Ejemplo de sistema dinámico

Gabriel Vergara Schifferli

30 Noviembre 2021

Modelos para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.

Agenda

1. Basel Comitee on Banking Supervision
2. Sistema dinámico
3. Ejemplos

Basel Comitee on Banking Supervision: Basel III

Basel III 2009

- Acuerdo regulatorio internacional que introdujo un conjunto de reformas diseñadas para mejorar la regulación, supervisión y gestión de riesgos dentro del sector bancario.
- Paso iterativo en el esfuerzo continuo para mejorar el marco regulatorio bancario.
- Un consorcio de bancos centrales de 28 países publicó Basel III en 2009, en gran parte en respuesta a la crisis crediticia resultante de la recesión económica de 2008.

Requerimientos de capital mínimo

- Nivel 1:
  Refiere al capital básico, el capital social y las reservas reveladas de un banco que aparecen en los estados financieros del banco.
  En caso de experimentar pérdidas significativas, proporciona un colchón que permite solventar el estrés y mantener la continuidad de las operaciones.

- Nivel 2:
  Refiere al capital complementario, como las reservas no divulgadas y los instrumentos de deuda subordinada no garantizada que deben tener un vencimiento original de al menos cinco años.

El capital total de un banco se calcula sumando ambos niveles.

Según Basel III, el coeficiente de capital total mínimo es del 12,9%, en el que el coeficiente de capital de Nivel 1 mínimo es del 10,5% de sus activos ponderados por riesgo (RWA) totales, mientras que el coeficiente de capital de Nivel 2 mínimo es del 2% de los RWA.

También introdujo requisitos de apalancamiento y liquidez destinados a protegerse contra el endeudamiento excesivo, al tiempo que garantiza que los bancos tengan suficiente liquidez durante períodos de tensión financiera.

En particular, el índice de apalancamiento, calculado como capital de nivel 1 dividido por el total de activos dentro y fuera de balance menos activos intangibles, se limitó al 3%.

Modelo de Riesgo

Diseño de métricas de riesgo para la cuantificación del riesgo de mercado:

Los modelos de riesgo se componen en:

- Especificación : *e.g. GARCH*
- Medida de Riesgo: *e.g. VaR, ES*
- Validación : *e.g. Backtest de métricas*

Basel Comitee on Banking Supervision establece 3 tipos de riesgo de modelos:

- Metodología conceptual
- Especificación y estimación de parámetros
- Validación

Modelo de backtest tradicional Basel

- Formato de *"traffic light"*
- $VaR_{0.99}$ en su probabilidad acumulada $\Psi_{VaR}^{\alpha,N}(x)$

Donde, fijando una cantidad N y un nivel α :

$$\Psi_{VaR}^{\alpha,N}(x) := P[X_{VaR}^{N}(\alpha) \leq x]$$

es la probabilidad de obtener x o menos vulneraciones del VaR.

Se establece una zona verde, amarilla y roja, donde la zona amarilla comienza cuando la probabilidad de obtener una cantidad específica de excepciones o menor en N observaciones es igual o excede el 95% (Basel Comitee on Banking Supervision 2013,p.105).

Considerando $N = 250$ se tiene que:

- $\Psi_{VaR}^{\alpha,N}(5) = 95.88\% \Rightarrow$ Zona amarilla
- $\Psi_{VaR}^{\alpha,N}(10) \geq 99.99\% \Rightarrow$ Zona roja

La cantidad de excedencias y la zona resultante afecta al capital diario demandado.

$$\textit{Daily capital Charge} = \max\left(VaR_{0.01,t}, \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{0.01,t-i}\right) \times (3 + k)$$

Donde el multiplicador del VaR está diseñado para corregir errores de implementación del modelo.

Table 1. Multiplication factor $3 + k$ according to Basel's traffic-light system.

Zone	Exceedances	Plus Factor k	Cumulative Probability (in %)
	0	0.00	8.11
	1	0.00	28.58
	2	0.00	54.32
	3	0.00	75.81
	4	0.00	89.22
	5	0.40	95.88
	6	0.50	98.63
	7	0.65	99.60
	8	0.75	99.89
	9	0.85	99.97
	10+	1.00	99.99

También se tiene otro aproach similar al sistema de *traffic light* para el ES, en el cual no es solo un indicador de las excepciones del VaR sino también toma en consideración la severidad de estas:

$$\Psi^{\alpha,N}_{ES}(x) := P[X^N_{ES}(\alpha) \leq x]$$

Table 2. Traffic light approaches to traditional and comparative backtesting.

Zone	Traditional	Comparative
	VaR (Basel Committee on Banking Supervision 2013): $\Psi^{\alpha,N}_{VaR}(x) := \mathbf{P}[X^N_{VaR}(\alpha) \leq x]$ Expected shortfall (Costanzino and Curran 2018): $\Psi^{\alpha,N}_{ES}(x) := \mathbf{P}[X^N_{ES}(\alpha) \leq x]$	Nolde and Ziegel (2017a): H_0^-: The internal model predicts at least as well as the standard model. H_0^+: The internal model predicts at most as well as the standard model. Some choice of significance level $\eta \in (0,1)$. *E.g.*, $\eta = 0.05$.
🟩	$\sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{VaR}(x), \sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{ES}(x) < 0.95$	H_0^+ is rejected at $\eta = 0.05$.
🟨	$\sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{VaR}(x), \sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{ES}(x) \in [0.95, 0.9999)$	Neither H_0^- nor H_0^+ is rejected
🟥	$\sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{VaR}(x), \sup_{x\in[0,\infty)} \Psi^{\alpha,N}_{ES}(x) > 0.9999$	H_0^- is rejected at $\eta = 0.05$.

Sistema dinámico

Sistema dinámico

- Activos riesgosos : i, $i = 1, \ldots n$, con peso del activo i en el portafolio: $x^{(i)}$
- Activo libre de riesgo: y con peso en el portafolio : y
- Capital total : P
- Horizonte de tiempo : $t \in [0, T]$

$$
\begin{cases}
y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T x_t}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} \\
x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)}(1+u_t^{(i)})}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} e^{r_t^{(i)}} \\
P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t) P_t \\
\\
(x_0^T, y_0, P_0)^T = (x_0^T, y_0, P_0)^T \\
\\
g_j(x_t, y_t, u_t, P_t) \geq \theta_j \\
\theta(x_{T+1}, y_{T+1}, P_{T+1}) \geq c \\
u_t \in \mathbb{G}(x_t, y_t, r_t, P_t) \\
r_t \in \mathcal{F}_t
\end{cases}
$$

donde

$$
H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + \sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t
$$

Luego, si inicialmente en tiempo t se tiene un capital P_t entonces la cantidad para cada activo es $P_t w_t$, en cuanto a la cantidad $P_{t+1}^{(i)} = x_t^{(i)}(1 + u_t^{(i)})P_t e^{r_t^{(i)}}$ y la cantidad fiat $P_{t+1}^{y} = P_t(y_t - u_t^T x_t)$ así finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{Capital total en activo i :} \quad & P_{t+1}^{(i)} = && x_t^{(i)}(1 + u_t^{(i)})P_t e^{r_t^{(i)}} \\
\text{Capital total en fiat :} \quad & P_{t+1}^{y} = && (y_t - u_t^T x_t)P_t \\
\text{Capital total de cartera :} \quad & P_{t+1} = && ((x_t + \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i x_t^{(i)} u_t^{(i)})^T e^{r_t} + y_t - u_t^T x_t)P_t
\end{aligned}$$

Problemas con definición del control

La definición del control actúa sobre el activo i proporcionalmente a $x^{(i)}$

- Problemas:
  si $x_t^{(i)} = 0 \Rightarrow x_{t+h}^{(i)} = 0 \ \forall h \geq 0$
  si $x^{(i)}$ es pequeño, para realizar un cambio grande , $u^{(i)}$ debe ser grande.
- Esta definición es problemática para la definición del conjunto de controles.

Si el conjunto de los controles posibles:

$$\mathbf{U} := \{\mathbf{u} = (u_k)_{k=0}^{N} \,\Big|\, u_0, \ldots, u_{N-1} \in U\}$$

con U el espacio de controles.

Sería problemático obtener que $\mathbf{U}$ sea un espacio métrico compacto.

Cambiando la definición

Usando el control u como aumentar la cantidad del activo i del portafolio en $u^{(i)}$ unidades:

Si se tiene un portafolio $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ y se desea aumentar en 5% la proporción del activo i, se traspasa esa cantidad de fiat al activo: $u = (0, 0, 0.05)$ entonces el nuevo portafolio que $(0.25, 0.25, 0.30, 0.20)$.

De este modo, las ecuaciones cambian a:

$$y_{t+1} = \frac{y_t - u_t^T \mathbf{1}}{(x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}}$$

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{x_t^{(i)} + u_t^{(i)}}{(x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}} e^{r_t^{(i)}}$$

entonces, la función H queda

$$H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}$$

Se tiene que $u_t^{(i)} \in [-1, 1]$ por lo que el espacio de controles es $[-1, 1]^n$.

Considerando las condiciones del portafolio:

1. No se admiten cantidades negativas de fiat: $0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1$
2. No se admiten posiciones cortas en $x^{(i)}$: $0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1$

Se define el conjunto de los controles como :

$$\mathbf{U}(t) := \{u_t \in [-1, 1]^n : 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1 \ \text{ y } \ 0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1 \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

- Condición 1: No se admite apalancamiento,
- Condición 2: No se admiten posiciones cortas, solo largas.

Considerando restricciones del tipo:

$$g_j(x_t, y_t, P_t) \geq \theta_j$$

- Capital de reserva debe ser mayor a una cantidad

Podría considerarse:

- $(y_t - u_t^T \mathbf{1})P_t \geq \theta \text{VaR}_\alpha(x_t, y_t, u_t)P_t$
- $(y_t - u_t^T \mathbf{1})P_t \geq \theta \text{ES}_\alpha(x_t, y_t, u_t)P_t$

o equivalentemente,

- $(y_t - u_t^T \mathbf{1})/\text{VaR}_\alpha(x_t, y_t, u_t) \geq \theta$
- $(y_t - u_t^T \mathbf{1})/\text{ES}_\alpha(x_t, y_t, u_t) \geq \theta$

Sistema dinámico

$$
\begin{cases}
y_{t+1} = (y_t - u_t^T \mathbf{1})/H(x_t, y_t, u_t, r_t) \\
x_{t+1}^i = (x_t^i + u_t^i)e^{r_t^i}/H(x_t, y_t, u_t, r_t) \\
P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t)P_t \\
\\
u_t \in \mathbf{U}(t) \ \forall t \in [0, T] \\
(y_t - u_t^T \mathbf{1})/\hat{\mathrm{VaR}}_\alpha(x_t, y_t, u_t) \geq \theta \\
r_t \in \mathcal{F}_t
\end{cases}
$$

$$
H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}
$$

Costo de transacción

- Considerando un costo de transacción proporciocional sin costo fijo

se tiene que el costo asociado a la transacción u_t^i es $c(u_t) = c \cdot |u_t^i|$

- aumentar 10% x_t^1
- disminuir 15% x_t^2
- aumentar 20% x_t^3

el control asociado a la transacción sería $u_t = (0.1, -0.15, 0.20)$ luego, el costo de la transacción : $c \sum |u_t^i| = c \cdot 0.45$.

Si consideramos un costo del 0.1% entonces $c = 0.001 \Rightarrow c \cdot 0.45 = 0.00045$.

Definiendo la función de costo:

$$c(u_t) = c \sum |u_t^i|$$

entonces, el costo en dinero asociado a la transacción u_t sería $c(u_t)P_t$.

Haciendo un ejemplo con 2 activos, capital inicial de 1000, con $R_t = (0.1, 0.05)$ y $w_t = (x_t^T, y_t) = (0.3, 0.5, 0.2)$ un costo $c = 0.001$ y $u_t = (0.15, -0.10)$:

se traspasa una cantidad de dinero u_t^i al activo x_t^i pero por costo solo llega $(1-c)u_t^i$, por lo que se debe considerar el signo,

$$\tau_y(u_t; c)^{(i)} = \begin{cases} u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} \geq 0 \\ (1-c)u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} < 0 \end{cases}$$

$$\tau_x(u_t; c)^{(i)} = \begin{cases} (1-c)u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} > 0 \\ u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} \leq 0 \end{cases}$$

definidas componente a componente.

Sistema dinámico con costo

$$\begin{cases} y_{t+1} = (y_t - \tau_y(u_t; c))/H(x_t, y_t, u_t, r_t) \\ x^i_{t+1} = (x^i_t + \tau_x(u_t; c)^i)e^{r^i_t}/H(x_t, y_t, u_t, r_t) \\ P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t)P_t \\ \\ u_t \in \mathbf{U}(t) \; \forall t \in [0, T] \\ (y_t - \tau_y(u_t; c)^T \mathbf{1})/\hat{\mathrm{VaR}}_\alpha(r_t, x_t, y_t, u_t) \geq \theta \\ r_t \in \mathcal{F}_t \end{cases}$$

donde el costo está dado según $c(u_t, P_t) = c \cdot P_t \cdot \sum |u^i_t|$.

la función H toma la forma:

$$H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + \tau_x(u_t; c))^T e^{r_t} + y_t - \tau_y(u_t; c)$$

Pruebas de ejemplos

Se busca que la cantidad de capital libre de riesgo siempre sea capaz de cubrir el capital en riesgo.

- x: activo riesgoso
- y: activo libre de riesgo
- VaR : del activo x = 8%

Considerando un umbral θ tal que:

$$y = \theta VaR(x), \quad x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1 + \theta VaR}$$

y	x	VaR	θVaR	θ
200	800	64		
100	900	72		
74	926	74	74	1
138	862	69	138	2
194	806	65	194	3

Si

$$y \geq \theta VaR(x) \Rightarrow \frac{y}{VaR(x)} \geq \theta \Rightarrow \frac{1-x}{VaR(x)} \geq \theta$$

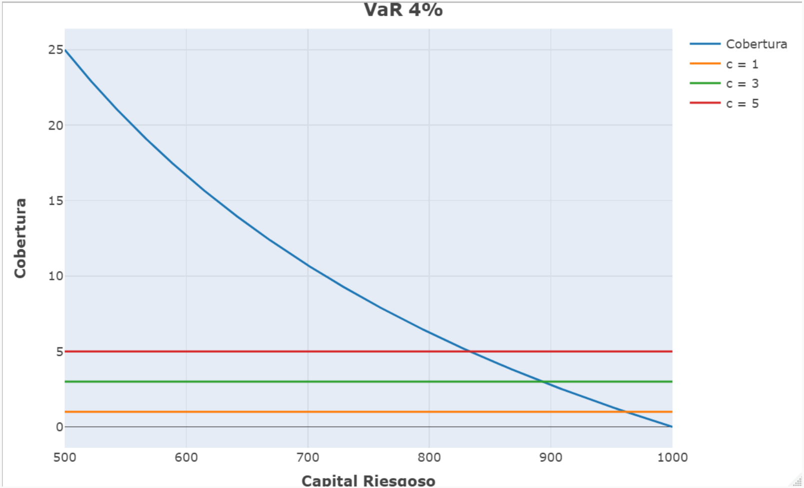
considerando $VaR(x) = VaR \cdot x$, *e.g.* $8\% \cdot x$.

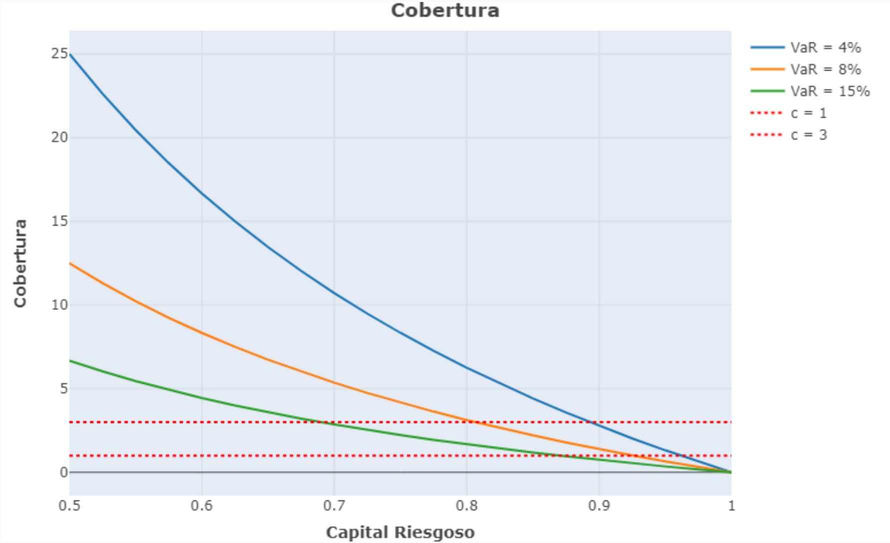
$$\frac{1-x}{0.08x} \geq \theta$$

o considerando en cantidad de capital: total $= 1000$

$$\frac{1000-x}{0.08x} \geq \theta$$

Llamémosle cobertura a : $g(x) = \frac{1-x}{VaR(x)} \geq \theta$


VaR 4%
Cobertura
c = 1
c = 3
c = 5
25
20
15
10
5
0
500
600
700
800
900
1000
Cobertura
Capital Riesgoso


Cobertura
VaR = 4%
VaR = 8%
VaR = 15%
c = 1
c = 3
Cobertura
25
20
15
10
5
0
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Capital Riesgoso

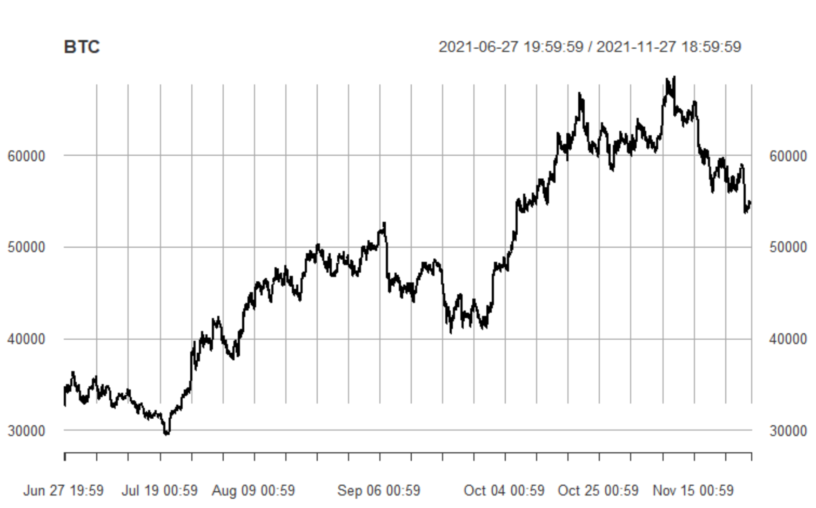


Figure 1: BTC/USDT frecuencia horaria.

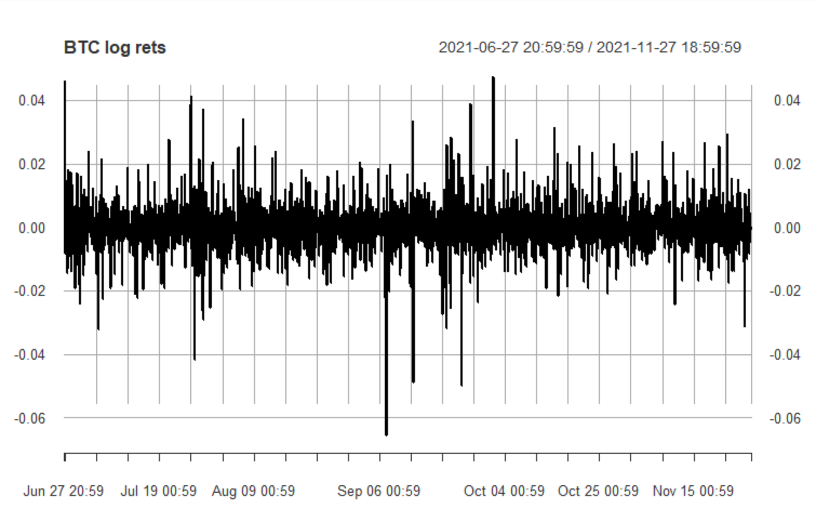
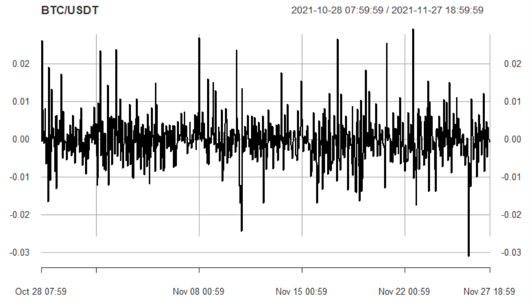


Figure 2: BTC/USDT log retornos frecuencia horaria.

Modelo de Riesgo

- De una muestra de 3666 observaciones de precios
- Se utilizó una ventana móvil de 2932 datos.
- Se estimó un modelo de mezcla de distribuciones: *tGARCH-sGARCH-sstd-std*
- Realizó predicción a 1 paso 732 veces.
- Se realizó un backtest para las métricas de riesgo VaR y ES al 95%.


BTC/USDT
2021-10-28 06:59:59 / 2021-11-27 18:59:59
65000
60000
55000
Oct 28 06:59
Nov 08 00:59
Nov 15 00:59
Nov 22 00:59
Nov 27 18:59


BTC/USDT
2021-10-28 07:59:59 / 2021-11-27 18:59:59
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
-0.03
Oct 28 07:59
Nov 08 00:59
Nov 15 00:59
Nov 22 00:59
Nov 27 18:59

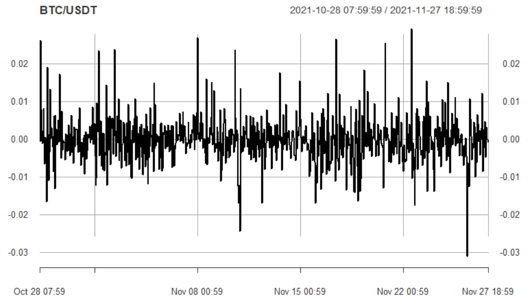
Backtest de riesgo

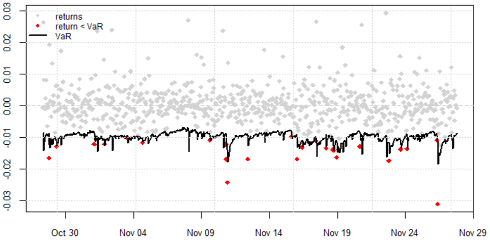
VaR Backtest: excesos obtenidos = 28, esperados 36

- UC : Pvalor = 12.88% ⇒ Cantidad de excesos es correcta.
- CC: Pvalor = 8.58% ⇒ Cantidad e independencia correcta.
- VaR Duration: Pvalor = 71.64% ⇒ Son independientes.
- DQ : Pvalor = 26.26% ⇒ excesos no son predecibles.

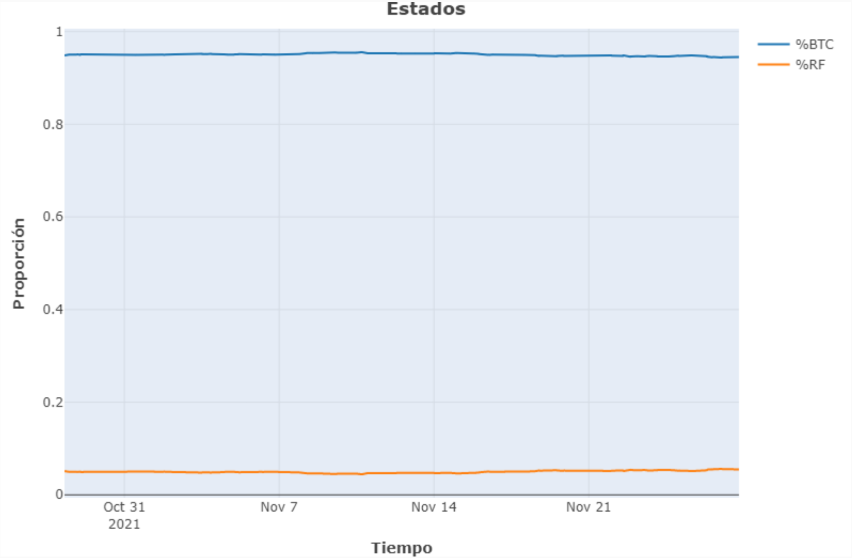
ES y VaR Backtest:

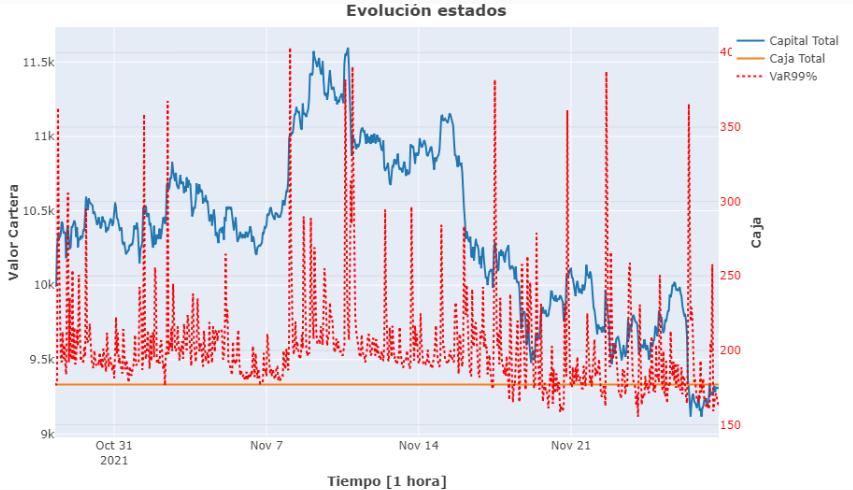
- ER : Pvalor = 99.53% ⇒ ES bien especificado.
- CC simple: 14.71% 1s, 1.05% 2s ⇒ No está siendo sub estimado, pero sí sobre estimado.
- CC general: 33.41% 1s, 1.36% 2s ⇒ No está siendo sub estimado, pero sí sobre estimado.
- ESR estrico : 0.78% (ES solamente)
- ESR auxilair: 8.50% (VaR y ES)


BTC/USDT
2021-10-28 07:59:59 / 2021-11-27 18:59:59
Oct 28 07:59
Nov 08 00:59
Nov 15 00:59
Nov 22 00:59
Nov 27 18:59


returns
return < VaR
VaR
Oct 30
Nov 04
Nov 09
Nov 14
Nov 19
Nov 24
Nov 29

Sistema sin control

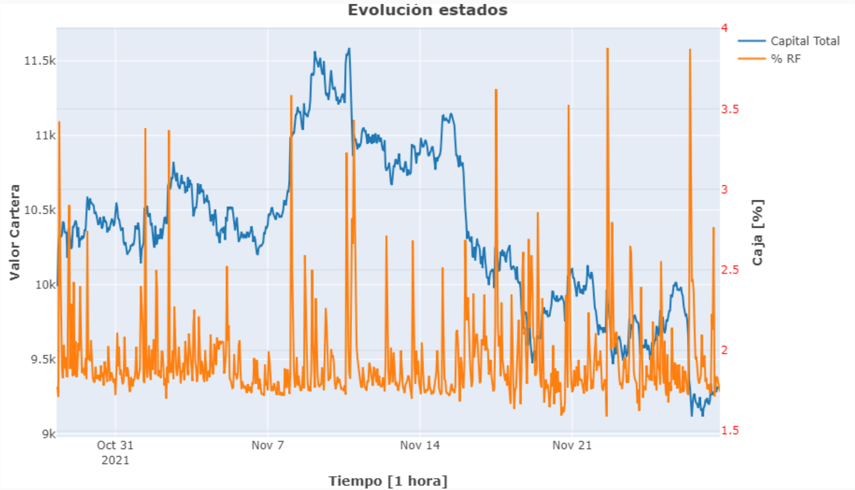

Estados
Proporción
Tiempo
%BTC
%RF
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21


Evolución estados
Capital Total
Caja Total
VaR99%
Valor Cartera
11.5k
11k
10.5k
10k
9.5k
9k
Caja
40
350
300
250
200
150
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo [1 hora]

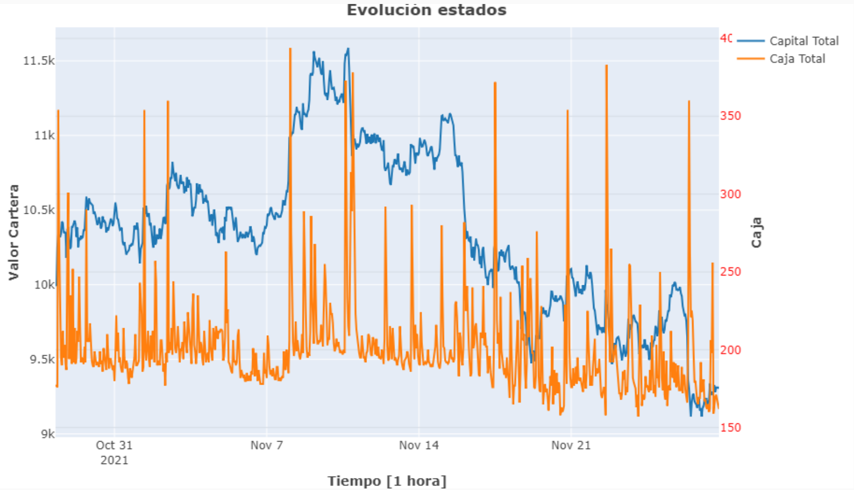
Considerando un control del tipo:

$$(x+u)\theta VaR = y - u \Rightarrow u = \frac{y - x\theta VaR}{1+\theta VaR}$$

considerando $\theta = 1$ y $VaR = VaR99\%$

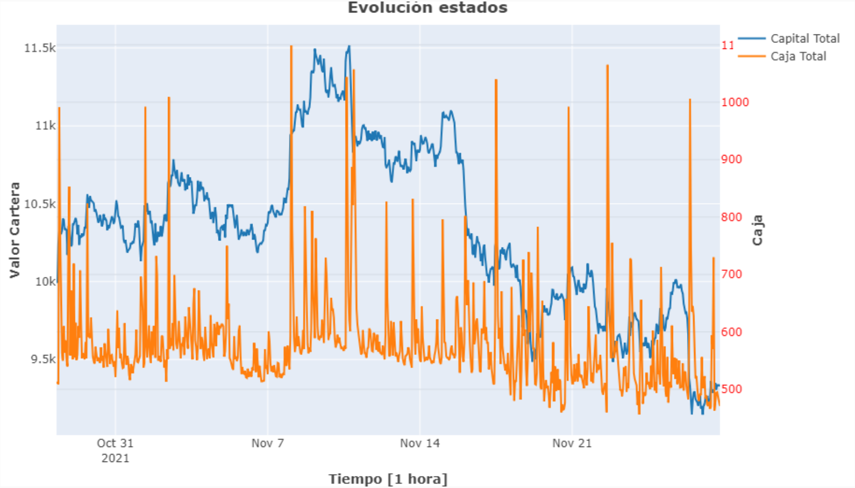


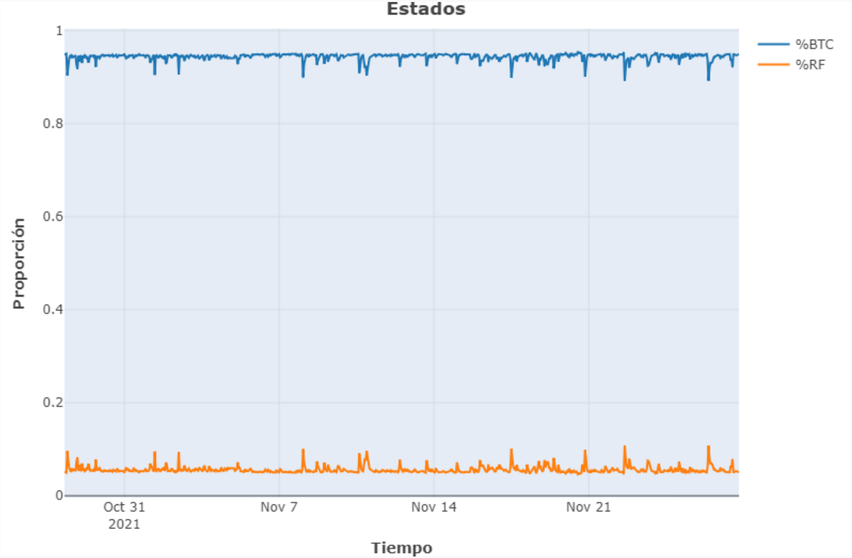
Evolución estados
Capital Total
% RF
Valor Cartera
11.5k
11k
10.5k
10k
9.5k
9k
Caja [%]
4
3.5
3
2.5
2
1.5
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo [1 hora]

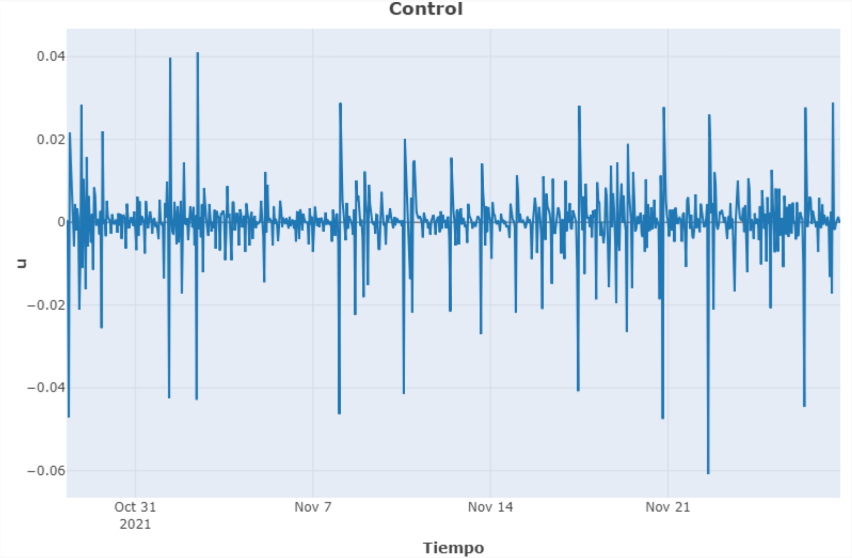


Evolución estados
Capital Total
Caja Total
Valor Cartera
Caja
11.5k
11k
10.5k
10k
9.5k
9k
40
350
300
250
200
150
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo [1 hora]

Considerando $\theta = 3$




Estados
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Proporción
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo
%BTC
%RF


Control
0.04
0.02
0
u
−0.02
−0.04
−0.06
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo

Comparando

Comparación Capital
Buy & Hold
Control 3VaR99%
11.5k
11k
10.5k
10k
9.5k
9k
Capital Total
Oct 31
2021
Nov 7
Nov 14
Nov 21
Tiempo

Considerando un horizonte

Con el mismo modelo anterior, se calculan los predictores del VaR para el horizonte de 10 pasos

t	%VaR99	%VaR99 acumulado
1	-1.82	-1.82
2	-1.85	-3.67
3	-1.83	-5.50
4	-1.93	-7.43
5	-2.01	-9.44
6	-2.00	-11.43
7	-2.05	-13.48
8	-1.99	-15.47
9	-2.00	-17.47
10	-2.01	-19.48

Table 1: VaR caluclado con modelo de mezcla de distribución*GARCH-sGARCH-sstd-std* en términos del log-retorno

En términos de rentabilidad

t	%VaR99	%VaR99 acumulado
1	-1.80	-1.80
2	-1.83	-3.60
3	-1.81	-5.35
4	-1.91	-7.16
5	-1.99	-9.01
6	-1.98	-10.81
7	-2.03	-12.61
8	-1.97	-14.34
9	-1.98	-16.03
10	-1.99	-17.70

Table 2: VaR caluclado con modelo de mezcla de distribución *GARCH-sGARCH-sstd-std* en términos de rentabilidad

Portafolio mínimo garantizado

La rentabilidad en tiempo $t + 10$ será mayor a -17.70% con una probabilidad del 99%

Si se busca:

$$VaR^{10}(x) = y, \; x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1 + VaR^{10}}$$

Para un capital total de 1000:

- x = 850
- y = 150
- $VaR^{10}(x) = 150$

entonces,

$$P\left(\frac{y}{VaR^{10}_{0.99}(x)} \geq 1\right) = 0.99$$

$$¿y = 150 \text{ sería } W^{\heartsuit}?$$

$$P\left(\frac{1 - x_T}{x_T} \geq \theta\right) = 1 - \alpha$$

Próximamente

- Control con portafolio óptimo usando modelo DCC-GARCH-Copulas

Ejemplo de sistema dinámico

Gabriel Vergara Schifferli

30 Noviembre 2021

Modelos para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.