

# CAPÍTULO 13

## Modelos de inventario determinísticos

### 13.1 MODELO GENERAL DE INVENTARIO

El problema del inventario tiene que ver con guardar en reserva un artículo para satisfacer las fluctuaciones de la demanda. El exceso de existencias de un artículo aumenta el costo del capital y de almacenamiento, y la escasez de existencias interrumpe la producción y/o las ventas. El resultado es buscar un nivel de inventario que balancee las dos situaciones extremas minimizando una función de costo apropiada. El problema se reduce a controlar el nivel del inventario diseñando una **política de inventario** que responda dos preguntas:

1. ¿Cuánto pedir?
2. ¿Cuándo pedir?

La base del modelo de inventario es la siguiente función de costo genérica:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Costo} \\ \text{total del} \\ \text{inventario} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{compra} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{preparación} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{retención} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Costo por} \\ \text{escasez} \end{array} \right)$$

1. El *costo de compra* es el precio por unidad de un artículo de inventario. En ocasiones, el artículo se ofrece con un descuento si el tamaño del pedido excede una cantidad determinada, lo cual es un factor al momento de tomar la decisión de *cuánto pedir*.
2. El *costo de preparación* representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido (no importa su tamaño).
3. El *costo de retención* (almacenamiento) representa el costo de mantener las existencias de algo. Incluye el interés sobre el capital y el costo del almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El *costo por escasez* (faltante) es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de pérdida de lealtad del cliente.

Los costos descritos son conflictivos en el sentido de que el incremento de uno puede provocar la reducción de otro (por ejemplo, pedir con más frecuencia eleva el costo de preparación pero reduce el costo de retención del inventario). El propósito de la minimización de la función de costo del inventario total es balancear estos costos conflictivos.

Un sistema de inventario puede requerir **revisiones periódicas** (por ejemplo, pedir al inicio de cada semana o cada mes). Alternativamente, el sistema puede estar basado en **revisiones continuas**, colocando un nuevo pedido cuando el nivel del inventario se reduce a un **punto de volver a pedir** específico. Un ejemplo de los dos tipos ocurre en tiendas al menudeo. La revisión es periódica si el artículo se repone cada semana o cada mes. Es *continua* si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario se reduce por debajo de un determinado nivel.

### 13.2 EL PAPEL (ROL) DE LA DEMANDA EN EL DESARROLLO DE MODELOS DE INVENTARIO

En general, la complejidad de los modelos de inventario depende de si la demanda es determinística o probabilística. Dentro de ambas categorías, la demanda puede variar, o no, con el tiempo. Por ejemplo, el consumo de gas natural que se utiliza en la calefacción doméstica es estacional. Aun cuando dicho patrón se repite anualmente, el consumo en un mismo mes puede variar de un año a otro, dependiendo, por ejemplo, de la severidad del clima.

En situaciones prácticas, el patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir uno de cuatro tipos:

1. Determinístico y constante (estático) con el tiempo.
2. Determinístico y variable (dinámico) con el tiempo.
3. Probabilístico y estacionario a lo largo del tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario a lo largo del tiempo.

Esta clasificación supone la disponibilidad de datos confiables para pronosticar la futura demanda.

En función del desarrollo de modelos de inventario, la primera categoría es la más sencilla analíticamente, y la cuarta es la más compleja. Por otra parte, la primera categoría es la menos probable que ocurra en la práctica, y la cuarta es la más prevalente. En la práctica, el objetivo es balancear la sencillez y la precisión del modelo.

¿Cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable? Una “estimación aproximada” inicial se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo durante un periodo específico (por ejemplo, mensualmente). Entonces puede usarse el coeficiente de variación,  $V = \frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Media}} \times 100$ , para valorar la naturaleza de la demanda utilizando el siguiente lineamiento:<sup>1</sup>

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es “de manera aproximada” constante y  $V$  es razonablemente pequeño ( $<20\%$ ), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante

<sup>1</sup>El coeficiente de variación,  $V$ , mide la variación relativa o dispersión de los datos alrededor de la media. Por lo general, los valores altos de  $V$  indican una alta incertidumbre en el uso de la media como una aproximación del consumo mensual. Para la demanda determinística,  $V = 0$ , dado que la desviación estándar asociada es cero.

2. Si la demanda mensual promedio varía de manera apreciable entre los diferentes meses pero  $V$  permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.
3. Si en el caso 1  $V$  es alto ( $>20\%$ ) pero aproximadamente constante, entonces la demanda es probabilística y estacionaria.
4. El caso restante es la demanda probabilística no estacionaria, la cual ocurre cuando los promedios y los coeficientes de variación varían apreciablemente mes con mes.

### Ejemplo 13.2-1

Los datos que aparecen en la tabla 13.1 proporcionan el consumo mensual (enero a diciembre) de gas natural en una residencia rural a lo largo de 10 años (1990-1999). El proveedor envía un camión para llenar el tanque a petición del propietario de la casa.

Desde el punto de vista del modelado de inventarios, es razonable suponer que cada mes representa un periodo de decisión para la colocación de un pedido. El propósito de este ejemplo es analizar la naturaleza de la demanda.

Un examen de la media y el coeficiente de variación,  $V$ , en la tabla 13.1, revela dos resultados:

1. El consumo promedio es dinámico (no constante) debido al alto consumo promedio durante los meses invernales.
2. El coeficiente de variación  $V$  es pequeño ( $< 15\%$ ) de modo que la demanda mensual puede considerarse aproximadamente determinística.

La conclusión es que la demanda mensual es (aproximadamente) determinística pero variable.

TABLA 13.1 Consumo mensual de gas natural (enero a diciembre)

Año	Consumo de gas natural en pies <sup>3</sup>											
	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1990	100	110	90	70	65	50	40	42	56	68	88	95
1991	110	125	98	80	60	53	44	45	63	77	92	99
1992	90	100	88	79	56	57	38	39	60	70	82	90
1993	121	130	95	90	70	58	41	44	70	80	95	100
1994	109	119	99	75	68	55	43	41	65	79	88	94
1995	130	122	100	85	73	58	42	43	64	75	80	101
1996	115	100	103	90	76	55	45	40	67	78	98	97
1997	130	115	100	95	80	60	49	48	64	85	96	105
1998	125	100	94	86	79	59	46	39	69	90	100	110
1999	87	80	78	75	69	48	39	41	50	70	88	93
Media	111.7	110	95	82.5	69.6	55.3	42.7	42.2	62.8	77.2	90.7	98
Desv. Est.	15.54	15.2	7.5	7.99	7.82	3.95	3.4	2.86	6.09	6.91	6.67	6
$V(\%)$	13.91	13.8	7.9	9.68	11.24	7.13	7.96	6.78	9.69	8.95	7.35	6.1

### 13.3 MODELOS ESTÁTICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICO (EOQ)

Esta sección presenta tres variaciones del modelo de cantidad de pedido económico (EOQ, por sus siglas en inglés) con demanda estática (constante). Estos modelos son analíticamente simples.

#### 13.3.1 Modelo EOQ clásico

El más simple de los modelos de inventario implica una demanda de tasa constante con reposición de pedidos instantánea y sin escasez. Defina

$y$  = Cantidad de pedido (número de unidades)

$D$  = Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)

$t_0$  = Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)

El nivel de inventario sigue el patrón ilustrado en la figura 13.1. Cuando el inventario llega al nivel cero, se recibe al instante un pedido de  $y$  unidades de tamaño. Las existencias se agotan uniformemente a una tasa de demanda constante,  $D$ . El ciclo de pedido de este patrón es

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

El modelo de costo requiere dos parámetros de costo.

$K$  = Costo de preparación asociado con la colocación de un pedido (dólares por pedido)

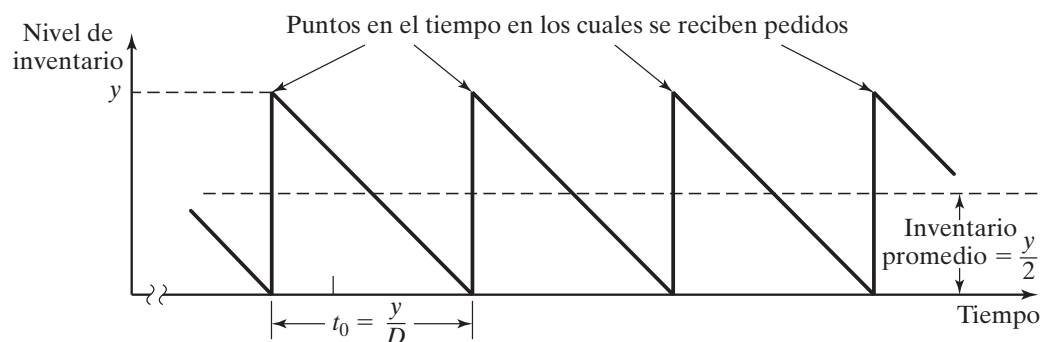
$h$  = Costo de retención (dólares por unidad de inventario por unidad de tiempo)

Dado que el nivel de inventario promedio es  $\frac{y}{2}$ , el costo total *por unidad de tiempo* (TCU, por sus siglas en inglés) es

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y) &= \text{Costo de preparación por unidad de tiempo} + \text{Costo de retención por unidad de tiempo} \\ &= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de retención por ciclo } t_0}{t_0} \\ &= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0} \\ &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

FIGURA 13.1

Patrón de inventario en el modelo EOQ clásico



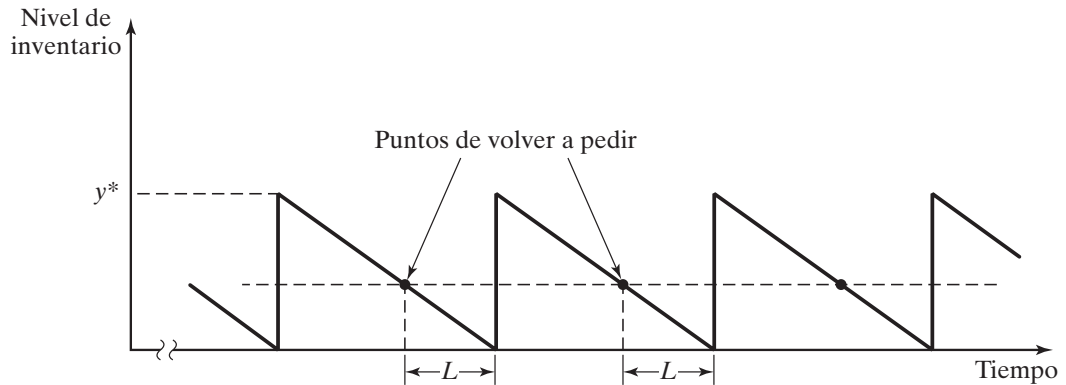


FIGURA 13.2

Punto de volver a pedir en el modelo EOQ clásico

El valor óptimo de la cantidad de pedido  $y$  se determina minimizando el  $TCU(y)$ . Suponiendo que  $y$  es continua, una condición necesaria para la optimalidad es

$$\frac{dTCU(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

La condición también es suficiente porque  $TCU(y)$  es convexa.

La solución de la ecuación da por resultado el EOQ  $y^*$  como

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima para el modelo propuesto es

$$\text{Pedido } y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \text{ unidades de cada } t_0^* = \frac{y^*}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

En realidad, un nuevo pedido no tiene que recibirse en el instante que se pide. En su lugar, puede ocurrir un **tiempo de espera** (tiempo de anticipación) positivo  $L$ , entre la colocación y el recibo de un pedido como se muestra en la figura 13.2. En este caso el **punto de volver a pedir** (punto de reorden) ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a  $LD$  unidades.

La figura 13.2 asume que el tiempo de espera  $L$  es menor que la duración del ciclo  $t_0^*$ , lo cual por lo general puede no ser el caso. Si así sucediera, definimos el **tiempo de espera efectivo** como

$$L_e = L - nt_0^*$$

El parámetro  $n$  es el valor entero más grande no mayor que  $\frac{L}{t_0^*}$ . La fórmula reconoce que después de  $n$  ciclos el intervalo real entre la colocación y la recepción de dos pedidos sucesivos es  $L_e$ . Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el inventario llega a  $L_e D$  unidades, y la política de inventario puede volverse a formular como

Pedir la cantidad  $y^*$  siempre que el nivel del inventario se reduzca a  $L_e D$  unidades.

### Ejemplo 13.3-1

Las luces de neón en el campus de la Universidad de Arkansas se reemplazan a razón de 100 unidades por día. La planta física pide las luces de neón de forma periódica. Iniciar un pedido de compra cuesta \$100. Se estima que el costo de una luz de neón almacenada es de aproximada-

mente \$.02 por día. El tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política de inventario óptima para pedir las luces de neón.

Con los datos del problema, tenemos

$$D = 100 \text{ unidades por día}$$

$$K = \$100 \text{ por pedido}$$

$$h = \$.02 \text{ por unidad por día}$$

$$L = 12 \text{ días}$$

Por lo tanto,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La duración del ciclo asociado es

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Ya que el tiempo de espera  $L$  ( $= 12$  días) excede la duración del ciclo  $t_0^*$  ( $= 10$  días), debemos calcular  $L_e$ . El número de ciclos enteros incluidos en  $L$  es

$$n = \left( \text{entero más grande} \leq \frac{L}{t_0^*} \right) = \left( \text{entero más grande} \leq \frac{12}{10} \right) = 1$$

Por lo tanto,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a

$$L_e D = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario es

*Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 200 unidades.*

El costo de inventario diario asociado con la política propuesta es

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y) &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$.02\left(\frac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día} \end{aligned}$$

### Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.xls* está diseñado para realizar los cálculos del EOQ general con escasez y operación de producción y consumo simultáneos, como se indica en el problema 10, conjunto 13.3a. También resuelve las situaciones de reducciones de precios presentada en la sección 13.3.2. Para utilizar la plantilla con el caso especial del ejemplo 13.3-1, ingrese  $-1$  en las celdas C3:C5, C8 y C10 para indicar que los datos correspondientes no son aplicables, como se muestra en la figura 13.3.

	B	C	D
1	<b>General Economic Order Quantity (EOQ)</b>		
2	Input data: (Enter -1 in column C if data element does not apply)		
3	Item cost, c1 =	-1	
4	Qty discount limit, q =	-1	
5	Item cost, c2 =	-1	
6	Setup cost, K =	100	
7	Demand rate, D =	100	
8	Production rate, a =	-1	
9	Unit holding cost, h =	0.02	
10	Unit penalty cost, p =	-1	
11	Lead time, L =	12	
12	<b>Model output results:</b>		
13	Order qty, $y^*$ =	1000.00	
14	Shortage qty, $w^*$ =	0.00	
15	Reorder point, R =	200.00	
16	TCU( $y^*$ ) =	20.00	
17	Purchase/prod. Cost =	0.00	
18	Setup cost/unit time =	10.00	
19	Holding cost /unit time =	10.00	
20	shortage cost/unit time =	0.00	
21	Optimal inventory policy: Order 1000.00 units when level drops to 200.00 units		
22	<b>Model intermediate calculations:</b>		
23	$y_m$ =	1000.00	
24	TCU1( $y_m$ )=	Not applicable	
25	Q-equation:	Not applicable	
26	Q =	Not applicable	
27	cycle length, $t_0$ =	10.00	
28	Optimization zone =	Not applicable	
29	Effectice lead time, $Le$ =	2.00	

FIGURA 13.3

Solución del ejemplo 13.3-1 obtenida con Excel (archivo *excelFOQ.xls*)

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3A

- En cada uno de los siguientes casos no se permite la escasez, y el tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 30 días. Determine la política de inventario óptima y el costo asociado por día.
  - $K = \$100, h = \$.05, D = 30$  unidades por día
  - $K = \$50, h = \$.05, D = 30$  unidades por día
  - $K = \$100, h = \$.01, D = 40$  unidades por día
  - $K = \$100, h = \$.04, D = 20$  unidades por día
- \*2. McBurger pide carne molida al principio de cada semana para cubrir la demanda de 300 lb de la semana. El costo fijo por pedido es de \$20. Refrigerar y guardar la carne cuesta aproximadamente \$.03 por lb por día.
  - Determine el costo de inventario por semana de la presente política de pedido.
  - Determine la política de inventario óptima que McBurger debe utilizar, suponiendo un tiempo de espera cero entre la colocación y la recepción de un pedido.



3. Una compañía tiene un artículo en existencia que se consume a razón de 50 unidades por día. Cada vez que se coloca un pedido, a la compañía le cuesta \$20. Una unidad de inventario mantenida en existencia durante una semana le costará \$.35.

- (a) Determine la política de inventario óptima, suponiendo un tiempo de espera de una semana.
- (b) Determine la cantidad óptima anual de pedidos (basado en 365 días por año).

- \*4. El departamento de compras de una compañía sugirió dos políticas de inventario:

*Política 1.* Pedir 150 unidades. El punto de volver a pedir es 50 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 10 días.

*Política 2.* Pedir 200 unidades. El punto de volver a pedir es 75 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 15 días.

El costo de preparación por pedido es de \$20, y el costo de retención por unidad en inventario por día es de \$.02.

- (a) ¿Cuál de las dos políticas debe adoptar la compañía?
- (b) Si estuviera a cargo de idear una política de inventarios para la compañía, ¿qué recomendaría suponiendo que el proveedor requiere un tiempo de espera de 22 días?
5. La tienda Walmark Store comprime y carga en una tarima las cajas de cartón vacías para reciclarlas. La tienda genera cinco tarimas al día. El costo de almacenar una tarima en la parte trasera de la tienda es de \$.10 por día. La compañía que traslada las tarimas al centro de reciclaje cobra una cuota fija de \$100 por la renta de su equipo de carga, más un costo de transporte variable de \$3 por paleta. Grafique el cambio en la cantidad de tarimas con el tiempo, e idee una política óptima para el traslado de las tarimas al centro de reciclaje.
6. Un hotel utiliza un servicio de lavandería externo para proporcionar toallas limpias. El hotel genera 600 toallas sucias al día. El servicio de lavandería recoge las toallas sucias y las reemplaza con limpias a intervalos regulares. Hay un cargo fijo de \$81 por el servicio de recolección y entrega, además del costo variable de \$.60 por toalla. Al hotel le cuesta \$.02 al día guardar una toalla sucia y \$.01 por día guardar una limpia. ¿Con qué frecuencia debe utilizar el hotel el servicio de recolección y entrega? (*Sugerencia:* Hay dos tipos de artículos de inventario en esta situación. Conforme el nivel de las toallas sucias se incrementa, el de las toallas limpias se reduce al mismo ritmo).
7. *Lewis (1996).* Un empleado de una compañía multinacional se va de Estados Unidos a la subsidiaria de la compañía en Europa en calidad de préstamo. Durante el año, las obligaciones financieras del empleado en los Estados Unidos (por ejemplo, pagos de hipoteca y primas de seguros) ascienden a \$12,000, distribuidas de manera uniforme a lo largo de los meses del año. El empleado puede cumplir con estas obligaciones depositando toda la suma en un banco estadounidense antes de partir a Europa. Sin embargo, en este momento la tasa de interés en Estados Unidos es bastante baja (alrededor de 1.5% anual) en comparación con la tasa de interés en Europa (6.5% anual). El costo del envío de fondos desde el extranjero es de \$50 por transacción. Determine una política óptima para la transferencia de fondos de Europa a los Estados Unidos, y analice la implementación práctica de la solución. Mencione todas las suposiciones.
8. Considere la situación de inventarios en la cual las existencias se reponen de manera uniforme (en lugar de instantáneamente) a una tasa  $a$ . El consumo ocurre a la tasa constante  $D$ . Ya que el consumo también ocurre durante el periodo de reposición, es necesario que  $a > D$ . El costo de preparación es  $K$  por pedido, y el costo de retención es  $h$  por unidad, por unidad de tiempo. Si  $y$  es el tamaño del pedido y no se permite que haya escasez, demuestre que
- (a) El nivel máximo del inventario es  $y(1 - \frac{D}{a})$ .
- (b) El costo total por unidad de tiempo dado  $y$  es

$$\text{TCU}(y) = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{D}{a}\right)y$$



(c) La cantidad de pedido económica es

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h(1 - \frac{D}{a})}}, D < a$$

(d) Demuestre que la EOQ en la situación de reposición instantánea puede derivarse de la fórmula en (c)

9. Una compañía puede producir una mercancía o adquirirla de un contratista. Si la produce, le costará \$20 cada vez que se preparen las máquinas. La tasa de producción es de 100 unidades por día. Si se la compra al contratista le costará \$15 cada vez que se coloque un pedido. El costo de mantener la mercancía en existencia, ya sea que se compre o se produzca, es de \$.02 por unidad por día. El uso que la compañía hace de la mercancía se estima en 26,000 unidades anualmente. Suponiendo que no se permite que haya escasez, ¿la compañía debe comprarla o producirla?

10. En el problema 8, suponga que se permite que haya escasez a un costo de penalización de  $p$  por unidad por unidad de tiempo.

(a) Si  $w$  es la escasez máxima durante el ciclo de inventario, demuestre que

$$TCU(y, w) = \frac{KD}{y} + \frac{h\{y(1 - \frac{D}{a}) - w\}^2 + pw^2}{2(1 - \frac{D}{a})y}$$

$$y = \sqrt{\frac{2KD(p + h)}{ph(1 - \frac{D}{a})}}$$

$$w = \sqrt{\frac{2KDh(1 - \frac{D}{a})}{p(p + h)}}$$

(b) Demuestre que los resultados de la EOQ de la sección 13.3.1 pueden derivarse a partir de las fórmulas generales en (a).

### 13.3.2 EOQ con reducciones de precios

Este modelo es el mismo de la sección 13.3.1, excepto que el artículo en inventario puede adquirirse con un descuento si el tamaño del pedido,  $y$ , excede un límite dado,  $q$ . Matemáticamente, el precio de compra unitario,  $c$ , es

$$c = \begin{cases} c_1, & \text{si } y \leq q \\ c_2, & \text{si } y > q \end{cases}, c_1 > c_2$$

Por consiguiente,

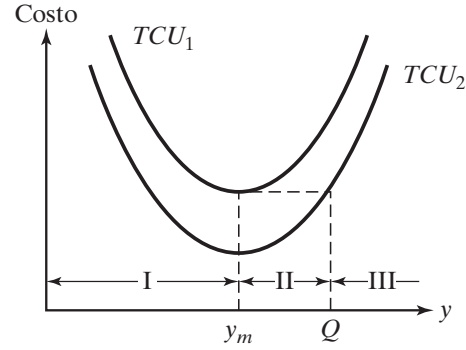
$$\text{Costo de compra por unidad de tiempo} = \begin{cases} \frac{c_1 y}{t_0} = \frac{c_1 y}{(\frac{y}{D})} = Dc_1, & y \leq q \\ \frac{c_2 y}{t_0} = \frac{c_2 y}{(\frac{y}{D})} = Dc_2, & y > q \end{cases}$$

Aplicando la notación utilizada en la sección 13.3.1, el costo total por unidad de tiempo es

$$TCU(y) = \begin{cases} TCU_1(y) = Dc_1 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y, & y \leq q \\ TCU_2(y) = Dc_2 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y, & y > q \end{cases}$$

FIGURA 13.4

Función de costo de inventario con reducciones de precio



Las funciones  $TCU_1$  y  $TCU_2$  se grafican en la figura 13.4. Debido a que las dos funciones difieren sólo por una constante, sus mínimos deben coincidir en

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

La determinación de la cantidad de pedido óptima  $y^*$  depende de dónde queda el punto de reducción de precios,  $q$ , con respecto a las zonas I, II y III, delineadas en la figura 13.4 por los intervalos  $(0, y_m)$ ,  $(y_m, Q)$  y  $(Q, \infty)$ , respectivamente. El valor de  $Q(> y_m)$  se determina a partir de la ecuación

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$$

o

$$c_2D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = TCU_1(y_m)$$

la cual se simplifica a

$$Q^2 + \left( \frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h} \right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

La figura 13.5 muestra que la cantidad óptima deseada  $y^*$  es

$$y^* = \begin{cases} y_m, & \text{si } q \text{ se encuentra en las zonas I o III} \\ q, & \text{si } q \text{ se encuentra en la zona II} \end{cases}$$

Los pasos para determinar  $y^*$  son

**Paso 1.** Determine  $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ . Si  $q$  está en la zona I, entonces  $y^* = y_m$ . De lo contrario, vaya al paso 2.

**Paso 2.** Determine  $Q(> y_m)$  a partir de la ecuación  $Q$

$$Q^2 + \left( \frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h} \right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

Defina las zonas II y III. Si  $q$  está en la zona II,  $y^* = q$ . De lo contrario,  $q$  está en la zona III, y  $y^* = y_m$ .

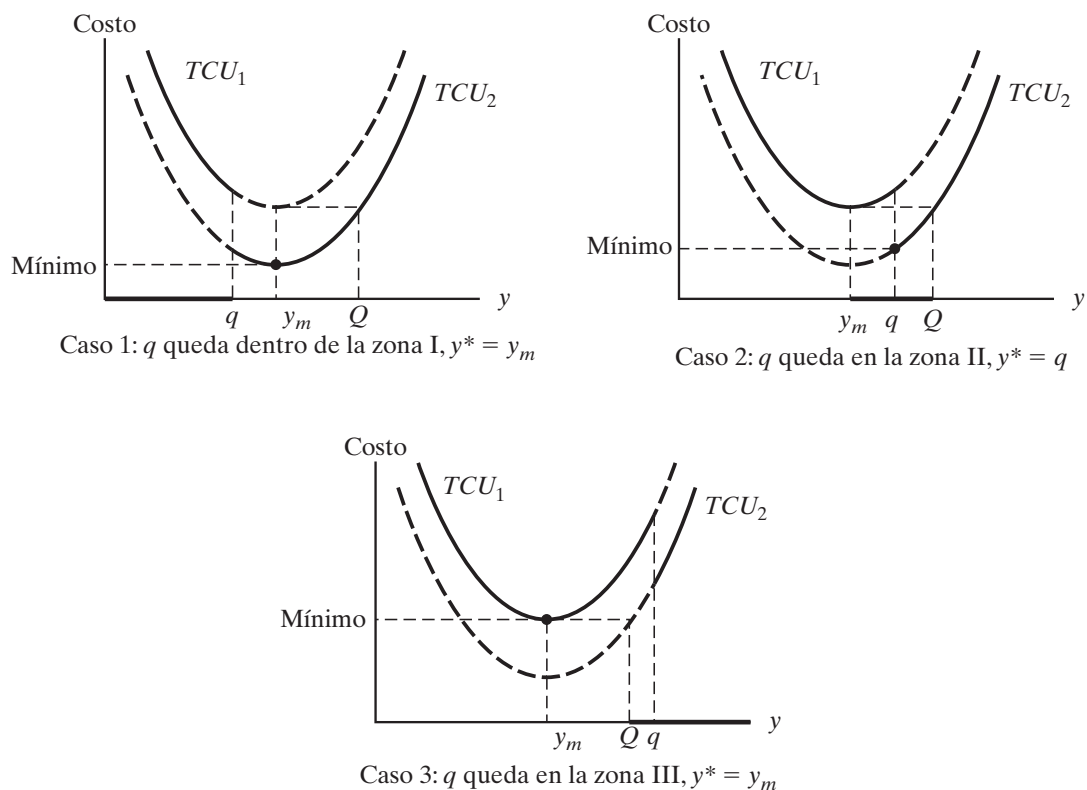


FIGURA 13.5

Solución óptima de los problemas de inventario con reducciones de precio

### Ejemplo 13.3-2

LubeCar se especializa en cambios de aceite rápidos. El taller compra aceite automotriz a granel a \$3 por galón descontado a \$2.50 si la cantidad de pedido es de más de 1000 galones. El taller atiende aproximadamente 150 automóviles por día, y cada cambio de aceite requiere 1.25 galones. LubeCar guarda el aceite a granel a un costo de \$.02 por galón por día. Incluso, el costo de colocar un pedido es de \$20. El tiempo de espera es de 2 días para la entrega. Determine la política de inventario óptima.

El consumo de aceite por día es

$$D = 150 \text{ autos por día} \times 1.25 \text{ galones por auto} = 187.5 \text{ galones por día}$$

También tenemos

$$h = \$.02 \text{ por galón por día}$$

$$K = \$20 \text{ por pedido}$$

$$L = 2 \text{ días}$$

$$c_1 = \$3 \text{ por galón}$$

$$c_2 = \$2.50 \text{ por galón}$$

$$q = 1000 \text{ galones}$$

**Paso 1.** Calcule

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02}} = 612.37 \text{ galones}$$

Como  $q = 1000$  es mayor que  $y_m = 612.37$ , nos vamos al paso 2.

**Paso 2.** Determine  $Q$ .

$$\begin{aligned}TCU_1(y_m) &= c_1D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2} \\&= 3 \times 187.5 + \frac{20 \times 187.5}{612.37} + \frac{.02 \times 612.37}{2} \\&= 574.75\end{aligned}$$

Por consiguiente la ecuación  $Q$  se calcula como

$$Q^2 + \left( \frac{2 \times (2.5 \times 187.5 - 574.75)}{.02} \right) Q + \frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02} = 0$$

o

$$Q^2 - 10,599.74Q + 375,000 = 0$$

La solución  $Q = 10,564.25 (> y_m)$  define las zonas como

$$\text{Zona I} = (0, 612.37)$$

$$\text{Zona II} = (612.37, 10,564.25)$$

$$\text{Zona III} = (10,564.25, \infty)$$

Ahora,  $q (= 1000)$  queda en la zona II, la cual produce la cantidad de pedido óptima  $y^* = q = 1000$  galones.

Dado un tiempo de espera de 2 días, el punto de volver a pedir es  $2D = 2 \times 187.5 = 375$  galones. Por lo tanto, la política de inventario óptima es “Pedir 1000 galones cuando el nivel de inventario se reduzca a 375 galones”.

### Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.xls* resuelve la situación de precio descontado como un caso especial de la plantilla en la figura 13.3. Ingrese los datos aplicables en la sección de datos de entrada C3:C11. La pantalla de resultados da la política de inventario óptima y también los cálculos intermedios del modelo.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3B

1. Considere la situación del servicio de lavandería del hotel del problema 6, conjunto 13.3a. El cobro normal por lavar una toalla sucia es de \$.60, pero el servicio de lavandería cobrará sólo \$.50 Si el hotel entrega las toallas en lotes de al menos 2500. ¿El hotel debe aprovechar el descuento?
- \*2. Un artículo se consume a razón de 30 artículos por día. El costo de retención por unidad por día es de \$.05 y el costo de preparación es de \$100. Suponga que no se permiten faltantes y que el costo de compra por unidad es de \$10 para cualquier cantidad que de otro modo no exceda las 500 unidades y los \$8. El tiempo de espera es de 21 días. Determine la política de inventario óptima.
3. Un artículo se vende a \$25 cada uno, pero se ofrece un 10% de descuento para lotes de 150 unidades o más. Una compañía utiliza este artículo a razón de 20 unidades por día. El costo de preparación para pedir un lote es de \$50, y el costo de retención por unidad por día es de \$.30. El tiempo de espera es de 12 días. ¿Debe aprovechar la compañía el descuento?
- \*4. En el problema 3, determine el intervalo del porcentaje de descuento del precio que, cuando se ofrece para lotes de 150 unidades o más, no representará una ventaja financiera para la compañía.
5. En el modelo de inventario analizado en esta sección, suponga que el costo de retención por unidad por unidad de tiempo es  $h_1$  para cantidades por debajo de  $q$  y  $h_2$ , de lo contrario,  $h_1 > h_2$ . Demuestre cómo se determina el tamaño de lote económico.

### 13.3.3 Cantidad de pedido económica (EOQ) de varios artículos con limitación de almacenamiento

Este modelo se ocupa de varios artículos cuyas fluctuaciones de inventario individuales siguen el patrón mostrado en la figura 13.1 (no se permiten faltantes). La diferencia es que los artículos compiten por un espacio de almacenamiento limitado.

Defina para el artículo  $i, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$D_i$  = Tasa de demanda

$K_i$  = Costo de preparación

$h_i$  = Costo de retención unitario por unidad de tiempo

$y_i$  = Cantidad de pedido

$a_i$  = Requerimiento de área de almacenamiento por unidad de inventario

$A$  = Área de almacenamiento máxima disponible para todos los  $n$  artículos

Conforme a la suposición de que no se permiten faltantes, el modelo matemático que representa la situación del inventario se da como

$$\text{Minimizar } \text{TCU}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right)$$

sueto a

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Para resolver el problema, primero abordamos la situación no restringida:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = 1, 2, \dots, n$$

Si la solución satisface la restricción, entonces el proceso termina. De lo contrario, la restricción es obligatoria y debe ser activada.

En ediciones anteriores de este libro utilizamos el algoritmo Lagrangeano (un tanto complicado) y cálculos de prueba y error para determinar la solución óptima restringida. Con la disponibilidad de poderosos programas de cómputo (como AMPL y Solver), el problema se resuelve de forma directa como un programa no lineal, como se demostrará en el siguiente ejemplo.

---

#### Ejemplo 13.3-3

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario.

Artículo $i$	$K_i$ (\$)	$D_i$ (unidades por día)	$h_i$ (\$)	$a_i$ (pies <sup>2</sup> )
1	10	2	.30	1
2	5	4	.10	1
3	15	4	.20	1
Área de almacenamiento total disponible = 25 pies <sup>2</sup>				

---

Los valores óptimos no restringidos,  $y_i^* = \sqrt{\frac{2KD_i}{h_i}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son 11.55, 20.00 y 24.49 unidades, respectivamente, los cuales violan la restricción de almacenamiento  $y_1 + y_2 \leq 25$ . El problema restringido puede resolverse como un programa lineal utilizando Solver o AMPL, como se explica a continuación.

La solución óptima es  $y_1^* = 6.34$  unidades,  $y_2^* = 7.09$  unidades,  $y_3^* = 11.57$  unidades, y el costo = \$13.62/día.

### Momento de Solver

La figura 13.6 muestra cómo puede usarse Solver para resolver el ejemplo 13.3-3 como un programa no lineal (archivo *solverConstrEOQ.xls*). Los detalles de las fórmulas utilizadas en la plantilla y de los parámetros Solver se muestran en la figura. Como con la mayoría de los programas no lineales, deben darse los valores iniciales (en esta plantilla,  $y_1 = y_2 = y_3 = 1$  en la fila 9). Un valor inicial *no cero* es obligatorio porque la función objetivo incluye la división entre  $y_i$ . De hecho, puede ser una buena idea reemplazar  $K_i D_i / y_i$  con  $K_i D_i / (y_i + \Delta)$ , donde  $\Delta$  es un valor positivo muy pequeño, para evitar la división entre cero durante las iteraciones. Por lo general, quizá se requieran valores iniciales diferentes antes de que se determine una solución (óptima local). En este ejemplo, la solución resultante es la óptima global porque la función objetivo y las restricciones se comportan bien (función objetivo convexa y espacio de soluciones convexo).

### Momento AMPL

El modelo AMPL no lineal para la situación general de cantidad de pedido económica de varios artículos con limitación de almacenamiento (archivo *amplConstrEOQ.txt*) se explica en la figura C.17 en el apéndice C en el sitio web.

FIGURA 13.6

Plantilla Solver para el ejemplo 13.3-3 (archivo *solverConstrEOQ.xls*)

	A	B	C	D	E	G	H	I
1	Solver Model for Example 11.3-3							
2	K=	10	5	15		Cell	Formula	Copy to
3	D=	2	4	4		B7	=B4*B9/2+B2*B3/B9	C7:D7
4	h=	0.3	0.1	0.2		E6	=SUMPRODUCT	
5	a=	1	1	1	sum(ay)		(B5:D5,B9:D9)	
6	A=	25				E7	=sum(B7:D7)	
7	$hy/2 + KD/y =$	20.15	20.05	60.1	100.3	E9	=E7	
8	Solution: y1	y2	y3	Objective				
9		1	1	1	100.3			
10	Solver Parameters							
11								
12	Set Target Cell:					Solve		
13	Equal To:					Close		
14	By Changing Cells:					Options		
15								
16	Subject to the Constraints:							
17								
18								
19								
20								
8	Solution: y1	y2	y3	Objective				
9		6.3375	7.0892	11.573	13.6238			

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3C<sup>2</sup>**

\*1. Los datos siguientes describen cinco artículos de inventario.

Artículo, $i$	$K_i$ (\$)	$D_i$ (unidades por día)	$h_i$ (\$)	$a_i$ (pies <sup>2</sup> )
1	20	22	0.35	1.0
2	25	34	0.15	0.8
3	30	14	0.28	1.1
4	28	21	0.30	0.5
5	35	26	0.42	1.2
Área de almacenamiento total disponible = 25 pies <sup>2</sup>				

Determine las cantidades de pedido óptimas.

2. Resuelva el modelo del ejemplo 13.3-3, suponiendo que requerimos que la suma de los inventarios promedio de todos los artículos sea menor que 25 unidades.
3. En el problema 2, suponga que la única restricción es un límite de \$1000 en la cantidad de capital que puede invertirse en el inventario. Los costos de compra por unidad de los artículos 1, 2 y 3 son, \$100, \$55 y \$100, respectivamente. Determine la solución óptima.
- \*4. Los siguientes datos describen cuatro artículos de inventario.

Artículo, $i$	$K_i$ (\$)	$D_i$ (unidades por día)	$h_i$ (\$)
1	100	10	.1
2	50	20	.2
3	90	5	.2
4	20	10	.1

La compañía desea determinar la cantidad de pedido económica para cada uno de los cuatro artículos de modo que el total de pedidos por año de 365 días es cuando mucho de 150. Formule el problema como un programa no lineal, y determine la solución óptima.

**13.4 MODELOS DINÁMICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICA (EOQ)**

Estos modelos difieren de los de la sección 13.3 en dos aspectos:

1. El nivel del inventario se revisa periódicamente a lo largo de un número finito de periodos iguales.
2. La demanda por periodo, aun cuando es determinística, es dinámica, en cuanto varía de un periodo al siguiente.

Una situación en la cual ocurre la demanda determinística dinámica es la **planeación de requerimiento de materiales** (MRP, por sus siglas en inglés). La idea de la MRP se describe con un ejemplo. Suponga que las demandas trimestrales durante el año siguiente para dos modelos finales,  $M1$  y  $M2$ , de un producto dado son 100 y 150 unidades, respectivamente. Al final de cada trimestre se entregan los lotes trimestrales. El tiempo de espera de producción es de dos meses para  $M1$  y de un mes para  $M2$ . Cada

<sup>2</sup>Verá que los archivos *solverConstrEOQ.xls* y *amplConstrEOQ* son útiles al resolver problemas de este conjunto.



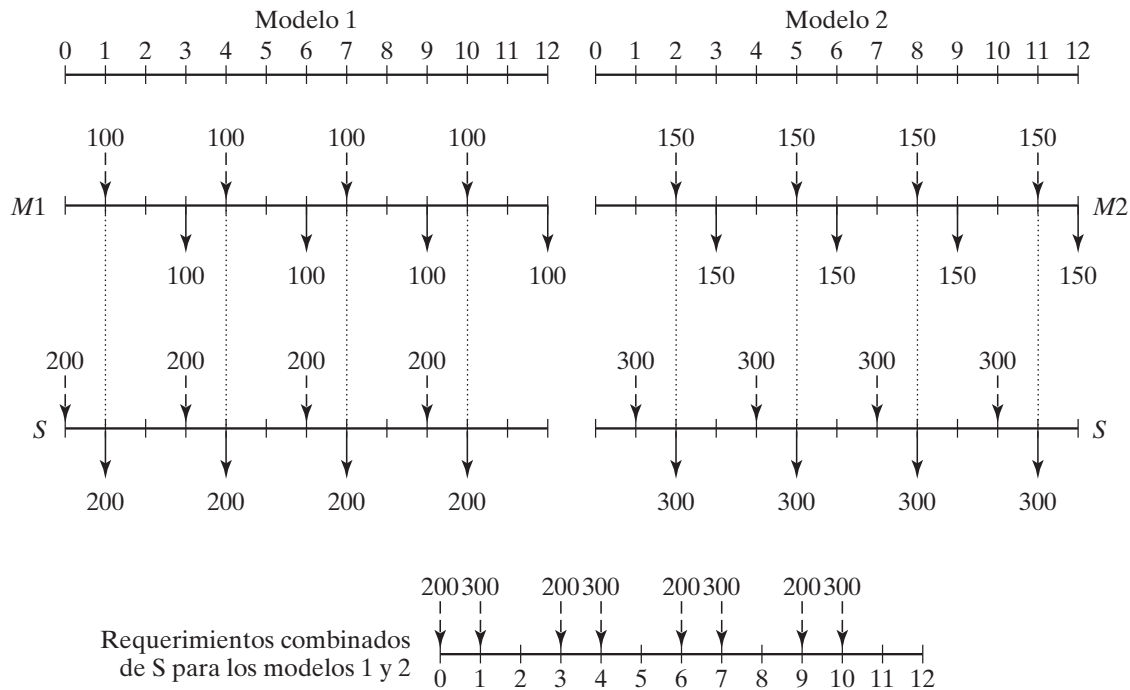


FIGURA 13.7

Ejemplo de demanda dinámica generada por MRP

unidad de  $M1$  y  $M2$  utiliza 2 unidades de un subensamblado  $S$ . El tiempo de espera para la producción de  $S$  es de un mes.

La figura 13.7 muestra los programas de producción para  $M1$  y  $M2$ . Los programas se inician con la demanda trimestral de los dos modelos (mostrada por flechas sólidas) que ocurre al final de los meses 3, 6, 9 y 12. Dados los tiempos de espera para  $M1$  y  $M2$ , las flechas de rayas muestran los inicios planeados de cada lote de producción.

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamblado  $S$  debe coincidir con la ocurrencia de las flechas de rayas  $M1$  y  $M2$ . Esta información se muestra por medio de las flechas sólidas en la gráfica  $S$ , donde la demanda  $S$  resultante es de 2 unidades por unidad de  $M1$  y  $M2$ . Utilizando un tiempo de espera de un mes, las flechas de rayas en la gráfica  $S$  dan los programas de producción de  $S$ . De acuerdo con estos dos programas, la demanda combinada de  $S$  correspondiente a  $M1$  y  $M2$  puede determinarse entonces como se muestra en la parte inferior de la figura 13.7. La demanda *variable pero conocida* resultante de  $S$  es típica de la situación, donde aplica la EOQ dinámica.

En esta sección se presentan dos modelos. El primero asume que no hay costo de preparación (de pedido), y el segundo asume que sí lo hay. Esta variación aparentemente “pequeña” hace la diferencia en la complejidad del modelo.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4A

- En la figura 13.7, determine los requerimientos combinados para el subensamblado  $S$  en cada uno de los siguientes casos:
  - El tiempo de espera para  $M1$  es de sólo un periodo.
  - El tiempo de espera para  $M1$  es de tres periodos.

### 13.4.1 Modelo de EOQ sin costo de preparación

Este modelo implica un horizonte de planeación de  $n$  periodos iguales. Cada periodo tiene una capacidad de producción limitada con uno o más niveles de producción (por ejemplo, el tiempo regular y el tiempo extra representan dos niveles de producción). Un periodo actual puede producir más que su demanda inmediata para satisfacer la necesidad de periodos posteriores, en cuyo caso ocurre un costo de retención.

Las suposiciones generales del modelo son:

1. No se incurre en costo de preparación en ningún periodo.
2. No se permite que haya faltantes.
3. La función de costo de producción unitario en cualquier periodo es constante o tiene costos marginales crecientes (convexos).
4. El costo de retención unitario en cualquier periodo es constante.

La ausencia de faltantes significa que la producción demorada en periodos futuros no puede satisfacer la demanda en un periodo actual. Esta suposición requiere que la capacidad de producción acumulada para los periodos 1, 2, ..., e  $i$  sea igual al menos a la demanda acumulada durante los mismos periodos.

La figura 13.8 ilustra la función de costo de producción unitario con márgenes crecientes. Por ejemplo, la producción durante el tiempo regular y el tiempo extra corresponde a dos niveles donde el costo de producción unitario durante el tiempo extra excede al del tiempo regular.

El problema de  $n$  periodos puede formularse como un modelo de transporte (vea el capítulo 5) con  $kn$  orígenes y  $n$  destinos, donde  $k$  es el número de niveles de producción por periodo (por ejemplo,  $k = 2$  si cada periodo utiliza tiempo regular y tiempo extra). La capacidad de producción de cada uno de los  $kn$  orígenes de nivel de producción es igual a las cantidades de oferta. Las cantidades demandadas se especifican por la demanda de cada periodo. El costo de “transporte” unitario desde un origen hasta un destino es la suma de los costos de producción y retención aplicables por unidad. La solución del problema como un modelo de transporte determina las cantidades de producción a un costo mínimo en cada nivel de producción.

El modelo de transporte resultante puede resolverse sin utilizar la conocida técnica del transporte presentada en el capítulo 5. La validez del nuevo algoritmo de solución se fundamenta en las suposiciones especiales de nada de faltantes y en una función de costo de producción convexa.

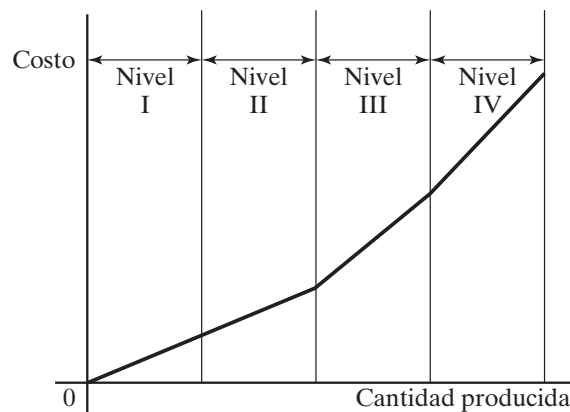


FIGURA 13.8  
Función de costo de producción unitario convexa

**Ejemplo 13.4-1**

Metalco produce deflectores de chiflones que se utilizan en chimeneas domésticas durante los meses de diciembre a marzo. Al inicio la demanda es lenta, alcanza su máximo a mediados de la temporada, y baja hacia el final. Debido a la popularidad del producto, MetalCo puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda. La siguiente tabla proporciona las capacidades de producción y las demandas durante los cuatro meses de invierno.

Mes	Capacidad		Demanda (unidades)
	Tiempo regular (unidades)	Tiempo extra (unidades)	
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

El costo de producción unitario en cualquier periodo es de \$6 durante el tiempo regular y de \$9 durante el tiempo extra. El costo de retención por unidad por mes es de \$.10.

Para asegurarnos de que el modelo tenga una solución factible cuando no se permiten faltantes, la oferta acumulada de cada mes no puede ser menor que la demanda acumulada, como se muestra en la tabla siguiente.

Mes	Oferta acumulada	Demanda acumulada
1	$90 + 50 = 140$	100
2	$140 + 100 + 60 = 300$	$100 + 190 = 290$
3	$300 + 120 + 80 = 500$	$290 + 210 = 500$
4	$500 + 110 + 70 = 680$	$500 + 160 = 660$

La tabla 13.2 resume el modelo y su solución. Los símbolos  $R_i$  y  $O_i$  representan niveles de producción durante tiempo regular y durante tiempo extra en el periodo  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Debido a que la oferta acumulada en el periodo 4 excede la demanda acumulada, se agrega un destino ficticio para balancear el modelo como se muestra en la tabla 13.2. Todas las rutas de “transporte” desde un periodo anterior a uno actual están bloqueadas porque no se permiten faltantes.

El costo de “transporte” unitario es la suma de los costos de producción y retención aplicables. Por ejemplo, el costo unitario del periodo  $R_1$  al periodo 1 es igual al costo de producción unitario únicamente ( $= \$6$ ), en tanto que el costo unitario de  $O_1$  al periodo 4 es igual al costo de producción unitario en  $O_1$  más el costo de retención unitario desde el periodo 1 hasta el periodo 4; es decir,  $\$9 + (\$.1 + \$.1 + \$.1) = \$9.30$ . El costo unitario para cualquier destino *excedente* es cero.

El modelo se resuelve iniciando en la columna 1 y terminando en la columna *excedente*. Para cada columna, la demanda se satisface dando prioridad a su rutas mas económicas.<sup>3</sup> Para la columna 1, la ruta  $(R_1, 1)$  es la más económica y por lo tanto se le asigna la cantidad factible máxima  $= \min\{90, 100\} = 90$  unidades. Esta asignación deja 10 unidades no satisfechas en la columna 1. La siguiente ruta más económica en la columna 1 es  $\{O_1, 1\}$ , a la cual se le asigna 10 ( $= \min\{50, 10\}$ ). Ahora la demanda durante el periodo 1 está satisfecha.

<sup>3</sup>Para una comprobación de la optimalidad de este procedimiento, vea S.M. Johnson, “Sequential Production Planning over Time at Minimum Cost”, *Management Science*, vol. 3, págs. 435-437, 1957.

TABLA 13.2 Solución del ejemplo 13.4-1

	1	2	3	4	Excedente	
$R_1$	<b>90</b>	6	6.1	6.2	6.3	0
$O_1$	<b>10</b>	9	9.1	9.2	9.3	0
$R_2$		<b>100</b>	6	6.1	6.2	0
$O_2$		<b>60</b>	9	9.1	9.2	0
$R_3$			<b>120</b>	6	6.1	0
$O_3$			<b>80</b>	9	9.1	0
$R_4$				<b>110</b>	6	0
$O_4$				<b>50</b>	9	0
	<b>100</b>	<b>190</b>	<b>210</b>	<b>160</b>	<b>20</b>	
	↓	↓	↓	↓		
	<b>10</b>	<b>90</b>	<b>90</b>	<b>50</b>		
		↓	↓			
		<b>30</b>	<b>10</b>			

Luego pasamos a la columna 2. Las asignaciones en esta columna ocurren en el orden siguiente: 100 unidades a  $(R_2, 2)$ , 60 unidades a  $(O_2, 2)$ , y 30 unidades a  $(O_1, 2)$ . Los costos unitarios de estas asignaciones son \$6, \$9 y \$9.10, respectivamente. No utilizamos la ruta  $(R_1, 2)$ , cuyo costo unitario es de \$6.10, porque toda la oferta de  $R_1$  ya se asignó al periodo 1.

Continuando de la misma manera, satisfacemos las demandas de la columna 3 y de la columna 4. La solución óptima (mostrada en negritas en la tabla 13.2) se resume como sigue:

Periodo	Programa de producción
Tiempo regular 1	Producir 90 unidades durante el periodo 1.
Tiempo extra 1	Producir 50 unidades: 10 unidades durante el periodo 1, 30 durante el 2, y 10 durante el 3.
Tiempo regular 2	Producir 100 unidades durante el periodo 2.
Tiempo extra 2	Producir 60 unidades durante el periodo 2.
Tiempo regular 3	Producir 120 unidades durante el periodo 3.
Tiempo extra 3	Producir 80 unidades durante el periodo 3.
Tiempo regular 4	Producir 110 unidades durante el periodo 4.
Tiempo extra 4	Producir 50 unidades durante el periodo 4, con 20 unidades de capacidad ociosa.

El costo total asociado es  $(90 \times \$6) + (10 \times \$9) + (30 \times \$9.10) + (100 \times \$6) + (60 \times \$9) + (10 \times \$9.20) + (120 \times \$6) + (80 \times \$9) + (110 \times \$6) + (50 \times \$9) = \$4685$ .

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4B**

1. Resuelva el ejemplo 13.4-1, suponiendo que los costos de producción y retención unitarios son los que aparecen en la tabla siguiente.

Periodo $i$	Costo unitario durante tiempo regular (\$)	Costo unitario durante tiempo extra (\$)	Costo de retención unitario (\$) hasta el periodo $i + 1$
1	5.00	7.50	.10
2	3.00	4.50	.15
3	4.00	6.00	.12
4	1.00	1.50	.20

2. Se fabrica un artículo para satisfacer la demanda conocida durante cuatro periodos de acuerdo con los datos siguientes:

Intervalo de producción (unidades)	Costo de producción unitario (\$) durante el periodo			
	1	2	3	4
1–3	1	2	2	3
4–11	1	4	5	4
12–15	2	4	7	5
16–25	5	6	10	7
Costo de retención unitario hasta el siguiente periodo (\$)	.30	.35	.20	.25
Demanda total (unidades)	11	4	17	29

- (a) Encuentre la solución óptima e indique las unidades que se producirán en cada periodo.
- (b) Suponga que se requieren 10 unidades adicionales en el periodo 4. ¿Dónde deben producirse?
- \*3. La demanda de un producto durante los siguientes cinco periodos puede satisfacerse con producción regular, producción con tiempo extra, o subcontratación. Puede acudir a la subcontratación sólo si se ha utilizado la capacidad de tiempo extra. La siguiente tabla proporciona la oferta, la demanda y los datos del costo de la situación.

Periodo	Capacidad de producción (unidades)			Demanda
	Tiempo regular	Tiempo extra	Subcontratación	
1	100	50	30	153
2	40	60	80	200
3	90	80	70	150
4	60	50	20	200
5	70	50	100	203

Los costos de producción unitarios en los tres niveles de cada periodo son \$4, \$6 y \$7, respectivamente. El costo de retención unitario por periodo es de \$.50. Determine la solución óptima.

**13.4.2 Modelo de EOQ con costo de preparación**

En esta situación no se permiten faltantes, y se incurre en un costo de preparación cada vez que se inicia un nuevo lote de producción. Se presentarán dos métodos de solución: un algoritmo de programación exacta dinámica y una heurística.

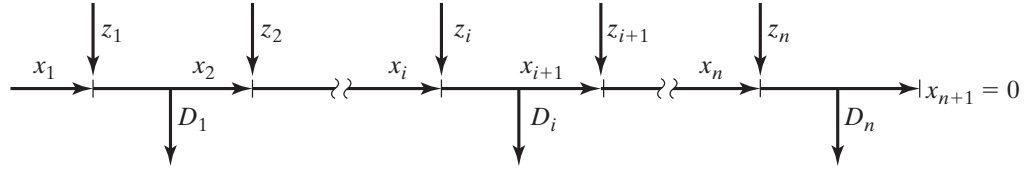


FIGURA 13.9

Elementos del modelo de inventario dinámico con costo de preparación

La figura 13.9 resume esquemáticamente la situación del inventario. Los símbolos mostrados en la figura se definen para el periodo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , como

$z_i$  = Cantidad pedida

$D_i$  = Demanda durante el periodo

$x_i$  = Inventario al inicio del periodo  $i$

Los elementos de costos de la situación se definen como

$K_i$  = Costo de preparación en el periodo  $i$

$h_i$  = Costo de retención de inventario unitario del periodo  $i$  a  $i + 1$

La función de costo de producción asociado para el periodo  $i$  es

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ K_i + C_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

La función  $c_i(z_i)$  es la función de costo de producción marginal, dada  $z_i$ .

**Algoritmo de programación dinámica general.** Sin faltantes, el modelo de inventario se basa en minimizar la suma de los costos de producción y retención en los  $n$  periodos. A fin de simplificar, supondremos que el costo de retención en el periodo  $i$  se basa en el inventario de final de periodo, definido como

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

Para la ecuación recursiva hacia adelante, o de avance, el *estado* en la *etapa* (periodo)  $i$  se define como  $x_{i+1}$ , el nivel del inventario al final del periodo. En el caso extremo, el inventario restante,  $x_{i+1}$ , puede satisfacer la demanda en todos los periodos restantes; es decir,

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + \dots + D_n$$

Sea  $f_i(x_{i+1})$  el costo mínimo del inventario para los periodos  $1, 2, \dots, i$  dado el inventario al final del periodo  $x_{i+1}$ . La ecuación recursiva hacia adelante es

$$f_1(x_2) = \min_{z_1 = D_1 + x_2 - x_1} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, i = 2, 3, \dots, n$$

Observe que durante el periodo 1,  $z_1$  es exactamente igual a  $D_1 + x_2 - x_1$ . Para  $i > 1$ ,  $z_i$  puede ser cero porque  $D_i$  puede satisfacerse a partir de la producción en periodos precedentes.

**Ejemplo 13.4-2**

La siguiente tabla proporciona los datos de una situación de inventario de 3 periodos.

Periodo $i$	Demanda $D_i$ (unidades)	Costo de preparación, $K_i$ (\$)	Costo de retención, $h_i$ (\$)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda ocurre en unidades discretas, y el inventario de inicio es  $x_1 = 1$  unidad. El costo de producción unitario,  $c_i(z_i)$ , es de \$10 para las primeras 3 unidades y de \$20 para cada unidad adicional, es decir,

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \leq z_i \leq 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \geq 4 \end{cases}$$

Determine la política de inventario óptima.

**Periodo 1:**  $D_1 = 3, 0 \leq x_2 \leq 2 + 4 = 6, z_1 + D_1 - x_1 = x_2 + 2$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$								
		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8	Solución óptima	
$x_2$	$h_1x_2$	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	$z_1^*$
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Observe que debido a que  $x_1 = 1$ , el valor mínimo de  $z_1$  es  $D_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$ .

**Periodo 2:**  $D_2 = 2, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq z_2 \leq D_2 + x_3 = x_3 + 2$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$							Solución óptima	
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
$x_3$	$h_2x_3$	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	$z_2^*$
0	0	0 + 55 = 55	17 + 34 = 51	27 + 23 = 50					50	2
1	3	3 + 76 = 79	20 + 55 = 75	30 + 34 = 64	40 + 23 = 63				63	3
2	6	6 + 97 = 103	23 + 76 = 99	33 + 55 = 88	43 + 34 = 77	63 + 23 = 86			77	3
3	9	9 + 118 = 127	26 + 97 = 123	36 + 76 = 112	46 + 55 = 101	66 + 34 = 100	86 + 23 = 109		100	4
4	12	12 + 139 = 151	29 + 118 = 147	39 + 97 = 136	49 + 76 = 125	69 + 55 = 124	89 + 34 = 123	109 + 23 = 132	123	5



**Periodo 3:**  $D_3 = 4, x_4 = 0, 0 \leq z_3 \leq D_3 + x_4 = 4$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$						
		$z_3 = 0$	1	2	3	4	Solución óptima	
$x_4$	$h_3x_4$	$C_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	$z_3^*$
0	0	$0 + 123 = 123$	$16 + 100 = 116$	$26 + 77 = 103$	$36 + 63 = 99$	$56 + 50 = 106$	99	3

La solución óptima se lee como sigue:

$$(x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 3} \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow \boxed{z_2 = 3} \\ \rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 2}$$

Por lo tanto, la solución óptima es  $z_1^* = 2, z_2^* = 3$ , y  $z_3^* = 3$ , con un costo total de \$99.

### Momento de Excel

La plantilla *excelDPIInv.xls* está diseñada para resolver el problema de inventario de PD con hasta 10 periodos. El diseño de la hoja de cálculo es parecido al de *excelKnapsack.xls* dada en la sección 12.3.1, donde los cálculos se realizan etapa por etapa y se requiere que el usuario ingrese los datos para conectar las etapas sucesivas.

La figura 13.10 muestra la aplicación de *excelDPIInv.xls* al ejemplo 13.4-2. Los datos de entrada se ingresan para cada etapa. Los cálculos se inician con el periodo 1. Observe cómo se ingresa la función de costo  $c_i(z_i)$  en la fila 3: (G3 = 10, H3 = 20, I3 = 3) significa que el costo unitario es de \$10 para los primeros tres artículos y de \$20 para los artículos adicionales. Observe también que la cantidad ingresada para  $D_1$  debe ser la neta una vez que se ha amortizado el inventario inicial ( $=3 - x_1 = 3 - 1 = 2$ ). Además, tiene que crear los valores factibles de la variable  $z_1$ . La hoja de cálculo verifica de forma automática si los valores ingresados son correctos, y envía mensajes autoexplicativos en la fila 6 (sí, no, o borrar).

Una vez que se han ingresado todos los datos, los valores óptimos de  $f_i$  y  $z_i$  para la etapa se dan en las columnas S y T. Luego se crea un registro permanente de la solución para el periodo 1 ( $x_1, f_1, z_1$ ), en la sección de resumen de la solución óptima de la hoja de cálculo, como se muestra en la figura 13.10. Esto requiere copiar D9:D15 y S9:T15 y luego pegarlas mediante la opción *Pegado especial + valores* (quizá tenga que revisar el procedimiento para crear el registro permanente dado junto con *excelKnapsack.xls* en la sección 12.3.1).

A continuación, en preparación para la etapa 2, copie  $f_1$  del registro permanente y péguela en la columna A como se muestra en la figura 13.10. Todo lo que se requiere ahora es actualizar los datos de entrada para el periodo 2. El proceso se repite para el periodo 3.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4C

\*1. Considere el ejemplo 13.4-2.

(a) ¿Es lógico tener  $x_4 > 0$ ?

(b) Para cada uno de los dos casos siguientes, determine los intervalos factibles para  $z_1, z_2, z_3, x_1, x_2$  y  $x_3$ . (Verá que es útil representar cada situación como en la figura 13.10.)

**Periodo 1:**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z					
1	General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																													
2	I	Number of periods, N=	3	Current period=	1											Optimum solution														
3	N	K1=	2	K1=	1	C1(x1)=	10	20	3											Summary										
4	P	Period	1	2	3																									
5	U	Q1 to Q=	2	2	4																									
6	T	Are z1 values correct?		yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes					
7	Period 0	z1=	2	3	4	5	6	7	8											Optimum	Period 1									
8	I1	C1(x1)=	23	33	53	73	93	113	133																					
9	S	x1= 0	23	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
10	T	x1= 1	34	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
11	A	x1= 2	55	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
12	G	x1= 3	76	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
13	E	x1= 4	97	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
14		x1= 5	118	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
15	C	x1= 6	139	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					

**Periodo 2:**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z					
1	General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																													
2	Number of periods, N=		3	Current period=		2											Optimum solution Summary													
3	N	K2=	2	K2=	3	K2(x2)=	10	20	3																					
4	P	Period	1	2	3																									
5	U	Q1 to Q=	2	2	4																									
6	T	Are z2 values correct?		yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes					
7	Period 1		z2=	0	1	2	3	4	5	6											Optimum Period2									
8	I1		C2(x2)=	0	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	157	167	177	187	197	207	217					
9	S	z2=	0	50	51	50	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
10	T	z2=	1	79	75	84	63	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
11	A	z2=	2	103	99	88	77	86	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
12	G	z2=	3	127	123	112	101	100	109	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111	11111111					
13	E	z2=	4	151	147	136	126	128	123	132	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123	123					
14																														
15	C	130																												

**Periodo 3:**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z							
1	General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																															
2	I	Number of periods, N=	3	Current period=	3											Optimum solution Summary																
3	N	K3=	6	K3=	2	K3(x3)=	10	20	3																							
4	P	Period	1	2	3																											
5	U	Q1 to Q=	2	2	4																											
6	T	Are z3 values correct?		yes	yes	yes	yes	yes	yes											Optimum (Period 1)												
7		Period 2	z3=	8	1	2	3	4																								
8	I2	C3(x3)=	0	16	26	36	46											I2	z3	2	55	4	2	77	3							
9	S	x3=	0	50	123	116	103	99	108											99	3	3	76	5	3	100	4					
10	T																			4	97	6	4	123	5							
11	A																			5	116	7			Period 3							
12	G																			6	139	8	0	99								

FIGURA 13.10

Solución de PD del ejemplo 13.4-2 (archivo *excelDPIInv.xls*) obtenida con Excel

- (i)  $x_1 = 4$  y todos los datos restantes son los mismos.
- (ii)  $x_1 = 0, D_1 = 5, D_2 = 3$  y  $D_3 = 4$ .
2. \*(a) Encuentre la solución óptima del siguiente inventario de 4 periodos.

Periodo $i$	Demanda $D_i$ (unidades)	Costo de preparación $K_i$ (\$)	Costo de retención $h_i$ (\$)
1	5	5	1
2	2	7	1
3	3	9	1
4	3	7	1

El costo de producción unitario es de \$1 para cada una de las primeras 6 unidades y de \$2 para cada una de las unidades adicionales.

- (b) Verifique los cálculos usando *excelDPIInv.xls*.

3. Suponga que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* durante el periodo. Desarrolle la ecuación recursiva hacia adelante correspondiente.
4. Desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás o de retroceso para el modelo, y luego utilícela para resolver el ejemplo 13-4-2.
5. Desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás para el modelo, suponiendo que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* en el periodo.

**Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes.**

La PD general dada antes es aplicable con cualquier función de costo. Esta generalización dicta que el estado  $x_i$  y las alternativas  $z_i$  en la etapa  $i$  asumen valores en incrementos de 1, lo que podría dar lugar a tablas grandes cuando las cantidades demandadas son grandes.

Un caso especial del modelo de PD general promete reducir el volumen de los cálculos. En esta situación especial, tanto el costo de producción unitario como los costos de retención unitarios son funciones *no crecientes* (cóncavas) de la cantidad de producción y el nivel del inventario, respectivamente. Esta situación suele ocurrir cuando la función de costo unitario es constante o si se permite el descuento por cantidad.

En las condiciones dadas, se puede demostrar que<sup>4</sup>

1. Dado que un inventario inicial cero ( $x_i$ ) es óptimo para satisfacer la demanda en cualquier periodo  $i$  o con una nueva producción con inventario entrante, pero nunca con ambos; es decir,  $z_i x_i = 0$ . (En el caso de inventario inicial positivo,  $x_1 > 0$ , la cantidad puede amortizarse con las demandas de los periodos sucesivos hasta que se agote.)
2. La cantidad de producción óptima,  $z_i$ , durante el periodo  $i$  debe ser cero o satisfacer la demanda exacta de uno o más periodos subsiguientes contiguos.

---

**Ejemplo 13.4-3**

Un modelo de inventario de 4 periodos opera con los siguientes datos:

Periodo $i$	Demanda $D_i$ (unidades)	Costo de preparación $K_i$ (\$)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

El inventario inicial  $x_1$  es de 15 unidades, el costo de producción unitario es de \$2, y el costo de retención unitario es de \$1 durante todos los periodos. (Para simplificar, los costos de producción y retención unitarios son los mismos durante todos los periodos.)

La solución se determina por el algoritmo hacia adelante ya proporcionado, excepto que los valores de  $x_{i+1}$  y  $z_i$  ahora suponen sumas “concentradas” en lugar de con incrementos de uno. Debido a que  $x_1 = 15$ , la demanda del primer periodo se ajusta a  $76 - 15 = 61$  unidades.

---

<sup>4</sup>Vea H. Wagner y T. Whitin, “Dynamic Version of the Economic Lot Size Model”, *Management Science*, vol. 5, págs. 89-96, 1958. La comprobación de optimalidad impone la suposición restrictiva de funciones de costo constantes e idénticas durante todos los periodos. Más tarde, la suposición fue flexibilizada por A. Veinott Jr. para permitir funciones de costo cóncavas diferentes.

**Periodo 1:**  $D_1 = 61$ 

		$C_1(z_1) + h_1x_2$				Solución óptima	
		$z_1 = 61$	87	177	244		
$x_2$	$h_1x_2$	$C_1(z_1) = 220$	272	452	586	$f_1(x_2)$	$z_1^*$
0	0	220				220	61
26	26		298			298	87
116	116			568		568	177
183	183				769	769	244
Pedir en 1 para		1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4		

**Periodo 2.**  $D_2 = 26$ 

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$				Solución óptima	
		$z_2 = 0$	26	116	183		
$x_3$	$h_2x_3$	$C_2(z_2) = 0$	166	346	480	$f_2(x_3)$	$z_2^*$
0	0	0 + 298 = 298	166 + 220 = 386			298	0
90	90	90 + 568 = 658		436 + 220 = 656		656	116
157	157	157 + 769 = 926			637 + 220 = 857	857	183
Pedir en 2 para		—	2	2, 3	2, 3, 4		

**Periodo 3.**  $D_3 = 90$ 

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$				Solución óptima	
		$z_3 = 0$	90	157			
$x_4$	$h_3x_4$	$C_3(z_3) = 0$	365	499		$f_3(x_4)$	$z_3^*$
0	0	0 + 656 = 656	365 + 298 = 663			656	0
67	67	67 + 857 = 924		566 + 298 = 864		864	157
Pedir en 3 para		—	3	3, 4			

**Periodo 4.**  $D_4 = 67$ 

		$C_4(z_4) + h_4x_5 + f_3(x_5 + D_4 - z_4)$				Solución óptima	
		$z_4 = 0$	67				
$x_5$	$h_4x_5$	$C_4(z_4) = 0$	204			$f_4(x_5)$	$z_4^*$
0	0	0 + 864 = 864	204 + 656 = 860			860	67
Pedir en 4 para		—	4				

La política óptima se determina a partir de las tablas como sigue:

$$\begin{aligned}(x_5 = 0) &\rightarrow \boxed{z_4 = 67} \rightarrow (x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 0} \\ &\rightarrow (x_3 = 90) \rightarrow \boxed{z_2 = 116} \rightarrow (x_2 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 61}\end{aligned}$$

Esto da  $z_1^* = 61, z_2^* = 116, z_3^* = 0$ , y  $z_4^* = 67$ , a un costo total de \$860.

### Momento de Excel

La plantilla *excelWagnerWhitin.xls* es semejante a la del modelo general *excelDPlnv.xls*. La única diferencia es que las sumas concentradas se utilizan para el estado  $x$  y la alternativa  $z$ . Además, por sencillez, la nueva hoja de cálculo no permite el descuento por cantidad. La plantilla está limitada a un máximo de 10 periodos. Recuerde utilizar la opción *Pegado especial + valores* cuando cree el resumen de la solución de resultados (columnas Q:V).

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4D

- \*1. Resuelva el ejemplo 13.4-3, suponiendo que el inventario inicial es de 80 unidades. Puede utilizar la plantilla *excelWagnerWhitin.xls* para verificar sus cálculos.
2. Resuelva el siguiente modelo de inventario determinístico de 10 periodos. Suponga un inventario inicial de 50 unidades.

Periodo $i$	Demanda $D_i$ (unidades)	Costo de producción unitario (\$)	Costo de retención unitario (\$)	Costo de preparación (\$)
1	150	6	1	100
2	100	6	1	100
3	20	4	2	100
4	40	4	1	200
5	70	6	2	200
6	90	8	3	200
7	130	4	1	300
8	180	4	4	300
9	140	2	2	300
10	50	6	1	300

3. Encuentre la política de inventario óptima para el siguiente modelo de 5 periodos. El costo de producción unitario es de \$10 para todos los periodos. El costo de retención unitario es de \$1 por periodo.

Periodo $i$	Demanda $D_i$ (unidades)	Costo de preparación $K_1$ (\$)
1	50	80
2	70	70
3	100	60
4	30	80
5	60	60

4. Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario de 6 periodos: El costo de producción unitario es de \$2 para todos los periodos.

Periodo $i$	$D_i$ (unidades)	$K_i$ (\$)	$h_i$ (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

**Heurística Silver Meal.** Esta heurística es válida sólo cuando el costo de producción unitario es constante e idéntico para todos los periodos. Por esta razón sólo balancea los costos de preparación y retención.

La heurística identifica los periodos futuros sucesivos cuya demanda puede ser satisfecha a partir de la producción del periodo actual. El objetivo es minimizar los costos de preparación y retención asociados por periodo.

Suponga que producimos en el periodo  $i$  para los periodos  $i, i + 1, \dots$ , y  $t, i \leq t$ , y definimos  $TC(i, t)$  como los costos de preparación y retención asociados para los mismos periodos. Utilizando la misma anotación de los modelos de PD, tenemos

$$TC(i, t) = \begin{cases} K_i, & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1}) D_{i+2} + \dots + \left( \sum_{k=i}^{t-1} h_k \right) D_t, & t > i \end{cases}$$

Luego definimos  $TCU(i, t)$  como el costo por periodo asociado; es decir,

$$TCU(i, t) = \frac{TC(i, t)}{t - i + 1}$$

Dado un periodo actual  $i$ , la heurística determina  $i^*$  que minimiza el  $TCU(i, t)$ .

La función  $TC(i, t)$  se calcula recursivamente como

$$TC(i, i) = K_i$$

$$TC(i, t) = TC(i, t - 1) + \left( \sum_{k=i}^{t-1} h_k \right) D_t, t = i + 1, i + 2, \dots, n$$

**Paso 0.** Establezca  $i = 1$ .

**Paso 1.** Determine el mínimo local  $t^*$  que satisfaga las dos condiciones siguientes:

$$TCU(i, t^* - 1) \geq TCU(i, t^*)$$

$$TCU(i, t^* + 1) \geq TCU(i, t^*)$$

La heurística requiere que se pida la cantidad  $(D_i + D_{i+1} + \dots + D_{i^*})$  en el periodo  $i$  para los periodos  $i, i + 1, \dots$ , y  $t^*$ .

**Paso 2.** Establezca  $i = t^* + 1$ . Si  $i > n$ , deténgase; ya se ha cubierto todo el horizonte de planeación. De lo contrario, vaya al paso 1.

#### Ejemplo 13.4-4

Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario de 6 periodos:

Periodo $t$	$D_i$ (unidades)	$K_i$ (\$)	$h_i$ (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

El costo de producción unitario es de \$2 para todos los periodos.

**Iteración 1 ( $i = 1$ ),  $K_1 = \$20$ ).** La función  $TC(1, t)$  se calcula recursivamente en  $t$ . Por ejemplo, dada  $TC(1, 1) = \$20$ ,  $TC(1, 2) = TC(1, 1) + h_1 D_2 = 20 + (1 \times 15) = \$35$ .

Periodo $t$	$D_i$	$TC(1, t)$	$TCU(1, t)$
1	10	\$20	$\frac{20}{1} = \$20.00$
2	15	$20 + 1 \times 15 = \$35$	$\frac{35}{2} = \$17.50$
3	7	$35 + (1 + 1) \times 7 = \$49$	$\frac{49}{3} = \boxed{\$16.33}$
4	20	$49 + (1 + 1 + 1) \times 20 = \$109$	$\frac{109}{4} = \$27.25$

El mínimo local ocurre en  $t^* = 3$ , lo que requiere pedir  $10 + 15 + 7 = 32$  unidades en el periodo 1 para los periodos 1 a 3. Establezca  $i = t^* + 1 = 3 + 1 = 4$ .

**Iteración 2 ( $i = 4$ ,  $K_4 = \$18$ ).**

Periodo $t$	$D_i$	$TC(4, t)$	$TCU(4, t)$
4	20	\$18	$\frac{18}{1} = \boxed{\$18.00}$
5	13	$18 + 3 \times 13 = \$57$	$\frac{57}{2} = \$28.50$

Los cálculos muestran que  $t^* = 4$ , el cual requiere pedir 20 unidades en el periodo 4 para el periodo 4. Establezca  $i = 4 + 1 = 5$ .

**Iteración 3 ( $i = 5$ ,  $K_5 = \$5$ )**

Periodo $t$	$D_r$	$TC(5, t)$	$TCU(5, t)$
5	13	\$5	$\frac{5}{1} = \boxed{\$5}$
6	25	$5 + 1 \times 25 = \$30$	$\frac{30}{2} = \$15$



El mínimo ocurre en  $t^* = 5$ , que requiere pedir 13 unidades en el periodo 5 para el periodo 5. Luego establecemos  $i = 5 + 1 = 6$ . Sin embargo, como  $i = 6$  es el último periodo del horizonte de planificación, debemos pedir 25 unidades en el periodo 6 para el periodo 6.

**Comentarios.** La siguiente tabla compara la solución heurística y la solución de PD exacta. Hemos eliminado el costo de producción unitario en el modelo de programación dinámica porque no está incluido en los cálculos heurísticos.

Periodo	Heurística		Programación dinámica	
	<i>Unidades producidas</i>	<i>Costo (\$)</i>	<i>Unidades producidas</i>	<i>Costo (\$)</i>
1	32	49	10	20
2	0	0	22	24
3	0	0	0	0
4	20	18	20	18
5	13	5	38	30
6	25	50	0	0
Total	90	122	90	92

Los costos del programa de producción heurístico son alrededor de 32% más que los de la solución de PD (\$122 vs. \$92). El desempeño “inadecuado” de la heurística puede atribuirse a la naturaleza de los datos, ya que el problema puede quedar en los valores de costo de preparación extremos para los periodos 5 y 6. No obstante, el ejemplo muestra que la heurística no tiene la capacidad de “mirar hacia adelante” en busca de mejores oportunidades de programación. Por ejemplo, si pedimos en el periodo 5 para los periodos 5 y 6 (en lugar de pedir para cada periodo por separado) podemos ahorrar \$25, lo que reducirá el costo heurístico total a \$97.

### Momento de Excel

La plantilla *excelSilverMeal.xls* está diseñada para realizar todos los cálculos iterativos y proporcionar la solución final. El procedimiento se inicia con el ingreso de los datos necesarios para realizar los cálculos, incluyendo  $N$ ,  $K$ ,  $h$  y  $D$  para todos los periodos (estos ingresos aparecen resaltados en color turquesa en la hoja de cálculo). El usuario debe iniciar entonces cada iteración manualmente hasta que se hayan cubierto todos los periodos.

La figura 13.11 muestra la aplicación de la heurística Excel al ejemplo 13.4-4. La primera iteración se inicia ingresando el valor 1 en la celda J11, señalando que la iteración 1 se inicia en el periodo 1. La hoja de cálculo generará entonces tantas filas cuantos periodos  $N$  (=6 en este ejemplo). El número del periodo aparecerá en orden ascendente en las K11:K16. Ahora examinamos el TCU en la columna P (resaltado en color turquesa) y localizamos el periodo que corresponde al mínimo local en  $t = 3$  con TCU = \$16.33. Esto significa que la siguiente iteración se iniciará en el periodo 4. Ahora, deje una fila en blanco e ingrese el valor 4 en J18. Esta acción, la cual produce los cálculos en la iteración 2, muestra que su mínimo local aparecerá en el periodo 4 (TCU = \$18.00) y señala el inicio de la iteración en el periodo 5. De nueva cuenta, ingresando 5 en J22, el mínimo local para la iteración 3 ocurre en el nodo 5. Luego, ingresando el valor de 6 en J25 se produce la iteración de terminación del problema. La hoja de cálculo actualizará automáticamente la política óptima asociada y su costo total, como se muestra en la figura 13.11.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	Modelo de inventario heurístico Silver Medal													
2	Datos de entrada:													
3	Número de periodos, N =	6	<< Máximo 14 periodos											
4	Periodo t =	1	2	3	4	5	6							
5	Costo de preparación, K =	20	17	10	18	5	50							
6	Costo de retención, ht =	1	1	1	1	1	1							
7	Demanda, Dt =	10	15	7	20	13	25							
8														
9	Solución completa	Cálculos del modelo (Borrar la columna J manualmente)						Solución óptima (Costo total = \$122.00)						
10	Iniciar iteración en el periodo	Periodo	$D_t$	$\sum D_t$	$\sum A_t$	TC	TCU							
11	1	1	10	10	0.00	20.00	20.00							
12		2	15	25	1.00	35.00	17.50							
13		3	7	32	2.00	49.00	16.33							
14		4	20	52	3.00	109.00	27.25							
15		5	13	65	6.00	187.00	37.40							
16		6	25	90	7.00	362.00	60.33							
17														
18	4	4	20	20	0.00	10.00	10.00							
19		5	13	33	3.00	57.00	28.50							
20		6	25	58	4.00	157.00	52.33							
21														
22	5	5	13	13	0.00	5.00	5.00							
23		6	25	38	1.00	30.00	15.00							
24														
25	6	6	25	25	0.00	50.00	50.00							

FIGURA 13.11

Solución del ejemplo 13.4-4 obtenida con Excel por medio de heurística Silver-Meal (archivo *ExcelSilver-Medal.xls*)

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4E

- \*1. La demanda de cañas de pescar es mínima durante el mes de diciembre y máxima durante el mes de abril. Fishing Hole, Inc. estima que la demanda en diciembre es de 50 cañas. Se incrementa en 10 cañas cada mes hasta que llega a 90 en abril. De ahí en adelante, la demanda se reduce a razón de 5 cañas por mes. El costo de preparación de un lote de producción es de \$250, excepto durante los meses de demanda máxima de febrero a abril, donde se incrementa a \$300. El costo de producción por caña se mantiene aproximadamente constante en \$15 a lo largo del año, y el costo de retención por mes es de \$1. Fishing Hole está desarrollando el plan de producción del año siguiente (enero a diciembre). ¿Cómo debe programar sus instalaciones de producción?
2. Una pequeña casa editora reimprime una novela para satisfacer la demanda durante los siguientes 12 meses. Las estimaciones de la demanda en meses sucesivos son 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80, 85, 100 y 110. El costo de preparación para reimprimir el libro es de \$200.00 y el costo de retención por libro por mes es de \$1.20. Determine el programa de reimpresión óptimo.

### BIBLIOGRAFÍA

- Bishop, J., "Experience with a Successful System for Forecasting and Inventory Control", *Operations Research*, vol. 22, núm. 6, págs. 1224-1231, 1974.
- Edwards, J., H. Wagner, y W. Wood, "Blue Bell Trims Its Inventory", *Interfaces*, vol. 15, núm. 1, págs. 34-52, 1985.

Lewis, T., “Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves”, *Interfaces*, vol. 26, núm. 5, págs. 34-41, 1996.

Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, 5a. ed., Irwin, Homewood, IL, 2005.

Silver, E., D. Pyke, y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.

Tersine, R., *Principles of Inventory and Materials Management*, 3a. ed., North Holland, Nueva York, 1988.

Waters, C., *Inventory Control and Management*, Wiley, Nueva York, 1992.