



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA

Gabriel Zuza Diniz

**O Escurecimento de Limbo via Modelagem de
Trânsitos e Inferência Bayesiana**

Natal - RN

Dezembro de 2021

Gabriel Zuza Diniz

O Escurecimento de Limbo via Modelagem de Trânsitos e Inferência Bayesiana

Monografia de Graduação apresentada ao
Departamento de Física do Centro de
Ciências Exatas e da Terra da Universidade
Federal do Rio Grande do Norte como re-
quisito parcial para a obtenção do grau de
bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Dias do Nascimento Jr.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Departamento de Física - DF

Natal - RN

Dezembro de 2021

Dedico esse trabalho a Ubirany Félix do Nascimento - Mestre Ubirany. Criador do repique de mão, que faleceu devido à Covid-19 durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

- Agradeço em primeiro lugar ao meu pai José Diniz Júnior, a minha mãe Rosiane Viana Zuza Diniz e a toda minha família que sempre esteve ao meu lado de forma incondicional.
- Agradeço também aos meus amigos do ensino médio por mais de uma década de amizade irrestrita.
- Ao Prof. José Dias do Nascimento Jr. que me orientou de forma brilhante desde do primeiro dia que o conheci tanto no escopo acadêmico quanto pessoal.
- Agradeço aos colegas do PET-Física que estiveram ao meu lado desde 2019. Em especial Júlia, Larissa e Menescal. E também àqueles de grupos PET de outros cursos da UFRN por termos enfrentamos juntos a organização insana do ENAPET XXIV. Em especial à Vitor, Bia e João do PET Engenharia Química.
- Agradeço aos meus amigos de curso ingressantes de 2018. Em especial à Augusto, Luigy, Ricardo, Letícia, Matheus, Chico e Lídia.
- Agradeço aos colegas de curso de Física de outros anos me receberam muito bem no curso. Principalmente à Rayff, Rafael, João e Pedro.
- Aos membros do Grupo de Estrutura e Evolução Estelar (GE³) pelas discussões e aprendizados, em especial à Edu, Ted e Wendell.
- Agradeço, por fim aos docentes que fizeram parte da minha formação de maneira notável. Em especial aos professores Márcio Assolin, Viviane Simioli, José Wilson, Eliardo Costa e Bruno Ricardo.

*“We are what we repeatedly do.
Excellence, then, is not an act but a habit.”*

- Aristotle

*“Art isn’t only a painting.
Art is anything that’s creative, passionate, and personal.
And great art resonates with the viewer, not only with the creator.
What makes someone an artist? I don’t think it has anything to do with a paintbrush. [...] Charlie Chaplin was an artist, beyond a doubt. So is Jonathan Ive, who designed the iPod.
You can be an artist who works with oil paints or marble, sure.
But there are artists who work with numbers, business models, and customer conversations.
Art is about intent and communication, not substances.
An artist is someone who uses bravery, insight, creativity, and boldness
to challenge the status quo. And an artist takes it personally.
Art is a personal gift that changes the recipient.
The medium doesn’t matter. The intent does.
Art is a personal act of courage, something one human does that creates change in another.”*

- Seth Godin

Resumo

Missões espaciais de busca por exoplanetas através da fotometria estão cada vez mais precisas e exigem um tratamento do escurecimento de limbo com maior acurácia e eficiência, e isto tem se mostrado um gargalo na modelização dos trânsitos de planetas descobertos. Neste contexto, os coeficientes de escurecimento de limbo produzem efeitos muitas vezes sutis nas curvas de luz e por isso são frequentemente degenerados com outros parâmetros da modelização. Nesse trabalho, estudamos 31 sistemas planeta-estrela a partir da análise da curva de luz obtida pelo satélite Kepler da NASA. Produzimos uma modelagem fotométrica do trânsito dos respectivos exoplanetas e aplicamos métodos de inferência Bayesiana para estimar um intervalo de credibilidade baseado no algoritmo de Monte Carlo via cadeia de Markov (MCMC). Obtivemos os coeficientes de escurecimento de limbo através dessa abordagem e estas determinações são consistentes com aquelas obtidas anteriormente com diferente parametrização. Nosso resultado com um número menor de iterações por cadeia apresenta acurácia similar, e da ordem de 10^{-2} para u_1 , além de explorar de forma mais focada a região de interesse dos parâmetros.

Palavras-chave: Exoplanetas, Escurecimento de Limbo, Método do Trânsito Planetário, Fotometria.

Abstract

Space missions to search for exoplanets by photometry have been improved in terms of precision and require a more accurate and efficient treatment of limb darkening coefficients, and this seems to be a bottleneck in modeling the transits of discovered planets. Limb darkening coefficients often have subtle effects on light curves and are therefore often degenerate with other modeling parameters. In this work, we study 31 planet-star systems from light curve analysis obtained by NASA's Kepler satellite. We produced modeling of the photometric transit for each individual exoplanet and we applied a Bayesian inference method to estimate the credible interval based on the Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithm. We obtained the darkening limb coefficients for all targets and those determinations are consistent with values obtained previously with different parameterization. Our result based on a smaller number of interactions per chain presents similar accuracy, of about 10^{-2} for u_1 . In addition, we explored in a more focused way the region of the parameter of interest.

Keywords: Exoplanets, Limb Darkening, Planetary Transit Method, Photometry.

Lista de Figuras

1.1	Número de manchas solares ao longo tempo. Dados: NASA	3
1.2	Diagrama Borboleta. Fonte: https://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml	3
1.3	Imagen do SOHO que pode-se ver a coroa solar e o vento solar. Fonte: NASA / SOHO	5
1.4	Fotosfera solar no dia 30 de janeiro de 2021, com escurecimento do limbo perceptível. Dados: NASA / SDO	6
1.5	Representação física do escurecimento de limbo. A linha tracejada indica a profundidade óptica $\tau = 1$. As setas representam a direção da linha de visada do observador. Enquanto as cores, nessa figura, representam de forma figurativa as temperaturas em forma de gradiente da mais quente (azul) para a mais fria (vermelho). Fonte: Muller (2016)[14]	7
1.6	Esquema de modelização do escurecimento de limbo Fonte: Mandel & Agol (2002) [11]	9
1.7	Esquema que representa a probabilidade de trânsito	14
1.8	Exemplo de uma curva de luz, ΔF representa a variação do fluxo ocultado pelo trânsito do planeta. Ver equação (4.2)	15
1.9	Detecções de exoplanetas acumuladas, por método. Fonte: NASA.	16

1.10	Métodos de detecção de exoplanetas. Os limites inferiores das linhas indicam massas dentro do alcance das medições presentes (linhas sólidas) e aquelas que podem ser esperadas nos próximos anos (tracejadas). A escala de massa (logarítmica) é mostrada à esquerda. O bloco ' <i>Miscellaneous</i> ' no canto superior direito são menos bem quantificadas em termos de massa. Setas sólidas mostram descobertas relevantes. Setas abertas indicam medições de sistemas detectados anteriormente Fonte: The Exoplanet Handbook [30]	17
2.1	Retrato de Bayes comumente encontrado em sites como wikipedia.com , que pode ter sido erroneamente atribuído.	20
3.1	Fit do contínuo para KIC 5357901. Preto: Contínuo. Vermelho: Trânsitos. Azul: Fit do contínuo	29
4.1	Esquema de modelização do trânsito Fonte: Mandel & Agol (2002) [11]	31
4.2	Esquema geométrico do parâmetro de impacto	32
4.3	Representação das equações (4.8), a área demarcada em cinza representa o espaço fisicamente válido entre u_1 e u_2	35
5.1	A esquerda, representação visual da direção proposta pelo Stretch Move. A direita, magnitudes máximas (Laranja) e mínimas (Amarelo) da proposta com $a = 2$	39
6.1	À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo determinados pelo MCMC deste trabalho. Para comparação, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelha).	43
6.2	Figura original de Muller <i>et al.</i> 2013 para comparação. Aqui para objetos de baixo parâmetro de impacto. À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo. Da mesma forma, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelha). Fonte: Muller <i>et al.</i> 2013 [27]	43

6.3	À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo determinados pelo MCMC, para nossa amostra alvo de alto parâmetro de impacto ($b > 0.8$). Para comparação, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelha). Fonte: Muller <i>et al.</i> 2013 [27]	44
6.4	Figura original de Muller <i>et al.</i> 2013. Para objetos de alto parâmetro de impacto ($b > 0.8$). À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo. Da mesma forma, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelho).	
A.1	Título: KIC do objeto. Painéis superiores: curvas de luz normalizadas e modelos da mediana da posteriori. Painéis inferiores: resíduo.	52
A.2	Continuação da figura (A.1)	53
A.3	Continuação da figura (A.1)	54
A.4	Continuação da figura (A.1)	55

Listas de Tabelas

3.1 KICs selecionados, temperaturas de Borucki <i>et al.</i> (2011) [38] e número de trânsitos.	27
A.1 Tabela com os resultados das estimativas dos parâmetros de trânsito para os 31 objetos e os respectivos intervalos de 1σ , no contexto Bayesiano	51

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Astrofísica Estelar	1
1.1.1 Magnetismo e Manchas Solares	2
1.1.2 Atmosfera Estelar	4
1.1.3 O escurecimento de Limbo	5
1.2 Exoplanetologia	11
1.2.1 Métodos de Detecção	13
1.2.2 O escurecimento de Limbo do ponto de vista do trânsito	17
2 Inferência Bayesiana	19
3 Seleção de Dados Fotométricos	25
3.1 A Missão espacial Kepler da NASA	25
3.2 Seleção de Objetos	26
3.3 Tratamento de Dados	28
4 Modelagem do Trânsito	30
4.1 Caso mais simples	30

4.2 O escurecimento de limbo	33
5 Métodos computacionais	36
5.1 Minimização pelo algoritmo de Downhill Simplex	36
5.2 Markov Chain Monte Carlo	37
5.3 Implementação do MCMC	37
5.4 Verossimilhança e Priors	39
6 Resultados e Conclusões	41
7 Perspectivas	45
APÊNDICES	49
A Resultados Complementares	50

Capítulo 1

Introdução

Esse capítulo será dedicado a contextualização histórica e teórica, além do embasamento físico sobre escurecimento de limbo em curvas de luz de exoplanetas em trânsito. Serão abordados conceitos fundamentais da astrofísica estelar, assim como especificidades da exoplanetologia, em adição a uma introdução ao paradigma Bayesiano, completando os pilares fundamentais para confecção desta monografia.

1.1 Astrofísica Estelar

A astrofísica estelar é a área da astronomia que se dedica a estudar a física das estrelas, desde a sua formação, as reações nucleares que são a fonte de energia, até a sua evolução e consequente trajetória evolutiva.

Estudar a física da evolução e da estrutura estelar é um desafio à parte. Diferentemente de outras áreas da ciência, na astrofísica não se pode montar um experimento a critério do cientista com foco determinado na análise. A astronomia é feita partindo de observações e cada vez mais segue a lógica *data-driven*, guiada por dados. Nesse sentido, mesmo considerando os primeiros registros não científicos da humanidade sobre o Sol, através de pinturas rupestres datadas em mais de 40 mil anos A.C. teríamos uma extensão de dados completamente insignificante quando comparada com a idade do Sol que se aproxima a 4.6 bilhões de anos. Assim, estudar a vida e evolução do Sol seria como entrar em uma floresta que possui sementes, mudas, árvores e troncos podres (assim como observamos astros jovens e velhos) e após observar por 5 segundos, tentar descrever o ciclo de vida de uma árvore, assim como questões dendrológicas. Essa analogia, muito

referenciada por astrônomos, representa bem o estudo da física estelar.

1.1.1 Magnetismo e Manchas Solares

As manchas solares são estruturas da mesma ordem de grandeza do diâmetro da Terra e observadas na fotosfera solar. Estas regiões parecem como manchas, ou pontos pretos em imagens e desenhos do Sol. Foram primordialmente observadas por Galileu Galilei com um telescópio que projetava a imagem do Sol. Galileu ao observar essas estruturas escuras no Sol, propôs que deveriam ser como nuvens do Sol. Essas manchas também foram observadas independentemente por Christoph Scheiner, mas para ele as manchas eram “satélites” do Sol, como a Lua para a Terra. Nesse contexto de disputa sobre a descoberta de manchas solares e da sua natureza e como Christoph Scheiner era padre jesuíta, a disputa que deveria ter apenas caráter científico baseado em evidências, acabou por envolver a inquisição contra as ideias heliocêntricas de Galileu. Hoje, sabemos que as manchas são constituídas por duas estruturas, uma localizada na região mais à borda e outra na região central da mancha. Essas regiões são chamadas de penumbra e umbra, respectivamente. As manchas são escuras e apesar de terem temperaturas próximas à 5000 K [1]. Estão em regiões com temperatura ligeiramente menor que o resto da fotosfera. Portanto, o que faz com que tenhamos a impressão que as manchas são escuras é a comparação com o resto na fotosfera, pois um gás a 5000 K ainda seria uma região brilhante.

Além disso, ao observar as manchas no tempo, integrados desde 1750, pode-se ver uma clara periodicidade na quantidade de manchas aparentes no Sol, variando entre picos e mínimos - como pode ser observado na figura (1.1). No momento da escrita desta monografia, o Sol se encontra próximo a um dos mínimos. Ao aplicar um método simples de determinação de periodização encontra-se dois valores para o esse ciclo, um de 11 anos e outro ciclo maior de 22 anos.

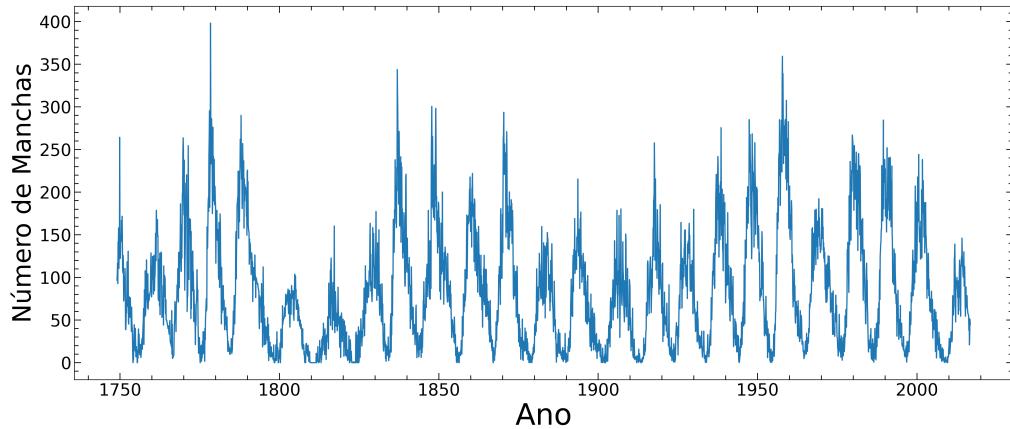


Figura 1.1: Número de manchas solares ao longo tempo. Dados: NASA

Nesse contexto, ao analisar a distribuição das manchas pela latitude, é possível ver que esses fenômenos magnéticos aparecem de forma sistemática em latitudes entre 30° e 10° e de maneira cíclica. De forma que no início do ciclo as manchas podem ser observadas em maiores latitudes e, conforme o ciclo avança, as manchas começam a aparecer cada vez mais próximas do equador solar. Uma representação visual do que foi descrito está representada no gráfico conhecido como o diagrama borboleta (do inglês, *Butterfly Diagram*), disponível na figura (1.2). Este diagrama é o produto final do surgimento das manchas e operação do dínamo no interior do Sol.

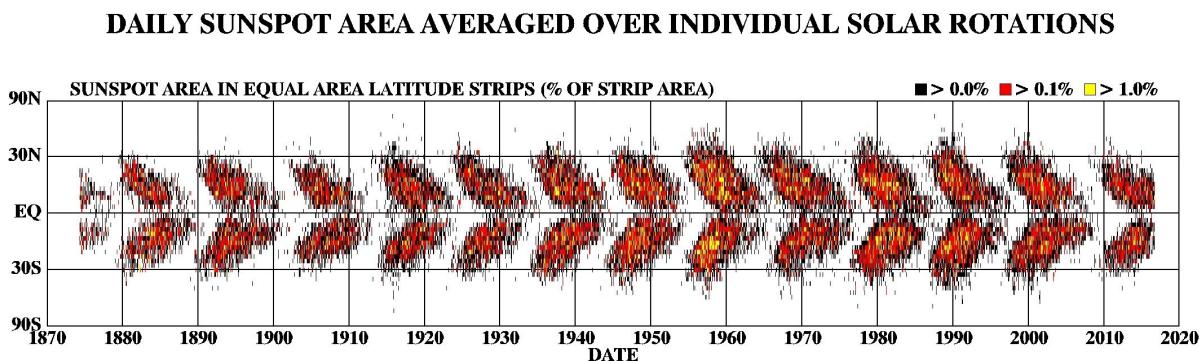


Figura 1.2: Diagrama Borboleta. **Fonte:** <https://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>

Ao revisar a literatura, cabe destacar o trabalho de Parker (1955) [2], o qual descreve os fundamentos deste dínamo e mostra que uma esfera condutora em rotação pode gerar um dipolo magnético com o mecanismo evolutivo de dínamo, no caso desse conceito aplicado ao Sol, o dínamo solar. Com isso se considera o ciclo de 22 anos como o

período do ciclo magnético solar, enquanto o ciclo de 11 anos é visto como uma inversão de polos.

As estrelas giram e o plasma estelar da fotosfera e do interior acompanham esta rotação. Na fotosfera, as manchas escuras contrastam com a emissão fotosférica na região da luz visível. Sendo assim, as manchas observadas na região do comprimento de onda visível permitem uma análise em busca de recuperar a rotação estelar. Mesmo que na maioria dos casos as estrelas apresentam rotação diferencial, isto é, apresentam velocidades de rotação diferentes para diferentes latitudes, com o estudo das manchas em latitudes diferentes pode-se resgatar um diagnóstico mais preciso da rotação [3, 4].

Já no contexto da detecção de exoplanetas, a atividade estelar acaba sendo um obstáculo para a precisão nas medidas obtidas a partir de modelagem de trânsito [25], por exemplo. No contexto atual, compreender melhor como a atividade estelar atua na curva de luz pode também ser um fator importante para a melhoria dos ajustes nos modelos exoplanetários, e assim, pode permitir astrônomos de mirar mais longe, como na possível detecção de luas fora do sistema solar, as chamadas exoluas.

1.1.2 Atmosfera Estelar

A atmosfera estelar é composta em linhas gerais por gás quente e plasma e pode ser caracterizada em termos da densidade e temperatura como função da altura. Do ponto de vista estrutural, e em ordem decrescente de raio (altura), a atmosfera é dividida em algumas camadas denominadas de coroa, cromosfera e fotosfera. Além de ser a camada mais alta, a coroa é a mais extensa camada da atmosfera estelar, porém contribui muito pouco com a luminosidade observada no comprimento de onda visível. Pode-se a observar diretamente em ocasiões de eclipse solar ou usando um coronógrafo (do inglês, *coronagraph*) que bloqueia a luminosidade proveniente do Sol de modo a permitir a visualização da coroa como representado na figura (1.3). É importante frisar ainda que a coroa solar apresenta altíssimas temperaturas (temperaturas mais elevadas que na fotosfera, mesmo a coroa estando mais distante do centro estelar) da ordem de 10^6 K. Esse aquecimento não é completamente compreendido pela física solar atual, já que a fonte de energia considerada é decorrente de reações nucleares no núcleo da estrela. Esse é um problema em aberto na astrofísica e é conhecido como o problema de aquecimento da coroa solar.

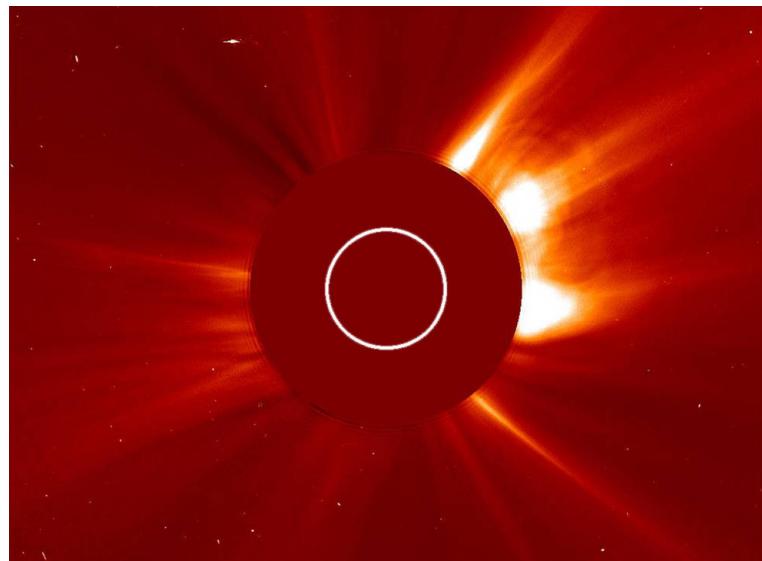


Figura 1.3: Imagem do SOHO que pode-se ver a coroa solar e o vento solar. **Fonte:** NASA / SOHO

Por sua vez, a cromosfera, que fica entre coroa e fotosfera, é a região onde são originadas as linhas do espectro de emissão. Já a fotosfera origina as linhas de absorção do espectro. A fotosfera representa o mínimo de temperatura. No Sol a fotosfera chega a aproximadamente 5700 K. Nessa camada, é possível notar alguns fenômenos magnéticos, como as manchas solares e flares.

1.1.3 O escurecimento de Limbo

Para quase todas as estrelas a distribuição de intensidade mostra um escurecimento em direção a borda projetada da estrela, o que pode ser facilmente visualizado no Sol - como representado na figura (1.4). Esse efeito, geralmente chamado de escurecimento do limbo (do inglês, *limb darkening*), depende da temperatura efetiva da estrela, ou seja, é função do tipo espectral estelar. Fundamentalmente a física fundamental associada ao escurecimento de limbo vem da lei de Stefan–Boltzmann que associa a potência total radiada por unidade de área superficial de um corpo negro e é diretamente proporcional à quarta potência da sua temperatura termodinâmica, como representado pela equação (1.1).

$$j^* = \sigma T^4 \quad (1.1)$$

Onde σ é constante de proporcionalidade de Stefan–Boltzmann que tem um valor aproximado de $5,6 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$. Um corpo negro é um objeto que absorve e emite toda a

radiação eletromagnética nele incidida, ou seja, nenhuma luz o atravessa e nem é refletida. As estrelas são boas aproximações de um corpo negro já que são corpos muito opacos, ou seja, o material estelar é um ótimo absorvedor de radiação.

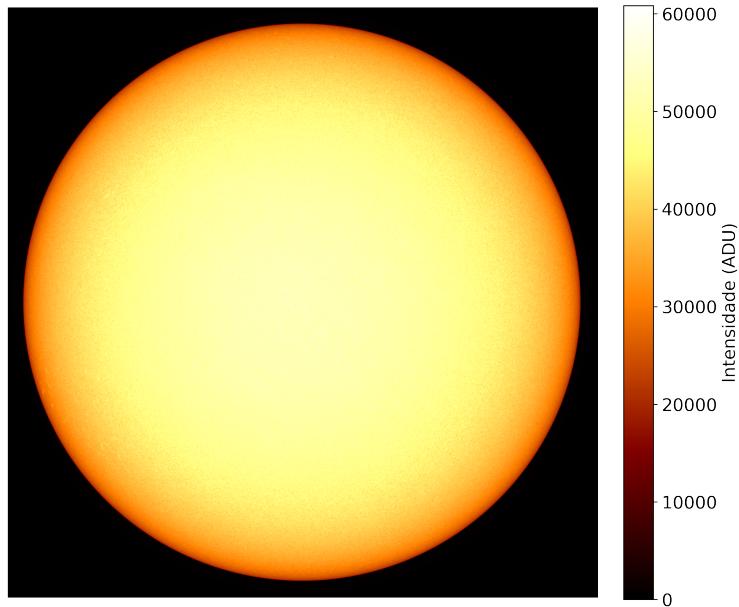


Figura 1.4: Fotosfera solar no dia 30 de janeiro de 2021, com escurecimento do limbo perceptível. **Dados:** NASA / SDO

Dessa forma, é importante destacar que a fotosfera apresenta o fenômeno físico de extinção que espalha e absorve parte da luz que a atravessa, assim como ocorre na atmosfera da Terra (no caso terrestre, a extinção causa dificuldades para fazer observações astronômicas próximo a regiões metropolitanas, por exemplo). Nessa conjuntura, faz sentido introduzirmos o conceito de profundidade óptica, dado por τ_ν . A profundidade óptica descreve a fração de radiação que é absorvida ou emitida (espalhada) em um caminho de a até b , e é dada pela equação (1.2).

$$\tau_\nu = \int_a^b \kappa_\nu \rho \, dx \quad (1.2)$$

Veja que de forma geral, κ_ν representa o coeficiente de absorção (que é função da frequência ν) e ρ representa a densidade do meio. De maneira equivalente, a profundidade óptica pode ser interpretada como uma medida da transparência de um meio, para uma frequência específica de luz ν . Do ponto de vista da teoria de transferência radiativa pode-se con-

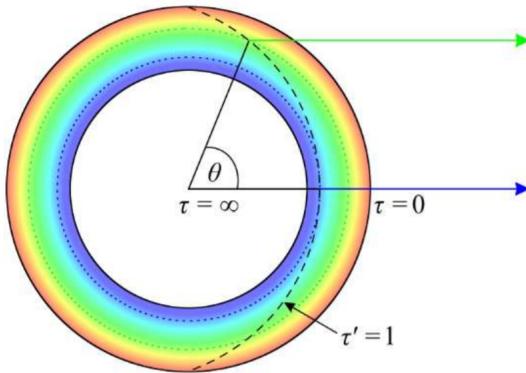


Figura 1.5: Representação física do escurecimento de limbo. A linha tracejada indica a profundidade óptica $\tau = 1$. As setas representam a direção da linha de visada do observador. Enquanto as cores, nessa figura, representam de forma figurativa as temperaturas em forma de gradiente da mais quente (azul) para a mais fria (vermelho). **Fonte:** Muller (2016)[14]

siderar a profundidade óptica como uma medida da profundidade geométrica de uma atmosfera estelar, como pode-se ver representado esquematicamente pela figura (1.5). No limite superior da camada, a profundidade óptica é zero (ou seja, toda energia é transmitida), enquanto que no centro da estrela, ela tende a infinito (toda energia é absorvida ou espalhada). Enquanto que na profundidade óptica $\tau = 1$ constrói-se uma superfície teórica onde apenas $1/e$ da energia é transmitida, sem ser absorvida ou espalhada. Nesse sentido, podemos ver que a superfície $\tau = 1$, representada na figura (1.5), na região próxima ao centro está associada a uma camada com a temperatura mais alta em relação à mesma superfície na extremidade da estrela. E como a temperatura mais alta está relacionada a uma potência irradiada mais alta (pela lei de Stefan–Boltzmann - como já comentado) dá-se o fenômeno do escurecimento do limbo.

É um fenômeno bastante intuitivo ou até mesmo óbvio, dado os conhecimentos físicos atuais, no entanto o escurecimento de limbo passou despercebido por grande parte da história da astronomia, mesmo grandes cientistas e astrônomos como Galileu - o mesmo que observou eventos de magnetismo solar, como citado na seção 1.1.1, e Huygens (astrônomo que descobriu a primeira lua de Saturno, assim como propôs o modelo de anéis de Saturno) acreditavam que o Sol tinha uma distribuição de brilho homogênea sobre a superfície.

Gustav Müller publicou em 1897 [5], aproximadamente cento e vinte anos atrás o que seria o primeiro registro da detecção que o Sol emite menos brilho próximo à borda. No entanto, vale destacar que do ponto de vista da história da ciência, que esse tipo

de lastro ao pioneiro é comumente errôneo e enviesado por disputas científicas como o caso emblemático da Lei de Hubble [6]. Ainda assim, a primeira medida quantitativa do escurecimento de limbo ocorreu no século XVII por Pierre Bouguer, que determinou, aproximadamente, que a intensidade normalizada em $0.75 R_{\odot}$ no Sol seria de 73% em relação ao centro [15]. Nessa conjuntura, foi natural a necessidade de se modelar efeito. Muitos modelos diferentes foram propostos, um dos mais simples foi a Lei Linear [7], apresentada como:

$$I(\mu) = 1 - u(1 - \mu) \quad (1.3)$$

Embora esta equação ainda seja aplicável para algumas curvas de luz menos precisas ou para tentar descrever efeitos mais específicos, como o efeito Rossiter-McLaughlin, modelos mais sofisticados foram necessários para caracterizar melhor a atmosfera estelar. Por outro lado, o escurecimento do limbo do Sol (estrela a qual temos maior precisão de medidas) é melhor modelizado pela formulação linear, reforçando a complexidade do problema. Hoje em dia as leis mais comumente usadas são: A lei quadrática [8]:

$$I(\mu) = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2 \quad (1.4)$$

A lei raiz quadrada [9]:

$$I(\mu) = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \sqrt{\mu}) \quad (1.5)$$

A lei logarítmica [10]:

$$I(\mu) = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2\mu \ln \mu \quad (1.6)$$

Onde $\mu = \cos \theta$ e u_1, u_2 são os respectivos coeficientes de escurecimento de limbo, enquanto θ é definido como o ângulo entre o observador e a normal para a superfície da estrela - como representado na figura (1.6). $I(\mu)$ é a intensidade após o cálculo do escurecimento de limbo associado.

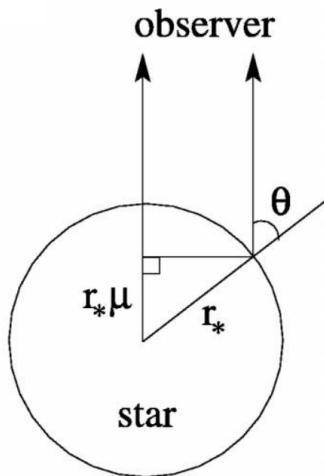


Figura 1.6: Esquema de modelização do escurecimento de limbo **Fonte:** Mandel & Agol (2002) [11]

Do ponto de vista da análise teórica da atmosfera, existem alguns modelos que podem ser usados para obtenção dos coeficientes de escurecimento do limbo. Uma vez que no comprimento de onda visível observamos a fotosfera, é natural que a necessidade de uma modelagem precisa dessa camada. Nesse contexto, os dois modelos que se destacam na literatura são ATLAS [12] e PHEONIX [13].

O ATLAS foi originalmente apresentado em 1970 por Robert Kurucz [12] assumindo Equilíbrio Termodinâmico Local (LTE, do inglês *Local Thermodynamic Equilibrium*) além de atmosferas plano paralelas e hidrostáticas.

Já o PHEONIX, que era chamado anteriormente de SNIRIS, foi desenvolvido principalmente por Peter Hauschildt [13] em 1992. É executado em dois modos de configuração espacial diferentes: o modo unidimensional, assumindo simetria esférica azimutal, e o modo tridimensional. Ele permite cálculos para muitos objetos astrofísicos diferentes, além de estrelas, pode-se simular até supernovas. Assim como o modelo anterior ele também assume LTE.

Ambos são modelos de código aberto na internet e por isso sofrem constantes alterações, assim como pequenas alterações específicas. Para o ATLAS, por exemplo, existem ramificações que rodam o código tanto com versões plano paralelas e quanto com simetria esférica.

Como *Output* dos modelos temos os coeficientes de escurecimento de limbo em função do tipo espectral (temperatura efetiva, massa, metalicidade e $\log g$). Esses valores podem ser usados como valores fixos em uma modelagem MCMC diminuindo, assim,

o número de parâmetros livres. No âmbito deste estudo pretende-se testar qual seria a abordagem mais adequada para os coeficientes de escurecimento do limbo, *a priori* com os valores provenientes dos modelos ou *a posteriori* com o ajuste desses parâmetros através de métodos computacionais como o MCMC. Especificamente, objetivamos também, revisitá os dados de curvas de luz do satélite Kepler e TESS, e colocar vínculos em trabalhos anteriores que determinaram coeficientes u_1 e u_2 para estrelas do tipo solar com planetas.

1.2 Exoplanetologia

A célebre frase “*There cannot be more worlds than one*” atribuída a Aristóteles introduz bem o contexto filosófico e existencialista enraizado por trás da busca por vida inteligente além da já conhecida vida terrestre. Responder a pergunta “Estamos sozinhos no universo?” vem sendo combustível para grandes avanços em nossa sociedade, de Giordano Bruno a Frank Drake, fazer ciência com esse objetivo, visando contribuir de alguma forma para a resposta dessa pergunta, é uma tarefa, de fato, nobre.

Nesse contexto, a exoplanetologia nada mais é do que a busca e a análise de planetas fora do sistema solar (exoplanetas). Para muitos essa área é tratada como uma subárea da astrofísica estelar anteriormente comentada, principalmente porque todo o estudo preciso de exoplanetas pode ser usado como ferramenta para estudar as propriedades estelares, considerando, também que a maioria dos métodos atuais são métodos indiretos de detecção - como será comentado na seção (1.2.1).

Do ponto de vista histórico, desde o final do século 19 uma possível detecção de exoplanetas já era comentada na literatura. Em 1992, o estudo publicado por Wolszczan & Frail [18] introduziu a detecção de dois planetas que orbitam uma estrela de nêutrons com massa entre $2.8 M_{\odot}$ e $3.5 M_{\odot}$ a distâncias de $0.5 UA$ e $0.4 UA$, respectivamente, usando a técnica de velocidade radial. Esse artigo desafiou o *status quo* da ciência da época por várias frentes diferentes. Inicialmente, pois essa seria a primeira detecção exoplanetária. Até a data haviam outras reivindicações de detecções mas que foram rejeitadas posteriormente, por se tratarem na verdade de estrelas anãs marrons. Além disso, trata-se de um sistema de múltiplos planetas, algo igualmente novo na astronomia. E mais inquietante ainda sendo a estrela hospedeira uma estrela de nêutrons, que pela teoria de estrutura e evolução estelar é formada após uma explosão de supernova, e antes da explosão a estrela estaria na fase de gigante vermelha com um raio teórico muito maior que o raio de órbita dos planetas detectados.

Nesse sentido, em 1995 tivemos outro ponto de inflexão na astronomia, a detecção de 51 Pegasi b [16], o primeiro planeta fora do sistema solar e que orbita uma estrela do tipo solar na sequência principal. Neste ponto, a busca por exoplanetas foi impulsionada e este tópico se tornou uma importante realidade em muitos centros de pesquisas pelo mundo. Esse trabalho culminou no Prêmio Nobel de Física em 2019 para os astrônomos

Michel Mayor e Didier Queloz. No caso de 51 Pegasi b, o método de detecção utilizado foi o de velocidade radial [16],

Já do ponto de vista instrumental, os telescópios espaciais e as medidas fotométricas mudaram o jogo quanto aos números de sistemas detectados e particularmente os telescópios espaciais CoRoT, acrônimo de *Convection, Rotation and Transit* da *European Space Agency* (ESA) [19] e Kepler, [17,21] da NASA escreveram uma importante página na história da busca por exoplanetas. Ambas as missões espaciais foram inicialmente idealizadas, para detectar planetas do tipo Terra, ou seja, planetas rochosos e com raio e semi-eixo maior semelhantes ao sistema Sol-Terra, para que pudessem assim ser avaliados em termos das condições de habitabilidade, que se dá quando um determinado sistema possui características compatíveis com à manutenção da vida [20]. Contudo, análises dos planetas detectados mostram que a maior parte destes, apresentam um raio muito maior que o raio da Terra e estão mais próximos da sua estrela hospedeira, quando comparado com o sistema Sol - Terra¹. Em parte, isso é explicado por um viés intrínseco do método observacional e que será abordado neste TCC. O satélite TESS [22], mais especificamente, atualmente se encontra em voo e fornece medidas fotométricas para milhares de estrelas brilhantes e provenientes de várias posições da nossa Galáxia.

Nessa conjuntura, a elaboração de missões espaciais cada vez de melhor desempenho e telescópios mais precisos com detectores mais sensíveis fazem parte dos desafios constantes da área de busca por exoplanetas, e além desta linha, a física estelar e os modelos de evolução estelar se beneficiam muito dos produtos observacionais gerados nestes últimos 25 anos de busca por exoplanetas. Este cenário deve continuar ainda pelos próximos anos, e neste sentido, a preparação para missões como *Planetary Transits and Oscillations of stars* (PLATO) [23] da ESA, e *James Webb Space Telescope* (JWST) [24] da NASA devem impulsionar ainda mais a investigação sobre a física da formação dos exoplanetas e alargar a cobertura estatística de parâmetros importantes para compreender melhor os efeitos de segunda ordem presentes em um trânsito planetário. Para dar um exemplo, a precisão fotométrica que era de uma parte por milhão nas últimas missões espaciais [17] deve aumentar nos próximos anos e isto terá impacto considerável nos modelos de trânsito planetário [25].

Concretizando o estado da arte para exoplanetologia, na data de escrita desta mo-

¹https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/counts_detail.html

nografia já foram confirmados mais de 4500 exoplanetas, frutos dos avanços aqui descritos.

1.2.1 Métodos de Detecção

Nas secções seguintes iremos detalhar alguns dos principais métodos de detecção de exoplanetas.

Velocidade Radial

O método de velocidade radial consiste em detectar a velocidade projetada de uma estrela no plano do observador, e a partir da análise das medidas de velocidade no decorrer do tempo inferir a presença de outro corpo gravitando e que faz com que a estrela balance em torno do centro de massa do sistema estrela-planeta. Esse efeito é medido através do desvio de linhas espectrais causado pelo efeito Doppler, dado pela equação (1.7). Quando a estrela está se afastando do observador, pode-se observar um deslocamento do espectro para o vermelho, já quando a estrela se aproxima relativamente ao observador o deslocamento do espectro é para o azul - que seriam justamente o *redshift* e o *blueshift*.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \sin i = \frac{1}{c} \frac{2\pi r_*}{P} \sin i \quad (1.7)$$

Onde i é a inclinação do sistema em relação ao observador, P é o período enquanto r_* é a distância da estrela até o centro de massa do sistema e é dada pela equação (1.8)

$$r_* = a \frac{M_p}{M_* + M_p} \quad (1.8)$$

Após alguns passos algébricos e usando a terceira lei de Kepler (pela formulação de Newton) é possível obter a equação (1.9), que mostra que a velocidade radial viabiliza preferencialmente a detecção de planetas do tipo Júpiter e com curto período, assim como estrelas de baixa massa.

$$K_* = M_p (2\pi G)^{1/3} M_*^{-2/3} P^{-1/3} \quad (1.9)$$

Onde K_* é a semi-amplitude observada na variação da velocidade.

Transito Planetário

O método de trânsito consiste em detectar uma ocultação periódica no brilho da estrela, para isso acontecer é necessário que ocorra a passagem do planeta pela linha visada do observador e a estrela, formando um alinhamento entre observador (terra), estrela e planeta. Essa condição sozinha já é suficiente para tornar esse método estatisticamente raro, como mostrado na figura (1.7), os três corpos estão perfeitamente alinhados quando a $i = 90^{\circ}$ e existe um ângulo complementar a i (θ_0) que deve ter um limite superior para a detecção do sistema.

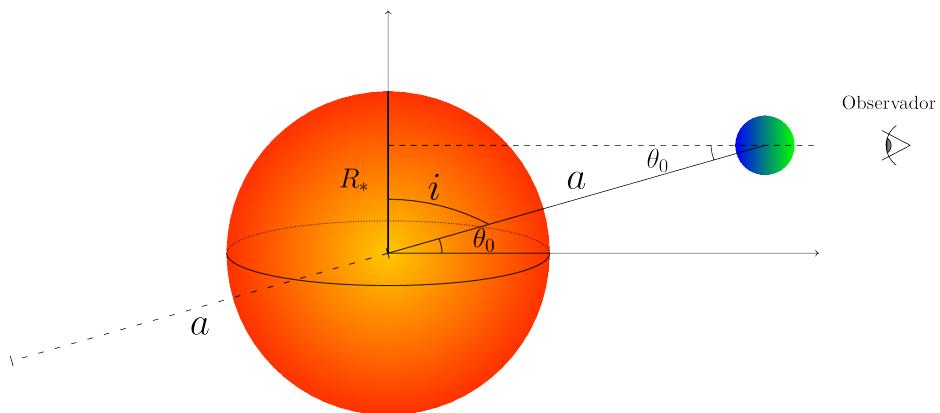


Figura 1.7: Esquema que representa a probabilidade de trânsito

Podemos calcular a probabilidade desse alinhamento considerando a distância do observador muito maior que o raio da estrela ($d \gg R_S$), temos:

$$\mathcal{P} = \frac{\int_0^{\theta_0} \cos \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta} = \sin \theta_0 = \frac{R_s}{a}. \quad (1.10)$$

Isso significa que a probabilidade de um sistema exoplanetas qualquer estar alinhado com um observador é proporcional ao raio estelar e inversamente proporcional ao semi-eixo maior. Substituindo valores, para detectar um planeta com o semi-eixo maior de Júpiter ao redor de uma estrela como o Sol, teríamos, aproximadamente:

$$\mathcal{P} = \frac{R_s}{a} = \frac{0,00465 \text{ U.A.}}{5,2 \text{ U.A.}} \approx 0,089\%. \quad (1.11)$$

Ou seja, seria necessário observar $1/(0.089\%) \approx 1120$ sistemas como esse descrito acima para encontrar um deles alinhado com a linha de visada do observador ao ponto de ocorrer a ocultação do fluxo estelar, possibilitando, talvez, uma detecção pelo método

do trânsito planetário.

Abaixo representamos o gráfico do fluxo luminoso em função do tempo, figura (1.8). Este gráfico mostra as variações periódicas no brilho da estrela.

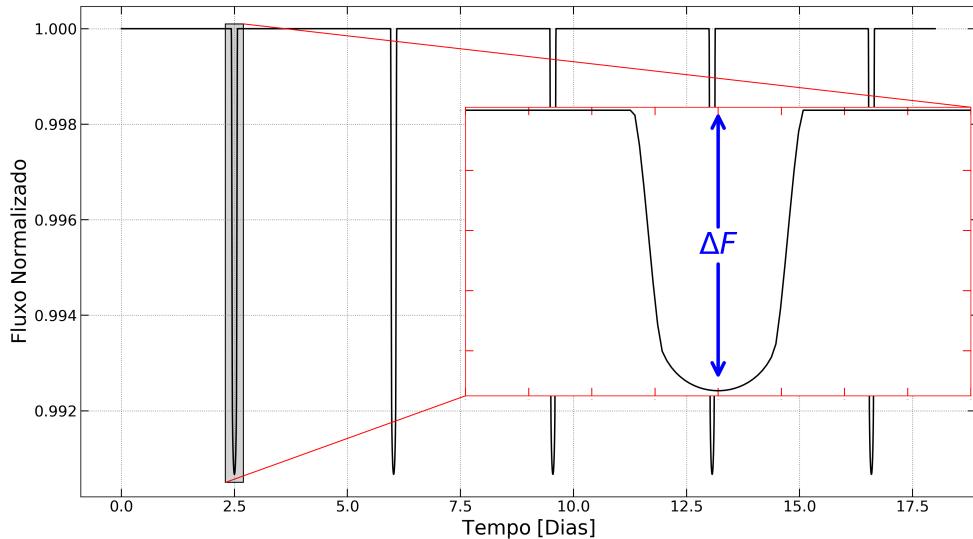


Figura 1.8: Exemplo de uma curva de luz, ΔF representa a variação do fluxo ocultado pelo trânsito do planeta. Ver equação (4.2)

Baseado em uma análise mais sofisticada, trazendo para o jogo a modelização desse sinal, que chamamos de curva de luz, pode-se recuperar parâmetros importantes sobre o sistema, tais como fração de raios (r_p/r_*), a inclinação do sistema com referência ao observador (i), o semi-eixo maior (a) de órbita do planeta e o parâmetro de impacto (b). Tais parâmetros serão apresentados com uma modelização mais completa, assim como suas equações e detalhes do método do trânsito planetário no capítulo (4).

Demais métodos

Os métodos de trânsito planetário e de velocidade radial já cobrem grande parte das detecções exoplanétárias, uma vez que a combinação desses dois métodos domina o cenário de detecções em números absolutos como explícito na Figura (1.9).

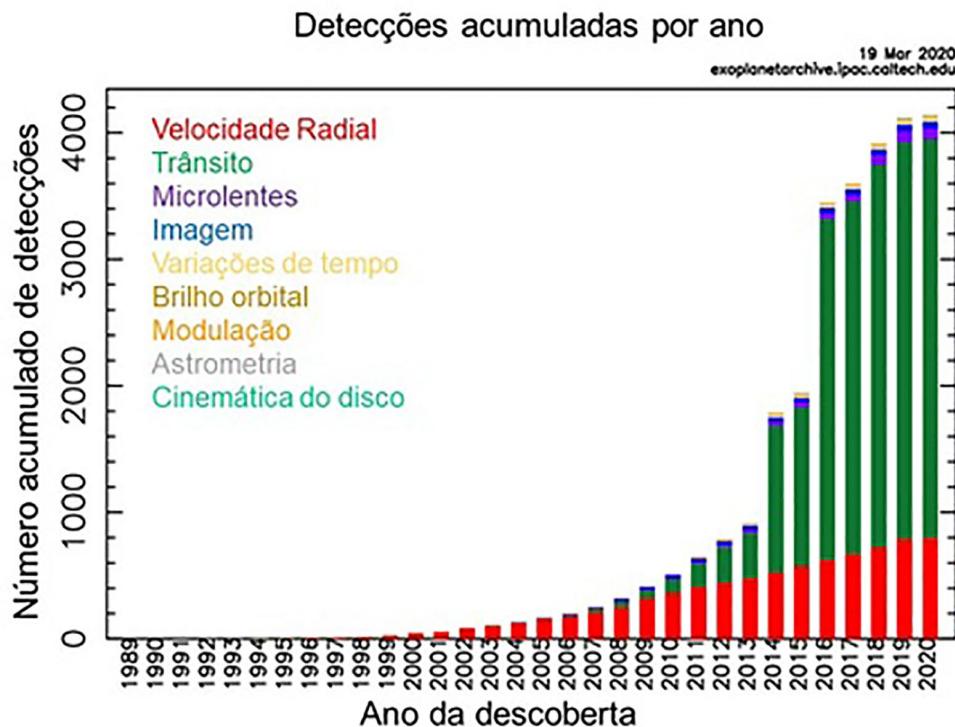


Figura 1.9: Detecções de exoplanetas acumuladas, por método. **Fonte:** NASA.

Além dos métodos já citados, existem diversos outros métodos que merecem ser destacados, dentre eles o método de imageamento direto. Esse é o único método de detecção direta de exoplanetas e funciona basicamente com o registro gráfico planeta. Isso não quer dizer que obtemos uma imagem resolvida da superfície do planeta e sim que detectamos a luz que é proveniente da estrela e o planeta a reflete na direção do observador. Essa técnica tem um custo instrumental elevado e muitas vezes é necessário remover a estrela por processamento de imagem para tornar possível a detecção já que o brilho da estrela é muito maior que a luz refletida pelo planeta.

Além do imageamento direto, cabe ressaltar o método de detecção por microlentes gravitacionais. A detecção é baseada na teoria da relatividade geral que explica como objetos muito massivos podem deformar o espaço-tempo ao seu redor, mudando a trajetória da luz e agindo como uma lente. As microlentes gravitacionais são especialmente interessantes pois diferente da velocidade radial e do método do trânsito, esse método não depende da inclinação do sistema estrela-planeta observado. Entretanto, a detecção é um evento único, que não se repete no tempo, ao contrário da velocidade radial e do trânsito mais uma vez. Grandes cientistas da área consideram, inclusive, o método das microlentes gravitacionais o mais promissor em busca de planetas de baixa massa do tipo terra já que um planeta de $0.3M_{\oplus}$ foi recentemente detectado com esse método (31).

Diante disso, o legado atual e a capacidade futura de cada método está bem representada pela Figura (1.10) retirada de *The Exoplanet Handbook* [30].

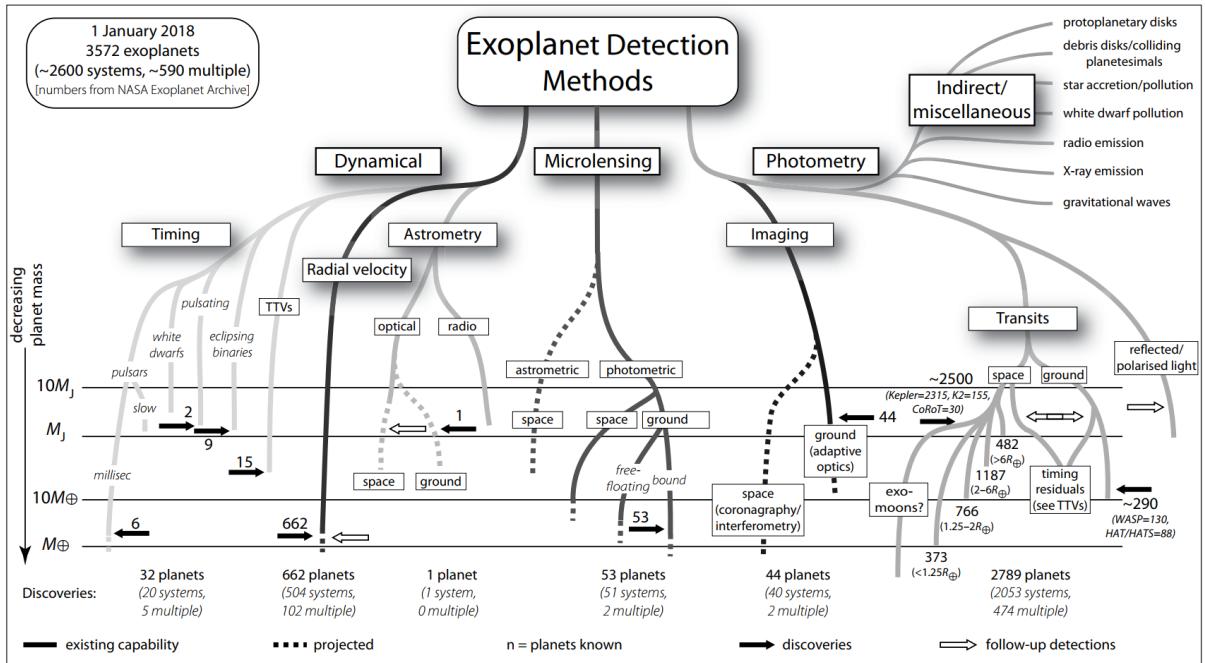


Figura 1.10: Métodos de detecção de exoplanetas. Os limites inferiores das linhas indicam massas dentro do alcance das medições presentes (linhas sólidas) e aquelas que podem ser esperadas nos próximos anos (tracejadas). A escala de massa (logarítmica) é mostrada à esquerda. O bloco 'Miscellaneous' no canto superior direito são menos bem quantificadas em termos de massa. Setas sólidas mostram descobertas relevantes. Setas abertas indicam medições de sistemas detectados anteriormente **Fonte:** The Exoplanet Handbook [30]

1.2.2 O escurecimento de Limbo do ponto de vista do trânsito

A busca por uma modelização cuidadosa do trânsito planetário em curvas de luz de alta precisão gera, além da fração de raios, a inclinação azimutal do sistema e estes dependem dos coeficientes de escurecimento de limbo [26], que podem mascarar resultados e gerar efeito que cobrem possíveis detecções de planetas pequenos como a Terra orbitando estrelas parecidas com o Sol [25]. Essa monografia foca exatamente na medida destes coeficientes de escurecimento do limbo e também em um melhor entendimento do perfil de brilho estelar. É apresentado ao leitor uma descrição física dos elementos necessários para a modelização de um trânsito planetário com base principalmente nos dados do satélite Kepler. Uma vez que a abordagem dos estudos de escurecimento de limbo com base no método do trânsito é um desafio [27], percebemos que devido aos seus efeitos na curva de luz, pode-se confundir com efeitos provenientes de outros parâmetros, o tratamento do escurecimento de limbo interfere na precisão da caracterização dos exoplanetas [28] e na

modelização das manchas estelares via curva de luz [29]. Em qualquer descrição adotada uma variação nos valores dos coeficientes de limbo pode causar imprecisões nas medidas inferidas e erro na fração de raios, semi-eixo maior e até na duração do trânsito [28], contaminando assim, outros parâmetros do sistema. Isto inviabiliza avanços reais que foram feitos na instrumentação e detecção ao longo dos últimos anos. Nesse sentido, essa monografia se propõe a realizar uma busca pelos coeficientes de escurecimento de limbo seguindo prescrições já estabelecidas [8] e com novas implementações de buscas de soluções através dos métodos Monte Carlo via cadeias de Markov (do inglês, MCMC *Markov Chain Monte Carlo*) modificadas para 31 objetos finamente selecionados da missão Kepler da NASA.

A metodologia foi aplicada para 31 objetos de diversos tipos espectrais e parâmetros de impacto, previamente observados pelo satélite Kepler e, além da modelização dos trânsitos para estes objetos, contribuímos para a determinação do seu perfil de brilho. De forma mais ampla, estabelecemos uma metodologia que pode ser aplicada para o estudo de uma larga base de estrelas já observadas com fotometria. No capítulo 2 será introduzido o paradigma Bayesiano que será a base estatística para o trabalho, no capítulo 3 será abordado a seleção dos objetos de interesse, assim como o tratamento de dados inicial. Em seguida no capítulo 4 serão apresentadas as equações do método do trânsito planetário que modelam matematicamente esse fenômeno. Já o capítulo 6 será dedicado à descrição do algoritmo MCMC que será aplicado nos sistemas selecionados. E, por fim, nos capítulos 6 e 7 trataremos dos resultados, conclusões e perspectivas desta monografia.

Capítulo 2

Inferência Bayesiana

A lógica da estatística Bayesiana teve seu início com os trabalhos de Thomas Bayes (1701 – 1761), apesar do mesmo nunca ter publicado suas formulações e foi somente após a sua morte que outro cientista, Richard Price, publicou, em 1763, as notas de Bayes sobre o problema de probabilidade inversa, e fez uma introdução considerando as bases filosóficas para a estrutura Bayesiana. Já o *Teorema de Bayes* só foi publicado em 1814 por Pierre-Simon Laplace para criar um sistema indutivista baseado na probabilidade. Diante disso o Teorema de Bayes que será introduzido nos próximos parágrafos, também é conhecido por alguns como a regra de Bayes-Laplace (*Bayes–Laplace rule*).

É válido destacar que todas essas questões envolvendo as publicações de Bayes (publicadas na verdade por Richard Price, como já destacado) constituem um capítulo curioso do ponto de vista da história da ciência. Bayes vinha de uma família de boas condições financeiras e, apesar de britânico, obteve grande parte dos seus estudos pela Universidade de Edimburgo, pois como era adepto de uma igreja não-conformista, não poderia ser aceito em grandes universidades como Oxford ou Cambridge, as quais não aceitavam religiões alternativas. Inclusive, há um célebre artigo intitulado “Benevolência divina” (tradução livre para “*Divine Benevolence*”) que é atribuído a Bayes mesmo considerando que o artigo foi assinado com um pseudônimo de “John Noon”. Pode-se destacar, ainda, que o retrato mais difundido da imagem de Thomas Bayes é muito possivelmente mal atribuído [32]. Uma representação desse retrato pode ser encontrado na figura (2.1).



Figura 2.1: Retrato de Bayes comumente encontrado em sites como [wikipedia.com](https://en.wikipedia.org), que pode ter sido erroneamente atribuído.

O coração da estatística de Bayesiana é o teorema de Bayes, e que pode ser derivado partindo-se de uma probabilidade conjunta $p(x, \theta)$, reescrevendo a probabilidade de x pela integral da probabilidade marginal em θ , ou seja $p(x) = \int p(x, \theta)d\theta$. Dessa forma, juntamente com a definição de probabilidade conjunta, ($p(x, \theta) = p(x)p(\theta|x)$), o teorema de Bayes, pode ser definido pela equação (2.1). Sendo x os dados e θ o conjunto de parâmetros do modelo.

$$p(\theta|x) = \frac{p(x, \theta)}{p(x)} = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int p(x, \theta)d\theta}. \quad (2.1)$$

Veja que o resultado da integral no denominador da equação (2.1) é um escalar que não depende de θ . Assim, funciona como uma constante de normalização para a equação, portanto, o teorema de Bayes assume outra forma mais usual numericamente pela expressão (2.2),

$$p(\theta|x) \propto p(\theta)p(x|\theta). \quad (2.2)$$

Onde $p(\theta|x)$ é a distribuição a posteriori a qual buscaremos amostrar, $p(x|\theta)$ é a *likelihood*, ou verossimilhança, e $p(\theta)$ é a distribuição a priori, que quantifica algum conhecimento que temos a priori sobre o sistema, como, principalmente, em nosso caso, os limites físicos para todos os parâmetros e a amostragem inteligente do escurecimento de limbo usando

a parametrização descrita na seção (4.2). Da mesma forma, o teorema de Bayes pode ser escrito por outras formulações, em destaque a formulação muito recorrente é descrita na equação (2.3).

$$P(\theta|x) = \frac{p(\theta)\theta^x}{\int p(\theta)\theta^x d\theta} \quad (2.3)$$

Para melhor introduzir a ideia do paradigma Bayesiano, pode-se usar uma analogia que se tornou bastante famosa no contexto conhecida como o problema do nascer do Sol (tradução livre para *Sunrise problem*) introduzida pelo filósofo David Hume quando o mesmo falava sobre o problema da indução em um dos seus livros e retomada por Laplace no século XVIII [33]. A analogia consiste no seguinte problema: Suponha que uma pessoa chamada Adão foi introduzida abruptamente na terra sem nenhum conhecimento prévio, portanto essa pessoa não teria nenhum conhecimento básico, nem mesmo sobre o céu, o Sol ou a Terra - mas teria um conhecimento avançadíssimo sobre cálculos estatísticos. Quando o nascer do Sol é visto pela primeira vez, Adão ficaria surpreso e não saberia dizer se esse é um fenômeno recorrente ou se é um evento de cauda longa. O problema do nascer do Sol se dá quando perguntamos a Adão qual a probabilidade do Sol nascer amanhã. Se Adão for adepto da estatística clássica (também conhecida como frequentista), ele responderá que a probabilidade é dada pelo número total de eventos favoráveis sobre o número de eventos totais. Ou seja, para o primeiro dia Adão responderia de acordo com a equação (2.4).

$$p = \frac{\text{dias que o Sol nasceu}}{\text{dias observados}} = \frac{1}{1} = 100\% \quad (2.4)$$

Estatisticamente este resultado é fraquíssimo do ponto de vista clássico que se baseia na repetição de eventos para a amostragem. Nesse sentido, com o passar do tempo, no dia 1000 Adão é perguntado novamente sobre a probabilidade do Sol nascer, ele responde conforme a equação (2.5).

$$p = \frac{\text{dias que o Sol nasceu}}{\text{dias observados}} = \frac{1000}{1000} = 100\% \quad (2.5)$$

No entanto, se Adão utilizar a estatística Bayesiana, o processo para determinação dessa probabilidade é diferente. Na estatística Bayesiana levamos em conta informações que temos a priori sobre o problema. No caso do *sunrise problem*, inicialmente Adão não tem nenhuma informação sobre o nascer do Sol, mas na medida que o tempo passa, e dia

após dia Adão observa o Sol nascer, Adão fica cada vez mais confiante que o Sol nascerá no dia seguinte - heuristicamente.

No contexto Bayesiano, o primeiro passo é construir uma função *prior* para os parâmetros que serão estimados. Adão irá chamar a prior de $p(\theta)$, onde θ é a frequência que o Sol nasce. Como antes do primeiro dia, não há informação sobre o evento, Adão cria uma distribuição uniforme entre zero e um, pelo princípio da indiferença, já que é um valor de probabilidade e deve estar nesse intervalo, conforme a equação (2.6).

$$p(\theta) = \begin{cases} 0, & , \theta < 0. \\ 1, & , \theta \in [0, 1]. \\ 0, & , \theta > 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim, chamando X como o número de dias que o Sol nasceu, n o número de dias totais observados. Se soubermos o valor de θ e nenhuma outra informação for adicionada, a probabilidade de uma proposta E que o Sol nascerá no dia seguinte será θ . Dessa forma, pelo Teorema de Bayes chegamos na equação (2.7).

$$\begin{aligned} P(\theta|X = n) &= \frac{p(\theta)\theta^n}{\int_0^1 p(\theta)\theta^n d\theta} \\ &= \frac{\theta^n}{\int_0^1 \theta^n d\theta} \\ P(\theta|X = n) &= (n+1)\theta^n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, a probabilidade lógica de E dado as observações será dada pela equação (2.8).

$$P(E|X = n) = \int_0^1 \theta(n+1)\theta^n d\theta = \frac{n+1}{n+2} \quad (2.8)$$

Esse resultado foi obtido em 1814 por Laplace no seu livro [33]. Então para o dia 1 (antes de qualquer observação) Adão já seria capaz estimar a probabilidade do Sol nascer conforme a equação (2.9).

$$P(E|X = 0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} = 50\% \quad (2.9)$$

Após observar o primeiro nascer do Sol, Adão possui novos dados que devem ser levados em conta para gerar sua nova estimativa para o nascer do Sol do dia seguinte, ou seja, para 1 observação, Adão constrói a equação (2.10).

$$P(E|X = 1) = \frac{2}{3} \approx 66\% \quad (2.10)$$

Da mesma forma, para o dia 1000 a probabilidade segundo Adão com o paradigma Bayesiano seria de acordo com a equação (2.11).

$$P(E|X = 1000) = \frac{1001}{1002} \approx 99.9001\% \quad (2.11)$$

Analizando os resultados obtidos pelas interpretações frequentistas e Bayesianas vemos algumas diferenças bastante chamativas. Veja que pelo paradigma Bayesiano é possível atribuir uma probabilidade para o Sol nascer mesmo com espaço amostral nulo - o que é totalmente impensável para a estatística frequentista.

Além disso, vemos que com o aumento das observações, as estimativas probabilísticas frequentistas e Bayesianas concordam cada vez mais, ao mesmo tempo que nunca serão iguais - já que como $[(n+1)/(n+2)] \rightarrow 100\%$, a probabilidade nunca será exatamente 100%.

Outrossim, outra diferença é que os valores das probabilidades para os primeiros dias de observações são bastante diferentes entre os dois paradigmas. Após uma única observação, a probabilidade para a estatística clássica seria 100% contra 66% para a Bayesiana (ambas estão corretas, dentro de seus respectivos formalismos). O ponto é, qual das duas parece menos ingênua? Essa é uma das interpretações que para muitos teóricos Bayesianos apontam uma vantagem significativa dessa abordagem para eventos do tipo *one-and-done*, que são muito raros e praticamente só podem ser observados uma vez.

Diante disso, visto a peculiaridade dos eventos estudados nesta monografia, usaremos os princípios do paradigma Bayesiano para obtenção de resultados da modelização do escurecimento de limbo na análise do trânsito de um exoplaneta. Na nossa abordagem, as barras de erro do nosso processo resultam da amostragem da distribuição *a posteriori* do problema envolvido via algoritmos de Markov Chain Monte Carlo (MCMC), enquanto que usaremos a mediana da distribuição *a posteriori* como estimativa pontual das quantidades

de interesse.

Capítulo 3

Seleção de Dados Fotométricos

Neste capítulo será tratado o processo de análise e seleção dos dados, assim como questões específicas das missões espaciais envolvidas nessa monografia. Descrevemos nossas rotinas de correção das curvas de luz e características específicas dos sistemas estrela-planeta condizentes com as propostas deste estudo.

3.1 A Missão espacial Kepler da NASA

A missão espacial Kepler da NASA foi lançada em 2009 e culminou na detecção de mais de 2600 exoplanetas. O satélite coletou dados em curta cadência, observando a cada 1 minuto e em longa cadência, coletando dados a cada 30 minutos. Estas observações foram feitas no comprimento de onda da luz visível. O telescópio funcionou totalmente operante até meados de 2013 quando seu sistema de giroscópio começou a apresentar defeitos significativos, fazendo com que o satélite tivesse o seu movimento comprometido. Inicialmente o Kepler observava uma região de interesse estreita e bem definida no céu, porém com a falha do giroscópio, a missão Kepler formalmente foi descontinuada e foi dada início a missão de segunda luz K2 [21] na qual o Kepler, devido ao giroscópio defeituoso, observava regiões diferentes do céu. Milhares de estrelas foram observadas, e estas denominadas com a sigla KIC que representa *Kepler Input Catalog* e é uma nomenclatura atribuída aos objetos do catálogo do satélite Kepler.

3.2 Seleção de Objetos

Para esse trabalho, usamos os dados do Kepler e baixados pelo *Mikulski Archive for Space Telescopes* (MAST). Usamos ainda os dados de curta cadênciā e a fotometria de abertura corrigida (*Pre-search Data Conditioning Simple Aperture Photometry*, PDCSAP flux) para o maior número de quarters possíveis. Como já mencionado nesta monografia, já existem mais de 2600 exoplanetas descobertos pelo satélite Kepler, a escolha de quais objetos focar para ter uma análise com resultados mais significativos foi dada analisando estruturalmente dois critérios.

1. Objetos com a razão sinal-ruído extremamente alta
2. O máximo de *data points* em trânsito na curva de luz

O item 1 é justificado pois, para fins desse trabalho, temos em foco efeitos de alta precisão como o escurecimento de limbo. Esse efeito é de segunda ordem e se os dados não forem suficientemente precisos não é possível a análise. Além disso, é particularmente importante trabalhar com curvas de luz de longa observação e com vários trânsitos observados, uma vez que o método se baseia na amostragem de trânsitos. Portanto, é preciso dar ênfase em objetos com curto período orbital e extensa janela de tempo observado, de modo a maximizar os *data points* em trânsito. Além disso, seria interessante incluir planetas dos mais variados parâmetros de impacto b^1 , para tornar possível avaliar como a precisão se comporta em relação ao parâmetro de impacto.

Do ponto de vista prático, revisitaremos o artigo de Muller *et al.* (2013) [27] que traz um *screening* em busca de objetos com essas características. Neste estudo de 2013, são definidos 38 objetos para serem analisados. Os objetos foram escolhidos com base nas especificações descritas, curto período e alta razão sinal-ruído. Dentre os objetos selecionados, o autor divide-os em 2 grupos. Objetos com alto parâmetro de impacto ($b > 0.8$) e objetos com baixo parâmetro de impacto ($b < 0.8$). Nesse contexto, os autores optaram por fazerem um processo de análise e tratamento de dados usando muitas vezes inspeção visual, ou seja, decisões foram tomadas artesanalmente pelos cientistas ao analisar trânsito a trânsito nos dados. Nesse caso específico, a inspeção visual seria, de fato, uma alternativa razoável do ponto de vista científico já que os cientistas optaram por

¹O parâmetro de impacto b quantifica o impacto do trânsito de um exoplaneta na curva de luz e será introduzido na o capítulo (4)

apagar determinados trânsitos que fossem muito fora do espectro, na visão deles. Porém, além do implícito conflito de interesses, alguns objetos estavam demasiadamente contaminados. Como por exemplo KIC 10748390. Nesse caso os cientistas apenas mantiveram 18 dos 95 trânsitos disponíveis, ou seja, apagaram cerca de 81% dos trânsitos, sem nenhuma formalidade matemática. Diante disso, neste estudo optamos por analisar a fundo 31 dos 38 objetos selecionados por Muller *et al.* (2013) [27]. Excluindo da nossa amostra, com base em critérios objetivos, os seguintes objetos: KIC 10748390, KIC 8845026, KIC 9595827 KIC 10619192, KIC 5771719, KIC 2571238 e KIC 3762468. Portanto, os objetos selecionados para esse trabalho estão listados na Tabela (3.1).

Kepler ID	T_{eff}	$N_{\text{Trânsitos}}$
10019708	6214 K	83
10318874	4411 K	141
10666592	6577 K	216
10874614	5724 K	136
11295426	5658 K	39
11359879	5718 K	71
11391018	4787 K	7
11446443	5713 K	169
11804465	6012 K	82
12019440	5826 K	82
12105051	5277 K	135
3861595	6054 K	29
4349452	6104 K	17
5084942	4768 K	114
5357901	5087 K	70
5780885	5944 K	70
5794240	3948 K	36
6849046	5491 K	63
6922244	6164 K	126
7023960	5768 K	8
7877496	5912 K	154
8191672	5816 K	122
8359498	5570 K	98
8456679	5919 K	198
8554498	5766 K	91
8684730	5835 K	2
9410930	5585 K	142
9631995	5859 K	55
9651668	5722 K	101
9818381	5953 K	116
9941662	8848 K	96

Tabela 3.1: KICs selecionados, temperaturas de Borucki *et al.*(2011) [38] e número de trânsitos.

3.3 Tratamento de Dados

As curvas de luz em geral apresentam uma modulação que deve ser tratada antes de aplicar o modelo do transito planetário. Para tanto, dividimos a curva de luz em duas partes, uma parte a qual continha os trânsitos do exoplaneta e as partes sem trânsito (contínuo). Perceba que em um cenário teórico (do ponto de vista do modelo do trânsito) o continuo deveria ser constante, mas pequenas modulações são observadas decorrentes de efeitos instrumentais, resíduos do processo de redução e também de atividade estelar, como manchas solares que passam na fotosfera da estrela. Além de diversos outros fatores externos mais específicos como a contaminação dos dados por outro objeto astronômico.

Na nossa análise, primeiramente fizemos uma normalização do continuo usando mínimos quadrados para o polinômio de Chebyshev de altíssimo grau. Esse processo deve ser executado com muito cuidado pois há grandes chances de ocorrer um *overfitting* nessa parte da análise. Como as curvas de luz das nossas amostras são em sua maioria muito longas (em horas observadas), para que haja um fit condizente com a modulação estelar proposta, nos encontramos que deveriam ser empregados polinômios de grau entre 90–180 aproximadamente, avaliando de forma heurística para cada curva de luz individualmente, sempre minimizando o fenômeno de Gibbs² e um possível *overfitting*. Esse processo foi conduzido em todos os objetos em questão. O fit está representado na Figura (3.1), onde cada parte aqui descrita aparece explícita, para o objeto KIC 5357901. Além disso, para remover *outliers* dos dados, usamos um filtro que exclui todos os pontos a mais de 4σ de distância em relação a média do continuo.

²O fenômeno de Gibbs ocorre quando representa-se uma função por Fourier, a qual possui um número finito de descontinuidades. Esse fenômeno faz com que as regiões próximas as descontinuidades tenham um salto em relação a tendência anterior.

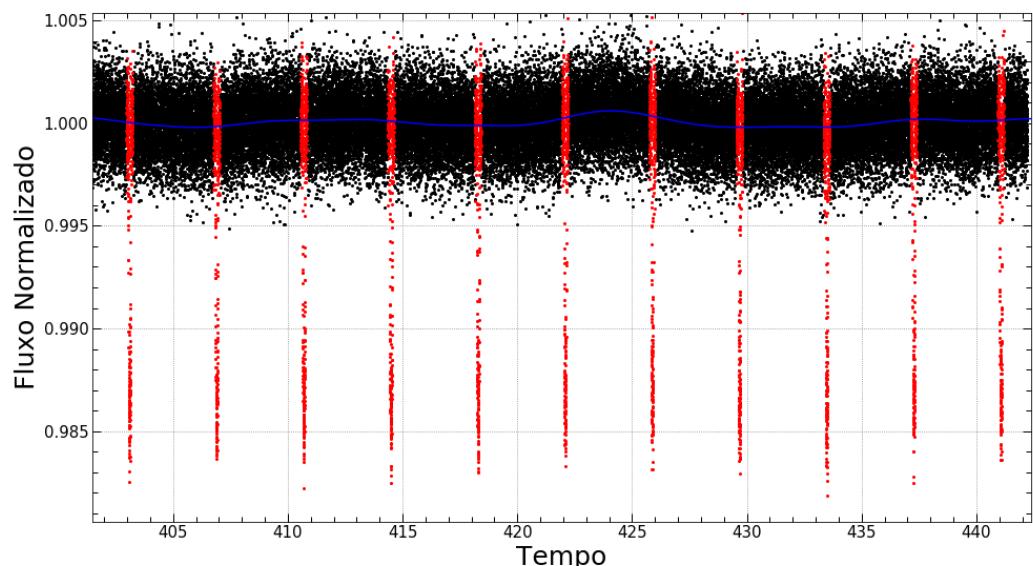


Figura 3.1: Fit do contínuo para KIC 5357901. Preto: Contínuo. Vermelho: Trânsitos. Azul: Fit do contínuo

Capítulo 4

Modelagem do Trânsito

Esse capítulo será dedicado à compreensão das equações que regem o trânsito de um exoplaneta do ponto de vista de modelagem da curva de luz. Partindo do caso com o mínimo de parâmetros possíveis para construção de um modelo de curva de luz, até chegarmos em efeitos de segunda ordem como o escurecimento de limbo que é o foco desta monografia. Tratamos também das condições de validade física e da busca de coeficientes de escurecimento de limbo no intervalo de interesse.

4.1 Caso mais simples

O modelo aqui descrito foi primeiramente apresentado em Mandel & Agol (2002) [11] e é amplamente utilizado nos mais diversos projetos de exoplanetologia. Esse modelo na sua forma mais simplificada, apresenta 5 parâmetros, são eles:

t_0	Tempo de conjunção inferior
a/r_*	Raio da órbita normalizado pelo raio estelar
P_{orb}	Período orbital do planeta
i	Inclinação do sistema.
r_p/r_* ou p	Raio do planeta normalizado pelo raio estelar

Essa forma mais simplificada do modelo tem como premissa que a órbita do planeta é circular e com isso evita-se 2 parâmetros, a excentricidade (e) e o argumento de longitude de periastro (ω) relacionado a órbita elíptica. Além disso, nessa formulação não é levado em conta o efeito de escurecimento do limbo estelar, com isso, é como se a

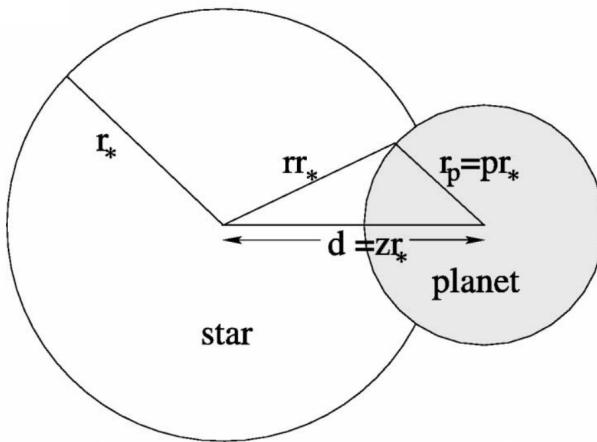


Figura 4.1: Esquema de modelização do trânsito **Fonte:** Mandel & Agol (2002) [11]

estrela tivesse o mesmo brilho por toda superfície projetada. Ambas essas premissas são não-conservadoras. A estimativa de órbita circular na verdade pode ser aplicada mais comumente quando se tem conhecimento dessa característica do sistema por outro método, por exemplo, como medidas de velocidade radial. Já o escurecimento do limbo varia de acordo com o tipo espectral da estrela. Dessa forma, a porcentagem de fluxo da estrela não ocultado pelo planeta é $F^e(p, z) = 1 - \lambda^e(p, z)$, onde z é a distância projetada entre o centro da estrela e o centro do planeta normalizado pelo raio estelar e $z = d/r_*$, como mostrado na Figura (4.1) e $\lambda^e(p, z)$ é dado pela equação (4.1),

$$\lambda^e(p, z) = \begin{cases} 0, & , d > r_p + r_*. \\ \frac{1}{\pi}[p^2 k_0 + k_1 + k_2] , & |r_* - r_p| < d \leq r_p + r_*. \\ p^2, & , d \leq r_* - r_p. \\ 1, & , r_p \geq d + r_*. \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde $k_0 = \cos^{-1}[(p^2 + z^2 - 1)/2pz]$, $k_1 = \cos^{-1}[(1 - p^2 + z^2)/2z]$ e $k_2 = \sqrt{\frac{4z^2 - (1+z^2-p^2)^2}{4}}$

Perceba que a equação (4.1) está dividida em alguns casos, quando $d > r_p + r_*$ o planeta está totalmente fora do trânsito, em $|r_* - r_p| < d \leq r_p + r_*$ o planeta está entrando ou saindo do transito, ou seja, uma parte do planeta oculta o brilho da estrela enquanto outra parte não. Já em $d \leq r_* - r_p$ o planeta está totalmente na frente da estrela, toda a sua área oculta o brilho estelar, portanto é nesse trecho que o fluxo ocultado é máximo. Por fim, em $r_p \geq d + r_*$ seria um caso que o o raio do planeta fosse maior que o raio estelar (na verdade, $r_p \geq d + r_*$) e assim bloquearia todo o fluxo emitido pela estrela.

Com isso, a função $F^e(p, z)$ será a curva de luz. Para essas premissas, podemos identificar alguns parâmetros físicos diretamente da curva de luz, tais como a fração de raios (p ou r_p/r_*) que é dada pela profundidade máxima de variação no brilho ΔF , como indicado na equação (4.2).

$$\Delta F \equiv \frac{F_{\text{total}} - F_{\text{transito}}}{F_{\text{total}}} = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2. \quad (4.2)$$

Seager & Mallén-Ornelas (2003) [34] mostraram que para esse caso mais simplificado com 5 parâmetros existe uma solução única para a curva de luz, dado que tenhamos a relação massa raio da estrela no limite que $M_* \gg M_p$, juntamente com as outras premissas já exigidas nessa seção. Tomando o limite que o raio da órbita é muito maior que o raio estelar ($a \gg R_*$), é possível chegar em relações analíticas para os valores de duração total do trânsito (t_T), e a duração do trânsito quando o planeta já está totalmente na frente da estrela (t_F), do ponto de vista do observador ou seja, em nossa parametrização quando $d < (R_* - R_p)$ e representado na equação (4.3),

$$\left(\frac{t_F}{t_T} \right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{R_p}{R_*} \right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i \right)^2}{\left(1 + \frac{R_p}{R_*} \right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i \right)^2}. \quad (4.3)$$

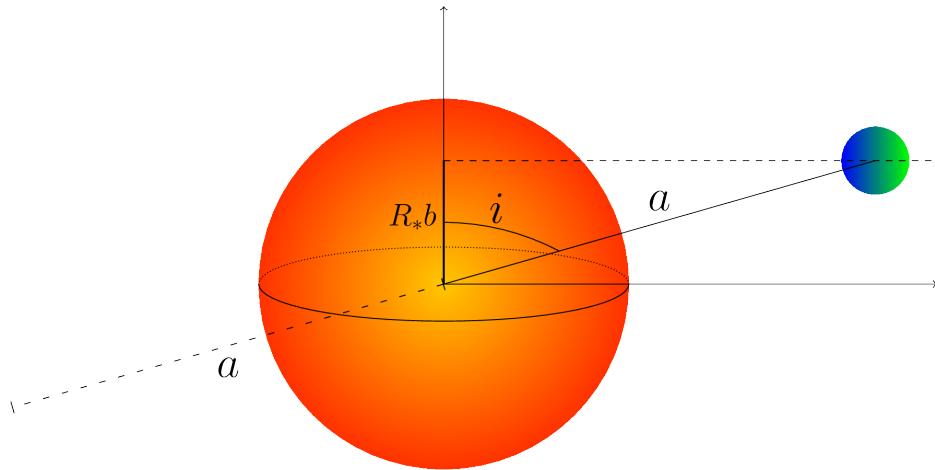


Figura 4.2: Esquema geométrico do parâmetro de impacto

Por conveniência, definimos uma nova variável chamada de parâmetro de impacto (b), que tem um sentido geométrico e é definido como o semi-eixo maior normalizado pelo raio estelar projetado pela inclinação, como representado na figura (4.2). Assim, este parâmetro é definido como descrito na Equação (4.4),

$$b = \frac{a}{R_*} \cos i. \quad (4.4)$$

Com o acréscimo do parâmetro b podemos reescrever a equação (4.3), logo, teremos,

$$\left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - b^2}{\left(1 + \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - b^2}. \quad (4.5)$$

É importante frisar que as equações nesta seção apresentadas consideram órbitas circulares, ou seja, com excentricidade zero. Mesmo que seja do conhecimento da física que as órbitas devem seguir secções cônicas. Especificamente para nosso problema podemos descartar as órbitas não circulares devido ao curto período orbital do planeta. É razoável ainda esperar que a dissipação de maré tenha amortecido qualquer quantidade inicial de excentricidade para um nível quase circular.

4.2 O escurecimento de limbo

Para modelar o escurecimento de limbo é definindo uma nova parametrização μ como sendo o cosseno de θ , onde θ é o ângulo entre o observador e o vetor normal a superfície projetada da estrela, como representado na figura (1.6), na página 9. Neste tratamento, o escurecimento de limbo pode seguir diferentes propostas e várias definições, com formulações lineares, exponenciais e até mesmo uma formulação não linear. Entretanto, a lei que é mais utilizada na literatura para trabalhos com o método do trânsito, é a forma quadrática, definida na equação (1.4), como já discutido na seção (1.1.3):

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2. \quad (1.4)$$

Nesta equação $I(1)$ é o brilho no centro da estrela, u_1 e u_2 são os coeficientes de escurecimento de limbo da estrela que entrarão como variáveis livres em nosso modelo. Veja que esses coeficientes não podem ter quaisquer valores. Existem premissas físicas que devem ser respeitadas, dentre elas, a intensidade de brilho da estrela deve sempre diminuir (nunca aumentar) com o raio, ou seja, a derivada de $I(\theta)$ em relação a θ deve ser negativa, e em nossa parametrização, a derivada da Equação (1.4) em relação a μ deve ser positiva. Dessa forma, podemos chegar em um primeiro vínculo na equação (4.6),

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu} > 0 \quad (4.6)$$

$$u_1 + 2u_2(1 - \mu) > 0.$$

Além disso, a estrela deve sempre ter brilho positivo, portanto, a equação (4.4) deve ser sempre positiva. Com isso, podemos obter mais uma restrição com a equação (4.7),

$$I(\mu) > 0 \quad (4.7)$$

$$u_1(1 - \mu) + u_2(1 - \mu)^2 < 1.$$

A partir das equações (4.6) e (4.7), ao analisar nos pontos de contorno do problema, ou seja em $\mu \rightarrow 0$ ($\theta = 90^\circ$) e em $\mu \rightarrow 1$ ($\theta = 0^\circ$), chegamos nos limites para u_1 e u_2 como representado na equação (4.8),

$$u_1 + u_2 < 1, \quad (4.8)$$

$$u_1 > 0,$$

$$u_1 + 2u_2 > 0.$$

Diante disso, com as três equações apresentadas em (4.8), obtemos um triângulo de interesse que contém os valores físicos para os coeficientes de escurecimento de limbo, como representado da figura 4.3. Entretanto, fazer uma amostragem desse triângulo pode não ser muito trivial, para isso vamos usar uma reparametrização de u_1 e u_2 , que é uma ideia proveniente da computação gráfica sugerida por Kipping (2013) [36] e que é uma forma elegante de simplificar as restrições impostas pelas equações (4.8) sem acrescentar nenhuma variável livre, e contando somente com as variáveis paramétricas q_1 e q_2 pela equação (4.9),

$$q_1 = (u_1 + u_2)^2, \quad (4.9)$$

$$q_2 = \frac{u_1}{2(u_1 + u_2)}.$$

Portanto a transformada inversa fica determinada pela equação (4.10),

$$u_1 = 2\sqrt{q_1}q_2, \quad (4.10)$$

$$u_2 = \sqrt{q_1}(1 - 2q_2).$$

Desta forma, neste capítulo, estabelecemos a base das equações que descrevem os

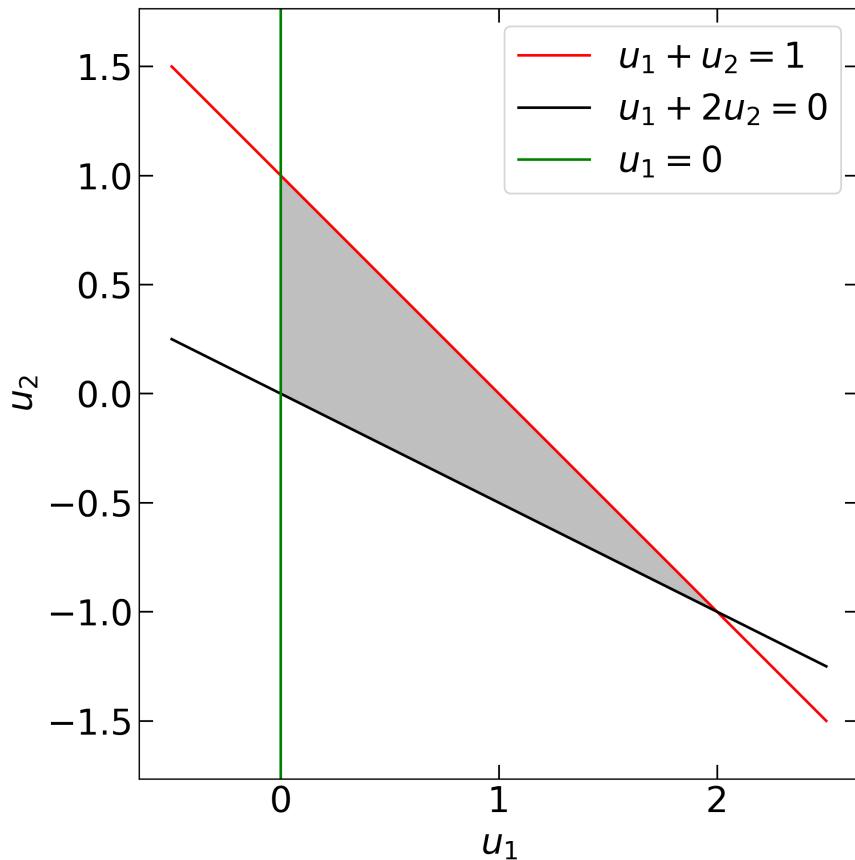


Figura 4.3: Representação das equações (4.8), a área demarcada em cinza representa o espaço fisicamente válido entre u_1 e u_2

coeficientes u_1 e u_2 , assim como os detalhes de como será implementada a busca por soluções no espaço de fase definido pela figura (4.3).

Capítulo 5

Métodos computacionais

Este capítulo se propõe a caracterizar os métodos computacionais empregados nessa monografia. Após compreendida a modelização de uma curva de luz, o processo de minimização inicial dos parâmetros e a aplicação da técnica MCMC adaptada para o algoritmo do Stretch Move é aqui descrita, assim como as definições de priors e a verossimilhança.

5.1 Minimização pelo algoritmo de Downhill Simplex

Para determinar os coeficientes de escurecimento de limbo é necessário, primeiro, um conhecimento preciso dos parâmetros de primeira ordem no modelo do trânsito, principalmente o período orbital (P_{orb}) e o tempo do centro de trânsito (t_0). Claramente, os valores imprecisos de P_{orb} e t_0 produzem uma determinação incorreta do restante dos parâmetros de trânsito, pois tanto variações no P_{orb} quanto no t_0 deslocam horizontalmente (na coordenada temporal) o modelo da curva de luz do trânsito. Portanto, é essencial determinar P_{orb} e t_0 com a maior precisão possível.

Como primeira etapa, usamos o modelo de trânsito para ajustar esses dois parâmetros para cada objeto usando um algoritmo downhill simplex, mantendo todos os outros parâmetros fixos. O algoritmo downhill simplex (ou algoritmo Nelder–Mead) é um método numérico de busca direta e que é desenhado para obter o mínimo ou máximo de uma função em um espaço multidimensional. Este método é comumente aplicado a problemas de otimização não lineares, especialmente para os quais as derivadas podem não ser conhecidas e, portanto, o método de Newton não pode ser utilizado.

Depois de determinar P_{orb} e t_0 , ajustamos os parâmetros restantes: a razão dos

raios estrela-planeta, o ângulo de inclinação, o semi-eixo maior e os coeficientes de escurcimento de limbo quadráticos u_1 e u_2 , mantendo dessa vez os valores de P_{orb} e t_0 já minimizados fixos. Esta etapa é realizada novamente utilizando o algoritmo downhill simplex. Essa minimização inicial é importante pois usaremos estes resultados de ajuste como valores iniciais para nossa amostragem MCMC descrita a seguir, na seção (5.2).

5.2 Markov Chain Monte Carlo

Métodos MCMC (Monte Carlo Markov Chain) são cada vez mais frequentes em ciências guiadas por dados. Objetivamente esses métodos são usados para obter amostragens da distribuição a posteriori da função de densidade de probabilidade dos parâmetros livres (PDF - do inglês, *probability density function*), e são especialmente convenientes quando o problema em questão envolve muitos parâmetros livres ou quando os modelos são caros computacionalmente e as observações têm uma baixa razão sinal-ruído. Elementos muito frequentes em análises astrofísicas, como no caso deste trabalho.

Fundamentalmente, uma cadeia de Markov é uma sucessão de estados, de forma que cada estado só é dependente do estado exatamente anterior a ele. Já o método Monte Carlo implica que essa passagem de um estado para o outro vai ser determinada de forma determinística. Ao tratar de distribuições a priori e a posteriori, estamos usando aqui o paradigma Bayesiano para estatística. Na estrutura Bayesiana, como todas as inferências são baseadas nas PDFs, existe uma base matemática bem estabelecida para quantificar as incertezas nos parâmetros do modelo. Enquanto que no paradigma frequentista os métodos em cada tipo de inferência (pontual, intervalar e teste de hipóteses) podem diferir bastante.

5.3 Implementação do MCMC

Existem diversas variações do MCMC que podem ser aplicadas dependendo de condições de contorno de cada contexto de dados e modelos. Um dos mais utilizados na literatura é o algoritmo de Metropolis-Hastings [39],[40], que consiste, para o caso específico do passeio aleatório, em gerar uma proposta de parâmetros usando uma distribuição normal localizada nos parâmetros atuais. Caso essa proposta tenha maior verossimilhança que a verosimilhança dos parâmetros atuais (ou seja, $L_j/L_{j-1} > 1$) ela será aceita, caso

contrário, a proposta ainda pode ser aceita desde que $L_j/L_{j-1} > q$ onde q é um número amostrado de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, e L_j representa a verossimilhança na iteração j . Dessa forma o algoritmo consegue evitar ficar preso em mínimos locais e ter maior liberdade para explorar o espaço de parâmetros.

Entretanto, nesse trabalho, vamos usar uma variação proposta por Goodman & Weare (2010) [41] conhecida como Stretch Move ou ainda Stretch Move paralelo, que mantém a maneira que o algoritmo de Metropolis-Hastings é proposto, porém evita mínimos locais enquanto altera a forma que é feita a proposta de parâmetros. Essa variação depende de implementarmos cadeias de Markov paralelas simultâneas, denominadas de walkers¹. Os walkers evoluem de forma que a direção da distribuição proposta para um determinado walker depende da posição de outros walkers do conjunto, como explícito no algoritmo (1). A magnitude do passo proposto depende de uma distribuição $g(z)$, como representado pela equação (5.1), onde a é uma constante que pode ser ajustada para cada aplicação específica, mas o valor padrão usado na maioria dos casos [41] é $a = 2$, e é esse o valor que usamos nesse trabalho. A figura (5.1) traz uma representação visual de como esse algoritmo funciona.

$$g(z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} & , \text{ se } z \in [\frac{1}{a}, a] \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Para K walkers no conjunto $S = \{X_k\}$, a proposta para a walker k se baseia em uma walker do conjunto complementar $S_k = \{X_j \mid j \neq k\}$.

Algoritmo 1: Stretch Move

```

for  $k = 1, 2, \dots, K$  do
    Escolha uma walker  $X_j$  aleatoriamente do conjunto complementar  $S_k(t)$ ;
     $z \sim g(z)$ ;
     $Y \sim X_j + z[X_k - X_j]$ ;
     $q = z^{N-1}[P(Y)/P(X_k)]$ ;
    Gere um número aleatório  $r \sim Uniform[0, 1]$ ;
    if  $r \leq q$  then
        |  $\theta_{t+1} = Y$ ;
    else
        |  $\theta_{t+1} = \theta_t$ ;

```

¹No contexto deste trabalho, “walkers” são as caminhadas na busca de soluções explorando o espaço de parâmetros. Iremos manter aqui terminologia inglesa.

Nesse trabalho, contaremos com a biblioteca EMCEE[42] para auxílio na implementação do processo de amostragem por Stretch Move, essa biblioteca oferece uma implementação completa em python tanto do amostrador quanto do MCMC e é amplamente usada nesse tipo de problema na literatura.

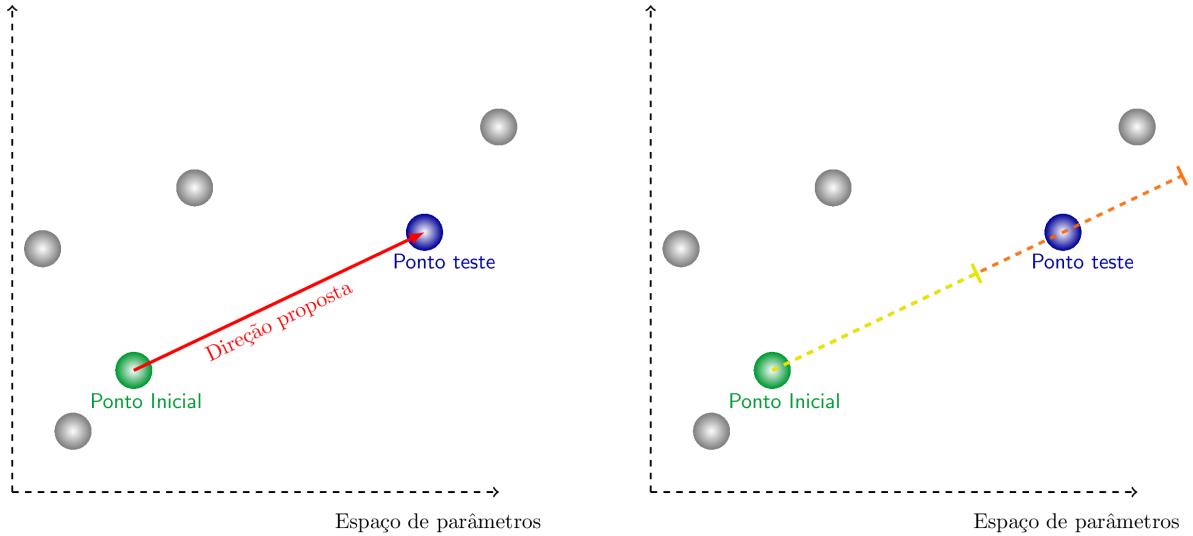


Figura 5.1: A esquerda, representação visual da direção proposta pelo Stretch Move. A direita, magnitudes máximas (Laranja) e mínimas (Amarelo) da proposta com $a = 2$

5.4 Verossimilhança e Priors

No contexto Bayesiano, a verossimilhança (do inglês, *likelihood*) quantifica a qualidade do ajuste de um modelo estatístico a uma amostra de dados para determinados valores dos parâmetros desconhecidos. Se partirmos de uma premissa que nossos dados apresentam barras de erro corretas, gaussianas e independentes, podemos expressar a verossimilhança como uma distribuição normal, e por estabilidade numérica, usaremos o logaritmo conforme a equação (5.2).

$$\ln p(x|\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{(x_i - \theta_i)^2}{\sigma_i^2} + \ln(2\pi\sigma_i^2) \right) \quad (5.2)$$

Onde N é o número de pontos nos dados. Enquanto x_i representa a medida de fotométrica de índice i , θ_i o valor de intensidade do fluxo gerado pelo conjunto de parâmetros atuais e σ_i representa o erro associado a cada medida.

Neste trabalho, vamos montar o algoritmo para variar 5 parâmetros r_p/r_* , a , i ,

q_1 e q_2 , enquanto mantemos fixados P_{orb} e t_0 . Manter P_{orb} e t_0 como parâmetros fixos é razoável pois, como são parâmetros que interferem muito no ajuste da curva de luz, temos estimativas desses parâmetros com pequenas barras de erro, enquanto que o P_{orb} ainda pode ser obtido por outras técnicas fora a aqui abordada, como por Lomb-Scargle.

Já para as distribuições *a priori*, pelo princípio da indiferença, considerando que outras informações não são suficientemente relevantes para tomarem forma de distribuições analíticas específicas, vamos usar *priors* não informativas definindo uma distribuição uniforme normalizada por todo o espaço físico de cada parâmetro, facilitando assim, a exploração das cadeias pelo espaço físico. Rejeitando apenas os valores não físicos dos parâmetros.

Capítulo 6

Resultados e Conclusões

Este TCC apresentou o desenvolvimento por trás do método do trânsito planetário e, mais especificamente, da física associada ao escurecimento de limbo. Assim como realizamos a aplicação de métodos estatísticos baseados no paradigma Bayesiano associados a métodos Monte Carlo para amostragem de funções de densidade de probabilidade no contexto da física estelar e de exoplanetas.

Dessa forma, determinamos o perfil de brilho para os 31 objetos selecionados após o procedimento de tratamento de dados com auxílio da técnica de MCMC com 200 walkers independentes e com 5000 iterações para amostrar distribuições à posteriori dos parâmetros do sistema. Utilizamos um descarte de 40% para as primeiras iterações burning¹. As cadeias foram iniciadas em ‘bolas’ gaussianas ao redor dos valores minimizados pelo algorítimo de ”Simplex downhill” descrito na secção (5.1). Na obtenção dos resultados, o diagnóstico de convergência foi dado a partir da análise básica de três pontos. Primeiro, o gráfico de traçados (*trace plot*), que mostra como as cadeias exploraram o espaço de parâmetros. Segundo, analisamos a fração de aceitação média e por último avaliamos o tempo de auto-correlação médio. Este tempo de auto-correlação médio é, de forma sucinta, o “tempo”(em medidas de iterações) que a cadeia leva pra convergir. Já a fração de aceitação média é a taxa que as propostas geradas pelo Stretch Move estão sendo aceitas. Para o nosso problema, o resultado do tempo de auto-correlação médio das cadeias ficou entre 70 e 200 iterações de um modo geral. Enquanto a fração de aceitação média ficou entre 45% e 55%. Sendo assim, comparando nosso resultado com valores descritos na literatura, percebe-se que estamos dentro do aceitável, onde o tempo

¹Também conhecido como warm-up e é referente ao período que as cadeias ainda não convergiram para a região de interesse e estão espalhadas em uma área maior do espaço de parâmetros.

de auto-correlação médio é várias vezes menor que o número de iterações totais para se obter uma boa amostragem da distribuição a posteriori. Já para à fração de aceitação média, aceita-se algo entre 25% e 75% para a convergência.

O resultado principal do presente trabalho são as estimativas pela amostragem da posteriori obtida, o valor ideal no nosso caso é dado pela mediana da posteriori. A partir desta distribuição amostrada, no contexto Bayesiano, podemos fazer estimativas de erro dado por quantis de 1σ , usando os valores dos quantis 0.16 e 0.84, além da mediana para o valor principal. Esses resultados estão apresentados na Tabela (A.1). Em seguida, analisamos os ajustes dos parâmetros obtidos na curva de luz original. Particularmente nesta análise estamos tratando com curvas de luz muito longas (em alguns casos cerca de 1000 dias) e neste caso, o gráfico do modelo em cima dos dados como um todo fica pouco informativo. Para resolver essa questão, utilizamos a curva de luz dobrada na fase (do inglês, *phase-fold*). Dessa forma, vemos todos os trânsitos plotados sobrepostos, assim confrontando melhor o resultado, além de melhorar a visualização do resultado. Esses gráficos estão disponíveis na figura (A.1).

Além disso, comparamos nossos resultados obtidos por amostragem *a posteriori* com os valores obtidos a partir de modelos estelares da fotosfera, no caso o PHEONIX e o ATLAS. Os valores resultantes dos modelos variam de acordo com a temperatura efetiva da estrela, como representado nas figuras (6.1) e (6.3). É importante perceber a divisão da amostra pelo parâmetro de impacto. A figura (6.1) representa os sistemas com $b < 0.8$, já a figura (6.3) contém os sistemas com $b < 0.8$. Para essa análise foi usado o limite superior como *threshold* para a divisão da amostra ².

Também comparamos nossos resultados com aqueles obtidos por Muller *et al.* 2013 [27], reproduzindo as figuras originais do artigo, figuras (6.2) e (6.4) utilizando outras abordagens computacionais introduzidas nessa monografia. Pode-se ver uma melhora nas barras de erro, principalmente para objetos com maior parâmetro de impacto. Para esses objetos o ajuste de Muller *et al.* 2013 [27] permite inclusive valores não físicos para os coeficientes (como $u_1 < 0$) o que invalida todo o conjunto de parâmetros envolvido. Esses valores não físicos aparecem no intervalo de 1σ da estimativa pontual da probabilidade, ou seja, isso quer dizer e a cadeia esteve constantemente explorando a região não física dos coeficientes de escurecimento de limbo mesmo após o período de aquecimento (*burn-in*).

²Foram considerados os limites superiores das barras de erros, ou seja, um objeto com o $b = 0.75^{+0.06}_{-0.06}$ foi considerado como de alto parâmetro de impacto.

Baseado na nossa análise ainda não se vê uma clara tendência de decidir qual o melhor modelo e o descartar o pior modelo relacionado com o problema de ajuste fino da curva de luz e do tratamento do escurecimento de limbo.

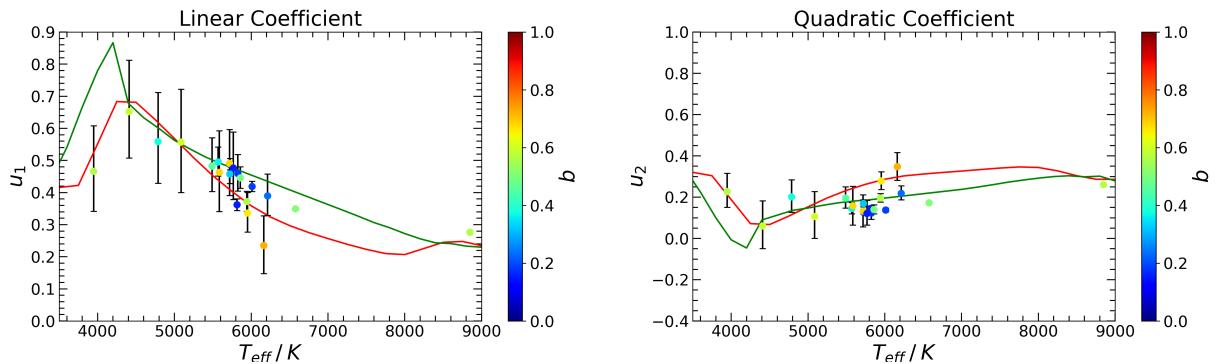


Figura 6.1: À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo determinados pelo MCMC deste trabalho. Para comparação, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelha).

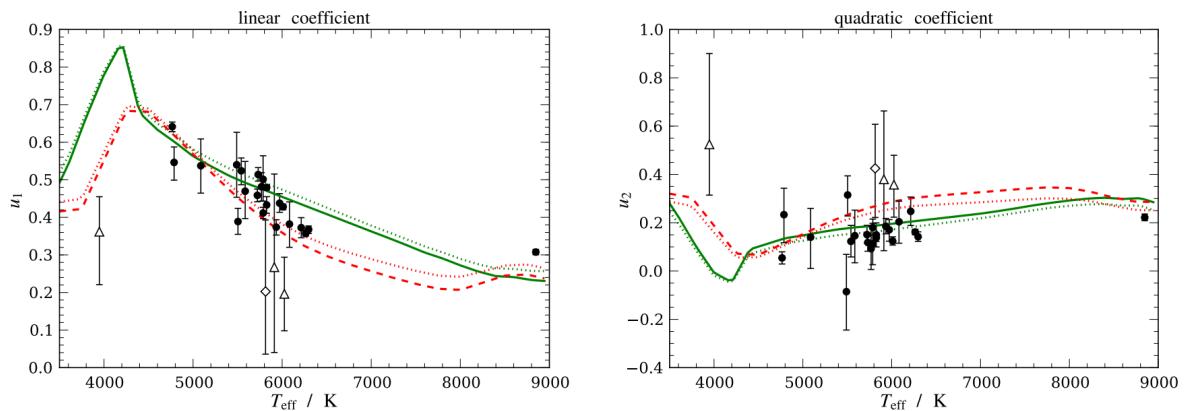


Figura 6.2: Figura original de Muller *et al.* 2013 para comparação. Aqui para objetos de baixo parâmetro de impacto. À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo. Da mesma forma, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelho). **Fonte:** Muller *et al.* 2013 [27]

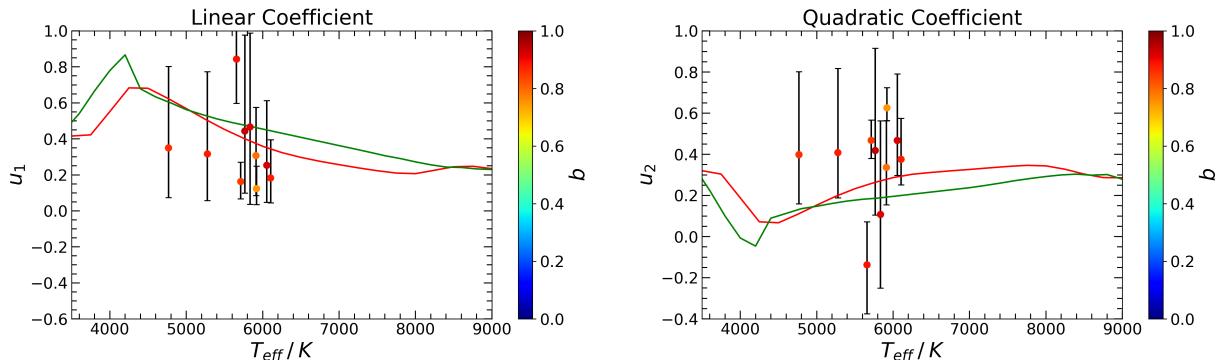


Figura 6.3: À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo determinados pelo MCMC, para nossa amostra alvo de alto parâmetro de impacto ($b > 0.8$). Para comparação, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelha).

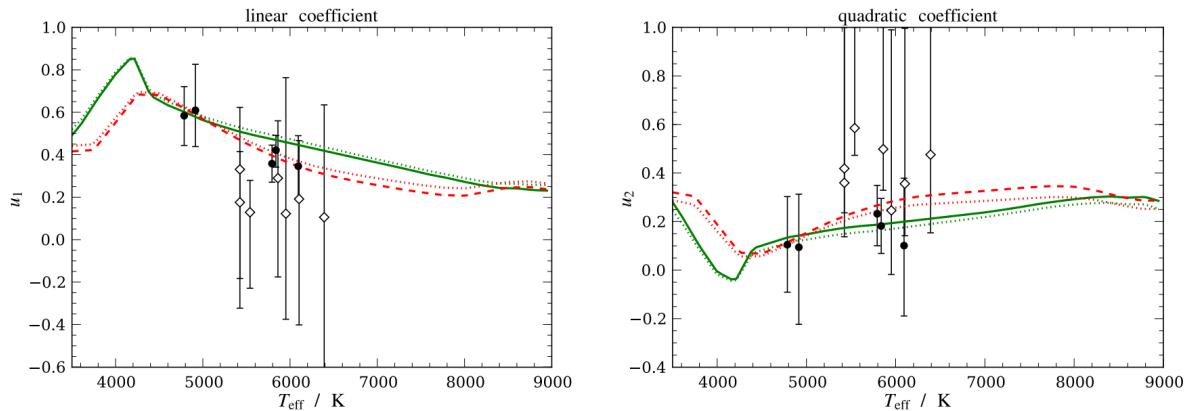


Figura 6.4: Figura original de Muller *et al.* 2013. Para objetos de alto parâmetro de impacto ($b > 0.8$). À esquerda os valores para u_1 e à direita os valores para u_2 . Os pontos representam os coeficientes de escurecimento de limbo. Da mesma forma, os gráficos mostram o modelo de previsões baseadas em modelos atmosféricos PHOENIX (linha verde) e ATLAS (linha vermelho). **Fonte:** Muller *et al.* 2013 [27]

Tendo em vista os resultados obtidos com essa monografia, percebemos que a adaptação de uma técnica MCMC mais objetiva na busca pela região de interesse, pode ser muito importante para o resultado final e a convergência dos parâmetros com um número menor de iterações quando comparado com outros trabalhos da literatura. Concluímos que não é explícito e evidente qual a melhor lei e pressupostos enquanto a natureza intrínseca da modelização do escurecimento de limbo. No momento, tanto abordagens *a priori* quanto *a posteriori* parecem ajustar bem os dados observacionais.

Capítulo 7

Perspectivas

Como continuidade deste trabalho pretendemos analisar as variações do escurecimento de limbo em diferentes eventos de trânsito e a luz de uma comparação do ajuste do escurecimento de limbo para diferentes períodos observados (diferentes *quarters*) de um mesmo sistema estrela-planeta, pretendemos utilizar dados do satélite TESS da NASA. Analisaremos também o comportamento do ajuste do escurecimento de limbo em sistemas múltiplos de planetas, comprando os coeficientes obtidos para os casos de planetas atrelados a uma mesma estrela hospedeira. Isso nos permitirá compreender melhor os efeitos e tratamentos do escurecimento de limbo no trânsito de um exoplaneta.

Referências Bibliográficas

- [1] Eddy, J.A. and Ise, R. *New Sun: The Solar Results From Skylab. NASA SP-402*, (Rein Ise NASA, Washington, D.C., 1979).
- [2] Parker, E.N., *The Astrophysical Journal* **122**, 293 (1955).
- [3] Do Nascimento, J.D.J., da Silva, L., de Medeiros, J.R., Setiawan, J., and Pasquini, L., *Chemical Abundances and Mixing in Stars in the Milky Way and its Satellites*, 48 (2006).
- [4] do Nascimento, J.-D., de Almeida, L., Velloso, E.N., Anthony, F., Barnes, S.A., Saar, S.H., et al , *The Astrophysical Journal* **898**, 173 (2020).
- [5] Muller, G. 1897. die Photometrie deg Gestirne. die Photometrie deg Gestirne, by G. Mueller. Verlag von Wilhelm Engelmann, 556 pages, 1897.
- [6] Bagdonas, A., Zanetic, J., Gurgel, Rev. Bras. Ensino Fís. 39 **2** (2017)
- [7] Milne, E.A., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **81**, 361. (1921)
- [8] Manduca, A., Bell, R.A., and Gustafsson, B., *Astronomy and Astrophysics* **61**, 809. (1977)
- [9] Diaz-Cordoves, J. and Gimenez, A., *Astronomy and Astrophysics* **259**, 227. (1992)
- [10] Klingsmith, D.A. and Sobieski, S., *The Astronomical Journal* **75**, 175. (1970)
- [11] Mandel, K. and Agol, E., *The Astrophysical Journal* **580**, L171.(2002)
- [12] Kurucz, R.L., *SAO Special Report* **309** (1970).
- [13] Baron, E., Chen, B., and Hauschildt, P.H., *Astrophysics Source Code Library* (2010).

- [14] H. M. Muller, *Limb-darkening Measurements on Exoplanet Host Stars and the Sun* (2016).
- [15] Bouguer P., *Traité d'optique sur la gradation de la lumière, ouvrage posthume de M. Bouguer,* (impr. de H.-L. Guérin, Paris, 1760).
- [16] Mayor, M. and Queloz, D., *Nature* **378**, 355. (1995).
- [17] Koch, D.G., Borucki, W.J., Basri, G., Batalha, N.M., Brown, T.M., Caldwell, D., Christensen-Dalsgaard, J., Cochran, W. D., DeVore,E., Dunham, E. W. et al. , *The Astrophysical Journal* **713**, L79. (2010).
- [18] Wolszczan, A.: 1992, *Lunar and Planetary Science Conference*.
- [19] Auvergne, M., Bodin, P., Boisnard, L., Buey, J.-T., Chaintreuil, S., Epstein, G., Jouret, M., Lam-Trong, T., Levacher, P., Magnan, A. et al., *Astronomy and Astrophysics* **506**, (2009).
- [20] Kopparapu, R.K., Ramirez, R., Kasting, J.F., Eymet, V., Robinson, T.D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V., and Deshpande R. , *The Astrophysical Journal* **765**, 131. (2013).
- [21] Howell, S.B., Sobeck, C., Haas, M., Still, M., Barclay, T., Mullally, F., Troeltzschi, J., Aigrain, S., Bryson, S. T., Caldwell, D. et al., *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **126**, 398. (2014).
- [22] Ricker, G.R., Winn, J.N., Vanderspek, R., Latham, D.W., Bakos, G.Á., Bean, J.L., Berta-Thompson, Z. K., Brown, T.M., Buchhave, L., Butler, N. R. et al, *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems* **1**, 014003. (2015).
- [23] Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., Appourchaux, T., Benz, W., Brandeker, A., Christensen-Dalsgaard, J., Deleuil, M., Gizon, L., Goupil, M. -J., *Experimental Astronomy* **38**, 249. (2014).
- [24] Gardner, J.P., Mather, J.C., Clampin, M., Doyon, R., Greenhouse, M.A., Hammel, H.B., Hutchings, J. B., Jakobsen, P., Lilly, S. J., Long, K. S. *Space Science Reviews* **123**, 485. (2006).

- [25] Csizmadia, S., Pasternacki, T., Dreyer, C., Cabrera, J., Erikson, A., and Rauer, H., *Astronomy and Astrophysics* **549**, A9. (2013).
- [26] Kipping, D. and Bakos, G., *The Astrophysical Journal* **730**, 50. (2011)
- [27] Müller, H.M., Huber, K.F., Czesla, S., Wolter, U., and Schmitt, J.H.M.M., *Astronomy and Astrophysics* **560**, A112. (2013)
- [28] Knutson, H.A., Charbonneau, D., Noyes, R.W., Brown, T.M., and Gilliland, R.L., *The Astrophysical Journal* **655**, 564. (2007)
- [29] Al. A. de Souza, A. Valio, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, 4. (2019)
- [30] Perryman, M. , *The Exoplanet Handbook*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)
- [31] Zang, W., Han, C., Kondo, I., Yee, J.C., Lee, C.-U., Gould, A., and, ...: 2021, *Research in Astronomy and Astrophysics* **21**, 239.
- [32] Silver, N., *The signal and the noise: Why so many predictions fail but some don't.* (Penguin Press, New York, 2012)
- [33] Laplace, Pierre S, *Essai Philosophique Sur Les Probabilités.*(Paris, Mme. Ve. Courcier, 1814.)
- [34] Seager, S. and Mallén-Ornelas, G., *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets* **294**, 419. (2003).
- [35] Kreidberg, L., *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **127**, 1161.(2015).
- [36] Kipping, D.M., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **435**, 2152.(2013).
- [37] Hébrard, G., Santerne, A., Montagnier, G., Bruno, G., Deleuil, M., Havel, M., Almenara, J. -M. , Damiani, C. , Barros, S. C. C. , Bonomo, A. S. et al. *Astronomy and Astrophysics* **572**, A93. (2014)
- [38] Borucki, W.J., Koch, D.G., Basri, G., Batalha, N., Brown, T.M., Bryson, S.T., and, ...: 2011, *The Astrophysical Journal* **736**, 19.

-
- [39] Hastings, W. K. . Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, **57**, 97.(1970)
 - [40] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E. , Journal of Chemical Physics **21**, 1087 (1953).
 - [41] Goodman, J. and Weare, J., Communications in Applied Mathematics and Computational Science **5**, 65. (2010).
 - [42] Foreman-Mackey, D., Hogg, D.W., Lang, D., and Goodman, J., Publications of the Astronomical Society of the Pacific **125**, 306.(2013).
 - [43] Foreman-Mackey, D., The Journal of Open Source Software **1**, 24.(2016).
 - [44] G.B.Arfken, H.J.Weber, *Mathematical methods for physics*, (6th edition, Amsterdam; Boston, Elsevier, 2005).
 - [45] Mark E. J. Newman, *Computational Physics*, (Createspace Independent Pub, Michigan, 2012).

Apêndice A

Resultados Complementares

Nesse apêndice está disponível a tabela com o resultado do algoritmo MCMC com os valores dos parâmetros ajustados. Disponibilizamos também os gráficos das curvas de luz de cada objeto sobrepostos em fase com o modelo mais provável resultante do MCMC. Estes estão dispostos nas próximas páginas.

Kepler ID	a/r_*	r_p/r_*	i (0)	b	u_1	u_2
10019708	$7.711^{+0.085}_{-0.079}$	$0.092^{+0.000348}_{-0.000400}$	$88.273^{+0.455}_{-0.337}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.39^{+0.02}_{-0.02}$	$0.218^{+0.045}_{-0.045}$
10318874	$14.882^{+0.52}_{-0.502}$	$0.037^{+0.000476}_{-0.000451}$	$87.722^{+0.236}_{-0.227}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.652^{+0.036}_{-0.033}$	$0.06^{+0.118}_{-0.118}$
10666592	$4.126^{+0.002}_{-0.002}$	$0.078^{+0.000012}_{-0.000012}$	$82.967^{+0.014}_{-0.014}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.349^{+0.001}_{-0.001}$	$0.172^{+0.003}_{-0.003}$
10874614	$7.501^{+0.021}_{-0.02}$	$0.093^{+0.000101}_{-0.000103}$	$88.898^{+0.176}_{-0.15}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.488^{+0.006}_{-0.006}$	$0.127^{+0.012}_{-0.012}$
11295426	$5.643^{+0.078}_{-0.078}$	$0.021^{+0.000520}_{-0.000485}$	$80.902^{+0.16}_{-0.164}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.843^{+0.009}_{-0.01}$	$-0.137^{+0.205}_{-0.205}$
11359879	$9.872^{+0.036}_{-0.035}$	$0.103^{+0.000344}_{-0.000357}$	$86.039^{+0.036}_{-0.035}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.491^{+0.022}_{-0.02}$	$0.132^{+0.08}_{-0.08}$
11391018	$40.908^{+0.458}_{-0.404}$	$0.132^{+0.001005}_{-0.001240}$	$89.474^{+0.057}_{-0.045}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.559^{+0.051}_{-0.044}$	$0.201^{+0.093}_{-0.093}$
11446443	$7.859^{+0.023}_{-0.202}$	$0.124^{+0.000559}_{-0.000498}$	$83.83^{+0.023}_{-0.021}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.163^{+0.002}_{-0.002}$	$0.468^{+0.103}_{-0.103}$
11804465	$7.996^{+0.014}_{-0.014}$	$0.118^{+0.000093}_{-0.000092}$	$88.675^{+0.079}_{-0.075}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.419^{+0.005}_{-0.005}$	$0.137^{+0.011}_{-0.011}$
12019440	$9.007^{+0.057}_{-0.054}$	$0.118^{+0.000336}_{-0.000353}$	$88.849^{+0.298}_{-0.222}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.459^{+0.019}_{-0.02}$	$0.123^{+0.038}_{-0.038}$
12105051	$7.694^{+0.134}_{-0.125}$	$0.055^{+0.001520}_{-0.000782}$	$83.411^{+0.148}_{-0.147}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.316^{+0.02}_{-0.019}$	$0.408^{+0.409}_{-0.409}$
3861595	$5.247^{+0.085}_{-0.081}$	$0.041^{+0.001065}_{-0.000544}$	$79.867^{+0.197}_{-0.198}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.253^{+0.012}_{-0.013}$	$0.467^{+0.33}_{-0.33}$
4349452	$18.479^{+0.158}_{-0.153}$	$0.036^{+0.000488}_{-0.000285}$	$87.263^{+0.03}_{-0.03}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.183^{+0.004}_{-0.004}$	$0.376^{+0.202}_{-0.202}$
5084942	$7.435^{+0.282}_{-0.24}$	$0.032^{+0.000949}_{-0.000615}$	$83.336^{+0.342}_{-0.305}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.35^{+0.023}_{-0.018}$	$0.398^{+0.403}_{-0.403}$
5357901	$11.61^{+0.08}_{-0.075}$	$0.114^{+0.000675}_{-0.000715}$	$87.03^{+0.075}_{-0.068}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.557^{+0.037}_{-0.046}$	$0.106^{+0.119}_{-0.119}$
5780885	$6.633^{+0.019}_{-0.019}$	$0.082^{+0.000103}_{-0.000102}$	$85.146^{+0.051}_{-0.05}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.372^{+0.007}_{-0.007}$	$0.196^{+0.024}_{-0.024}$
5794240	$10.721^{+0.031}_{-0.03}$	$0.182^{+0.000836}_{-0.000868}$	$86.993^{+0.039}_{-0.036}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.466^{+0.036}_{-0.035}$	$0.227^{+0.098}_{-0.098}$
6849046	$11.047^{+0.13}_{-0.128}$	$0.08^{+0.000409}_{-0.000401}$	$87.641^{+0.152}_{-0.146}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.482^{+0.024}_{-0.023}$	$0.196^{+0.061}_{-0.061}$
6922244	$6.772^{+0.019}_{-0.019}$	$0.094^{+0.000308}_{-0.000305}$	$83.867^{+0.038}_{-0.038}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.235^{+0.01}_{-0.009}$	$0.347^{+0.08}_{-0.08}$
7023960	$49.621^{+0.354}_{-0.413}$	$0.141^{+0.000708}_{-0.000664}$	$89.824^{+0.093}_{-0.066}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.476^{+0.038}_{-0.036}$	$0.121^{+0.068}_{-0.068}$
7877496	$4.851^{+0.025}_{-0.024}$	$0.103^{+0.001018}_{-0.000865}$	$80.58^{+0.073}_{-0.073}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.307^{+0.02}_{-0.02}$	$0.336^{+0.233}_{-0.233}$
8191672	$6.403^{+0.023}_{-0.021}$	$0.079^{+0.000077}_{-0.000081}$	$88.608^{+0.241}_{-0.197}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.362^{+0.006}_{-0.006}$	$0.145^{+0.013}_{-0.013}$
8359498	$9.663^{+0.051}_{-0.049}$	$0.098^{+0.000233}_{-0.000237}$	$87.858^{+0.101}_{-0.093}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.495^{+0.014}_{-0.014}$	$0.145^{+0.031}_{-0.031}$
8456679	$4.03^{+0.099}_{-0.095}$	$0.03^{+0.000261}_{-0.000226}$	$79.253^{+0.492}_{-0.486}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.124^{+0.004}_{-0.005}$	$0.626^{+0.116}_{-0.116}$
8554498	$7.588^{+0.201}_{-0.129}$	$0.039^{+0.002020}_{-0.001026}$	$82.851^{+0.206}_{-0.144}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.443^{+0.019}_{-0.016}$	$0.418^{+0.493}_{-0.493}$
8684730	$27.78^{+0.807}_{-0.724}$	$0.047^{+0.001893}_{-0.001141}$	$88.109^{+0.065}_{-0.062}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.466^{+0.054}_{-0.067}$	$0.107^{+0.419}_{-0.419}$
9410930	$5.09^{+0.023}_{-0.022}$	$0.101^{+0.000410}_{-0.000444}$	$82.288^{+0.092}_{-0.084}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.463^{+0.026}_{-0.023}$	$0.158^{+0.097}_{-0.097}$
9631995	$13.563^{+0.04}_{-0.04}$	$0.096^{+0.000129}_{-0.000129}$	$87.906^{+0.028}_{-0.028}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.446^{+0.009}_{-0.009}$	$0.14^{+0.025}_{-0.025}$
9651668	$8.128^{+0.021}_{-0.021}$	$0.124^{+0.000187}_{-0.000185}$	$87.695^{+0.069}_{-0.067}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.458^{+0.01}_{-0.01}$	$0.169^{+0.021}_{-0.021}$
9818381	$6.922^{+0.026}_{-0.025}$	$0.086^{+0.000206}_{-0.000207}$	$84.556^{+0.056}_{-0.054}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.336^{+0.011}_{-0.01}$	$0.279^{+0.051}_{-0.051}$
9941662	$3.86^{+0.002}_{-0.002}$	$0.065^{+0.000012}_{-0.000012}$	$81.54^{+0.017}_{-0.016}$	$0.232^{+0.281}_{-0.297}$	$0.276^{+0.001}_{-0.001}$	$0.261^{+0.004}_{-0.004}$

Tabela A.1: Tabela com os resultados das estimativas dos parâmetros de trânsito para os 31 objetos e os respectivos intervalos de 1σ , no contexto Bayesiano

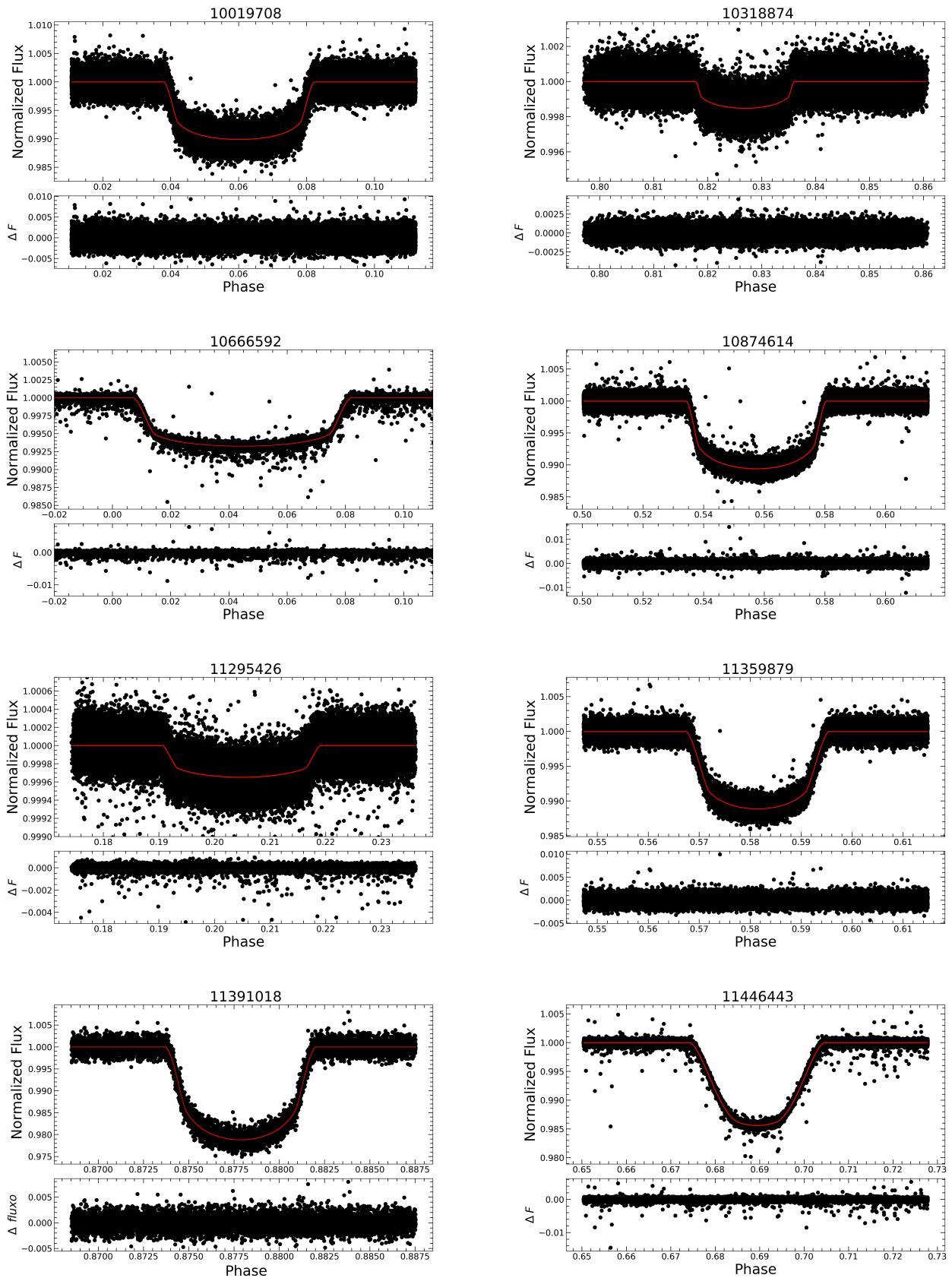


Figura A.1: Título: KIC do objeto. Painéis superiores: curvas de luz normalizadas e modelos da mediana da posterior. Painéis inferiores: resíduo.

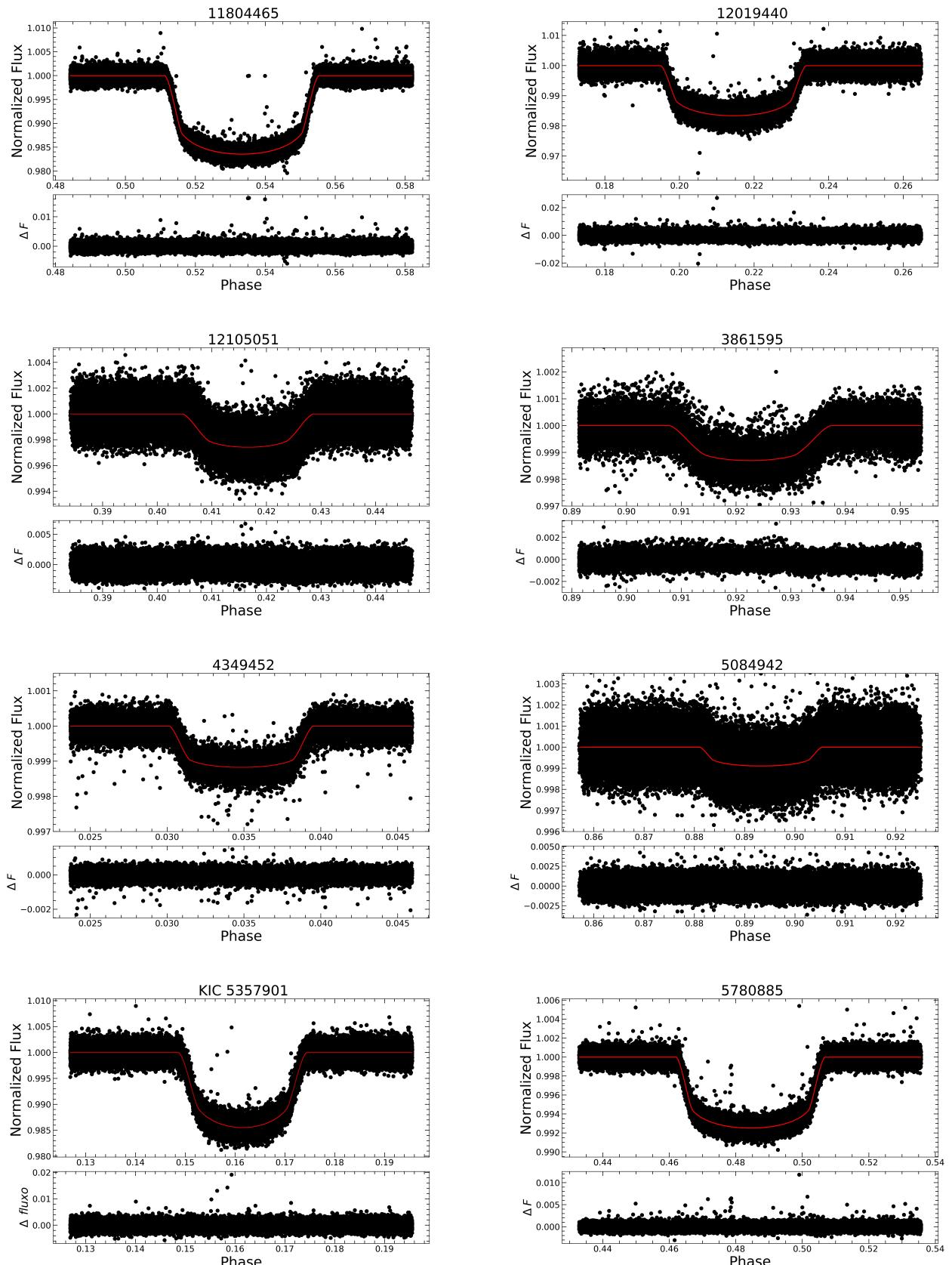


Figura A.2: Continuação da figura (A.1)

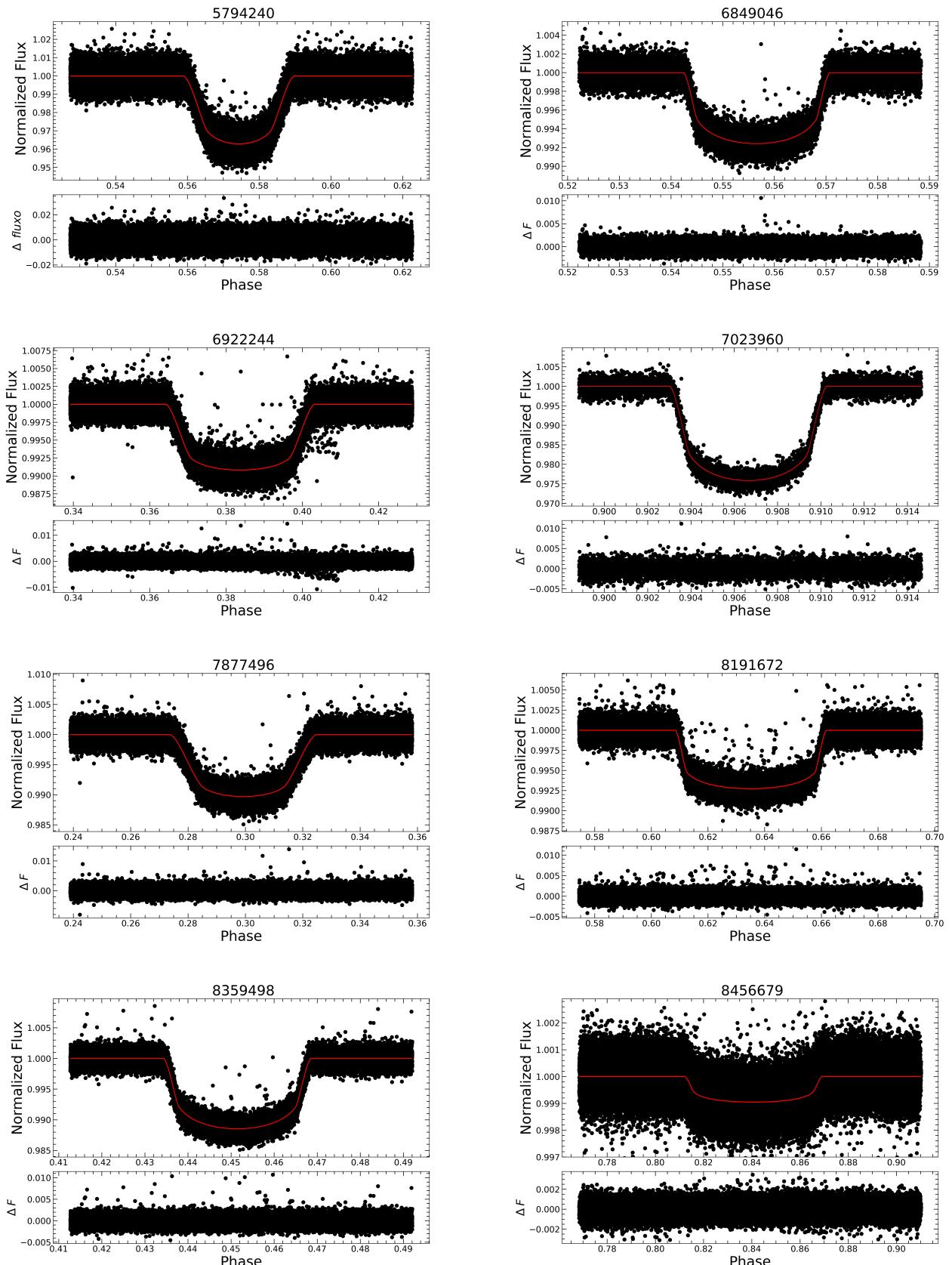


Figura A.3: Continuação da figura (A.1)

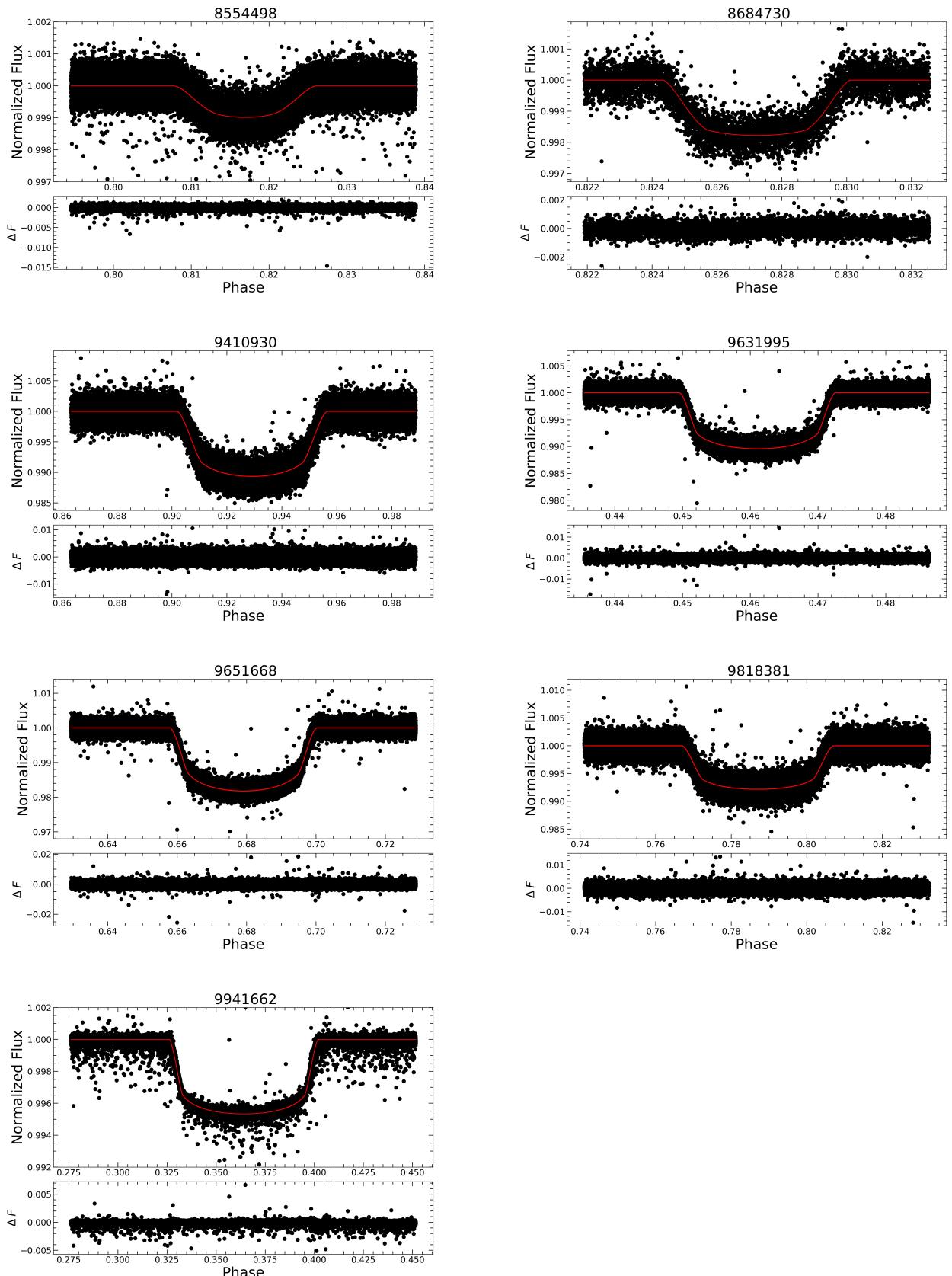


Figura A.4: Continuação da figura (A.1)