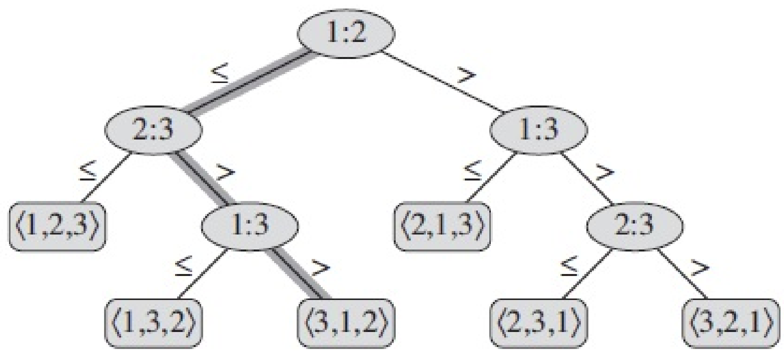
1 Lista 3, Zadanie 7

W treści zadanie jest to pominięte, ale przez algorytm sortujący mamy na myśli **algorytm sortujący za pomocą porównań** (Comparison Model). W pierwszej subsekcji przedstawię prezentacje algorytmu sortujacego za pomocą drzewa decyzyjnego, zaś w drugiej subsekcji przeanalizuję złożoność asymptotyczną dla danych o długościach wymienionych w zadaniu.

1.1 Drzewa decyzyjne



Powyższe drzewo decyzyjne przedstawia algorytm sortujący działający na ciągu 3-elementowym. Węzły wewnętrzne to indeksy elementów które są porównywane, liście natomiast są wszytskimi możliwym permutacjami. Na tej zasadzie właśnie działają algorytmy sortujące. Gdy nie bedziemy myśleć o wartościach elementów, a zamiast tego o ich indeksach, to algorytm sortujący zwraca nam pewną permutację $\pi \in S_n$ indeksów elementów, gdzie S_n to zbiór permutacji o długości n.
Zauważmy jeszcze, że każde drzewo ma przynajmniej $n!$ liści, jako, że każda permutacja zbioru $1, 2, ...n$ musi wystąpić przynajmniej raz.
Dolne ograniczenie algorytmu stanowi długość najdłuższej ściezki od korzenia do dowolnego liścia. Stąd ogólnie znana prawda, że dowlony algorytm sortujący za pomocą porównań w przypadku pesymistycznym wymaga $\Omega(nlg(n))$ porównań.
Szybki dowód na boku:
Oznaczmy: wysokość drzewa - h, ilość osiągalnych liści - l

$$n! \leq l \leq 2^h,$$
$$lg(n!) \leq h,$$

$$lg(n!) = \Omega(nlg(n))$$

A więc mamy nasz przypadek pesymistyczny. Co jeżeli zmienimy zakres danych?

1.2 Mniejszy zakres danych

Pokażę, że nie istnieje algorytm sortujący CM działający w czasie liniowym dla m różnych danych wejściowych poprzez pokazanie, że wysokość poddrzewa odpowiadajaca tym m permutacją jest asymptotycznie większa niż liniowa.
Oznaczmy:
$m_1 = n!/2, \quad m_2 = n!/n, \quad m_3 = n!/2^n$
h - to dalej wysokość drzewa.
log - oznacza logarytm o podstawie 2.

Dla m_1:

$$\begin{aligned} m_1 \leq 2^h \equiv h &\geq \log m_1 \\ &= \log \frac{n!}{2} \\ &= \log n! - \log 2 \\ &= \log n! - 1 = \Omega(nlog(n)) \end{aligned}$$

Dla m_2:

$$\begin{aligned} m_2 \leq 2^h \equiv h &\geq \log m_2 \\ &= \log \frac{n!}{n} \\ &= \log n! - \log n \\ &= \log 1 + log2 + ... + log(n-1) + log(n) - log(n) \\ &\leq log(n) + log(n) + ... + log(n) \\ &= n \cdot log(n) = \Omega(nlog(n)) \end{aligned}$$

Dla m_3:

$$\begin{aligned} m_3 \leq 2^h \equiv h &\geq \log m_3 \\ &= \log \frac{n!}{2^n} \\ &= \log n! - \log 2^n \\ &= \log n! - n = \Omega(nlogn) \end{aligned}$$