Implementation*, *Emerging Markets Finance and Trade*, 48:6, 53-72

Apéndice A.

	Banco	Financiero	Comercio	Holding	Eléctrico	Sanitario	Forestal	Telecomunicaciones	Transporte	Energía	Industrial	Construcción	Minero	Bebidas	Concesionaria	Salud	Vitivinícola	Tecnológico	Alimentos	Factoring	Educación	Securizadora	Entretenimiento	Inmobiliario	Leasing	Infraestructura	Total
AAA	46792	42	42	0	0	0	0	0	282	348	0	380	168	0	245	0	0	0	0	0	0	211	0	0	0	0	48510
AA+	966	164	598	1066	982	1202	0	17	327	411	0	0	0	248	5	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	6018
AA	18397	2697	2495	1764	931	1584	192	1942	0	624	254	0	221	770	135	252	1	0	0	0	0	98	0	0	0	0	32357
AA-	7583	5169	1885	105	1531	312	2533	70	474	668	1211	0	65	196	222	270	725	730	321	171	0	7	0	0	0	0	24248
A+	1804	1126	18	721	757	91	0	333	0	18	257	93	707	0	326	0	36	0	36	38	0	5	0	12	0	0	6378
A	183	316	435	607	57	0	0	0	0	117	64	15	178	0	45	0	0	0	299	130	142	7	9	147	0	13	2764
A-	0	217	270	43	0	0	0	0	106	0	115	0	156	0	2	371	0	0	0	110	290	0	64	0	26	2	1772
BBB+	10	133	229	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	106	0	10	0	525
BBB	0	0	212	0	0	0	70	0	14	0	0	810	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	73	0	0	0	1184
BBB-	0	194	148	0	0	0	135	0	834	0	0	209	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4	71	0	0	0	1597
BB+	0	66	65	0	0	0	0	0	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	34	0	0	0	0	0	0	0	191
BB	0	103	2	0	0	0	4	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	117
BB-	0	92	140	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	232
B+	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
B	0	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	61
B-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	0	0	5	0	0	0	0	0	73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6	0	0	0	87
D	0	0	4	0	0	0	0	0	99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	118
TOTAL	75755	10380	6552	4306	4258	3189	2934	2362	2276	2186	1901	1507	1495	1214	982	893	782	730	691	449	432	355	344	159	36	15	129163

Figura A.15: Matriz de cantidad de bonos transados desde 2016 hasta enero 2022 en mercado nacional. Contiene 26 sectores industriales y 18 calificaciones crediticias. Datos están ordenados de forma descendente de izquierda a derecha y arriba hacia abajo, donde el sector más transado es el bancario AAA.