1 Lista 4, Zadanie 8

Zadanie polega na przedstawieniu algorytmu wyznaczania położenia rurociągu, dla którego długość odnóg niezbędnych do połączenia wszystkich wież wiertniczych, które znajdują się na siatce, będzie najmniejsza. Bez straty ogólności możemy założyć, że współrzędne wież są liczbami całkowitymi. Treść zadania może się wydawać przerażająco długa, ale poniższy obrazek powinien rozwiać wszelkie obawy co do treści zadania.

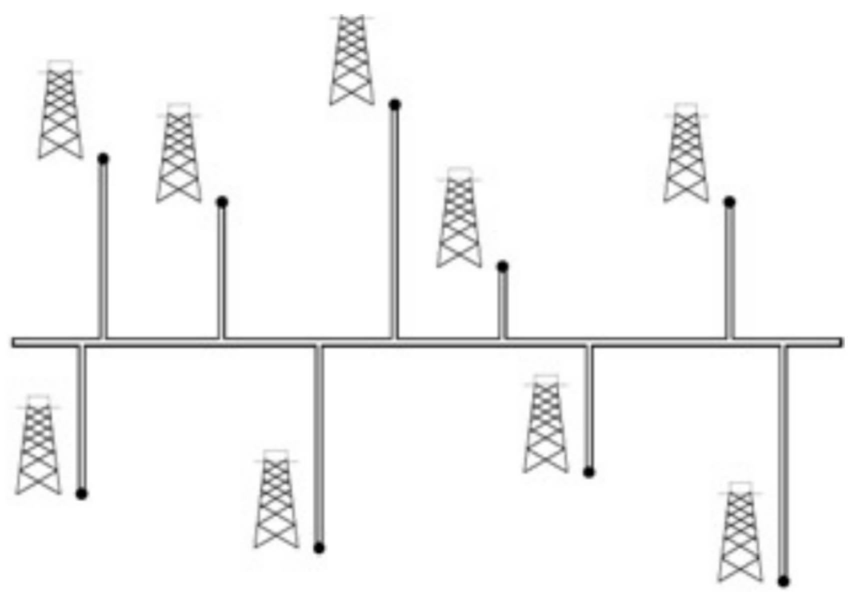

Figure 1: Pole naftowe, Dakota Północna, USA

Należy zwrócić uwagę, że jedyne o czym informuje nas współrzędna x_i, to czy wieże znajdują się na jednej, prostopadłej do rurociągu, linii. Można byłoby uznać to za współdzielenie rurociągu, co komplikuje zadanie, załozę więc, że żadne ***Dwie Wieże*** nie znajdują się na jednej linii.

Twierdzę, że najlepszą y-współrzędną rurociągu będzie:

1. dla n nieparzystego - **mediana**.
2. dla n parzystego - **mediana dolna** lub **mediana górna** lub **dowolona liczba między nimi**.

1.1 Dowód

Oznaczenia:

- s - suma rurociągów północ-południe przed przesunięciem.
- s' - suma rurociągów północ-południe po przesunięciu.
- d - długość o jaką przesuwamy główny rurociąg, $d > 0$.
- Y - zbiór współrzędnych y wszystkich wież.

Dla n nieparzystego: Załóżmy, że współrzędna y rurociągu jest równa medianie Y (rurociąg jest pod wieżą, której współrzedna y jest medianą). Przesuńmy teraz rurociąg o d do góry. Rurociąg przybliży się o d do $(n-1)/2$ wież, tym samym oddalając się o d od $(n+1)/2$ wież. Przesuwając w ten sposób oddalamy rurociąg również od wieży pod którą był do tej pory, stąd $(n+1)/2$.

$$s' = s + d(n+1)/2 - d(n-1)/2 = s + d > s$$

Dla przesunięcia w dół jest analogicznie. Tym samym pokzaliśmy, że mediana Y dla n nieparzystego jest najlepsza. Co z n parzystym?
Załóżmy, że współrzędna y rurociągu jest pomiędzy medianą dolną i medianą górną Y. Co się wydarzy jak przesuniemy rurociąg do góry o d, ale tak, żeby nie wyszedł poza wyższą z wież (mediane górną)?

$$s' = s + dn/2 - dn/2 = s$$

Niebywałe. Rozważmy teraz co się stanie gdy rurociąg biegnie pod wieżą, której współrzedna y jest medianą górną. Przesunięcie o d do góry przybliży nas do $n/2 - 1$, a oddali od $n/2 + 1$.

$$s' = s + d(n/2 + 1) - d(n/2 - 1) = s + 2d > s$$

Dla mediany dolnej tak samo.

1.2 Wyszukiwanie mediany

Do znalezienia mediany zbioru Y użyjemy procedury $SELECT$, o której można dowiedzieć się więcej w książce "Wprowadzenie do algorytmów" Cormen'a, podrodz. 9.2 lub 10.2. Wywołując procedurę $SELECT$ dla $i = (n+1)/2$ dla obu parzystości n dostaniemy dobry wynik.

1.3 Wybór w pesymistycznym czasie liniowym

Cały algorytm jest zawarty w książce. Nie będę go przedstawiał bo nie uda mi się go zapisać czytelniej niż w podręczniku, ale chętnie napiszę o jego złożoności, między innymi dlatego, że umyłem już wszystkie okna w domu.
Obliczając element x będący medianiom median, jesteśmy pewni, że x jest większy od:

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$$

elementów. Tym samym x jest mniejszy od:

$$n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) = \frac{7n}{10} + 6$$

Jako, że liczba elementów, od których x jeat mniejszy, jest większa od liczby elementów, od których jest mniejszy, to ten przypadek będziemy rozważać jako pesymistyczny. Wtedy rekurencjne wywołanie $SELECT$ ma następującą złożoność:

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & \text{n} \leq 140, \\ T(\lceil \frac{n}{5} \rceil) + T(\frac{7n}{10} + 6) + O(n) & \text{n} \geq 140 \end{cases} \tag{1}$$

Pokażę, że rozwiązaniem tej funckji jest funkcja liniowa. Wybierzmy wystarczająco duże c aby $T(n) \leq cn$. Oraz a, aby móc oszacować z góry $O(n) \leq an$. Wtedy możemy zapsiać:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c\left(\frac{7n}{10} + 6\right) + an \\ &\leq \frac{cn}{5} + c + \frac{7cn}{10} + 6c + an \\ &= \frac{9cn}{10} + 7c + an \\ &= cn + (-\frac{cn}{10} + 7c + an) \end{aligned} \tag{2}$$

Co jest mniejsze od cn o ile $-\frac{cn}{10} + 7c + an \leq 0$. Proszę się nie bać już niedaleko.

$$-\frac{cn}{10} + 7c + an \leq 0 \Longleftrightarrow c \geq 10a\left(\frac{n}{n-10}\right) \tag{3}$$

dla $n > 70$. Radośnie założyliśmy wcześniej, że $n \geq 140$, po co? Mamy teraz, że $n/(n-70) \leq 2$, więc przy wyborze $c \geq 20a$ nierówność (3) jest spełniona. Tym samym udowodnilismy, że $T(n) = O(n)$.