1 Lista 7, Zadanie 5

W zadaniu mamy pokazać, że mając spójny graf G oraz wybrany wierzchołek v, jeśli po wykonaniu procedur BFS i DFS, zaczynając w v, otrzymamy to samo drzewo przejścia T, to $G = T$. Innymi słowy BFS i DFS dadzą to samo drzewo przeszukiwań T na spójnym, acyklicznym grafie G wtedy i tylko wtedy gdy G jest drzewem.
Błyskawiczne przypomnienie BFS i DFS:

1.1 BFS

Przeszukiwanie wszerz wygląda następująco: najpierw odwiedzamy v, następnie kolejkujemy (FIFO) wierzchołki oddalone o 1 od v. Kiedy procedura zakończy kolejkownaie wierzchołków, bierze pierwszy wierzchołek z kolejki i zapętla się.

1.2 DFS

Przeszukiwanie w głąb wygląda następująco: najpierw odwiedzamy v, następnie przechodzimy do pierwszego wierzchołka sąsiadujacego, odwiedzamy go, kontunuujemy ten proces, tak długo aż nie natrafimy na węzeł, którego wszytkie sąsiadujące wierzchołki zostały już odwiedzone. Wtedy rekurencyjnie cofamy się do pierwszego wierzhołka z wciąż nieodwiedzonymi sąsiadami i wykonujemy procedurę od początku.

1.3 Dowód

Zaznczamy, że nieskierowane drzewo to spójny acykliczny graf prosty. Należy zaznaczyć, że dla grafów będących drzewami BFS i DFS będą dodawały wierzchołki do drzewa przeszukiwań w innej kolejności, natomiast nie interesuje nas w jakiej kolejności wierzchołki zostaną dodane. Ponadto będzie tak, nieważne w którym wierzchołku zaczniemy.
Dówód rozbijemy na dwa przypadki:

- case 1: G **jest** drzewem $\implies$ BFS i DFS dadzą to samo drzewo, a konkretniej G.

- case 2: G **nie jest** drzewem $\implies$ BFS i DFS dadzą różne drzewa przejścia.

1.3.1 Case 1

Wybierzmy wierzchołek v. Jako, że graf jest spójny, BFS i DFS dadzą w wyniku drzewo T. Korzeniem T jest v i zawiera wszystkie wierzchołki G (ze spójnośći). Oznaczmy $n = numberOfNodes(G)$. Wtedy, G ma $n-1$ krawędzi (ponieważ drzewa tak mają). Zauważmy, że T również ma n wierzchołków oraz dzięki temu, że również jest drzewem, ma $n-1$ krawędzi. W obliczu tych faktów, jedyną możliwośćią jest aby $G = T$.

1.3.2 Case 2

Odrzucimy z cech G acykliczność, usuwjąc go tym samym z grona drzew, innymi słowy rozważamy cykliczny graf. BFS i DFS dadzą różne drzewa przeszukiwań. Niech T_{BFS} będzie drzewem przeszukiwań BFS, a T_{DFS} DFS.
Jeżeli w grafie G wystąpi cykl, którego pierwszym elementem jest wierzchołek w_1, to DFS przejdzie ten cykl $(w_1, w_2, ..., w_k, w_1)$ jedną gałęzią, czyli wszytskie powyższe wierzchołki będą na jednej ścieżce od korzenia do liścia.
Zaś BFS doda w_1 i jego sąsiadów do kolejki rozdzielając się i przetwarzając je jeden po drugim, tworząc przynajmniej dwie gałęzie.
W takim razie $T_{BFS} \neq T_{DFS}$, co kończy dowód.