Física Computacional I

Lista de Exercícios II - Data de entrega: 18/09/2020

Problema 1: Considere a integral

$$E(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Escreva um programa para calcular $E(x)$ para valores de x entre 0 e 3, usando um passo de 0.1. Escolha o método de sua preferência para calcular a integral e use um número apropriado de fatias.

b) Quando você estiver convencido de que seu programa está funcionando, extenda ele para que faça um gráfico de $E(x)$ em função de x.

Note que não há nenhum método para realizar esta integral analiticamente, então abordagens numéricas são o único modo possível.

Problema 2: O limite da difração em um telescópio

Nossa habilidade para ver detalhes em observações astronômicas é limitada pela difração da luz nos telescópios. As luzes vindo das estrelas podem ser tratadas efetivamente como vindas de uma fonte pontual no infinito. Quando a luz, com comprimento de onda λ, passa através da abertura circular de um telescópio (que consideraremos tendo raio unitário) e é focalizada no plano focal, produz não um ponto e sim um padrão de difração circular consistindo de um ponto central cercado por uma série de anéis concêntricos. A intensidade da luz nesse padrão de difração é dada por

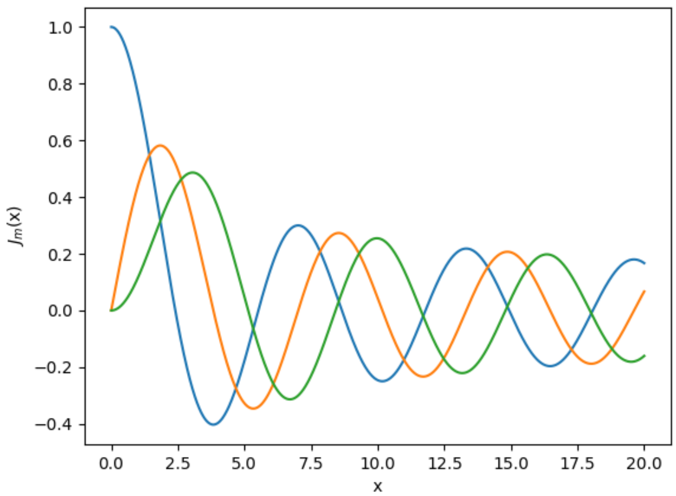
$$I(r) = \left(\frac{J_1(kr)}{kr}\right)^2,$$

onde r é a distância no plano focal do centro do padrão de difração, $k = 2\pi/\lambda$, e $J_1(x)$ é a função de Bessel. As funções de Bessel $J_m(x)$ são dadas por

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m\theta - x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

onde m é um inteiro não negativo e $x \geq 0$.

a) Escreva uma função `J(m,x)` que calcula o valor de $J_m(x)$ usando a regra de Simpson com $N = 1000$ pontos. Utilize sua função para fazer um gráfico das funções de Bessel J_0, J_1 e J_2 em função de x, de $x = 0$ até $x = 20$. Coloque todas as curvas em um mesmo gráfico. Dica: você deve obter um gráfico similar ao mostrado abaixo.



b) Escreva um segundo programa que faça um gráfico de densidade (no pylab você pode usar a função imshow) do padrão de difração circular de uma fonte de luz com $\lambda = 500\,\text{nm}$, em uma região quadrada no plano focal usando as fórmulas acima. Sua figura deve cobrir os valores r de zero até $1\,\mu\text{m}$.

Dica 1: Pode ser útil saber que $\lim_{x\to 0} J_1(x)/x = \frac{1}{2}$. Dica 2: O ponto central no padrão de difração é tão brilhante que pode ser difícil ver os anéis em torno dele na tela do computador. Se você tiver problemas com isso, uma maneira de simples de resolver o problema é usar um gráfico de densidade com cores. O esquema "`hot`" funciona bem. Para uma solução mais sofisticada do problema, a função `imshow` tem um argumento adicional `vmax` que permite você especificar o valor que corresponde ao ponto mais brilhante no gráfico. Por exemplo, se você fizer "`imshow(x,vmax=0.1)`", então elementos em `x` com valores maiores ou iguais a 0.1 irão produzir a cor mais brilhante na tela. Diminuindo o valor `vmax`, você pode reduzir a faixa total de valores entre os brilhos mínimos e máximos e então aumentar a sensitividade no gráfico tornando os detalhes mais visíveis. Existe também um argumento `vmin` que pode ser usado para definir o valor que corresponde a cor menos brilhante. Para esse exercício o valor `vmax=0.01` parece funcionar bem.

Problema 3: Escreva um programa, ou modifique um anterior, para mais uma vez calcular o valor da integral $\int_0^2 (x^4 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$, usando a regra do trapézio com 20 fatias. Porém, dessa vez faça o programa imprimir uma estimativa do erro do resultado, calculado usando o método "prático" discutido em aula. Para fazer isto, você precisa avaliar a integral duas vezes, uma vez com $N_1 = 10$ fatias e depois novamente com $N_2 = 20$ fatias. Então a equação

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3}(I_2 - I_1),$$

te dá o erro. Como o erro calculado deste modo se compara com erro calculado através da diferença entre o valor numérico e o valor correto 4.4? Por que os dois não concordam perfeitamente?

Problema 4: Considere a integral

$$I = \int_0^1 \sin^2 \sqrt{100x}\, \mathrm{d}x$$

Escreva um programa que usa o método da regra do trapézio adaptativa da seção 5.3 e Eq. (5.34) para calcular o valor desta integral até uma precisão aproximada de $\epsilon = 10^{-6}$ (ou seja, correto até seis dígitos após o ponto decimal). Comece com uma única fatia de integração e aumente N depois para dois, quatro, oito e assim por diante. Faça seu programa escrever o número de fatias, a sua estimativa da integral e a sua estimativa do erro da integral, para cada valor do número de fatias n, até que a precisão alvo seja atingida. (Dica: Você deve encontrar que o resultado está em torno de $I = 0.45$.)