Física Computacional II

Lista de Exercícios I - Data para entrega: 29/01/2021 - Valor: 2,0

Problema 1: Escreva um programa que calcula a Transformada Discreta de Fourier para as seguinte funções periódicas. Utilize $N = 1000$ amostras igualmente espaçadas e faça gráficos das amplitudes dos coeficientes de Fourier:

a) Um único ciclo de uma onda quadrada de amplitude 2.
b) Uma onda modulada senoidal $y_n = \sin(\pi n/N)\sin(10\pi n/N)$

Se desejar pode utilizar a função fornecida no livro do Mark Newman (que pode ser encontrada no SIGAA) como base.

Problema 2: Detectando a periodicidade de uma sinal

O arquivo `sunspots.txt`, disponível no SIGAA, contém o número observado de manchas solares em cada mês desde janeiro de 1749. O arquivo contém duas colunas, a primeira representando o mês e a segunda o número de manchas solares no respectivo mês.

a) Escreva um programa que lê os dados do arquivo e faz o gráfico do número de manchas solares em função do tempo. Você deve observar que o número de manchas solares tem flutuações regulares ao longo do tempo. Faça uma estimativa do comprimento do ciclo de flutuações em meses.
b) Modifique seu programa para calcular a transformada de Fourier dos dados de mancha solar e então faça um gráfico da magnitude dos coeficientes de Fourier ao quadrado ($|c_k|^2$) em função de k— também chamado de *espectro de potências* do sinal de manchas solares. Você deve ver que existe um pico bem pronunciado para um valor de k. O aparecimento desse pico nos diz que existe uma frequência na série de Fourier que tem uma amplitude muito maior que as outras, o que quer dizer que há um termo senoidal grande com esta freqûencia. Este termo corresponde a onda periódica que pode ser vista no sinal original.
c) Determine qual é esta frequência e seu correspondente período. Você deve encontrar que o período corresponde aproximadamente ao comprimento do ciclo estimado no item anterior.

Este tipo de análise de Fourier é um método sensível para detectar periodicidade em sinais. Mesmo em casos onde não é claro para o olho que existe uma componente periódica no sinal, esta pode ser encontrada usando uma transformada de Fourier.

Problema 3: Transformada de Fourier de instrumentos musicais

No SIGAA você irá encontrar dois arquivos: `piano.txt` e `trumpet.txt`, os quais contêm dados representando a forma de onda de uma nota musical simples, tocada respectivamente em um piano e em um trompete.

a) Escreva um programa que lê os dados desses arquivos, faz um gráfico deles, aí calcula sua transformada discreta de Fourier e finalmente faz um gráfico da magnitude dos primeiros 10.000 coeficientes. Observe que pode ser necessário usar a fft ("Fast Fourier Transform"), porque existem amostras demais nos arquivos para fazer a transformada usando o procedimento normal. Discuta brevemente o que você pode concluir sobre o som do piano e do trompete a partir dos gráficos dos coeficientes de Fourier.

b) Ambas formas de onda foram gravadas por um instrumento padrão com 44100 amostras por segundo e os dois instrumentos estavam tocando a mesma nota quando a gravação foi efetuada. Da sua análise de Fourier, calcule qual nota os instrumentos estavam tocando. (Dica: a nota dó-central tem frequência de 261 Hz.)

Problema 4: Filtragem de Fourier e suavização

No SIGAA, você encontrará um arquivo chamado `dow.txt`. Ele contém o valor de fechamento diário para cada dia útil a partir de 2006 até o final de 2010, da Dow Jones Industrial Average, que é uma medida dos preços médios no mercado de ações dos EUA.

Escreva um programa que faça o seguinte:

a) Leia os dados a partir de `dow.txt` e plote-os em um gráfico.

b) Calcule os coeficientes da Tranformada Discreta de Fourier dos dados usando a função `rfft` de `numpy.fft`, que produz uma série de números complexos $\frac{1}{2}N+1$.

c) Agora, configure todos, exceto os primeiros 10% dos elementos desta matriz para zero (ou seja, configure os últimos 90% para zero e mantenha os valores dos primeiros 10%).

d) Calcule a Transformada Inversa de Fourier, usando inclusive os zeros, com a função `irfft`, e plote-os junto com os dados originais em um gráfico. Você pode precisar variar as cores das duas curvas para garantir que ambas apareçam no gráfico. Comente o que você vê. O que está acontecendo quando você coloca, ou seja, configura os coeficientes de Fourier para zero?

e) Modifique seu programa para que ele configure todos exceto os primeiros 2% dos coeficientes para zero, e rode ele novamente.

Problema 5: (Faça o Problema 4 antes de tentar resolver este). A função $f(t)$ representa uma onda quadrada com amplitude 1 e frequência 1 Hz:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{Se } \lfloor 2t \rfloor \text{ for par,} \\ -1 & \text{Se } \lfloor 2t \rfloor \text{ for ímpar,} \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ significa x arredondado para o próximo inteiro mais baixo. Vamos tentar suavizar esta função usando a transformada de Fourier, como fizemos no exercício anterior. Escreva um programa que cria um vetor com $N = 1000$ elementos contendo mil amostras igualmente espaçadas de um único ciclo dessa onda quadrada. Calcule a transformada discreta de Fourier da matriz. Agora, ajuste todos os coeficientes de Fourier para zero, menos os 10 primeiros, e em seguida inverta novamente a transformada de Fourier e recupere o sinal suavizado. Faça o gráfico do resultado e, nos mesmos eixos, mostre a onda quadrada original também. Você deve encontrar que o sinal não é simplesmente suavizado, há artefatos, oscilações nos resultados. Explique brevemente sua origem

Artefatos iguais a estes surgem quando os coeficientes de Fourier são descartados em esquemas de compressão de áudio e vídeo, como os descritos na seção 7.3.1 do livro do Mark Newman e são a principal fonte de imperfeição em sons e imagens digitalmente compactados.

Problema 6: Comparação de DFT e DCT

Este exercício será mais fácil se você já fez o Problema 4.

O problema 4 analisou os dados que representam a variação da Dow Jones Industrial Average, ao longo do tempo, denominada de "Dow". O período de tempo particular estudado nesse exercício foi especial em um sentido: o valor do Dow no final do período era quase o mesmo do início, então, a grosso modo, a função era periódica.

Nos SIGAA existe outro arquivo chamado `dow2.txt`, que também contém os dados do Dow, mas por um período de tempo diferente, de 2004 a 2008. Durante este período o valor mudou consideravelmente de um nível inicial, de cerca de 9000 para um nível final em torno de 14000.

a) Escreva um programa semelhante ao do problema 4, em que você lê os dados do arquivo `dow2.txt` e plota eles em um gráfico. Em seguida, suavize os dados calculando a transformada de Fourier, ajustando todos, exceto os primeiros 2% dos coeficientes, para zero, e inverta a transformada novamente. Plote o resultado em um gráfico junto com os dados originais. Como no problema 4, você deve ver que os dados são suavizados, mas agora haverá um artefato adicional. No início e no final do gráfico você deve ver grandes desvios do valor real na função suavizada. Isso ocorre porque a função é obrigatoriamente periódica - seu último valor deve ser igual ao primeiro - por isso, precisa se desviar substancialmente do valor correto para que as duas extremidades da função se encontrem. Em algumas situações (incluindo esta) este resultado não é satisfatório. Se nós queremos usar a transformada de Fourier para suavizar, preferimos que não sejam introduzidos artefatos desse tipo.

b) Modifique seu programa para repetir a mesma análise usando a transformada discreta de cosseno. Você pode usar as funções do `dcst.py` para realizar as transformadas se preferir. Novamente discarte todos exceto os primeiros 2% dos coeficientes, inverta a transformada e faça um gráfico dos resultados. Você deve ver uma melhora significativa, com menos distorções da função nos fins do intervalo. Isto ocorre porque, como discutido em aula, a transformada de cosseno não força que o valor da função seja o mesmo nas duas extremidades.

É por causa dos artefatos introduzidos pela periodicidade estrita da TDF que a transformada de cosseno é preferida em muitas aplicações tecnológicas, como compressão de áudio. Os artefatos podem degradar a qualidade do áudio comprimido e a transformada de cosseno geralmente fornece melhores resultados.

Entretanto, a transformada de cossenos não está completamente livre de artefatos. É verdade que ela não força a função a ser periódica, mas ela força que o gradiente seja zero nas extremidades do intervalo (o que não acontece com a transformada de Fourier usual). Você talvez consiga ver isto em seus cálculos da parte (b) acima. Se você olhar com cuidado para a função suavizada você deve ver que sua inclinação é horizontal no começo e no fim do intervalo. Esta distorção introduzida é menor do que a introduzida na parte (a), mas ainda assim está presente. Para reduzir este efeito, esquemas de compressão de áudio usualmente usam blocos de amostras que se superpõem, de modo que as extremidades dos blocos, onde os piores artefatos se concentram, não precisam ser usadas.