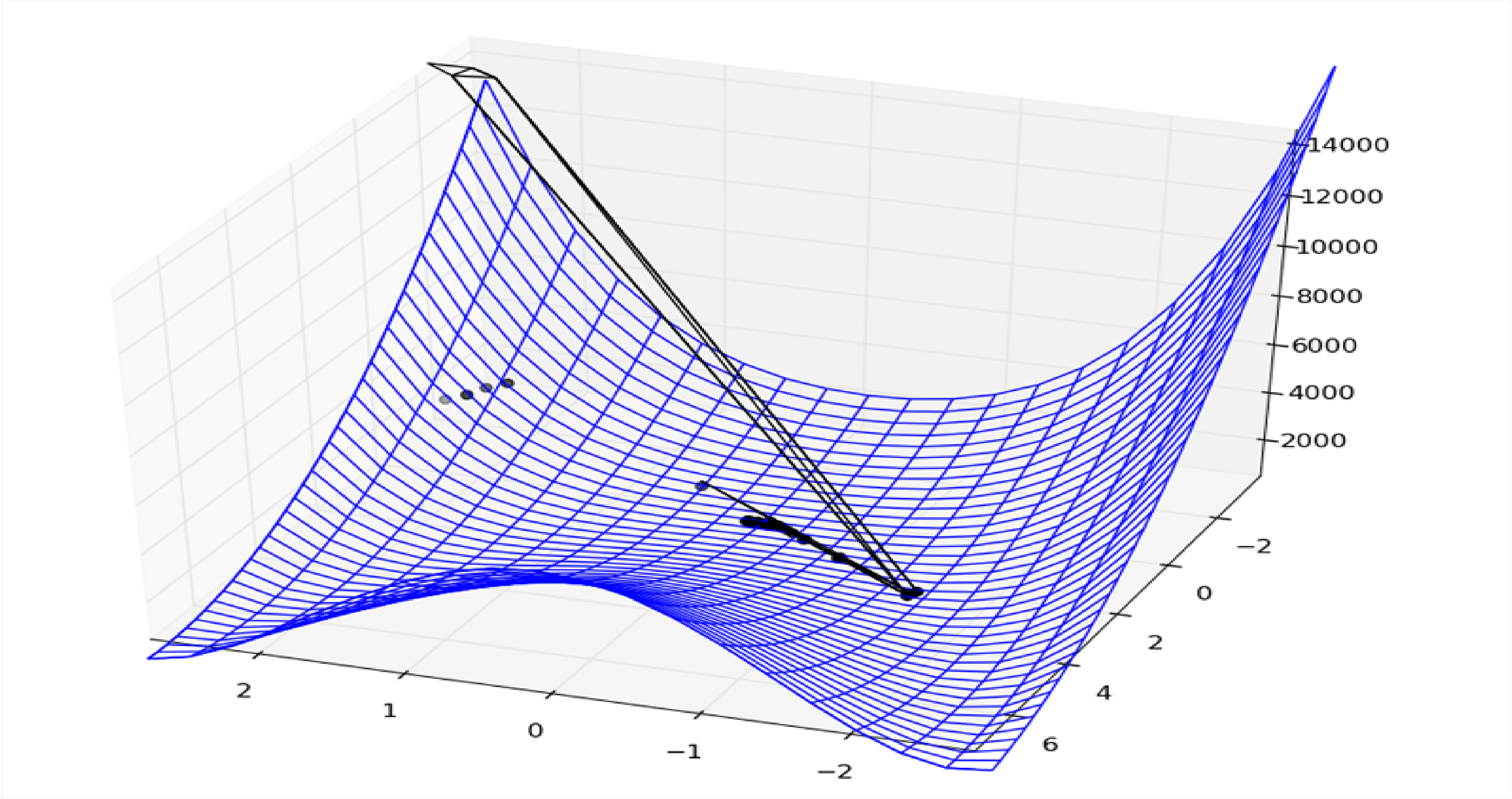
Dualidad y Análisis Postóptimo



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

Dualidad

Indica que cada problema de programación lineal (primal) hay una asociación y una relación importante con otro problema de programación lineal, llamado dual. El problema primal como el problema dual dan el mismo valor de la función objetivo

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema **dual** se define sistemáticamente a partir del modelo de PL **primal** (u original). Los dos problemas están estrechamente relacionados en el sentido de que la solución óptima de uno proporciona automáticamente la solución óptima al otro.

En la mayoría de los tratamientos de PL, el dual se define para varias formas del primal según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones ($\leq$, $\geq$ o $=$), y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas). Este capítulo ofrece una definición *única* que abarca de manera automática *todas* las formas del primal.

Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en la *forma de ecuación* que se presentó en la sección 3.1 (todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas). Este requerimiento es consistente con el formato de la tabla inicial simplex. De ahí que cualesquier resultados obtenidos a partir de la solución óptima primal se aplican directamente al problema dual asociado.

Dualidad

Las ideas clave para construir el dual a partir del primal se resumen como sigue:

1. Asigne una variable dual por cada restricción primal.
2. Construya una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) y el coeficiente objetivo de la variable primal j-ésima definen respectivamente los lados izquierdo y derecho de la restricción dual j-ésima.
4. Los coeficientes objetivo duales son iguales a los lados derechos de las ecuaciones de restricción primales.
5. Las reglas que aparecen en la tabla 4.1 rigen el sentido de optimización, la dirección de las desigualdades y los signos de las variables en el dual. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción en el dual (es decir, $\leq$ o $\geq$) es que si el objetivo dual es de *minimización* (es decir, apunta *hacia abajo*), entonces todas las restricciones serán del tipo $\geq$ (es decir, *apuntan hacia arriba*). Lo opuesto aplica cuando el objetivo dual es de maximización.

Dualidad

TABLA 4.1 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal[a]	Problema dual		
	Objetivo	*Tipo de restricción*	*Signo de las variables*
Maximización	Minimización	$\geq$	irrestricta
Minimización	Maximización	$\leq$	irrestricta

[a]Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

Dualidad

Los siguientes ejemplos demuestran en la tabla 4.1 el uso de las reglas; incluso, muestran que nuestra definición incorpora automáticamente todas las formas del primal.

Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$\left.\begin{array}{r} y_1 + 0y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \text{ irrestricta} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \text{ irrestricta})$$

Dualidad

Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \leq 15$$

$$2y_1 - 4y_2 \leq 12$$

$$\left.\begin{array}{r} -y_1 \qquad \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ irrestricta} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0)$$

Dualidad

Ejemplo 4.1-3

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
	Sustituir $x_1 = x_1^- - x_1^+$	
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$	Maximizar $z = 5x_1^- - 5x_1^+ + 6x_2$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^- - x_1^+ + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^- + x_1^+ + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$4x_1^- - 4x_1^+ + 7x_2 + x_4 = 8$	y_3
x_1 irrestricta, $x_2 \geq 0$	$x_1^-, x_1^+, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeto a

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 &\geq -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 &\leq 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\left.\begin{aligned} -y_2 \quad &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 &\text{ irrestricta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ irrestricta}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0)$$

La primera y segunda restricciones son reemplazadas por una ecuación. La regla general es que una variable primal irrestricta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad. A la inversa, una ecuación primal de igualdad produce una variable dual irrestricta, como lo demuestra la primera restricción primal.

Dualidad

RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios realizados en los datos de un modelo de PL pueden afectar la optimalidad y/o factibilidad de la solución óptima actual. Esta sección presenta varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

La sección se inicia con un breve repaso de las matrices, una herramienta muy útil para realizar los cálculos de tabla simplex. Un repaso más detallado de las matrices se da en el apéndice D en el sitio web.

Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales: (fila vector) $\times$ (matriz), (matriz) $\times$ (columna vector) y (escalar) $\times$ (matriz). Por comodidad, estas operaciones se resumen. En primer lugar, presentamos algunas definiciones de matriz:

1. Una *matriz*, $\mathbf{A}$, de tamaño $(m \times n)$ es un conjunto rectangular de elementos con m filas y n columnas.
2. Un *vector fila*, $\mathbf{V}$, de tamaño m es una matriz $(1 \times m)$.
3. Un *vector columna*, $\mathbf{P}$, de tamaño n es una matriz $(n \times 1)$.

Dualidad

RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios realizados en los datos de un modelo de PL pueden afectar la optimalidad y/o factibilidad de la solución óptima actual. Esta sección presenta varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

La sección se inicia con un breve repaso de las matrices, una herramienta muy útil para realizar los cálculos de tabla simplex. Un repaso más detallado de las matrices se da en el apéndice D en el sitio web.

Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales: (fila vector) $\times$ (matriz), (matriz) $\times$ (columna vector) y (escalar) $\times$ (matriz). Por comodidad, estas operaciones se resumen. En primer lugar, presentamos algunas definiciones de matriz:

1. Una *matriz*, **A**, de tamaño $(m \times n)$ es un conjunto rectangular de elementos con m filas y n columnas.
2. Un *vector fila*, **V**, de tamaño m es una matriz $(1 \times m)$.
3. Un *vector columna*, **P**, de tamaño n es una matriz $(n \times 1)$.

Dualidad

Estas definiciones pueden representarse matemáticamente como

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_m), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

1. **(Vector fila $\times$ matriz, VA).** La operación es válida sólo si el tamaño del vector fila **V** y la cantidad de filas de **A** son iguales. Por ejemplo,

$$(11, 22, 33)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33, 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33)$$
$$= (242, 308)$$

2. **(Matriz $\times$ vector columna, AP).** La operación es válida sólo si la cantidad de columnas de **A** y el tamaño del vector columna **P** son iguales. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

3. **(Escalar $\times$ matriz, αA).** Dada la cantidad escalar a (o constante), la operación de multiplicación $\alpha\mathbf{A}$ da una matriz del mismo tamaño que la matriz **A**. Por ejemplo, dado que $\alpha = 10$,

$$(10)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

Dualidad

Diseño de la tabla simplex

La tabla simplex del capítulo 3 es la base para la presentación en este capítulo. La figura 4.1 representa esquemáticamente las tablas simplex *inicial* y *generales*. En la tabla inicial, los coeficientes de restricción bajo las variables iniciales forman una **matriz identidad** (todos los elementos en la diagonal principal son 1, y todos los elementos

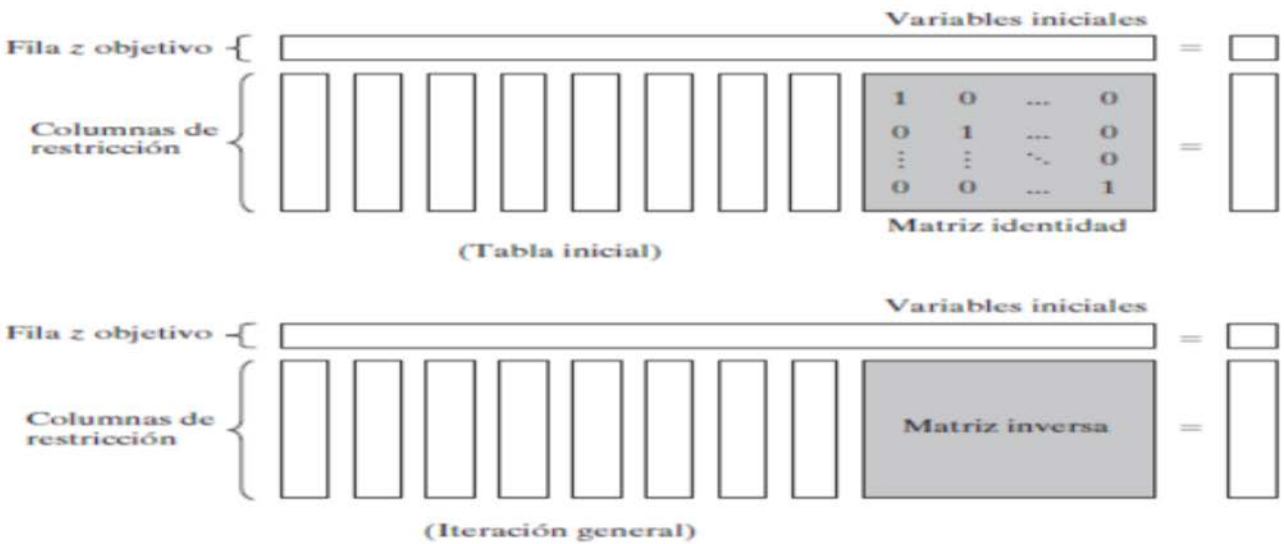


FIGURA 4.1
Representación esquemática de las tablas simplex inicial y general

fuera de la diagonal son cero). Con esta disposición, las iteraciones siguientes de la tabla simplex generadas por las operaciones de filas de Gauss-Jordan (vea el capítulo 3) modifican los elementos de la matriz identidad para producir lo que se conoce como **matriz inversa**. Como veremos en el resto de este capítulo, la matriz inversa es la clave para calcular todos los elementos de la tabla simplex asociada.

Dualidad

Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas en el sentido de que la solución óptima de uno u otro problema da la solución óptima al otro. Así pues, en un modelo de PL en el que la cantidad de variables es considerablemente menor que la de restricciones, pueden ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de cálculos simplex depende en gran medida (aunque no totalmente) de la cantidad de restricciones (vea el problema 2, conjunto 4.2c).

Esta sección proporciona dos métodos para determinar los valores duales.

Método 1.

$$\begin{pmatrix}\text{Valor óptimo de}\\ \text{la variable } \textit{dual } y_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Coeficiente } z \text{ primal óptimo de la variable } \textit{inicial } x_i\\ +\\ \text{Coeficiente objetivo } \textit{original} \text{ de } x_i\end{pmatrix}$$

Método 2.

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos de}\\ \text{las variables } \textit{duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vector fila de los}\\ \text{coeficientes objetivo originales de las}\\ \text{variables básicas } \textit{primales} \text{ óptimas}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa } \textit{primal}\\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Los elementos del vector fila deben aparecer en el mismo orden en que las variables básicas aparecen en la columna *Básica* de la tabla simplex.

Dualidad

Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas en el sentido de que la solución óptima de uno u otro problema da la solución óptima al otro. Así pues, en un modelo de PL en el que la cantidad de variables es considerablemente menor que la de restricciones, pueden ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de cálculos simplex depende en gran medida (aunque no totalmente) de la cantidad de restricciones (vea el problema 2, conjunto 4.2c).

Esta sección proporciona dos métodos para determinar los valores duales.

Método 1.

$$\begin{pmatrix}\text{Valor óptimo de} \\ \text{la variable } \textit{dual } y_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Coeficiente } z \text{ primal óptimo de la variable } \textit{inicial } x_i \\ + \\ \text{Coeficiente objetivo } \textit{original} \text{ de } x_i\end{pmatrix}$$

Método 2.

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables } \textit{duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vector fila de los} \\ \text{coeficientes objetivo originales de las} \\ \text{variables básicas } \textit{primales} \text{ óptimas}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa } \textit{primal} \\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Los elementos del vector fila deben aparecer en el mismo orden en que las variables básicas aparecen en la columna *Básica* de la tabla simplex.

Dualidad

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para preparar el problema para su solución mediante el método simplex, agregamos una variable de holgura x_4 en la primera restricción y una variable artificial R en la segunda. Por consiguiente, el primal resultante y los problemas duales asociados se definen como sigue:

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$ sujeto a $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq -M$ ($\Rightarrow y_2$ irrestricta)

La tabla 4.3 proporciona la tabla primal óptima.

A continuación demostramos cómo se determinan los valores duales óptimos aplicando los dos métodos descritos al inicio de esta sección.

Dualidad

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solución
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Método 1. En la tabla 4.3, las variables primales iniciales x_3 y R corresponden sólo a las variables duales y_1 y y_2, respectivamente. Por lo tanto, determinamos la solución dual óptima como sigue:

Variables básicas primales iniciales	x_4	R
Coeficientes de la ecuación z	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
Coeficiente objetivo original	0	$-M$
Variables duales	y_1	y_2
Valores duales óptimos	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Dualidad

Método 2. La matriz inversa óptima, resaltada en la tabla 4.3, bajo las variables iniciales x_4 y R, es

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El orden de las variables básicas primales óptimas en la columna *Básica* es x_2 seguida por x_1. Los elementos de los coeficientes objetivo originales para las dos variables deben aparecer en el mismo orden, es decir,

$$\begin{aligned}(\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{coeficiente de } x_1) \\ &= (12{,}5)\end{aligned}$$

Los valores duales óptimos son

$$(y_1, y_2) = \begin{pmatrix}\text{Coeficientes objetivo} \\ \text{originales de } x_2, x_1\end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima})$$

$$= (12, 5)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Dualidad

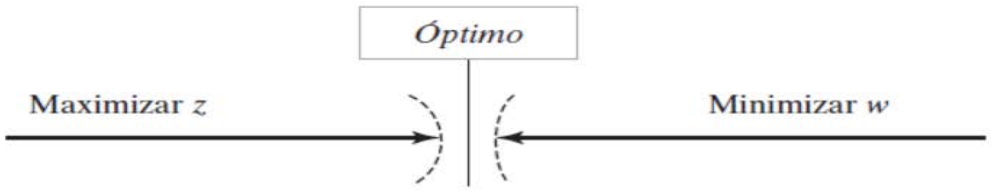


FIGURA 4.2
Relación entre z máxima y w mínima

Valores objetivo primales-duales. Para cualquier par de soluciones primales y duales *factibles*

$$\begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{maximización}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{minimización}\end{pmatrix}$$

En el óptimo, la relación se mantiene como una ecuación estricta, lo que significa que los dos valores objetivo son iguales. Observe que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual. En este caso sólo el sentido de optimización (maximización o minimización) es importante.

El óptimo no puede ocurrir con z estrictamente menor que w (es decir, $z < w$) porque, no importa qué tan cerca estén z y w, siempre hay la oportunidad de una mejora, lo que contradice la optimalidad como lo demuestra la figura 4.2.