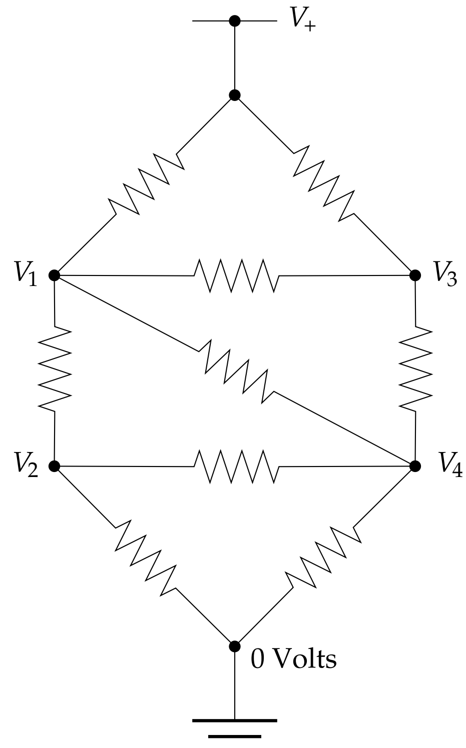
Física Computacional I

Lista de Exercícios VII - Data para entrega: 03/11/2020

Problema 1: Circuito de resistores

Considere o seguinte circuito de resistores:



Todos os resistores têm a mesma resistência R. A voltagem no topo é $V_+ = 5\,\mathrm{V}$. Quais são as outras 4 voltagens? V_1 até V_4?

Para responder a essa questão utilize as lei de Ohm e a lei de Kirchhoff. Por exemplo, para a junção na voltagem V_1, temos

$$\frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_3}{R} + \frac{V_1 - V_4}{R} + \frac{V_1 - V_+}{R} = 0,$$

ou, de forma equivalente

$$4V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = V_+.$$

a) Escreva equações similares para as outras junções para as outras três voltagens desconhecidas. Caso não tenha ainda estudado circuitos, você pode utilizar o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_+ \\ 0 \\ V_+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Escreva um programa que resolve o sistema obtido acima, usando a eliminação de Gauss e então determine as voltagens.

c) Compare sua solução com a obtida usando a função solve do numpy.linalg.

Problema 2:

a) Modifique o seu programa de eliminação de Gauss para incluir o método de pivotização, ou escreva um novo programa que inclua eliminação de Gauss e pivotização. Use-o para resolver os sistemas:

$$\begin{gathered} 2w + x + 4y + z = -4 \\ 3w + 4x - y - z = 3 \\ w - 4x + y + 5z = 9 \\ 2w - 2x + y + 3z = 7 \end{gathered}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Problema 3: Decomposição LU

Neste exercício você vai escrever seu próprio programa para resolver equações simultâneas usando o método da decomposição LU.

a) Partindo do programa de eliminação de Gauss disponível no SIGAA, escreva uma função no Python que calcula a decomposição LU de uma matriz. O cálculo é o mesmo da eliminação de Gauss, exceto que você deve extrair os elementos apropriados da matriz em cada passo do cálculo e, em seguida, deve usá-los para montar a matriz diagonal inferior **L**. Teste sua função calculando a decomposição LU da matriz **A** obtida escrevendo o seguinte sistema em forma matricial,

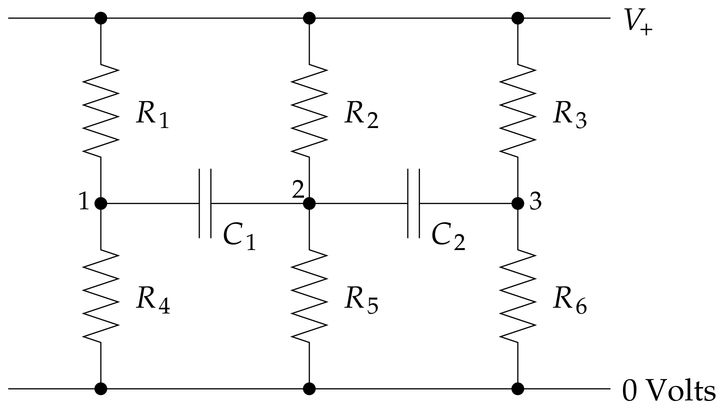
$$\begin{gathered} 2w + x + 4y + z = -4 \\ 3w + 4x - y - z = 3 \\ w - 4x + y + 5z = 9 \\ 2w - 2x + y + 3z = 7. \end{gathered}$$

Então, multiplique as matrizes **L** e **U** obtidas e recupere a matriz original.

b) Depois que você obtiver uma função que obtém a decomposição LU, escreva um programa para resolver o sistema acima usando o método descrito no Newman (ver arquivo 'Chapter 6' no SIGAA). Também resolva este sistema usando a função `solve` do pacote `numpy`, e verifique que a solução encontrada é igual a fornecida pelo seu programa.

Resposta: y = (-2, 3.6, -2, 1); x=(2, -1, -2, 1)

Problema 4: Um problema envolvendo circuito mais complicado:



A voltagem V_+ é dependente do tempo na forma $V_+ = x_+ e^{i\omega t}$com x_+ sendo uma constante. Os resistores no circuito podem ser tratados usando a lei de Ohm da maneira usual. Para os capacitores a carga Q e a voltagem V através deles estão relacionadas pela lei da capacitância $Q = CV$, onde C é a capacitância. Diferenciando ambos os lados dessa expressão em relação ao tempo, podemos obter a corrente I fluindo através do capacitor:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}.$$

a) Considerando que as voltagens nos pontos 1, 2, e 3 são da forma $V_1 = x_1 e^{i\omega t}$, $V_2 = x_2 e^{i\omega t}$, e $V_3 = x_3 e^{i\omega t}$, aplique a lei de Kircchoff em cada um dos três pontos, juntamente com as leis de Ohm e da capacitância e mostre que as constantes x_1, x_2, e x_3 satisfazem as equações (opcional: +0.1)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + i\omega C_1\right)x_1 - i\omega C_1 x_2 &= \frac{x_+}{R_1},\\
-i\omega C_1 x_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + i\omega C_1 + i\omega C_2\right)x_2 - i\omega C_2 x_3 &= \frac{x_+}{R_2},\\
-i\omega C_2 x_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + i\omega C_2\right)x_3 &= \frac{x_+}{R_3}.
\end{aligned}$$

b) Escreva um programa que resolve as equações acima, ou seja determine x_1, x_2, e x_3 quando

$$\begin{aligned}
&R_1 = R_3 = R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega},\\
&R_2 = R_4 = R_6 = 2\,\mathrm{k\Omega},\\
&C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_2 = 0.5\,\mu\mathrm{F},\\
&x_+ = 3\,\mathrm{V}, \qquad \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}.
\end{aligned}$$

Observe que a matriz para esse problema tem elementos complexos. Você pode usar a função solve da biblioteca numpy para resolver este problema (esta função aceita valores complexos).