

Métodos para estimación de estructura de curvas de rendimiento de depósitos a plazo en mercados de transacción infrecuente para modelo DNS e impacto de variables económicos en las tasas en Chile.

6 de noviembre de 2021

Índice

1. Datos	4
2. Modelo N&S	6
2.1. parámetro de persistencia	7
3. Estimación variables latentes: Métodos DL	9
3.1. Diebold & Li	9
3.2. Diebold & Li por periodo	9
3.3. Diebold & Li λ variable	10
4. Estimación variables latentes : Métodos por filtro	12
4.1. Filtro de Kalman lineal	13
4.2. EKF	13
4.2.1. Linealización de primer orden	13
4.2.2. EKF	14
4.2.3. Filtrado a DL mejorado	14
4.3. UKF	15
4.3.1. Inicialización UKF	15
4.3.2. Pesos	15
4.3.3. σ -Puntos	16
4.3.4. Paso de predicción	17
4.3.5. Paso de actualización	17
4.3.6. Optimización parámetros	17
5. Estimación parámetros del modelo	17
5.1. Métodos Duales	18
5.1.1. Dual UKF	18
5.2. Métodos conjuntos	19
5.2.1. Joint UKF	19
5.3. UKF minimizando MSE	19
5.4. KF minimizando MSE	24
6. Consideraciones para mayor estabilidad numérica	25
6.1. Cálculo de σ -puntos	25
6.2. Cálculo de ganancia: Método GVS	25
6.3. Restricción a parámetro λ	26
7. Análisis de residuos	26
8. Variables Económicas	27
8.1. Modelo VARX	27
8.2. Efecto TPM	29
8.3. Efecto inflación	29
8.4. Efecto IMACEC	30
8.5. Efecto IAC y ROA	30
8.6. Efecto FLAP y FCIC	30
8.7. Efecto VIX	31
9. Simulaciones	32
9.1. Gráficos Escenario Data completa	33
9.2. Gráficos Escenario Data incompleta	34
9.3. Comparación	36
10. Bancos adicionales	37
10.1. Banco B	37
10.1.1. Parámetros latentes	37
10.1.2. Tasas estimadas	38
10.1.3. Modelo VARX	41
10.2. Banco C	43
10.2.1. Parámetros latentes	43
10.2.2. Tasas estimadas	44
10.2.3. Modelo VARX	47

11.Resultados y conclusiones finales	48
12.Referencias	50

1. Datos

Los datos corresponden a transacciones de depósitos a plazo de un banco en particular en el mercado secundario. Estos se componen de fecha de transacción, monto de transacción, tasa y plazo al vencimiento. Tienen una ventana temporal desde el 2 de enero 2003 hasta el 22 de enero 2021 con un total de 497589 observaciones. A continuación se presenta un gráfico que representa si hubo o no transacción de plazo al vencimiento versus fecha:

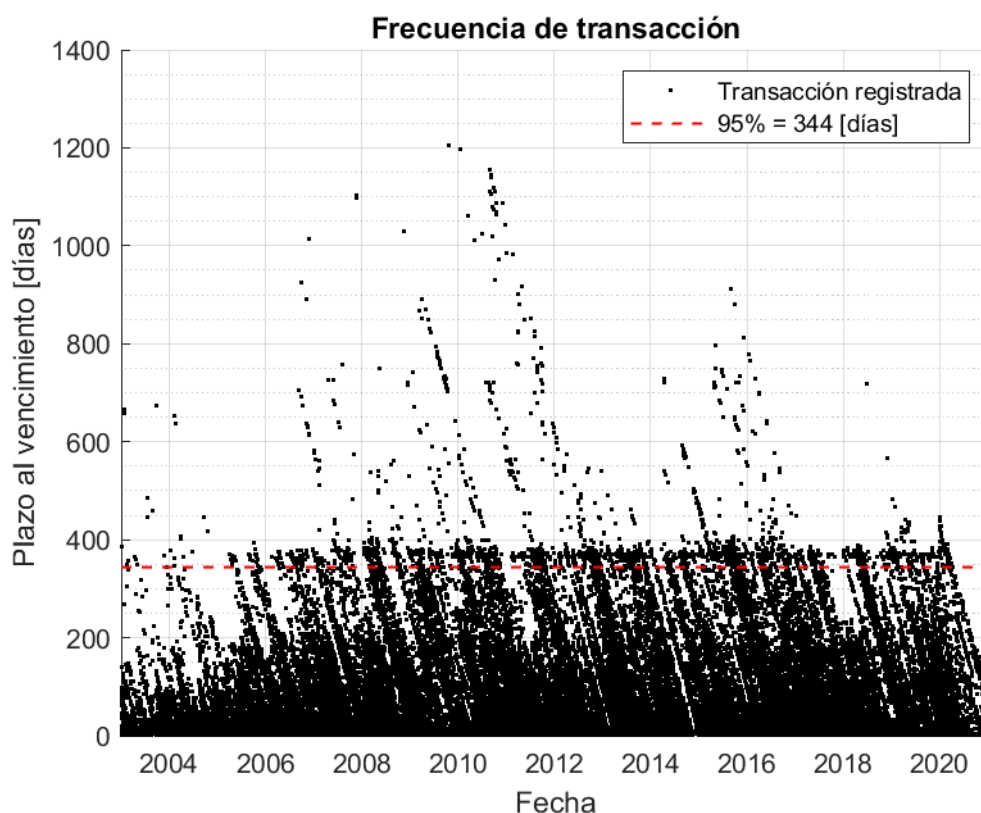


Figura 1: Los puntos negros representan registro de transacción, la línea punteada roja es el percentil 95 de los datos, esto es, el 95 % de las transacciones registradas para este banco fueron de plazos al vencimiento menores que 344 días.

Hay que notar que se tienen pocos registros de papeles con plazo de vencimiento superiores al año y hay varios días en los cuales no se registran operaciones o muy pocas.

Para estudiar estos datos se realizó un análisis mensual mas que diario, se ocuparon todas las transacciones en 1 mes como datos para el mes. Además, para cada mes se realizaron bins de plazos al vencimiento de 10 días, $[0,10]$, $[10,20]$.. hasta el último plazo registrado.

Para cada uno de estos bins se hizo un winsorizing al 90 %, se quitaron los datos que superaban en tasa al percentil 95 y los que estaban por debajo del percentil 5. Hay bins en los cuales no se tienen datos o bien se tienen muy pocos y dispersos, para estos casos cuya cantidad sea inferior a 5 no se optó por el winsorizing sino que quitó el máximo y el mínimo en caso de ser necesario. Luego, para cada bin se realizó un promedio ponderado por monto de transacción tanto para la tasa como para el plazo al vencimiento, de forma que para los bins se tenga un puro dato que represente el promedio ponderado por monto, a modo de ejemplo se presenta un gráfico:

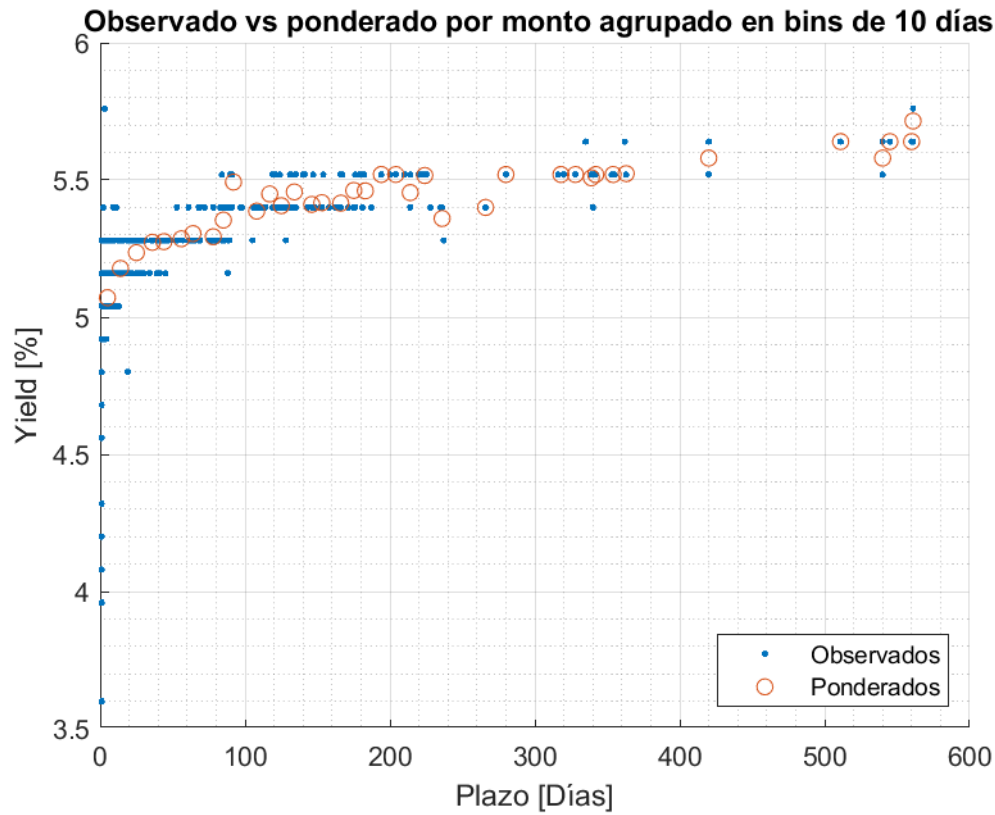


Figura 2: Puntos azules corresponden a los datos observados mientras que los círculos naranja corresponden a los datos procesados segmentados en bins de 10 días.

Finalmente, se presenta un gráfico de las tasas observadas para plazos de 30, 60, 90, 180 y 360 días al vencimiento las cuales corresponden a un promedio ponderado por monto en alrededor del plazo al vencimiento, es decir, para la tasa a 30 días al no tener un dato a 30 días se utiliza el promedio de datos en un intervalo de 20 a 40 días, 50 a 70 y así sucesivamente. En caso de no tener registro para el plazo ± 10 se aumenta en 1 la ventana hasta no superar cierto umbral, en caso de no tener registro hasta el umbral propuesto (20 % para plazos de 180 y 360 días) no se considera registro.

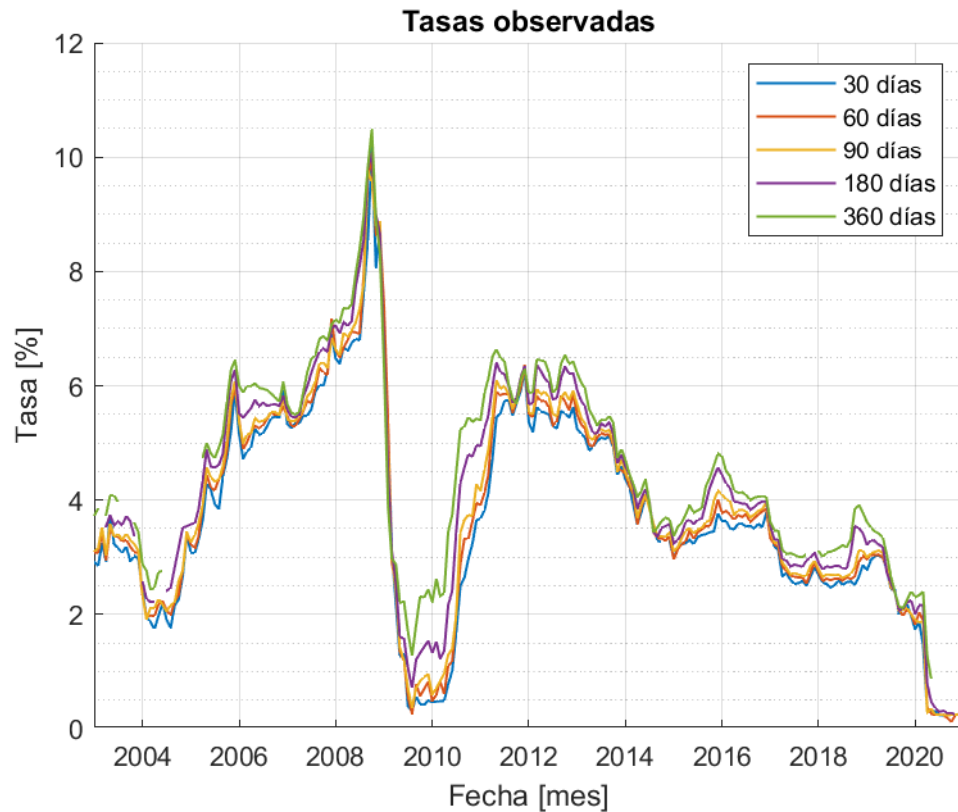


Figura 3: Tasas observadas en el periodo de estudio para 30, 60, 90, 180 y 360 días.

2. Modelo N&S

El modelo de curvas de rendimiento de Nelson y Siegel dinámico consiste en caracterizar la curva de rendimiento en 4 parámetros: Nivel, Pendiente, Curvatura y el parámetro λ o parámetro de persistencia.

La curva de rendimiento es función del plazo al vencimiento m , por lo tanto la tasa a plazo m se representa de la siguiente manera:

$$R(m) = L + S \frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} + C \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m} \right)$$

Este modelo es lineal en 3 parámetros (L , S y C) pero no para el cuarto parámetro λ . Cada uno de estos parámetros tiene un sentido económico: L representa la tasa a largo plazo, S es la diferencia entre la tasa corta y larga, C es la curvatura, es decir, describe como cambia la tasa de corto, mediano y largo plazo mientras que el parámetro λ define que tan rápido se llega a la tasa larga. A modo de ejemplo se presentan gráficos para describir visualmente la curva de rendimiento.

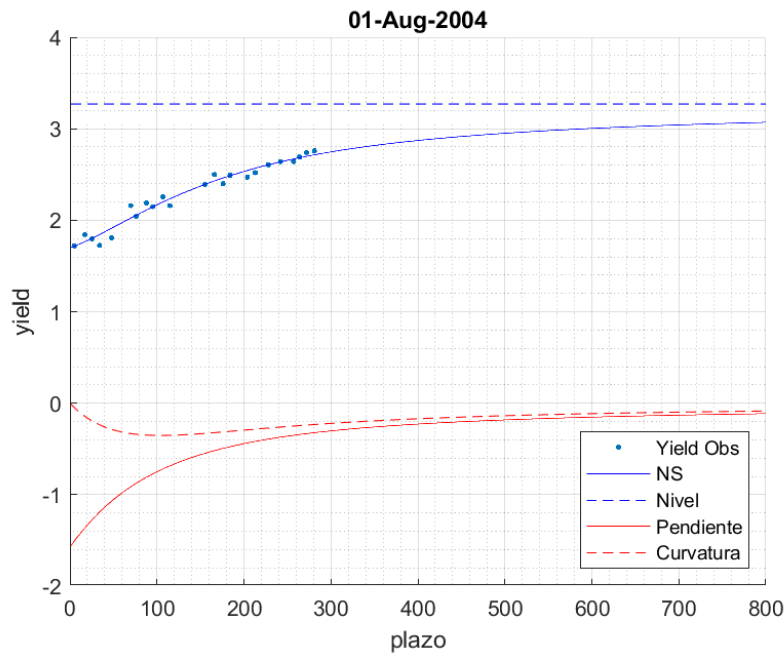


Figura 4: Los puntos azules corresponden a las tasas observadas. Esta curva tiene parámetros: $L = 3.2705$, $S = -1.5725$, $C = -1.1816$ y $\lambda = 0.0172$. La línea azul continua es la curva de rendimiento estimada por la función de Nelson y Siegel, mientras que la línea azul punteada es el nivel, la roja punteada es la componente de curvatura, roja continua es la componente de pendiente y la suma de estas es la curva de N&S.

El modelo dinámico consiste en que estos parámetros dependen del tiempo, por lo tanto no son parámetros fijos.

La interpretación de estos parámetros viene de las condiciones de frontera de la curva, pues se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow 0} R(m) &= L + S \\ \lim_{m \rightarrow \infty} R(m) &= L\end{aligned}$$

entonces, a un vencimiento instantáneo 0, $L + S$ es justamente la tasa corta y a un plazo infinito es la tasa larga. El factor de curvatura contribuye a la curva a mediano plazo. Hay que considerar que la función $\frac{1 - \exp(-x)}{x}$ converge lento, por lo tanto es esperable que el parámetro de nivel sobreestime un poco la tasa larga en ciertas ocasiones.

2.1. parámetro de persistencia

Para estudiar el parámetro de persistencia se tiene que ver la función $g(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{x} - \exp(-x)$ utilizando $x = \lambda m$ para algún plazo de vencimiento m . Esta función es continua en todo su dominio, positiva y además se tiene que $g(0) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. ,por lo tanto, se tiene que alcanza su máximo en algún punto.

No existe una forma analítica para obtener el máximo pero si se puede aproximar numéricamente y es aproximadamente en $x = 1,827^1$. De este modo, si se conoce el plazo de vencimiento donde la curvatura alcanza su máximo (o mínimo en caso de ser negativa), se puede determinar el parámetro λ puesto que $1,827 = x = \lambda m$, el problema, tanto λ como m son desconocidos.

En caso de tener suficientes observaciones (no es el caso) para poder determinar a que plazo se alcanza la curvatura máxima, se puede determinar un valor adecuado de λ , siempre y cuando la curva de rendimiento no sea estrictamente creciente o decreciente, puesto que en estos casos no será visible la interacción de la curvatura.

A modo de ejemplo se presenta el mismo gráfico anterior pero con una variación positiva y negativa del 10% de λ .

¹<https://www.mathworks.com/help/econ/using-the-kalman-filter-to-estimate-and-forecast-the-diebold-li-model.html>

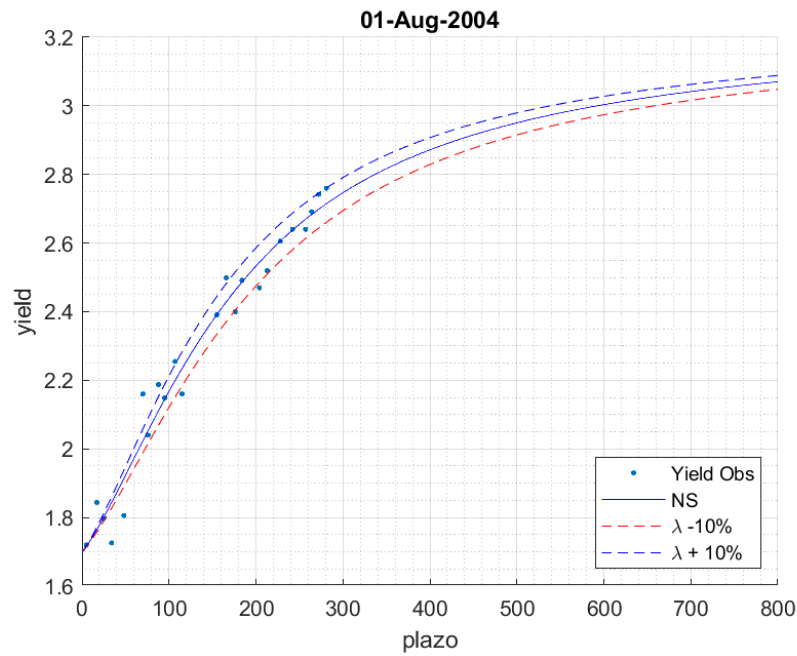


Figura 5: Representación de un cambio del 10 % en el parámetro λ para la curva de N&S. Misma curva que Figura 4.

En este gráfico se aprecia que el parámetro de persistencia tiene un importante efecto para los plazos medios de la curva y además afecta la tasa de convergencia a largo plazo a la tasa larga.

3. Estimación variables latentes: Métodos DL

El método de Diebold y Li consiste en proponer un mallado de λ fijo para estimar el modelo de manera lineal y quedarse con el que mejor describa la curva, utilizando alguna métrica e.g. el parámetro que minimiza el MSE.

3.1. Diebold & Li

En primer lugar, utilizando el parámetro ϕ obtenido en el paper de Alfaro, Becerra y Sagner (2011) se utiliza una versión discreta del modelo de Nelson & Siegel, el cual transforma la ecuación a depender de un parámetro fijo $\phi = \exp(-\lambda)$, para este caso, se utilizaron datos correspondientes a tasas de captación prime a 1, 3, 6 y 12 meses y bonos nominales (BCP) emitidos por el Banco Central de Chile a 2, 5 y 10 años desde julio de 2004 hasta junio de 2011 considerando como dato mensual el valor diario del cierre de mes. Para tales circunstancias se obtuvo un valor de $\phi = 0,92$ lo que equivaldría a un $\lambda = 0,0834$.

Calculando los parámetros del modelo de N&S para los datos en estudio se obtuvieron las siguientes series, la primera utilizando el parámetro fijo $\lambda = 0,0834$ y la segunda calculando un nuevo parámetro.

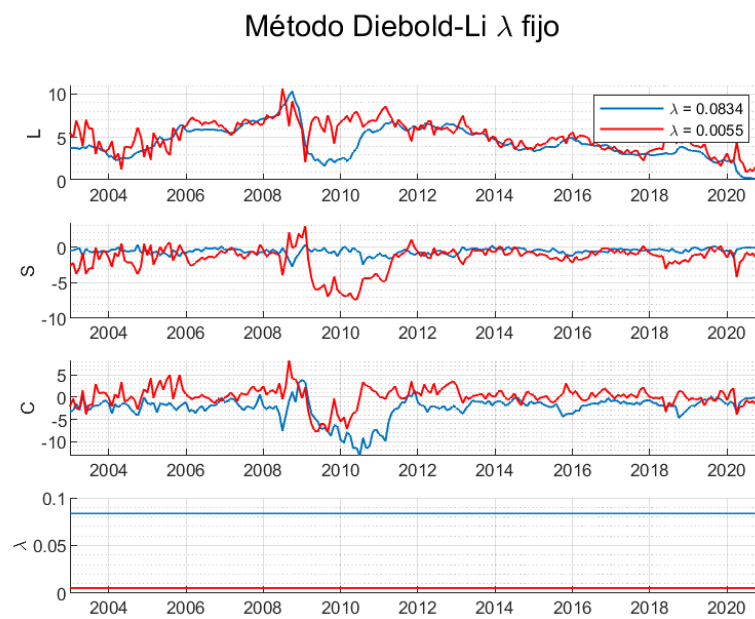


Figura 6: parámetros de N&S estimados por método de Diebold-Li. Línea roja estima el λ apropiado para el periodo y datos mientras que línea azul utiliza el parámetro estimado utilizando el modelo discreto en el caso de Alfaro, Becerra y Sagner (2011).

Si bien es esperable que debido a la distinta naturaleza de los datos, los parámetros cambien, en este caso son curvas completamente distintas, por lo que se puede ver que el cambio de este parámetro tiene un efecto importante en la estimación de las variables latentes del modelo.

λ	SS P1	SS P2	SS P3	TOTAL
0.0834	5.4583	23.2329	4.6158	33.307
0.0055	1.8451	4.2161	1.1679	7.231

Cuadro 1: Suma de errores cuadráticos en tasas de 30, 60, 90, 180 y 360 días para parámetros λ distintos por periodo, P1 es periodo del 2003-01 hasta 2008-07, periodo P2 de 2008-08 hasta 2011-12 y P3 de 2012-01 hasta 2021-01.

En la tabla de suma de errores cuadráticos, se aprecia un gran cambio en el error de estimación de tasas para los plazos al vencimiento de 30, 60, 90, 180 y 360 días.

3.2. Diebold & Li por periodo

En esta sección se plantea calcular un parámetro λ que sea fijo de acuerdo al periodo de estudio. Se secciona la ventana temporal en 3 periodos: pre crisis, durante crisis y post crisis.

El periodo pre crisis contempla la ventana temporal de 2003-01 hasta 2008-07, el periodo de crisis contempla desde 2008-08 hasta 2011-12 y finalmente el periodo post crisis el resto, incluido el corto periodo de crisis producto de la pandemia del covid.

Método Diebold-Li λ fijo por periodo



Figura 7: Estimación de parámetros utilizando el mejor λ para cada uno de los periodos.

Se puede apreciar que si bien el parámetro de persistencia cambia para cada periodo este no significa un gran cambio en la estimación de tasas, lo cual se confirma en la siguiente tabla de suma de error cuadrático:

λ	SS P1	SS P2	SS P3	TOTAL
PP	1.8532	4.2161	1.1679	7.229
0.0055	1.8451	4.2161	1.1679	7.231

Cuadro 2: Suma de errores cuadráticos en tasas de 30,60,90,180 y 360 días para parámetros λ distintos por periodo, PP es el modelo estimando el parámetro por periodo. P1 es periodo del 2003-01 hasta 2008-07, periodo P2 de 2008-08 hasta 2011-12 y P3 de 2012-01 hasta 2021-01.

3.3. Diebold & Li λ variable

Si bien en la sección anterior no se observó un cambio importante al estimar el parámetro de persistencia en los 3 periodos de estudio, se propone implementar un método el cual estime el mejor λ para cada fecha, de esta forma no se restringe el modelo a un parámetro fijo, sino que se estudia la factibilidad de que este parámetro no sea fijo.

Para ello se realiza una combinación entre una estimación por medio de OLS y OLS robusto para un mallado de λ entre $[0.005, 0.1]$ puesto que al estudiar en mas detalle, parámetros mayores a 0.1 por lo general son consecuencia de un sobre ajuste producto de una baja cantidad de datos y una alta variabilidad en las tasas de muy corto plazo.

El efecto de un λ alto (mayor a 0.1) por lo general se traduce en una curva que sube y baja para quedar recta paralela al eje x en un lapso menor a 10 días al vencimiento, de esta forma minimizando el error cuadrático de la regresión sin sentido.

Además, para evitar cambios muy bruscos producto de datos muy influyentes se realiza una estimación robusta y se comparan ambas mediante algún criterio para optar por la mejor estimación para la fecha.

Método Diebold-Li mejorado



Figura 8: Comparación entre método de Diebold-Li con parámetro fijo y método mejorado mixto con estimación robusta y parámetro variable.

En esta gráfica se observa que el parámetro de persistencia tiene un comportamiento variable y no similar a un valor fijo, además notar que para el periodo final este método ya no estima tasas largas negativas.

Comparando los distintos métodos, el que estima de mejor manera las tasas observadas es el método propuesto de Diebold-Li mejorado, el cual contempla un λ variable y una combinación con estimación robusta para evitar que observaciones muy influyentes desvíen la regresión para ajustar de mejor manera el error cuadrático producto de unas cuantas observaciones atípicas.

λ	SS P1	SS P2	SS P3	TOTAL
variable	1.5408	3.5573	1.0531	6.151
0.0055	1.8451	4.2161	1.1679	7.231

Cuadro 3: Suma de errores cuadráticos en tasas de 30, 60, 90, 180 y 360 días para parámetros λ fijo y variable. P1 es periodo del 2003-01 hasta 2008-07, periodo P2 de 2008-08 hasta 2011-12 y P3 de 2012-01 hasta 2021-01.

4. Estimación variables latentes : Métodos por filtro

Si bien el método de Diebold-Li puede ser suficiente, utilizando un λ fijo o variable dependiendo de la ocasión, para este efecto se proponen modelos en espacio de estados de forma de representar las variables latentes y las observaciones de tasas. Entonces se propone el siguiente modelo:

$$R(m)_t = L_t + S_t \frac{1 - \exp(-\lambda_t m)}{\lambda_t m} + C_t \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_t m)}{\lambda_t m} - \exp(-\lambda_t m) \right)$$

Esta función $R(m)_t$ es función del plazo de vencimiento m dado un tiempo observado t . Cambiando la función de m con parámetros $x_t = (L_t, S_t, C_t, \lambda_t)$ a una función de $x_t = (L_t, S_t, C_t, \lambda_t)$ con parámetros $m_t = \{m_i^t\}_{i=1}^n$ donde n es la cantidad de observaciones al tiempo t y m_i^t es el plazo observado i al tiempo t , se obtiene:

$$\Gamma(x_t)_{m_t} = \begin{pmatrix} L_t + S_t \frac{1 - \exp(-\lambda_t m_1^t)}{\lambda_t m_1^t} + C_t \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_t m_1^t)}{\lambda_t m_1^t} - \exp(-\lambda_t m_1^t) \right) \\ L_t + S_t \frac{1 - \exp(-\lambda_t m_2^t)}{\lambda_t m_2^t} + C_t \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_t m_2^t)}{\lambda_t m_2^t} - \exp(-\lambda_t m_2^t) \right) \\ \vdots \\ L_t + S_t \frac{1 - \exp(-\lambda_t m_n^t)}{\lambda_t m_n^t} + C_t \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_t m_n^t)}{\lambda_t m_n^t} - \exp(-\lambda_t m_n^t) \right) \end{pmatrix}$$

Luego, el modelo general representado en espacio de estado:

$$\begin{aligned} x_t &= F(x_{t-1}, u_t, \varepsilon_t) \\ y_t &= \Gamma_t(x_t, \nu_t) \end{aligned}$$

en el cual ε_t es el factor de ruido en el estado y ν_t el ruido en la ecuación de observación mientras que u_t es una variable exógena al sistema o bien variables distintas a los parámetros latentes de nivel, pendiente, curvatura y persistencia.

Para este efecto, inicialmente se considerará que los ruidos en ambas ecuaciones son aditivos, y u_t será nulo. Además, se considerará que x_t sigue un proceso VAR(1), por lo tanto se obtiene la forma:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + Ax_{t-1} + \varepsilon_t \\ y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t \end{aligned}$$

Por mayor simplicidad se considerará que los factores de ruido son gaussianos. Para el caso de la ecuación de medición se considerará homocedástico dada la naturaleza del fenómeno, pues la variación de yields con plazos de vencimiento altos debiese ser menor a la variación con respecto a plazos menores en un régimen normal,

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + Ax_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N_4(0, Q) \\ y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t, \quad \nu_t \sim N_{n_t}(0, \sigma^2 Id_{n_t}) \end{aligned}$$

Finalmente, para estos modelos se tiene el esquema de estimación óptimo:

$$\hat{x}_k = (\text{predictor óptimo de } x_k) + G_k[y_k - (\text{predictor óptimo de } y_k)]$$

del cual derivan los métodos de Kalman, cada método sigue el mismo esquema con variaciones en la matriz G_k la cual se le denomina como ganancia.

Entonces dado el estado anterior se estima el predictor óptimo del estado según la dinámica de x_t , luego al registrar una medición se ajusta el estimador conforme al error en la medición al comparar con el estado estimado, entonces este error se pondera por la ganancia y se tiene predictor corregido. En el caso de distribuciones gaussianas es el esquema óptimo.

Los predictores o estimadores óptimos se derivan según la esperanza condicional:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= E[F(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, \varepsilon_{t-1})] \\ \hat{y}_t &= E[H(\hat{x}_t, \nu_t)] \\ G_k &= P_{xy} P_{yy}^{-1} \end{aligned}$$

donde las matrices P son la covarianza cruzada y varianza. Por lo tanto, para el caso de funciones lineales se tiene una forma exacta para calcular estas cantidades en casos gaussianos con el filtro de kalman lineal, para el caso en que estas funciones no son lineales, se tienen, entre otras alternativas, el filtro de kalman extendido el cual linealiza la función en torno a un punto y el Unscented el cual realiza una aproximación de estas cantidades sin tener que diferenciar las funciones.

Una consideración importante para estos métodos, en este caso, se busca obtener el estado no observable dado un modelo propuesto utilizando las mediciones. Se asume que tanto el estado no observable como las mediciones tienen fuentes de ruido, por lo que el filtro viene a quitar el ruido y estimar el estado al mismo tiempo. No obstante, es necesario proponer un modelo

tanto para la ecuación de medición como para la dinámica de estado, en este caso se propone un modelo VAR para el estado, sin embargo, podría ser distinto.

Dado que se debe proponer un modelo para la dinámica de estado, es necesario estimar sus parámetros en caso de ser un modelo VAR con media, para esto se utiliza el mejor método de Diebold y Li obtenido anteriormente, el cual se presume ser el estado verdadero mas el ruido, de esta forma el filtro aproximaría de mejor manera el estado real.

4.1. Filtro de Kalman lineal

Si bien el modelo no es lineal, la no linealidad es producida gracias al parámetro de persistencia, por lo tanto, al dejar este valor fijo el modelo es lineal.

Para el caso de sistemas lineales es posible aplicar el filtro de Kalman normal :

Esquema general del Filtro de Kalman

$$\begin{aligned} x_t &= Ax_{t-1} + e_t \\ y_t &= Cx_t + v_t \end{aligned}$$

se tiene el paso de predicción:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1} &= A\hat{x}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= AP_{t-1|t-1}A' + Q_t \end{aligned}$$

donde Q_t es la covarianza del ruido de estado.

Luego, el paso de actualización:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t &= y_t - C\hat{x}_{t|t-1} \\ S_t &= CP_{t|t-1}C' + R_t \\ K_t &= P_{t|t-1}C'S_t^{-1} \\ \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t\tilde{y}_t \\ P_{t|t} &= (I - K_tC)P_{t|t-1} \end{aligned}$$

donde R_t es la covarianza del ruido de medición.

4.2. EKF

4.2.1. Linealización de primer orden

Se tiene la función $\gamma_m(\theta) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\theta = (L, S, C, \lambda)$, con $\lambda > 0$ y m el plazo, donde

$$\gamma_m(\theta) = L + Sg(\lambda; m) + C(g(\lambda; m) - e^{-\lambda m})$$

con $g(\lambda; m) = \frac{1-e^{-\lambda m}}{\lambda m}$ función diferenciable estrictamente decreciente.

Utilizando una expansión de Taylor de primer orden en torno a $\bar{\theta}$:

$$\gamma_m(\theta) = \gamma_m(\bar{\theta}) + D\gamma_m(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})' + h(\theta)(\theta - \bar{\theta})'$$

por lo tanto para $\theta \in \mathcal{N}_{\bar{\theta}}$ se tiene la aproximación de primer orden:

$$\gamma_m(\theta) \approx \gamma_m(\bar{\theta}) + D\gamma_m(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})',$$

expresando de forma explícita:

$$D\gamma_m(\bar{\theta}) = \nabla\gamma_m(\bar{\theta}) = (1, g(\bar{\lambda}; m), g(\bar{\lambda}; m) - e^{-\bar{\lambda}m}, (\bar{S} + \bar{C})g'(\bar{\lambda}; m) + \bar{C}me^{-\bar{\lambda}m})$$

$$\gamma_m(\theta) \approx \gamma_m(\bar{\theta}) + \begin{pmatrix} 1 & g(\bar{\lambda}; m) & g(\bar{\lambda}; m) - e^{-\bar{\lambda}m} & (\bar{S} + \bar{C})g'(\bar{\lambda}; m) + \bar{C}me^{-\bar{\lambda}m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L - \bar{L} \\ S - \bar{S} \\ C - \bar{C} \\ \lambda - \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

finalmente se llega a la expresión:

$$\gamma_m(\theta) = L + Sg(\bar{\lambda}; m) + C(g(\bar{\lambda}; m) - e^{-\bar{\lambda}m}) + \lambda(\bar{S} + \bar{C})(g'(\bar{\lambda}; m) + \bar{C}me^{-\bar{\lambda}m}) - \bar{\lambda}(\bar{S} + \bar{C})(g'(\bar{\lambda}; m) + \bar{C}me^{-\bar{\lambda}m})$$

Para la aplicación al Filtro de Kalman extendido, EKF, se realiza esta aproximación en torno a la esperanza condicional $\theta_{t|t-1}$.

4.2.2. EKF

Esquema general del Filtro de Kalman extendido. Para el sistema :

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-1}) + e_t \\y_t &= h(x_t) + v_t\end{aligned}$$

se tiene el paso de predicción:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t|t-1} &= f(\hat{x}_{t-1|t-1}) \\P_{t|t-1} &= F_t P_{t-1|t-1} F_t' + Q_t\end{aligned}$$

donde Q_t es la covarianza del ruido de estado y $F_k = \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_{k-1|k-1})$

Luego, el paso de actualización:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_t &= y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}) \\S_t &= H_t P_{t|t-1} H_t' + R_t \\K_t &= P_{t|t-1} H_t' S_t^{-1} \\\hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t \tilde{y}_t \\P_{t|t} &= (I - K_t H_t) P_{t|t-1}\end{aligned}$$

donde R_t es la covarianza del ruido de medición y $H_k = \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_{k|k-1})$, Para el caso particular donde $x_t = (L_t, S_t, C_t, \lambda_t)^T$ y $f(x_{t-1}) = Ax_{t-1}$ y $h(x_t) = L_t + S_t g_1(\lambda_t; m) + C_t g_2(\lambda_t; m)$

Entonces, la linealización de $H(x_t)$ queda:

$$H_k = \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_{k|k-1})$$

$$\nabla h_{m_i}(\hat{x}_{t|t-1}) = (1 \quad g_1(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_i) \quad g_2(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_i) \quad \hat{S}_{t|t-1} g_1'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_i) + \hat{C}_{t|t-1} g_2'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_i))$$

entonces,

$$H_t := Dh(\hat{x}_{t|t-1}) = \begin{pmatrix} 1 & g_1(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_1) & g_2(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_1) & \hat{S}_{t|t-1} g_1'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_1) + \hat{C}_{t|t-1} g_2'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_1) \\ 1 & g_1(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_2) & g_2(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_2) & \hat{S}_{t|t-1} g_1'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_2) + \hat{C}_{t|t-1} g_2'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & g_1(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_n) & g_2(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_n) & \hat{S}_{t|t-1} g_1'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_n) + \hat{C}_{t|t-1} g_2'(\hat{\lambda}_{t|t-1}; m_n) \end{pmatrix}$$

donde $g_1(\lambda; m) = \frac{1 - \exp(-\lambda m)}{\lambda m}$ y $g_2(\lambda; m) = g_1(\lambda; m) - e^{-\lambda m}$, entonces

$$\begin{aligned}g_1'(\lambda; m) &= \frac{e^{-\lambda m}(\lambda m + 1) - 1}{\lambda^2 m} \\g_2'(\lambda; m) &= \frac{e^{-\lambda m}(\lambda^2 m^2 + \lambda m + 1) - 1}{\lambda^2 m}\end{aligned}$$

4.2.3. Filtrado a DL mejorado

Utilizando este filtro, se aplica a la serie producida por el método DL mejorado, la cual vendría siendo la mejor estimación de momento.

Método Diebold-Li mejorado vs EKF



Figura 9: Serie de DL mejorado filtrada por EKF.

Si bien, el método empleado de filtro no estima los parámetros, dado que el modelo subyacente se asume ruidoso se espera obtener una serie más limpia de la cual sea más fácil obtener información. Para este caso, la serie filtrada es mucho peor que la original y esto es de esperar dada la fuerte no linealidad del parámetro de persistencia para valores pequeños.

Método	SS P1	SS P2	SS P3	TOTAL
DL-M	1.5408	3.5573	1.0531	6.151
EKF	9.5511	33.0855	12.1708	54.807

Cuadro 4: Suma de errores cuadráticos en tasas de 30, 60, 90, 180 y 360 días para tasas estimadas utilizando el método de DL-mejorado y el filtro de Kalman extendido. P1 es periodo del 2003-01 hasta 2008-07, periodo P2 de 2008-08 hasta 2011-12 y P3 de 2012-01 hasta 2021-01.

4.3. UKF

El Unscented Kalman Filter a diferencia del EKF, estima los predictores y las covarianzas óptimas mediante la transformada unscented (UT). Esta consiste en utilizar puntos escogidos de manera que al propagarlos por las funciones, se pueda aproximar la distribución real con la mejor gaussiana posible, en el caso de EKF se aproxima una gaussiana en trono a la media condicional linealizando la función, por lo tanto, la distribución de la imagen es fácil de calcular. No obstante, si las funciones presentan no linealidades severas en torno a estos puntos, el error será muy alto y no representará de buena manera la distribución real.

Para caso de distribuciones gaussianas, la aproximación realizada por la transformada unscented llega a una aproximación de Taylor de tercer orden y en caso de distribuciones no gaussianas a una aproximación de segundo orden. En ambos casos tiene una precisión mayor que el EKF y además no es necesario calcular los diferenciales.

4.3.1. Inicialización UKF

En primer lugar, se debe inicializar el algoritmo con un valor inicial. Para este efecto se utilizará como valor inicial el estimado por el método DL2. De este método obtenemos de forma directa x_0 y σ_y^2 , mientras que los demás parámetros son estimados al estimar el proceso VAR(1) del cual se obtiene la media μ , parámetros A, y la covarianza de las innovaciones Q de donde se hace la descomposición Cholesky y se obtienen los parámetros de B.

4.3.2. Pesos

Para $\dim(\theta) = L$ se utilizan $2L + 1$ σ -points (paso siguiente), por lo tanto se requieren $2L + 1$ pesos.

Se tienen pesos para los puntos utilizados para la estimación de media y covarianza.

Se tiene que

$$\sum_{i=0}^{2L} W_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{2L} W_i^m x_i = \bar{x}, \quad \sum_{i=0}^{2L} W_i^c (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = P_{xx}$$

Entonces se presentan esquemas comunmente utilizados,

Forma I:

$$\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$$

$$W_0^m = \frac{\lambda}{L + \lambda}$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{L + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(L + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2L$$

Los parámetros α, β y κ tienen relación con la dispersión y ponderación de los σ -points.

α determina la dispersión de los puntos alrededor de la media, usualmente es un valor pequeño (e.g. 1e-3). κ es otro parámetro de escala, mientras que β es un parámetro que solo afecta a la ponderación de la media con respecto a los demás puntos para la covarianza. Se utiliza para incorporar conocimiento a priori de la distribución e.g. se considera óptimo para distribuciones gaussianas un $\beta = 2$.

Forma II:

Pesos iguales para media y varianza.

$$W_0 = \frac{k}{L + k}$$

$$W_i = \frac{1}{2(L + k)} \quad i = 1, \dots, 2L$$

para este esquema, se considera $L + k = 3$ como valor óptimo para distribuciones gaussianas. Para este esquema, se tiene que la media pesa el doble que los demás puntos.

Forma III:

$$W_0 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^q \varphi(\xi_j) \sum_{j=1}^q \varphi(\xi_j) \xi_j^4}{3 \left[\sum_{j=1}^q \varphi(\xi_j) \xi_j^2 \right]^2}$$

$$W_i = \frac{1 - W_0}{2L \sum_{j=1}^q \varphi(\xi_j)}$$

esta forma surge al tomar $2q$ puntos para cada sigma punto donde los pesos para cada sigma punto son $w\varphi(j)$ con $\varphi(\cdot)$ la densidad de una distribución normal estándar. Para $q = 2$ se puede tomar $\xi_1 = 1$ y $\xi_2 = 2$ o $\xi_1 = 1/2$ y $\xi_2 = 3/2$ por ejemplo y para $q = 4$ se podría tomar $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 3/2$ y $\xi_4 = 2$. Estas formas surgen al incorporar información de los momentos de una distribución normal para escoger los parámetros, en particular utilizando el coeficiente de curtosis de una normal, el cual es un valor conocido.

Si bien, por tener una interpretación de pesos, se asume ser positivo o nulo. Por otro lado, al restringir los pesos como positivos, no se puede aproximar de manera exacta una distribución gaussiana, por ejemplo, en la forma II, para dimensiones mayores a 3 el parámetro es óptimo para distribuciones gaussianas a un valor negativo, también la forma I siendo la más popular, los parámetros por defecto utilizados comunmente tienen peso negativo para la media.

Si, es contraintuitivo pero heurísticamente aceptado.

4.3.3. σ -Puntos

Se inicializan utilizando los parámetros de inicialización, posteriormente se realiza utilizando los calculados mediante el algoritmo.

Primero se deben calcular los σ -points de θ .

$$\Theta_0(t|t-1) = \bar{\theta}$$

$$\Theta_i(t|t-1) = \bar{\theta} + \left(\sqrt{(L + \lambda)P_\theta} \right)_i, \quad i = 1, \dots, L$$

$$\Theta_i(t|t-1) = \bar{\theta} - \left(\sqrt{(L + \lambda)P_\theta} \right)_i, \quad i = L + 1, \dots, 2L$$

En este paso, Θ denota una matriz donde cada columna es un estado, es decir, se construyen $2L + 1$ estados de los cuales se realiza una ponderación de estos. Por lo tanto, Θ es una matriz de dimensión $\mathbb{R}^{L \times (2L+1)}$ y denotamos a Θ_i como la i -ésima columna de Θ . Luego, $\sqrt{(L + \lambda)P_\theta} = \sqrt{L + \lambda} \sqrt{P_\theta}$ donde $\sqrt{P_\theta}$ es un factor raíz cuadrada de la matriz de covarianzas de θ , P_θ y el índice i denota la i -ésima columna de esta matriz.

Como las matrices de covarianza son simétricas definidas positivas es usual realizar una descomposición Cholesky para obtener este factor, aún así, las raíces cuadradas de matrices no son únicas, pero Cholesky da una interpretación geométrica

de estos. Independiente de esto, Puede ocurrir por razones de operaciones numéricas se pierda la cualidad positividad y en consecuencia la descomposición Cholesky falla. Para esto se utiliza una descomposición SVD la cual existe para todas las matrices y también tiene una interpretación geométrica un tanto distinta.

4.3.4. Paso de predicción

Luego de obtener los σ -points se procede a calcular los predictores:

$$\hat{\theta}_t^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \tilde{\mathcal{F}}(\Theta_i(t|t-1))$$

$$P_t^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left[\Theta_i(t|t-1) - \hat{\theta}_t^- \right] \left[\Theta_i(t|t-1) - \hat{\theta}_t^- \right]'$$

donde $\hat{\theta}_t^-$ denota al predictor de θ_t dado θ_{t-1} , caso análogo para la varianza de θ , P_t .

De igual modo, en la ecuación de medición: Primero, se deben propagar los σ -points a través de $\tilde{\Gamma}$

$$\mathcal{Y}(t|t-1)_i = \tilde{\Gamma}(\Theta_i(t|t-1))$$

entonces, \mathcal{Y} es la matriz cuyas columnas son las imágenes de los σ -points a través de $\tilde{\Gamma}$. Entonces,

$$\hat{y}_t^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{Y}(t|t-1)_i$$

$$P_{y_t}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left[\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^- \right] \left[\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^- \right]'$$

Posteriormente, se calcula la covarianza cruzada

$$P_{\theta_t y_t}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left[\Theta_i(t|t-1) - \hat{\theta}_t^- \right] \left[\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^- \right]'$$

4.3.5. Paso de actualización

En este paso, se calcula la ganancia de Kalman y se corrige el predictor de θ_t junto con su covarianza estimada P_t^- .

$$\mathcal{K} = P_{\theta_t y_t} P_{y_t}^{-1}, \quad \text{Kalman Gain}$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_t^- + \mathcal{K}(y_t - \hat{y}_t^-)$$

$$P_t = P_t^- - \mathcal{K} P_{y_t} \mathcal{K}'$$

Finalmente, se vuelve al paso de cálculo de σ -points, pero esta vez se utiliza $\hat{\theta}_t$ como media y P_t como covarianza.

4.3.6. Optimización parámetros

El esquema general del algoritmo UKF es estándar, la principal incógnita es la elección de los "pesos" dado que no existe una única forma de distribuirlos o asignarlos.

En el caso de la forma II, la optimización es más sencilla dado que se debe escoger un único parámetro de modo tal que la estimación se mejor en una métrica propuesta. En cambio, la forma I tiene 3 parámetros y es mucho más sensible ante cambios, por lo que en muchas ocasiones un pequeño cambio en alguna de estas variables provocaría que el filtro genere demasiadas inestabilidades fallando la estimación.

Para la forma II se implementó un optimizador el cual selecciona el parámetro k que minimiza el error de estimación de tasas a 30, 60, 90, 180 y 360 días según las observadas.

5. Estimación parámetros del modelo

Si bien anteriormente se propusieron distintos métodos de filtrado para estimar los estados no observables, todos ellos consisten en que el modelo de estado es conocido, en este caso un modelo VAR estimado de acuerdo a la serie inicial obtenida mediante el método de DL. Es posible siempre y cuando la estimación mejore, volver a estimar el modelo VAR pero con la serie filtrada y de ese modo, iterativamente obtener un mejor modelo siempre y cuando este no sea peor que el anterior.

Aún así, hay formas de estimar estos parámetros utilizando los filtros ya mencionados, acá se abarcarán los métodos duales y conjuntos.

5.1. Métodos Duales

El método dual se puede aplicar a cualquier forma de filtro. Este método consiste en realizar 2 estimaciones, primero se realiza la estimación del estado con el filtro fijando los parámetros como variables conocidas, luego se replantean las ecuaciones, donde las funciones ya no son de las variables de estado, sino que las variables de estado pasan a ser parámetros y los parámetros son las nuevas variables de estado, entonces se realiza una estimación de los estados y luego de los parámetros. No confundir con filtrar la serie completa y luego replantear el sistema y realizar el filtro con los parámetros como los estados anteriormente estimados y estimar los parámetros.

5.1.1. Dual UKF

Para el caso del UKF, el método Dual sigue el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}x_t &= \mathcal{F}(x_{t-1}; \theta_{t-1}) + \varepsilon_t \\y_t &= \Gamma_t(x_t; \theta_t) + \nu_t\end{aligned}$$

donde θ_t son los parámetros del modelo, en este caso μ y A . La notación $F(x; \theta)$ denota que F es función de x con parámetros θ .

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + Ax_{t-1} + \varepsilon_t \\y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t\end{aligned}$$

Entonces, dado un valor inicial, se calculan los σ -points de $x : \mathcal{X}(t, t-1)$, luego se aproxima la media y covarianza mediante los pesos asignados

$$\begin{aligned}\hat{x}_t^- &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{F}(\mathcal{X}_i(t|t-1)) \\P_t^- &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{X}_i(t|t-1) - \hat{x}_t^-] [\mathcal{X}_i(t|t-1) - \hat{x}_t^-]'\end{aligned}$$

se calcula la imagen de estos puntos a través de la ecuación de medición:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(t|t-1)_i &= \Gamma(\mathcal{X}_i(t|t-1)) \\\hat{y}_t^- &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{Y}(t|t-1)_i \\P_{y_t}^- &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^-] [\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^-]'\end{aligned}$$

$$P_{\theta_t y_t}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{X}_i(t|t-1) - \hat{\theta}_t^-] [\mathcal{Y}(t|t-1)_i - \hat{y}_t^-]'$$

y sigue el paso de actualización:

$$\mathcal{K} = P_{x_t y_t} P_{y_t}^{-1}, \quad \text{Kalman Gain}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + \mathcal{K}(y_t - \hat{y}_t^-)$$

$$P_t = P_t^- - \mathcal{K} P_{y_t} \mathcal{K}'$$

Ahora, si fuese el método normal, se realizaria nuevamente el paso inicial de calcular los σ -points utilizando los predictores corregidos \hat{x}_t y P_t . En vez de eso, se realiza el mismo paso considerando estos como parámetros y los parámetros como variables de estado, resumiendo la matriz A y la media μ en el vector θ , se tiene ahora el sistema:

$$\begin{aligned}x_t &= \mathcal{F}(\theta_{t-1}; x_{t-1}) + \varepsilon_t \\y_t &= \Gamma_t(\theta_t; x_t) + \nu_t\end{aligned}$$

en el cual se utiliza el resultado anterior como parámetro, y los σ -points se generan para los parámetros θ , en este caso se generan 9 puntos para x_t , pero luego se generan 41 puntos para los parámetros.

Entonces, se genera el sistema para el mismo tiempo:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{t, \theta_t}^- &= \sum_{i=0}^{2L_\theta} W_i^m \mathcal{F}(\Theta_i(t|t-1)) \\P_{t, \theta_t}^- &= \sum_{i=0}^{2L_\theta} W_i^c [\Theta_i(t|t-1) - \hat{\theta}_{t, \theta_t}^-] [\Theta_i(t|t-1) - \hat{\theta}_{t, \theta_t}^-]'\end{aligned}$$

se realiza el paso de predicción y corrección, luego se ingresa los valores de x y θ corregidos y se itera nuevamente.

Como se presumen los parámetros fijos, estos no tienen error por lo tanto, es usual utilizar una covarianza de error pequeña e.g. una matriz diagonal con entradas $1e-6$.

5.2. Métodos conjuntos

Los métodos conjuntos consisten en plantear el sistema como si los parámetros también fueran variables de estado, entonces se realiza el proceso de filtrado paralelamente a los parámetros y estados.

5.2.1. Joint UKF

Considerando ahora que los parámetros también se deben estimar, para implementar el algoritmo UKF se deben introducir como variables de estado. Entonces introduciendo la notación : $\mathbf{a} = \text{Vec}(A)$ se tiene el vector de parámetros : $\theta_t = (x'_t, \mathbf{a}'_t, \mu'_t)'$. Para efectos de reducción de parámetros, se estructura B como matriz triangular inferior, la descomposición Cholesky de la varianza del error en la ecuación de estado. Luego, si $\dim(x_t) = 4$ entonces se tiene que A tiene 16 parámetros, μ 4 y esto es un total de 24 parámetros a estimar. Es posible establecer una estructura al sistema de forma tal que reduzca la cantidad de parámetros.

Generalizando el sistema a θ_t :

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + Ax_{t-1} + \varepsilon_t \\y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t\end{aligned}$$

ahora, si μ y A son parámetros:

$$\begin{aligned}x_t &= \mathcal{F}(x_{t-1}, w_{t-1}) + \varepsilon_t \\y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t\end{aligned}$$

donde w_t son los parámetros μ y A . Al ser parámetros constantes se tienen las ecuaciones $\mu_t = \mu_{t-1}$ y $A_t = A_{t-1}$. Escribiendo $\mathbf{a} = \text{Vec}(A)$, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \mu_t \\ \mathbf{a}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{t-1} + A_{t-1}x_{t-1} \\ \mu_{t-1} \\ \mathbf{a}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y_t = \Gamma_t(\mu_t + A_t x_t) + \nu_t$$

entonces,

$$\begin{aligned}\theta_t &= \tilde{\mathcal{F}}(\theta_{t-1}) + v_t \\y_t &= \tilde{\Gamma}(\theta_t) + \nu_t\end{aligned}$$

donde $v_t = (\varepsilon_t^T, 0, 0)^T$. Esto resume un total de 24 parámetros a estimar. Si bien, se asume que la media y la matriz A son constantes y por ende no tienen ruido, se debe implementar un cierto ruido para que se ajusten de acuerdo a la ganancia de Kalman conforme se realizan las correcciones del estado al recibir una nueva medición. Es usual ver en las implementaciones matrices diagonales con valores 1e-6.

5.3. UKF minimizando MSE

Como alternativa a los métodos anteriores, se propone un método el cual consiste en minimizar el MSE de la serie de tasas estimadas respecto a las observadas. Para este caso se utilizó como función objetivo el error cuadrático medio de las tasas estimadas respecto a las observadas para los plazos al vencimiento de 30, 60, 90, 180 y 360 días.

Requiere de parámetros iniciales, estos parámetros corresponden al siguiente modelo:

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + Ax_{t-1} + B\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N_4(0, Id) \\y_t &= \Gamma_t(x_t) + \nu_t, \quad \nu_t \sim N_{n_t}(0, \sigma^2 Id_{n_t})\end{aligned}$$

Los parámetros a considerar son la media μ , la matriz A , la covarianza del proceso, expresada en B , matriz triangular inferior donde el error del proceso es $N(0, Q)$ con $BB' = Q$ y B triangular inferior de la descomposición Cholesky de Q y σ^2 la varianza en la ecuación de medición.

De esta forma se obtiene la siguiente serie de estados:

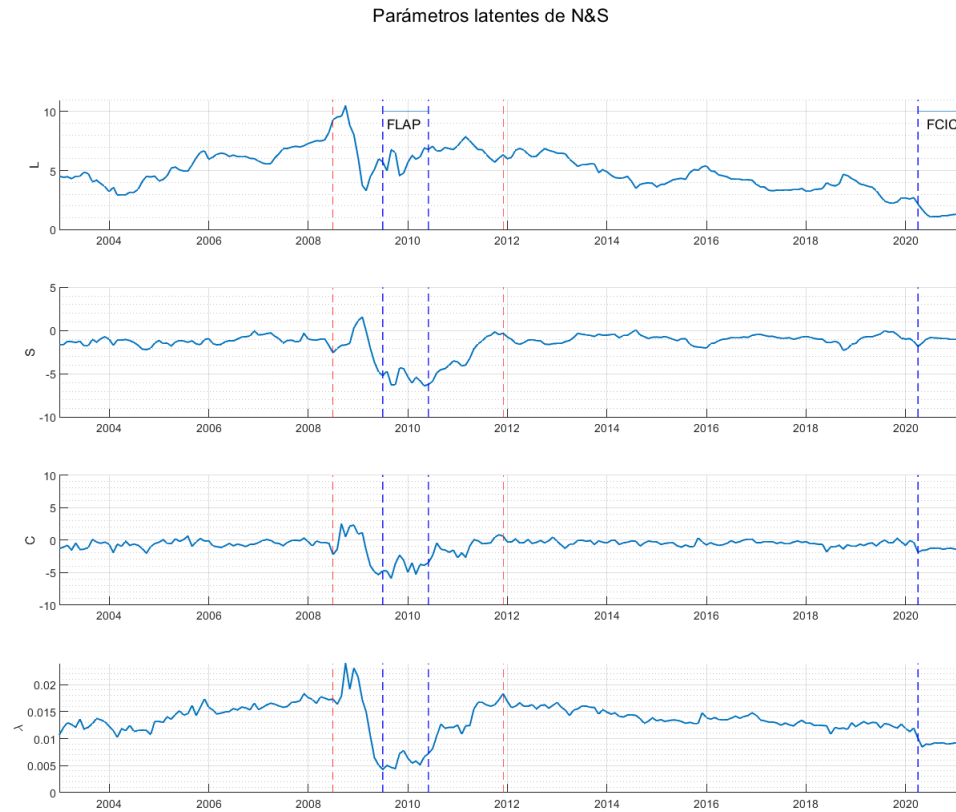


Figura 10: Estados latentes estimados minimizando MSE. Líneas de separación roja indican la separación en los 3 periodos de estudio: pre, durante y post crisis. Líneas punteadas azules indican region de aplicación FLAP y FCIC respectivamente.

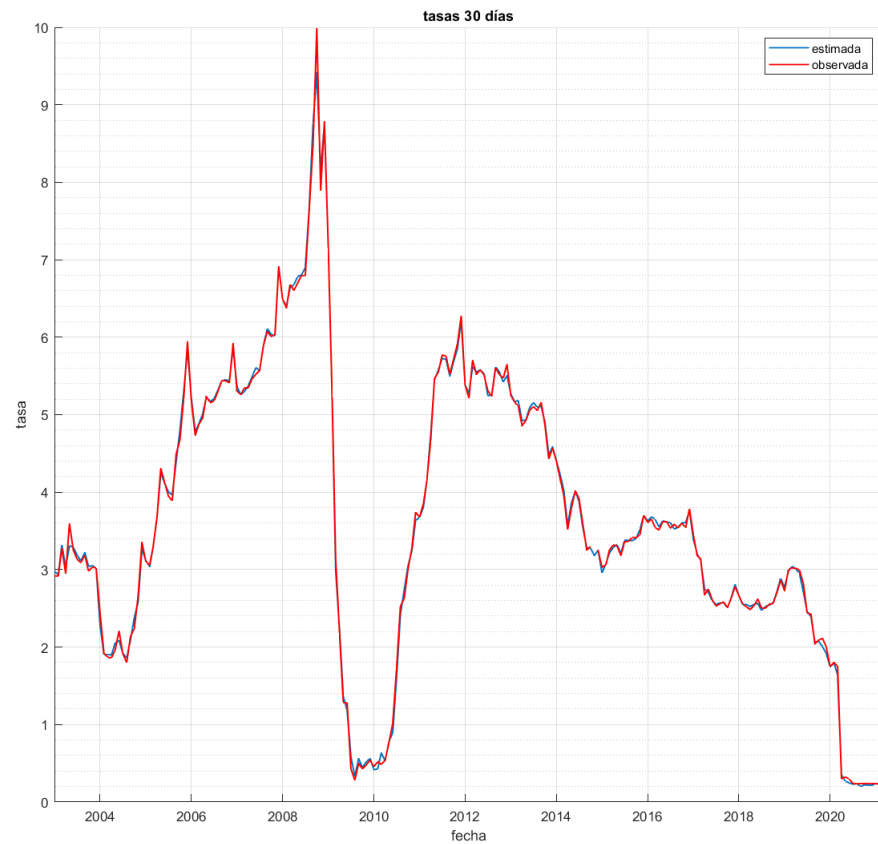


Figura 11: Tasas observadas a plazo de vencimiento a 30 días vs tasas estimadas.

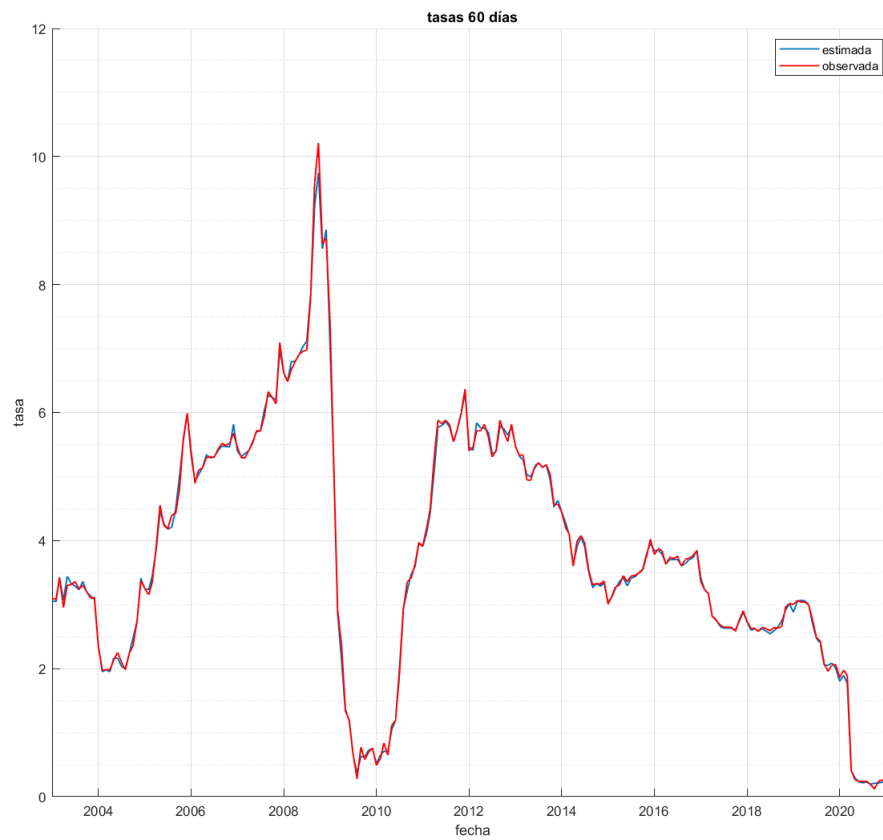


Figura 12: Tasas observadas a plazo de vencimiento a 60 días vs tasas estimadas.

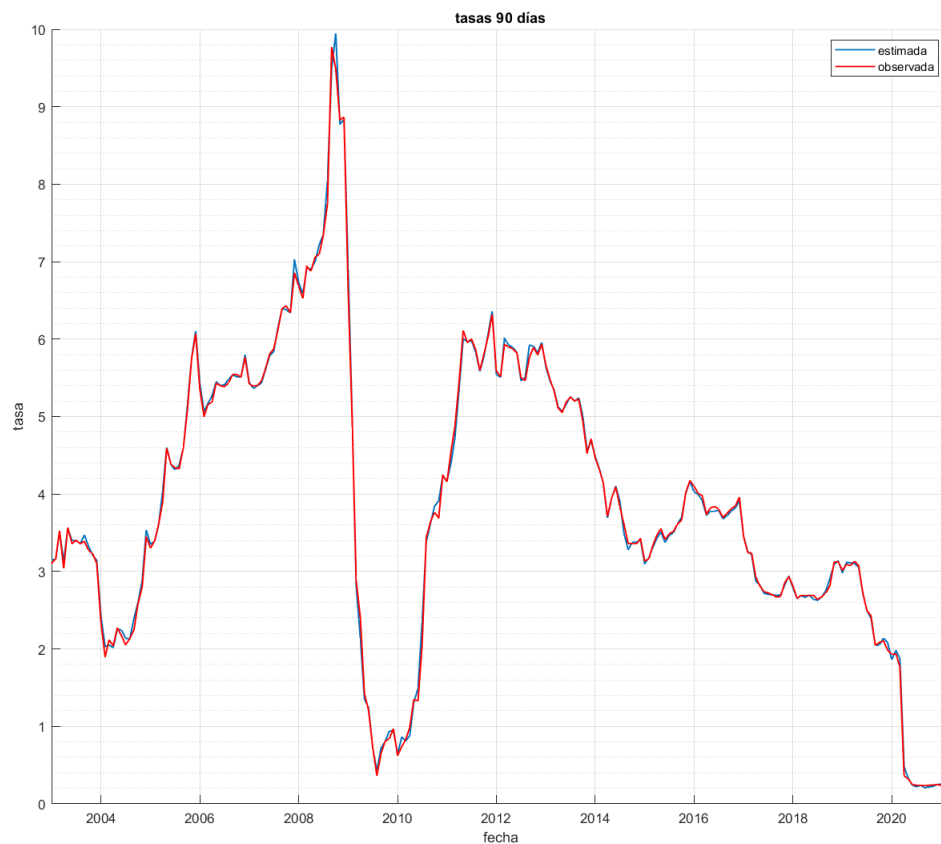


Figura 13: Tasas observadas a plazo de vencimiento a 90 días vs tasas estimadas.

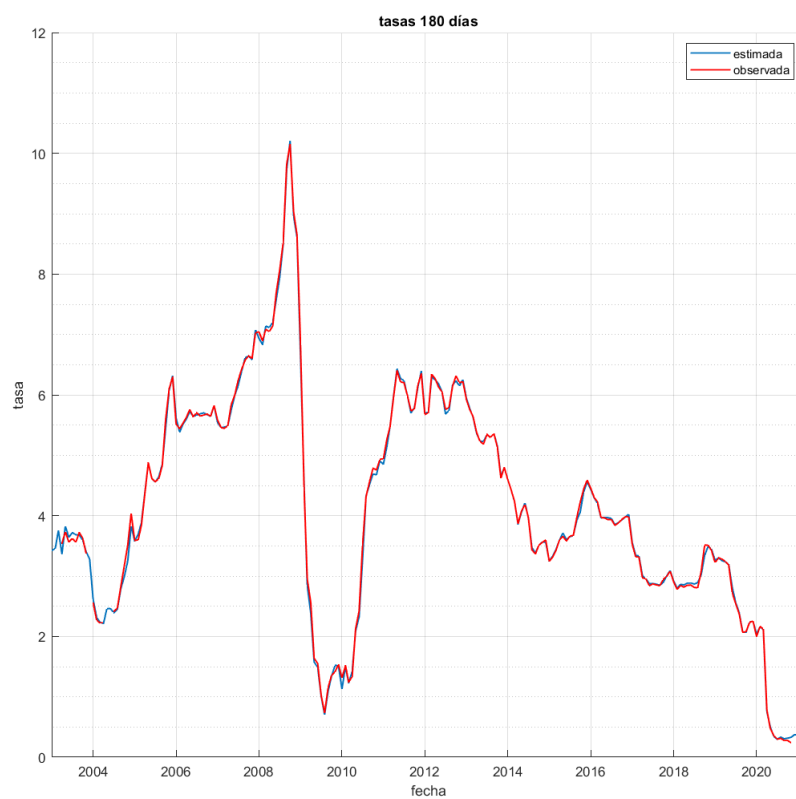


Figura 14: Tasas observadas a plazo de vencimiento a 180 días vs tasas estimadas.

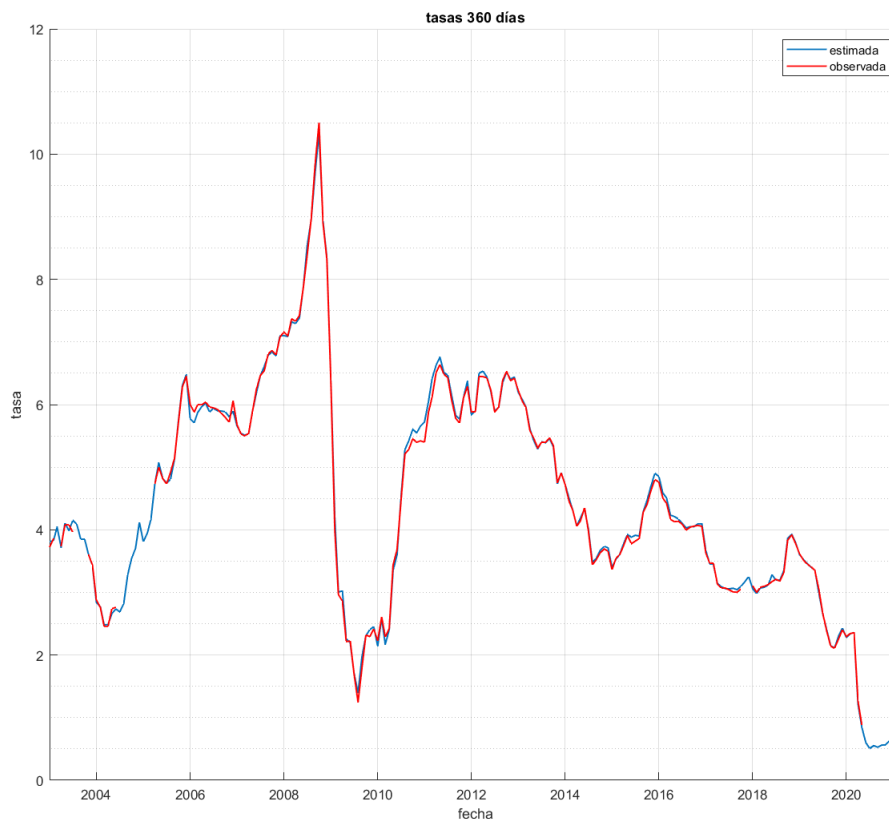


Figura 15: Tasas observadas a plazo de vencimiento a 360 días vs tasas estimadas.

5.4. KF minimizando MSE

Bajo el mismo modelo anterior considerando λ como parámetro fijo y no variable de estado, el modelo es lineal y se puede aplicar el filtro de Kalman. Entonces, del mismo modo anterior se optimizan los parámetros para minimizar el MSE.

Comparando con el método de Diebold-Li para el filtro optimizando los parámetros que minimizan el MSE se obtiene la siguiente serie:

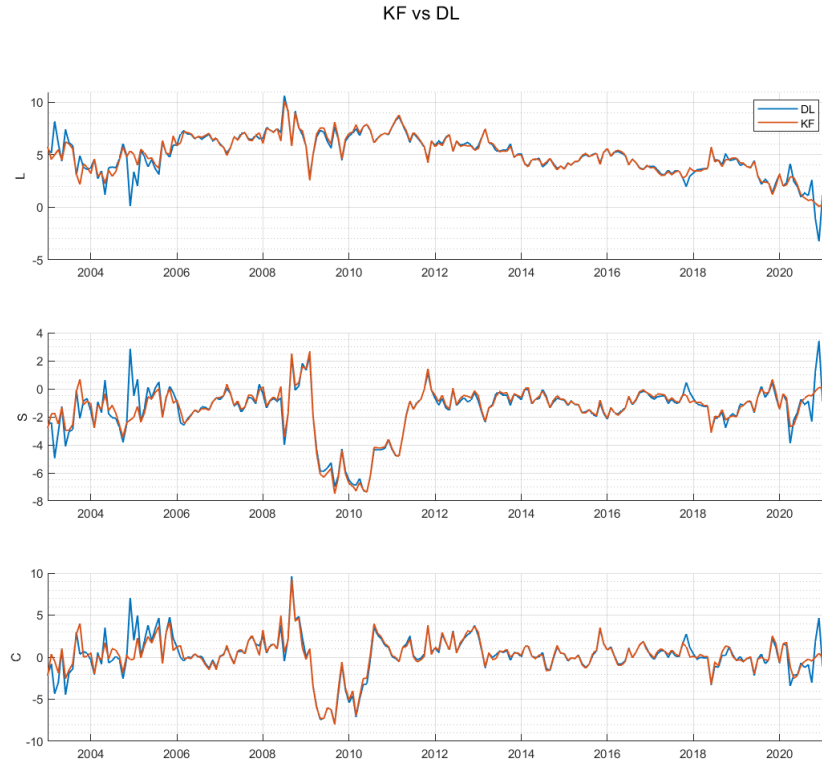


Figura 16: Parámetros latentes estimados mediante filtro de Kalman y método de Diebold-Li. Línea azul es Diebold-Li, naranja filtro de Kalman. Para Diebold-Li se tiene $\lambda = 0,0055$ mientras que para KF se estimó un $\lambda = 0,0049$.

Comparando en la métrica de MSE, se tiene para Diebold-Li un valor $MSE = 0,0067$ mientras que con Kalman se obtuvo que $MSE = 0,0060$. Además hay que notar que en los plazos donde hay muy pocas observaciones, el método de Diebold-Li se desvía mucho llegando a tasas negativas mientras que el filtro de Kalman es más robusto en este ámbito.

6. Consideraciones para mayor estabilidad numérica

6.1. Cálculo de σ -puntos

Para el cálculo de los σ -puntos se debe obtener un factor raíz cuadrada de una matriz de covarianza, por definición estas matrices son simétricas definidas positivas por lo que la descomposición Cholesky es ideal, tanto en forma como interpretación. No obstante, producto de aproximaciones numéricas estas matrices pueden perder su simetría o su positividad. En el caso de la simetría es sencillo de arreglar pues realizando la operación $(A + A')/2$ arregla este problema. En cuanto a la positividad, puede ocurrir que se tengan valores propios cercanos a cero y producto de aproximaciones terminen siendo negativos, lo cual hará que la matriz pierda su positividad. Para estos casos no es posible realizar una descomposición Cholesky por lo que se propone utilizar como descomposición en raíz cuadrada una SVD, la cual tiene una interpretación geométrica similar a la descomposición Cholesky y existe para toda matriz.

6.2. Cálculo de ganancia: Método GVS

En todos los métodos de Kalman, se debe calcular la matriz de ganancia de una u otra manera, en la cual se requiere invertir matrices. En el caso particular de estudio, estas matrices son poco estables y las funciones comunes de MatLab no logran realizar esta operación de manera precisa, para mejorar este problema se propone el siguiente método alternativo para resolver el problema:

$$K = P_{xy} P_{yy}^{-1}$$

donde K es la ganancia de Kalman.

Ordenando los términos, multiplicando por P_{yy} y transponiendo el sistema:

$$K = P_{xy} P_{yy}^{-1} \iff K P_{yy} = P_{xy} \iff P_{yy} K' = P_{xy}'$$

Luego, agregando una matriz identidad al lado izquierdo y vectorizando el sistema:

$$\text{Vec}(P_{yy} K' I) = \text{Vec}(P_{xy}'),$$

utilizando la identidad $\text{Vec}(ABC) = (C' \otimes A)\text{Vec}(B)$ se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$(I \otimes P_{yy})\text{Vec}(K') = \text{Vec}(P'_{xy})$$

De esta forma tenemos un sistema lineal estándar $Ax = b$ que se puede resolver mediante métodos de factorización como por ejemplo Cholesky, QR, LU entre otros.

En MatLab el operador **Vec** es equivalente a realizar la operación $A(:)$ para una matriz A , y el producto de kronecker \otimes es **kron**(A, B), finalmente se resuelve para $\text{Vec}(K')$ por lo que la solución, utilizando la descomposición LU queda:

$$\begin{aligned} b &= \text{Vec}(P'_{xy}) \\ A &= \text{kron}(I, P_{yy}) \\ [L, U, P] &= \text{lu}(A) \\ y &= L \setminus (Pb) \\ x &= U \setminus y \\ K &= \text{reshape}(x, m, p)' \end{aligned}$$

con m la dimensión de la muestra.

De esta manera, se traduce el problema a invertir matrices triangulares las cuales son trivialmente invertibles (si son de rango completo) y se evitan potenciales errores numéricos.

6.3. Restricción a parámetro λ

El parámetro λ se restringió inicialmente en una grilla de 0.005 a 0.06 en intervalos de $1e-4$ (teniendo en cuenta plazos al vencimiento diarios). Esta medida es necesaria para los métodos de Diebold-Li dado que para valores de λ muy pequeños se producen muchos valores extraños en los parámetros latentes e.g. tasas superiores a 20 % o inferiores a -20 % entre otros. Además, para el modelo de DNS este parámetro debe ser positivo puesto que está multiplicado por la madurez que es positiva con un signo negativo, entonces al permitir un λ negativo la potencia de la exponencial cambia de signo y la curva deja de tener sentido.

7. Análisis de residuos

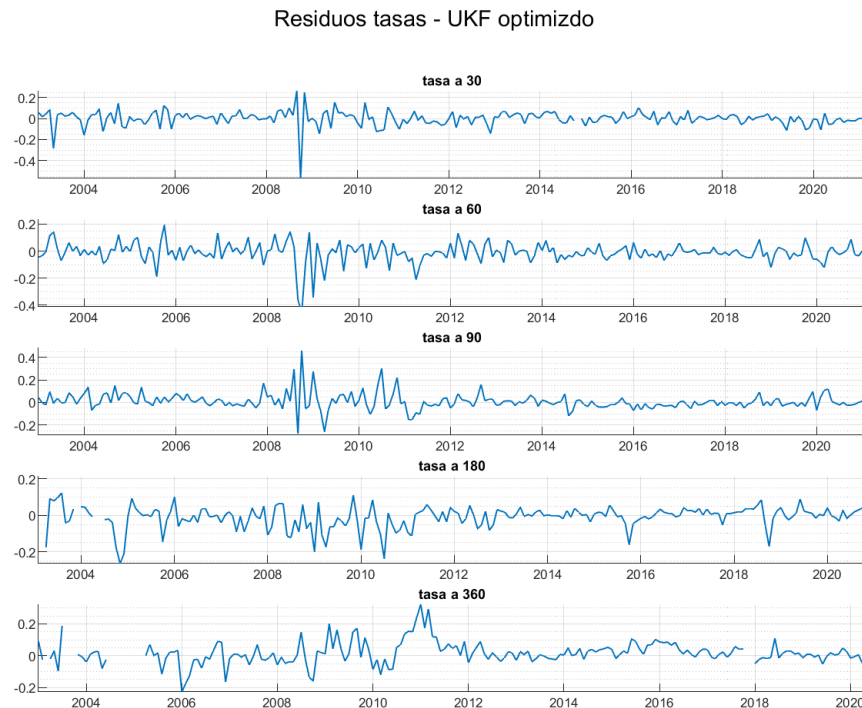


Figura 17: Gráfica de residuos para tasas a 30, 60, 90, 180 y 360 días. Corresponden a la diferencia entre tasa observada y tasa estimada para los estados estimados optimizando el MSE con el UKF.

A continuación se presenta una tabla con estadísticas descriptivas acerca de los residuos:

tasa [días]	30	60	90	180	360
media	0.0016	-0.0105	0.0101	-0.0086	0.0172
var	0.0054	0.0057	0.0055	0.0040	0.0053

Realizando el test para igualdad de varianzas en las tasas:

Grupo	cantidad	media	des. std.
30 días	218	0.0016	0.0736
60 días	218	-0.0105	0.07528
90 días	218	0.0101	0.07427
180 días	210	-0.0086	0.06337
360 días	195	0.0017	0.07201
TOTAL	1059	0.0017	0.07201
Bartlett's statistic	7.82		
Degrees of freedom	4		
p-value	0.098		

Por lo tanto, se concluye que no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula de que la muestra proviene de una distribución normal con igual varianza.

El test corresponde al test de igualdad de varianzas para múltiples muestras de MatLab **vartestn**.

8. Variables Económicas

Para estudiar la interacción de las variables económicas se utilizó como serie de estados latentes el resultado del filtro UKF optimizando los parámetros el cual presenta el menor MSE de todos los métodos anteriores.

Las variables económicas de interés utilizadas fueron:

1. *ROA*: ratio de rentabilidad sobre activos del banco en estudio.
2. *Holgura*: exceso de índice de adecuación de capital del banco en estudio frente al mínimo exigible por la CMF.
3. *TPM*: tasa de política monetaria del BCCh.
4. *Inf_{e1}*: expectativa de inflación a 1 mes
5. *VIX*: índice de volatilidad global.
6. *FLAP*: facilidad de liquidez a plazo, política adoptada por el BCCh en el periodo de reactivación económica en la crisis sub prime.
7. *FCIC*: facilidad de crédito condicional al incremento de colocaciones, política adoptada por el BCCh. para el periodo de la crisis de la pandemia COVID.
8. *IMACEC*: índice mensual de actividad económica.

Para la variable del imacec, se utilizó su serie desestacionalizada, a la cual se toma el logaritmo y se diferencia, lo que representa el crecimiento del imacec.

8.1. Modelo VARX

Utilizando un modelo VARX sin tendencia para estimar el efecto que tienen las distintas variables económicas en los estados latentes, se utiliza el modelo:

$$x_t = \mu + Ax_{t-1} + Bu_{t-1} + e_t$$

Constantes	Coef	se	Pvalue
L	0,6523	0,3173	0,0398
S	-0,0671	0,3061	0,8266
C	-0,8170	0,5227	0,1180
λ	0,0113	0,0003	0,0000

Figura 18: Valores estimados para la media en columna Coef, sigue la desviación estándar y el valor P del coeficiente.

Coef	L	S	C	λ
L	0,8101	-0,1144	-0,0893	0,0000
S	-0,2841	0,4084	0,2188	0,0000
C	0,2114	0,1635	0,6492	0,0000
λ	0,0005	0,0001	0,0015	-0,0297
SE	L	S	C	λ
L	0,1298	0,1314	0,0428	0,0000
S	0,1252	0,1268	0,0413	0,0000
C	0,2137	0,2164	0,0705	0,0000
λ	0,0001	0,0001	0,0000	0,0157
Pvalue	L	S	C	λ
L	0,0000	0,3839	0,0370	NaN
S	0,0232	0,0013	0,0000	NaN
C	0,3227	0,4501	0,0000	NaN
λ	0,0001	0,4989	0,0000	0,0578

Figura 19: Valores de coeficientes estimados para la matriz A, sus desviaciones estándar y sus valores p.

Coef	TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
L	0,1101	0,4252	-0,0098	0,0196	-0,0523	0,1041	-0,0193	-0,0959
S	0,3692	-0,1792	-0,0102	0,0017	-0,3676	0,3954	-0,2065	0,0391
C	-0,0609	0,4336	-0,0153	0,0043	-0,6153	0,4377	-0,0488	0,0661
λ	0,0007	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0008	-0,0003	-0,0001
SE	TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
L	0,1274	0,1360	0,0041	0,0114	0,1932	0,1907	0,1453	0,0381
S	0,1229	0,1312	0,0039	0,0110	0,1863	0,1840	0,1402	0,0367
C	0,2098	0,2241	0,0067	0,0187	0,3182	0,3142	0,2394	0,0627
λ	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0002	0,0002	0,0001	0,0000
Pvalue	TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
L	0,3874	0,0018	0,0158	0,0841	0,7866	0,5851	0,8944	0,0117
S	0,0027	0,1722	0,0093	0,8752	0,0485	0,0317	0,1408	0,2869
C	0,7715	0,0529	0,0225	0,8196	0,0531	0,1636	0,8386	0,2919
λ	0,0000	0,0014	0,0000	0,0084	0,0057	0,0000	0,0370	0,1380

Figura 20: Valores de coeficientes estimados para la matriz B, sus desviaciones estándar y sus valores p.

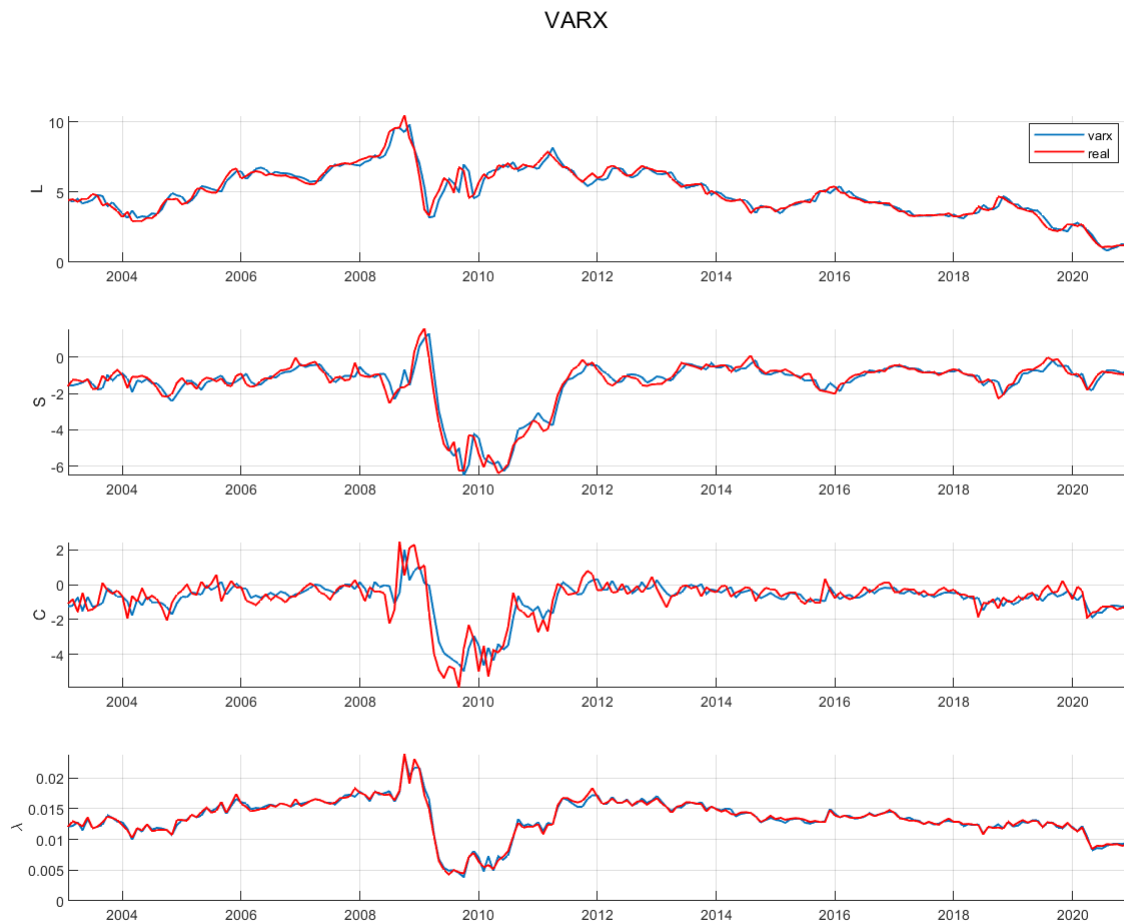


Figura 21: comparación modelo VARX respecto a las variables latentes. Línea roja es la serie original estimada, línea azul corresponde a estimación VARX.

8.2. Efecto TPM

La tasa de política monetaria es el principal instrumento operacional de la política monetaria. Esta es la tasa de interés discutida por el consejo en reuniones de política monetaria sobre la cual se decide un nivel y comunica una trayectoria para lograr el cumplimiento de la meta de inflación a dos años vista.

Esta es la tasa que determina el nivel de la tasa de préstamos interbancarios a un día, lo que se logra a través de operaciones en mercado abierto.

Por ello, se espera que un aumento de la tpm se traduzca en un aumento de las tasas de interés para incentivar el ahorro. En cuanto a los parámetros latentes, esto se traduciría en un aumento en la tasa larga o nivel L y en la pendiente S .

Variable	TPM	σ	P-Value
L	0.1101	0.1274	0.3874
S	0.3692	0.1229	0.0027
C	-0.0609	0.2098	0.7715
λ	0.0007	0.0001	0.0000

8.3. Efecto inflación

Los depósitos a plazo estudiados son transados en pesos por lo que sus tasas de interés o rendimientos son tasas infladas, de esta forma, por la ecuación de Fisher se tiene que son tasas nominales y en consecuencia un aumento de la inflación debe producir un aumento en la tasa nominal. Por ello, un aumento de la inflación debe generar un aumento en las tasas largas y cortas.

Variable	Inf_{e1}	σ	P-Value
L	0.4252	0.1360	0.0018
S	-0.1792	0.1312	0.1722
C	0.4336	0.2241	0.0529
λ	0.0004	0.0001	0.0014

8.4. Efecto IMACEC

El índice mensual de actividad económica es una estimación que resume la actividad económica en un determinado mes, a precios del año anterior y su evolución interanual constituye una aproximación de la evolución del PIB.

Este índice se basa en múltiples indicadores de oferta que son ponderados por la participación de las actividades económicas dentro del PIB en el año anterior.

Como el PIB tiene una fuerte componente estacional, se utiliza la serie del imacec desestacionalizada, entonces cuando el PIB se desvía mucho de su tendencia el Banco Central interactúa a través de la tpm para incentivar o desincentivar el consumo, por lo tanto cuando la serie logarítmica diferenciada del imacec desestacionalizado aumenta mucho, en respuesta a ello se sube la tpm lo cual sube la tasa de interés traduciendo en un aumento de las tasas de los depósitos.

Variable	$Imacec$	σ	P-Value
L	0.0196	0.0114	0.0841
S	0.0017	0.0110	0.8752
C	0.0043	0.0187	0.8196
λ	0.0000	0.0000	0.0084

8.5. Efecto IAC y ROA

El índice de adecuación de capital se considera en la variable de holgura, la cual es el exceso del índice por sobre el mínimo exigible por la CMF, este mínimo depende del tamaño de cada banco, por lo general está en un 8 %. Este índice es el % de capital por sobre el total de activos ponderados por riesgo y mide el riesgo de solvencia de un banco.

En cuanto a las tasas, una mayor holgura se traduce en un menor riesgo de crédito para los depósitos transados, por lo tanto, debiese tener una incidencia negativa en las tasas.

La rentabilidad de los activos del banco estará directamente relacionada con su spread de tasas, esta es la diferencia entre sus tasas de colocación y captación, entonces una mayor rentabilidad estará asociada un mayor spread lo que se relaciona con una menor tasa de captación o tasa pasiva manteniendo su tasa activa o de colocación.

De este modo, se espera una incidencia negativa del ROA en las tasas de interés de los depósitos.

Variable	ROA	σ	P-Value
L	-0.0193	0.1453	0.8944
S	-0.2065	0.1402	0.1408
C	-0.0488	0.2394	0.8386
λ	-0.0003	0.0001	0.0370

Variable	$Holgura$	σ	P-Value
L	-0.0959	0.0381	0.0117
S	0.0391	0.0367	0.2869
C	0.0661	0.0627	0.2919
λ	-0.0001	0.0000	0.1380

8.6. Efecto FLAP y FCIC

La fcic es una de las políticas adoptadas por el BCCh para entregar mayor liquidez a la economía, apoyar el flujo de crédito y la transmisión de la política monetaria en respuesta a la pandemia del Covid.

En particular, la FCIC es una línea financiera especial para las empresas bancarias de forma que estas continúen financiando y refinanciando créditos a hogares y empresas, especialmente aquellos que no tienen acceso al mercado de capitales otorgando créditos a tasas equivalentes a la tpm.

La Facilidad de Liquidez a Plazo (FLAP) es una medida adoptada por el BCCh en el periodo de la crisis subprime para inyectar liquidez en el sistema bancario y reforzar su mensaje de que las tasas de interés se mantendrán cerca de cero durante un periodo prolongado otorgando créditos a tasas equivalentes a la tpm.

Variable	$FLAP$	σ	P-Value
L	-0.0523	0.1932	0.7866
S	-0.3676	0.1863	0.0485
C	-0.6153	0.3182	0.0531
λ	-0.0005	0.0002	0.0057

Variable	$FCIC$	σ	P-Value
L	0.1041	0.1907	0.5851
S	0.3954	0.1840	0.0317
C	0.4377	0.3142	0.1636
λ	0.0008	0.0002	0.0000

8.7. Efecto VIX

El VIX es el Cboe Volatility Index es un índice de mercado en tiempo real que representa la expectativa de volatilidad para el próximo mes y mide la percepción de riesgo, miedo o estrés del mercado ante decisiones de inversión. Como este índice mide la percepción para el S&P500 a través del índice de opciones SPX, un aumento tendería a aumentar la aversión al riesgo de inversionistas moviéndose a un mercado de renta fija aumentando la demanda, lo que conlleva a un aumento de los precios implicando una disminución en los rendimientos.

Variable	VIX	σ	P-Value
L	-0.0098	0.0041	0.0158
S	-0.0102	0.0039	0.0093
C	-0.0153	0.0067	0.0225
λ	0.0000	0.0000	0.0000

9. Simulaciones

Para testear los distintos métodos de estimación para los parámetros latentes en un ambiente controlado, se toma una serie de estados, en este caso el estado estimado de acuerdo al método de UKF buscando los parámetros que minimizan el MSE para targets de tasas fijas a 30, 60, 90, 180 y 360 días.

Para el caso se generaron 2 escenarios: Un caso en el que se tenga una estructura de datos completa, es decir, a partir de la serie de estados conocida se generaron tasas para todos los meses a plazos de 5 días hasta 1200 días en intervalos de 5 días, esto constituye un total de 240 tasas observadas por mes por un periodo de 219 meses, luego se les añadió un ruido gaussiano desde una distribución normal con media 0 y varianza similar a la estimada.

A continuación se presenta una gráfica para mostrar las muestras simuladas:

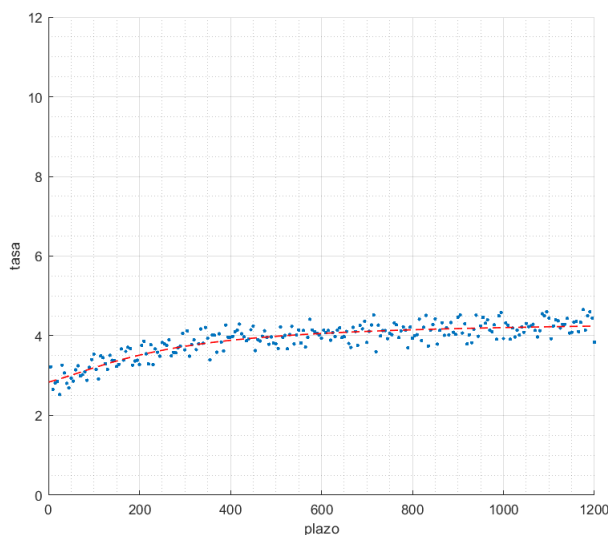


Figura 22: Tasas simuladas, constituyen 240 observaciones plazos de 5 días hasta 1200 días en intervalos de 5 días con ruido gaussiano añadido. Puntos azules son las tasas con ruido, línea roja es la curva de N&S que genera las tasas sin ruido.

Para el siguiente escenario, se construyó una estructura de observaciones con la misma cantidad y similar plazo a las de la muestra real, de forma tal que se tenga un escenario comparable al caso de estudio. Esto constituye un promedio de 18 tasas por mes y con un plazo al vencimiento promedio de 180 días.

El objetivo de esta simulación es ver si los distintos métodos son capaces de obtener información de los estados latentes en un caso controlado cuya estructura es conocida.

9.1. Gráficos Escenario Data completa

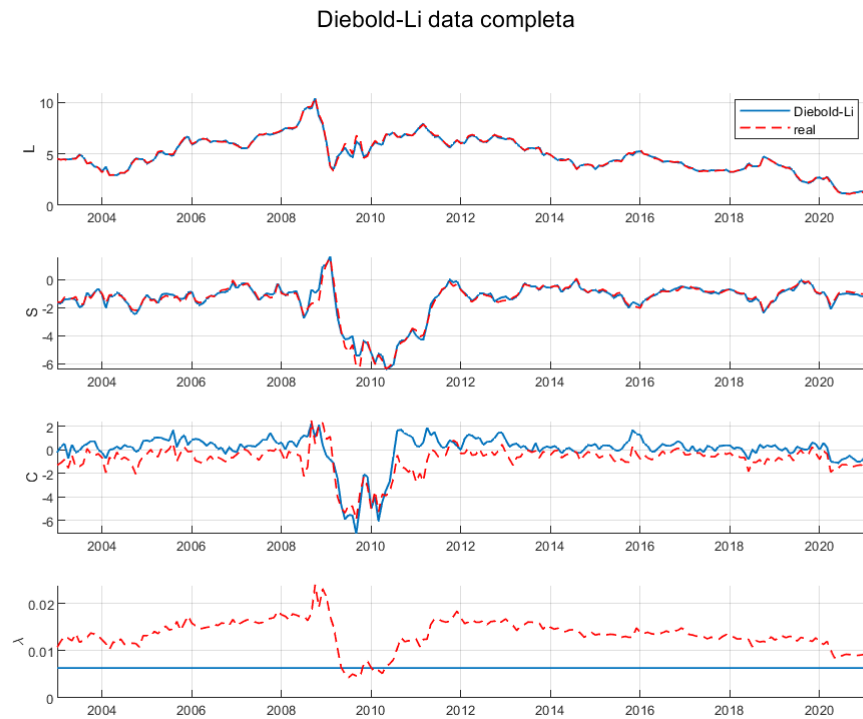


Figura 23: Estimación de estados mediante el método de Diebold-Li para los datos completos simulados, 240 observaciones por mes. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

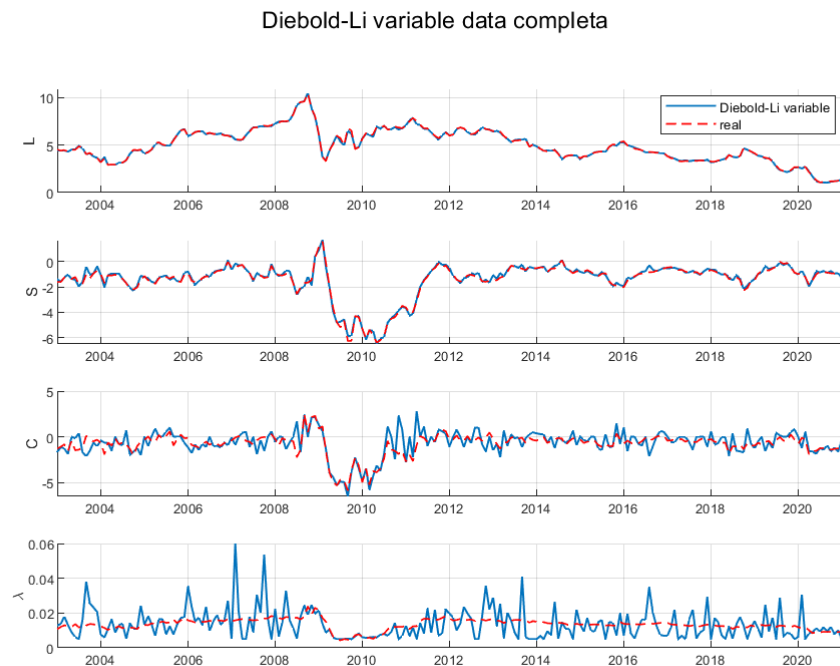


Figura 24: Estimación de estados mediante el método de Diebold-Li con λ variable para los datos completos simulados, 240 observaciones por mes. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

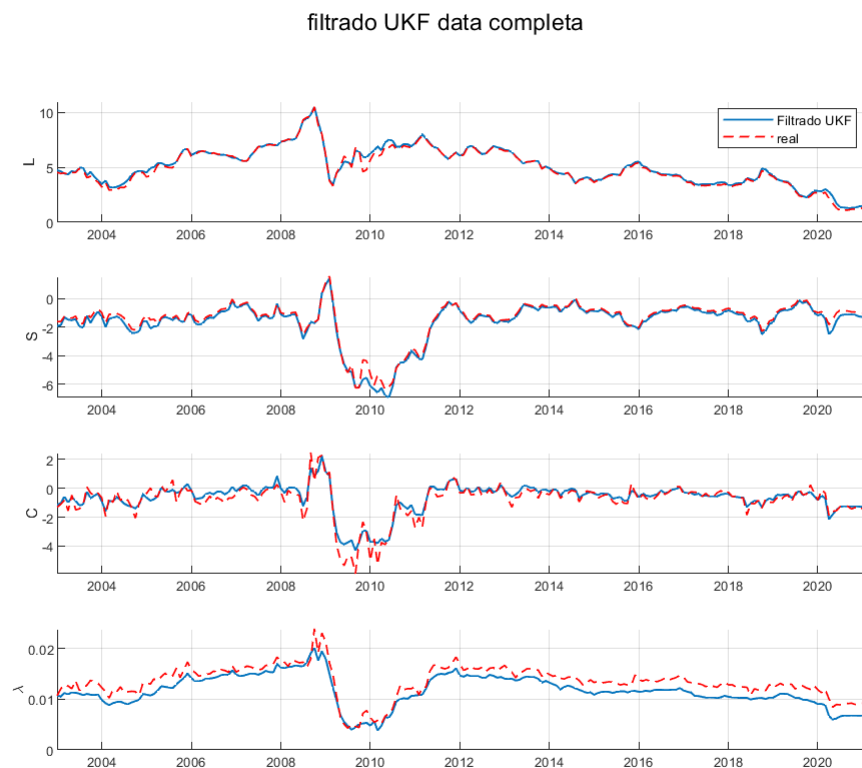


Figura 25: Estimación de estados mediante el Unscented Kalman Filter, utilizando los parámetros VAR estimados para la serie de Diebold-Li variable para los datos completos simulados, 240 observaciones por mes. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

9.2. Gráficos Escenario Data incompleta



Figura 26: Estimación de estados mediante el método de Diebold-Li para los datos incompletos simulados. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

Diebold-Li variable data incompleta



Figura 27: Estimación de estados mediante el método de Diebold-Li con λ variable para los datos incompletos simulados. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

Filtrado UKF data incompleta



Figura 28: Estimación de estados mediante el Unscented Kalman Filter, utilizando los parámetros VAR estimados para la serie de Diebold-Li variable para los datos incompletos simulados. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

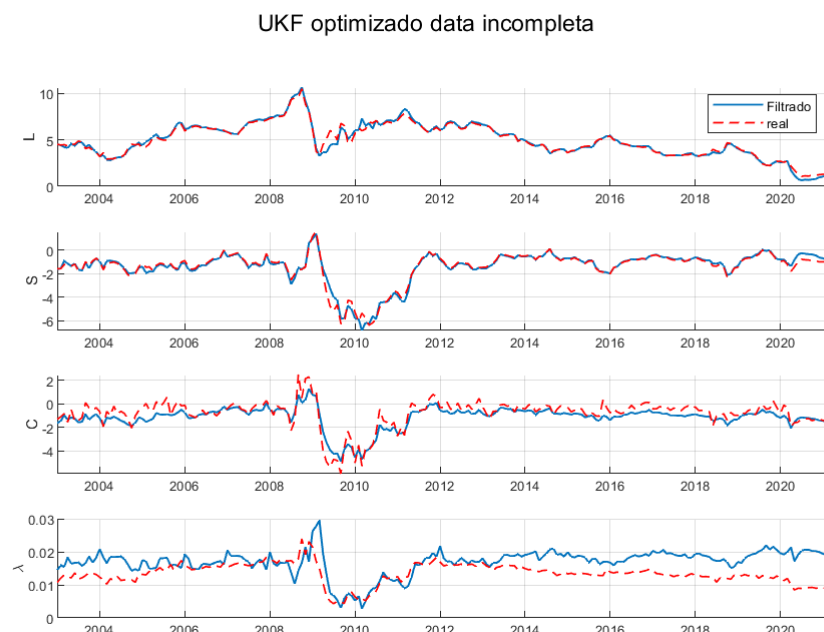


Figura 29: Estimación de estados mediante el Unscented Kalman Filter, utilizando optimizando parámetros que minimizan el MSE para los target de tasas a 30, 60, 90, 180 y 360 días para los datos incompletos simulados. Línea azul es la serie de estados estimados mientras que la línea roja punteada es el estado real que originó los datos sin ruido.

9.3. Comparación

Dadas la simulación realizada, se tiene que los métodos de Diebold-Li son capaces de reconstruir de buena manera los estados para el nivel y pendiente en un ambiente de datos completos, pero fallan en reconstruir los estados para la curvatura y persistencia mientras que el simple filtrado por UKF es capaz de reconstruir de buena manera la dinámica de los estados en un ambiente de datos completos.

Para el caso de un escenario de datos incompletos, el cual es realizado mediante la reconstrucción de la estructura de muestras utilizada para el estudio, los métodos de fallan sobre todo para los meses cuyas observaciones son escasas e.g. los últimos meses se caracterizan por tener pocas observaciones y a plazos muy cortos siendo estos cerca de 5 a 10 a plazos no mayores a 2 meses. A diferencia de los métodos de Diebold-Li, el UKF puede reconstruir cierta dinámica de la estructura pero al optimizar los parámetros reduciendo el MSE para targets de tasas se obtiene un resultado cuya dinámica representa de buena forma la estructura real, siendo este un método más robusto ante la falta de datos.

10. Bancos adicionales

A continuación se analiza la estructura de tasas para dos banco adicionales.

10.1. Banco B

10.1.1. Parámetros latentes

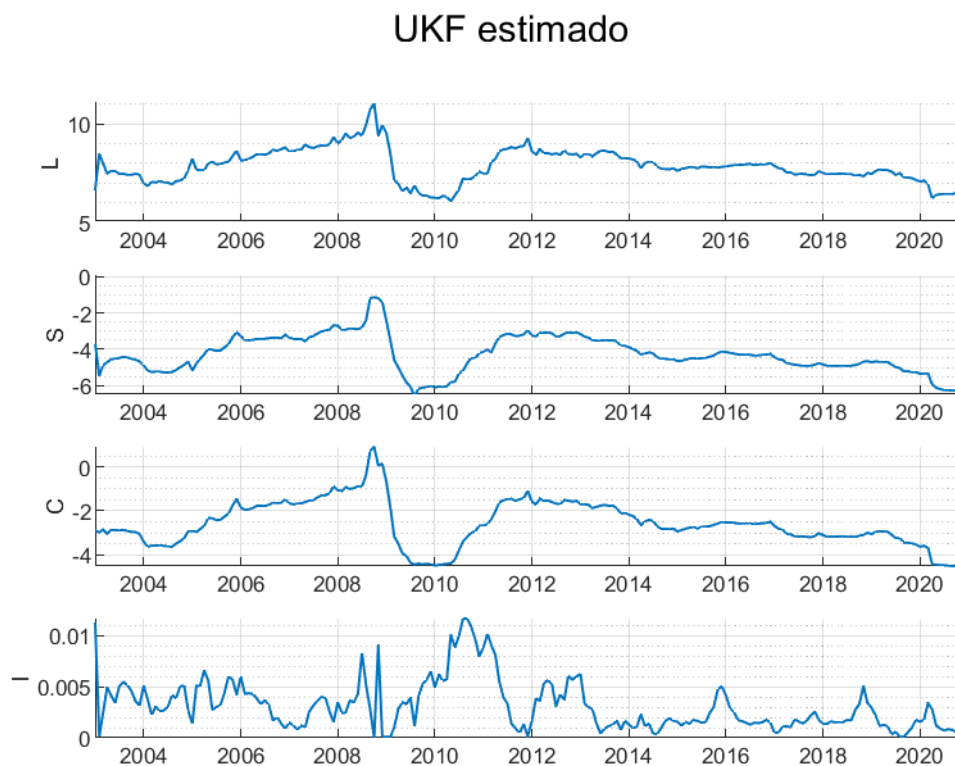


Figura 30: Estados estimados para banco B utilizando la optimización de parámetros para UKF.

10.1.2. Tasas estimadas

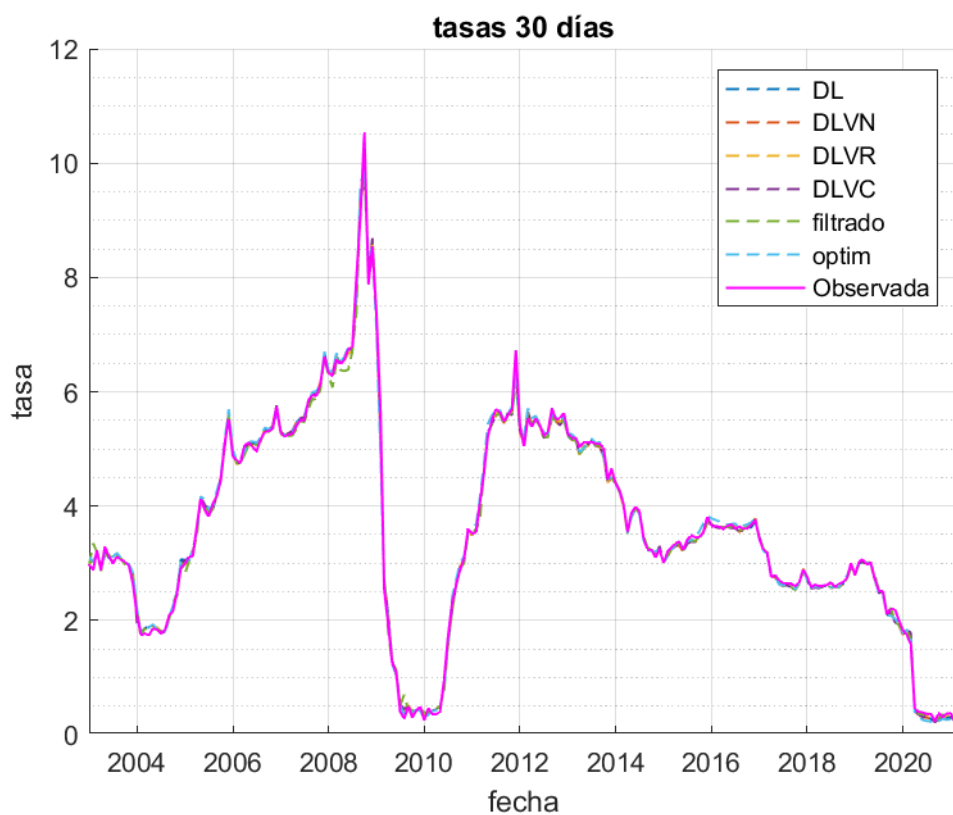


Figura 31: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 30 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

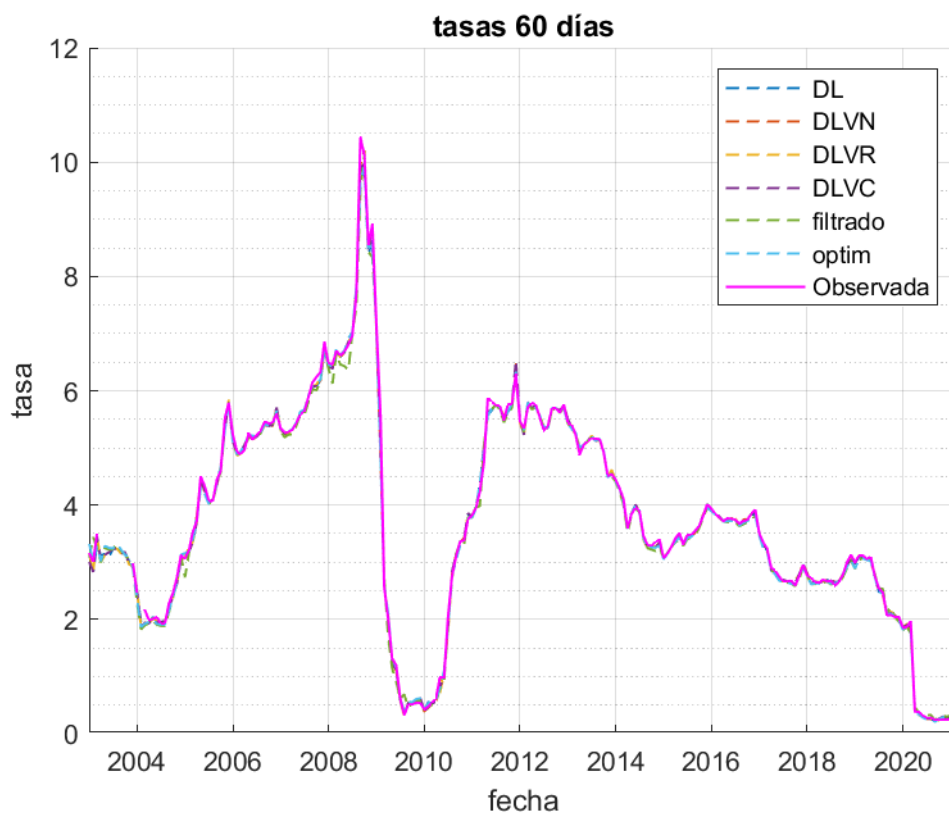


Figura 32: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 60 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

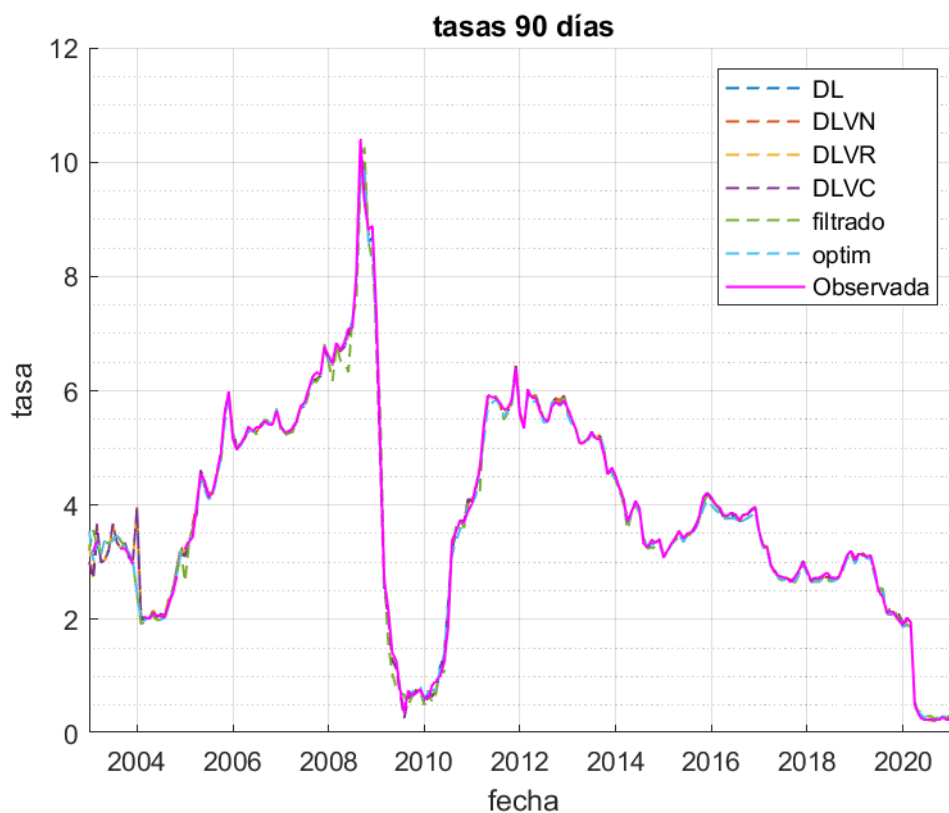


Figura 33: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 90 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

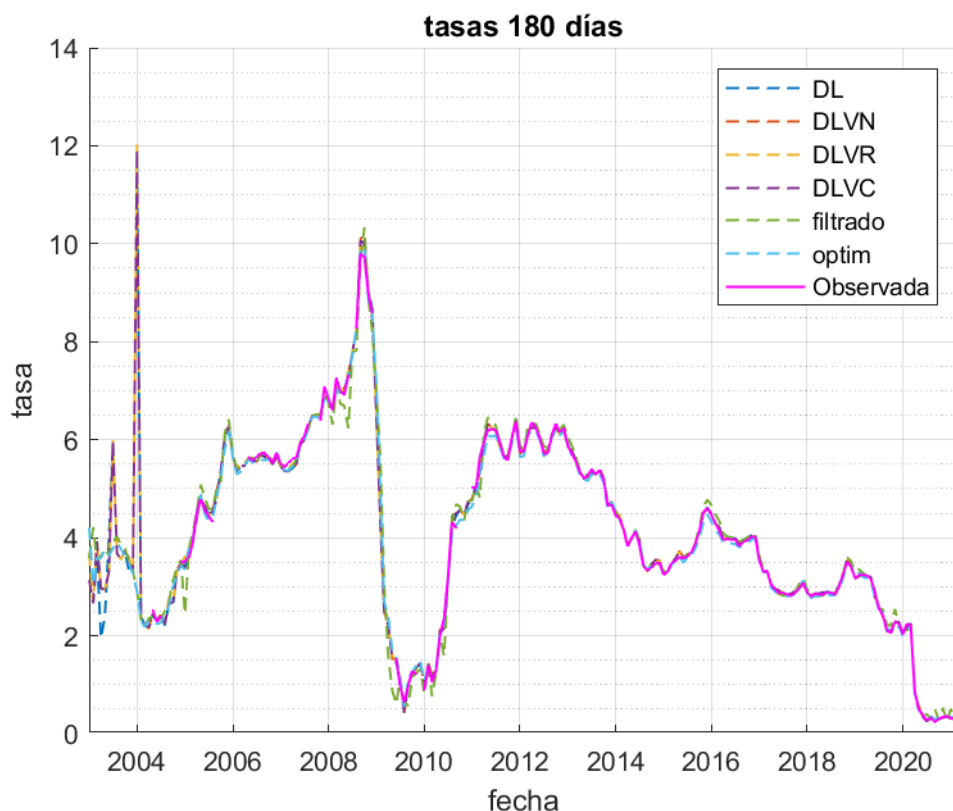


Figura 34: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 180 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

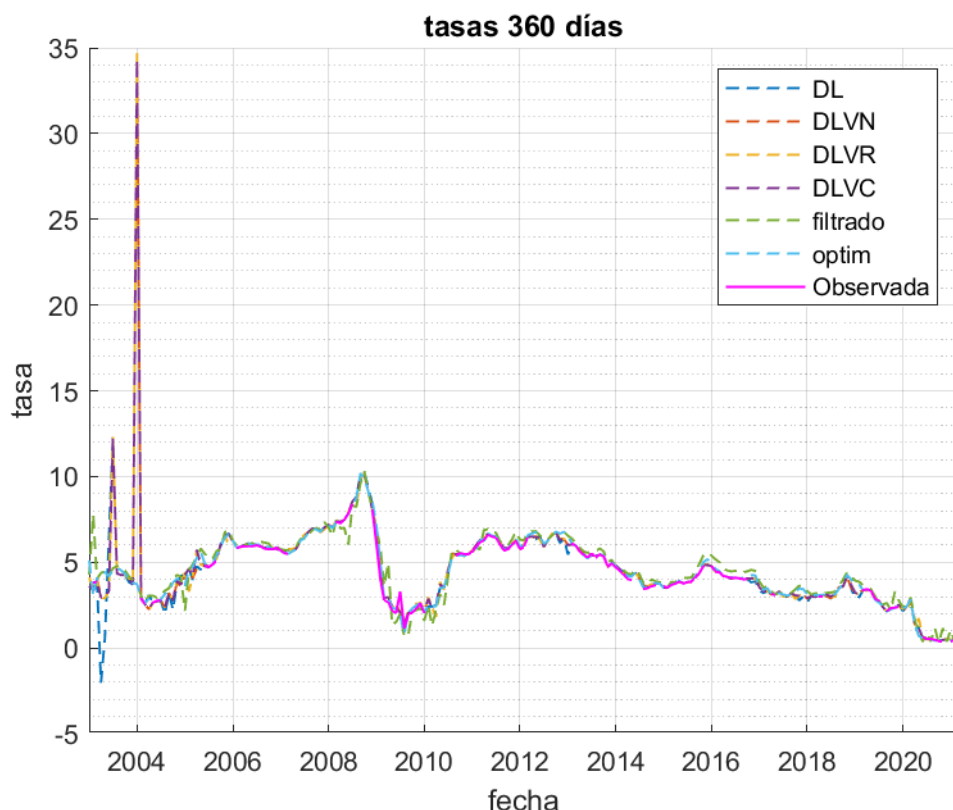


Figura 35: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 360 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

10.1.3. Modelo VARX

Siguiendo el mismo modelo utilizado para el banco A, se presenta estimación del modelo VARX para el banco B:

Constantes	Valor	stde	Pvalue
L	41,1972	6,0547	0,0000
S	40,0962	4,1409	0,0000
C	43,8387	4,5761	0,0000
λ	0,2386	0,0473	0,0000

Figura 36: Valores estimados para la media en columna Coef, sigue la desviación estándar y el valor P del coeficiente.

Coef	L	S	C	λ
L	-4,2787	-5,5339	9,3017	0,0000
S	-5,2470	-5,6315	10,6453	0,0000
C	-5,6868	-6,6314	11,8378	0,0000
λ	-0,0288	-0,0331	0,0572	0,3498
SE	L	S	C	λ
L	0,7806	0,9223	1,5045	0,0000
S	0,5338	0,6308	1,0290	0,0000
C	0,5899	0,6970	1,1371	0,0000
λ	0,0060	0,0069	0,0115	0,0405
Pvalue	L	S	C	λ
L	0,0000	0,0000	0,0000	NaN
S	0,0000	0,0000	0,0000	NaN
C	0,0000	0,0000	0,0000	NaN
λ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 37: Valores de coeficientes estimados para la matriz A, sus desviaciones estándar y sus valores p.

TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
0,2519	0,1067	-0,01087468	-0,0021	-0,0480	0,2385	-0,0384	0,0051
0,0731	0,1414	-0,0067506	0,0061	-0,0255	0,2046	0,0519	0,0113
0,1713	0,1431	-0,0096373	0,0031	-0,0401	0,2431	0,0156	0,0068
-0,0012	0,0004	3,63E-05	0,0001	0,0004	-0,0006	0,0007	-0,0003
TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
0,0590	0,0716	0,0018245	0,0057	0,0799	0,0985	0,0813	0,0218
0,0403	0,0490	0,00124782	0,0039	0,0546	0,0673	0,0556	0,0149
0,0446	0,0541	0,00137895	0,0043	0,0604	0,0744	0,0614	0,0165
0,0004	0,0005	1,16E-05	0,0000	0,0005	0,0006	0,0005	0,0001
TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
0,0000	0,1364	2,52E-09	0,7115	0,5478	0,0154	0,6363	0,8147
0,0701	0,0039	6,31E-08	0,1189	0,6407	0,0024	0,3506	0,4485
0,0001	0,0082	2,77E-12	0,4776	0,5065	0,0011	0,8000	0,6783
0,0013	0,4089	0,00169362	0,0018	0,3933	0,2974	0,1983	0,0123

Figura 38: Valores de coeficientes estimados para la matriz B, sus desviaciones estándar y sus valores p.

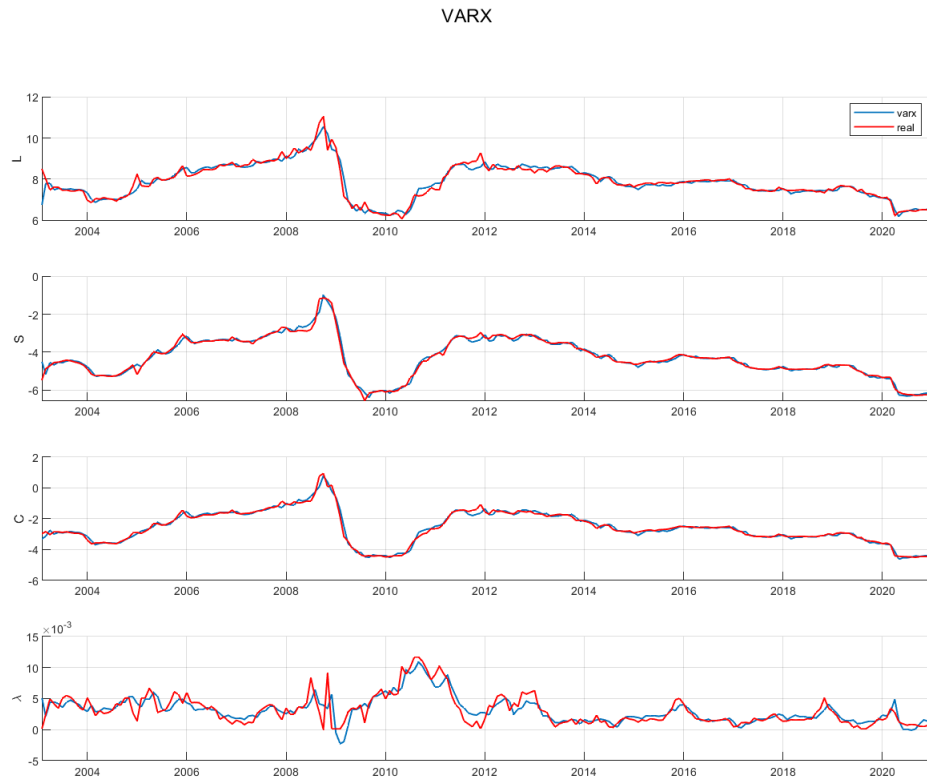


Figura 39: comparación modelo VARX respecto a las variables latentes. Línea roja es la serie original estimada, línea azul es la serie estimada VARX.

10.2. Banco C

10.2.1. Parámetros latentes

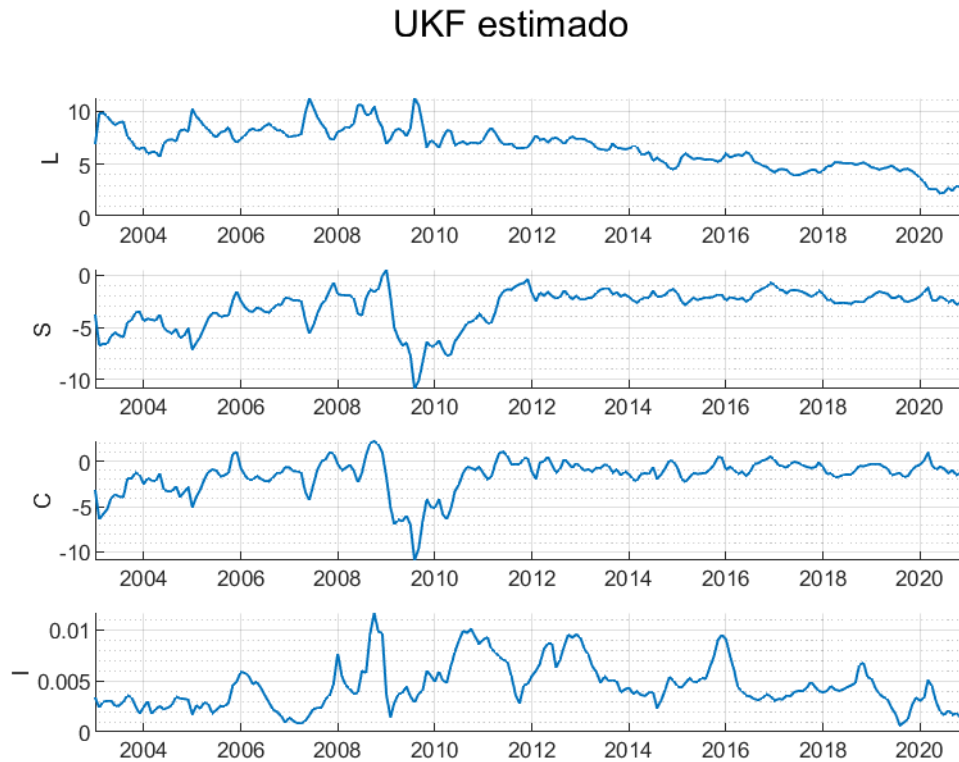


Figura 40: Estados estimados para banco C utilizando la optimización de parámetros para UKF.

10.2.2. Tasas estimadas

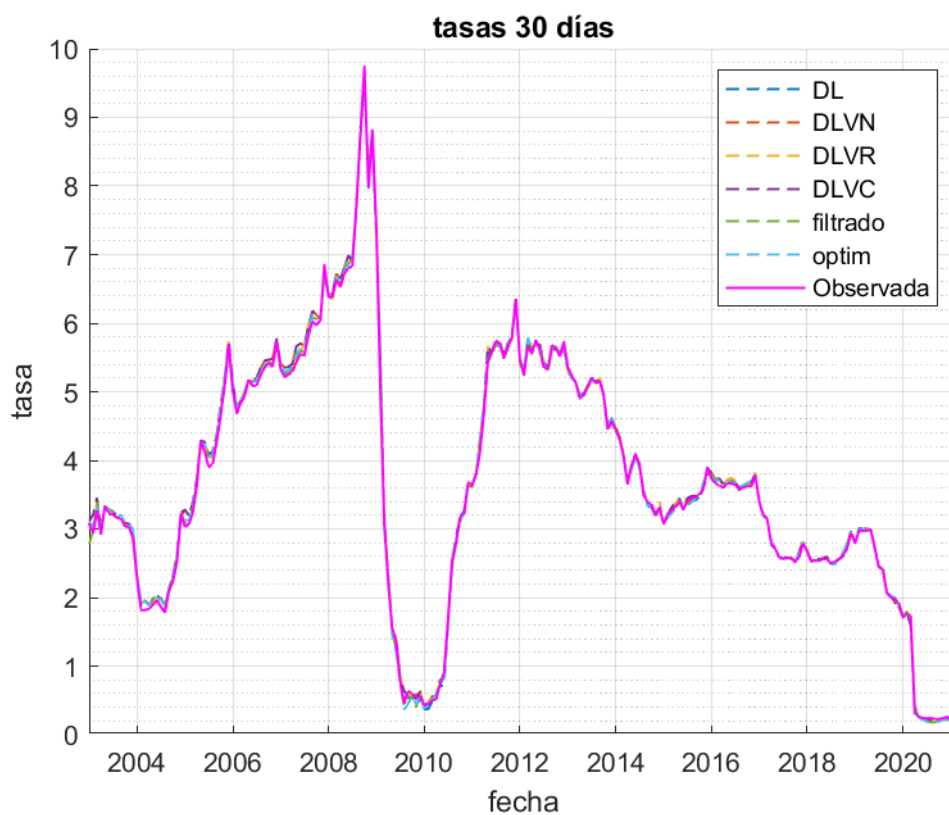


Figura 41: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 30 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

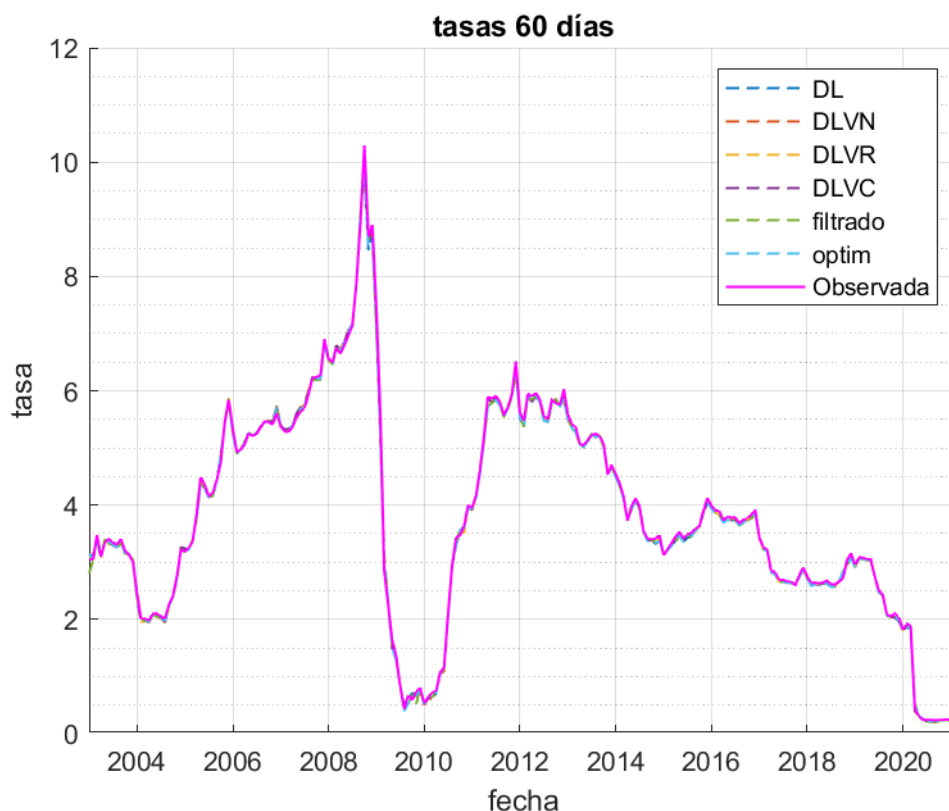


Figura 42: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 60 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

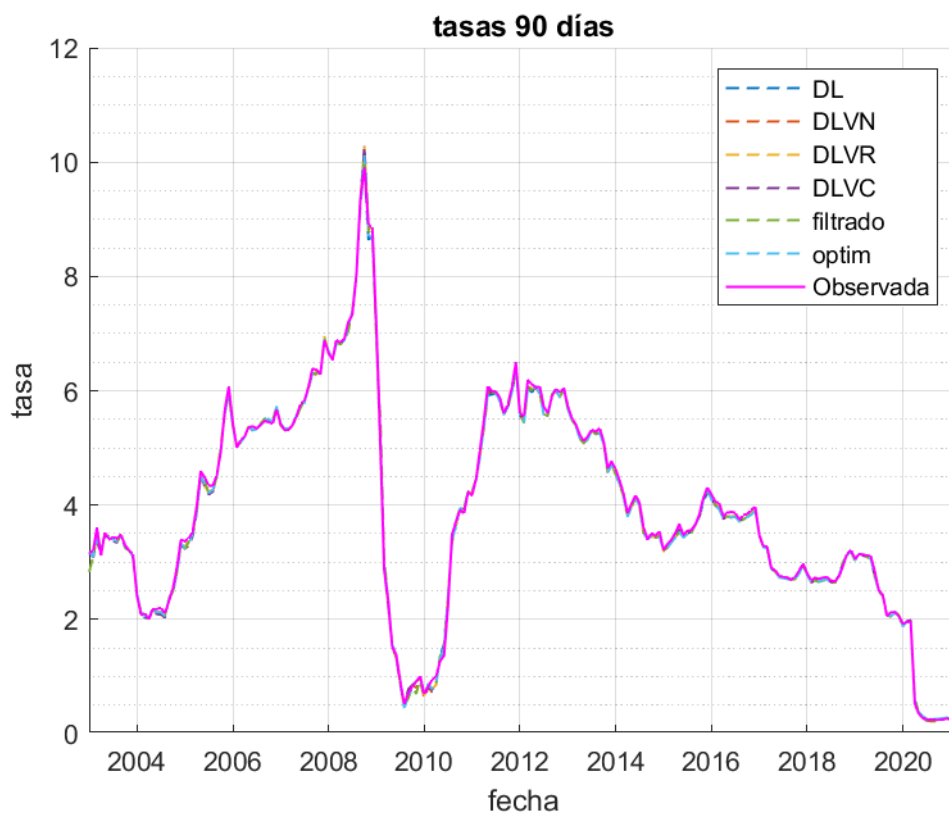


Figura 43: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 90 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

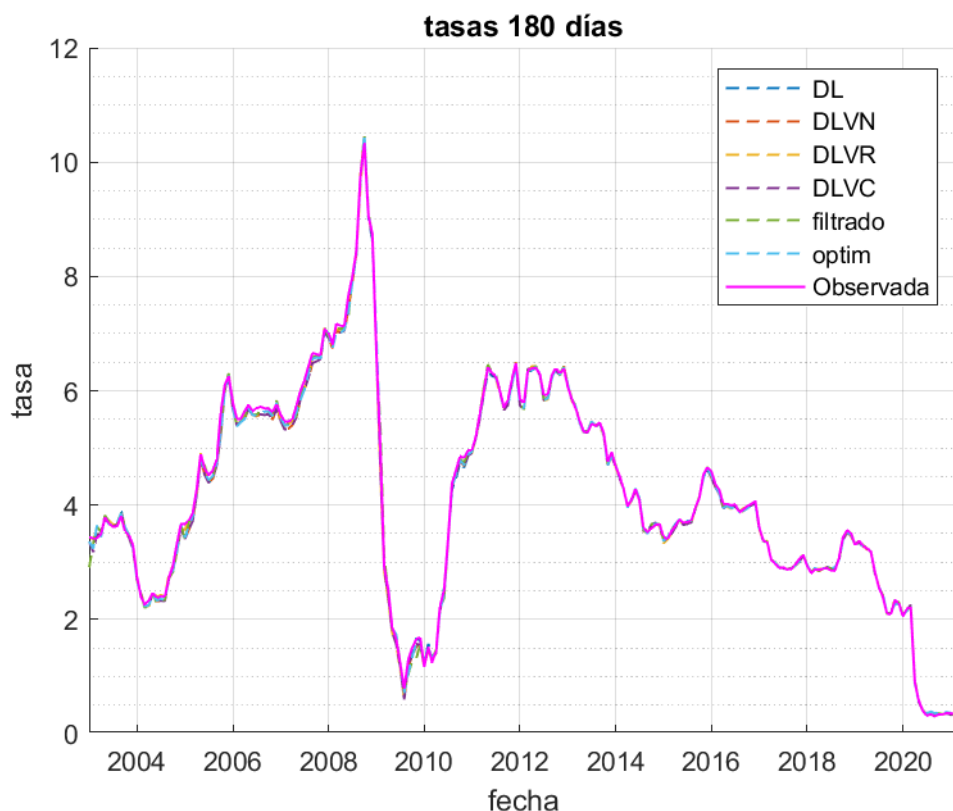


Figura 44: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 180 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

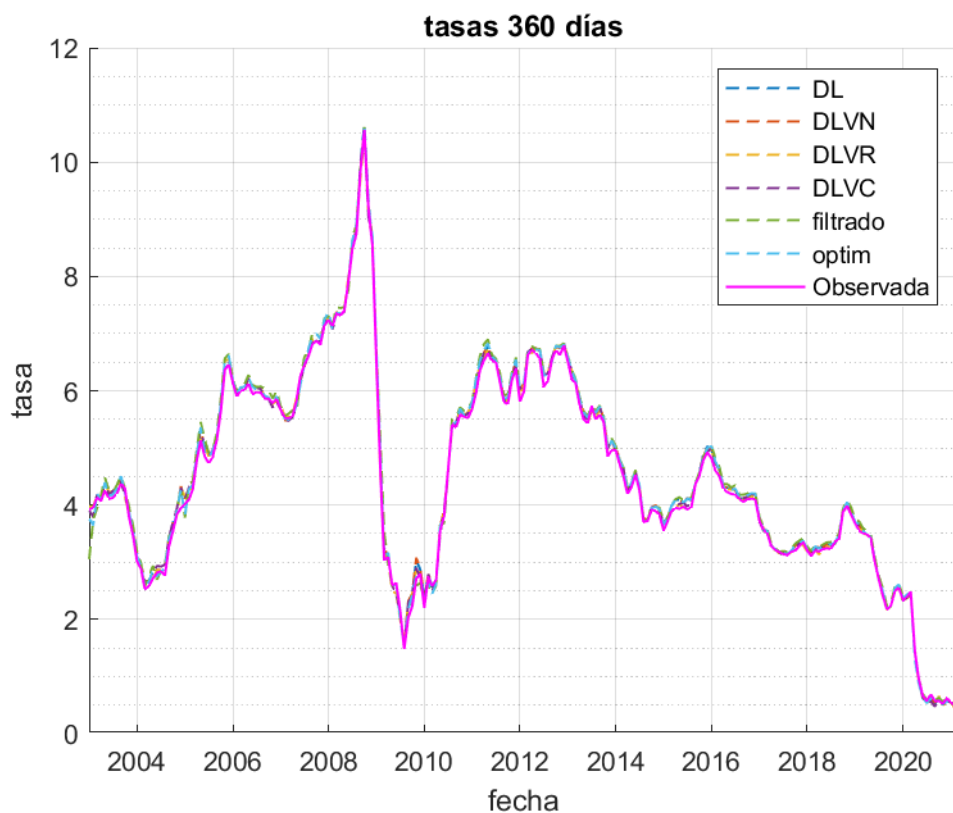


Figura 45: Comparación de distintos métodos en tasas observadas a 360 días. DL es el método de Diebold-Li, DLV son los métodos de Diebold-Li con λ variable, N es el normal, R es el robusto y C es una combinación entre ambos, filtrado es el resultado del filtrado de la serie de Diebold-Li variable utilizando el filtro UKF, optim es la serie de estados optimizando los parámetros con el UKF y la línea morada es el valor de las tasas observadas.

10.2.3. Modelo VARX

Siguiendo el mismo modelo utilizado para el banco A, se presenta estimación del modelo VARX para el banco C:

Constantes	Valor	stde	Pvalue
L	0,6544	0,4765	0,1696
S	-1,1160	0,5144	0,0300
C	-0,9049	0,6662	0,1744
λ	0,0007	0,0008	0,3766

Figura 46: Valores estimados para la media en columna Coef, sigue la desviación estándar y el valor P del coeficiente.

Coef	L	S	C	λ
L	1,2343	0,4518	-0,1347	0,0000
S	-0,6476	-0,0912	0,3215	0,0000
C	-0,5463	-0,8671	1,0760	0,0000
λ	0,0004	0,0004	0,0000	0,9082
SE	L	S	C	λ
L	0,1660	0,1901	0,0481	0,0000
S	0,1792	0,2052	0,0520	0,0000
C	0,2321	0,2657	0,0673	0,0000
λ	0,0003	0,0003	0,0001	0,0250
Pvalue	L	S	C	λ
L	0,0000	0,0175	0,0051	NaN
S	0,0003	0,6568	0,0000	NaN
C	0,0186	0,0011	0,0000	NaN
λ	0,1191	0,1595	0,9064	0,0000

Figura 47: Valores de coeficientes estimados para la matriz A, sus desviaciones estándar y sus valores p.

TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
-0,3087	-0,0523	-0,0021	0,0377	0,2751	0,6647	0,2909	-0,1014
0,7570	0,3566	-0,0128	-0,0269	-0,3027	-0,2835	-0,1463	0,0939
0,6126	1,2341	-0,0241	-0,0232	-0,6759	-0,1041	-0,0945	0,0656
-0,0005	0,0012	0,0000	0,0000	0,0006	-0,0001	0,0002	-0,0001
TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
0,1763	0,1875	0,0051	0,0165	0,2187	0,3038	0,2916	0,0908
0,1903	0,2025	0,0055	0,0178	0,2361	0,3279	0,3148	0,0981
0,2465	0,2622	0,0071	0,0231	0,3057	0,4247	0,4077	0,1270
0,0003	0,0003	0,0000	0,0000	0,0004	0,0005	0,0005	0,0001
TPM	Inf_e1	VIX	Dln_imc_des	flap	fcic	ROA	Holgura
0,0800	0,7802	0,6855	0,0223	0,2084	0,0287	0,3184	0,2644
0,0001	0,0782	0,0196	0,1308	0,1998	0,3873	0,6421	0,3382
0,0129	0,0000	0,0007	0,3152	0,0271	0,8065	0,8167	0,6054
0,0966	0,0001	0,1705	0,8890	0,0730	0,7998	0,7137	0,5434

Figura 48: Valores de coeficientes estimados para la matriz B, sus desviaciones estándar y sus valores p.

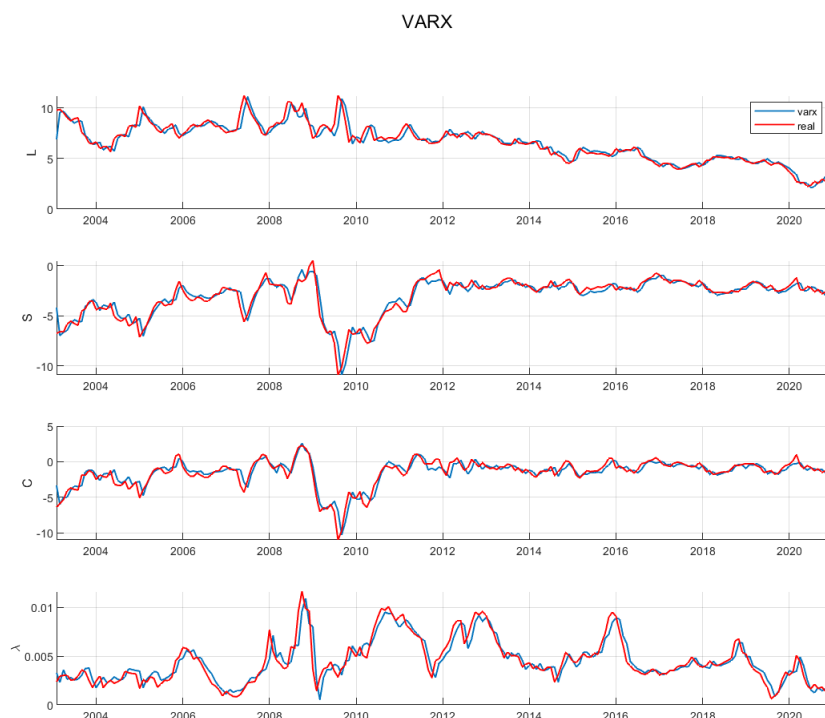


Figura 49: comparación modelo VARX respecto a las variables latentes. Línea roja es la serie original estimada, línea azul es la serie estimada VARX.

11. Resultados y conclusiones finales

Conforme a los experimentos numéricos realizados comparando distintos métodos de estimación para los parámetros latentes del modelo de DNS, resulta ser que el parámetro de persistencia define la velocidad de convergencia de la curva a su tasa larga, además influye en la curvatura de modo distinto al parámetro de curvatura. El parámetro de curvatura contribuye a definir la tasa a mediano plazo mientras que el parámetro de persistencia define también que tan pronunciada es la derivada de la curva en su trayectoria. Un λ excesivamente grande da una forma de "L" a la curva, donde la curva cambiaría bruscamente su tasa de corto a largo plazo mientras que un λ nulo o muy pequeño daría una curva prácticamente constante en función del plazo al vencimiento.

Por lo tanto, el parámetro de persistencia no es un valor fijo y describe propiedades importantes de la estructura de tasas.

En cuanto a los métodos de estimación, los métodos de Diebold-Li consisten en una regresión lineal, por lo que al menos requiere de 3 observaciones para realizar una estimación y para fechas con muy pocas observaciones u observaciones muy dispersas las regresiones no son buenas y estos métodos fallan en capturar los parámetros latentes que dan forma a la curva de rendimiento.

Contrario a los métodos de DL, utilizar filtros para estimar los parámetros resultan ser más robustos en cuanto a la estimación de los estados, puesto que, corrigen un predictor óptimo dado un modelo dinámico el cual no depende de una regresión y construye una dinámica capaz de reconstruir de buena manera los estados latentes, tanto en caso con muchos datos disponibles como en los casos de datos escasos. Esto se aprecia en la simulación donde datos con mucha variación y escasos inducen fallas en las estimaciones estáticas de los métodos de DL así como también se observa para las tasas estimadas a 180 y 360 días en el banco B (figuras 34 y 35) donde los métodos por filtro son capaces de generar una estimación adecuada.

Por otro lado, con los métodos de estimación por filtro se puede introducir variables exógenas y simular casos de shocks y distintos escenarios junto con la respuesta escalón entre otras funciones que tendrían los estados latentes, siendo un mejor método para estudiar la estructura de curvas de rendimiento y ver los efectos de distintas variables en la curva general y no a un plazo de vencimiento en particular.

Como producto del estudio, se realizaron diversas funciones en MatLab para tener los distintos filtros de Kalman en una estructura de datos variable soportando incluso fechas sin observaciones. Se puso énfasis en el *Unscented Kalman Filter* ya que es más eficiente para calcular modelos no lineales que el filtro de Kalman extendido el cual demostró ser poco apto en esta aplicación producto de la fuerte no-linealidad de la función en λ para valores pequeños. Para esto, se implementaron los filtros de Kalman lineal y unscented junto con sus versiones parametrizadas, combinadas con la función para calcular MSE dado los estados y targets de tasas (30, 60, 90, 180 y 360 para este caso), se puede plantear un esquema de optimización para

buscar parámetros del modelo que otorguen una mejor estimación de tasas.

Adicionalmente, para mejorar la estabilidad numérica de los algoritmos, se implementaron mejoras para el cálculo de los λ -puntos para el UKF mientras que para el cálculo de las ganancias de Kalman se utilizó un esquema que mejora significativamente la inversión de matrices siendo un método más robusto para obtener las matrices de ganancia.

A modo de resumen se presenta una tabla con los MSE de los distintos métodos empleados para los bancos estudiados.

Banco	DL	DLV	KF	UKF
A	0,0067	0,0057	0,0060	0,0052
B	0,0127	0,0114	0,0119	0,0179
C	0,0069	0,0064	0,0052	0,0061

Se debe considerar que estos MSE contemplan plazos de 2003-01 hasta 2021-03 por lo que se agregaron plazos respecto a los gráficos iniciales en los métodos DL. Además, para la estimación utilizando filtro de Kalman lineal se utilizó un parámetro λ mensual, es decir, considerando plazo al vencimiento mensual lo que puede tener un efecto en la estimación dado que los demás métodos fueron estimados con plazo al vencimiento diario. No obstante, esto puede generar diferencia solo en los métodos de filtro puesto que no generará ningún cambio en los métodos DL.

12. Referencias

- Nelson, C. y A. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves." *The Journal of Business* 60(4):473-89
- Francis X. Diebold, Canlin Li (2006). "Forecasting the term structure of government bond yields." *Journal of Econometrics* ,130,337-364.
- Cortazar, G. Schwartz , E. y Narajno , F(2007). "Term-structure estimation in markets with infrequent trading." *Tiley InterScience*.
- Alfaro, R. Becerra, S. y Sagner, A.(2011). " *Estimación de la estructura de tasas nominales de Chile: Aplicación del modelo dinámico Nelson-Siegel*."
- J. julier, K. Uhlmann (2004). " *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*"
- A. P. Dempster, N. M. Larid y D. B. Rubin(1977). "Maximum Likelihood for Incomplete Data via the EM Algorithm." *journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 29, No. 1, pp 1-38.
- Eric A. Wan, Rudolph van der Merwe and Alex T.Nelson. "Dual Estimation and the Unscented Transformation"
- Eric A Wan and Rudolph van der Merwe. "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation"
- J. Durbin and S.J. Koopman(2012). "Time Series Analysis by State Space Methods, Second Edition." *Oxford Statistical Science Series 38*