

HF Bitcoin volatility Markov-Switching GARCH models

Gabriel Vergara Schifferli

Abstract

En este documento se busca seleccionar los mejores modelos para la volatilidad para el precio de Bitcoin en una frecuencia de 1 hora. Se estiman 64 modelos GARCH para modelar la volatilidad y 2 modelos ARMA para la media, siendo un total de 128 modelos, lo cuales se utilizan para estimar el predictor a 1 paso adelante del Vale-at-Risk (VaR) y el Expected Shortfall (ES) utilizando una ventana corrediza. Los mejores modelos son escogidos realizando un backtesting del VaR y ES mientras que la comparación entre modelos se realiza mediante el procedimiento de Model confidence set (MCS) utilizando una función de pérdida.

1. Introducción

Modelar la volatilidad es fundamental para manejar el riesgo de cada instrumento. En vista de que los cryptoactivos presentan una alta volatilidad además de estar expuestos a distintos shocks producidos por intentos de regulación, efectos producidos por *retail investors* y posibles influencers que en algunos casos producen cambios drásticos en el volumen de transacciones y en el precio, los cuales ocurren en ventanas de tiempo cortos, adicionalmente de que no existen sistemas para bloquear transacciones y su operación es continua a diferencia de las acciones usuales, realizar modelos para la volatilidad en ventanas de tiempo pequeñas es fundamental para poder tener un adecuado análisis del riesgo del activo.

En 2020 Bitcoin aumento enormemente su capitalización de mercado, previo a 2020 tenía un precio aproximadamente de 7.000USD mientras que a finales de 2020 comenzó a aumentar a cerca de 29.000USD llegando a su máximo histórico de 64.854USD el 13 de abril de 2021, posteriormente luego de diversos anuncios de distintos Estados e influencers, quienes tomaron medidas en contra de los cryptoactivos producto de el nulo control que presenta y la controversia sobre el consumo energético del mismo comenzó a caer el precio rápidamente en cuestión de horas, lo cual también se explica en cierta medida por la activación de *stop loss* produciendo un efecto bola de nieve cayendo cerca de un 50 % de su valor en una semana.

Por los hechos anteriores, proponer un modelo de régimen simple o con cambios estructurales estáticos no captura los efectos propios del ambiente de este activo por lo que se busca probar modelos con cambio de régimen variables, por ejemplo, dependiendo de una cadena de Markov, que sean capaces de modelar correctamente el riesgo que presentan, en este caso Bitcoin. Entonces, un mejor acercamiento a modelar este tipo de activo es utilizar modelos Markov-Switching GARCH (MSGARCH) cuyos parámetros cambian con el tiempo conforme a variables discretas latentes.

Por lo tanto, el objetivo es encontrar el mejor conjunto de modelos para la volatilidad de Bitcoin a una frecuencia de 1 hora. Para esto se utilizan 128 modelos para los retornos logarítmicos los cuales son utilizados para estimar el predictor a un paso para el VaR y ES en una ventana de tiempo móvil. Luego, los mejores modelos se escogen según un proceso de *backtesting* para el VaR y ES, junto el procedimiento de *Model confidence set* (MCS) para una función de pérdida.

El documento se organiza de la siguiente manera. La Sección 2 discute la literatura relevante disponible; Sección 3 describe la metodología utilizada; Sección 4 proporciona una descripción de la muestra de datos a analizar; Sección 5 presenta los resultados obtenidos; finalmente, la sección 6 concluye.

2. Revisión de literatura

Los modelos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos generalizados (GARCH) son los mas usados comúnmente para modelar la volatilidad y estimar medidas de riesgo como es el caso del Value-at-Risk (VaR) y el Expected Shortfall (ES). Su contraparte mas simple, el modelos autorregresivo condicionalmente heterocedástico (ARCH) fue introducido por Engle (1982) y posteriormente extendido por Bollerslev (1986) generalizandolo a lo que es GARCH. Si bien estos modelos contemplan efectos de clustering de volatilidad, siendo muy poco persistentes en ARCH y más persistentes en el tiempo en GARCH, están limitados a una respuesta simétrica de la volatilidad y por ello se introducen otro tipo de modelos que permiten respuestas asimétricas. En este aspecto, se desarrolló el modelo GARCH exponencial (EGARCH) por Nelson (1991), el GARCH con umbral (TGARCH) por Zakoian (1994), GJRARCH por Glosten et al. (1993) entre otros.

Los primeros estudios utilizando un marco de referencia de Markov-switching para modelos de volatilidad estimaron modelos ARCH (Cai (1994), Hamilton y Susmel (1994)) porque la intensidad computacional comparando con GARCH, en particular la evaluación de la verosimilitud para modelos Markov-switching GARCH (MSGARCH) era muy alta requiriendo integración sobre todos las K^N alternativas, siendo K la cantidad de estados posibles y N el número de observaciones, lo cual hacia la estimación muy difícil. Luego, Dueker (1997); Gray (1996) y Klaassen (2002) utilizaron una aproximación *ad hoc* basada en colapsar las varianzas condicionales de regímenes específicos anteriores.

Estudios recientes muestran que cambios estructurales resultan en estimaciones sesgadas de modelos GARCH y proporcionan predicciones de volatilidad pobres (Bauwens et al. (2010, 2014)). Para solucionar este problema se han propuesto modelos MSGARCH. cuyos parámetros cambian dinámicamente acorde a una variable latente no observable. En particular, Ardia et al. (2018a) estimó un amplio conjunto de modelos MSGARCH para distintas formas funcionales al igual que para distintas distribuciones para los errores. Compararon dos métodos de estimación ; Máxima verosimilitud (ML) y Markov chain Monte Carlo (MCMC), encontrando que los modelos MSGARCH tienen mejor rendimiento que modelos de régimen simple para predecir VaR y ES para retornos diarios y semanales. Ardia et al. (2018a) siguiendo a Haas et al. (2004) en utilizar procesos GARCH para cada estado siendo independientes de los procesos de los demás estados.

Los modelos MSGARCH han sido utilizados en publicaciones recientes analizando distintos tipos de activos: precios de commodities (Alizadeh et al. (2008)), retornos de acciones (Henry (2009)), retornos en tipos de cambio (Wilfling (2009); Bohl et al.(2001)) entre otros.

En cuanto a modelamiento de volatilidad en cryptoactivos, muchos estudios se han sustentado en especificaciones GARCH. Glaser et al. (2014) estimó GARCH(1,1). Gronwald (2014) estimó un GARCH asimétrico para Bitcoin argumentando que puede ser utilizado para cobertura. Bouoiyour y Selmi (2016) compararon diferentes tipos de modelos incluyendo EGARCH, Asymmetric Power ARCH (APARCH), wighted GARCH y component GARCH con multiples umbrales utilizadon criterios de información dentro de la muestra como AIC, BIC y HQC; concluyendo que a pesar una notoria disminución en la volatilidad, Bitcoin aún no puede considerarse como una moneda madura. Katsiampa (2017) concluyó que el modelo AR-CGARCH resutla en la estimación para Bitcoin, por lo tanto, para los términos de corto y largo plazo la componente de varianza condicional es importante. Chu et al. (2017) estimó 12 GARCH con diferentes distribuciones para las innovaciones en siete cryptomonedas; un modelo IGARCH(1,1) con innovaciones normales produjo el menor AIC, el AIC corregido, BIC, HQC y CAIC para el caso de Bitcoin, Litecoin, Maidsafecoin y Monero. En cuanto a Dogecoin t Ripple se obtuvo que un modelo GJRARCH(1,1) y GARCH(1,1) con errores normales produjeron los menores valores en criterios de información.

Ardia et al. (2018b) testeó que la presencia de cambios de régimen en la dinámica de volatilidad en GARCH para Bitcoin utilizando modelos MSGARCH. Especificamente, utilizaron precios medios diarios de Bitcoin transformados a retornos logarítmicos. Se realizó el análisis tanto en dentro de muestra como fuera de muestra, y los retornos logarítmicos de Bitcoin presentaron un cambio de régimen en la dinámica de su volatilidad, resultando en un mejor rendimiento para modelos MSGARCH contra modelos de régimen simple GARCH. Corporale y Zekokh (2019) extendieron los estudios de Ardia et al (2018b) analizando 3 cryptomonedas adicionales (Litecoin, Ethereum, Ripple) a Bitcoin, utilizando ES y funciones de pérdida conjunta al igual que el procedimiento MCS propuesto por Hansen et al. (2011) considerando una mayor cantidad de modelos. En este aspecto, se concluyó que modelos de doble régimen proporcionan mejores predicciones e VaR y ES que modelos de régimen simple.

Finalmente, el estudio realizado en este documento busca extender el análisis de Corporale y Zekokh (2019) a precios de Bitcoin intradiarios, utilizando precios con frecuencia de 1 hora, considerando una cantidad de modelos más reducida y estudiando solo la volatilidad de Bitcoin.

3. Metodología

3.1. MSGARCH

EL modelo *Markov-Switching* GARCH es un modelo GARCH al cual se le añade un cambio de régimen en los coeficientes, si el modelo GARCH está dado como

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Considerando el GARCH como una modificación al ARCH para que aumente la persistencia en la volatilidad generando clusters de volatilidad más persistente, se tiene que el modelo condicional para la varianza termina siendo único a lo largo de todo el periodo de muestreo lo cual no permite cambios estructurales en el modelo, entonces el MS-GARCH viene a flexibilizar este efecto considerando cambios estructurales en la varianza, por lo tanto se considera que los coeficientes del GARCH pueden cambiar. A diferencia de modelos con cambios estructurales fijos, este modelo relaja ese hecho y permite tener n estados distintos, los cuales varían y no son estáticos.

Para esto, se utiliza una cadena de Markov ergódica para los cambios de régimen $\{s_t\}$ en un conjunto finito $S = \{1, 2, \dots, n\}$ con una probabilidad de transición $\{\eta_{ij} = \mathbf{P}(s_t = i | s_{t-1} = j)\}$ y una medida de probabilidad invariante $\{\pi_i\}$, esto es, s_t es un proceso estocástico discreto el cual puede tomar los valores del conjunto S , donde la probabilidad de que cambie está dado por una medida de probabilidad invariante en el tiempo, es decir, la probabilidad de que s_{t+1} cambie al estado j está únicamente determinada por el estado anterior s_t con probabilidad η_{ij} , esto es $P(s_{t+1} = i | s_t = j, s_{t-1} = j_1, s_{t-2} = j_2 \dots) = P(s_{t+1} = i | s_t = j) = \eta_{ij}$, en resumen, la probabilidad de que cambie del estado i al estado j es η_{ij} .

Entonces, se define el modelo $MS - GARCH(u, v)$ como:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_{0,s_t} + \sum_{i=1}^u \alpha_{i,s_t} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_{j,s_t} \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

donde a diferencia del GARCH usual, se tienen n regímenes distintos en los cuales puede cambiar la estructura condicional de la varianza.

3.2. Modelos

Para el caso de estudio se utilizarán 3 modelos para la varianza, además de 2 supuestos distribucionales distintos.

Consideramos $\{r_t\}_t$ la serie log retornos, calculada mediante la diferenciación del logaritmo de los precios de cierre transados a una frecuencia de 1 hora. Entonces, siguiendo a *Ardia et al. (2018a)* adoptamos la forma general para la especificación del modelo *Markov-Switching GARCH*:

$$r_t | (S_t = k, I_{t-1}) \sim F(0, h_{k,t}, \theta_k) \quad (1)$$

donde $F(0, h_{k,t}, \theta_k)$ es la distribución con media 0, varianza $h_{k,t}$ que cambia en el tiempo y los parámetros del modelo asociado θ_k . Adicionalmente se considerará la variable estocástica S_t definida en $\{1, 2\}$, esto es, 2 posibles estados, para la cadena de Markov ergódica homogénea no observable con matriz de transición $\mathbf{P} = \{p_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ donde $p_{i,j} = P(S_t = j | S_{t-1} = i)$ mientras que I_{t-1} es la información disponible al tiempo $t - 1$, es decir, los valores pasados.

Luego, el modelo para la varianza no se restringirá a un modelo GARCH simple sino que se utilizarán distintos modelos:

GARCH(Bollerslev (1986))

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2)$$

EGARCH(Nelson (1991))

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \sum_{i=1}^p \left\{ \alpha_i \left(\frac{|\epsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} - E \left[\frac{|\epsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right] \right) + \gamma_i \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right\} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (3)$$

TGARCH(Zakoian (1994))

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i [(1 - \gamma_i) \epsilon_{t-i}^+ + (1 + \gamma_i) \epsilon_{t-i}^-] + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4)$$

GJRGARCH(Glosten et al.)(1993)

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p [\alpha_i + \gamma_i I_{\epsilon_{t-i} > 0}] \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

Con estos modelos se probarán distintas combinaciones y supuestos distribucionales considerando errores normales estándar o bien t-estándar. Por lo tanto se tendrán modelos representados de la siguiente manera:

Modelo1 – Modelo2 – distribución1 – distribución2,

e.g. *eGARCH* – *sGARCH* – *norm* – *std*, donde el modelo 1 representa el estado 1 mientras que el modelo 2 representa el estado 2.

Para la aplicación de estos modelos se considerará la serie de los retornos logarítmicos, los cuales se modelaran en media y en varianza, obteniendo un modelo para la media y un modelos *MS-GARCH* para la varianza, en particular se tomaran dos modelos para la media: ARMA(5,1) obtenido como el mejor modelos ARMA según el criterio de información de Akaike y otro modelo AR(1), mientras que la varianza de estos modelos se utilizaran 64 modelos *MS-GARCH*, considerando los modelos anteriormente expuestos de orden (1,1) cambiando las distribuciones entre normal estándar y t-estándar. Además, se incorporarán los modelos sin cambio de régimen para un total de 140 modelos.

3.3. Value-at-risk backtesting

Se define el Value-at-risk a un nivel α como la máxima pérdida esperada con una probabilidad α sobre un periodo.

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = F_{\alpha}^{-}(x) \quad (6)$$

donde $VaR_{\alpha}(X)$ es el VaR a un nivel α de la v.a. X , $F_X(x)$ la CDF de X , esto es, el α cuantil de la distribución subyacente.

Para realizar un test sobre las predicciones de 1 paso sobre el VaR se construye una sucesión de aciertos para las violaciones del VaR:

$$I_{t+1} = 1, \quad si \quad r_{t+1} < -VaR_{t+1}^{\alpha} \quad (7)$$

$$I_{t+1} = 0, \quad si \quad r_{t+1} > -VaR_{t+1}^{\alpha} \quad (8)$$

donde VaR_{t+1}^{α} es el predictor del VaR para el tiempo $t + 1$ a un nivel α .

Bajo la hipótesis de una correcta especificación del modelo, la sucesión de aciertos debe ser independiente y seguir una distribución Bernoulli.

$$H_0 : I_{t+1} \sim Bernoulli(\alpha), \quad (9)$$

$$f(I_{t+1}, p) = (1 - p)^{1-I_{t+1}} p^{I_{t+1}} \quad (10)$$

3.3.1. Unconditional coverage test (UC) Kupiec (1995)

Utilizando la sucesión de aciertos observada para un modelo de riesgo π , se comparan con p , entonces se tiene la función verosimilitud para la distribución Bernoulli:

$$L(\pi) = \prod (1 - \pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1 - \pi)^{T_0} \pi^{T_1} \quad (11)$$

donde T_0 es la cantidad de 0s mientras que T_1 es la cantidad de 1s de la sucesión, con una cantidad de muestras $T = T_0 + T_1$. Luego, el estimador máximo verosímil queda:

$$\hat{\pi} = \frac{T_1}{T_0 + T_1} \quad (12)$$

Entonces, se realiza un test de razón de verosimilitud asintótico para testear la hipótesis:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\pi})} \right] \sim \chi_1^2, \quad (13)$$

por lo tanto, bajo la hipótesis nula el estadístico LR_{uc} de distribuye asintóticamente χ_1^2 .

Sin embargo, este test se enfoca en testear en la cantidad de excepciones y no contempla otras situaciones posibles, puede ser que se pase el test UC pero se generen clusters de violaciones. Para rechazar los cúmulos de violaciones del VaR se debe realizar un test sobre la independencia de la sucesión de aciertos.

3.3.2. Conditional Coverage test (CC) Christoffsen (1998)

Considerando que la sucesión de aciertos presenta una dependencia temporal y sigue una sucesión de Markov con matriz de probabilidad de transición:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

donde π_{01} es la probabilidad de transición de 0 a 1, esto es, la probabilidad de conseguir una excepción al tiempo siguiente dado que no hubo excepción al tiempo actual.

La función de verosimilitud correspondiente:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}}, \quad (15)$$

donde T_{ij} es la cantidad observaciones de j seguidas por i .

Si la sucesión de aciertos es independiente del tiempo, se tiene que $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$, por lo tanto la matriz de transición queda:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

Luego, se procede a utilizar un test asintótico de razón de verosimilitud para testear la independencia:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[\frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi_1^2, \quad (17)$$

este test solo funciona para testear la independencia de la serie, por lo tanto se requiere testear simultáneamente si la sucesión de aciertos es independiente y su media de excepciones es correcta, por lo tanto se realiza el test de cobertura condicional (CC) propuesto por Christensen (1998), entonces la sucesión de predictores de VaR a un nivel α tiene la correcta cobertura condicional si la sucesión de aciertos es independiente e idénticamente distribuida de v.a. Bernoulli(α). Para esto, además de la hipótesis anterior de que los eventos son independientes con igual probabilidad de transición se añade a la hipótesis de que esta probabilidad es en efecto α , es decir $\pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$, por lo tanto el test queda:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi_1^2, \quad (18)$$

Luego, se tiene que el estadístico es la suma de los estadístico anteriores: $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$.

3.3.3. Dynamic quantile test (DQ) Manganelli and Engle (2004)

Este test se basa en una regresión lineal para la sucesión de aciertos sobre un conjunto de regresores incluyendo una constante, los valores rezagados de la misma serie y alguna función adicional de la información pasada. Consideramos la sucesión $Hit_t(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha$, bajo la correcta especificación del modelo se tienen las condiciones de momentos: $E[Hit_t(\alpha)] = 0$, $E[Hit_t(\alpha)I_{t-1}] = 0$, $E[Hit_t(\alpha)Hit_{t'}(\alpha)] = 0 \forall t \neq t'$ por lo tanto, se tiene el siguiente modelo de regresión:

$$Hit_t(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^K \beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^K \gamma_k g[\mathcal{I}_{t-k}] + \varepsilon_t, \quad (19)$$

entonces, bajo la hipótesis nula de la eficiencia condicional es equivalente a testear si los coeficientes son conjuntamente nulos:

$$H_0 : \delta = \beta_1 = \dots = \beta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0, \forall k = 1, \dots, K \quad (20)$$

A pesar de todo, estos test no proporcionan ningún acercamiento sobre la magnitud de desviación del modelo, lo cual no permite realizar una comparación entre los distintos modelos. Para esto se realiza un test final según González-Rivera et al.(2004) y McAleer y Da Veiga (2008), utilizando una función lineal de pérdida por los predictores del VaR. La función de pérdida cuantil (QL) sigue:

$$QL_t^\alpha = (\alpha - I_t(\alpha))(r_t - VaR_t^\alpha). \quad (21)$$

3.4. Expected Shortfall backtesting

Como el VaR es una medida de riesgo que en muchos casos es fácil de obtener pero contiene ciertas deficiencias, de las cuales en particular no es capaz de capturar riesgos de cola mas allá del α -cuantil definido. Ante esta falencia se introduce el *Expected Shortfall* el cual corresponde a la pérdida esperada dado que la pérdida excede el α -cuantil del VaR:

$$ES_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma VaR_\alpha(X) d\alpha \quad (22)$$

donde $ES_\gamma(X)$ es el *Expected Shortfall* de la v.a. X a un nivel γ , esto es, dada una pérdida L se tiene que $ES = E[L|L > VaR]$.

3.4.1. Exceso de residual (ER) McNeil y Frey (2000)

El test ER propuesto por McNeil y Frey (2000) propone ajustar un modelo para los datos de retornos y estimar predictores para la media y volatilidad, para luego calcular los residuos del modelo. Luego, se aplica la *Teoría de valores extremos* considerando los residuos como un proceso de ruido blanco para modelar la cola de la distribución marginal. Finalmente se utiliza la EVT para estimar el cuantil superior de la distribución marginal. Por lo tanto, se testea si el valor esperado de ER es cero contra la hipótesis unilateral de que son mayores que cero, esto es, que el ER está sistemáticamente siendo subestimado.

3.4.2. ESR test Bayer y Dimitriadis (2018)

Suponiendo $\hat{\epsilon}_t$ el predictor del ES y r_t el log ret. Luego, se realiza una regresión del retorno frente al predictor del ES:

$$r_t = \alpha + \beta \hat{\epsilon}_t + u_t^\epsilon \quad (23)$$

donde $ES_\gamma(u_t^\epsilon I_{t-1}) = 0$, luego se testea la hipótesis de que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, contra la hipótesis alternativa de ser distintos. Para esto se utiliza un estimación semiparamétrica puesto que el funcional ES no es obtenible:

$$r_t = \alpha_0 + \beta_0 \hat{\epsilon}_t + u_t^q \quad (24)$$

$$r_t = \alpha_1 + \beta_1 \hat{\epsilon}_t + u_t^e \quad (25)$$

donde $Var_\gamma(u_t^q I_{t-1}) = 0$ y $ES_\gamma(u_t^e I_{t-1}) = 0$. Para esto se utiliza el estadístico de Wald con los parámetros (α, β) :

$$T_{ESR} = ((\alpha, \beta) - (0, 1)) \hat{\Sigma}_{ES}^{-1} ((\alpha, \beta)^T - (0, 1)^T)^T \quad (26)$$

luego, se tiene que el estadístico de Wald es asintóticamente χ_2^2 .

3.5. Model confidence set

Con los test anteriores no es posible comparar entre los modelos, por lo tanto se realiza un procedimiento (MCS) introducido por Hansen et al. (2011), el cual consiste en una secuencia de tests los cuales se utilizan para construir un conjunto de modelos superiores (SSM) para los cuales la hipótesis nula de habilidad predictiva equivalente (EPA) no es rechazada.

Para esto se considera un conjunto M^0 el cual contiene una cantidad finita de modelos ($i = 1, \dots, m_0$) los cuales son evaluados mediante una función de pérdida para el i -ésimo modelo al tiempo t , $L_{i,t}$.

Se define la variable de rendimiento:

$$d_{ij,t} = L_{i,t} - L_{j,t} \quad \forall i, j \in M^0 \quad (27)$$

luego, se define el estadístico de pérdida relativa muestral:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n d_{ij,t} \quad (28)$$

y

$$\bar{d}_i = \frac{1}{m} \sum_{j \in M^0} \bar{d}_{ij} \quad (29)$$

finalmente, la hipótesis nula es que todos los modelos tienen la misma capacidad predictiva por lo tanto

$$\mu_{ij} = E[d_{ij}], \quad \mu_i = E[\bar{d}_i] \quad (30)$$

Entonces se define el conjunto de modelos superiores

$$M^* = \{i \in M^0 : \mu_{ij} \leq 0 \quad \forall j \in M^0\}. \quad (31)$$

Por lo tanto, para eliminar los modelos inferiores de M^0 se testea el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_{0,M} : \mu_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in M \quad (32)$$

$$H_{1,M} : \mu_{ij} \neq 0 \text{ para algún } i, j \in M \quad (33)$$

o bien,

$$H_{0,M} : \mu_i = 0 \quad \forall i, j \in M \quad (34)$$

$$H_{1,M} : \mu_i \neq 0 \text{ para algún } i, j \in M \quad (35)$$

donde $M \subset M^0$. Para esto se construyen los siguientes estadístico t :

$$t_{ij} = \frac{\bar{d}_{ij}}{\sqrt{\hat{var}(\bar{d}_{ij})}}, \quad t_i = \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{\hat{var}(\bar{d}_i)}} \quad \text{para } i, j \in M \quad (36)$$

entonces, las dos hipótesis para el EPA se tienen los estadísticos

$$T_{R,M} = \max_{i,j \in M} |t_{ij}|, \quad T_{max,M} = \max_{i \in M} t_i \quad (37)$$

Luego, el procedimiento se realiza secuencialmente removiendo el peor modelo en cada paso, hasta que la hipótesis del EPA no se rechace para todos los modelos en el conjunto de modelos superiores. La elección del peor modelo se realiza mediante una regla de eliminación :

$$e_{max,M} = \arg \max_{i \in M} \frac{\bar{d}_i}{\hat{v}ar(\bar{d}_i)}, \quad e_{R,M} = \arg \max_i \left\{ \sup_{j \in M} \frac{\bar{d}_{ij}}{\sqrt{\hat{v}ar(\bar{d}_{ij})}} \right\} \quad (38)$$

Por lo que el procedimiento se compone en 2 etapas: fijar $M = M^0$ luego, testear la hipótesis EPA, si no se rechaza entonces $M = M^*$, si no, remover el peor modelo mediante la regla anterior.

4. Descripción de la muestra

En el presente documento se utilizara la serie de precios de cierre Bitcoin con una frecuencia de 1 hora. Los datos fueron obtenidos a través de la API de Binance *python-Binance* para los precios de cierre de las transacciones de 5 meses con una frecuencia de 1 hora cubriendo el periodo desde el 11 de Febrero de 2021 a las 13:07 hasta el 11 de Julio hasta las 20:51 horas horario local. Los precios son transformados a retornos logarítmicos realizando la primera diferencia del logaritmo de los precios.

A continuación de presentan los precios de cierre, las serie de retornos logarítmicos y un resumen de estadísticas para los retornos.

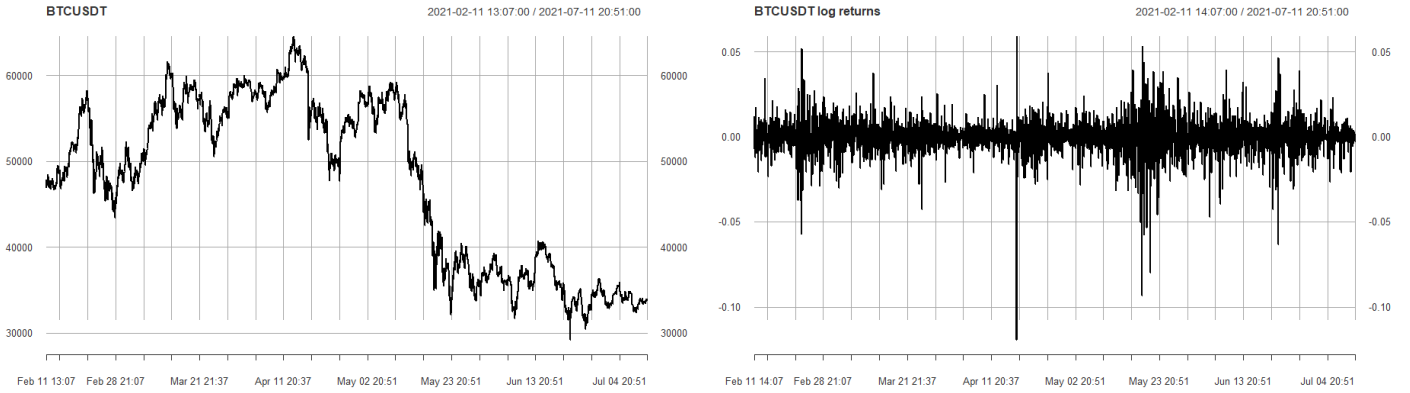


Figura 1: Gráficos de precios de cierre y retornos logarítmicos con frecuencia horaria para el periodo establecido.

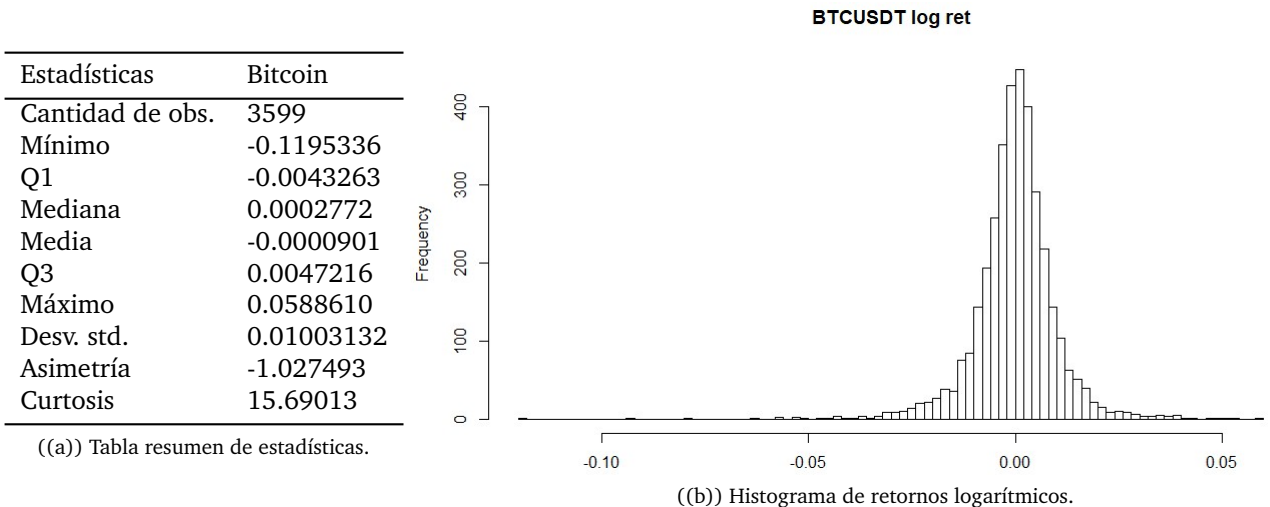


Figura 2: Resumen de la muestra de retornos logarítmicos.

En la figura 2 se puede apreciar que los retornos logarítmicos presentan una asimetría negativa y son leptocúrticos. Además, para las dos grandes caídas en el periodo, con una caída de al 12 % el 18 de abril a 03:37:00 y del 9 % el 19 de mayo a las 12:51:00, el primero se atribuye a la especulación de que el tesoro de EEUU podría tomar medidas importantes contra el lavado de dinero que se lleva a cabo a través de activos digitales mientras que la segunda caída contenida en un periodo de alta volatilidad corresponde a la ratificación pública del gobierno de China sobre la prohibición a las instituciones financieras y empresas a ofrecer servicios relacionados con transacción de cryptoactivos (19 mayo), junto con un tweet de Elon Musk el 12 de mayo sobre la suspensión de la compra de vehículos Tesla con Bitcoin comentando acerca de la contaminación producida mediante la minería del mismo. Estos eventos aumentaron la incertidumbre acerca de la factibilidad a largo plazo de la moneda virtual llevándola a una fuerte caída sostenida.

5. Resultados

Los 128 modelos especificados, combinando 2 modelos para la media ARMA(5,1) escogido como el mejor modelo según AIC y AR(1) para quitar la media de la serie, 4 modelos para la varianza GJRARCH, GARCH, EGARCH y TGARCH utilizando distribuciones t-estándar (*std*) y normal estándar (*norm*), para un total de 64 especificaciones distintas para el tipo de modelo MSGARCH, fueron estimados utilizando el método de estimación de MCMC. Los resultados fueron obtenidos del predictor a 1 paso del VaR y ES utilizando una ventana corrediza del 70 % de las observaciones. Finalmente, los modelos que no fallaron en el procedimiento de backtesting fueron utilizados para el procedimiento de selección de los modelos superiores MCS, el cual se utilizó un p-valor de 30 % para obtener el conjunto de modelos superiores. De los 128 modelos 89 pasaron los test y fueron utilizados para la selección del mejor conjunto de modelos.

5.1. VaR

De los 89 modelos seleccionados para el procedimiento MCS, fueron seleccionados 68 de ellos como modelos con igual capacidad predictiva respecto a la función de pérdida QL. Se tiene que cerca del 40 % (27) de ellos tiene un modelo para la media ARMA(5,1) mientras que 60 % (41) restante utilizan un modelo AR(1), si bien el modelo ARMA es mejor evaluado el criterio de información de Akaike, esto no se traduce en una mejor capacidad predictiva, al contrario, es más favorable un modelo AR simple. Esto es consistente puesto que la serie de los retornos logarítmicos no presenta una estructura autoregresiva significativa, el test de Box (0.61) rechaza la dependencia al rezago 1, pero muestra dependencia a rezagos superiores a 4. Luego, de los regímenes para el modelo MSGARCH, el 40 % (27) utilizan un modelo GJRARCH, 47 % (32) una especificación EGARCH, 62 % (42) TGARCH y 30 % (21) GARCH, de esto se tiene que el modelo GARCH simétrico es menos adecuado mientras que las contra partes de respuesta asimétrica tienen un mejor rendimiento, en particular, la especificación TGARCH es la más recurrente. Finalmente, solo 17 % (12) de los modelos utilizan distribuciones normales para ambos regímenes, 29 % (20) usan distribución t para ambos regímenes mientras que el 54 % restante utiliza distintas distribuciones para cada régimen, en particular el 25 % (17) utilizan distribución t para el primer régimen y 28 % (19) normal para el primero. En cuanto a la posición de los modelos en los regímenes se tienen: tGARCH(32 %-22,40 %-27), sGARCH(22 %-15,9 %-6), eGARCH(22 %-15,31 %-21), gjrGARCH(24 %-16,21 %-14) donde el primer valor es la cantidad en el primer régimen, mientras que el segundo valor para el segundo régimen. En cuanto a modelos con misma especificación para ambos estados se tienen 3 para gjrGARCH, 4 para eGARCH, 7 tGARCH y 0 sGARCH lo cual sugiere que el cambio de régimen cambia la estructura de la varianza no solo en parámetros sino también es respuesta favoreciendo a combinaciones de modelos.

Nº	Modelo	UC	CC	DQ	ER	ESR	MCS
1	AR-eGARCH-tGARCH-std-std	34,76 %	58,25 %	28,57 %	50,10 %	42,63 %	100,00 %
2	AR-eGARCH-sGARCH-norm-std	5,98 %	69,42 %	34,81 %	51,60 %	23,62 %	100,00 %
3	AR-tGARCH-sGARCH-std-norm	17,21 %	17,21 %	48,01 %	23,10 %	23,29 %	100,00 %
4	AR-eGARCH-eGARCH-std-norm	9,81 %	58,25 %	34,84 %	53,40 %	39,01 %	100,00 %
5	AR-eGARCH-tGARCH-std-norm	34,76 %	43,37 %	28,44 %	27,70 %	21,66 %	100,00 %
6	AR-gjrGARCH-tGARCH-norm-std	13,14 %	13,14 %	43,36 %	30,00 %	17,26 %	100,00 %
7	AR-tGARCH-tGARCH-std-norm	17,21 %	10,34 %	44,64 %	12,90 %	14,57 %	100,00 %
8	AR-eGARCH-gjrGARCH-std-norm	34,76 %	28,08 %	29,76 %	48,70 %	31,14 %	100,00 %
9	AR-eGARCH-sGARCH-std-std	28,08 %	50,08 %	30,10 %	42,80 %	29,66 %	100,00 %
10	AR-tGARCH-tGARCH-norm-std	10,34 %	10,34 %	59,80 %	11,40 %	20,00 %	100,00 %
11	AR-tGARCH-sGARCH-std-std	27,16 %	13,43 %	36,43 %	24,60 %	16,21 %	100,00 %
12	ARMA-eGARCH-eGARCH-std-norm	10,42 %	29,46 %	30,83 %	61,30 %	22,08 %	100,00 %
13	AR-gjrGARCH-tGARCH-std-norm	22,24 %	13,14 %	38,75 %	15,50 %	17,59 %	100,00 %
14	ARMA-eGARCH-tGARCH-norm-std	34,76 %	58,25 %	29,63 %	25,10 %	23,08 %	100,00 %
15	AR-eGARCH-sGARCH-std-norm	42,16 %	28,08 %	34,31 %	40,20 %	19,62 %	100,00 %
16	ARMA-tGARCH-eGARCH-std-std	7,85 %	40,61 %	29,17 %	25,90 %	14,84 %	100,00 %
17	AR-tGARCH-tGARCH-std-std	17,21 %	13,43 %	30,02 %	19,90 %	12,48 %	99,98 %
18	AR-sGARCH-tGARCH-norm-std	17,21 %	27,16 %	33,11 %	18,60 %	9,54 %	99,98 %
19	ARMA-gjrGARCH-tGARCH-std-std	34,76 %	17,26 %	39,35 %	29,00 %	23,34 %	99,98 %
20	AR-eGARCH-gjrGARCH-std-std	42,16 %	17,26 %	29,65 %	35,80 %	33,36 %	99,98 %
21	ARMA-tGARCH-sGARCH-std-std	50,08 %	22,24 %	38,79 %	16,80 %	11,30 %	99,98 %
22	AR-eGARCH-tGARCH-norm-std	22,24 %	34,76 %	30,77 %	18,90 %	15,36 %	99,96 %
23	ARMA-eGARCH-sGARCH-std-norm	48,68 %	27,16 %	45,96 %	16,70 %	19,56 %	99,92 %
24	AR-tGARCH-eGARCH-std-norm	13,43 %	21,76 %	43,08 %	7,80 %	8,52 %	99,92 %
25	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-norm-std	28,57 %	35,56 %	26,49 %	23,20 %	20,07 %	99,92 %
26	AR-gjrGARCH-eGARCH-norm-norm	13,14 %	35,56 %	53,55 %	63,10 %	5,67 %	99,92 %
27	ARMA-tGARCH-sGARCH-norm-norm	21,76 %	13,43 %	33,67 %	77,70 %	9,35 %	99,92 %
28	AR-sGARCH-eGARCH-std-std	40,61 %	17,21 %	46,59 %	11,80 %	12,38 %	99,92 %
29	AR-tGARCH-gjrGARCH-std-norm	21,76 %	21,76 %	36,09 %	17,30 %	13,71 %	99,92 %
30	AR-gjrGARCH-tGARCH-std-std	7,97 %	17,26 %	42,66 %	22,80 %	20,34 %	99,92 %
31	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-std-std	7,85 %	21,76 %	44,36 %	7,60 %	7,35 %	99,92 %
32	ARMA-tGARCH-tGARCH-norm-norm	27,16 %	33,43 %	24,17 %	28,00 %	6,36 %	99,84 %
33	ARMA-tGARCH-eGARCH-std-norm	10,34 %	33,43 %	31,92 %	6,40 %	6,96 %	99,82 %
34	ARMA-sGARCH-tGARCH-norm-std	27,16 %	48,68 %	17,11 %	36,60 %	14,67 %	99,82 %
35	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-std-norm	13,43 %	40,61 %	9,45 %	28,80 %	9,55 %	99,78 %
36	ARMA-eGARCH-gjrGARCH-std-norm	10,42 %	60,61 %	22,85 %	18,20 %	14,26 %	99,72 %
37	AR-sGARCH-eGARCH-norm-std	17,21 %	17,21 %	32,90 %	21,80 %	16,33 %	99,68 %
38	ARMA-eGARCH-tGARCH-std-norm	27,16 %	48,68 %	8,71 %	31,90 %	12,14 %	99,66 %
39	AR-sGARCH-tGARCH-std-std	27,16 %	48,68 %	56,47 %	11,40 %	15,73 %	99,60 %
40	ARMA-tGARCH-tGARCH-norm-std	21,76 %	13,43 %	12,42 %	29,70 %	10,17 %	99,50 %
41	AR-gjrGARCH-eGARCH-norm-std	13,14 %	35,56 %	26,94 %	33,80 %	34,04 %	99,30 %
42	AR-eGARCH-eGARCH-std-std	50,08 %	22,24 %	22,00 %	31,60 %	18,76 %	99,28 %
43	ARMA-eGARCH-gjrGARCH-norm-norm	13,43 %	33,43 %	33,99 %	44,50 %	11,63 %	98,92 %
44	ARMA-eGARCH-sGARCH-std-std	40,61 %	17,21 %	15,76 %	30,20 %	14,11 %	98,88 %
45	ARMA-tGARCH-eGARCH-norm-std	34,76 %	51,81 %	10,71 %	8,70 %	10,06 %	98,58 %
46	ARMA-eGARCH-tGARCH-std-std	17,21 %	17,21 %	23,01 %	17,80 %	12,20 %	98,50 %
47	ARMA-tGARCH-tGARCH-std-std	7,97 %	22,24 %	13,67 %	28,20 %	8,10 %	98,34 %
48	ARMA-sGARCH-tGARCH-std-std	9,81 %	69,42 %	18,65 %	30,10 %	9,57 %	97,62 %
49	ARMA-tGARCH-eGARCH-norm-norm	34,76 %	28,57 %	16,95 %	40,30 %	13,72 %	97,52 %
50	ARMA-eGARCH-gjrGARCH-std-std	50,08 %	28,08 %	9,55 %	26,10 %	19,44 %	96,00 %
51	AR-tGARCH-gjrGARCH-norm-std	13,43 %	40,61 %	43,31 %	14,50 %	12,84 %	95,46 %
52	ARMA-tGARCH-sGARCH-norm-std	48,68 %	13,43 %	21,46 %	22,50 %	12,96 %	95,46 %
53	AR-tGARCH-sGARCH-norm-std	17,21 %	13,43 %	18,71 %	30,80 %	15,06 %	94,26 %
54	AR-tGARCH-eGARCH-norm-norm	10,34 %	17,21 %	43,02 %	18,00 %	5,28 %	94,08 %
55	ARMA-gjrGARCH-gjrGARCH-norm-std	17,21 %	40,61 %	19,29 %	12,10 %	12,18 %	92,16 %
56	ARMA-gjrGARCH-eGARCH-norm-std	22,24 %	17,26 %	12,21 %	33,10 %	11,56 %	91,88 %
57	AR-gjrGARCH-sGARCH-norm-std	22,24 %	17,26 %	28,76 %	17,20 %	11,66 %	85,96 %
58	AR-gjrGARCH-tGARCH-norm-norm	13,14 %	17,37 %	45,02 %	35,40 %	18,48 %	82,38 %
59	AR-tGARCH-gjrGARCH-std-std	21,76 %	40,61 %	27,24 %	17,70 %	13,57 %	73,54 %
60	AR-gjrGARCH-gjrGARCH-std-norm	28,08 %	43,37 %	35,03 %	6,90 %	8,80 %	70,50 %
61	AR-gjrGARCH-gjrGARCH-norm-std	17,26 %	50,08 %	33,38 %	12,30 %	10,76 %	67,98 %
62	AR-eGARCH-gjrGARCH-norm-norm	34,76 %	28,08 %	14,19 %	77,40 %	40,69 %	66,56 %
63	AR-gjrGARCH-sGARCH-std-norm	22,24 %	22,24 %	53,43 %	5,10 %	12,74 %	65,44 %
64	AR-eGARCH-eGARCH-norm-norm	22,24 %	13,14 %	23,20 %	93,20 %	25,74 %	63,06 %
65	AR-gjrGARCH-sGARCH-std-std	34,76 %	17,26 %	32,93 %	18,00 %	15,88 %	51,82 %
66	AR-tGARCH-gjrGARCH-norm-norm	33,43 %	13,43 %	29,42 %	81,10 %	38,03 %	44,88 %
67	AR-tGARCH-tGARCH-norm-norm	10,34 %	7,85 %	31,87 %	67,20 %	19,16 %	28,08 %
68	AR-tGARCH-sGARCH-norm-norm	13,43 %	17,21 %	30,24 %	79,00 %	38,33 %	18,78 %

Cuadro 1: Valores P para los procedimientos de backtesting y MCS utilizando la función de pérdida de VaR. Se muestra el conjunto de modelos superiores con su especificación para la media y sus regímenes para la varianza.

5.2. ES

Fueron 89 de 128 modelos validados por el proceso de backtesting utilizados para la selección del conjunto de modelos superiores se seleccionaron 63 de ellos los cuales presentan la misma capacidad predictiva utilizando la función de pérdida QL para el ES en MCS. El 40 % (25) de los modelos especificados utilizan un modelo ARMA para la media mientras que el 60 % (38) utilizan el modelo AR, nuevamente, los resultados tienen la misma proporción que al utilizar la función de

pérdida QL con los predictores del VAR. EL 43 %(27) utilizan un modelos gjrGARCH, 38 %(24) eGARCH, 60 %(38) tGARCH y 35 %(22) sGARCH, similarmente al caso anterior, los modelos con respuesta asimétrica siguen siendo más preferidos que el modelo GARCH con respuesta simétrica y además el modelo tGARCH mantiene la mayor proporción en los resultados. En cuanto a las distribuciones, el 95 %(60) utilizan distribución t y el 65 % normal, mientras que el 5 %(3) utilizan normal para ambos regímenes y el 35 %(22) t para ambos, 33 %(21) utilizan una composición "norm-stdz el 27 %(17) "std-norm" por lo que la distribución t con colas más pesadas que la normal tiene una mejor capacidad predictiva que la normal de lo cual se tiene que la normal tiende a subestimar las pérdidas más allá del VaR. Considerando los modelos con misma especificación para ambos regímenes se tienen: 5 gjrGARCH, 3 eGARCH, 6 tGARCH y 1 sGARCH un resultado similar al caso del VaR. Finalmente la composición de los modelos fue: gjrGARCH(27 %-17,24 %-15), eGARCH(25 %-16,17 %-11), tGARCH(33 %-21,37 %-23) y sGARCH(14 %-9,22 %-14).

Nº	model	UC	CC	DQ	ER	ESR	MCS
1	AR-tGARCH-sGARCH-std-norm	17,21 %	17,21 %	48,01 %	23,10 %	23,29 %	100,00 %
2	AR-gjrGARCH-tGARCH-std-norm	22,24 %	13,14 %	38,75 %	15,50 %	17,59 %	100,00 %
3	AR-eGARCH-gjrGARCH-std-std	42,16 %	17,26 %	29,65 %	35,80 %	33,36 %	100,00 %
4	AR-eGARCH-tGARCH-std-norm	34,76 %	43,37 %	28,44 %	27,70 %	21,66 %	100,00 %
5	AR-tGARCH-tGARCH-std-norm	17,21 %	10,34 %	44,64 %	12,90 %	14,57 %	100,00 %
6	AR-tGARCH-sGARCH-std-std	27,16 %	13,43 %	36,43 %	24,60 %	16,21 %	100,00 %
7	AR-eGARCH-tGARCH-std-std	34,76 %	58,25 %	28,57 %	50,10 %	42,63 %	100,00 %
8	AR-eGARCH-sGARCH-std-std	28,08 %	50,08 %	30,10 %	42,80 %	29,66 %	100,00 %
9	ARMA-eGARCH-tGARCH-norm-std	34,76 %	58,25 %	29,63 %	25,10 %	23,08 %	100,00 %
10	AR-tGARCH-tGARCH-norm-std	10,34 %	10,34 %	59,80 %	11,40 %	20,00 %	100,00 %
11	AR-eGARCH-tGARCH-norm-std	22,24 %	34,76 %	30,77 %	18,90 %	15,36 %	100,00 %
12	AR-tGARCH-gjrGARCH-std-std	21,76 %	40,61 %	27,24 %	17,70 %	13,57 %	100,00 %
13	AR-tGARCH-tGARCH-std-std	17,21 %	13,43 %	30,02 %	19,90 %	12,48 %	100,00 %
14	AR-gjrGARCH-eGARCH-norm-std	13,14 %	35,56 %	26,94 %	33,80 %	34,04 %	100,00 %
15	AR-eGARCH-eGARCH-std-norm	9,81 %	58,25 %	34,84 %	53,40 %	39,01 %	100,00 %
16	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-norm-std	28,57 %	35,56 %	26,49 %	23,20 %	20,07 %	100,00 %
17	AR-sGARCH-eGARCH-std-std	40,61 %	17,21 %	46,59 %	11,80 %	12,38 %	99,98 %
18	AR-tGARCH-gjrGARCH-std-norm	21,76 %	21,76 %	36,09 %	17,30 %	13,71 %	99,98 %
19	AR-tGARCH-eGARCH-std-norm	13,43 %	21,76 %	43,08 %	7,80 %	8,52 %	99,98 %
20	AR-eGARCH-eGARCH-std-std	50,08 %	22,24 %	22,00 %	31,60 %	18,76 %	99,98 %
21	AR-gjrGARCH-tGARCH-std-std	7,97 %	17,26 %	42,66 %	22,80 %	20,34 %	99,98 %
22	AR-gjrGARCH-tGARCH-norm-std	13,14 %	13,14 %	43,36 %	30,00 %	17,26 %	99,98 %
23	AR-tGARCH-sGARCH-norm-std	17,21 %	13,43 %	18,71 %	30,80 %	15,06 %	99,98 %
24	ARMA-gjrGARCH-tGARCH-std-std	34,76 %	17,26 %	39,35 %	29,00 %	23,34 %	99,92 %
25	ARMA-tGARCH-eGARCH-std-std	7,85 %	40,61 %	29,17 %	25,90 %	14,84 %	99,90 %
26	ARMA-tGARCH-eGARCH-norm-std	34,76 %	51,81 %	10,71 %	8,70 %	10,06 %	99,86 %
27	ARMA-sGARCH-tGARCH-norm-std	27,16 %	48,68 %	17,11 %	36,60 %	14,67 %	99,82 %
28	AR-eGARCH-sGARCH-norm-std	5,98 %	69,42 %	34,81 %	51,60 %	23,62 %	99,54 %
29	AR-tGARCH-gjrGARCH-norm-std	13,43 %	40,61 %	43,31 %	14,50 %	12,84 %	99,50 %
30	AR-sGARCH-eGARCH-norm-std	17,21 %	17,21 %	32,90 %	21,80 %	16,33 %	99,44 %
31	AR-sGARCH-tGARCH-std-std	27,16 %	48,68 %	56,47 %	11,40 %	15,73 %	98,86 %
32	ARMA-tGARCH-sGARCH-norm-std	48,68 %	13,43 %	21,46 %	22,50 %	12,96 %	98,76 %
33	ARMA-gjrGARCH-eGARCH-norm-std	22,24 %	17,26 %	12,21 %	33,10 %	11,56 %	96,72 %
34	AR-gjrGARCH-gjrGARCH-norm-std	17,26 %	50,08 %	33,38 %	12,30 %	10,76 %	93,62 %
35	AR-sGARCH-gjrGARCH-norm-std	5,88 %	17,21 %	24,94 %	7,20 %	9,82 %	93,46 %
36	AR-gjrGARCH-gjrGARCH-std-norm	28,08 %	43,37 %	35,03 %	6,90 %	8,80 %	93,06 %
37	ARMA-tGARCH-tGARCH-std-std	7,97 %	22,24 %	13,67 %	28,20 %	8,10 %	90,42 %
38	AR-gjrGARCH-sGARCH-norm-std	22,24 %	17,26 %	28,76 %	17,20 %	11,66 %	89,06 %
39	AR-eGARCH-gjrGARCH-std-norm	34,76 %	28,08 %	29,76 %	48,70 %	31,14 %	87,14 %
40	ARMA-tGARCH-sGARCH-std-std	50,08 %	22,24 %	38,79 %	16,80 %	11,30 %	83,86 %
41	AR-sGARCH-tGARCH-norm-std	17,21 %	27,16 %	33,11 %	18,60 %	9,54 %	83,56 %
42	AR-sGARCH-tGARCH-norm-norm	17,21 %	17,21 %	36,66 %	17,20 %	8,95 %	81,34 %
43	AR-gjrGARCH-tGARCH-norm-norm	13,14 %	17,37 %	45,02 %	35,40 %	18,48 %	78,40 %
44	ARMA-tGARCH-tGARCH-norm-std	21,76 %	13,43 %	12,42 %	29,70 %	10,17 %	75,66 %
45	ARMA-eGARCH-tGARCH-std-std	17,21 %	17,21 %	23,01 %	17,80 %	12,20 %	74,86 %
46	ARMA-eGARCH-gjrGARCH-std-std	50,08 %	28,08 %	9,55 %	26,10 %	19,44 %	72,48 %
47	AR-gjrGARCH-sGARCH-std-norm	22,24 %	22,24 %	53,43 %	5,10 %	12,74 %	72,34 %
48	ARMA-tGARCH-eGARCH-std-norm	10,34 %	33,43 %	31,92 %	6,40 %	6,96 %	69,38 %
49	ARMA-sGARCH-tGARCH-std-std	9,81 %	69,42 %	18,65 %	30,10 %	9,57 %	66,42 %
50	ARMA-eGARCH-sGARCH-std-std	40,61 %	17,21 %	15,76 %	30,20 %	14,11 %	52,44 %
51	AR-eGARCH-sGARCH-std-norm	42,16 %	28,08 %	34,31 %	40,20 %	19,62 %	50,94 %
52	ARMA-gjrGARCH-gjrGARCH-norm-std	17,21 %	40,61 %	19,29 %	12,10 %	12,18 %	49,84 %
53	AR-tGARCH-tGARCH-norm-norm	10,34 %	7,85 %	31,87 %	67,20 %	19,16 %	49,18 %
54	ARMA-eGARCH-tGARCH-std-norm	27,16 %	48,68 %	8,71 %	31,90 %	12,14 %	48,14 %
55	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-std-norm	13,43 %	40,61 %	9,45 %	28,80 %	9,55 %	47,74 %
56	ARMA-gjrGARCH-tGARCH-norm-std	10,34 %	27,16 %	8,81 %	9,30 %	9,63 %	47,50 %
57	ARMA-gjrGARCH-gjrGARCH-std-norm	17,26 %	69,42 %	10,21 %	9,70 %	8,30 %	44,88 %
58	ARMA-tGARCH-gjrGARCH-std-std	7,85 %	21,76 %	44,36 %	7,60 %	7,35 %	44,46 %
59	AR-gjrGARCH-sGARCH-std-std	34,76 %	17,26 %	32,93 %	18,00 %	15,88 %	36,50 %
60	ARMA-eGARCH-eGARCH-std-norm	10,42 %	29,46 %	30,83 %	61,30 %	22,08 %	34,40 %
61	AR-sGARCH-sGARCH-std-std	21,76 %	40,61 %	31,76 %	7,00 %	7,09 %	25,36 %
62	ARMA-gjrGARCH-sGARCH-std-norm	17,26 %	22,24 %	11,02 %	13,90 %	7,84 %	10,76 %
63	ARMA-gjrGARCH-gjrGARCH-std-std	9,81 %	43,37 %	14,35 %	10,50 %	8,53 %	10,04 %

6. Conclusiones

Se realizó una validación de los modelos utilizando el backtesting con el VaR y ES, al igual que el procedimiento MCS para la selección del conjunto de modelos superiores cuya capacidad predictiva es equivalente, para modelar la volatilidad de Bitcoin en una frecuencia de 1 hora utilizando modelos de doble régimen con cambios estructurales dinámicos según una cadena de Markov no observable bajo el formato de MSGARCH. Utilizando la función de pérdida QL para el VaR y ES se llegaron a resultados similares, en ambos casos se sugiere utilizar un modelo autoregresivo para quitar la media de la serie y no un modelo ARMA. Los resultados favorecen a modelos con estructuras diferentes para cada régimen junto con distribuciones diferentes. El mejor modelo en términos de la función de pérdida QL utilizada, en el caso del ES está dado por AR-tGARCH-sGARCH-std-norm mientras que en términos de VaR viene siendo AR-eGARCH-tGARCH-std-std, y el mejor modelo en ambos conjuntos estaría dado por AR-tGARCH-sGARCH-std-norm lo cual sugiere un régimen con respuesta asimétrica con una distribución más acorde a tomar valores más extremos que la normal, mientras que el segundo régimen sería menos volátil y simétrico lo cual muestra cierta consistencia con el precio de Bitcoin a frecuencia horaria el cual presenta periodos de muy alta volatilidad y periodos menos volátiles.

Además, se debe considerar que los resultados son favorables a la existencia de cambios de régimen no solo en forma paramétrica sino que en forma estructural y de tipo de respuesta ante shocks, por ejemplo, respuesta asimétrica y también un cambio en la distribución.

Los resultados son consistentes con lo planteado por Corporale y Zekokh (2019) donde las cryptomonedas presentan alta volatilidad y apalancamiento por lo menos en un régimen, además de que modelos de doble régimen proporcionan mejores predictores para VaR y ES que modelos de régimen simple, si bien no se incluyeron modelos de este estilo, en caso de haber sido lo contrario se tendría mayor presencia de modelos con misma especificación en ambos regímenes lo cual es muy favorable a lo expuesto anteriormente.

Referencias

- [1] Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. Econom.* 31, 307–327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- [2] Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E., 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *J. Financ.* 48, 1779–1801. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x>
- [3] Nelson, D.B., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica* 59, 347–370. <https://doi.org/10.2307/2938260>
- [4] Zakoian, J.M., 1994. Threshold heteroskedastic models. *J. Econ. Dyn. Control* 18, 931–955. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(94\)90039-6](https://doi.org/10.1016/0165-1889(94)90039-6)
- [5] Ardia, D., Bluteau, K., Boudt, K., Catania, L., 2018a. Forecasting risk with Markov-switching GARCH models: a large-scale performance study. *Int. J. Forecast.* 34, 733–747.
- [6] Haas, M., Mittnik, S., Paoletta, M.S., 2004. A new approach to Markov-switching GARCH models. *J. Financ. Econom.* 2, 493–530. <https://doi.org/10.1093/jfinec/nbh020>
- [7] Kupiec, P.H., 1995. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *J. Deriv.* 3.
- [8] Christoffersen, P.F., 1998. Evaluating interval forecasts. *Int. Econ. Rev.* 39, 841–862.
- [9] Manganelli, S., Engle, R.F., 2004. CAViaR: conditional autoregressive Value at Risk by regression quantiles. *J. Bus. Econ. Stat.* 22, 367–381.
- [10] González-Rivera, G., Lee, T.H., Mishra, S., 2004. Forecasting volatility: a reality check based on option pricing, utility function, Value-at-Risk, and predictive likelihood. *Int. J. Forecast.* 20, 629–645.
- [11] McAleer, M., Da Veiga, B., 2008. Single-index and portfolio models for forecasting Value-at-Risk thresholds. *J. Forecast.* 27, 217–235.
- [12] Artzner, P.F., 1997. Thinking coherently. *Risk* 10 (11), 68–71.
- [13] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. *Math. Financ.* 9 (3), 203–228.
- [14] McNeil, A.J., Frey, R., 2000. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *J. Empir. Finance* 7 (3–4), 271–300.
- [15] Nakamoto, S., 2009. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic C
- [16] Bayer, S., Dimitriadis, T., 2018. Regression based expected shortfall backtesting. *arXiv preprint arXiv:1801.04112*.
- [17] Hansen, P.R., Lunde, A., Nason, J.M., 2011. The model confidence set. *Econometrica* 79 (2), 453–497.

- [18] Guglielmo Maria Caporalea, Timur Zekokh, 2019. Modelling volatility of cryptocurrencies using Markov-Switching GARCH models. *Research in International Business and Finance* 48 (2019), 143 - 155.
- [19] Ardia, D. Bluteau, K. Boudt, K. Catania, L. Trottier, D.-A. (2019a). Markov-switching GARCH models in R: The MS-GARCH package. *Journal of Statistical Software*, 91(4), 1-38. <http://doi.org/10.18637/jss.v091.i04>
- [20] Ardia, D. Bluteau, K. Ruede, M. (2019b). Regime changes in Bitcoin GARCH volatility dynamics. *Finance Research Letters*, 29, 266-271. <http://doi.org/10.1016/j.frl.2018.08.009>
- [21] <https://cran.r-project.org/web/packages/MSGARCH/index.html>