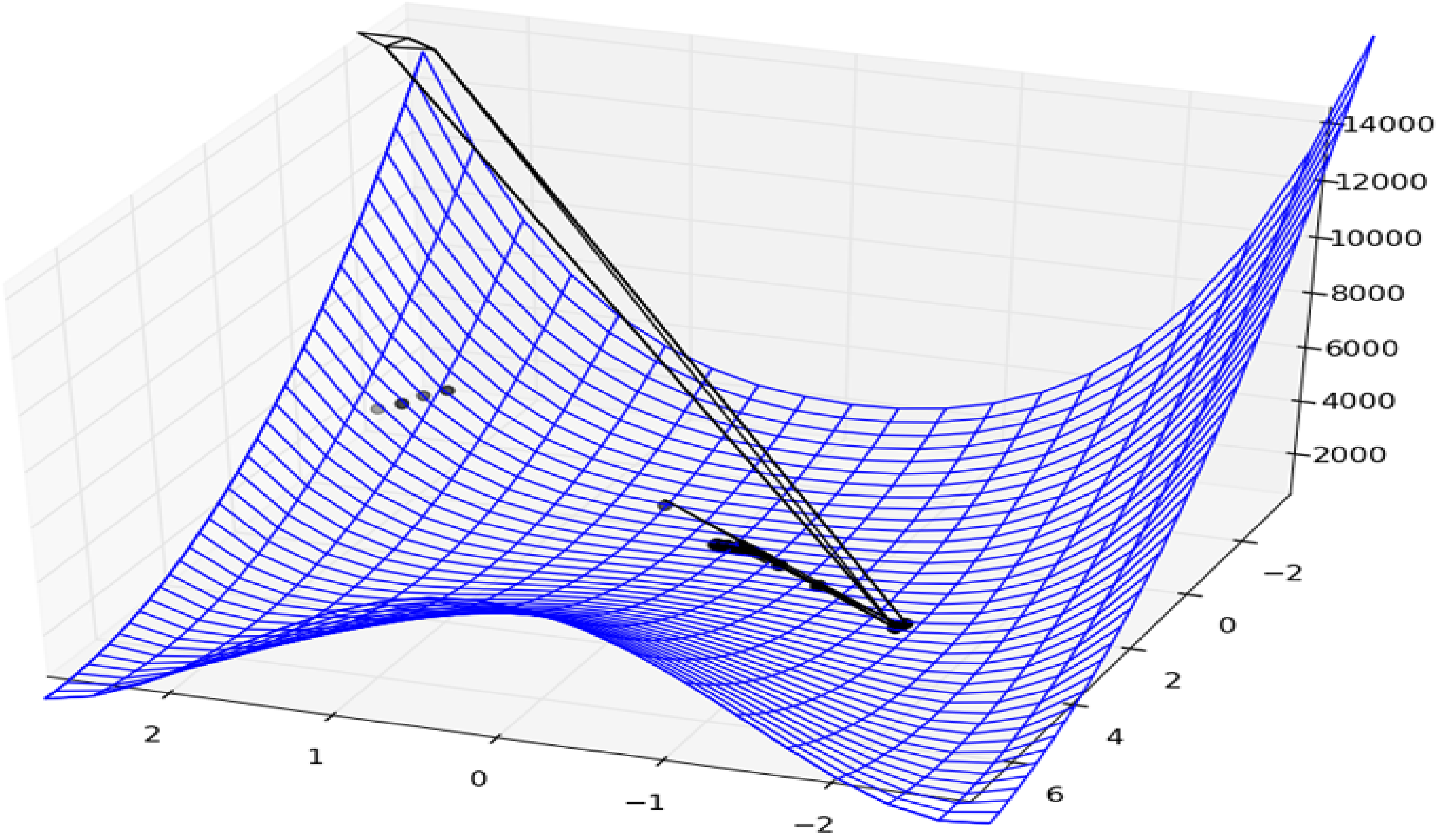
Dualidad y Análisis Postóptimo



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

Cálculos con la tabla simplex

Para determinar los coeficientes y valores óptimos se puede generar cualquier iteración de la tabla simplex a partir de los datos originales del problema, la inversa asociada con la iteración, y el problema dual. Los cálculos se pueden dividir en dos tipos:

1. Columnas de restricción (Lados izquierdo y derecho)
2. Fila Z objetivo

Fórmula 1: Cálculos con la columna de restricción. En cualquier iteración simplex, una columna izquierda o derecha se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de restricción}\\ \text{en iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna de}\\ \text{restricción original}\end{pmatrix}$$

Fórmula 2: Cálculos con la fila z objetivo. En cualquier iteración simplex, el coeficiente de x_j en la ecuación objetivo (costo reducido) se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente de la variable } x_1\\ \text{en la ecuación } z \textit{ primal}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de la}\\ \text{restricción } \textit{dual j-ésima}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de la}\\ \text{restricción } \textit{dual j-ésima}\end{pmatrix}$$

Cálculos con la tabla simplex

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$ sujeto a $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq -M$ ($\Rightarrow y_2$ irrestricta)

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solución
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Cálculos con la tabla simplex

Utilizamos la programación lineal, para aplicar las formulas 1 y 2 , a partir de la tabla optima del primal.

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Columna } x_1 \text{ en la} \\ \text{iteración óptima} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Inversa en la} \\ \text{iteración óptima} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Columna } x_1 \\ \text{en original} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puede utilizarse un cálculo similar para generar las columnas óptimas para x_2, x_3, x_4, R, y el lado derecho (¡compruébelo!).

Cálculos con la tabla simplex

A continuación se realiza el calculo e la fila Z objetivo , con la formula 2; se utilizan los valores duales óptimos de las variables duales (y1, y2), estos valores se utilizan en la formula 2 para determinar los coeficientes Z para X1 y R

Los valores duales óptimos son

$$(y_1, y_2) = \begin{pmatrix}\text{Coeficientes objetivo} \\ \text{originales de } x_2, x_1\end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima})$$

$$= (12, 5)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } x_1 = y_1 + 2y_2 - 5 = \frac{29}{5} + 2 \times -\frac{2}{5} - 5 = 0$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } R = y_2 - (-M) \quad = -\frac{2}{5} - (-M) \qquad = -\frac{2}{5} + M$$

Pueden usarse cálculos similares para determinar los coeficientes z de x_2, x_3 y x_4 (¡compruébelo!).

Interpretación Económica de la Dualidad

El problema de PL puede considerarse como un modelo de asignación de recursos que busca maximizar los ingresos con recursos limitados. Considerando el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interesantes interpretaciones económicas del modelo de asignación de recursos.

Para formalizar el planteamiento, considere la siguiente representación de los problemas primal y dual:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
sujeto a	sujeto a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$
$x_j \geq 0,\ j=1, 2, \ldots, n$	$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$

Considerado como un modelo de asignación de recursos, el problema primal consta de n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j en el primal representa el ingreso por unidad de la actividad j. El recurso i con disponibilidad b_i se consume a razón de a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

Interpretación Económica de las Variables Duales

Los valores objetivos primales-duales establece que para cualquiera de las soluciones factibles primal y dual, los valores de la función objetivo, cuando son finitos deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

En el óptimo, los dos valores objetivo son iguales, es decir, $z = w$.

En función del modelo de asignación de recursos, z representa \$ ingresos, y b_i representa unidades disponibles del recurso i. Por lo tanto, dimensionalmente, $z = w$ implica

$$\$\text{ ingresos} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

Esto quiere decir que la variable dual, y_i, representa el **valor por unidad** del recurso i.

Como se expone en la sección 3.6, el nombre estándar **precio dual** (o precio **sombra**) del recurso i reemplaza el nombre (sugestivo) *valor por unidad* en toda la literatura de programación lineal y en los paquetes de software, de ahí que también se adoptó el nombre estándar en este libro.

Interpretación Económica de las Variables Duales

Utilizando el mismo análisis dimensional, podemos interpretar la desigualdad $z < w$ (para cualquiera de las dos soluciones primal y dual) como

$$(\text{Ingreso}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Esta relación expresa que en tanto el ingreso total de todas las actividades sea menor que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no serán óptimas. La optimalidad se alcanza sólo cuando los recursos se han explotado por completo. Esto puede suceder sólo cuando la entrada (valor de los recursos) se iguala a la salida (ingreso en dólares).

Interpretación Económica de las Variables Duales

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores con dos materias primas, $M1$ y $M2$. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Toneladas de materia prima por tonelada de		Disponibilidad diaria máxima (toneladas)
	Pintura para exteriores	*Pintura para interiores*	
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por tonelada ($1000)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder la de pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, que la demanda diaria máxima de pintura para interiores es de dos toneladas.

Reddy Mikks se propone determinar la (mejor) combinación óptima de pinturas para interiores y exteriores que maximice la utilidad diaria total.

Todos los modelos de IO, incluido el de PL, constan de tres componentes básicos.

Interpretación Económica de las Variables Duales

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Para el problema de Reddy Mikks necesitamos determinar las cantidades diarias que se deben producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como sigue:

$$x_1 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores}$$

$$x_2 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores}$$

La meta de Reddy Mikks es *maximizar* (es decir, incrementar lo más posible) la utilidad diaria de ambas pinturas. Los dos componentes de la utilidad diaria total se expresan en función de las variables x_1 y x_2 como sigue:

$$\text{Utilidad de la pintura para exteriores} = 5x_1 \text{ (en miles de dólares)}$$

$$\text{Utilidad de la pintura para interiores} = 4x_2 \text{ (en miles de dólares)}$$

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Interpretación Económica de las Variables Duales

El modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) y su dual se dan como sigue:

Primal de Reddy Mikks	Dual de Reddy Mikks
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$	Minimizar $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$
sujeto a	sujeto a
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (recurso 1, $M1$)	$6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (recurso 2, $M2$)	$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (recurso 3, mercado)	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
$x_2 \leq 2$ (recurso 4, demanda)	
$x_1, x_2 \geq 0$	
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$	$y_1 = .75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

El modelo de Reddy Mikks se ocupa de la producción de dos tipos de pintura (para interiores y exteriores) con dos materias primas $M1$ y $M2$ (recursos 1 y 2) y sujeto a los límites del mercado y a la demanda por la tercera y cuarta restricciones. El modelo determina las cantidades (en toneladas por día) de pinturas para exteriores e interiores que maximizan el ingreso diario (expresado en miles de dólares).

La solución dual óptima muestra que el precio dual (valor por unidad) de la materia prima $M1$ (recurso 1) es $y_1 = .75$ (o \$750 por tonelada) y que la materia prima $M2$ (recurso 2) es $y_2 = .5$ (o \$500 por tonelada). Estos resultados se mantienen ciertos en *intervalos de factibilidad* específicos como se mostró en la sección 3.6. Para los recursos 3 y 4, que representan los límites del mercado y de la demanda, ambos precios duales son cero, lo que indica que sus recursos asociados son abundantes (es decir, no son críticos al determinar el óptimo y, por consiguiente, su valor por unidad, o precio dual, es cero).

Interpretación Económica de las Restricciones Duales

El significado económico de las restricciones duales puede lograrse utilizando la fórmula 2 de la sección 4.2.4, la cual establece que en cualquier iteración primal,

$$\text{El coeficiente objetivo de } x_j = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de}\\ \text{la restricción dual } j\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de}\\ \text{la restricción dual } j\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

Una vez más utilizamos el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. El ingreso por unidad, c_j, de la actividad j está en dólares por unidad. De ahí que, por consistencia, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ también debe estar en dólares por unidad. A continuación, como c_j representa ingreso, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, con signo opuesto, debe representar costo. Por lo tanto tenemos

$$\$\text{ costo} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix}\text{Consumo del recurso } i\\ \text{por unidad de la actividad } j\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Costo por unidad}\\ \text{del recurso } i\end{pmatrix}$$

Interpretación Económica de las Restricciones Duales

La conclusión es que la variable dual y_1 representa lo que se conoce en la literatura de PL como **costo imputado** por unidad de recurso i, y podemos considerar que la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$ como el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de la actividad j. Como se indica en la sección 3.6, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j$ (= costo imputado de la actividad $j - c_j$) se conoce como **costo reducido** de la actividad j. La condición de optimalidad de maximización del método simplex plantea que un incremento en el nivel de una actividad j no utilizada (no básica) puede mejorar el ingreso sólo si su *costo reducido* es negativo. En función de la interpretación precedente, esta condición establece que

$$\begin{pmatrix} \text{Costo imputado de} \\ \text{recursos consumidos por} \\ \text{una unidad de la actividad } j \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \text{Ingreso por unidad} \\ \text{de la actividad } j \end{pmatrix}$$

De este modo, la condición de optimalidad de maximización dice que es económicamente ventajoso incrementar el nivel de una actividad si su ingreso unitario excede su costo unitario imputado.

Interpretación Económica de las Restricciones Duales

TOYCO ensambla tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos, realizando tres operaciones. Los tiempos de ensamble disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos por día, y los ingresos por tren, camión y auto de juguete son \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren para las tres operaciones son 1, 3 y 1 minuto, respectivamente. Los tiempos correspondientes por camión y por auto son $(2, 0, 4)$ y $(1, 2, 0)$ minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y carros, el modelo de programación lineal asociado y su dual se dan como sigue:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

Interpretación Económica de las Restricciones Duales

La solución óptima pide que se produzcan 100 camiones y 230 autos, pero ningún tren.

Suponga que a TOYCO también le interesa producir trenes (x_1). ¿Cómo se puede lograr esto? Examinando el *costo reducido* de x_1, un tren de juguete se vuelve económicamente atractivo sólo si su costo unitario imputado es estrictamente menor que su ingreso unitario. TOYCO puede lograr esto si incrementa el precio unitario. También puede reducir el costo imputado de los recursos consumidos ($= y_1 + 3y_2 + y_3$).

Una reducción en el costo unitario imputado conlleva a reducir los tiempos de ensamble utilizados por un tren en las tres operaciones. Sean r_1, r_2 y r_3 las relaciones de las reducciones en las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. La meta es determinar los valores de r_1, r_2 y r_3 de modo que el nuevo costo imputado por tren sea menor que su ingreso unitario, es decir,

$$1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 < 3$$

$$0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1, 0 \leq r_3 \leq 1$$

Interpretación Económica de las Restricciones Duales

Para los valores duales óptimos, $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$, esta desigualdad se reduce a

$$r_1 + 6r_2 > 4, 0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$$

Todos los valores de r_1 y r_2 que cumplan con estas condiciones harán que los trenes sean rentables. Observe, sin embargo, que quizás esta meta no sea alcanzable porque requiere grandes reducciones en los tiempos de las operaciones 1 y 2 que no parecen ser prácticas. Por ejemplo, incluso una reducción de 50% (es decir, $r_1 = r_2 = .5$) no satisface la condición dada. Entonces la conclusión lógica es que TOYCO no debe producir trenes a menos que las reducciones del tiempo vayan acompañadas de un incremento en el ingreso unitario.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Cuando existen cambios de los parámetros del modelo, y de la determinación de una nueva solución optima , El análisis Postóptimo determina la nueva solución de una manera eficiente. Los nuevos cálculos tienen su raíz en el uso de las relaciones duales y primales-duales.

Condiciones después de que cambian los parámetros	Acción recomendada
La solución actual permanece óptima y factible.	No es necesaria ninguna otra acción.
La solución actual se vuelve no factible.	Use el simplex dual para recuperar factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Use el simplex primal para recuperar optimalidad.
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo.	Use el método simplex generalizado para recuperar optimalidad y factibilidad.

En esta sección se investigan los primeros tres casos, el cuarto es una combinación del 2 y 3

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Se utilizará el modelo de TOYCO del ejemplo 4.3-2 para explicar los diferentes procedimientos. Recuerde que el problema tiene que ver con el ensamble de tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos. En el ensamble intervienen tres operaciones. El modelo y su dual se repiten aquí por comodidad.

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La tabla óptima asociada para el primal se da como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución óptima actual se ve afectada sólo si cambia el lado derecho de las restricciones, o se agrega una nueva restricción al modelo. En ambos casos, la no factibilidad ocurre cuando una o más de las variables básicas actuales se vuelven negativas.

Cambios en el lado derecho. Este cambio requiere volver a calcular el lado derecho de la tabla aplicando la fórmula 1 de la sección 4.2.4:

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de} \\ \text{la tabla en la iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en} \\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho} \\ \text{de las restricciones}\end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla muestra los valores de las variables básicas.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Situación 1. Suponga que TOYCO incrementa la capacidad diaria de las operaciones 1, 2 y 3 a 600, 640 y 590 minutos, respectivamente. ¿Cómo afectaría este cambio al ingreso total?

Con estos incrementos, el único cambio que tendrá lugar en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Por tanto, la nueva solución básica se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 640 \\ 590 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 320 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Así, las variables básicas actuales, x_2, x_3 y x_4, permanecen factibles con los nuevos valores 140, 320 y 30 unidades, respectivamente. El ingreso óptimo asociado es \$1880.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Situación 2. Aunque la nueva solución es atractiva desde el punto de vista del ingreso incrementado, TOYCO reconoce que su nueva implementación puede llevarse tiempo. Otra propuesta desplaza la capacidad de la operación 3 ($x_6 = 20$ minutos) a la capacidad de la operación 1. ¿Cómo impactaría este cambio la solución óptima?

Las capacidades de las tres operaciones cambian a 450, 460, y 400 minutos respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

La solución resultante es no factible porque $x_6 = -40$, la cual requiere aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad. Primero, modificamos el lado derecho de la tabla como se muestra por medio de la columna sombreada. Observe que el valor asociado es $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = \$1370$.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	–40

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Según el dual simplex, x_6 sale y x_4 entra, lo que da la siguiente tabla factible óptima (por lo común, el simplex dual puede requerir más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1350
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_4	-1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

La solución óptima (en función de x_1, x_2 y x_3) permanece igual que en el modelo original. Esto quiere decir que el cambio propuesto de la asignación de la capacidad no es ventajoso, porque simplemente cambia la capacidad excedente de la operación 3 a una capacidad de superávit en la operación 1. La conclusión entonces es que la operación 2 es el cuello de botella, y que puede ser ventajoso cambiar el superávit a la operación 2 (vea el problema 1, conjunto 4.5a).

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Adición de una nueva restricción. Agregar una nueva restricción nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual. Si la nueva restricción es *redundante*, no afectará la solución actual. Además, la solución actual no satisface la nueva restricción, y debe determinarse una nueva solución mediante el método simplex dual.

Situación 1. Suponga que TOYCO cambia el diseño de sus juguetes y que el cambio requerirá agregar una cuarta operación de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es de 500 minutos y los tiempos por unidad de los tres productos en esta operación son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante porque la satisface la solución óptima actual $x_1 = 0, x_2 = 100$, y $x_3 = 230$. Por consiguiente, la solución óptima actual no cambia.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Situación 2. Suponga, en cambio, que los tiempos de TOYCO por unidad en la cuarta operación se cambian a 3, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los datos restantes del modelo no cambian.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

La solución óptima actual no satisface esta restricción, y se agrega a la tabla óptima actual como sigue (x_7 es una variable de holgura):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

La tabla muestra que $x_7 = 500$, lo cual es consistente con los valores de x_2 y x_3 en el resto de la tabla. La razón es que las variables básicas x_2 y x_3 no se han sustituido en la nueva restricción. Esta sustitución se logra realizando la siguiente operación:

$$\text{Nueva fila } x_7 = \text{Anterior fila } x_7 - (3 \times (\text{fila } x_2) + 1 \times (\text{fila } x_3))$$

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Esta operación es exactamente la misma que si se utilizara la sustitución

$$x_2 = 100 - (-\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}x_5)$$

$$x_3 = 230 - (\tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_5)$$

La nueva tabla es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	–30

La aplicación del método simplex dual producirá la nueva solución óptima $x_1 = 0, x_2 = 90, x_3 = 230$, y $z = \$1370$ (¡compruébelo!). La solución muestra que agregar la operación 4 reduce los ingresos de \$1350 a \$1330.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Cambios que afectan la optimalidad

Esta sección considera la realización de cambios de los coeficientes objetivos y la adición de una nueva actividad económica (variable).

Cambios en los coeficientes de la función objetivo. Estos cambios afectan sólo la optimalidad de la solución y requieren que se calculen de nuevo los coeficientes de la fila z (costos reducidos) de acuerdo con el siguiente procedimiento:

1. Calcule los valores duales aplicando el método 2, sección 4.2.3.
2. Sustituya los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos costos reducidos (coeficientes de la fila z).

Si la nueva fila z satisface la condición de optimalidad, la solución no cambia (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar). Si no la satisface, se utiliza el simplex primal para recuperar la optimalidad.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Situación 1. En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía tiene una nueva política de fijación de precios para enfrentar la competencia. Los ingresos unitarios son \$2, \$3 y \$4 por los trenes, camiones y autos de juguete, en ese orden.

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Así,

$$(\text{Nuevos coeficientes objetivo de las variables básicas } x_2, x_3 \text{ y } x_6) = (3, 4, 0)$$

Aplicando el método 2, sección 4.2.3, las nuevas variables duales se calculan como

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}, 0\right)$$

Los coeficientes de la fila z se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario calcular de nuevo los coeficientes de fila objetivo de las variables básicas (x_2, x_3 y x_6) porque siempre son cero, independientemente de cualquier cambio realizado en los coeficientes objetivo (¡compruébelo!).

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - \mathbf{2} = \tfrac{3}{2} + 3\left(\tfrac{5}{4}\right) + 0 - \mathbf{2} = \tfrac{13}{4}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \tfrac{5}{4}$$

Observe que el lado derecho de la primera restricción dual es 2, el *nuevo* coeficiente en la función objetivo modificada.

Los cálculos demuestran que la solución actual, $x_1 = 0$ trenes, $x_2 = 100$ camiones y $x_3 = 230$ autos, permanece óptima. El nuevo ingreso correspondiente se calcula como $2 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = \$1220$. No se recomienda la nueva política de fijación de precios porque disminuye el ingreso.

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Situación 2. Suponga ahora que la función objetivo de TOYCO se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

¿Cambiará la solución óptima?

Tenemos

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right)$$

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - \mathbf{6} = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - \mathbf{6} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

El nuevo costo reducido de x_1 muestra que la solución actual no es óptima.

Para determinar la nueva solución, la fila z se cambia como se resalta en la siguiente tabla:

ANÁLISIS POSTÓPTIMO

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Los elementos resaltados son los nuevos costos reducidos y el nuevo valor objetivo. Todos los demás elementos son los mismos que aparecen en la tabla óptima original. La nueva solución óptima se determina entonces si x_1 entra y x_6 sale, lo que da la solución $x_1 = 10, x_2 = 102.5, x_3 = 215$ y $z = \$12270.50$ (¡compruébelo!). Aunque la nueva solución recomienda la producción de los tres juguetes, el ingreso óptimo es menor que cuando se fabricaban sólo dos juguetes.