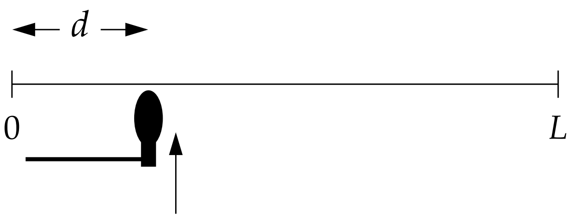
Física Computacional II

Lista de Exercícios III - Data para entrega: 26/02/2021 - Valor: 0,6

Problema 1: A solução FTCS da equação de onda

Considere uma corda de piano de comprimento L, inicialmente em repouso. No tempo $t = 0$, a corda é atingida pelo martelo de piano a uma distância d do fim da corda:



A corda vibra como resultado de ter sido atingida, exceto nos seus limites, $x = 0$ e $x = L$, onde é mantida fixa.

a) Escreva um programa que usa o método FTCS para resolver o conjunto completo de equações simultâneas de primeira ordem, Eq. (9.28) do Newman, para o caso $v = 100\,\mathrm{ms}^{-1}$, com a condição inicial que $\phi(x) = 0$ é zero em toda corda mas a velocidade $\psi(x)$ é não-nula, com perfil

$$\psi(x) = C\frac{x(L-x)}{L^2}\exp\left[-\frac{(x-d)^2}{2\sigma^2}\right],$$

onde $L = 1\,\mathrm{m}$, $d = 10\,\mathrm{cm}$, $C = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$ e $\sigma = 0.3\,\mathrm{m}$. Você também vai precisar escolher um passo de tempo h. Uma escolha razoável é $h = 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

b) Faça gráficos mostrando o perfil de $\phi(x)$ para diversos valores de t, até que instabilidades numéricas comecem a aparecer.

Problema 2: O método da relaxação para equações diferenciais ordinárias

Não há motivo para o método da relaxação só poder ser aplicado a solução de equações diferenciais com duas ou mais variáveis independentes. Ele também pode ser aplicado a aquelas com apenas uma variável independente, ou seja, a equações diferenciais ordinárias. Neste contexto, assim como em equações diferenciais parciais, esta é uma técnica para resolver problemas de condição de contorno. Estes são menos comuns em equações diferenciais ordinárias, mas existem—nós discutimos este tipo de problema em Física Computacional I.

Considere o problema que tratado no exemplo 8.8 da página 390 do Newman, no qual uma bola de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ é arremessada de uma altura $x = 0$ para cima e retorna ao solo ($x = 0$) dez segundos depois. O problema consiste em calcular a trajetória da bola, mas nós não podemos fazer isto usando o método usual de Runge–Kutta, porque não sabemos a velocidade inicial da bola. Uma abordagem consiste em achar a solução usando o método do tiro visto no curso passado. Outro método possível é o da relaxação.

Ignorando efeitos de atrito, a trajetória é a solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -g,$$

onde g é a aceleração devido a gravidade.

a) Substituindo a segunda derivada nesta equação por sua aproximação em diferenças finitas, derive um método da relaxação para resolver este problema em uma grade de pontos temporal, com separação h.

b) Fazendo as condições de contorno serem tais que $x = 0$ em $t = 0$ e $t = 10$, escreva um programa que encontre a altura da bola em função do tempo usando o método da relaxação, com 100 pontos, e faça um gráfico do resultado de $t = 0$ a $t = 10$. Rode o método da relaxação até que as respostas variem menos que 10^{-6} em cada ponto da grade, a cada iteração.

Note que, diferentemente do método do tiro, o método da relaxação não nos dá o valor da velocidade inicial necessária para conseguir a solução pedida. Ele apenas nos dá a própria solução, apesar de ser possível obter uma aproximação da velocidade inicial calculando uma derivada numérica da solução no tempo $t = 0$. No geral, porém, o método da relaxação é mais útil para resolver equações diferenciais ordinárias em que se quer conhecer os detalhes da solução, mas não as condições iniciais necessárias para consegui-la.