Física Computacional I

Lista de Exercícios X - Data para entrega: 04/12/2020

Problema 1: O pêndulo forçado

Um pêndulo como o do exercício 8.6 pode ser forçado, por exemplo, por uma pequena força horizontal oscilatória que atua sobre a massa. Então a equação de movimento para o pêndulo se torna

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta + C\cos\theta\sin\Omega t,$$

onde C e Ω são constantes.

a) Escreva um programa para resolver esta equação para θ em função do tempo com $\ell = 10\,\mathrm{cm}$, $C = 2\,\mathrm{s}^{-2}$ e $\Omega = 5\,\mathrm{s}^{-1}$ e faça um gráfico de θ em função do tempo de $t = 0$ até $t = 100\,\mathrm{s}$. Inicie o pêndulo do repouso com $\theta = 0$ e $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$.

b) Agora mude o valor de Ω, enquanto C é mantido constante, para encontrar um valor para o qual o pêndulo entra em resonância com a força externa e oscila fortemente de um lado para o outro. Faça um gráfico deste caso também.

Problema 2: Osciladores harmônicos e anarmônicos

O oscilador harmônico simples aparece em muitos problemas de física, como em mecânica, eletricidade e magnetismo, matéria condensada, dentre outras áreas. Considere a equação padrão do oscilador

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x.$$

a) Usando os métodos descritos anteriormente, torne esta equação de segunda ordem em duas equações acopladas de primeira ordem. Então escreva um programa para resolver elas para o caso com $\omega = 1$ no intervalo de $t = 0$ a $t = 50$. Uma equação de segunda ordem requer duas condições iniciais, uma para x e outra para sua derivada. Para este problema, use $x = 1$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ como condições iniciais. Faça seu programa gerar um gráfico mostrando o valor de x em função do tempo.

b) Agora aumente a amplitude das oscilações fazendo o valor inicial de x maior—por exemplo $x = 2$—e confirme que o período das oscilações permanece de modo geral o mesmo.

c) Modifique seu programa para resolver a equação do movimento para um oscilador anarmônico descrito pela equação

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x^3.$$

Novamente use $\omega = 1$ e condições iniciais $x = 1$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ e faça um gráfico do movimento do oscilador. Novamente aumente a amplitude. Você deve observar que o oscilador oscila mais rápido para amplitudes maiores. (Você pode tentar baixar as amplitudes também se quiser, o que deve reduzir a frequência de oscilação).

d) Modifique seu programa para que ao invés de plotar x contra t, ele plote $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ contra x, ou seja, a "velocidade" do oscilador contra sua "posição." Este gráfico é chamado de um gráfico de *espaço de fase*.

e) O *oscilador de van der Pol*, que aparece em circuitos eletrônicos e em física de laser, é descrito pela equação

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \mu(1-x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0.$$

Modifique seu programa para resolver esta equação de $t = 0$ até $t = 20$ e em seguida faça um gráfico do espaço de fase de um oscilador de van der Pol com $\omega = 1$, $\mu = 1$, e condições iniciais $x = 1$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$. Tente também usar $\mu = 2$ e $\mu = 4$ (ainda com $\omega = 1$). Se assegure de usar um intervalor de tempo h pequeno o bastante para conseguir um gráfico do espaço de fase suave e preciso.

Problema 3: Trajetória com resistência do ar

Muitos problemas elementares de mecânica lidam com a física de objetos que se movem ou voam pelo ar, mas quase sempre eles ignoram a resistência do ar, para tornar os problemas solúveis analiticamente. Se nós estamos usando um computador, entretanto, nós não precisamos de equações solúveis.

Considere, por exemplo, uma bala de canhão esférica disparada (com um ângulo θ com relação a horizontal) de um canhão posicionado no nível do solo. A resistência do ar sobre uma esfera que se move é uma força com sentido oposto ao do movimento e com magnitude

$$F = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2,$$

onde R é o raio da esfera, ρ é a densidade do ar, v é a velocidade, e C é o chamado *coeficiente de arrasto* (uma propriedade da forma do objeto que se move, neste caso uma esfera).

a) Partindo da segunda lei de Newton, $F = ma$, mostre que as equações do movimento para as posições (x, y) da bala de canhão são

$$\ddot{x} = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \qquad \ddot{y} = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2},$$

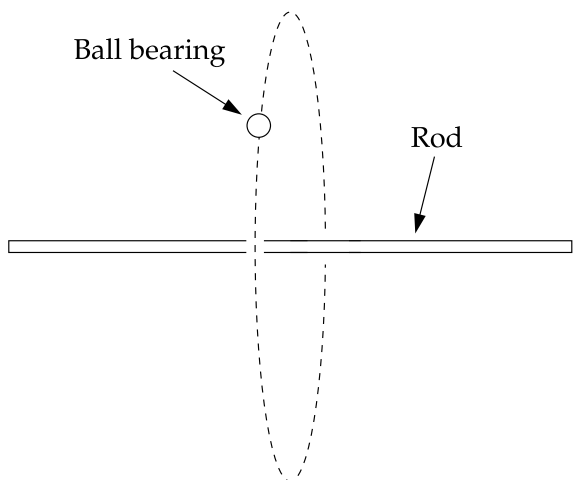
onde m é a massa da bala de canhão, g é a aceleração devido a gravidade, e $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ são a primeira e segunda derivadas de x com respeito ao tempo.

b) Transforme estas duas equações de segunda ordem em quatro equações de primeira ordem usando os métodos aprendidos, e então escreva um programa que resolve as equações do movimento de uma bala de canhão com massa 1 kg e raio 8 cm, disparada com um ângulo de 30° com relação a horizontal com velocidade inicial $100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. A densidade do ar é $\rho = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ e o coeficiente de arrasto para a esfera é $C = 0.47$. Faça um gráfico da trajetória da bala de canhão (ou seja, um gráfico de y em função de x).

c) Quando ignoramos a resistência do ar, a distância viajada pelo projétil não depende de sua massa. Na vida real, entretanto, a massa certamente faz diferença. Use seu programa para estimar a distância total horizontal viajada pela bala de canhão acima, e então experimente com o programa para determinar se a bala de canhão viaja mais longe quando for mais pesada ou quando for mais leve. Você pode, por exemplo, plotar uma série de trajetórias para balas de canhão de massas diferentes, ou você pode fazer um gráfico da distância viajada em função da massa. Descreva brevemente o que você descobrir.

Problema 4: Lixo espacial

Uma haste (rod) pesada de aço e um rolamento de esferas (ball bearing) esférico, descartados por uma espaçonave de passagem, estão flutuando em gravidade zero e o rolamento de esferas está orbitando a haste sob efeito de sua atração gravitacional:



Por simplicidade nós vamos assumir que a haste tem seção transversal negligível e que é pesada o bastante para não se mover significativamente, e que o rolamento esférico está orbitando o ponto médio da haste em um plano perpendicular a haste.

a) Tratando a haste como uma linha de massa M e comprimento L e o rolamento de esferas como uma massa pontual m, mostre que a força atrativa F sentida pelo rolamento de esferas na direção voltada para o centro da haste é dada por

$$F = \frac{GMm}{L}\sqrt{x^2+y^2}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e x e y são as coordenadas do rolamento esférico no plano perpendicular a haste. A integral pode ser calculada analiticamente (não é preciso mostrar isto) e fornece

$$F = \frac{GMm}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+L^2/4)}}.$$

Em seguida, mostre que as equações do movimento para as posições x, y do rolamento esférico no plano xy são

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{x}{r^2\sqrt{r^2+L^2/4}}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{y}{r^2\sqrt{r^2+L^2/4}},$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

b) Converta estas duas equações de segunda ordem em quatro de primeira ordem usando as técnicas vistas. Então, trabalhando em unidades onde $G = 1$, escreva um programa para resolvê-las para $M = 10$, $L = 2$, com condições iniciais $(x, y) = (1, 0)$ com velocidade $+1$ na direção y. Calcule a órbita de $t = 0$ até $t = 10$ e faça um gráfico desta, ou seja, um gráfico de y versus x. Você deve encontrar que o rolamento esférico não tem uma órbita circular nem elíptica (como um planeta), mas uma órbita de precessão, porque a força atrativa não é uma força do tipo $1/r^2$, como a que surge quando um planeta orbita o Sol.