Física Computacional I

Lista de Exercícios III - Data para entrega: 25/09/2020

Problema 1: Capacidade térmica de um Sólido

A teoria de Debye para sólidos fornece a seguinte expressão para a capacidade térmica de uma sólido a temperatura T

$$C_V = 9V\rho k_B \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}\, dx,$$

onde V é o volume do sólido, ρ é a densidade de átomos, k_B é a constante de Boltzmann e θ_D é a chamada *temperatura de Debye*, uma propriedade dos sólidos que depende da sua densidade e da velocidade do som.

a) Escreva uma função `cv(T)` que calcula C_V para um dado valor de temperatura, para uma amostra consistindo de $1000\,\mathrm{cm}^3$ de alumínio sólido, que tem uma densidade $\rho = 6.022 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ e uma temperatura de Debye de $\theta_D = 428\,\mathrm{K}$. Use a quadratura Gaussiana para calcular o valor da integral, com $N = 50$ pontos. (Dica: para T = 100 K, $C_V \sim 1100$ J/K).

b) Use sua função para fazer um gráfico do calor específico como uma função da temperatura de $T = 5\,\mathrm{K}$ até $T = 500\,\mathrm{K}$.

Problema 2: A constante de Stefan–Boltzmann

A teoria da radiação térmica de Planck nos diz que no intervalo de frequência angular ω até $\omega + d\omega$, um corpo negro com área unitária emite radiação eletromagnética com uma enérgia térmica por segundo igual a $I(\omega)\, d\omega$, onde

$$I(\omega) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}.$$

Aqui $\hbar$ é a constante de Planck sobre 2π, c é a velocidade da luz e k_B é a constante de Boltzmann.

a) Mostre que a energia total irradiada por unidade de área de um corpo negro é dada por (Dica: integre a expressão acima por todas as frequências angulares)

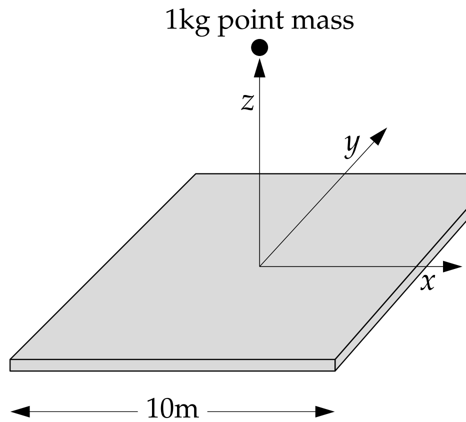
$$W = \frac{k_B^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx.$$

b) Escreva um programa que calcula a integral nessa expressão. Explique qual método você usou e quão preciso é o seu método.

c) Mesmo antes de Planck introduzir sua teoria de radiação, em torno da virada do século 20, era conhecido que W é dado por pela lei de Stefan: $W = \sigma T^4$, onde σ é a constante de Stefan–Boltzmann. Utilize o valor da integral calculado no item anterior para estimar o valor da constante de Stefan–Boltzmann (em unidade SI) com três dígitos significativos. Compare seu resultado com o valor conhecido e verifique se o resultado é satisfatório. (Dica: a integral a ser calculada vale aproximadamente 6.5).

Problema 3: Atração gravitacional de uma folha uniforme

Uma folha quadrada uniforme de metal está flutuando sem se mover no espaço:



A folha tem 10 m de lado e espessura desprezível. A sua massa é de 10 toneladas.

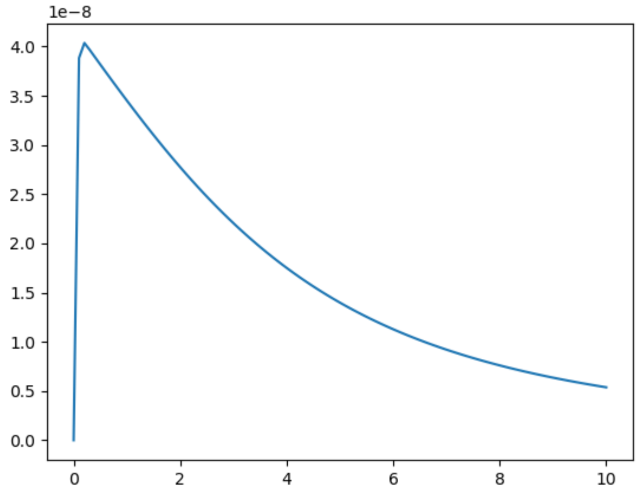
a) Considere a força gravitacional devido a placa sentida por um ponto de massa 1 kg, situado a uma distância z do centro do quadrado, em uma direção perpendicular a folha, como mostrado acima. Mostre que a componente da força ao longo do eixo z é

$$F_z = G\sigma z \iint_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

onde $G = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ é constante gravitacional de Newton e σ é a massa por unidade de área da folha.

b) Escreva um programa para calcular e plotar a força em função de z de $z = 0$ até $z = 10\,\mathrm{m}$. Para a integral dupla, use (dupla) quadratura gaussiana, seguindo a Eq. (5.82), com 100 pontos de amostra ao longo de cada eixo.

c) Você deve encontrar uma curva suave, exceto para valores bem pequenos de z, onde a força deve cair repentinamente para zero. Esta queda não é um efeito real, mas um artefato do modo como foi feito o cálculo. Explique brevemente de onde vem este artefato, e sugira uma estratégia para resolvê-lo, ou pelo menos reduzir seu tamanho. (Dica: nas condições dadas, você deve obter um gráfico similar ao mostrado abaixo)



Este cálculo pode ser pensado como um modelo para a atração gravitacional de uma galáxia. A maior parte da massa em uma galáxia espiral (como a nossa própria Via Láctea) está localizada em um plano fino que passa pelo centro da galáxia, e a atração gravitacional exercida por este plano sobre corpos fora da galáxia pode ser calculada usando os métodos que empregamos aqui.