Pruebas de simulación

Gabriel Vergara Schifferli

18 Enero 2022

Modelos para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.

Agenda

1. Sistema dinámico
2. Simulación y umbrales
3. Resultados

Sistema dinámico

Sistema dinámico

- Activos riesgosos : i, $i = 1, \ldots n$, con peso del activo i en el portafolio: $x^{(i)}$
- Activo libre de riesgo: y con peso en el portafolio : y
- Capital total : P
- Horizonte de tiempo : $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} y_{t+1} = \frac{y_t - u_t T\mathbf{1}}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} \\ x^{(i)}_{t+1} = \frac{x^{(i)}_t + u^{(i)}_t}{H(x_t, y_t, u_t, r_t)} e^{r^{(i)}_t} \\ P_{t+1} = H(x_t, y_t, u_t, r_t) P_t \\ \\ (x_0^T, y_0, P_0)^T = (x_0^T, y_0, P_0)^T \\ \\ 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1 \\ 0 \leq u_t + x_t \leq 1 \text{ (por componente)} \\ \frac{1 - x_t}{x_t} \geq \theta \; \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

donde

$$H(x_t, y_t, u_t, r_t) = (x_t + u_t)^T e^{r_t} + y_t - u_t^T \mathbf{1}$$

Se tiene que $u_t^{(i)} \in [-1,1]$ por lo que el espacio de controles es $[-1,1]^n$.

Considerando las condiciones del portafolio:

1. No se admiten cantidades negativas de fiat: $\quad 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1$
2. No se admiten posiciones cortas en $x^{(i)}$: $\quad 0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1$

Se define el conjunto de los controles como :

$$\mathbf{U}(t) := \{u_t \in [-1,1]^n : 0 \leq y_t - u_t^T \mathbf{1} \leq 1 \text{ y } 0 \leq u_t^{(i)} + x_t^{(i)} \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

- Condición 1: No se admite apalancamiento,
- Condición 2: No se admiten posiciones cortas, solo largas.

Costo de transacción

- Considerando un costo de transacción proporciocional sin costo fijo

se tiene que el costo asociado a la transacción u_t^i es $c(u_t) = c \cdot |u_t^i|$

- aumentar 10% x_t^1
- disminuir 15% x_t^2
- aumentar 20% x_t^3

el control asociado a la transacción sería $u_t = (0.1, -0.15, 0.20)$ luego, el costo de la transacción : $c \sum |u_t^i| = c \cdot 0.45$.

Si consideramos un costo del 0.1% entonces $c = 0.001 \Rightarrow c \cdot 0.45 = 0.00045$.

Definiendo la función de costo:

$$c(u_t) = c \sum |u_t^i|$$

entonces, el costo en dinero asociado a la transacción u_t sería $c(u_t)P_t$.

Haciendo un ejemplo con 2 activos, capital inicial de 1000, con $R_t = (0.1, 0.05)$ y $w_t = (x_t^T, y_t) = (0.3, 0.5, 0.2)$ un costo $c = 0.001$ y $u_t = (0.15, -0.10)$:

se traspasa una cantidad de dinero u_t^i al activo x_t^i pero por costo solo llega $(1-c)u_t^i$, por lo que se debe considerar el signo,

$$\tau_y(u_t; c)^{(i)} = \begin{cases} u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} \geq 0 \\ (1-c)u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} < 0 \end{cases}$$

$$\tau_x(u_t; c)^{(i)} = \begin{cases} (1-c)u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} > 0 \\ u_t^{(i)} & \text{si } u_t^{(i)} \leq 0 \end{cases}$$

definidas componente a componente.

Se busca que la cantidad de capital libre de riesgo siempre sea capaz de cubrir el capital en riesgo.

- x: activo riesgoso
- y: activo libre de riesgo
- VaR : del activo x = 8%

Considerando un umbral θ tal que:

$$y = \theta VaR(x), \quad x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1 + \theta VaR}$$

y	x	VaR	θVaR	θ
200	800	64		
100	900	72		
74	926	74	74	1
138	862	69	138	2
194	806	65	194	3

Si

$$y \geq \theta VaR(x) \Rightarrow \frac{y}{VaR(x)} \geq \theta \Rightarrow \frac{1-x}{VaR(x)} \geq \theta$$

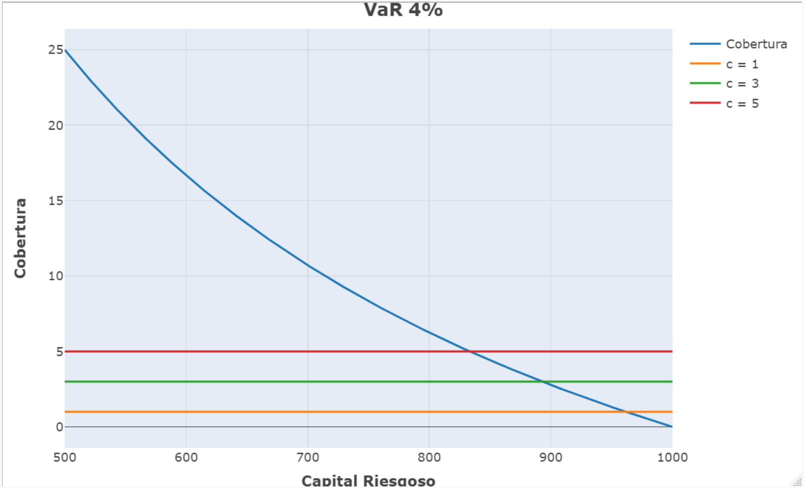
considerando $VaR(x) = VaR \cdot x$, *e.g.* $8\% \cdot x$.

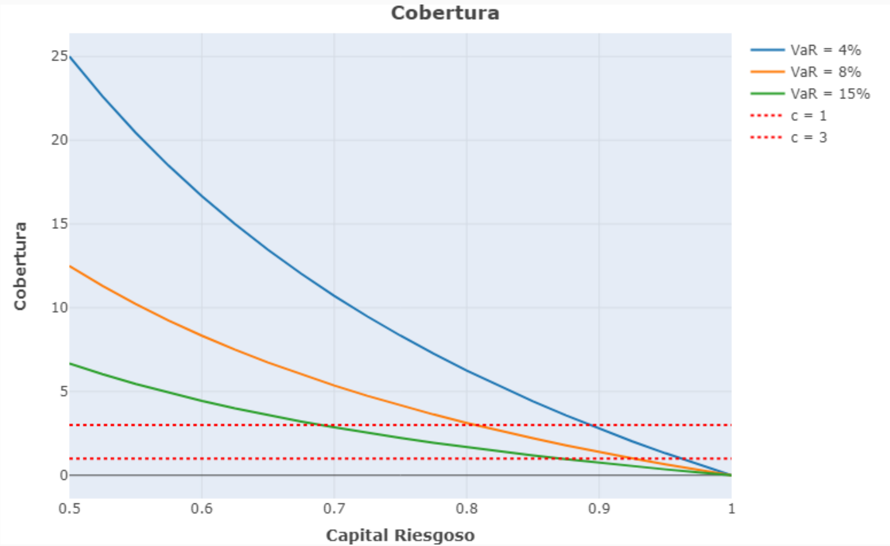
$$\frac{1-x}{0.08x} \geq \theta$$

o considerando en cantidad de capital: total $= 1000$

$$\frac{1000-x}{0.08x} \geq \theta$$

Llamémosle cobertura a : $g(x) = \frac{1-x}{VaR(x)} \geq \theta$


VaR 4%
Cobertura
c = 1
c = 3
c = 5
25
20
15
10
5
0
500
600
700
800
900
1000
Capital Riesgoso



Cobertura
Cobertura
Capital Riesgoso
VaR = 4%
VaR = 8%
VaR = 15%
c = 1
c = 3
25
20
15
10
5
0
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Caso de simulación

Muestra

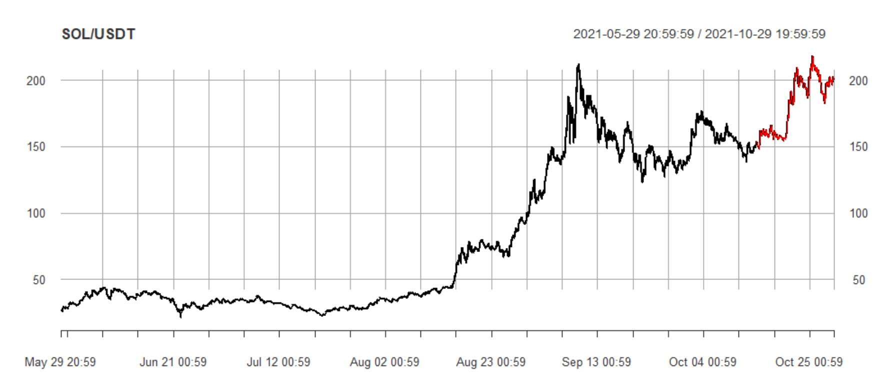


Figure 1: BTC/USDT frecuencia horaria.

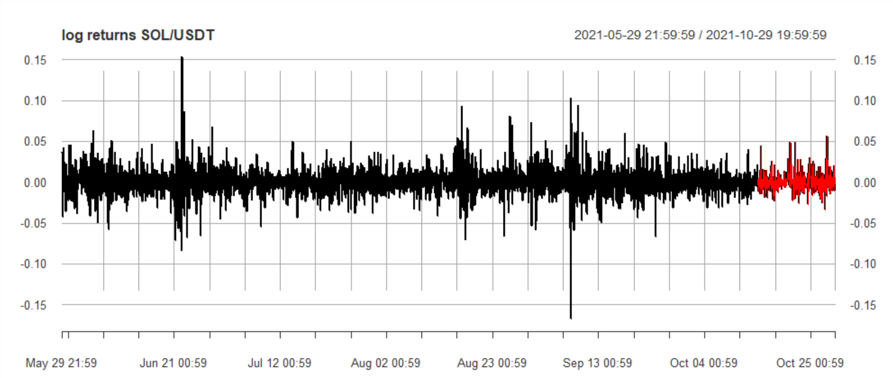


Figure 2: BTC/USDT log retornos frecuencia horaria.

Con la serie de log-retornos, es estimó un modelo MS-GARCH-GJRGARCH-sged-std para simular los retornos.

MS-GARCH-GJRGARCH-sged-std

$$\begin{aligned} r_t = & \quad \sigma_{t,s}\epsilon_{t,s_t} \\ \sigma^2_{t,1} = & \quad \alpha_{0,1} + \alpha_{1,1}\epsilon^2_{t-1} + \beta_{0,1}\sigma^2_{t-1} \\ \sigma^2_{t,2} = & \quad \alpha_{0,2} + (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}\mathbb{1}_{\epsilon_{t-1}>0})\epsilon^2_{t-1} + \beta_{0,2}\sigma^2_{t-1} \end{aligned}$$

donde

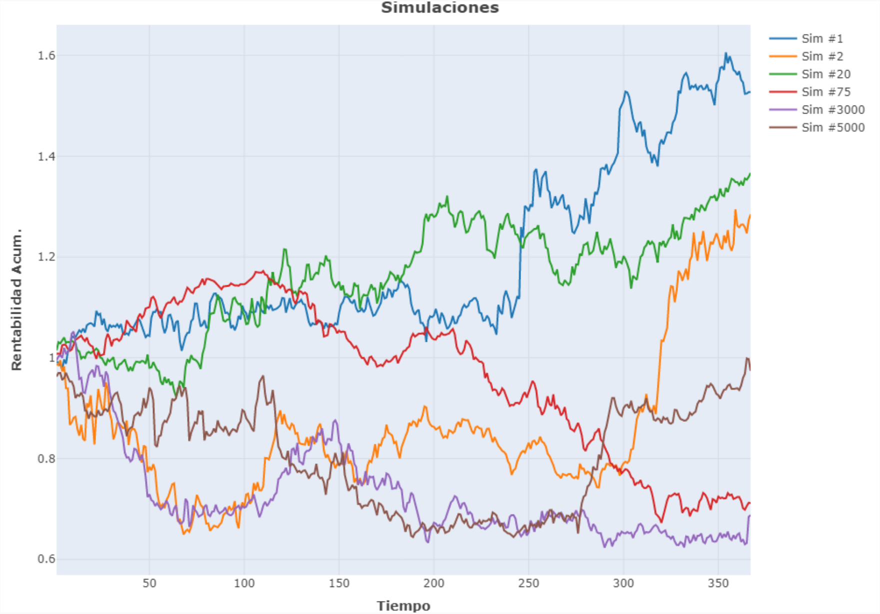
$$\begin{aligned} \epsilon_{t,1} &\sim sged(\nu_1, \chi) \\ \epsilon_{t,2} &\sim t(\nu_2) \end{aligned}$$

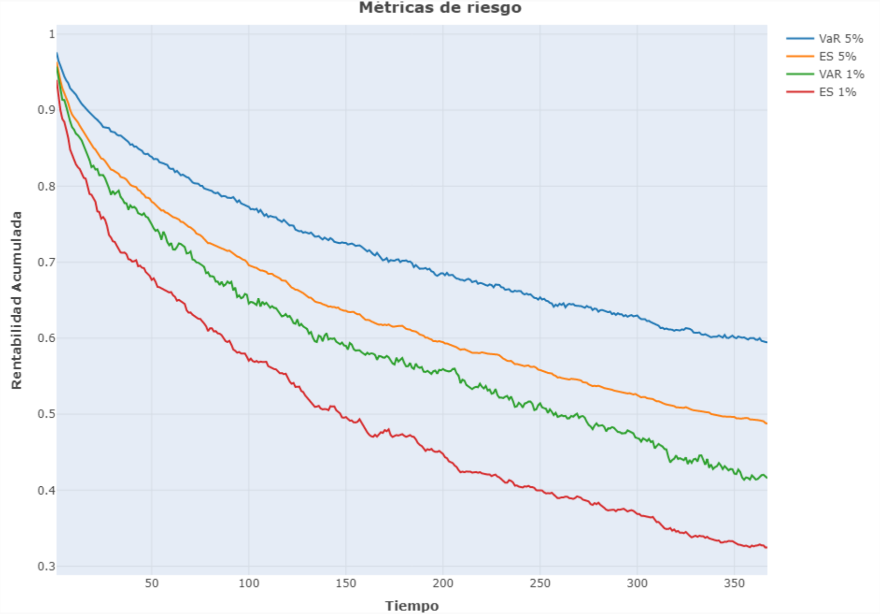
con $s \in \{1,2\}$ una cadena de markov ergódica, con probabilidad de transición $P(s_t = 1|s_{t-1} = 1) = \pi_{11}$, $P(s_t = 1|s_{t-1} = 2) = \pi_{21}$, $P(s_t = 2|s_{t-1} = 1) = \pi_{12}$, $P(s_t = 2|s_{t-1} = 2) = \pi_{22}$.

Luego, la serie de precios se obtiene:

$$S_t = S_{t-1}e^{r_t}$$

- Horizonte de simulación : 367
- Cantidad de simulaciones : 5000

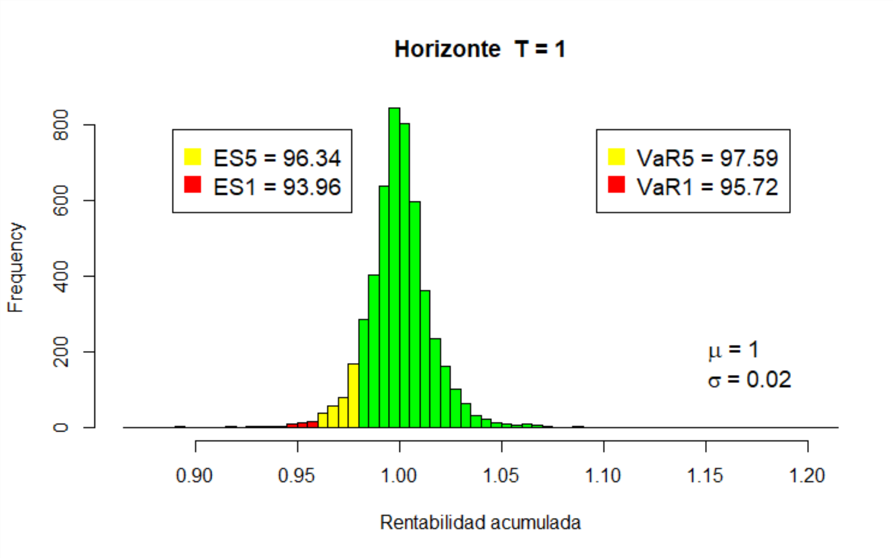

Simulaciones
Rentabilidad Acum.
Tiempo
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
50
100
150
200
250
300
350
Sim #1
Sim #2
Sim #20
Sim #75
Sim #3000
Sim #5000


Métricas de riesgo
Rentabilidad Acumulada
Tiempo
VaR 5%
ES 5%
VAR 1%
ES 1%
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
50
100
150
200
250
300
350

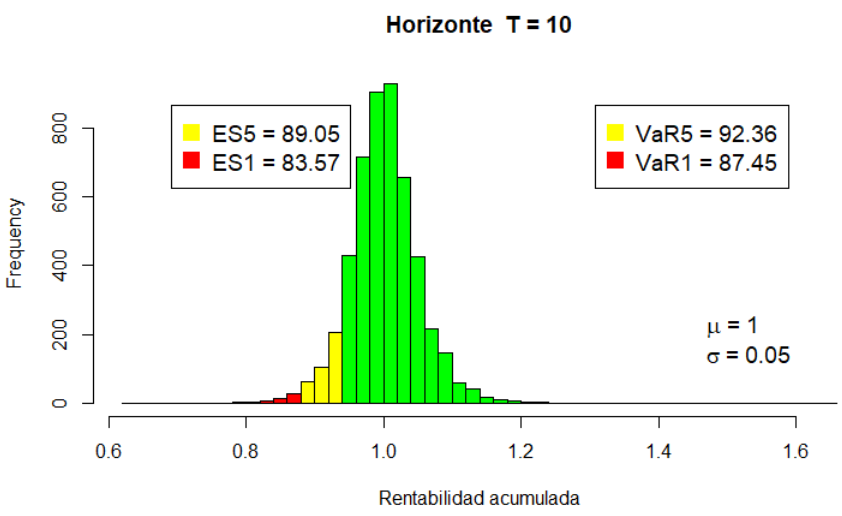
Resumen métricas

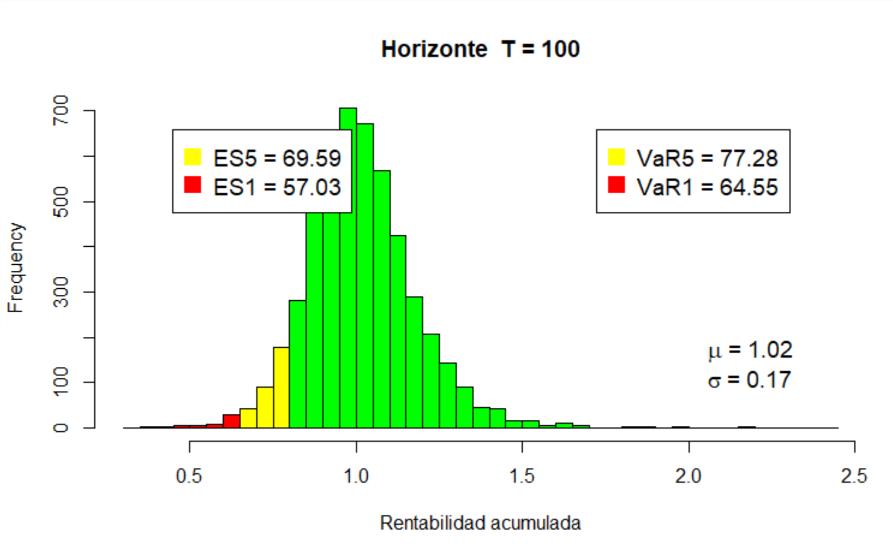
T	VaR 1%	VaR 5%	ES 1%	ES 5%
1	95.72	97.59	93.96	96.34
5	91.33	94.43	88.45	92.27
20	82.68	89.16	78.34	85.06
50	74.95	83.85	67.67	77.95
100	64.55	77.28	57.03	69.59
200	55.94	68.54	44.77	59.48
367	41.58	59.43	32.48	48.75

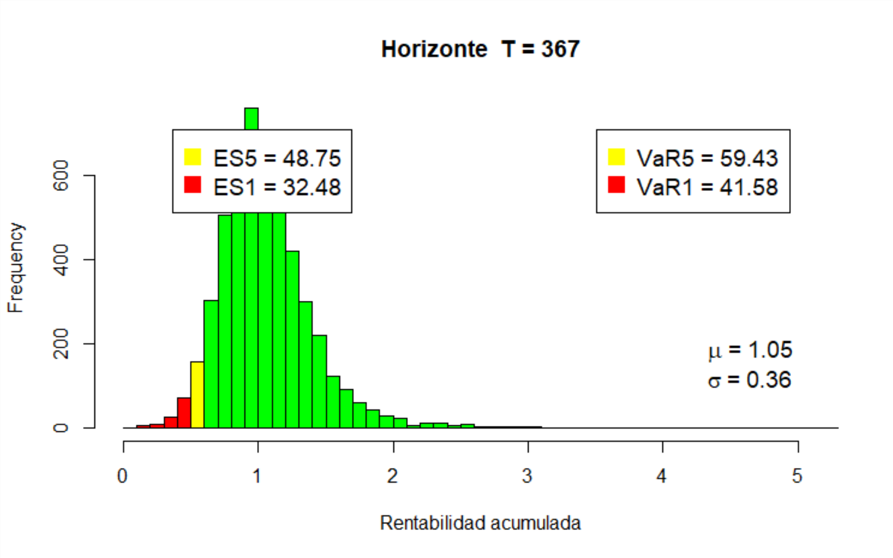
Table 1: Valores referenciados a porcentaje del capital inicial *e.g.* VaR 1% , $T = 1$, la pérdida máxima esperada con prob. 1% es 100 - 95,72 = 4.28%.



Horizonte T = 1
ES5 = 96.34
ES1 = 93.96
VaR5 = 97.59
VaR1 = 95.72
μ = 1
σ = 0.02
Frequency
0
200
400
600
800
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
1.20
Rentabilidad acumulada


Horizonte T = 10
ES5 = 89.05
ES1 = 83.57
VaR5 = 92.36
VaR1 = 87.45
μ = 1
σ = 0.05
Frequency
0
200
400
600
800
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
Rentabilidad acumulada


Horizonte T = 100
ES5 = 69.59
ES1 = 57.03
VaR5 = 77.28
VaR1 = 64.55
μ = 1.02
σ = 0.17
Frequency
0
100
300
500
700
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Rentabilidad acumulada


Horizonte T = 367
ES5 = 48.75
ES1 = 32.48
VaR5 = 59.43
VaR1 = 41.58
μ = 1.05
σ = 0.36
Frequency
0
200
400
600
0
1
2
3
4
5
Rentabilidad acumulada

Estrategias

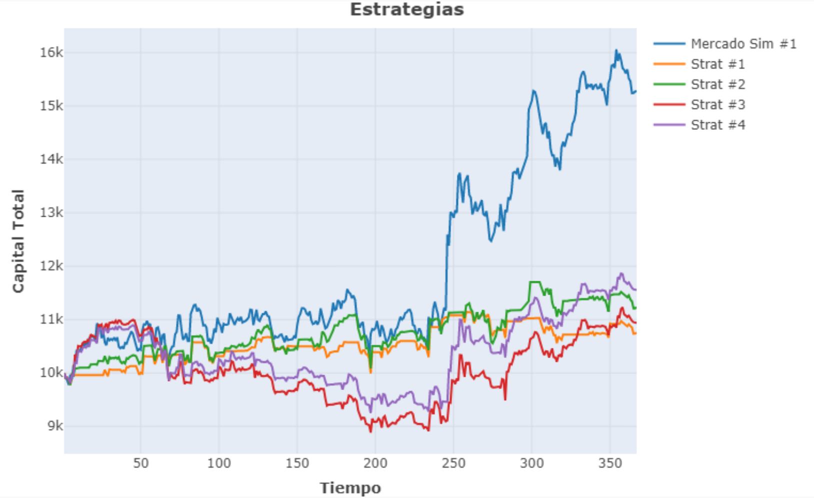
Se consideraron 3 estrategias con el siguiente esquema general de umbrales:

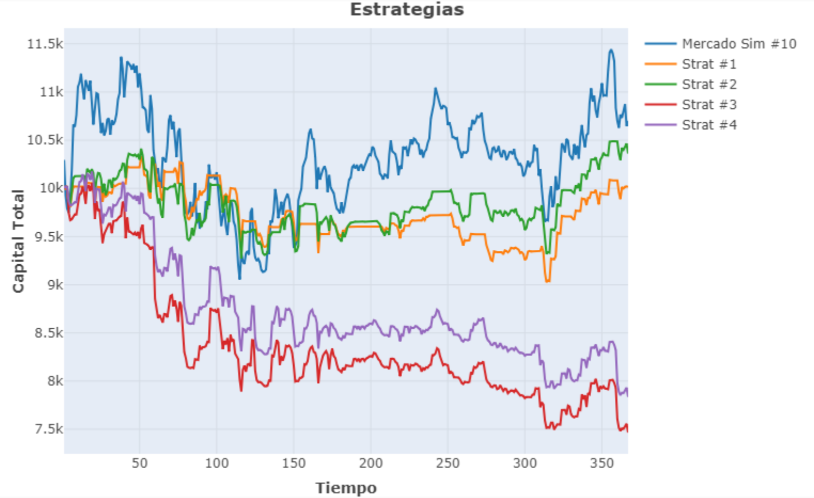
- Strong Sale $\rightarrow$ Vender cantidad SS
- Sale $\rightarrow$ Vender cantidad S
- Buy $\rightarrow$ Comprar cantidad B
- Strong Buy $\rightarrow$ Comprar cantidad SB

Para esto, se estimó un modelo $AR(1) - gjrGARCH(1,1) - std$ para determinar los umbrales en términos de los cuantiles proyectados del modelo.

- Se estimó con el 90% de los datos de ejemplo (Solana) y el 10% restante (367)
- Los parámetros se mantienen fijos durante todo el periodo sin reestimación
- Se tienen 8 parámetros: 4 umbrales y 4 proporciones de venta/compra

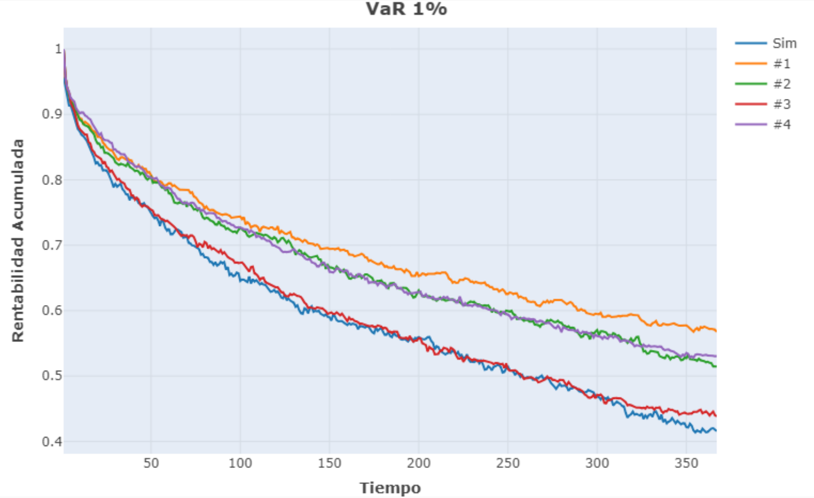
- Estrategia 1
    - SS: q(85) $\rightarrow$ Vender 100%
    - S: q(65) $\rightarrow$ Vender 70%
    - B: q(20) $\rightarrow$ Comprar 65%
    - SB: q(10) $\rightarrow$ Comprar 95%
- Estrategia 2
    - SS: q(90) $\rightarrow$ Vender 90%
    - S: q(70) $\rightarrow$ Vender 50%
    - B: q(30) $\rightarrow$ Comprar 50%
    - SB: q(10) $\rightarrow$ Comprar 90%
- Estrategia 3
    - SS: q(90) $\rightarrow$ Vender 90%, tiempo siguiente revertir operación
    - S: q(70) $\rightarrow$ Vender 50%, tiempo siguiente revertir operación
    - B: q(30) $\rightarrow$ Comprar 50%, tiempo siguiente revertir operación
    - SB: q(10) $\rightarrow$ Comprar 90%, tiempo siguiente revertir operación

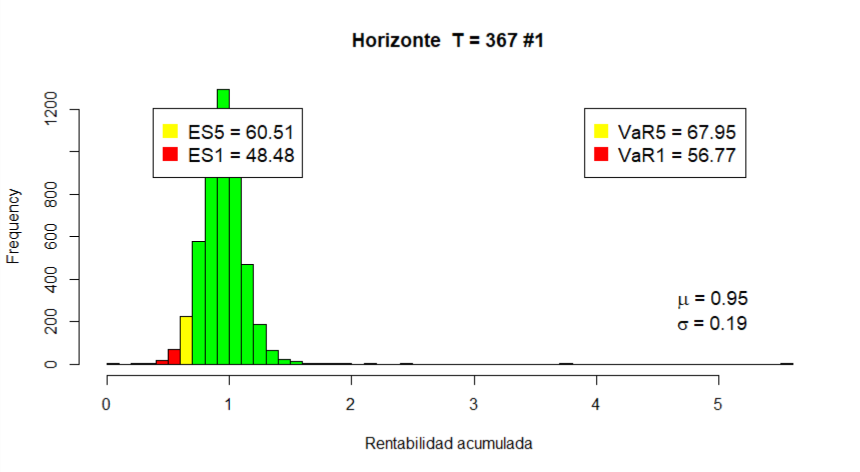

Estrategias
Capital Total
16k
15k
14k
13k
12k
11k
10k
9k
50
100
150
200
250
300
350
Tiempo
Mercado Sim #1
Strat #1
Strat #2
Strat #3
Strat #4

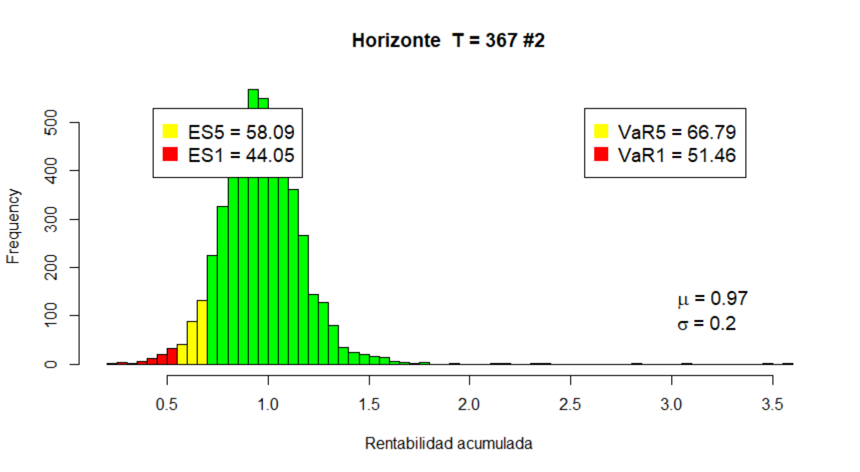


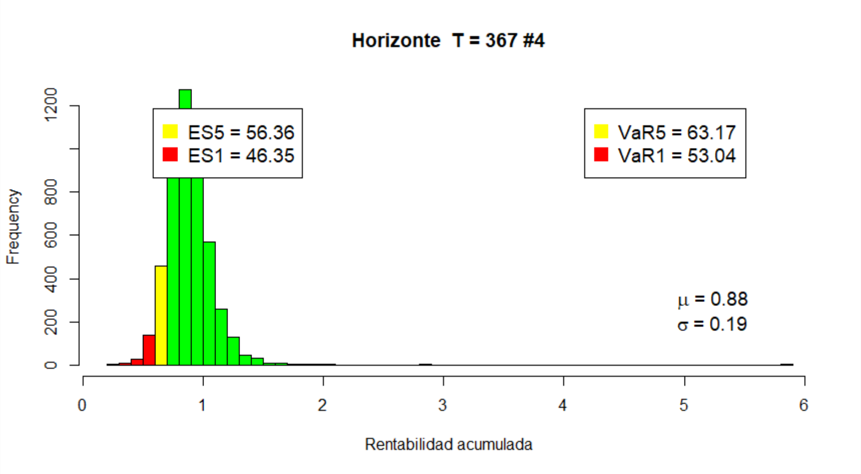
Estrategias
Capital Total
Tiempo
11.5k
11k
10.5k
10k
9.5k
9k
8.5k
8k
7.5k
50
100
150
200
250
300
350
Mercado Sim #10
Strat #1
Strat #2
Strat #3
Strat #4


Estrategias
Capital Total
Tiempo
5k
6k
7k
8k
9k
10k
50
100
150
200
250
300
350
Mercado Sim #3000
Strat #1
Strat #2
Strat #3
Strat #4


VaR 1%
Rentabilidad Acumulada
Tiempo
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
50
100
150
200
250
300
350
Sim
#1
#2
#3
#4


Horizonte T = 367 #1
ES5 = 60.51
ES1 = 48.48
VaR5 = 67.95
VaR1 = 56.77
μ = 0.95
σ = 0.19
Frequency
0
200
400
600
800
1200
0
1
2
3
4
5
Rentabilidad acumulada


Horizonte T = 367 #2
ES5 = 58.09
ES1 = 44.05
VaR5 = 66.79
VaR1 = 51.46
μ = 0.97
σ = 0.2
Frequency
0
100
200
300
400
500
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Rentabilidad acumulada

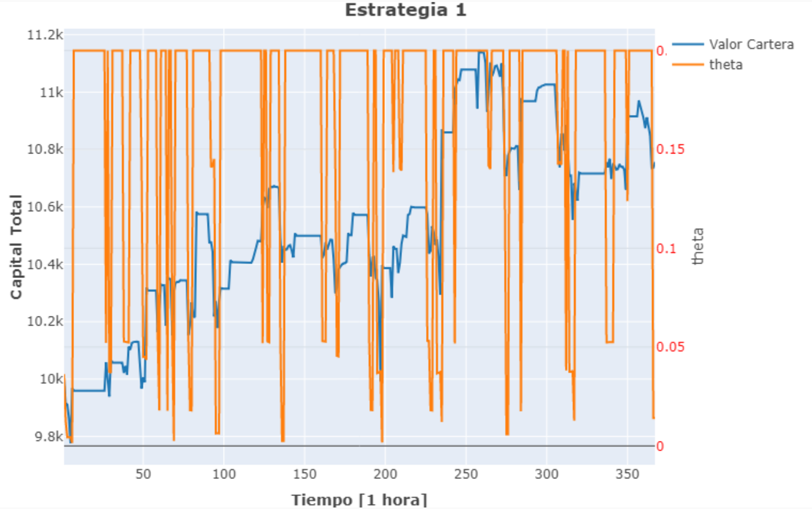


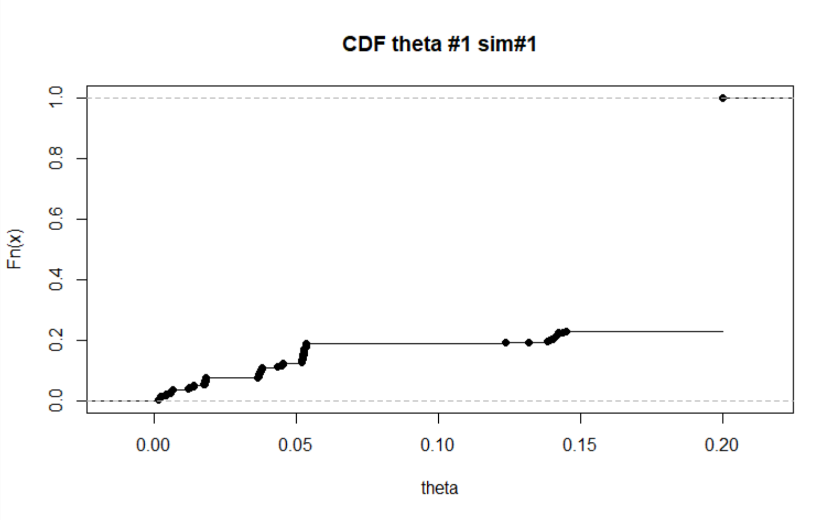
Horizonte T = 367 #4
ES5 = 56.36
ES1 = 46.35
VaR5 = 63.17
VaR1 = 53.04
μ = 0.88
σ = 0.19
Frequency
0
200
400
600
800
1200
0
1
2
3
4
5
6
Rentabilidad acumulada

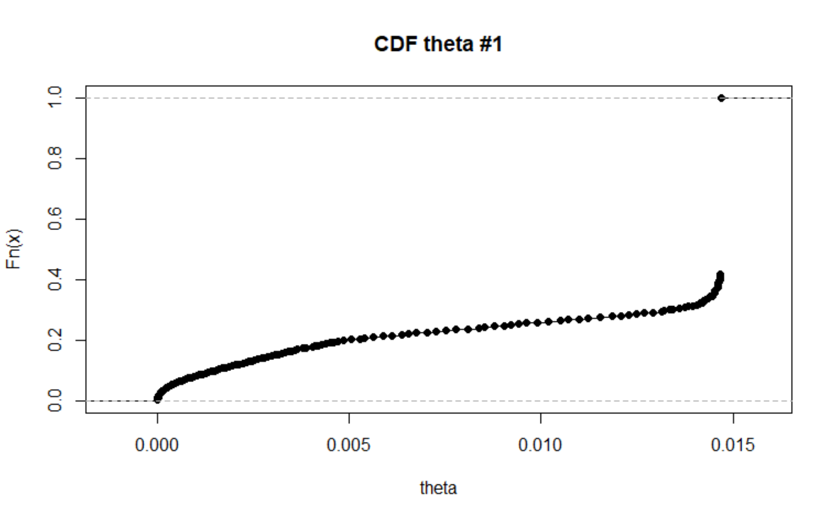
T	Sim	1	2	4
1	95.72	95.72	95.73	95.73
5	91.33	91.80	91.73	92.23
20	82.68	86.57	85.55	86.84
50	74.95	80.23	79.54	80.23
100	64.55	73.97	72.45	72.60
200	55.94	65.38	62.67	62.90
367	41.58	56.77	51.46	53.04

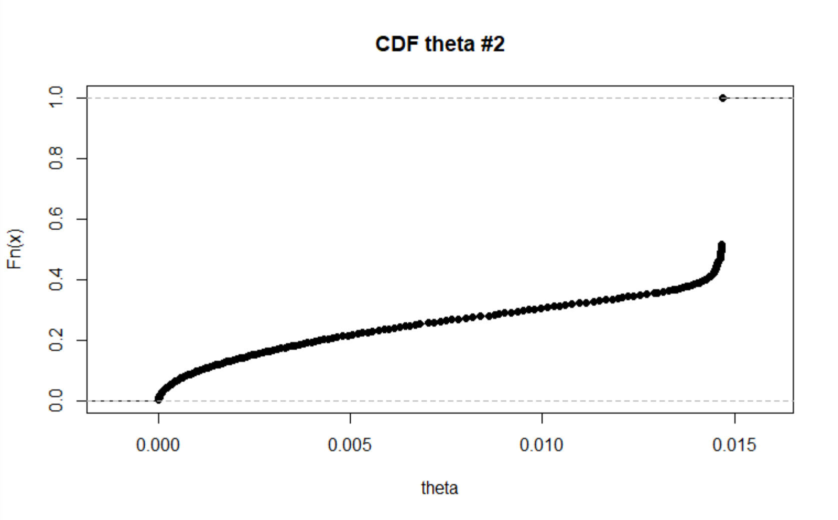
Table 2: Valores referenciados a porcentaje del capital inicial *e.g.* VaR 1% , T = 1, la pérdida máxima esperada con prob. 1% es 100 - 95,72 = 4.28%.

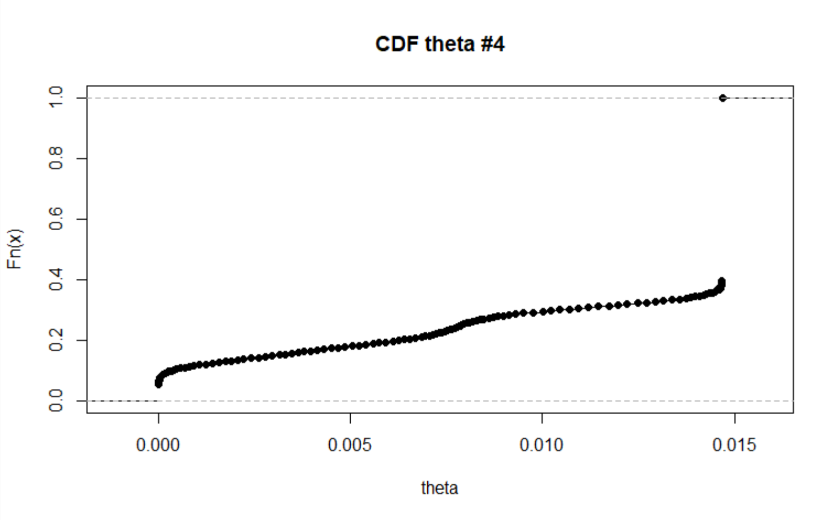
Agregando la métrica θ

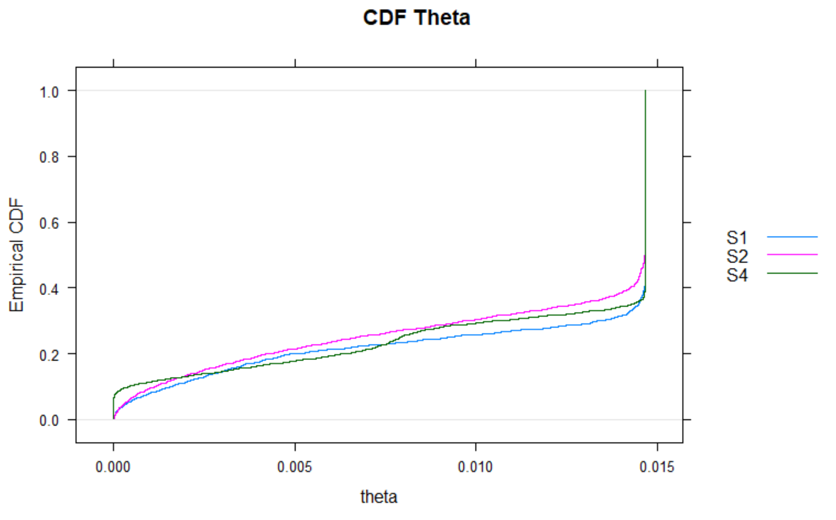

Estrategia 1
Valor Cartera
theta
Capital Total
11.2k
11k
10.8k
10.6k
10.4k
10.2k
10k
9.8k
theta
0.
0.15
0.1
0.05
0
50
100
150
200
250
300
350
Tiempo [1 hora]


CDF theta #1 sim#1
Fn(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
theta


CDF theta #1
Fn(x)
theta
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.000
0.005
0.010
0.015


CDF theta #2
Fn(x)
theta
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.000
0.005
0.010
0.015


CDF theta #4
Fn(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.000
0.005
0.010
0.015
theta


CDF Theta
Empirical CDF
theta
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.000
0.005
0.010
0.015
S1
S2
S4

estrategia	q(1)	q(5)	q(10)
# 1	0.003%	0.040%	0.160%
# 2	0.004%	0.033%	0.116%
# 4	0.000%	0.000%	0.0438%

Viabilidad y Umbrales sostenibles

- Horizonte de tiempo : $[0, T]$
- Estado inicial: $\xi \in \mathbf{X}$
- Secuencia de controles: $\mathbf{u} = (u_t)_{t=0}^{T}$
- Escenario: $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0}^{T}$

Se tiene el sistema de control estocástico:

$$(D_{\xi}^{\mathbf{u}}(\mathbf{w})) \qquad x_{t+1} = F_t(x_t, u_t, w_t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 = \xi$$

con espacio de estados $\mathbf{X}$, espacio de controles $\mathbf{U}$ y escenarios $\mathbf{W}$.

$$\mathbb{U} = \{\mathbf{u} | u_0, \ldots, u_{T-1} \in \mathbf{U}\} \cong \mathbf{U}^{T+1}$$
$$\mathbb{W} = \{\mathbf{w} | w_t \in \Omega_t, \quad \forall t \in [0, T]\} \cong \prod_{t=0}^{T} \Omega_t$$
$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} | x_0, \ldots, x_{T+1} \in \mathbf{X}\} \cong \mathbf{X}^{T+2}$$

donde $\Omega_t \subset \mathbf{W}$ para el cual $w_t \in \Omega_t$

Kernel de viabilidad y umbrales sostenibles estocásticos

$$\mathbb{S}^{\beta}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\ P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle|\ g^t(x_t, u_t) \geq c \quad, \forall t \in [0, T]\ \right) \geq \beta \right\}$$

$$\mathbb{V}^{\beta}(c) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \mathbf{u} \in \mathbb{U},\ P\left(\mathbf{w} \in \mathbb{W} \middle|\ g^t(x_t, u_t) \geq c \quad, \forall t \in [0, T]\ \right) \geq \beta \right\}$$

tomando $g(x_t, u_t) = g_t$,

$$P\left(g_t \leq \theta, \forall t \in [0, T]\right)$$

$$P\left(g_0 \leq \theta, \ldots, g_T \leq \theta\right) = P(\max_t \{g_t\} \leq \theta)$$

o bien,

$$P\left(g_0 \geq \theta, \ldots, g_T \geq \theta\right) = P(\min_t \{g_t\} \geq \theta)$$

Donde hay que considerar que existe una fuerte dependencia entre los g_i.

Pruebas de simulación

Gabriel Vergara Schifferli

18 Enero 2022

Modelos para considerar en umbrales sostenibles para la gestión de riesgo en portafolios de crypto activos.