

HF Bitcoin volatility Markov Switching GARCH models

4 de agosto de 2021

Agenda

- MSGARCH
- Metodología
 - Modelos
 - VaR Backtesting
 - ES Backtesting
 - MCS
- Descripción de la muestra
- Resultados
- Conclusiones

MSGARCH

GARCH con cambio estructural regido por una cadena de Markov no observable.

MS-GARCH(u,v)

$$\begin{aligned}a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_{0,s_t} + \sum_{i=1}^u \alpha_{i,s_t} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_{j,s_t} \sigma_{t-j}^2\end{aligned}$$

done s_t es una cadena de Markov ergódica en un conjunto finito $S = \{1, 2, \dots, n\}$ con una probabilidad de transición $\{\eta_{ij} = \mathbf{P}(s_t = i | s_{t-1} = j)\}$ y una medida de probabilidad invariante $\{\pi_i\}$:

$$P(s_{t+1} = i | s_t = j, s_{t-1} = j_1, s_{t-2} = j_2 \dots) = P(s_{t+1} = i | s_t = j) = \eta_{ij}$$

- Se tienen n regímenes distintos
- Cada régimen tiene estructura distinta

Metodología - Modelos

Considerando la serie $\{r_t\}_t$ de retornos logarítmicos, se utilizaron 2 especificaciones para la media y 64 para MSGARCH con 2 regímenes:

$$\begin{aligned}\Phi(r_t) &= \Theta(a_t) \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_{0,s_t} + \sum_{i=1}^u \alpha_{i,s_t} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_{j,s_t} \sigma_{t-j}^2\end{aligned}$$

1. $r_t \sim ARMA(5, 1) - MSGARCH(1, 1)$
2. $r_t \sim AR(1) - MSGARCH(1, 1)$

Para los MSGARCH se utilizaron las siguientes especificaciones variando distribución normal y t estándar:

$$\begin{array}{ll} GARCH(1,1) & TGARCH(1,1) \\ EGARCH(1,1) & GJR GARCH(1,1) \end{array}$$

e.g. $r_t \sim tGARCH - eGARCH - norm - std$

VaR Backtesting

Value at risk

Pérdida máxima esperada con una probabilidad α sobre un periodo:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = F_{\alpha}^{-}(x)$$

Para realizar un test sobre las predicciones de 1 paso sobre el VaR se construye una sucesión de aciertos para las violaciones del VaR:

$$I_{t+1} = 1, \quad \text{si} \quad r_{t+1} < -VaR_{t+1}^{\alpha}$$

$$I_{t+1} = 0, \quad \text{si} \quad r_{t+1} > -VaR_{t+1}^{\alpha}$$

donde VaR_{t+1}^{α} es el predictor del VaR para el tiempo $t + 1$ a un nivel α .

Bajo la hipótesis de una correcta especificación del modelo, la sucesión de aciertos debe ser independiente y seguir una distribución Bernoulli.

$$H_0 : I_{t+1} \sim \text{Bernoulli}(\alpha), \quad (1)$$

$$f(I_{t+1}, p) = (1 - p)^{1-I_{t+1}} p^{I_{t+1}} \quad (2)$$

Unconditional coverage test (UC) Kupiec (1995)

Para $\{I_t\}_t$ anterior,

$$L(\pi) = \prod (1 - \pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1 - \pi)^{T_0} \pi^{T_1}$$

se tiene que

$$\hat{\pi}_{MLE} = \frac{T_1}{T_0 + T_1}$$

Bajo $H_0 : \pi = \alpha$

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\pi})} \right] \sim \chi_1^2, \quad (3)$$

Objetivo: Testear si la sucesión la cantidad de retornos menores al VaR_α predicho corresponde al nivel α .

Conditional Coverage test (CC) Christoffsen (1998)

Considerando que $\{I_t\}_t$ presenta una dependencia temporal y sigue una sucesión de Markov con matriz de probabilidad de transición:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

donde π_{01} es la probabilidad de transición de 0 a 1, con verosimilitud:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}}, \quad (5)$$

Si la $\{I_t\}_t$ es independiente del tiempo, se tiene que $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$, entonces:

$$\hat{\Pi}_{1MLE} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix}, \quad LR_{cc} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi_1^2$$

Objetivo: Ver que la serie corresponde a la cantidad de aciertos y no se generan clusters de retornos menores al VaR predicho.

Dynamic quantile test (DQ) Manganelli and Engle (2004)

Consideramos la suseción $Hit_t(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha$, bajo la correcta especificación del modelo se tienen las condiciones de momentos: $E[Hit_t(\alpha)] = 0$, $E[Hit_t(\alpha)I_{t-1}] = 0$, $E[Hit_t(\alpha)Hit_{t'}(\alpha)] = 0 \forall t \neq t'$ por lo tanto, se tiene el siguiente modelo de regresión:

$$Hit_t(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^K \beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^K \gamma_k g[\mathcal{I}_{t-k}] + \varepsilon_t, \quad (6)$$

entonces, bajo la hipótesis nula de la eficiencia condicional es equivalente a testear si los coeficientes son conjuntamente nulos:

$$H_0 : \delta = \beta_1 = \dots = \beta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (7)$$

Objetivo: Ver que no exista capacidad predictiva sobre las excepciones del VaR predicho.

Expected Shortfall Backtesting

VaR no es capaz de medir pérdidas más allá de un nivel α .

ES mide el riesgo de cola que no captura el VaR.

Expected Shortfall

ES corresponde a la pérdida esperada dado que la pérdida excede el α -cuantil del VaR:

$$ES_{\gamma}(X) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} VaR_{\alpha}(X) d\alpha \quad (8)$$

donde $ES_{\gamma}(X)$ es el *Expected Shortfall* de la v.a. X a un nivel γ , esto es, dada una pérdida L se tiene que $ES = E[L | L > VaR]$.

Expected Shortfall Backtesting

Exceedance residuals test (ER) McNeil y Frey (2000)

Se testea si el valor esperado de ER es cero contra la hipótesis unilateral de que son mayores que cero, esto es, que el ES está sistemáticamente siendo subestimado

ESR test Bayer y Dimitriadis (2018)

Suponiendo $\hat{\epsilon}_t$ el predictor del ES y r_t el log ret. Luego, se realiza una regresión del retorno frente al predictor del ES:

$$r_t = \alpha + \beta \hat{\epsilon}_t + u_t^\epsilon \quad (9)$$

donde $ES_\gamma(u_t^\epsilon \mathcal{I}_{t-1}) = 0$, luego se testea la hipótesis de que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, contra la hipótesis alternativa de ser distintos utilizando una estimación semiparamétrica.

Model Confidence Set Hansen et al. (2011)

- Test anteriores no proporciona comparación entre modelos.
- Se busca construir un conjunto de modelos superiores que tienen misma capacidad predictiva.

Se define la variable de rendimiento considerando la función de pérdida QL :

$$d_{ij,t} = L_{i,t} - L_{j,t} \quad \forall i, j \in M^0, \quad QL_t^\alpha = (\alpha - I_t(\alpha))(r_t - VaR_t^\alpha)$$

El estadístico de pérdida relativa muestral:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n d_{ij,t}, \quad \bar{d}_i = \frac{1}{m} \sum_{j \in M^0} \bar{d}_{ij}$$

Objetivo: Determinar los modelos que tienen la misma capacidad predictiva dado una función de pérdida.

Descripción de la muestra

Se consideraron precios de cierre de Bitcoin valorizados en USD a una frecuencia de 1 hora durante 5 meses.

Datos descargados a través de *python-Binance* API.

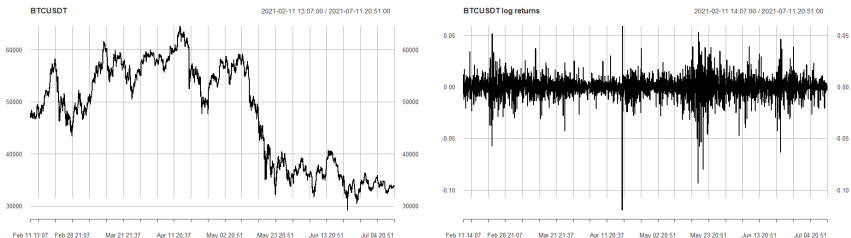
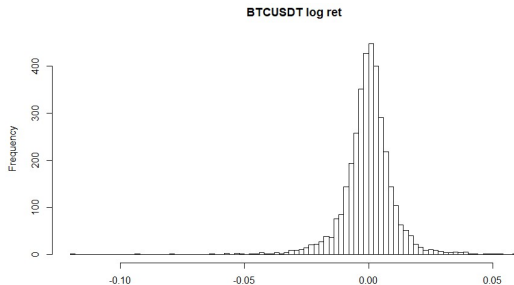


Figura: Gráficos de precios de cierre y retornos logarítmicos con frecuencia horaria para el periodo establecido.

Resumen

Estadísticas	Bitcoin
Cantidad de obs.	3599
Mínimo	-0.1195336
Q1	-0.0043263
Mediana	0.0002772
Media	-0.0000901
Q3	0.0047216
Máximo	0.0588610
Desv. std.	0.01003132
Asimetría	-1.027493
Curtosis	15.69013

(a) Tabla resumen de estadísticas.



(b) Histograma de retornos logarítmicos.

Resultados

- De los 128 modelos, 89 fueron validados por el procedimiento de backtesting
- Modelos validados son utilizados para MCS
- SSM para la función de pérdida según VaR y ES es similar
- 68 SSM para VaR y 63 SSM para ES

En ambos casos 40 % corresponden a ARMA y 60 % a AR.

En cuanto a la presencia de los modelos:

GARCH	EGARCH	GJRGARCH	TGARCH
33 %	43 %	42 %	61 %

El 22 % del total con mismo modelo en ambos regímenes.

55 % utilizan distribuciones distintas, 11 % normal y 34 % t-student.

Resutados

N°	model	UC	CC	DQ	ER	ESR	MCS
1	AR-tGARCH-sGARCH-std-norm	17,21 %	17,21 %	48,01 %	23,10 %	23,29 %	100,00 %
2	AR-gjrGARCH-tGARCH-std-norm	22,24 %	13,14 %	38,75 %	15,50 %	17,59 %	100,00 %
3	AR-eGARCH-gjrGARCH-std-std	42,16 %	17,26 %	29,65 %	35,80 %	33,36 %	100,00 %
4	AR-eGARCH-tGARCH-std-norm	34,76 %	43,37 %	28,44 %	27,70 %	21,66 %	100,00 %
5	AR-tGARCH-tGARCH-std-norm	17,21 %	10,34 %	44,64 %	12,90 %	14,57 %	100,00 %
6	AR-tGARCH-sGARCH-std-std	27,16 %	13,43 %	36,43 %	24,60 %	16,21 %	100,00 %
7	AR-eGARCH-tGARCH-std-std	34,76 %	58,25 %	28,57 %	50,10 %	42,63 %	100,00 %
8	AR-eGARCH-sGARCH-std-std	28,08 %	50,08 %	30,10 %	42,80 %	29,66 %	100,00 %
9	ARMA-eGARCH-tGARCH-norm-std	34,76 %	58,25 %	29,63 %	25,10 %	23,08 %	100,00 %
10	AR-tGARCH-tGARCH-norm-std	10,34 %	10,34 %	59,80 %	11,40 %	20,00 %	100,00 %
11	AR-eGARCH-tGARCH-norm-std	22,24 %	34,76 %	30,77 %	18,90 %	15,36 %	100,00 %
12	AR-tGARCH-gjrGARCH-std-std	21,76 %	40,61 %	27,24 %	17,70 %	13,57 %	100,00 %
13	AR-tGARCH-tGARCH-std-std	17,21 %	13,43 %	30,02 %	19,90 %	12,48 %	100,00 %
14	AR-gjrGARCH-eGARCH-norm-std	13,14 %	35,56 %	26,94 %	33,80 %	34,04 %	100,00 %
:	:	:	:	:	:	:	:

Cuadro: Valores P para los procedimientos de backtesting y MCS utilizando la función de pérdida de VaR. Se muestra el conjunto de modelos superiores con su especificación para la media y sus regímenes para la varianza.

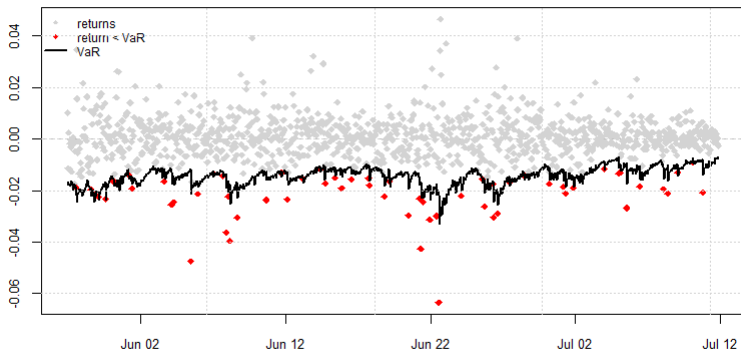


Figura: modelo AR-tGARCH-sGARCH-std-norm, excesos esperados 53, obtenidos 62 (Pvalue = 27 %)

Conclusiones

- Retornos no presentan una estructura de media que sirva para mejorar la predicción.
- Se favorecen regímenes con estructuras diferentes.
- Modelos con respuesta asimétrica y de umbral son preferidos para modelar la volatilidad.
- De acuerdo a Corporale y Zekokh (2019) se sostiene que modelos con cambio de régimen son superiores a modelos estáticos.
- Se favorece a modelos con distribuciones mixtas, considerando un estado más propenso a tomar valores extremos.
- Resultados son consistentes con la existencia de factores exógenos que provoquen cambios drásticos en el volumen y precio transado e.g. Influencers, medidas estatales contra los cryptoactivos entre otras.