Física Computacional I

Lista de Exercícios VI - Data para entrega: 23/10/2020

Problema 1: Raízes de um polinômio

Considere o polinômio de sexta ordem abaixo

$$P(x) = 924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 + 420x^2 - 42x + 1.$$

Não existe uma fórmula geral para determinar as seis raízes desse polinômio, mas podemos determiná-las facilmente com o auxílio do computador.

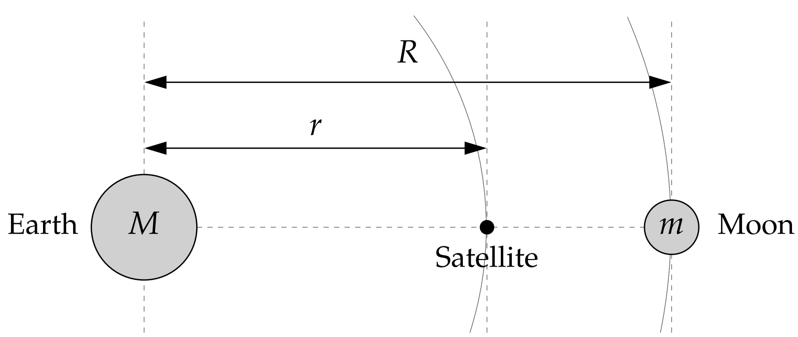
a) Faça um gráfico de $P(x)$ de $x = 0$ até $x = 1$ e, por inspeção, determine aproximadamente as seis raízes do polinômio.

b) Escreva um programa que determina as seis raízes até a décima casa decimal de precisão usando o método de Newton.

O polinômio desse exemplo é justamente o sexto polinômio de Legendre, mapeado no intervalo de 0 até 1 (vocês irão estudar o polinômio de Legendre mais a frente no seu curso).

Problema 2: O ponto de Lagrange

Existe um ponto mágico entre a Terra e a Lua, chamado de ponto de Lagrange L_1, no qual um satélite irá orbitar a Terra em perfeita sincronia com a Lua, estando sempre entre os dois. Isso funciona porque as forças devido a Terra e a Lua se combinam para criar uma força centrípeta que mantém o satélite em sua órbita. Aqui segue um esquema da situação:



a) Considerando órbitas circulares e que a massa da Terra é muito maior que as massas da Lua e do satélite, mostre que a distância r do centro da Terra para o ponto L_1 satisfaz

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(R-r)^2} = \omega^2 r,$$

onde M e m são as massas da Terra e da Lua respectivamente, G é a constante gravitacional de Newton e ω é a velocidade angular da Lua e do satélite.

b) A equação acima é um polinômio de quinta ordem em r (também chamada de equação quíntica). Tal equação não pode ser resolvida exatamente de forma fechada, mas pode ser resolvida numericamente. Escreva um programa que determina o valor de r para o ponto L_1. Calcule a solução com pelo menos 4 dígitos significativos de precisão.

   Os valores dos vários parâmetros são::

$$
\begin{aligned}
G &= 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}},\\
M &= 5.974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg},\\
m &= 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg},\\
R &= 3.844 \times 10^{8}\,\mathrm{m},\\
\omega &= 2.662 \times 10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}.
\end{aligned}
$$

   Você deverá escolher um valor inicial apropriado para r, ou dois valores iniciais se quiser usar o método da secante.

Problema 3: A temperatura de uma lâmpada

Uma lâmpada incandescente é um dispositivo simples – ela contém um filamento, usualmente feito de tungstênio, aquecido por uma corrente elétrica até que se torne quente o suficiente para radiar termicamente. Essencialmente, toda a potência de tal lâmpada é radiada como energia eletromagnética, mas parte da radiação não está em comprimentos de onda visíveis, sendo inútil para propósitos de iluminação.

Vamos definir a eficiência de uma lâmpada como sendo a fração da energia radiada que se localiza na região visível. É uma boa aproximação assumir que a radiação do filamento numa temperatura T obedece a lei de Planck, o que significa que a potência radiada por unidade de comprimento de onda λ obedece

$$I(\lambda) = 2\pi A h c^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1},$$

onde A é a área superficial do filamento, h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz e k é a constante de Boltzmann. Os comprimentos de onda visíveis vão de $\lambda_1 = 390\,\mathrm{nm}$ até $\lambda_2 = 750\,\mathrm{nm}$, de modo que a energia total radiada na região do visível é $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ e a energia total, incluindo todos comprimentos de onda, é $\int_0^\infty I(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$. Dividindo uma expressão pela outra (e usando a expressão para $I(\lambda)$ dada), nós obtemos que eficiência η da lâmpada é dada por:

$$\eta = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{-5}/(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{-5}/(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)\,\mathrm{d}\lambda},$$

onde várias constantes e a área A foram canceladas. Fazendo a substituição $x = hc/\lambda k_B T$, esta expressão também pode ser escrita como

$$\eta = \frac{\int_{hc/\lambda_2 k_B T}^{hc/\lambda_1 k_B T} x^3/(e^x - 1)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)\,\mathrm{d}x} = \frac{15}{\pi^4} \int_{hc/\lambda_2 k_B T}^{hc/\lambda_1 k_B T} \frac{x^3}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x,$$

onde usamos o valor conhecido da integral no denominador (esta integral foi resolvida no problema 2 da lista 3).

a) Escreva uma função no Python que recebe a temperatura T como argumento e calcula o valor de η para a temperatura com a fórmula acima. Esta integral não pode ser resolvida analiticamente, mas você pode resolver ela numericamente usando o método de sua escolha. (Por exemplo, quadratura Gaussiana com 100 pontos de amostragem funciona bem). Use sua função para fazer um gráfico de η em função da temperatura entre 300 K e 10 000 K. Você deve encontrar que há uma temperatura intermediária na qual a eficiência é máxima.

b) Calcule a temperatura de eficiência máxima da lâmpada com uma precisão de 1 K, usando o método da seção áurea. (Dica: Uma precisão de 1 K é equivalente a algumas partes em dez mil neste caso. Para obter este tipo de precisão nos seus cálculos, você precisará usar valores para as constantes fundamentais que são suficientemente precisas, ou seja, você precisa usar valores com precisão de diversos dígitos significativos.)

c) É prático trabalhar com filamentos de tungstênio na temperatura encontrada? Se não, por que?