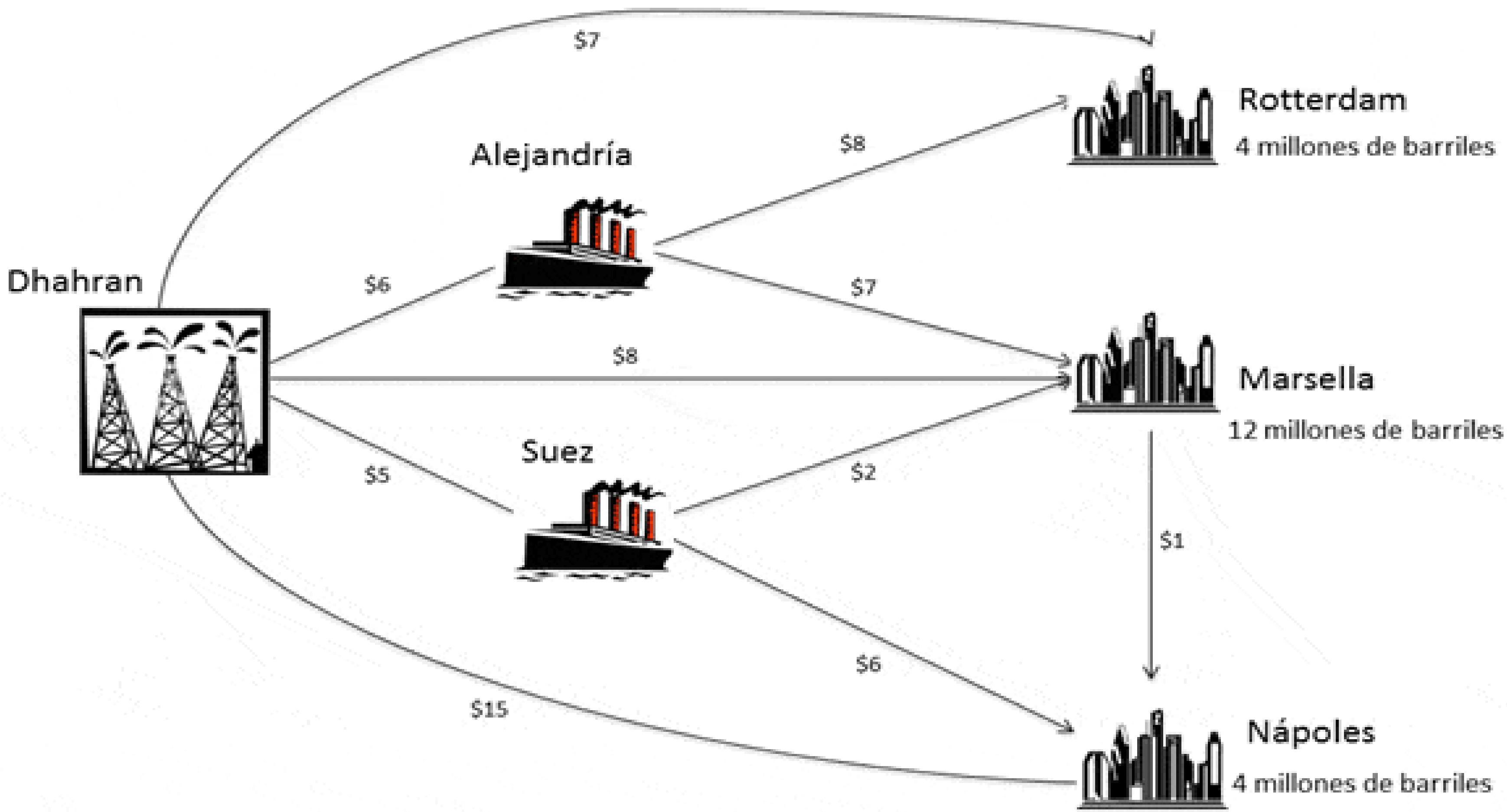
MODELOS DE TRANSPORTE



ING. WILBER MARLON ALVARADO MARTINEZ

MODELOS DE TRANSPORTE

Aplicación de la vida real. Programación de citas en eventos comerciales australianos

La Comisión de Turismo Australiana (ATC, por sus siglas en inglés) organiza eventos comerciales alrededor del mundo para que sirvan de foro donde se puedan reunir los vendedores australianos con los compradores internacionales de productos turísticos. Durante estos eventos los vendedores se sitúan en cubículos y los compradores los visitan de acuerdo con citas programadas. Debido a la limitación de tiempo disponible en cada evento y al hecho de que la cantidad de compradores y vendedores puede ser muy grande, la ATC procura programar las citas entre vendedor y comprador con anticipación para maximizar las preferencias. El modelo ha resultado muy satisfactorio tanto para los compradores como para los vendedores. (El caso 3 del capítulo 26, en inglés, del sitio web contiene los detalles del estudio).

MODELOS DE TRANSPORTE

DEFINICIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE

La red que aparece en la figura 5.1 representa el problema. Hay m orígenes y n destinos, cada uno representado por un **nodo**. Los **arcos** representan las rutas que unen los orígenes con los destinos. El arco (i, j) que une el origen i con el destino j transporta dos piezas de información: el costo de transporte por unidad, c_{ij} y la cantidad transportada, x_{ij}. La cantidad de la oferta en el origen i es a_i y la cantidad de la demanda en el destino j es b_j. El objetivo del modelo es minimizar el costo de transporte total al mismo tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda.

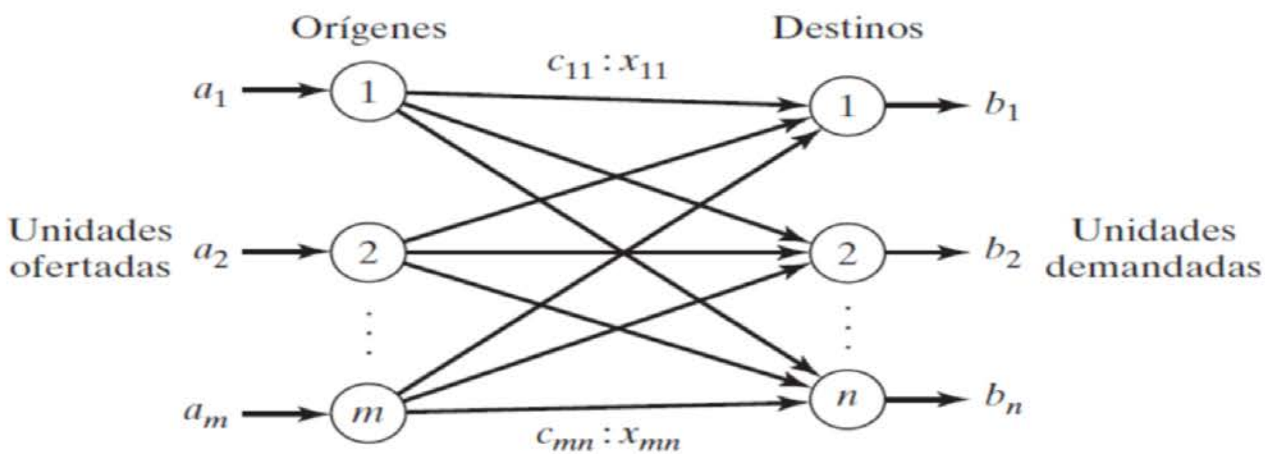


FIGURA 5.1

Representación del modelo de transporte con nodos y arcos

MODELOS DE TRANSPORTE

MG Auto cuenta con tres plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleáns, y dos importantes centros de distribución en Denver y Miami. Las capacidades trimestrales de las tres plantas son 1000, 1500 y 1200 automóviles, y las demandas de los dos centros de distribución durante el mismo periodo son de 2300 y 1400 automóviles. La distancia en millas entre las plantas y los centros de distribución aparece en la tabla 5.1.

TABLA 5.1 Gráfica de distancia en millas

	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleáns	1275	850

La compañía transportista cobra 8 centavos por milla por automóvil. En la tabla 5.2 se dan los costos de transporte por automóvil en las diferentes rutas, redondeados al dólar más cercano.

TABLA 5.2 Costo de transporte por automóvil

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
Nueva Orleáns (3)	\$102	\$68

MODELOS DE TRANSPORTE

El modelo de PL del problema es

$$\text{Minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1000 \text{ (Los Ángeles)} \\
x_{21} + x_{22} \qquad\qquad &= 1500 \text{ (Detroit)} \\
+ x_{31} + x_{32} &= 1200 \text{ (Nueva Orléans)} \\
x_{11} \qquad + x_{21} \qquad + x_{31} \qquad &= 2300 \text{ (Denver)} \\
x_{12} \qquad + x_{22} \qquad + x_{32} &= 1400 \text{ (Miami)} \\
x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j &= 1, 2
\end{aligned}$$

Todas estas restricciones son ecuaciones porque la oferta total desde los tres orígenes (= 1000 + 1500 + 1200 = 3700 automóviles) es igual a la demanda total en los dos destinos (= 2300 + 1400 = 3700 automóviles).

MODELOS DE TRANSPORTE

La estructura especial del problema de transporte permite una representación compacta del problema utilizando el formato **tabla de transporte** que aparece en la tabla 5.3. Este formato permite modelar muchas situaciones que no tienen que ver con bienes de transporte, como se demuestra con los ejemplos de la sección 5.2.

La solución óptima en la figura 5.2 (obtenida por TORA[1]) envía 1000 automóviles de Los Ángeles a Denver ($x_{11} = 1000$), 1300 de Detroit a Denver ($x_{21} = 1300$), 200 de Detroit a Miami ($x_{22} = 200$) y 1200 de Nueva Orleáns a Miami ($x_{32} = 1000$). El costo de transporte mínimo asociado se calcula como $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313.200$.

TABLA 5.3 Modelo de transporte de MG

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 x_{11}	215 x_{12}	**1000**
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	**1500**
Nueva Orleáns	102 x_{31}	68 x_{32}	**1200**
Demanda	**2300**	**1400**	

[1]Para utilizar TORA, en el comando Main Menu seleccione la opción Transportation Model. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve ⇒ Final solution para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se da una descripción detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

MODELOS DE TRANSPORTE

Balanceo del modelo de transporte. La representación de la tabla de transporte asume que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo está desbalanceado, podemos agregar un origen o un destino ficticios para restaurar el balance.

En el modelo de MG, suponga que la capacidad de la planta de Detroit es de 1300 automóviles (en lugar de 1500). La oferta total (= 3500) es menor que la demanda total (= 3700), lo que significa que no se satisfará una parte de la demanda en Denver y Miami.

Como la demanda excede la oferta, se agrega un origen (planta) ficticio con una capacidad de 200 automóviles (= 3700 − 3500) para balancear el modelo de transporte. El costo de transporte por unidad de la planta ficticia a los destinos es cero porque la planta no existe.

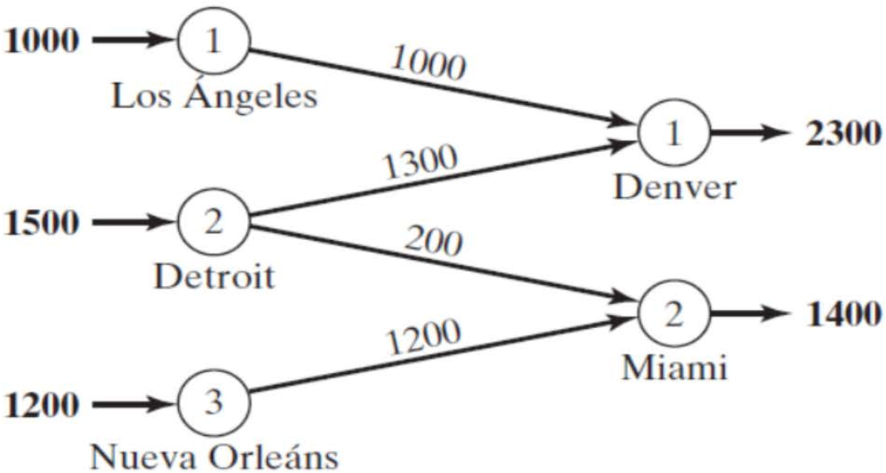


FIGURA 5.2

Solución óptima del modelo de MG Auto

[1]Para utilizar TORA, en el comando Main Menu seleccione la opción Transportation Model. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve ⇒ Final solution para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se da una descripción detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

MODELOS DE TRANSPORTE

La tabla 5.4 da el modelo balanceado junto con su solución óptima. La solución muestra que la planta ficticia envía 200 automóviles a Miami, es decir que a Miami le faltarán 200 automóviles para satisfacer su demanda de 1400 automóviles.

Podemos estar seguros de que un destino específico no experimente escasez al asignar un costo de transporte por unidad muy alto desde el origen ficticio a dicho destino. Por ejemplo, una penalización de $1000 en la celda ficticia de Miami evitará que haya escasez en Miami. Desde luego, no podemos utilizar este "artificio" con todos los destinos, porque debe haber escasez en alguna parte.

El caso en que la oferta excede la demanda se puede demostrar asumiendo que la demanda en Denver es de sólo 1900 automóviles. Entonces, tenemos que agregar un centro de distribución ficticio para que "reciba" la oferta excedente. De nuevo, el costo de transporte por unidad al centro de distribución ficticio es cero, a menos que una fábrica "envíe todas sus existencias". En este caso, se asigna un costo alto de transporte por unidad de la fábrica designada al destino ficticio.

La tabla 5.5 da el nuevo modelo y su solución óptima (obtenida por TORA). La solución muestra que la planta de Detroit tendrá un excedente de 400 automóviles.

MODELOS DE TRANSPORTE

TABLA 5.4 Modelo de MG con una planta ficticia

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 **1000**	215	**1000**
Detroit	100 **1300**	108	**1300**
Nueva Orleáns	102	68 **1200**	**1200**
Planta ficticia	0	0 **200**	**200**
Demanda	**2300**	**1400**	

MODELOS DE TRANSPORTE

TABLA 5.5 Modelo de MG con un destino ficticio

	Denver	Miami	Ficticio	
Los Ángeles	80 **1000**	215	0	**1000**
Detroit	100 **900**	108 **200**	0 **400**	**1500**
Nueva Orleáns	102	68 **1200**	0	**1200**
Demanda	**1900**	**1400**	**400**	

MODELOS DE TRANSPORTE

MODELOS DE TRANSPORTE NO TRADICIONALES

La aplicación del modelo de transporte no se limita al *transporte* de artículos. Esta sección presenta dos aplicaciones no tradicionales en las áreas de control de producción e inventarios y el servicio de afilado de herramientas.

Ejemplo 5.2-1 (Control de producción e inventarios)

Boralis fabrica mochilas para ciclistas. La demanda de su producto durante el periodo pico de marzo a junio de cada año es de 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. La compañía utiliza mano de obra de tiempo parcial para acomodarse a las fluctuaciones de la demanda. Se estima que Boralis puede producir 50, 180, 280 y 270 unidades de marzo a junio. La demanda del mes en curso se puede satisfacer de tres maneras.

1. La producción del mes en curso al costo de \$40 por mochila.
2. La producción excedente de un mes anterior a un costo de retención adicional de \$.50 por mochila.
3. La producción excedente en un mes posterior (pedido en espera) a un costo de penalización adicional de \$2.00 por mochila por mes.

Boralis desea determinar el programa de producción óptimo durante los cuatro meses.

La siguiente tabla resume los paralelismos entre los elementos del problema de producción e inventario y el modelo de transporte:

MODELOS DE TRANSPORTE

Transporte	Producción-inventario
1. Origen i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Cantidad de abasto en el origen i	3. Capacidad de producción en el periodo i
4. Demanda en el destino j	4. Demanda en el periodo j
5. Costo de transporte por unidad del origen i al destino j	5. Costo unitario (producción + retención + penalización) en el periodo i para el periodo j.

El modelo de transporte resultante se da en la tabla 5.12.

TABLA 5.12 Modelo de transporte para el ejemplo 5.2-1

	1	2	3	4	Capacidad
1	$40.00	$40.50	$41.00	$41.50	**50**
2	$42.00	$40.00	$40.50	$41.00	**180**
3	$44.00	$42.00	$40.00	$40.50	**280**
4	$46.00	$44.00	$42.00	$40.00	**270**
Demanda	**100**	**200**	**180**	**300**	

MODELOS DE TRANSPORTE

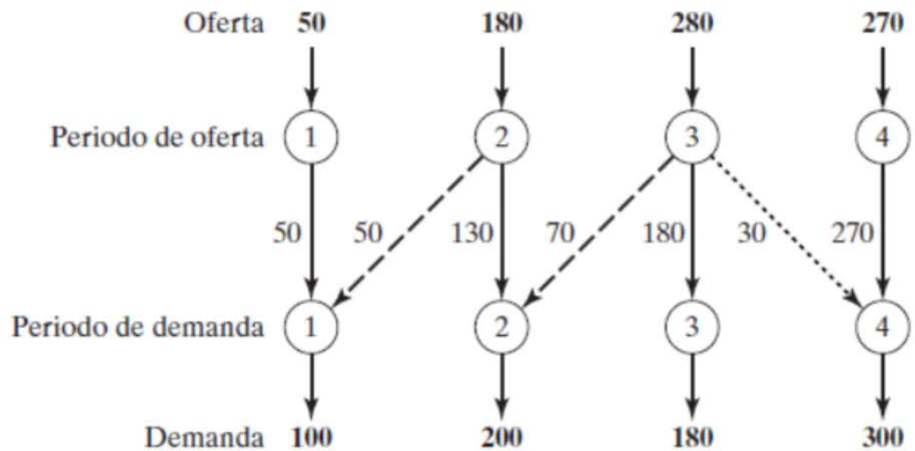


FIGURA 5.3
Solución óptima del modelo de producción e inventario

El costo de "transporte" por unidad del periodo i al periodo j se calcula como

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en } i,\ i = j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de retención de } i \text{ a } j,\ i < j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{penalización de } i \text{ a } j,\ i > j \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$c_{11} = \$40.00$$

$$c_{24} = \$40.00 + (\$.50 + \$.50) = \$41.00$$

$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

La solución óptima se resume en la figura 5.3. Las líneas de rayas indican pedidos en espera, las líneas punteadas indican producción para un periodo futuro, y las líneas continuas muestran la producción en un periodo en curso. El costo total es de \$31,455.

MODELOS DE TRANSPORTE

ALGORITMO DE TRANSPORTE[4]

Los pasos básicos del algoritmo de transporte son exactamente iguales a los del método simplex (capítulo 3). Sin embargo, en lugar de utilizar la tabla simplex regular, aprovechamos la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más conveniente.

Paso 1. Determine una solución factible básica *inicial* y vaya al paso 2.

Paso 2. Use la condición de optimalidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables no básicas. Si se satisfacen las condiciones de optimalidad, deténgase. De lo contrario, avance al paso 3.

Paso 3. Use la condición de factibilidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables básicas actuales, y halle la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

[4]El algoritmo de transporte especial se desarrolló cuando los cálculos manuales eran la norma y los atajos estaban garantizados. En la actualidad, los poderosos códigos de computadora pueden resolver modelos de transporte de cualquier tamaño como una PL regular. De hecho, TORA maneja todos los cálculos necesarios en segundo plano por medio del método simplex y utiliza el formato del modelo de transporte sólo como "filtro". No obstante, el algoritmo de transporte, aparte de su importancia histórica, da una idea de primera mano del uso de las relaciones primales-duales teóricas (que se presentaron en la sección 4.2) para alcanzar un resultado final práctico, el de mejorar los cálculos manuales. El ejercicio es teóricamente intrigante. Además, el formato de tabla de transporte especial facilita el modelado de varias situaciones que no tienen que ver directamente con artículos que se transportan, como lo demuestra la sección 5.2.

MODELOS DE TRANSPORTE

Ejemplo 5.3-1 (SunRay Transport)

SunRay Transport Company transporta granos de tres silos a cuatro molinos. La oferta (en camiones cargados) y la demanda (también en camiones cargados) junto con los costos de transporte por unidad por camión cargado en las diferentes rutas, se resumen en la Tabla 5.16. Los costos de transporte por unidad, c_{ij} (que se muestran en la esquina de cada casilla) están en cientos de dólares. El modelo busca el programa de envíos a un costo mínimo entre los silos y los molinos.

TABLA 5.16 Modelo de transporte de SunRay

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
12 Silo 2	7 x_{21}	9 x_{22}	20 x_{23}	x_{24}	**25**
Silo 3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

MODELOS DE TRANSPORTE

Determinación de la solución de inicio

Un modelo de transporte general con m orígenes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda) una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a $m + n - 1$ ecuaciones independientes y $m + n - 1$ variables básicas. En el ejemplo 5.3-1, la solución inicial tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos:[5]

1. Método de la esquina noroeste
2. Método del costo mínimo
3. Método de aproximación de Vogel

El primer método es de naturaleza "mecánica", y los dos restantes son heurísticos que buscan una solución inicial de mejor calidad que dé un valor objetivo más pequeño. Por lo general, el método heurístico Vogel es mejor que el heurístico de costo mínimo. Por otra parte, el método de esquina noroeste implica la cantidad mínima de cálculos.

Método de la esquina noroeste. El método se inicia en la celda de la *esquina noroeste* (ruta) de la tabla (variable x_{11}).

MODELOS DE TRANSPORTE

Determinación de la solución de inicio

Un modelo de transporte general con m orígenes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda) una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a $m + n - 1$ ecuaciones independientes y $m + n - 1$ variables básicas. En el ejemplo 5.3-1, la solución inicial tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos:[5]

1. Método de la esquina noroeste
2. Método del costo mínimo
3. Método de aproximación de Vogel

El primer método es de naturaleza "mecánica", y los dos restantes son heurísticos que buscan una solución inicial de mejor calidad que dé un valor objetivo más pequeño. Por lo general, el método heurístico Vogel es mejor que el heurístico de costo mínimo. Por otra parte, el método de esquina noroeste implica la cantidad mínima de cálculos.

MODELOS DE TRANSPORTE

Método de la esquina noroeste. El método se inicia en la celda de la *esquina noroeste* (ruta) de la tabla (variable x_{11}).

Paso 1. Asigne lo más posible a la celda seleccionada, y ajuste las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.

Paso 2. Tache la columna o fila con oferta o demanda cero para indicar que no se hagan más asignaciones en esa fila o columna. Si una fila y una columna dan cero al mismo tiempo, *tache sólo una*, y deje una oferta (demanda) cero en la fila (columna) no tachada.

Paso 3. Si se deja sin tachar *exactamente una* fila o columna, deténgase. De lo contrario, muévase a la celda a la derecha si acaba de tachar una columna, o abajo si acaba de tachar una fila. Vaya al paso 1.

MODELOS DE TRANSPORTE

La aplicación del procedimiento al modelo del ejemplo 5.3-1 da la solución básica inicial en la tabla 5.17. Las flechas muestran el orden en que se generan las cantidades asignadas.

TABLA 5.17 Solución inicial obtenida con el método de la esquina noroeste

	1	2	3	4	Oferta
1	10 **5** →	2 **10** ↓	20	11	**15**
12 2	7	9 **5** →	20 **15** →	**5** ↓	**25**
4 3	14	16	18	**10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

La solución básica inicial es

$$x_{11} = 5,\ x_{12} = 10$$

$$x_{22} = 5,\ x_{23} = 15,\ x_{24} = 5$$

$$x_{34} = 10$$

El costo asociado del programa es

$$z = 5 \times 10 + 10 \times 2 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 10 \times 18 = \$520.$$

MODELOS DE TRANSPORTE

Método del costo mínimo. El método del costo mínimo determina una mejor solución inicial al concentrarse en las rutas más económicas. Asigna lo más posible a la celda con el costo unitario mínimo (los empates se rompen arbitrariamente). Luego se tacha la fila o columna satisfecha y se ajustan las cantidades de oferta y demanda como corresponda. Si una fila o una columna se satisfacen al mismo tiempo, *sólo se tacha una*, igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación, seleccione la celda no tachada con el costo unitario mínimo y repita el proceso hasta que se deje sin tachar exactamente una fila o columna.

MODELOS DE TRANSPORTE

Ejemplo 5.3-3

El método del costo mínimo se aplica al ejemplo 5.3-1.

1. La celda (1,2) tiene el costo unitario mínimo en la tabla (= \$2). Lo máximo que puede enviarse a través de (1,2) es $x_{12} = 15$ camiones cargados, con lo que se satisfacen tanto la fila 1 como la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la figura 1.
2. La celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo no tachado (= \$4). Asigne $x_{31} = 5$, y tache la columna 1 porque se satisface, y ajuste la demanda de la fila 3 a $10 - 5 = 5$ camiones cargados.
3. Continuando de la misma manera, asignamos sucesivamente 15 camiones cargados a la celda (2,3), 0 a la celda (1,4), 5 a la celda (3,4), y 10 a la celda (2,4) (¡compruébelo!).

La solución inicial resultante se resume en la tabla 5.18. Las flechas indican el orden en el cual se hacen las asignaciones. La solución inicial (compuesta de 6 variables básicas) es

TABLA 5.18 Solución inicial de costo mínimo

	1	2	3	4	Oferta
1	10	(inicio) 2 **15**	20	11 **0**	**15**
2	12	7	9 **15**	(final) 20 **10**	**25**
3	4 **5**	14	16	18 **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

$x_{12} = 15, x_{14} = 0, x_{23} = 15, x_{24} = 10, x_{31} = 5, x_{34} = 5$. El valor objetivo asociado es $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$, el cual es mejor que la solución obtenida con el método de la esquina noroeste.

MODELOS DE TRANSPORTE

Método de aproximación de Vogel (MAV). Este método es una versión mejorada del método del costo mínimo que por lo general, pero no siempre, produce mejores soluciones iniciales.

Paso 1. Para cada fila (columna) determine una *medida de penalización* restando el elemento de costo unitario *mínimo* en la fila (columna) del *siguiente elemento de costo mínimo* en la misma fila (columna).

Paso 2. Identifique la fila o columna con la penalización máxima, que rompa los empates arbitrariamente. Asigne lo más posible a la variable con el costo unitario mínimo en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila *o* columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de las dos, y a la fila restante (columna) se le asigna una oferta (demanda) cero.

Paso 3. **(a)** Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.

(b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) *positiva* permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) mediante el método del costo mínimo. Deténgase.

(c) Si todas las filas y columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Deténgase.

(d) De lo contrario, vaya al paso 1.

MODELOS DE TRANSPORTE

Ejemplo 5.3-4

El método de aproximación de Vogel se aplica al ejemplo 5.3-1. La tabla 5.19 calcula el primer conjunto de penalizaciones.

Como la fila 3 tiene la penalización máxima (= 10) y la celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo en esa fila, se asigna la cantidad 5 a x_{31}. Ahora la columna está satisfecha y se debe tachar. Luego se vuelven a calcular nuevas penalizaciones como en la tabla 5.20.

TABLA 5.19 Penalizaciones en filas y columnas con el MAV

	1	2	3	4		Penalización en las filas
1	10	2	20	11	**15**	10 − 2 = 8
2	12	7	9	20	**25**	9 − 7 = 2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	14 − 4 = 10
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización en las columnas	10 − 4 = 6	7 − 2 = 5	16 − 9 = 7	18 − 11 = 7		

MODELOS DE TRANSPORTE

TABLA 5.20 Primera asignación en el MAV ($x_{31} = 5$)

	1	2	3	4		Penalización en las filas
1	10	2	20	11	**15**	9
2	12	7	9	20	**25**	2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	2
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización en las columnas	—	5	7	7		

La tabla 5.20 muestra que la fila 1 tiene la penalización máxima (= 9). Por consiguiente, asignamos la cantidad máxima posible a la celda (1,2), la cual da $x_{12} = 15$ y al mismo tiempo satisface tanto a la fila 1 como a la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la fila 1.

Continuando de la misma manera, la fila 2 producirá la penalización máxima (= 11), y asignamos $x_{13} = 15$, la cual tacha la columna 3 y deja 10 unidades en la fila 2. Sólo queda la columna 4, y tiene una oferta positiva de 15 unidades. Aplicando el método del costo mínimo a esa columna, asignamos sucesivamente $x_{14} = 0$, $x_{34} = 5$ y $x_{14} = 10$ (¡compruébelo!). El valor objetivo asociado con esta solución es

$$z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$$

Sucede que esta solución tiene el mismo valor objetivo que se obtuvo con el método del costo mínimo.