ANALISIS DE SENSIBILIDAD

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

Análisis de Sensibilidad

El objetivo principal es identificar el intervalo permisible de variación en los cuales las variables o parámetros pueden fluctuar sin que cambie la solución optima

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En PL, los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima. Esto se conoce como *análisis de sensibilidad* y será el tema de esta sección. Más adelante, en el capítulo 4 estudiaremos el análisis *post óptimo*, el cual tiene que ver con la determinación de la nueva solución óptima cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, y después se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex.

Análisis de sensibilidad gráfica

Esta sección demuestra la idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).
2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en el lado derecho

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de $30 y $20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si x_1 y x_2 son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 20x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \qquad \text{(Máquina 1)} \\ x_1 + 3x_2 &\leq 8 \qquad \text{(Máquina 2)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

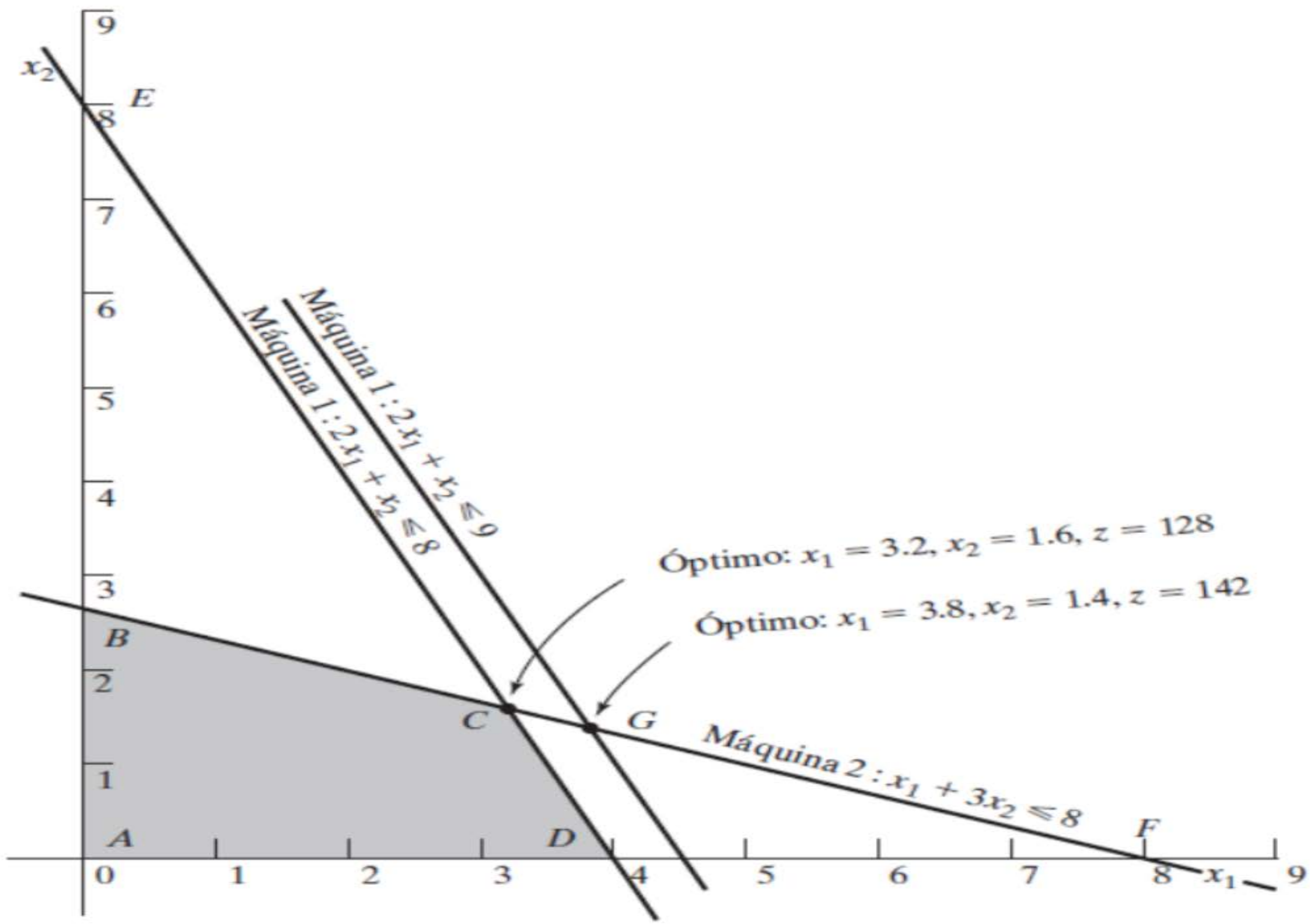
La figura 3.12 ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La tasa de cambio en la z óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

$$\begin{pmatrix} \text{Tasa de cambio del ingreso} \\ \text{a consecuencia del incremento} \\ \text{de la capacidad de la máquina 1} \\ \text{en 1 hora (punto } C \text{ a punto } G) \end{pmatrix} = \frac{z_G - z_C}{(\text{Cambio de la capacidad})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en el lado derecho

FIGURA 3.12

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)



Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en el lado derecho

La tasa calculada proporciona un vínculo *directo* entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en $14.00.

El nombre **valor unitario de un recurso** es una descripción apropiada de la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de **precio dual (o sombra)**, y ahora este nombre es un estándar en toda la literatura de PL y en paquetes de "software". La presentación en este libro se ajusta a este estándar.

En la figura 3.12 podemos ver que el precio dual de $14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea BF. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } B = (0.267)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 1 [en } F = (8,0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ h}$$

La conclusión es que el precio dual de $14/h permanece válido en el intervalo

$$2.67 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 1} \leq 16 \text{ h}$$

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad).

Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de $2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea DE. Ahora,

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } D = (4,0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 2 [en } E = (8,0)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ h}$$

Por lo tanto, el precio dual de $200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo

$$4 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 2} \leq 24 \text{ h}$$

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en el lado derecho

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como **intervalos de factibilidad**. Todos los paquetes de "software" proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad. La sección 3.6.4 muestra cómo generan esta información AMPL, Solver y TORA.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como las siguientes preguntas lo demuestran:

Pregunta 1. Si JOBCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

Según los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en \$14, en comparación con sólo \$2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener la prioridad.

Pregunta 2. Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de \$10/h para cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es $14 - 10 = \$4$, y para la máquina 2, es $\$2 - \$10 = -\$8$. Por consiguiente, sólo la máquina 1 debe considerarse para el incremento de capacidad.

Pregunta 3. Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es \$14 y es válido en el intervalo (2.67,16)h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad. Por consiguiente, el incremento del ingreso es $\$14(13 - 8) = \$70$, lo que significa que el ingreso total se incrementará de \$128 a \$198 ($= \$128 + \$70$).

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en el lado derecho

Pregunta 4. Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas, ¿cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67,16)h. Por lo tanto, sólo podemos hacer una conclusión inmediata con respecto a un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para hallar la respuesta (vea el capítulo 4). Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad *no* significa que el problema no tenga solución, sino que la información disponible no es suficiente para llegar a una conclusión completa.

Pregunta 5. ¿Cómo podemos determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos, como se demostrará en la sección 3.6.2.

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en los coeficientes objetivo

La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones gráficas del problema de JOBCO presentado en el ejemplo 3.6-1. El óptimo ocurre en el punto C ($x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128$). Los cambios en unidades de ingresos (es decir, los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de z. Sin embargo, como puede verse en la figura, la solución óptima en el punto C no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas BF y DE.

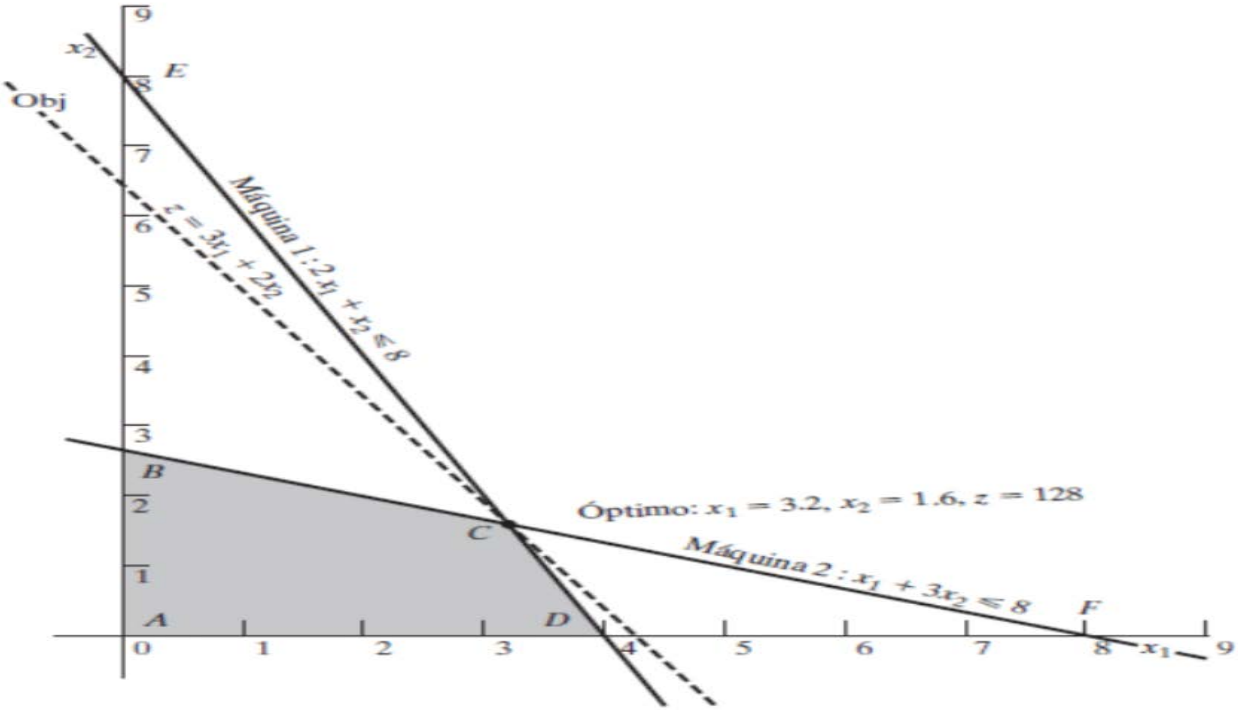


FIGURA 3.13
Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en los coeficientes objetivo

¿Cómo podemos determinar los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán inalterable la función óptima en C? Primero, escribimos la función objetivo en el formato general

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine ahora que la línea z está pivotada en C y que puede girar en el sentido de las manecillas del reloj, así como en el sentido contrario. La solución óptima permanecerá en el punto C en tanto $z = c_1x_1 + c_2x_2$ quede entre las dos líneas $x_1 + 3x_2 = 8$, y $2x_1 + x_2 = 8$. Esto significa que la relación $\frac{c_1}{c_2}$ puede variar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$, lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad**:[8]

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \text{ o } .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

[8] La condición de "relación" funciona correctamente en esta situación porque las pendientes para las dos líneas que pasan por el punto óptimo C tienen el mismo signo. Otras situaciones son más complejas.

Análisis de Sensibilidad Grafica, cambios en los coeficientes objetivo

Esta información proporciona respuestas inmediatas con respecto a la solución óptima como la siguiente pregunta lo demuestra:

Pregunta 1. Suponga que los ingresos unitarios producidos para los productos 1 y 2 cambian a \$35 y \$25, respectivamente. ¿Permanecerá igual el óptimo actual?

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 35x_1 + 25x_2$$

La solución en C permanecerá óptima porque $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$ permanece dentro del intervalo de optimalidad (.333,2). Cuando la relación queda afuera de este intervalo, se requieren más cálculos para determinar el nuevo óptimo (vea el capítulo 4). Observe que aunque los valores de las variables en el punto óptimo C no cambian, el valor óptimo de z cambia a $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \$152$.

Pregunta 2. Suponga que el ingreso unitario del producto 2 se fija a su valor actual $c_2 = \$20$. ¿Cuál es el intervalo de optimalidad asociado para el ingreso unitario del producto 1, c_1, que mantendrá el óptimo sin cambio?

Sustituyendo $c_2 = 20$ en la condición $\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3} \times 20 \leq c_1 \leq 2 \times 20 \text{ o } 6.67 \leq c_1 \leq 40$$

Este intervalo asume implícitamente que c_2 se mantiene fijo en \$20.

Del mismo modo podemos determinar el intervalo de optimalidad para c_2 si fijamos el valor de c_1 en \$30. Por lo tanto,

$$(c_2 \leq 30 \times 3 \text{ y } c_2 \geq \tfrac{30}{2}) \text{ o } 15 \leq c_2 \leq 90$$

Como en el caso del lado derecho, todos los paquetes de software proporcionan los intervalos de optimalidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo. La sección 3.6.4 muestra cómo AMPL, Solver y TORA generan estos resultados.

Comentarios. Aunque el material en esta sección se ocupó de dos variables, los resultados sientan las bases para el desarrollo del análisis de sensibilidad para el problema general de PL en las secciones 3.6.2 y 3.6.3.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

Análisis de sensibilidad algebraica. Cambios en el lado derecho

En la sección 3.6.1, utilizamos la solución gráfica para determinar el *precio dual* (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Esta sección amplía el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de TOYCO) para facilitar la presentación.

Ejemplo 3.6-3 (Modelo de TOYCO)

TOYCO utiliza tres operaciones para armar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y carros. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos por unidad de tren, camión y auto de juguete son de \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por auto son (2,0,4) y (1,2,0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y autos, respectivamente, el modelo de PL asociado se da como:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 \text{ (Operación 1)} \\ 3x_1 + 2x_3 &\le 460 \text{ (Operación 2)} \\ x_1 + 4x_2 &\le 420 \text{ (Operación 3)} \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

Utilizando x_4, x_5 y x_6 como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 autos pero no trenes. El ingreso asociado es $1350.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad. Utilizaremos el modelo de TOYCO para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla simplex óptima. Reconociendo que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que D_1, D_2 y D_3 son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de TOYCO original puede cambiarse entonces a

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 + D_1 \quad &\text{(Operación 1)}\\
3x_1 + 2x_3 &\leq 460 + D_2 \quad &\text{(Operación 2)}\\
x_1 + 4x_2 &\leq 420 + D_3 \quad &\text{(Operación 3)}\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 &
\end{aligned}$$

Para expresar la tabla simplex óptima del problema modificado en función de los cambios D_1, D_2 y D_3, primero volvemos a escribir la tabla de inicio con los nuevos lados derechos, $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$.

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	-3	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
x_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
x_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por consiguiente, si repetimos las *mismas* iteraciones simplex (con las *mismas* operaciones de filas) como en el modelo *original*, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
x_6	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

La nueva tabla óptima da la siguiente solución óptima:

$$z = 1350 + D_1 + 2D_2$$
$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2$$
$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}D_2$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3$$

Ahora utilizamos esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

Precios duales: El valor de la función objetivo puede escribirse como

$$z = 1350 + \mathbf{1}D_1 + \mathbf{2}D_2 + \mathbf{0}D_3$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

La ecuación muestra que

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ($D_1 = \pm 1$ min) cambia a z en \$1.
2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ($D_2 = \pm 1$ min) cambia a z en \$2.
3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ($D_3 = \pm 1$ min) cambia a z en \$0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 (\$/min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes D_1, D_2 y D_3 en la fila z óptima son exactamente los de las variables de holgura x_4, x_3 y x_6. Esto significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de holgura en la fila z óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso porque cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

Intervalo de factiblidad: La solución actual permanece factible si todas las variables básicas permaneces no negativas, es decir

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2 \geq 0$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2 \geq 0$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

Los cambios simultáneos de D_1, D_2 y D_3 que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina sustituyendo los valores de D_1, D_2 y D_3.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que el tiempo de fabricación disponible para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$ y $D_3 = 400 - 420 = -20$. Sustituyendo en las condiciones de factibilidad, obtenemos

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(50) - \tfrac{1}{4}(-20) = 130 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-20) = 220 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 \qquad \text{(no factible)}$$

La nueva solución factible (óptima) es $x_1 = 88, x_3 = 224$, y $x_6 = 68$ con $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \$1296$. Observe que el valor objetivo óptimo también puede calcularse utilizando los precios duales como $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$1296$.

Las condiciones dadas pueden producir los *intervalos de factibilidad* individuales asociados con cambiar los recursos *uno a la vez* (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio del tiempo de la operación 1 sólo implica que $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto, las condiciones simultáneas se reducen a

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 = 230 > 0 \\ x_6 = 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{array}\right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, cambios en el lado derecho

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$.

Podemos demostrar del mismo modo que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son $-20 \leq D_2 \leq 400$ y $-20 < D_3 < \infty$, respectivamente (¡compruébelo!).

Ahora podemos resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo de TOYCO como sigue:[9]

			Cantidad de recurso (minutos)		
Recurso	Precio dual ($)	Intervalo de factibilidad	*Mínima*	*Actual*	*Máxima*
Operación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	440
Operación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Operación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	∞

Es importante señalar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio *simultáneo* que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios violen los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios $D_1 = 30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 100$ mantendrán la solución factible aun cuando $D_1 = 30$ viole el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$, como los siguientes cálculos lo demuestran:

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \quad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \quad \text{(factible)}$$

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que podemos calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \$1356$.

[9] Los paquetes de programación lineal disponibles suelen presentar esta información como resultados estándar. Prácticamente ninguno proporciona el caso de condiciones simultáneas, quizá porque su visualización es muy pesada en el caso de PL grandes.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

En la sección 3.6.1 utilizamos el análisis de sensibilidad gráfica para determinar las condiciones que mantendrán la optimalidad de la solución de una PL de dos variables. En esta sección extendemos estas ideas al problema de programación lineal general.

Definición de costo reducido. Para facilitar la explicación del análisis de sensibilidad de la función objetivo, primero tenemos que definir los *costos reducidos*. En el modelo de TOYCO (ejemplo 3.6-2), la ecuación z objetivo que aparece en la tabla óptima puede escribirse como

$$z = 1350 - 4x_1 - x_4 - 2x_5$$

La solución óptima no produce trenes de juguete ($x_1 = 0$). La razón se pone de manifiesto en la ecuación z, donde un incremento unitario en x_1 (sobre su valor de cero actual) reduce a z en \$4, es decir, $z = 1350 - 4 \times (1) - 1 \times (0) - 2 \times (0) = \$1346$.

Podemos considerar el coeficiente de x_1 en la ecuación z ($= 4$) como un *costo* unitario porque reduce el ingreso z. Pero ¿de dónde proviene este "costo"? Sabemos que el ingreso por unidad de x_1 es de \$3 (según el modelo original). También sabemos que la producción de trenes de juguete incurre en un costo porque consume recursos (tiempo de operaciones). Por consiguiente, desde el punto de vista de la optimización, el "atractivo" de x_1 depende del costo de los recursos consumidos con respecto al ingreso. Esta relación define el llamado **costo reducido** y se formaliza en la literatura de PL como

$$\begin{pmatrix}\text{Costo reducido} \\ \text{por unidad}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de los recursos} \\ \text{consumidos por unidad}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Ingreso} \\ \text{por unidad}\end{pmatrix}$$

Para apreciar la importancia de esta definición, en el modelo original de TOYCO el ingreso por unidad de camiones de juguete ($= \$2$) es menor que el de trenes de juguete ($= \$3$). No obstante la solución óptima recomienda producir camiones de juguete ($x_2 = 100$ unidades) y nada de trenes ($x_1 = 0$). La razón es que el costo de los recursos consumidos por un camión de juguete (es decir, tiempo de operaciones) es menor que su precio unitario; al contrario de lo que sucede en el caso de los trenes de juguete.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

Con la definición dada de *costo reducido*, podemos ver que una variable no rentable (como x_1) puede hacerse rentable de dos maneras:

1. Incrementando el ingreso unitario.
2. Reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos.

En la mayoría de las situaciones, las condiciones del mercado dictan el precio por unidad y puede ser difícil incrementarlo a voluntad. Por otra parte, una opción más viable es reducir el consumo de recursos porque el fabricante puede reducir el costo si hace que el proceso de producción sea más eficiente.

Determinación de los intervalos de optimalidad. Ahora nos enfocamos en la determinación de las condiciones que mantendrán una óptima solución. El desarrollo se basa en la definición de *costo reducido*.

En el modelo de TOYCO, sean d_1, d_2 y d_3 los cambios de los ingresos unitarios de camiones, trenes y autos, respectivamente. La función objetivo se escribe entonces como

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + (2 + d_2)x_2 + (5 + d_3)x_3$$

Primero consideramos la situación general en la cual todos los coeficientes objetivo cambian *al mismo tiempo*.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

Con los cambios simultáneos, la fila z en la tabla de inicio aparece como:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-3 - d_1$	$-2 - d_2$	$-5 - d_3$	0	0	0	0

Cuando generamos la tabla simplex con la misma secuencia de las variables de entrada y salida utilizadas en el modelo original (antes de que se realicen los cambios de d_i), la iteración óptima aparecerá como sigue (convénzase de que éste si es el caso realizando las operaciones de filas simplex):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1$	0	0	$1 + \frac{1}{2}d_2$	$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3$	0	$1350 + 100d_2 + 230d_3$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	$-\frac{1}{4}$	0	0	-2	1	1	20

La nueva tabla óptima es igual a la tabla óptima *original*, excepto por los *costos reducidos* (coeficientes de la ecuación z). Esto significa que los *cambios en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar sólo la optimalidad del problema.* (Compare con la sección 3.6.2, donde los cambios del lado derecho sólo afectan a la factibilidad.)

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

En realidad no tiene que realizar la operación de filas simplex para calcular los nuevos costos reducidos. Un examen de la nueva fila z muestra que los coeficientes de d_i se toman directamente de los coeficientes de las restricciones de la tabla óptima. Una forma conveniente de calcular el nuevo costo reducido es agregar una nueva fila superior y una nueva columna más a la izquierda de la tabla óptima, como lo muestran las áreas sombreadas en la siguiente ilustración.

		d_1	d_2	d_3	0	0	0	
	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
1	z	4	0	0	1	2	0	1350
d_2	x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
d_3	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Las entradas en la fila superior son los cambios d_j asociados con la variable x_j. En la columna a la extrema izquierda, el elemento superior es 1 en la fila z seguido del cambio d_i de la variable básica x_i. Tenga en cuenta que $d_i = 0$ para la variable de holgura x_i.

Para calcular el nuevo costo reducido para cualquier variable (o el valor de z), multiplique los elementos de su columna por los elementos correspondientes que aparecen en la columna a la extrema izquierda, súmelos y reste el elemento en la fila superior de la suma. Por ejemplo, para x_1, tenemos

$$\text{Costo reducido de } x_1 = [4 \times 1 + (-\tfrac{1}{4}) \times d_2 + \tfrac{3}{2} \times d_3 + 2 \times 0] - d_1$$
$$= 4 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{3}{2} d_3 - d_1$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

La solución actual permanece óptima en tanto los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) permanezcan no negativos (caso de maximización). Por lo tanto tenemos las siguientes *condiciones de optimalidad simultáneas* correspondientes a las x_1, x_4 y x_5 no básicas:

$$4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 \geq 0$$
$$1 + \tfrac{1}{2}d_2 \geq 0$$
$$2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 \geq 0$$

Recuerde que el costo reducido de una variable básica siempre es cero, como lo muestra la tabla óptima modificada.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que la función objetivo de TOYCO cambia de $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ a $z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$. Entonces, $d_1 = 2 - 3 = -\$1$, $d_2 = 1 - 2 = -\$1$ y $d_3 = 6 - 5 = \$1$. La sustitución en las condiciones dadas presenta el resultado

$$4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{3}{2}(1) - (-1) = 6.75 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$
$$1 + \tfrac{1}{2}d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(-1) = .5 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$
$$2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{1}{2}(1) = 2.75 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

Los resultados muestran que los cambios propuestos mantendrán la solución actual ($x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$) óptima (con un nuevo valor de $z = 1350 + 100d_2 + 230d_3 = 1350 + 100 \times -1 + 230 \times 1 = \$1480$. Si cualquier condición no se satisface, debe determinarse una nueva solución (vea el capítulo 4).

El tema anterior abordó el caso de maximización. La única diferencia en el caso de minimización es que los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) deben ser ≤ 0 para mantener la optimalidad.

Los *intervalos de optimalidad* que tienen que ver con los cambios de d_i *uno a la vez* pueden desarrollarse a partir de las condiciones de optimalidad simultáneas.[11] Por ejemplo, suponga que el coeficiente objetivo de x_2 sólo cambia a $2 + d_2$; es decir que $d_1 = d_3 = 0$. Las condiciones de optimalidad simultáneas se reducen por lo tanto a

$$\left.\begin{array}{l} 4 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 16 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -2 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 8 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \leq d_2 \leq 8$$

Del mismo modo, puede verificar que los cambios individuales $(3 + d_3)$ y $(5 + d_3)$ para x_1 y x_3 dan los intervalos de optimalidad $d_1 < 4$ y $d_3 \geq -\frac{8}{3}$, respectivamente.

Las condiciones individuales dadas pueden traducirse a intervalos de ingresos unitarios totales. Por ejemplo, para los camiones de juguete (variable x_2), el ingreso unitario total es $2 + d_2$, y su intervalo de optimalidad $-2 \leq d_2 \leq 8$ se traduce a

$$\$0 \leq (\text{ingreso unitario del camión de juguete}) \leq \$10$$

---

[11] Los intervalos individuales son resultados estándar en todo software de PL. Por lo común, las condiciones simultáneas no forman parte de los resultados, quizá porque son voluminosas para problemas grandes.

Análisis de Sensibilidad Algebraica, Función Objetivo

Se supone que los ingresos unitarios de los trenes y autos de juguete permanecen fijos en \$3 y \$5, respectivamente.

Es importante observar que los cambios d_1, d_2 y d_3 pueden estar dentro de sus intervalos individuales permisibles sin satisfacer las condiciones simultáneas y viceversa. Por ejemplo, considere $z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$. En este caso $d_1 = 6 - 3 = \$3$, $d_2 = 8 - 2 = \$6$ y $d_3 = 3 - 5 = -\$2$, los cuales quedan dentro de los intervalos individuales permisibles ($-\infty < d_1 \leq 4$, $-2\ d_2 \leq 8$, $y\ -\frac{8}{3}d_3 < \infty$). Sin embargo, las condiciones simultáneas correspondientes dan por resultado

$$4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{3}{2}(-2) - 3 = -3.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$

$$1 + \tfrac{1}{2}d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(6) = 4 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$

$$2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{1}{2}(-2) = -.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$