Processos Estocásticos

Gabriela Alcaide - 14746492

Universidade de São Paulo - USP

2024

O que são Processos Estocásticos?

Processos que envolvem uma família de variáveis aleatórias indexadas por índices (que representam tempo, por exemplo).

Exemplos:

1) Lançar um dado equiprovável algumas vezes ao longo do tempo.

2) Medir o nível de colesterol ao longo do tempo.

Processos Estocásticos podem ser representados como gráficos, conforme segue.

O que são Processos Estocásticos?

- Os vértices são os estados possíveis da variável;

- As arestas representam a alteração de índice ("passagem do tempo");

- Os pesos das arestas representam as probabilidades.

Dessa forma, podemos utilizar matrizes para representar o Processo:

$$a_{ij} = Pr(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

Ou seja, o valor na posição ij é a probabilidade de que, estando no estado da linha i, chegue-se ao estado da coluna j.

Cadeia de Markov

Processo Estocástico em que uma observação depende apenas da observação imediatamente anterior.

O passado remoto não é relevante.

$$Pr(X_{n+1} = x | X_1, ..., X_n) = Pr(X_{n+1} = x | X_n)$$

Ou seja, a probabilidade de uma observação dadas todas as anteriores é igual a probabilidade dessa observação dada apenas a imediatamente anterior.

Hidden Markov Model

Considere a família de variáveis aleatórias X, que funciona conforme uma Cadeia de Markov. As observações dessa família X são desconhecidas.

Considere também uma família de variáveis aleatórias Y, que dependem de X, e cujas observações são conhecidas.

Problema:
Dada certa sequência de observações de Y, qual a sequência mais provável de X?

Hiddel Markov Model

1) Calcular a probabilidade de cada sequência de observações de X.

$$Pr(X = X_1, ..., X_n | Y = Y_1, ..., Y_n)$$

2) Aplicar o Teorema de Bayes.

$$Pr(X = X_1, ..., X_n | Y = Y_1, ..., Y_n) = \frac{Pr(Y|X) \times P(X)}{P(Y)}$$

$$Pr(X = X_1, ..., X_n | Y = Y_1, ..., Y_n) \propto Pr(Y|X) \times P(X)$$

3) Como Y_t depende apenas do humor em X_t:

$$Pr(Y|X) = Pr(Y_1|X_1) * ... * Pr(Y_n|X_n)$$

Hidden Markov Model

4) Como X segue a Cadeia de Markov, X_t depende apenas de X_{t-1}:

$$Pr(X) = \prod Pr(X_t|X_{t-1})$$

5) Com 3 e 4, temos:

$$\prod Pr(Y_t|X_t) * Pr(X_t|X_{t-1})$$

6) Encontrar a sequência de observações de X que maximiza a expressão:

$$\arg\max_X \prod Pr(Y_t|X_t) * Pr(X_t|X_{t-1})$$

Markov Decision Process

Considere um conjunto de estados S, um conjunto de ações A e um conjunto de recompensas R, todos finitos. Considere ainda que as variáveis referentes aos estados e às ações dependem apenas das observações imediatamente anteriores.

A cada momento t = 0, 1, ..., o agente recebe uma representação do estado S_t. Com base nesse estado, o agente toma uma decisão A_t. Daí, forma-se o par estado-ação (S_t, A_t).

O tempo é, então, incrementado para $t+1$, e o estado vai para S_{t+1}. Nesse ponto, o agente recebe a recompensa $Rt+1$, que se refere à ação A_t.

Markov Decision Process

Esse processo corresponde a uma função f tal que

$$f(S_t, A_t) = R_{t+1}$$

A trajetória desse processo sequencial é representada como:

$$S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, S_2, A_2, R_3, \ldots$$

Markov Decision Process

Problema:
Qual a probabilidade de obter o estado s' com recompensa r, por tomar a ação a no estado s?

Sejam s' e $s \in S$, $r \in R$ e $a \in A(s)$ - conjunto de ações que podem ser tomadas a partir do estado s.

$$Pr(s', r|s, a) = Pr(S_t = s', R_t = r|S_{t-1} = s, A_{t-1} = a)$$

Gaussian Process Regression

Um **Processo Gaussiano** pode ser compreendido pelo seguinte raciocínio:

- Uma amostra de distribuição normal representa um número distribuído ao redor de sua média;

- A distribuição normal pode ser generalizada, para representar um vetor de números (distribuição normal multivariada);

- Se esse vetor de números for infinito, tem-se um Processo Gaussiano.

Gaussian Process Regression

Considere um conjunto Y de pontos conhecidos.

Problema:
Com base nesses pontos conhecidos, qual função tem maior probabilidade de ter gerado esses pontos?

Duas informações são relevantes para essa solução:

1) A distribuição de probabilidade das funções é dada por Processos Gaussianos.

2) É possível adaptar a distribuição a novos pontos, calculando a probabilidade de uma função dada uma nova observação y_i:

$$Pr(f|y_i) = \frac{Pr(f, y_i)}{Pr(y_i)}$$

Gaussian Process Regression

Unindo essas informações, pode-se calcular e adaptar a distribuição aos pontos Y observados.

Quando é necessário prever uma única função, ela será a média das funções previstas, que é parte do Processo Gaussiano.

Kallman Filter

Considere que a movimentação de um corpo é observada.

Para estimar sua posição em determinado momento, são utilizadas duas abordagens: utilizar um radar (estimativa por medição - em) ou realizar os cálculos com base em medidas relativas, como a velocidade do corpo (estimativa por estado - ee).

Em ambos os casos, as estimativas podem ser descritas como distribuições normais, cujas médias são as posições mais prováveis para o corpo, em cada abordagem.

Problema:
Como obter a estimativa ótima para a posição do corpo, com base nas estimativas obtidas?

Kallman Filter

Para resolver essa questão, alguns passos devem ser seguidos, tomando E como erro:

1) Calcular o Kallman Gain:

$$KG = \frac{E_{ee}}{E_{ee} + E_{em}}$$

2) Estimativa ótima para o tempo t:

$$Est_t = Est_{t-1} + KG * (em - Est_{t-1})$$

Essa estimativa será tomada como nova estimativa de estado para o tempo t.

Kallman Filter

3) Erro da nova estimativa para o tempo t:

$$(1 - KG) * E_{t-1}$$

Quanto mais vezes o Kallman Filter é usado, menor o erro da estimação, e melhor a predição.

Trata-se de um Processo Markoviano, pois necessita apenas do erro e da estimativa imediatamente anteriores.

Particle Filter

Considere que a movimentação de um corpo é observada.

Para estimar sua posição em determinado momento, são utilizadas duas abordagens: utilizar um sensor que está no corpo ou realizar os cálculos com base em medidas relativas.

Em ambos os casos, as estimativas não podem ser descritas como distribuições normais.

Problema:
Como obter a estimativa ótima para a posição e direção do corpo, com base nas estimativas obtidas?

Sabe-se que, inicialmente, qualquer posição e direção são igualmente prováveis.

Particle Filter

Para resolver essa questão, alguns passos devem ser seguidos:

1) Gerar pontos conforme uma distribuição aleatória uniforme e salvá-los no filtro como uma estimativa possível.

2) Obter a informação do sensor do corpo real e, comparando com as informações dos sendores das estimativas possíveis, determinar a probabilidade delas.

3) Gerar novos pontos conforme a nova distribuição (que não é mais uniforme).

4) Conforme o robô se move, mover as estimativas possíveis de acordo.

5) Voltar ao passo 2.

Bibliografia

UNIVESP. *Modelos Probabilísticos para Computação - Aula 06 - Processos Estocásticos (1)*. YouTube. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=EX0d$_PzDHTU$.

UNIVESP. *Modelos Probabilísticos para Computação - Aula 07 - Processos Estocásticos (2)*. YouTube. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=G8bBlMfKPC4.

Normaliz Nerd. *Hidden Markov Model Clearly Explained! Part - 5*. YouTube. 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=RWkHJnFj5rY.

Deeplizard. *Markov Decision Processes (MDPs) - Structuring a Reinforcement Learning Problem*. YouTube. 2018. URL: https://www.youtube.com/watch?v=my207WNoeyA.

Bibliografia

Parelos. *Easy introduction to gaussian process regression (uncertainty models)*. YouTube. 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=iDzaoEwd0N0.

Augmented AI. *Kalman Filter for Beginners*. YouTube. 2016. URL: https://www.youtube.com/watch?v=bm3cwEP2nUot=34s.

MATLAB. *Understanding the Particle Filter | | Autonomous Navigation, Part 2*. YouTube. 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=NrzmH$_{y}erBU$.