Lista 7- Geometria Analítica

Nome: Gabriela Mazon Rabello de Souza
R. A.: 2025.1.08.006

Número 1

a) $A=(5,4,1)$ e $B=(-2,3,2)$

vetor diretor: $\vec{v}=(-7,-1,1)$

equações paramétricas: $\begin{cases} x=5-7t \\ y=4-t \\ z=1+t \end{cases}$

equação simétrica: $\frac{x-5}{-7}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{1}$

b) $A=(0,1,0)$ e $B=(1,0,0)$

vetor diretor: $\vec{v}=(1,1,0)$

equações paramétricas: $\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

equação simetrica: $x=y+1,\ z=0$.

c) $A=(0,1,-1)$ e $B=(0,0,0)$

vetor diretor: $\vec{v}=(0,-1,1)$

equações paramétricas: $\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=-1+t \end{cases}$

equação simétrica: $x=0,\ \frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$

d) $A=(3,2,1)$ e $B=(6,1,-4)$

vetor diretor: $\vec{v}=(3,-1,-5)$

equações paramétricas: $\begin{cases} x=3+3t \\ y=2-t \\ z=1-5t \end{cases}$

equação simetrica: $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-5}$

Número 2

a) vetores diretores:

$\vec{v}=(-1,1,2)$ e $(1,-1,-2)$

Pontos na reta:

Para $\lambda=0$: $(1,0,4)$

Para $\lambda=1$: $(0,1,6)$

b) Para $P=(1,3,-3)$:

Testando $y=\lambda=3$, mas $x=1-3=-2\neq 1$

↳ não pertence

c) Mesma direção $\vec{v}=(-1,1,2)$:

$\begin{cases} x=1-t \\ y=4+t \\ z=-7+2t \end{cases}$

Número 3

a) Vetores:

$\vec{AB}=(-8,-4,10)$

$\vec{AC}=(1,-13,1)$

Não são proporcionais → formam um triângulo.

b) Ponto Médio de AB: $M=(-1,4,-2)$

Vetor diretor da mediana CM: $\vec{v}=(-5,11,4)$

Equações parametricas: $\begin{cases} x=4-5t \\ y=-7+11t \\ z=-6+4t \end{cases}$

Número 4

a) Reta r: $X=(1,2,0)+\lambda(1,1,-3)$

$C=(1+\lambda,\ 2+\lambda,\ -3\lambda)$

Usando produto escalar: $\lambda=-\frac{12}{7}$

Ponto $C=\left(-\frac{5}{7},\frac{2}{7},\frac{36}{7}\right)$

b) Reta: $X=(1,0,0)+\lambda(1,1,1)$

$C=(1+\lambda,\lambda,\lambda)$

Calculando: $\lambda=0$

Ponto equidistante: $(1,0,0)$

Número 5

a) Equação vetorial:

$X=(1,2,0)+\lambda(1,1,0)+\mu(2,3,-1)$

Equações parametricas: $\begin{cases} x=1+\lambda+2\mu \\ y=2+\lambda+3\mu \\ z=0-\mu \end{cases}$

b) Vetor $AB=(0,-2,-1)$

Equação vetorial: $X=(1,1,0)+\lambda(0,-2,-1)+\mu(2,1,0)$

Equações paramétricas: $\begin{cases} x=1+2\mu \\ y=1-2\lambda+\mu \\ z=0-\lambda \end{cases}$

c) Vetores $AB=(1,1,-3)$ e $AC=(0,-1,-1)$

Equação vetorial: $X=(1,0,1)+\lambda(1,1,-3)+\mu(0,-1,-1)$

Equação paramétricas: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0+\lambda-\mu \\ z=1-3\lambda-\mu \end{cases}$

Número 6

a) $A=(9,-1,0)$; $\vec{u}=(0,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{n}=\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\hat{i}(1.1-0.1)-\hat{j}(0.1-0.1)+\hat{k}(0.1-1.1)$

$\vec{n}=(1,0,-1)$

$1(x-9)+0(y+1)-1(z-0)=0 \rightarrow (x-9)-(z)=0$

$x-z-9=0$

c) $\vec{AB}=(1-1,-1-1,-1-0)=(0,-2,-1)$ $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{AB}$

$\vec{n}=\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\hat{i}(1.-1-0.-2)-\hat{j}(2.-1-0.0)+k(2.-2-0)$

$\vec{n}=(-1,2,-4)$

$-1(x-1)+2(y-1)-4(z-0)=0$

$-x+1+2y-2-4z=0 \rightarrow x-2y+4z+1=0$

b) $\vec{AB}=(-1-1,0-0,1-1)=(-2,0,0)$

$\vec{AC}=(2-1,1-0,2-1)=(1,1,1)$ $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$

$\vec{n}=\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\hat{i}(0.1-0.1)-\hat{j}(-2.1-0.1)+\hat{k}(-2.1-0.1)$

$\vec{n}=(0,2,-2)$

$0(x-1)+2(y-0)-2(z-1)=0 \rightarrow 2y-2z+2=0$

$y-z+1=0$

d) vetor da retar: $(1,1,-1)$

Ponto da reta: $(0,2,2)$ $\vec{n}=(1,1,-1)\times(-1,3,1)$

$\vec{PQ}=(0-1,2-(-1),2-1)=(-1,3,1)$

$\vec{n}=\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\hat{i}(1.1-(-1).3)-\hat{j}(1.1-(-1).-1)+\hat{k}(1.3-1.(-1))$

$\vec{n}=(1+3,-(1-1),(3+1))=(4,0,4)=(1,0,1)$

$1(x-1)+0(y+1)+1(z-1)=0 \rightarrow (x-1)+(z-1)=0$

$x+z-2=0$

Número 7

a) $4x+2y-z+5=0$ $\lambda=y$ $\mu=z$

$4x+2\lambda-\mu+5=0 \Rightarrow 4x=-2\lambda+\mu-5$ $x=\frac{-2\lambda+\mu-5}{4}$

equações parametricas: $\begin{cases} x=-\frac{2\lambda+\mu-5}{4} \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

b) $5x-y-1=0$ $\lambda=y$ $\mu=z$

$5x-\lambda-1=0 \rightarrow x=\frac{\lambda+1}{5}$

equações paramétricas: $\begin{cases} x=\frac{\lambda+1}{5} \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

c) $z-3=0 \Rightarrow z=3$ $x=\lambda$ $y=\mu$

Parametricas $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=3 \end{cases}$

d) $y-z-2=0 \rightarrow y=z+2$

Paramétricas: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu+2 \\ z=\mu \end{cases}$

$x=\lambda$, $z=\mu$

Número 8

a) $\mu = 3 - z$

$x = 1 + \lambda - (3 - z) \rightarrow x = -2 + \lambda + z$

$\lambda = x + 2 - z$

$y = 2(x + 2 - z) + (3 - z)$

$y = 2x + 4 - 2z + 3 - z = 2x + 7 - 3z$

Equação geral: $2x + 7 - 3z - y = 0$

$2x - 3z - y + 7 = 0$

b) $y = 2 \rightarrow$ plano paralelo ao eixo y

$\lambda = x - 1$

$z = 3 - (x-1) + \mu = 4 - x + \mu \rightarrow \mu = z + x - 4$

Equação: $y = 2$ (plano paralelo ao eixo xz)

c) $\lambda + \mu = z$

$2\lambda + 2\mu = y \rightarrow \lambda + \mu = \frac{y}{2} \rightarrow y = 2z$

$x = -2 + (\lambda - \mu) \rightarrow \lambda - \mu = x + 2$

$\lambda + \mu = z \rightarrow \lambda = \frac{(x+2) + z}{2} \rightarrow \mu = z - \lambda$

Equação geral: $y - 2z = 0$

Número 9

a) Vetores diretores:

$\vec{v_r} = (2, 1, 3)$ (coeficientes de λ)

$\vec{v_s} = (4, 2, 6)$ (coeficientes de μ)

$\vec{v_s} = 2\vec{v_r}$, são paralelas

Não são concorrentes, são paralelas distintas.

b) $(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3) = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 2 + 3\mu \rightarrow \lambda = 1 \text{ e } \mu = 0 \\ 1 + 2\lambda = 3 + 2\mu \rightarrow 3 = 3 \\ 3\lambda = 3 + \mu \rightarrow \mu = 3\lambda - 3 \end{cases}$$

Ponto de intersecção $= (2, 3, 3)$ //

Concorrentes

Plano:

$\vec{v_r} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_s} = (3, 2, 1)$

Normal: $\vec{v_r} \times \vec{v_s} = (-4, +8, -4) \equiv (1, -2, 1)$

Equação: $1(x - 2) - 2(y - 3) + 1(z - 3) = 0 \rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$

$\hookrightarrow x - 2y + z + 1 = 0$ //

c) $s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z = t \rightarrow s: (x, y, z) = (2t, 1 - 2t, t)$

r tem $z = 11 \rightarrow t = 11 \rightarrow$ Ponto em s: $(22, -21, 11)$ //

Em r:

Concorrentes

$x = 2 - 4\lambda = 22 \rightarrow \lambda = -5$

$y = 4 + 5(-5) = -21$

Plano: $\vec{v_r} = (-4, 5, 0)$ e $\vec{v_s} = (2, -2, 1)$

Normal: $\vec{v_r} \times \vec{v_s} = (5, 4, -2)$

Equação: $5(x - 22) + 4(y + 21) - 2(z - 11) = 0$

$\hookrightarrow 5x + 4y - 2z - 4 = 0$ //

d) $r: (x, y, z) = (2 + 3\lambda, -2 + 4\lambda, \lambda)$

$s: (x, y, z) = (4\mu, 2\mu, 3 + 2\mu)$

$$\begin{cases} 2 + 3\lambda = 4\mu \rightarrow 2 + 3(-\frac{1}{3}) \neq 4(-\frac{5}{3}) \text{ Falso} \\ -2 + 4\lambda = 2\mu \rightarrow -2 + 4(3 + 2\mu) = 2\mu \rightarrow \mu = -\frac{5}{3} \\ \lambda = 3 + 2\mu \end{cases}$$

Não são concorrentes //

Número 10

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \quad (1) \\ x - y + 2z = 0 \quad (2) \end{cases}$ $\quad 3y + z = 1 \rightarrow z = 1 - 3y$

$x - y + 2(1 - 3y) = 0 \rightarrow x - 7y + 2 = 0 \rightarrow x = 7y - 2$

$(x, y, z) = (7y - 2, y, 1 - 3y)$

$y = \lambda$

$r: (x, y, z) = (-2, 0, 1) + \lambda(7, 1, -3)$

$r: X = (-2, 0, 1) + \lambda(7, 1, -3)$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \quad (1) \\ x + y - z = 0 \quad (2) \end{cases}$ $\quad 2x + 2y = 1 \rightarrow x + y = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} - y$

$2z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{2}$

$(x, y, z) = (\frac{1}{2} - y, y, \frac{1}{2})$

$y = \lambda$

$r: (x, y, z) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 1, 0)$

$r: X = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 1, 0)$ //

c) $\begin{cases} x = 3 \ (1) \\ 2x - z = -1 \ (2) \end{cases}$

$2 \cdot 3 - z = -1 \to z = 7$

$(x, y, z) = (3, y, 7)$, onde y é livre

$y = \lambda$

$r: (x, y, z) = (3, 0, 7) + \lambda (0, 1, 0)$

$r: X = (3, 0, 7) + \lambda (0, 1, 0)$

d) $\begin{cases} y = 2 \ (1) \\ z = 0 \ (2) \end{cases}$

$y = 2$; $z = 0$, a variável x é livre

$(x, y, z) = (x, 2, 0)$

$x = \lambda$

$r: (x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda (1, 0, 0)$

$r: X = (0, 2, 0) + \lambda (1, 0, 0)$

Número 11

a) $n_1 = (0, 1, 1)$; $n_2 (1, 1, -1)$

$d_s = n_1 \times n_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-2, 1, -1)$

$d_r = (-2, 1, -1)$; $d_r = d_s$, são paralelas

$r (1, -1, 1)$ em s:

$-1 + 1 = 0 \neq 3$

$1 + (-1) - 1 = -1 \neq 6$

As retas são paralelas distintas.

c) $d_r = (2, -1, 3)$; $d_s = (1, -2, 2)$ Não são Múltiplos

$8 + 2\lambda = 3 + \mu$

$1 - \lambda = -4 - 2\mu \to \mu = \dfrac{\lambda - 5}{2}$

$9 + 3\lambda = 4 + 2\mu$

$8 + 2\lambda = 3 + \dfrac{\lambda - 5}{2} \to 16 + 4\lambda = 6 + \lambda - 5 \to 3\lambda = -15 \to \lambda = -5$

$9 + 3(-5) = 4 + 2\mu \to -6 = 4 + 2\mu \to \mu = -5$

$1 - (-5) = -4 - 2(-5) \to 6 = 6$

As retas se intersectam em $(-2, 6, -6)$ e são concorrentes.

b) $d_r = (2, 3, 2)$ $d_s = (1, 2, 0)$

$2 = \alpha \cdot 1 \to \alpha = 2$
$3 = \alpha \cdot 2 \to \alpha = 1{,}5$ > contradição

$r: X = (1, 0, 1) + \lambda (2, 3, 2)$

$(1 + 2\lambda, 0 + 3\lambda, 1 + 2\lambda) = (\mu, 2\mu, 0)$

$\begin{cases} -1 + 2\lambda = \mu \to 0 \neq 0{,}75 \\ 3\lambda = 2\mu \to \mu = 0{,}75 \\ -1 + 2\lambda = 0 \to \lambda = 0{,}5 \end{cases}$ Sistema sem solução, as retas são reversas.

d) $d_r = (2, 1, 1)$

$n_1 = (1, 1, -3)$; $n_2 = (2, -1, -2)$

$d_s = n_1 \times n_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = (-5, -4, -3)$

$r: X = (-1, 0, 0) + \lambda (2, 1, 1)$

em s:

$(-1 + 2\lambda) + (0 + \lambda) - 3(0 + \lambda) = 1 \to -1 \neq 1$

As retas não se intersectam e são reversas

Número 12

a) $\vec{d_r} = (0, 1, 1)$; $\vec{n_\pi} = (1, -1, -1)$

Produto escalar: $d_r \times n_r = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -2 \neq 0$

- r é transversal a π //

r em π

$(1) - (1 + \lambda) - (0 + \lambda) = 2 \to -\lambda - \lambda = 2 \to \lambda = -1$

Ponto $P = (1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1) = (1, 0, -1)$ //

b) $\vec{d_r} = (2, 1, 1)$; $\vec{u} = (1, 0, 1)$; $\vec{v} = (2, 2, 0)$

$\vec{n_\pi} = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 2, 2)$

$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0$

- r é paralela a π //

Ponto $(1, 0, 0)$ de r não está contido em π

c) $x = 2y \to 2y - y = 1 \to y = 1;\ \lambda = 2$

$r: X = (2, 1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ (paralela ao eixo z)

$(2, 1, \lambda)$ em π:

$2 + 1 = 2$ (falso)

Paralela e não está contida em π.

d) reta r: $\begin{cases} x - 2y = 3 \to 7 + 4z \\ -2z + y = 2 \to y = 2 + 2z \\ 2x - z = 2 \end{cases}$

$\hookrightarrow 2(7 + 4z) - z = 2 \to 14 + 8z - z = 2$

$z = \frac{-12}{7}$

$\to y = 2 + 2 \cdot \frac{-12}{7} = \frac{-10}{7} \to x = 7 + 4 \cdot \frac{-12}{7} = \frac{1}{7}$

a reta é um ponto $\left(\frac{1}{7}, \frac{-10}{7}, -\frac{12}{7}\right)$

$\begin{cases} 1 + \lambda + 2\mu = 1/7 \\ 4 + \lambda + \mu = -10/7 \\ \lambda = -\frac{12}{7} \end{cases}$ incompatível são não incidentes, não se intersectam

Número 13

a) $\vec{V_r} = (2, m, 1);\ \vec{V_{1\pi}} = (1, 2, 0);\ \vec{V_{2\pi}} = (1, 0, 1)$

$\vec{n_\pi} = \vec{V_{1\pi}} \times \vec{V_{2\pi}} = (2 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = (2, -1, -2)$

$\vec{V_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0$

$2 \cdot 2 + m \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0 \to 4 - m - 2 = 0 \to m = 2$

$\boxed{m = 2}$

b) $n - 3 \cdot 2 + 0 = 1 \to n - 6 = 1 \to n = 7$

$\vec{n} = (1, -3, 1)$

$\vec{V_r} \cdot \vec{n} = 0$

$2 \cdot 1 + m \cdot (-3) + m \cdot 1 = 0 \to 2 - 3m + m = 0 \to m = 1$

$m = 1,\ n = 7$

c) $\vec{V_r} = (m, 2, m);\ \vec{n} = (1, m, 1)$

$\vec{V_r} \cdot \vec{n} \neq 0 \to m \cdot 1 + 2 \cdot m + m \cdot 1 \neq 0 \to 4m \neq 0 \to m \neq 0$

$m \neq 0$

Número 14

a) diretor de π_1: $\vec{U_1} = (1, 1, 2), \vec{V_1} = (3, 3, 1)$

diretor de π_2: $\vec{U_2} = (1, 1, 0), \vec{V_2} = (0, 1, 4)$

normal de π_1: $n_1 = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3) = (-5, 5, 0)$

normal de π_2: $n_2 = (1 \cdot 4 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (4, -4, 1)$

- São transversais

$\vec{d} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (5, 5, -20) = (1, 1, -4)$

$X = (3, 0, 0) + t(1, 1, -4)$

b) $\vec{n_1} = (1, -1, 2)$

$\vec{U_2} = (1, 0, 3), \vec{V_2} = (-1, 1, 1)$

$\vec{n_2} = (0 \cdot 1 - 3 \cdot 1, 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) = (-3, -4, 1)$

- São transversais

$X = (0, 0, 1) + t(1, 1, -1)$

c) $\frac{4}{2} = 2, \frac{-2}{-1} = 2, \frac{2}{1} = 2$, mas $\frac{-9}{-1} \neq 2$

- São paralelos distintos

d) $\vec{AB} = (5, -1, -5);\ \vec{AC} = (4, -1, -6)$

$\vec{n_1} = (-1 \cdot (-6) - (-5) \cdot (-1), -5 \cdot 4 - 5 \cdot (-6), 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4) = (1, 10, -1)$

$\vec{n_2} = (4, 40, -4) = (1, 10, -1)$ $\quad \vec{n_2} = 4\vec{n_1}$

- Ponto $A(0, 1, 6)$ em π_2: $4(0) + 40(1) - 4(6) - 16 = 0 + 40 - 24 - 16 = 0$

- Os planos são coincidentes

Número 15

a) • vetores diretores de π_1:

$\vec{u_1} = (-1, m, 1)$
$\vec{v_1} = (2, 0, 1)$

• normal de π_1:

$\vec{n_1} = (m.1 - 1.0, 1.2 - (-1).1, -1.0 - m.2) = (m, 3, -2m)$

• vetores diretores de π_2:

$\vec{u_2} = (m, 1, 0)$
$\vec{v_2} = (1, 0, m)$

• normal de π_2:

$\vec{n_2} = (1.m - 0.0, 0.1 - m.m, m.0 - 1.1) = (m, -m^2, -1)$

$\vec{n_1} . \vec{n_2} = (3.(-1) - (-2m).(-m^2), (-2m).m - m.(-1), m.(-m^2) - 3.m) = (-3 - 2m^3, -2m^2 + m, -m^3 - 3m)$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = 0 \quad -3 - 2m^3 = 0; -2m^2 + m = 0; -m^3 - 3m = 0$

• $\vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq 0$, para qualquer m real//

b) • vetores diretores de π_1:

$\vec{u_1} = (m, 1, 1)$; $\vec{v_1} = (1, 1, m)$

• normal de π_1:

$\vec{n_1} = (1.m - 1.1, 1.1 - m.m, m.1 - 1.1) = (m - 1, 1 - m^2, m - 1)$

• Normal de π_2: $\vec{n_2} = (2, 3, 2$

$$\frac{m-1}{2} = \frac{1-m^2}{3} = \frac{m-1}{2}$$

$$\frac{m-1}{2} = \frac{1-m^2}{3} \Rightarrow 3(m-1) = 2(1-m^2)$$

$$3m - 3 = 2 - 2m^2$$

$$2m^2 + 3m - 5 = 0$$

$m = 1$
$m = \frac{-5}{2}$

• Para $m = 1$: $\vec{n_1} = (0, 0, 0) \rightarrow$ inválido

• Para $m = \frac{-5}{2}$: $n_1 = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{21}{4}, \frac{-7}{2}\right)$, multiplo de $\vec{n_2}$

O ponto $(1,1,0)$ de π_1 não deve pertencer a π_2: $2.(1) + 3.(1) + 2(0) + n \neq 0 \rightarrow 5 + n \neq 0 \rightarrow n \neq -5$

$m = \frac{-5}{2}$ e $n \neq -5$ //