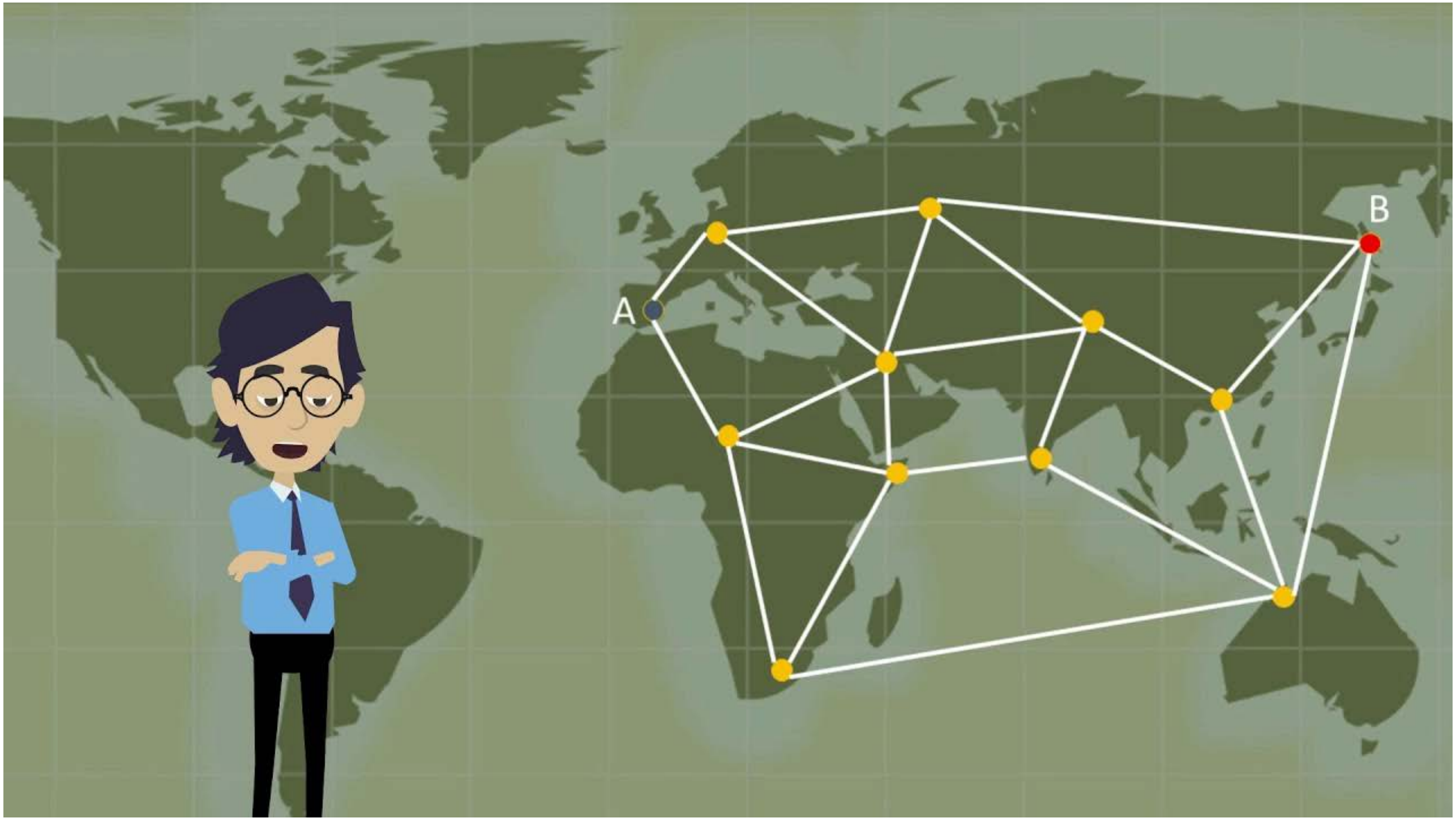
MODELO DE REDES



ING WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Aplicación de la vida real. Ahorro de recursos federales para viáticos

Las oficinas del gobierno federal de Estados Unidos están localizadas en la mayoría de las ciudades en los Estados Unidos, y se requiere que los empleados federales asistan a conferencias de desarrollo y cursos de capacitación que se ofrecen por todo el país. La ubicación de la ciudad donde se efectuarán las conferencias y eventos de capacitación puede impactar los viáticos. El objetivo del estudio es determinar la ubicación óptima de la ciudad anfitriona de una conferencia o evento de entrenamiento programado. Se estima que para el año fiscal de 1997, el modelo desarrollado ahorró al menos $400,000. El caso 4 del capítulo 26 en el sitio web proporciona los detalles.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

ALCANCE Y DEFINICIÓN DE MODELOS DE REDES

Muchas situaciones de investigación de operaciones pueden modelarse y resolverse como redes (nodos conectados por ramas); a continuación tenemos algunos ejemplos de aplicación:

1. Diseño de una red de oleoductos para gas natural a una determinada distancia de la costa para conectar los cabezales de los pozos en el Golfo de México a un punto de distribución costero con el objetivo de minimizar el costo de construcción de los oleoductos.
2. Determinación de la ruta más corta entre dos ciudades en una red existente de carreteras.
3. Determinación de la capacidad máxima (en toneladas por año) de una red de oleoductos para lodos de carbón que unen minas de carbón en Wyoming con plantas eléctricas en Houston (los oleoductos para lodos transportan carbón al bombear agua a través de tuberías especialmente diseñadas).
4. Determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) para las actividades de un proyecto de construcción.
5. Determinación del itinerario de flujo de costo mínimo desde campos petroleros hasta refinerías a través de una red de oleoductos.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

La solución de estas situaciones se logra por medio de varios algoritmos de optimización de redes. Este capítulo presenta cuatro de estos algoritmos.

1. Árbol de mínima expansión (situación 1)
2. Algoritmo de la ruta más corta (situación 2)
3. Algoritmo de flujo máximo (situación 3)
4. Algoritmo de la ruta crítica (CPM) (situación 4)

Para la quinta situación, el algoritmo de red capacitada de costo mínimo se presenta en la sección 22.1 en el sitio web.

Definiciones de red. Una red se compone de un conjunto de **nodos** unidos por **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos, y A es el conjunto de arcos. A guisa de ilustración, la red de la figura 6.1, se describe como

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$$

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Asociado con cada red hay un **flujo** (por ejemplo, los productos de petróleo fluyen por un oleoducto y el tráfico de automóviles fluye por las carreteras). El flujo máximo en una red puede ser finito o infinito, según la capacidad de sus arcos.

Se dice que un arco está **dirigido** u **orientado** si permite el flujo positivo sólo en una dirección. Una **red dirigida** tiene todos los arcos dirigidos.

Una **ruta** es un conjunto de arcos que unen dos nodos distintos, y que pasan a través de otros nodos en la red. Por ejemplo, en la figura 6.1 los arcos (1,2), (2,3), (3,4) y (4,5) forman una ruta entre los nodos 1 y 5. Una ruta forma un **ciclo** o un **bucle** si conecta un nodo de vuelta a sí mismo a través de otros nodos. En la figura 6.1, los arcos (2,3), (3,4) y (4,2) forman un ciclo.

Se dice que una red está **conectada** si cada dos nodos distintos están conectados en al menos una ruta. La red en la figura 6.1 muestra este tipo de red. Un **árbol** es una red conectada *libre de ciclos* compuesta de un *subconjunto* de todos los nodos, y un **árbol de expansión** es un árbol que une *todos* los nodos de la red. La figura 6.2 proporciona ejemplos de un árbol y un árbol de expansión de la red de la figura 6.1.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

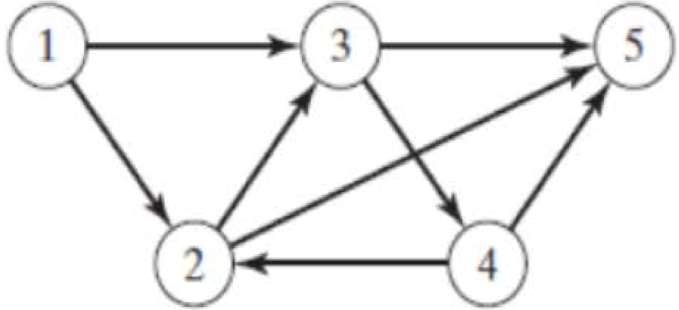
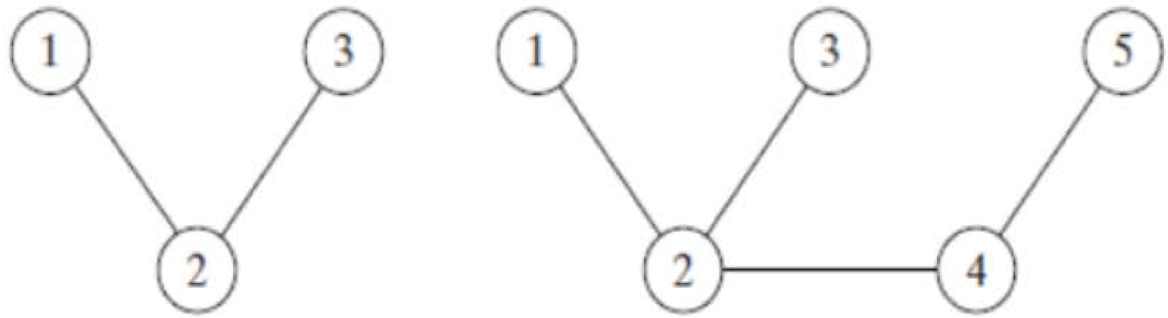


FIGURA 6.1

Ejemplo de una red (*N*,*A*)



Árbol   Árbol de expansión

FIGURA 6.2

Ejemplos de un árbol y un árbol de expansión

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.1-1 (Puentes de Königsberg)

La ciudad prusiana de Königsberg (actualmente Kaliningrado en Rusia) fue fundada en 1254 en las riberas del río Pregel con siete puentes que conectan sus cuatro secciones (designadas *A*, *B*, *C*, y *D*) como se muestra en la figura 6.3. Surgió una pregunta sobre si podría construirse un *viaje redondo* para visitar las cuatro secciones de la ciudad, cruzando cada puente exactamente una vez. Una sección podría ser visitada varias veces, si fuese necesario.

A mediados del siglo XVIII, el afamado matemático Leonhard Euler desarrolló un argumento de "construcción de rutas" para demostrar que sí era posible construir semejante viaje. Más tarde, a principios del siglo XIX, el mismo problema se resolvió presentando de nuevo la situación como una red con nodos que representan las secciones y arcos (distintos) que representan los puentes, como se muestra en la figura 6.4.

La representación en forma de red implica el hallazgo de una respuesta a la pregunta planteada. El número de arcos incidentes en cada nodo es *impar*. Esto hace posible entrar y salir de todas las secciones utilizando puentes distintos. Por consiguiente, el viaje redondo deseado no puede construirse.[1]

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

FIGURA 6.3
Puentes de Königsberg

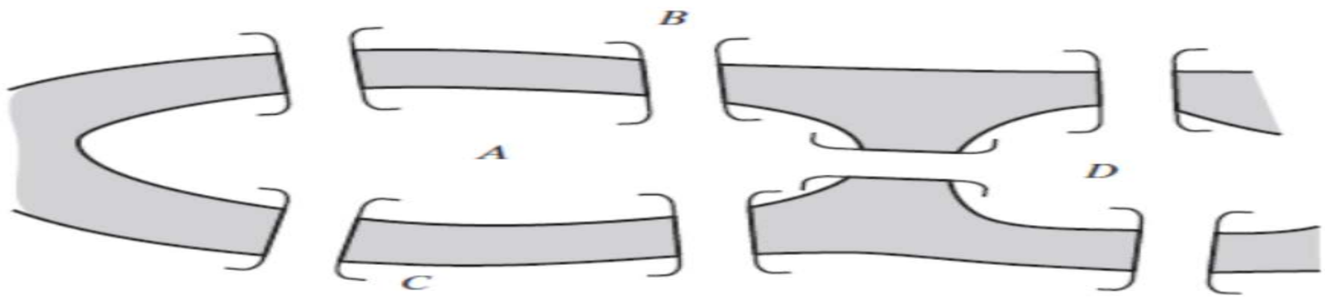
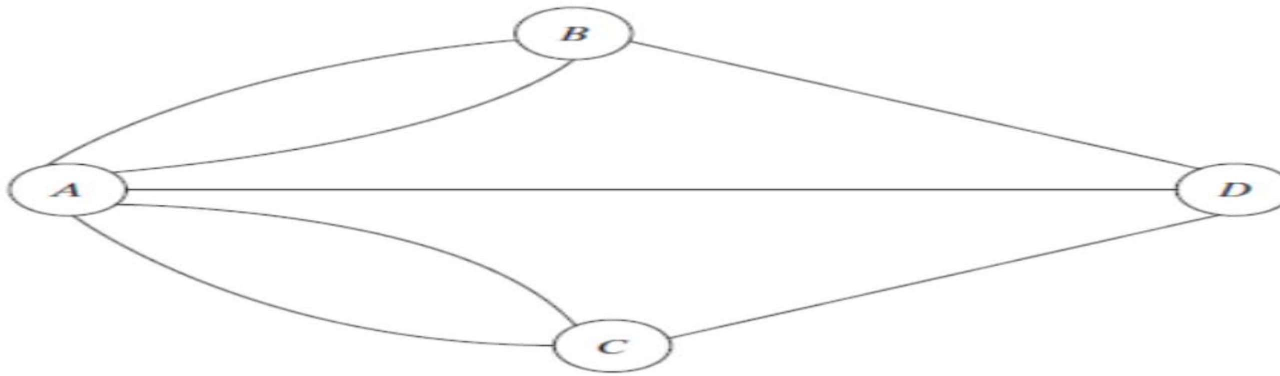


FIGURA 6.4
Representación en forma de red del problema de Königsberg



---

[1]Solución general: Existe un recorrido que se inicia y termina en un nodo si el número de arcos incidentes en cada nodo es *par*. Hay un viaje que se inicia en un nodo y termina en *otro* si el número de arcos incidentes en estos dos nodos es *impar*. De lo contrario, no hay solución. Vea B. Hopkins y R. Wilson, "The Truth about Königsberg", *College Math Journal*, Vol. 35, núm. 3, págs. 198-207, 2004.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

ALGORITMO DEL ÁRBOL DE MÍNIMA EXPANSIÓN

Este árbol vincula los nodos de una red valiéndose de la longitud mínima total de las ramas de conexión. Una aplicación común se presenta en la pavimentación de carreteras que unen poblaciones, o de forma directa, o que pasan por otras poblaciones. La solución del árbol de mínima expansión proporciona el diseño del sistema de carreteras.

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de nodos de la red y defina

C_k = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en la iteración k

$\overline{C}_k$ = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración k.

Los siguientes pasos describen al algoritmo del árbol de mínima expansión:

Paso 0. Establezca $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C}_0 = N$.

Paso 1. Inicie con *cualquier* nodo i en el conjunto no conectado $\overline{C}_0$ y establezca $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Establezca $k = 2$.

Paso general k. Seleccione un nodo, j^*, en el conjunto no conectado $\overline{C}_{k-1}$, que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto C_{k-1} conectado. Vincule j^* permanentemente a C_{k-1} y elimínelo de $\overline{C}_{k-1}$ para obtener C_k y $\overline{C}_k$, respectivamente. Deténgase si $\overline{C}_k$ está vacío; de lo contrario, establezca $k = k + 1$ y repita el paso.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.2-1

Midwest TV Cable Company va a proporcionar servicio de cable a cinco desarrollos habitacionales. La figura 6.6 ilustra las posibles conexiones de TV a las cinco áreas, con las millas de cable anexadas a cada arco. El objetivo es determinar la red de cables más económica.

El algoritmo se inicia en el nodo 1 (en realidad, cualquier otro nodo puede ser un punto de inicio), el cual da por resultado

$$C_1 = \{1\} \text{ y } \overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 6.7. Los arcos delgados proporcionan todos los candidatos entre C y $\overline{C}$. Los arcos gruesos son los vínculos permanentes del conjunto conectado C, y el arco de rayas es el nuevo vínculo (permanente) agregado en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1, 2) es el vínculo más corto (= 1 milla) entre todas las ramas candidatas del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4, 5 y 6 en el conjunto no conectado $\overline{C}_1$. De ahí que el vínculo (1, 2) se hace permanente y $j^* = 2$, de lo cual resulta

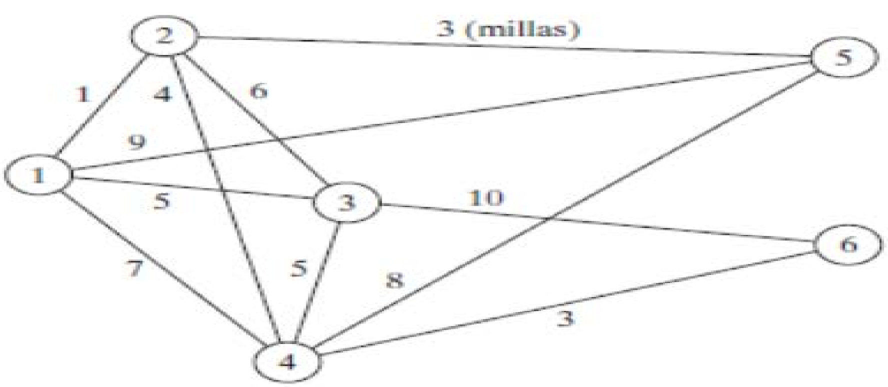
$$C_2 = \{1, 2\}, \overline{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

El árbol de mínima expansión que se muestra en la iteración 6 de la figura 6.7 da la solución. Las millas de cable mínimas resultantes que se necesitan para proporcionar el servicio de cable deseado son $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ millas.

Comentarios. En teoría, un árbol de mínima expansión puede formularse y resolverse como un programa lineal. Sin embargo, la PL no es una opción práctica porque deben agregarse numerosas restricciones para excluir todos los ciclos y el resultado es una PL enorme, aun para redes pequeñas.

FIGURA 6.6

Conexiones de cable para Midwest TV Company



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

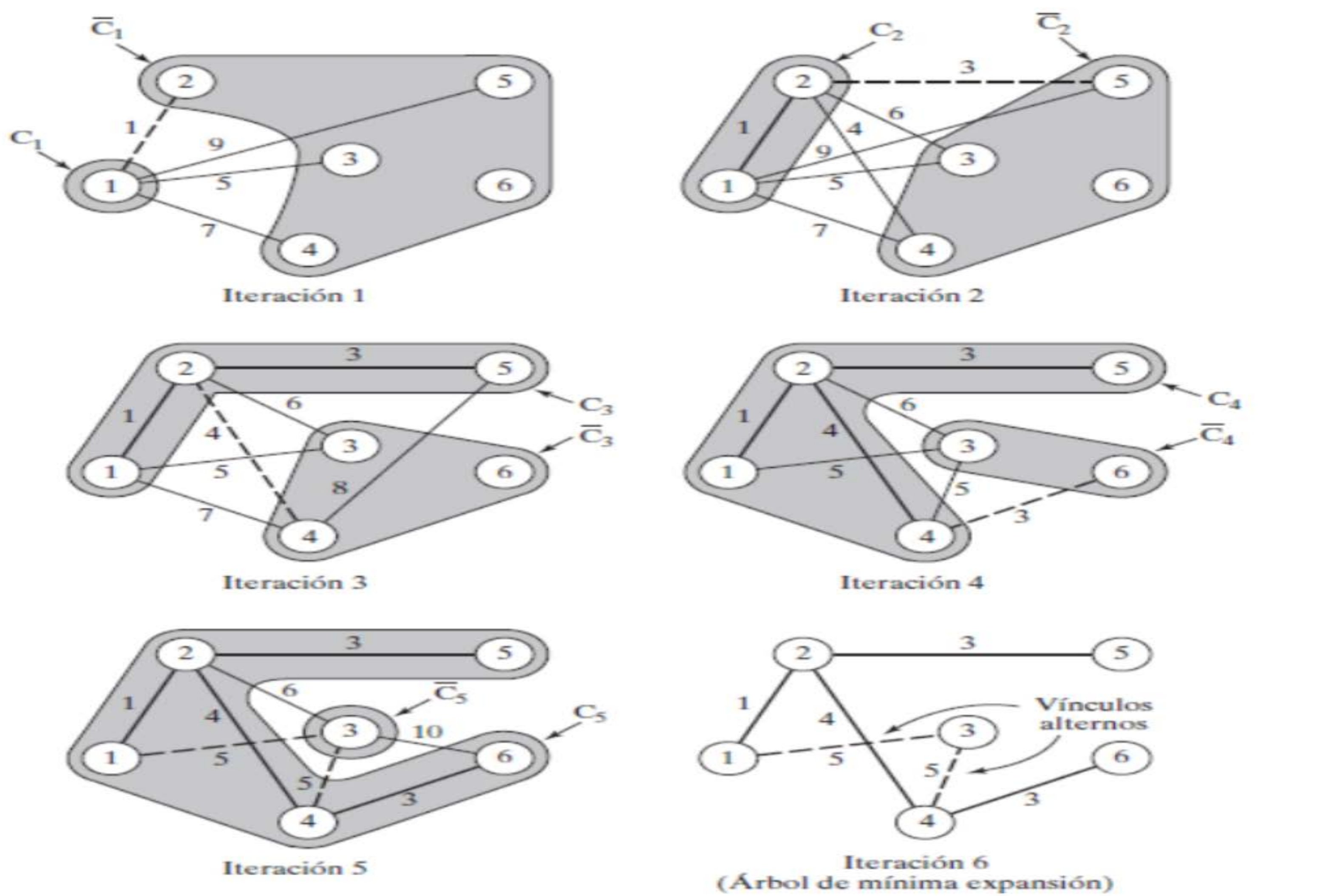


FIGURA 6.7
Iteraciones para determinar la solución para Midwest TV Company

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Momento de TORA

Puede utilizar TORA para generar las iteraciones del árbol de mínima expansión. En la barra de Main Menu, seleccione las opciones Network models ⇒ Minimal spanning tree. Luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Go to output screen. En la pantalla de resultados seleccione Starting node, luego utilice las opciones Next iteration o bien All iterations para generar las iteraciones sucesivas. Puede reiniciar las iteraciones seleccionando un nuevo nodo de inicio Starting Node. El archivo *toraEx6.2-1.txt* da los datos para el ejemplo 6.2-1.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Este problema determina la ruta más corta entre un origen y un destino en una red de transporte. El mismo modelo puede representar otras situaciones, como se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta

Ejemplo 6.3-1 (Reemplazo de equipo)

RentCar está desarrollando una política de reemplazo para su flotilla de automóviles en un horizonte de planeación de 4 años. Al inicio de cada año, un automóvil se reemplaza o se conserva en operación durante un año más. Un automóvil debe estar en servio de 1 a 3 años. La siguiente tabla proporciona el costo de reemplazo como una función del año en que se adquiere un automóvil y los años en operación.

Equipo adquirido al inicio del año	Costo de reemplazo ($) para años dados en operación		
	1	*2*	*3*
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

El problema puede formularse como una red en la que los nodos 1 a 5 representan el inicio de los años 1 a 5. Los arcos a partir del nodo 1 (año 1) pueden llegar a los nodos 2, 3 y 4 porque un automóvil puede estar en operación de 1 a 3 años. Los arcos a partir de los demás nodos pueden interpretarse del mismo modo. La longitud de cada arco es igual al costo de reemplazo. La solución del problema es equivalente a determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 5.

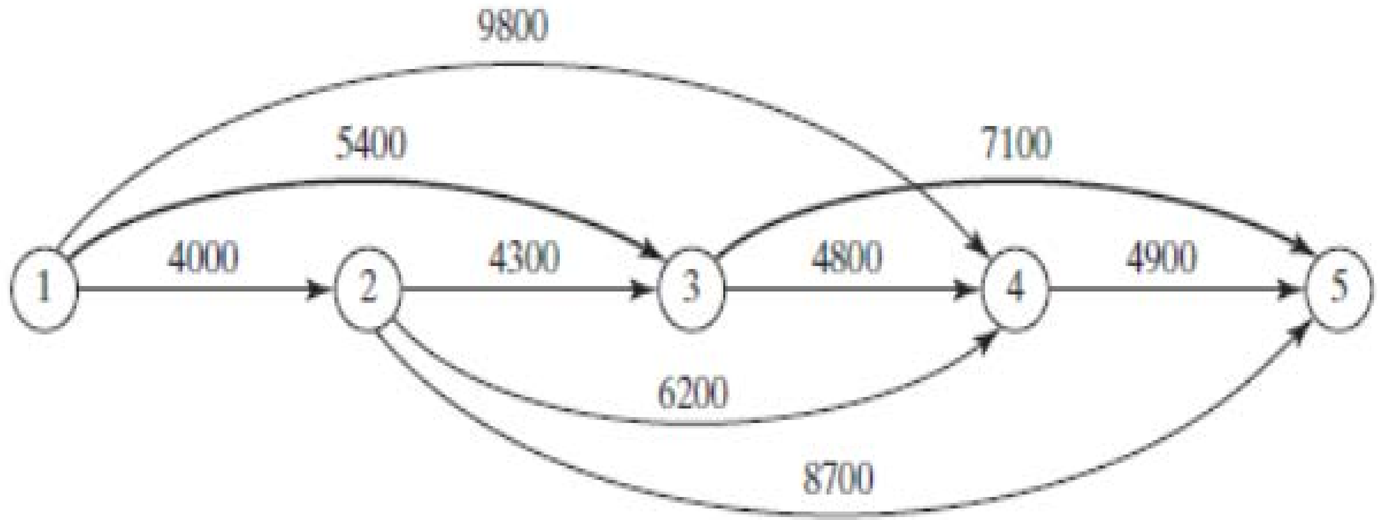
La figura 6.10 muestra la red resultante. Utilizando TORA,[2] la ruta más corta es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. La solución indica que un automóvil adquirido al inicio del año 1 (nodo 1) debe reemplazarse después de 2 años al inicio del año 3 (nodo 3). El automóvil de reemplazo se mantendrá entonces en servicio hasta finales del año 4. El costo total de esta política de reemplazo es de $12,500 (= $5400 + $7100).

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

FIGURA 6.10

Problema de reemplazo de equipo como un modelo de la ruta más corta



[2]En la barra de menús Main, seleccione las opciones Network models ⇒ Shortest route. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Shortest routes.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.3-2 (Ruta más confiable)

I. Q. Smart va en auto diariamente al trabajo. Habiendo completado un curso de análisis de redes, Smart es capaz de determinar la ruta más corta al trabajo. Por desgracia, la ruta seleccionada está fuertemente patrullada por la policía, y con todas las multas pagadas por exceso de velocidad, la ruta más corta puede no ser la mejor opción. Smart ha decidido por lo tanto elegir una ruta que maximice la probabilidad de *no* ser detenido por la policía.

La red en la figura 6.11 muestra las posibles rutas de la casa al trabajo y la probabilidad asociada de no ser detenido en cada segmento. La probabilidad de no ser detenido en la ruta es el producto de las probabilidades de sus segmentos. Por ejemplo, la probabilidad de no ser multado en la ruta $1 \to 3 \to 5 \to 7$ es $.9 \times .3 \times .25 = .0675$. El objetivo de Smart es seleccionar la ruta que *maximice* la probabilidad de no ser multado.

El problema puede formularse como un modelo de la ruta más corta por medio de una transformación logarítmica para convertir el producto de las probabilidades en la suma de los logaritmos de las probabilidades, esto es, $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ se transforma en $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

Las dos funciones p_{1k} y $\log p_{1k}$ son monótonas y decrecen en k, así pues, maximizar p_{1k} es equivalente a maximizar $\log p_{1k}$, lo que a su vez equivale a *minimizar* $\log p_{1k}$. Por lo tanto, al reemplazar p_j con $\log p_j$ para todas las j en la red, el problema se convierte en la red de la ruta más corta en la figura 6.12.

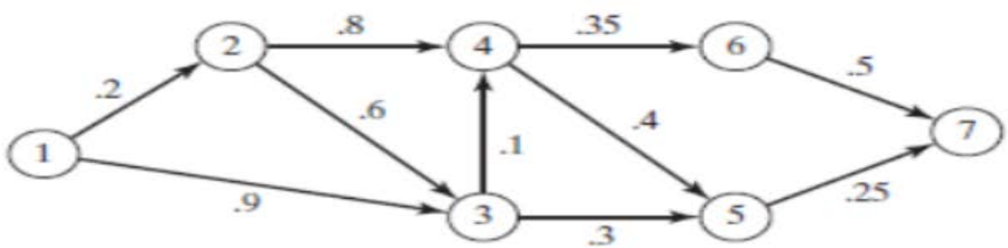


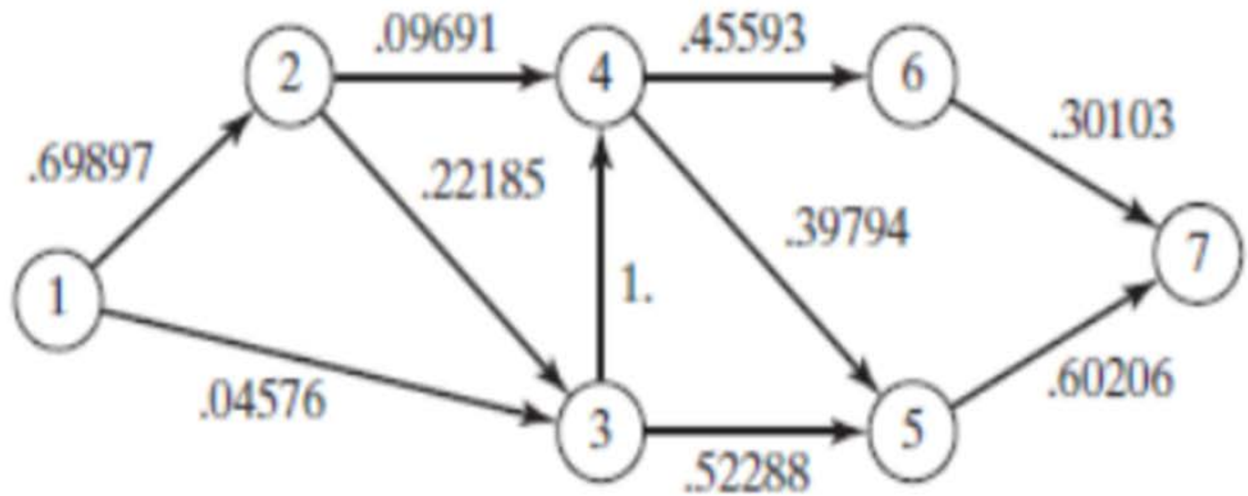
FIGURA 6.11
Modelo de red de la ruta más confiable

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

FIGURA 6.12

Representación de la ruta más confiable como un modelo de la ruta más corta



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.3-3 (Acertijo de las tres jarras)

Una jarra de 8 galones está llena de líquido. Dado que hay dos jarras vacías de 5 y 3 galones, divida los 8 galones de líquido en dos partes iguales utilizando sólo las tres jarras. ¿Cuál es el mínimo de transferencias (decantaciones) necesarias para obtener este resultado?

Probablemente pueda resolver este acertijo mediante inspección. No obstante, el proceso de solución puede ser sistematizado al representar la cuestión como un problema de la ruta más corta.

Se define un nodo mediante un subíndice triple que representa las cantidades de líquido en las jarras de 8, 5 y 3 galones, respectivamente. Esto quiere decir que la red se inicia con el nodo (8,0,0) y termina con la solución deseada (4,4,0). Se genera un nuevo nodo a partir del nodo actual decantando líquido de una jarra a otra.

La figura 6.13 muestra las diferentes rutas que llevan del nodo de inicio (8,0,0) al nodo final (4,4,0). El arco entre dos nodos sucesivos representa una sola transferencia, y de ahí que podemos suponer que tenemos una longitud de una unidad. El problema se reduce por lo tanto a determinar la ruta más corta entre el nodo (8,0,0) y el nodo (4,4,0).

La solución óptima dada por la ruta de la figura 6.13 requiere 7 decantaciones.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

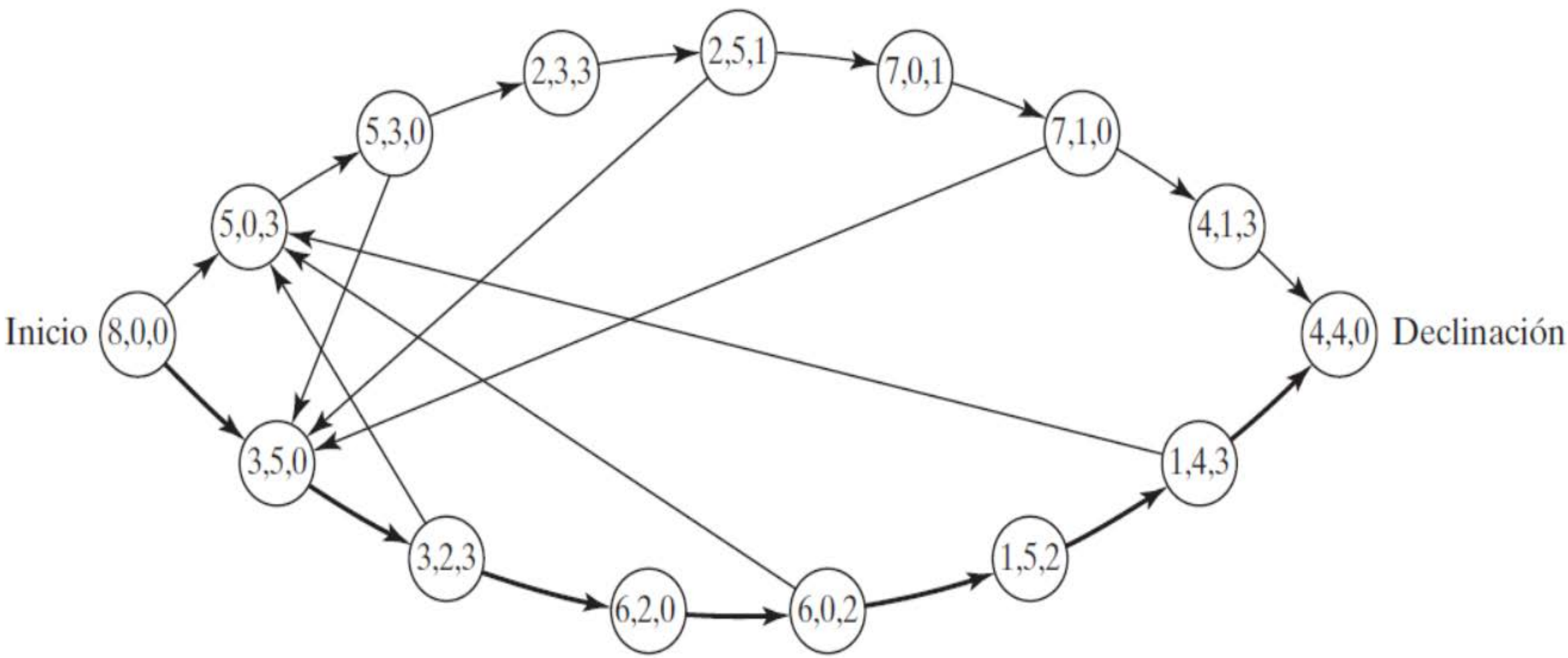


FIGURA 6.13

Representación del acertijo de las tres jarras como un modelo de la ruta más corta

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

CPM Y PERT

El método de la ruta crítica (CPM, por sus siglas en inglés) y la técnica de evaluación y revisión de programas (PERT, por sus siglas en inglés) son métodos basados en redes diseñados para ayudar a planificar, programar y controlar proyectos. Un proyecto se define como un conjunto de actividades interrelacionadas donde cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo de CPM y PERT es idear herramientas analíticas para programar las actividades. La figura 6.36 resume los pasos de las técnicas. Primero definimos las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y sus requerimientos de tiempo. Luego se modelan las relaciones de precedencia entre las actividades como una red. El tercer paso implica cálculos específicos para desarrollar el cronograma. Durante la fase de ejecución real, es posible que la ejecución de las actividades no discurra como se planeó, en el sentido de que algunas de las actividades pueden ser despachadas o demoradas. Cuando esto sucede, el programa se actualiza para reflejar las realidades en el terreno. Ésta es la razón por la que se incluye un bucle de retroalimentación en la figura 6.36.

Las dos técnicas, CPM y PERT, se desarrollaron de forma independiente. Difieren en que CPM asume duraciones de actividad determinísticas y PERT supone duraciones probabilísticas.

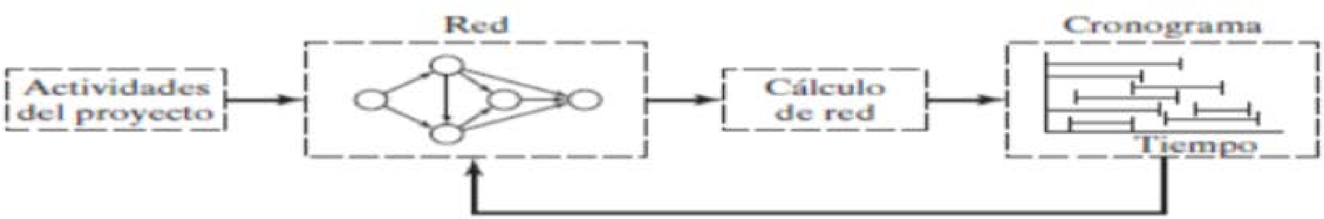


FIGURA 6.36
Fases para la planificación de un proyecto con CMP-PERT

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Representación en forma de red

Cada actividad está representada por un arco que apunta en la dirección del avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades. Se dispone de tres reglas para construir la red.

Regla 1. *Cada actividad está representada por uno, y sólo un arco.*
Regla 2. *Cada actividad debe estar identificada por dos nodos terminales distintos.*

La figura 6.37 muestra cómo puede usarse una **actividad ficticia** para representar de forma única dos actividades concurrentes, *A* y *B*. Por definición, una actividad ficticia (representada por líneas de rayas) no consume tiempo ni recursos. La inserción de una actividad ficticia en una de las cuatro maneras mostradas en la figura 6.37 mantiene la concurrencia de *A* y *B* y proporciona nodos terminales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

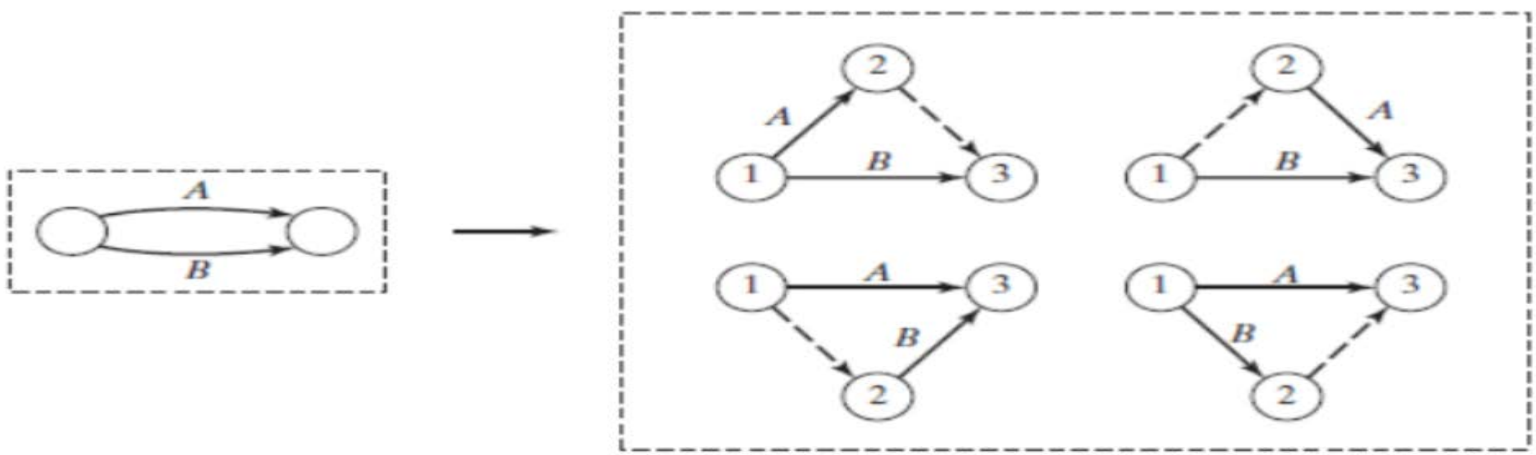


FIGURA 6.37
Uso de una actividad ficticia para representar de forma única actividades concurrentes

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Regla 3. *Para mantener las relaciones de precedencia correctas, hay que contestar las siguientes preguntas a medida que se agrega cada actividad a la red.*

(a) *¿Qué actividades preceden inmediatamente a la actividad actual?*
(b) *¿Qué actividades siguen inmediatamente a la actividad actual?*
(c) *¿Qué actividades son concurrentes con la actividad actual?*

Las respuestas a estas preguntas pueden requerir el uso de actividades ficticias para garantizar la precedencia correcta entre las actividades. Por ejemplo, considere el siguiente segmento de un proyecto:

1. La actividad *C* se inicia inmediatamente después de que las actividades *A* y *B* se han completado.
2. La actividad *E* puede iniciarse después de que se complete la actividad *B*.

La parte (a) de la figura 6.38 muestra la representación incorrecta de la relación de precedencia porque requiere que *A* y *B* se completen antes de que *E* pueda iniciarse. En la parte (b), el uso de una actividad ficticia rectifica la situación.

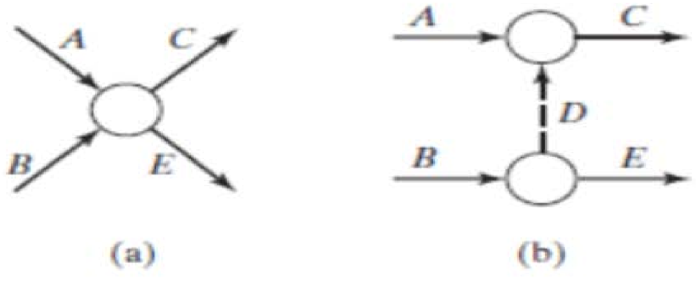


FIGURA 6.38
Uso de una actividad ficticia para garantizar la relación de precedencia correcta

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.5-1

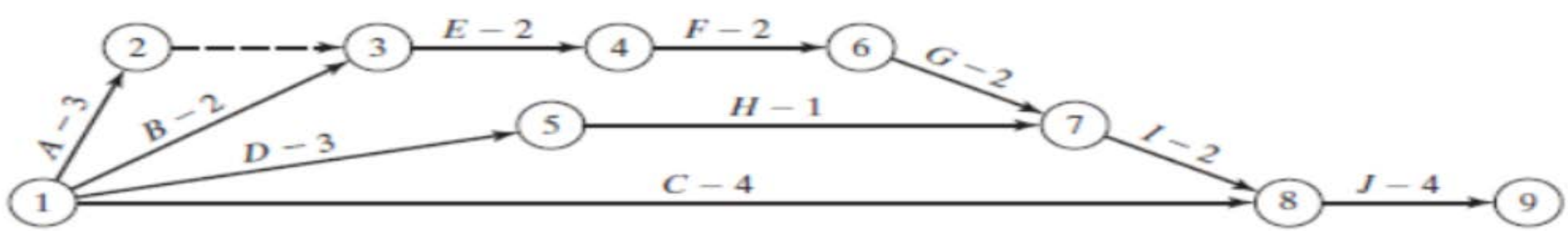
Un editor firmó un contrato con un autor para publicar un libro de texto. El autor somete a consideración una copia impresa de un archivo de computadora del manuscrito. Las actividades (simplificadas) asociadas con la producción del libro de texto se resumen en la siguiente tabla.

Actividad	Predecesora(s)	Duración (semanas)
A: Corrección del manuscrito, por parte del editor	—	3
B: Preparación de páginas muestra	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las ilustraciones	—	3
E: Aprobación del manuscrito editado y de páginas muestra, por parte del autor	*A, B*	2
F: Formación del libro	*E*	4
G: Revisión de las páginas formadas, por parte del autor	*F*	2
H: Revisión de las ilustraciones por el autor	*D*	1
I: Producción de las placas de impresión	*G, H*	2
J: Producción y encuadernación del libro	*C, I*	4

La figura 6.39 proporciona la red del proyecto. Una actividad ficticia (2,3) produce nodos terminales únicos para las actividades concurrentes *A* y *B*. Conviene numerar los nodos en orden ascendente en la dirección de avance del proyecto.

FIGURA 6.39

Red del proyecto para el ejemplo 6.5-1



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Cálculos del método de la ruta crítica (CPM)

El resultado final en el CPM es un cronograma para el proyecto (vea la figura 6.36). Para lograr este objetivo se realizan cálculos especiales para obtener la siguiente información:

1. Duración total necesaria para completar el proyecto.
2. Clasificación de las actividades del proyecto como *críticas* o *no críticas*.

Una actividad es **crítica** si sus tiempos de inicio y terminación están predeterminados (fijos). Una actividad es **no crítica** si puede ser programada en un espacio de tiempo mayor que su duración, lo que permite tiempos de inicio y terminación flexibles (dentro de los límites). Una demora en el tiempo de inicio de una actividad crítica definitivamente retrasa la terminación del proyecto, en tanto que una demora en una actividad no crítica quizá no afecte la fecha de terminación del proyecto.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Para realizar los cálculos necesarios, definimos un **evento** como un punto en el tiempo en el cual se completan las actividades y se inician las subsiguientes. En función de la red, un evento corresponde a un nodo. Sean

$\square_j$ = Tiempo de ocurrencia más temprano del evento j
Δ_j = Tiempo de ocurrencia más tardío del evento j
D_{ij} = Duración de la actividad (i,j)

Todos los tiempos de ocurrencia se miden a partir del inicio del proyecto. El lapso $(\square_i, \Delta_j)$ define el periodo de tiempo durante el cual se programa la actividad (i,j) de duración D_{ij}. Si la actividad (i,j) es crítica, entonces $D_{ij} = \Delta_j - \square_i$. De lo contrario, $D_{ij} < \Delta_j - \square_i$ para la actividad no crítica (i,j).

Los cálculos de la ruta crítica implican dos pasos: El **paso adelantado** determina los tiempos de ocurrencia *más tempranos* de los eventos y el **paso retrasado** calcula sus tiempos de ocurrencia *mas tardíos*.

Paso adelantado (tiempos de ocurrencia más tempranos, $\square$). Los cálculos se inician en el nodo 1 y avanzan recursivamente hacia el nodo n.

Paso inicial. Establezca $\square_j = 0$ para indicar que el proyecto se inicia en el tiempo 0.

Paso general j. Dado que los nodos $p, q, \dots$ y v están vinculados directamente al nodo j por las actividades entrantes $(p,j), (q,j), \dots,$ y (v,j) y que los tiempos de ocurrencia más temprano de los eventos (nodos) $p, q, \dots,$ y v ya se calcularon, entonces el tiempo más temprano de ocurrencia del evento j se calcula como

$$\square_j = \text{máx}\{\square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \cdots, \square_v + D_{vj}\}$$

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

El paso adelantado se completa cuando se ha calculado $\square_j$ en el nodo n. Por definición, $\square_j$ es la ruta más larga (duración) al nodo j.

Paso retrasado (tiempos de ocurrencia más tardíos, Δ). Los cálculos del paso retrasado se inician en el nodo n y terminan en el nodo 1.

Paso inicial. Establezca $\Delta_n = \square_n$ para indicar que las ocurrencias más tardías del último nodo son iguales a la duración del proyecto.

Paso general *j*. Dado que los nodos $p, q, \ldots,$ y v están vinculados *directamente* al nodo j por las actividades *salientes* (j,p), (j,q), …, y (j,v) y que los tiempos de ocurrencia más tardíos de los nodos $p, q, \ldots,$ y v ya se calcularon, el tiempo de ocurrencia más tardío del nodo j se calcula como

$$\Delta_j = \text{mín}\,\{\Delta_p - D_{jp}, \Delta_q - D_{jq}, \ldots, \Delta_v - D_{jv}\}$$

El paso retrasado termina con $\Delta_1 = 0$ en el nodo 1.

Con base en los cálculos anteriores, una actividad (i,j) será *crítica* si satisface tres condiciones.

1. $\Delta_i = \square_i$
2. $\Delta_j = \square_j$
3. $\Delta_j - \square_i = D_{ij}$

Las tres condiciones establecen que los tiempos de ocurrencia más tempranos y más tardíos de los nodos finales i y j son iguales y que la duración D_{ji} encaja "perfectamente" en el espacio de tiempo especificado. Una condición que no satisface las tres condiciones es *no crítica*.

Por definición, las actividades críticas de una red constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto desde el inicio hasta la terminación.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Ejemplo 6.5-2

Determine la ruta crítica para la red del proyecto que se muestra en la figura 6.40. Todas las duraciones están en días.

Paso adelantado

Nodo 1. Establezca $\square_1 = 0$

Nodo 2. $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

Nodo 3. $\square_3 = \text{máx}\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \text{máx}\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$

Nodo 4. $\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$

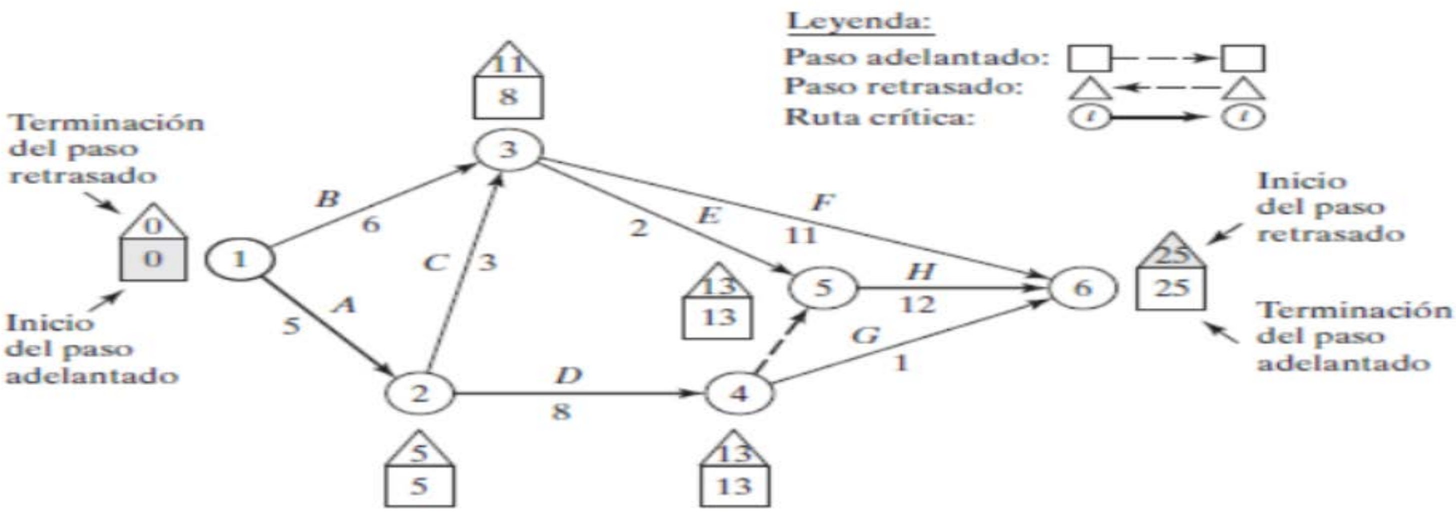
Nodo 5. $\square_5 = \text{máx}\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \text{máx}\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$

Nodo 6. $\square_6 = \text{máx}\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\}$
$= \text{máx}\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$

Los cálculos muestran que el proyecto puede completarse en 25 días.

FIGURA 6.40

Cálculos de paso adelantado y paso retrasado para el proyecto del ejemplo 6.5-2



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Paso retrasado

Nodo 6. Establezca $\Delta_6 = \square_6 = 25$

Nodo 5. $\Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$

Nodo 4. $\Delta_4 = \text{mín}\,\{\Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45}\} = \text{mín}\,\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$

Nodo 3. $\Delta_3 = \text{mín}\,\{\Delta_6 - D_{36}, \Delta_5 - D_{35}\} = \text{mín}\,\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$

Nodo 2. $\Delta_2 = \text{mín}\,\{\Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23}\} = \text{mín}\,\{13 - 8, 11 - 3\} = 5$

Nodo 1. $\Delta_1 = \text{mín}\,\{\Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_2\} = \text{mín}\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$

Los cálculos correctos siempre terminarán con $\Delta_1 = 0$. Los cálculos pueden hacerse directamente en la red como se muestra en la figura 6.40.

Aplicando las reglas para determinar las actividades críticas, la ruta crítica es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, la cual, como se esperaba, abarca la res desde el inicio (nodo 1) hasta la terminación (nodo 6). La suma de las duraciones de las actividades críticas [(1,2), (2,4), (4,5) y (5.6)] es igual a la duración del proyecto (= 25 días). Observe que la actividad (4,6) satisface las dos primeras condiciones para una actividad crítica ($\Delta_4 = \square_4 = 13$) y ($\Delta_6 = \square_6 = 25$) pero no la tercera ($\Delta_6 - \square_4) \neq D_{46}$). De ahí que la actividad es no crítica.

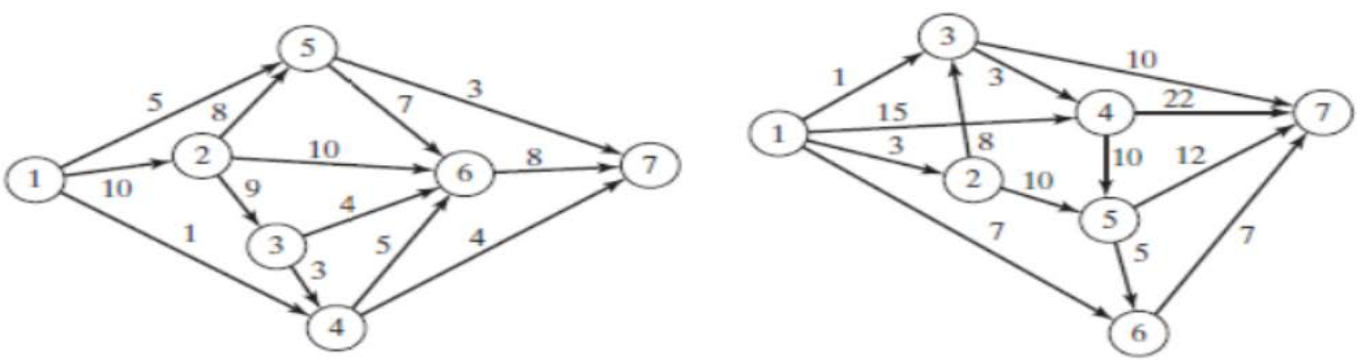
ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Construcción del cronograma

Esta sección muestra cómo puede usarse la información obtenida a partir de los cálculos en la sección 6.5.2 para el desarrollo del cronograma. Reconocemos que para una actividad (i, j), $\square_i$ representa el *tiempo de inicio más temprano*, y Δ_j representa el *tiempo de inicio más tardío*. Por lo tanto, el intervalo $(\square_i, \Delta_j)$ define el espacio de tiempo (máximo) durante el cual la actividad (i,j) puede programarse sin demorar todo el proyecto.

Construcción de un programa preliminar. El método para construir un programa preliminar se ilustra con un ejemplo.



Proyecto (a) Proyecto (b)

FIGURA 6.42

Redes del proyecto para el problema 2, conjunto 6.5

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Determine el cronograma para el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.40).

Podemos obtener un cronograma preliminar para las diferentes actividades del proyecto definiendo sus respectivos espacios de tiempo como se muestra en la figura 6.43.

1. Las actividades críticas (mostradas por las líneas sólidas) están escalonadas una justo después de la otra para garantizar que el proyecto se complete dentro de la duración especificada de 25 días.
2. Las actividades no críticas (mostradas por las líneas de rayas) tienen lapsos de tiempo permisibles mayores que sus respectivas duraciones, lo que permite una holgura (o "margen") al programarlas dentro de sus intervalos de tiempo asignados.

¿Cómo programamos las actividades no críticas dentro de sus respectivos espacios de tiempo? Normalmente, es preferible iniciar cada actividad no crítica lo más pronto posible. De esta manera los periodos de holgura restantes pueden usarse para compensar las demoras inesperadas en la actividad. Puede ser necesario, sin embargo, retrasar el inicio de una actividad no crítica más allá de su tiempo de inicio más temprano. Por ejemplo, en la figura 6.43, suponga que cada una de las actividades no críticas *E* y *F* requiere el uso de una excavadora y que sólo una está disponible. Programar tanto *E* como *F* tan pronto como sea posible, requiere dos excavadoras entre los tiempos 8 y 10. Podemos eliminar el traslape iniciando *E* en el tiempo 8 y moviendo el tiempo de inicio de *F* a alguna parte entre los tiempos 10 y 14.

Si todas las actividades no críticas pueden programarse lo más pronto posible, el programa resultante siempre es factible. De lo contrario, pueden violarse algunas relaciones de precedencia si las actividades no críticas se demoran más allá de su tiempo de inicio más temprano.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

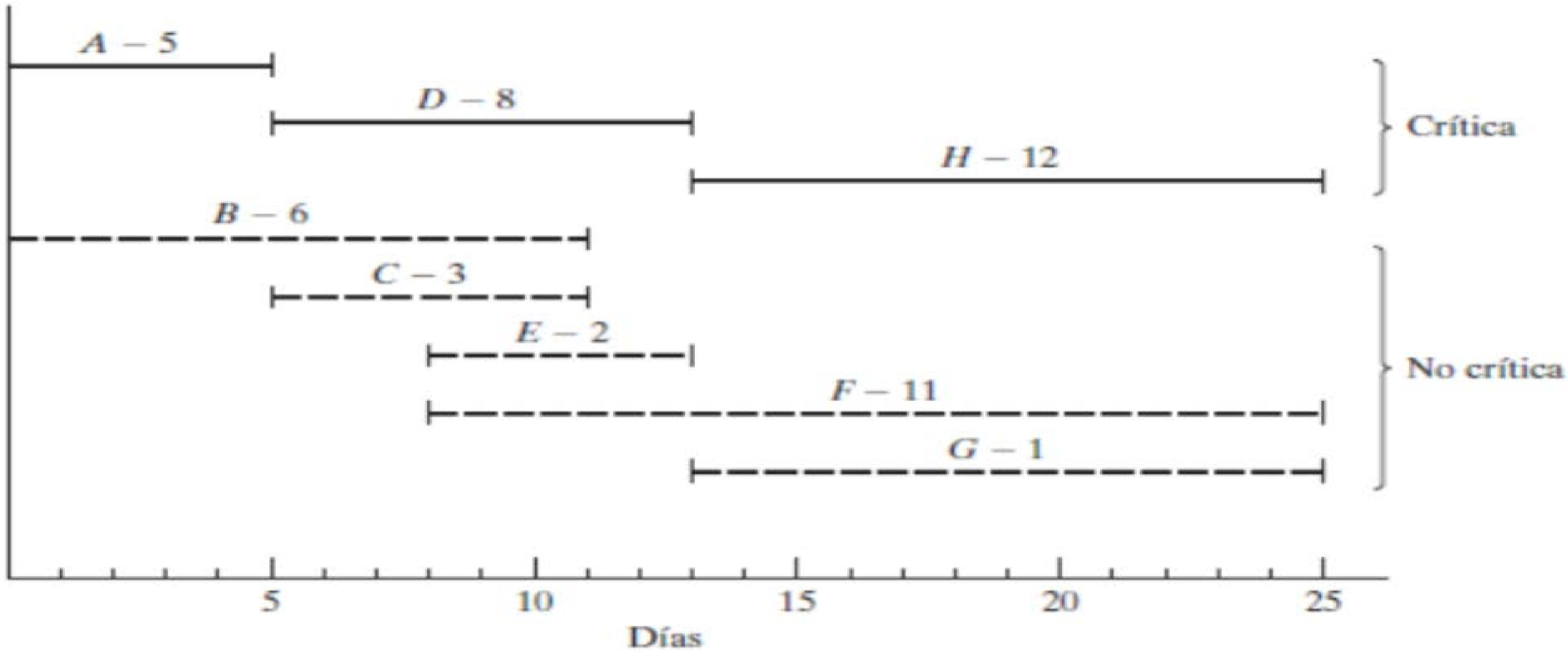


FIGURA 6.43

Cronograma preliminar para el proyecto del ejemplo 6.5-2

Considere, por ejemplo, las actividades C y E en la figura 6.43. En la red de proyecto (figura 6.40), aunque C debe completarse antes que E, los espacios de tiempo de C y E en la figura 6.43 permiten programar C entre los tiempos 6 y 9, y E entre los tiempos 8 y 10, lo cual viola el requisito de que C preceda a E. Por lo tanto, es evidente la necesidad de una "señal roja" que revele de forma automática el conflicto en el programa. Tal información se obtiene calculando los *flotantes* (también conocidos como holguras) para las actividades no críticas.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

Determinación de los flotantes. Los flotantes son los tiempos de **holgura** disponibles dentro del espacio asignado de la actividad no crítica. Los tipos más comunes son el **flotante total** y el **flotante libre.**

La figura 6.44 da un resumen conveniente para calcular el flotante total (TF_{ij}) y el flotante libre (FF_{ij}) para una actividad (i,j).

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$$
$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

Por definición $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Regla de la señalización roja. *Para una actividad no crítica (i,j), si $FF_{ij} < TF_{ij}$, entonces su inicio puede demorarse en cuando mucho FF_{ij}, con respecto a su tiempo de inicio más temprano $\square_i$, sin provocar un conflicto en el programa. Cualquier demora mayor que FF_{ij} (pero no mayor que TF_{ij}) debe acoplarse con una demora igual (con respecto a $\square_j$) en el tiempo de inicio de todas las actividades que salen del nodo j.*

MODELO DE REDES

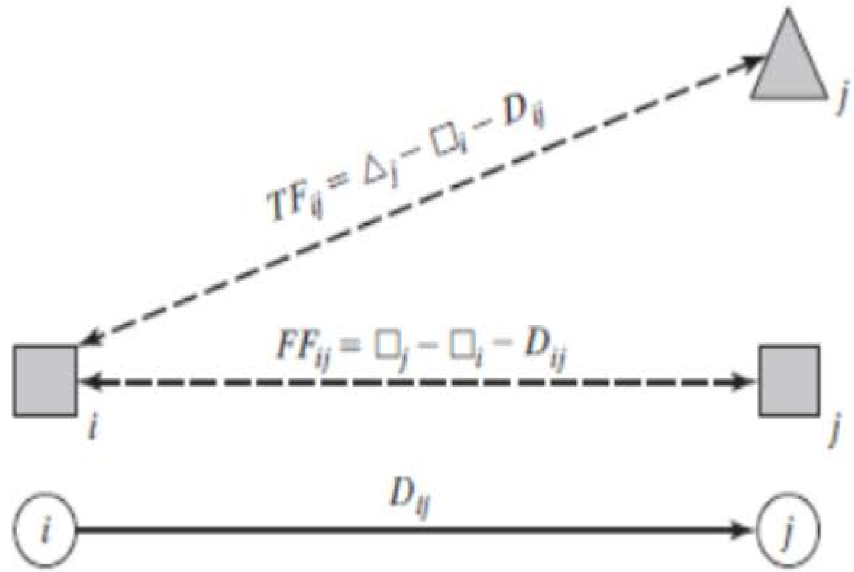


FIGURA 6.44

Cálculo de los flotantes total y libre

La implicación de la regla es que, si $FF_{ij} = TF_{ij}$, puede programarse una actividad no crítica (i,j) en cualquier parte del intervalo $(\square_i, \Delta_j)$ sin provocar conflictos en el programa. De lo contrario, si $FF_{ij} < TF_{ij}$, la actividad (i,j) recibe una señal roja por la posibilidad de demorar el tiempo de inicio de las actividades que salen del nodo j.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Calcule los flotantes para las actividades no críticas de la red del ejemplo 6.5-2, y exponga su uso al finalizar un programa para el proyecto.

La siguiente tabla resume los cálculos de los flotantes total y libre. Para cálculos manuales, conviene más realizar los cálculos directamente en la red siguiendo el procedimiento mostrado en la figura 6.40.

Actividad no crítica	Duración	Flotante total (TF_{ij})	Flotante libre (FF_{ij})
$B(1,3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
$C(2,3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
$E(3,5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
$F(3,6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
$G(4,6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Los cálculos ponen una señal roja en las actividades B y C porque su $FF < TF$. Las actividades restantes (E, F y G) tienen $FF = TF$ y por consiguiente pueden programarse en cualquier parte entre sus tiempos de terminación más tempranos y más tardíos.

Para investigar la importancia de las actividades marcadas con una señal roja, considere la actividad B con $TF = 5$ días y $FF = 2$ días. Esta actividad puede iniciarse en cualquier tiempo entre 0 y 2 (su FF). Por otra parte, si B se inicia después del tiempo 2 hasta el tiempo 5 (su TF), los tiempos de inicio de las actividades inmediatamente subsiguientes E y F deben moverse hacia adelante con respecto a su tiempo de inicio más temprano (= 8) por al menos un periodo de demora igual.

En cuanto a la actividad C marcada con una señal roja, su FF cero significa que *cualquier* demora al iniciar C después de su tiempo de inicio más temprano (= 5) debe acoplarse con al menos una demora igual del tiempo de inicio de las actividades de su sucesor.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Momento de TORA

TORA incluye herramientas tutoriales útiles para cálculos de CPM y para construir el cronograma. Para utilizarlas seleccione las opciones Project Planning ⇒ CPM – Critical Path Method en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar CPM Calculations para producir cálculos paso a paso del paso adelantado, el paso retrasado, y los flotantes o la opción CPM Bar Chart para construir y experimentar con el cronograma.

El archivo *toraEx6.5-2* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-2. Si elige generar los resultados con la opción Next Step TORA lo guiará a través de los detalles de los cálculos de paso adelantado y paso retrasado.

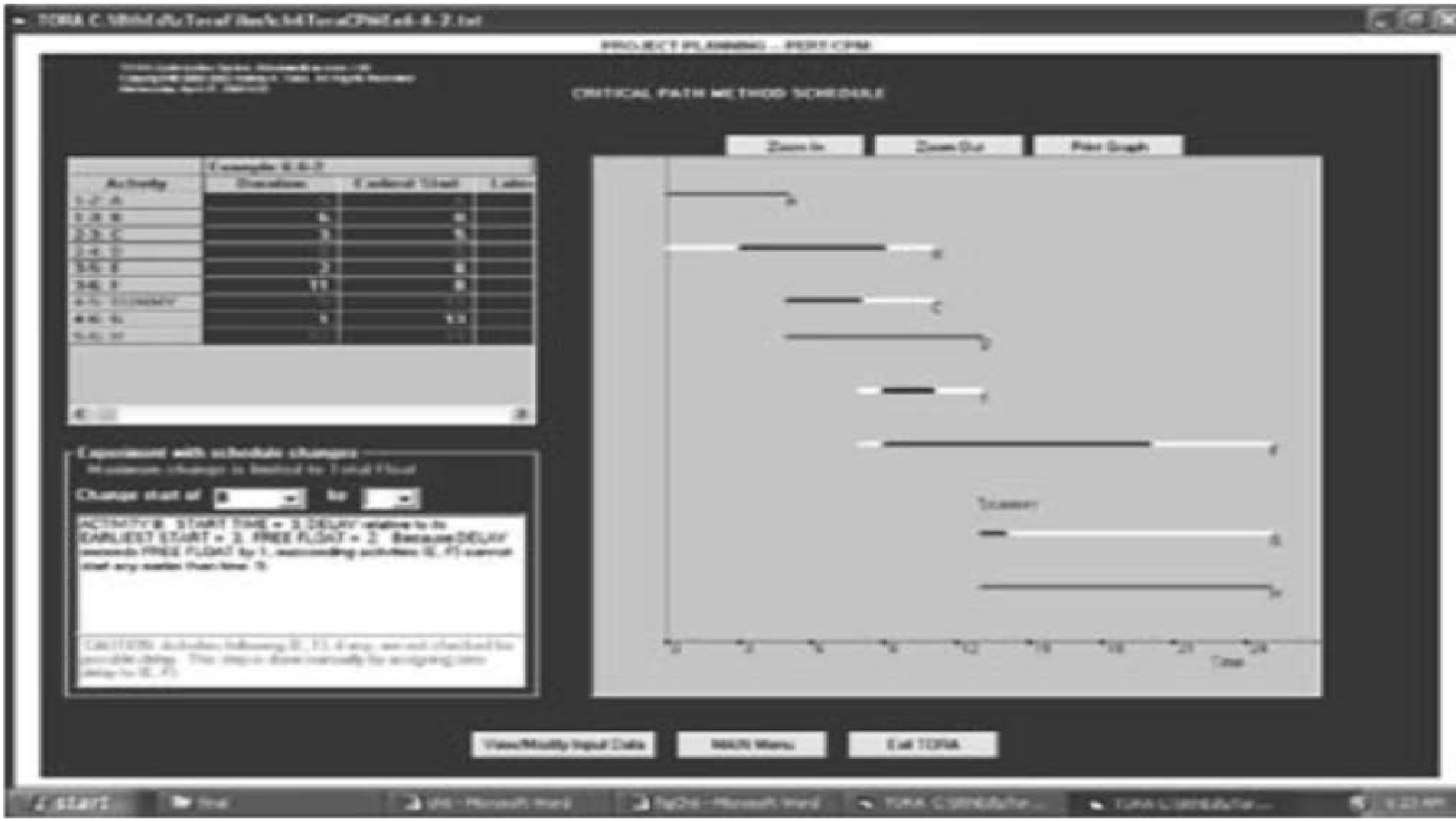
La figura 6.45 proporciona el programa producido por la opción CPM Bar Chart de TORA para el proyecto del ejemplo 6.5-2. La gráfica de barras predeterminada programa de forma automática todas las actividades no críticas tan pronto como es posible. Así puede estudiar el impacto de demorar el tiempo de inicio de una actividad no crítica por medio de listas desplegables auto explicativas en el lado izquierdo de la pantalla. El impacto de demorar una actividad no crítica se mostrará directamente en la gráfica de barras junto con una explicación. Por ejemplo, si demora el inicio de la actividad B en más de 2 unidades de tiempo, las actividades subsiguientes E y F se demorarán en una cantidad igual a la diferencia entre la demora y el flotante libre de la actividad B. Específicamente, dado que el flotante libre de B es de 2 unidades de tiempo, si B se demora en 3 unidades de tiempo, entonces el inicio de E y F debe demorarse en al menos $3 - 2 = 1$ unidad de tiempo. Esta situación se demuestra en la figura 6.45.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

FIGURA 6.45

Resultados obtenidos con la opción "bar chart" de TORA para el ejemplo 6.5-2 (archivo *toraEx6.5-2.txt*)



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Redes PERT

PERT difiere de CPM en que asume tiempos de duración probabilísticos basados en tres estimaciones:

1. **Tiempo optimista**, a, el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente bien.
2. **Tiempo más probable**, m, el cual ocurre cuando la ejecución se realiza en condiciones normales.
3. **Tiempo pesimista**, b, el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente deficiente.

El tiempo más probable, m, queda en el intervalo (a, b).

Basado en las estimaciones, el tiempo de duración promedio, $\overline{D}$, y varianza, v, se aproximan como

$$\overline{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Los cálculos de CPM dados en las secciones 6.5.2 y 6.5.3 pueden aplicarse directamente, con $\overline{D}$, reemplazando a la estimación única D.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Dado que la variable aleatoria e_j que representa el tiempo de ocurrencia más temprano del nodo, la probabilidad de que j ocurrirá en un tiempo programado, S_j, puede estimarse como sigue: Suponga que todas las actividades en la red son estadísticamente independientes, y calcule primero la media $E\{e_j\}$ y la varianza, $\text{var}\{e_j\}$. Si sólo hay una ruta del nodo de inicio al nodo j, entonces la media es la suma de las duraciones esperadas, $\overline{D}$, de todas las actividades a lo largo de esta ruta y la varianza es la suma de las varianzas, v, de las mismas actividades. Si más de una ruta conduce al nodo j, entonces es necesario determinar la distribución estadística de la duración de la ruta más larga, un problema un tanto difícil porque implica determinar la distribución del máximo de al menos dos variables aleatorias. Una suposición simplificadora requiere seleccionar la ruta al nodo j que tiene la duración *promedio* más larga. Si dos o más rutas tienen la misma media, se selecciona la de la mayor varianza porque refleja la incertidumbre máxima y, por consiguiente, conduce a una estimación más conservadora de las probabilidades.

Dadas la media y la varianza de la ruta al nodo j, $E\{e_j\}$ y $\text{var}\{e_j\}$, la probabilidad de que el nodo j ocurra en el tiempo S_j está representada de forma aproximada por la distribución normal estándar, z (vea la sección 14.4.4), es decir,

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}} \leq \frac{S_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}}\right\} = P\{z \leq K_j\}$$

La justificación para el uso de la distribución normal es que e_j es la suma de variables aleatorias independientes. De acuerdo con el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4), e_j está distribuida normalmente de una manera aproximada.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

Ejemplo 6.5-6

Considere el proyecto del ejemplo 6.5-2. Para no repetir los cálculos de ruta crítica, los valores de a, m y b que aparecen en la tabla se seleccionan para obtener $\overline{D_{ij}} = D_{ij}$ para toda i y j en el ejemplo 6.5-2.

Actividad	$i-j$	(a,m,b)	Actividad	$i-j$	(a,m,b)
A	1–2	$(3, 5, 7)$	E	3–5	$(1, 2, 3)$
B	1–3	$(4, 6, 8)$	F	3–6	$(9, 11, 13)$
C	2–3	$(1, 3, 5)$	G	4–6	$(1, 1, 1)$
D	2–4	$(5, 8, 11)$	H	5–6	$(10, 12, 14)$

La media $\overline{D_{ij}}$ y la varianza v_{ij} de las diferentes actividades se presentan en la siguiente tabla. Observe que una actividad ficticia con (a,m,b) tiene media y varianza cero.

Actividad	$i-j$	$\overline{D}_{ij}$	v_{ij}	Actividad	$i-j$	$\overline{D}_{ij}$	v_{ij}
A	1–2	5	.444	E	3–5	2	.111
B	1–3	6	.444	F	3–6	11	.444
C	2–3	3	.444	G	4–6	1	.000
D	2–4	8	1.000	H	5–6	12	.444

MODELO DE REDES

La siguiente tabla presenta la ruta más larga del nodo 1 a los diferentes nodos, junto con su media y desviación estándar asociadas.

Nodo	Ruta más larga basada en las duraciones medias	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta
2	1–2	5.00	0.67
3	1–2–3	8.00	0.94
4	1–2–4	13.00	1.20
5	1–2–4–5	13.00	1.20
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37

La siguiente tabla calcula la probabilidad de que cada nodo se realice en el tiempo S_j (especificado por el analista).

Nodo j	Ruta más larga	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta	S_j	K_j	$P\{z \leq K_j\}$
2	1–2	5.00	0.67	5.00	0	.5000
3	1–2–3	8.00	0.94	11.00	3.19	.9993
4	1–2–4	13.00	1.20	12.00	–.83	.2033
5	1–2–4–5	13.00	1.20	14.00	.83	.7967
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37	26.00	.73	.7673

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELO DE REDES

Momento de TORA

TORA incluye un módulo para realizar cálculos PERT. Para utilizar este módulo, seleccione las opciones Project Planning ⇒ PERT − Program Evaluation and Review Technique en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar Activity Mean/Var para calcular la media y varianza de cada actividad, o la opción PERT Calculations para calcular la media y varianza de la ruta más larga a cada nodo en la red. El archivo *toraEx6.5-6.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-6.

ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ