TABLA DE CONTENIDO

UNIDAD 2 METODOS DE EVALUACIÓN ECONOMICA E ALTERNATIVAS 2

2.1.3 Factor de fondo de amortización y factor de cantidad compuesta para una serie uniforme $(\boldsymbol{A/F}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{F/A})$ 2

2.1.4 Valores de los factores para valores de $\boldsymbol{i}$ o $\boldsymbol{n}$ que no se encuentran en las tablas 3

2.1.5 Factores de gradiente aritmético (P/G y A/G) 6

UNIDAD 2 METODOS DE EVALUACIÓN ECONOMICA E ALTERNATIVAS

PROFESOR: ING. CESAR NEFTALI SAENZ ROMERO

2.1.3 Factor de fondo de amortización y factor de cantidad compuesta para una serie uniforme $(A/F\ y\ F/A)$

La expresión entre corchetes de la ecuación (2.12) es el factor de fondo de amortización o A/F, el cual determina la serie de valor anual uniforme equivalente a un valor futuro determinado F, lo cual se muestra gráficamente en la figura 2-6a)

$$\boldsymbol{A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]} \qquad (2.12)$$

La serie uniforme A se inicia al **final del año (periodo) 1** y continúa **a lo largo del periodo de la F dada**. El último valor de A y F ocurre al mismo tiempo.

La ecuación (2.12) puede reordenarse para encontrar F para una serie A dada en los periodos 1 a n (figura 2-6b).

$$\boldsymbol{F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \qquad (2.13)$$

El término entre corchetes se denomina *factor de cantidad compuesta de una serie uniforme* (FCCSU), o **factor F/A.** Cuando se multiplica por la cantidad anual uniforme A dada, produce **el valor futuro de la serie uniforme**. Es importante recordar que la cantidad futura F ocurre durante el mismo periodo que la última A. La notación estándar sigue la misma forma que la de los otros factores. Éstas son $(F/A, i, n)\ y\ (A/F, i, n)$. La tabla 2-3 resume las notaciones y las ecuaciones.

Cabe observar que los factores de series uniformes se determinan simbólicamente mediante una forma de factor abreviada. Por ejemplo, $F/A = (F/P)\,(P/A)$, donde la cancelación de la P es correcta.

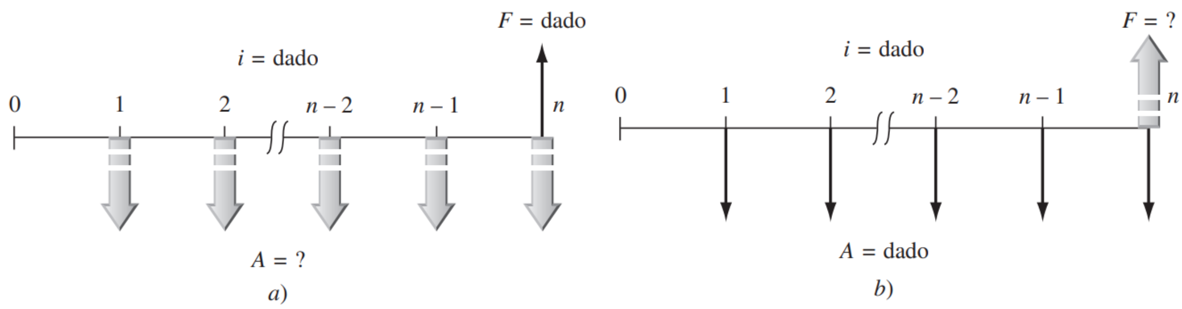


Figura 2-6 Diagramas de flujo de efectivo para encontrar a) A, dado F, y b) F, dado A

TABLA 2-3 Factores F/A y A/F. Notación y ecuaciones

Factor		Encontrar/	Fórmula	Ecuación con	Funciones
Notación	Nombre	Dado	del factor	notación estándar	de Excel
$(F/A,i,n)$	Cantidad compuesta, serie uniforme	F/A	$\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$F = A(F/A,i,n)$	= VF(i%,n,A)
$(A/F,i,n)$	Fondo de amortización	A/F	$\frac{i}{(1+i)^n-1}$	$A = F(A/F,i,n)$	= PAGO(i%,n,F)

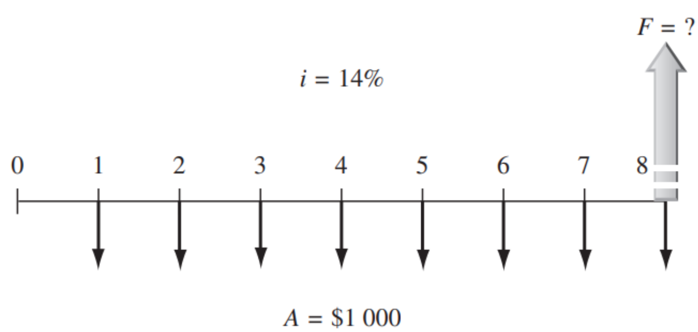
EJEMPLO 2.5

El presidente de Ford Motor Company quiere saber el valor futuro equivalente de una inversión de capital de $1 millón cada año durante ocho años, empezando un año a partir de ahora. El capital de Ford gana a una tasa de 14% anual.

Solución

El diagrama de flujo de efectivo (figura 2-7) muestra los pagos anuales que inician al final del año 1 y terminan en el año en que se desea calcular el valor futuro. Los flujos de efectivo se indican en unidades de $1 000. El valor F en ocho años se obtiene con el factor F/A.

Figura 2-7 Diagrama para encontrar F en una serie uniforme, ejemplo 2.5



$$F = 1\,000(F/A, 14\%, 8) = 1\,000(13.2328) = \$13\,232.80$$

2.1.4 Valores de los factores para valores de i o n que no se encuentran en las tablas

Con frecuencia es necesario determinar el valor de un factor i o n que no se encuentra en las tablas de interés compuesto. Con valores específicos de i y n hay varias formas de obtener cualquier valor del factor:

- Usar la fórmula que definen a cada factor.
- Emplear una función de Excel con el valor correspondiente de P, F o A
- Usar interpolación lineal en las tablas de interés.

La interpolación lineal introduce cierto error que depende de la distancia entre los dos valores extremos seleccionados para i o para n, pues las fórmulas son funciones no lineales. Para una descripción gráfica de la explicación que sigue, consulte la figura 2-10. En primer lugar, seleccione dos valores tabulados ($x1$ y $x2$) del parámetro para el cual se requiera el factor, es decir, i o n, asegurándose de que entre ambos valores se localice el valor desconocido, x, y que no estén demasiado lejos de él. En segundo lugar, encuentre los valores tabulados correspondientes ($f1$ y $f2$). En tercer lugar, despeje el valor f desconocido, interpolado linealmente con la fórmula siguiente, donde las diferencias entre paréntesis se denotan en la figura 2-10 como a a c.

Matemáticamente la interpolación se puede expresar como:

$$f = f_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) \qquad (2.16)$$

$$f = f_1 + \frac{a}{b}c = f_1 + d \qquad (\mathbf{2.17})$$

El valor de d será positivo o negativo si el factor aumenta o disminuye de valor entre $x1$ y $x2$, respectivamente.

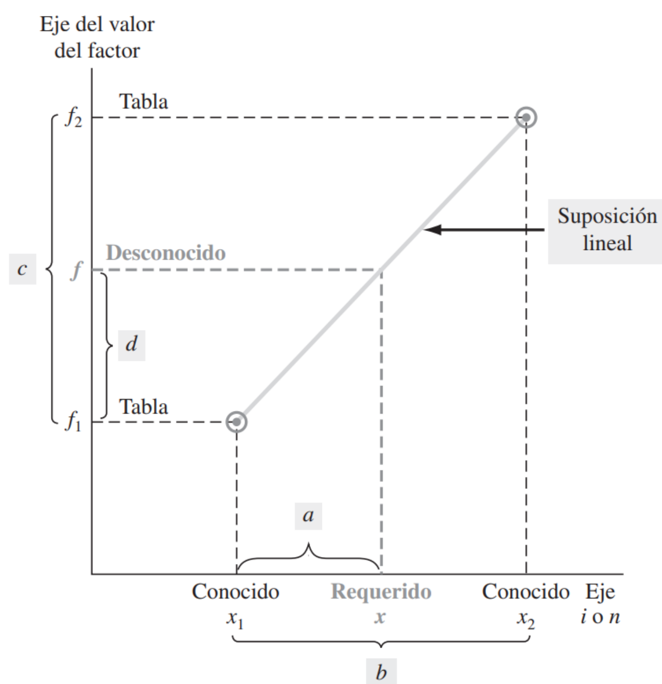


Figura 2-10 Interpolación lineal con las tablas de valores de los factores

EJEMPLO 2.7

Determine el valor del factor P/A para una tasa de interés de 7.75% y $n = 10$ años, usando las fórmulas de los factores correspondiente e interpolación.

Solución

Fórmula del factor: Se aplica la fórmula para el factor P/A. Se usan cinco decimales.

$$(P/A\ ,7.75\%, 10) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1.0775)^{10} - 1}{0.0775(1.0775)^{10}} = \frac{1.10947}{0.16348} = \mathbf{6.78641}$$

Interpolación lineal: Use la figura 2-10 como referencia para obtener la solución. Aplique la secuencia de las ecuaciones (2.16) y (2.17), donde x es la tasa de interés i, las tasas de los extremos son i_1 = 7% e i_2 = 8%, y los valores correspondientes del factor P/A son $f_1 = (P/A, 7\%, 10) = 7.0236$ y $f_2 = (P/A, 8\%, 10) = 6.7101$. Con cuatro decimales se obtiene.

$$f = f_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) = 7.0236 + \frac{(7.75 - 7)}{(8 - 7)}(6.7101 - 7.0236)$$

$$= 7.0236 + (0.75)(-0.3135) = 7.0236 - 0.2351 = 6.7885$$

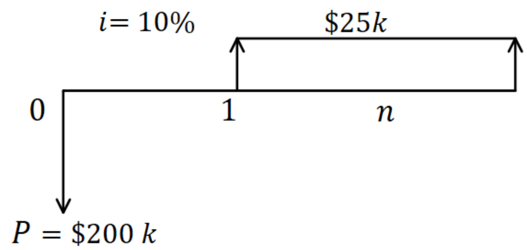
Observe que, como el valor del factor P/A disminuye a medida que el de i se incrementa, el ajuste lineal es negativo en −0.2351. Como es evidente, la interpolación lineal proporciona una aproximación al valor correcto del factor para 7.75% y 10 años, además de que requieren más cálculos que el uso de la fórmula o de las funciones de una hoja de cálculo. Es posible realizar interpolación lineal de segundo grado para valores no tabulados de i o n, sin embargo, es más recomendable emplear una hoja de cálculo o la fórmula del factor.

La utilidad de la interpolación es más evidente al resolver problemas donde se desconoce variables como n como se presenta el ejemplo 2.8.

EJEMPLO 2.8

Una empresa compra un terreno en $200 000 para ello realiza una hipoteca al 10% de interés anual, se realizaron pagos de $25 0000 cada fin de año comenzando un año después de firmada la hipoteca. ¿Cuánto tiempo necesitara la empresa para cancelar la deuda?

Solución



Aplicamos el facto P/A para llevar todo al año 0:

$$P = A(P/A, i, n)$$

$$200k = 25k(P/A, 10\%, n)$$

$$\frac{200k}{25k} = 25k(P/A, 10\%, n)$$

$$8.0 = (P/A, 10\%, n)$$

El cantidad 8 representa el valor de P/A a una tasas de interés de 10% para n años, ahora buscamos en las tablas de interés compuesto para ese factor y esa tasa de interés un valor superior más cercano y un valor inferior más cercano a 8 los cuales serán nuestros límite superior e inferior respectivamente.

P/A	n
7.8237	16
8	x
8.0216	17

Definidas estas cantidades podemos interpolar para encontrar el valor de x.

$$\frac{8 - 7.8237}{8.0216 - 7.8237} = \frac{x - 16}{17 - 16}$$

$$0.8909 = \frac{x - 16}{17 - 16}$$

$$0.8909 = x - 16$$

$$x = 16.89$$

Comprobación

Si se aplicamos la formula correspondiente para el facto P/A podemos observar que el valor obtenido está muy cercano al real por lo que podemos considerarlos iguales :

$$(P/A\ \ ,10\%, 16.89) = \frac{(1 + 0.1)^{16.89} - 1}{(0.1)(1 + 0.1)^{16.89}} = 8.0007 = 8.0$$

2.1.5 Factores de gradiente aritmético (P/G y A/G)

Suponga que un ingeniero de manufactura pronostica que el costo del mantenimiento de un robot aumentará $5 000 cada año hasta que la máquina llegue al final de su vida útil.

La serie del flujo de efectivo para el mantenimiento involucra entonces un gradiente constante de $5 000 por año.

Un **gradiente aritmético** es una serie de flujos de efectivo que aumenta o disminuye en una cantidad **constante en cada periodo**. La cantidad del cambio se llama **gradiente.**

Las fórmulas desarrolladas antes para una serie A tienen cantidades de final de año de igual valor. En el caso de un gradiente, el flujo de efectivo de cada final de año es diferente, de manera que es preciso derivar nuevas fórmulas. Primero suponga que el flujo de efectivo al final del año 1 es **una cantidad base** de la serie de flujo de efectivo, por lo que *no forma parte de la serie del gradiente*. Esto es conveniente porque en las aplicaciones reales la cantidad base suele ser mayor o menor que el aumento o la disminución del gradiente. Por ejemplo, si una persona compra un automóvil usado con garantía de un año, se esperaría que durante el primer año de operación tuviera que pagar tan sólo la gasolina y el seguro. Suponga que dicho costo es $2 500; es decir, $2 500 es la cantidad base. Después del primer año, la persona debe solventar el costo de las reparaciones, y razonablemente se esperaría que tales costos aumentaran cada año. Si se estima que los costos totales aumentarán $200 cada año, la cantidad al segundo año sería $2 700, al tercero, $2 900, y así sucesivamente hasta el año n, cuando el costo total sería $2 500 + (n − 1)200. En la figura 2-11 se muestra el diagrama de flujo de efectivo de esta operación. Observe que el gradiente ($200) aparece por primera vez entre los años 1 y 2, y la cantidad base ($2 500 en el año 1) no es igual al gradiente.

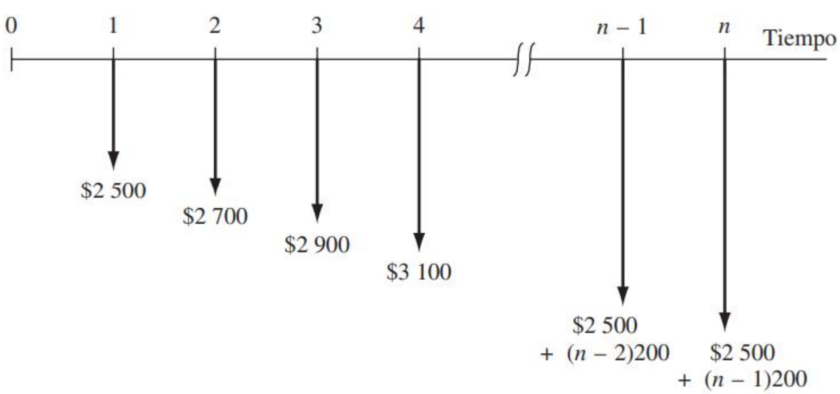


Figura 2-11
Diagrama de flujo de efectivo de una serie con gradiente aritmético.

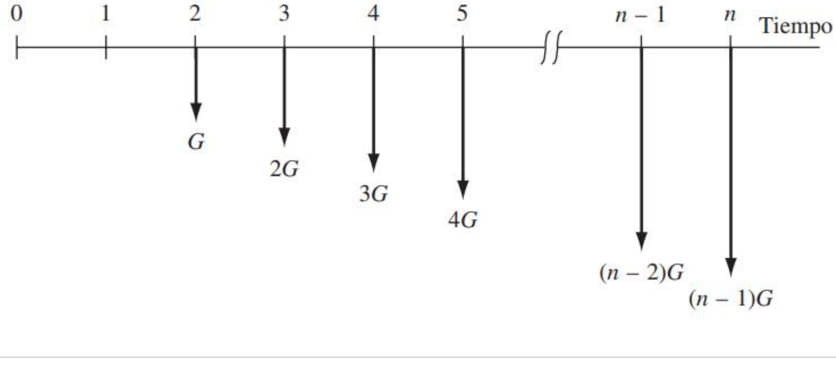


Figura 2-12
Serie con gradiente aritmético convencional sin la cantidad base.

Defina los símbolos G de gradiente y CF_n de flujo de efectivo en un año n como sigue.

G = cambio aritmético constante de los flujos de efectivo de un periodo al siguiente; G puede ser positivo o negativo.

$$\boldsymbol{CF_n = cantidad\ base + (n - 1)G} \qquad (\mathbf{2.18})$$

Es importante darse cuenta de que la cantidad base define una serie uniforme de flujo de efectivo de tamaño A que ocurre en cada periodo. Con este dato se calculan cantidades equivalentes que implican gradientes aritméticos. Si se ignora la cantidad base, el diagrama de flujo de efectivo generalizado de gradiente aritmético (creciente) es como el de la figura 2-12. Observe que el gradiente empieza entre los años 1 y 2; se le denomina **gradiente convencional.**

EJEMPLO 2.9

Una universidad local inició un programa de franquicia del logotipo de la empresa de ropa Holister, Inc. Espera obtener derechos (ingresos) de $80 000 por derechos el primer año con aumentos uniformes hasta obtener un total de $200 000 en nueve años. Determine el gradiente aritmético y construya el diagrama de flujo de efectivo en el que se identifiquen la cantidad base y la serie del gradiente.

Solución

La cantidad base en el año 1 es $CF_1 = \$80\,000$, y el aumento total de ingresos durante 9 años es:

$$CF_9 - CF_1 = 200\,000 - 80\,000 = \$120\,000$$

Al despejar G en la ecuación (2.18) se determina el gradiente aritmético.

$$G = \frac{(CF_9 - CF_1)}{n - 1} = \frac{120\,000}{9 - 1} = \$15\,000$$

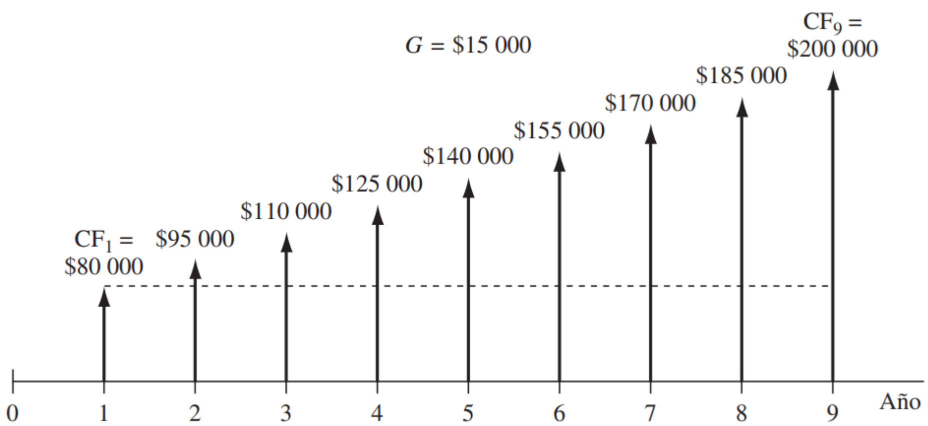


Figura 2-13 Diagrama de la serie del gradiente, ejemplo 2.9

El diagrama de flujo de efectivo de la figura 2-13 muestra la cantidad base de $80 000 en los años 1 a 9, así como el gradiente de $15 000 que comienza en el año 2 y continúa hasta el año 9.

El valor presente total, P_T, para una serie que incluya una cantidad base A y un gradiente aritmético convencional debe tomar en cuenta el valor presente tanto de la serie uniforme definida por A como de la serie del gradiente aritmético. La suma de los dos resultados hace que:

$$\boldsymbol{P_T = P_A \pm P_G} \qquad (\mathbf{2.19})$$

Donde P_A es el valor presente de la serie uniforme únicamente, P_G sólo es el valor presente de la serie del gradiente, y el signo + o − se utiliza para un gradiente que aumente (+G) o disminuya (−G), respectivamente. El valor anual equivalente que corresponde, $\boldsymbol{A_T}$, es la suma del valor de la serie de la cantidad base, $\boldsymbol{A_A}$, y el del valor de la serie del gradiente, $\boldsymbol{A_G}$, es decir,

$$\boldsymbol{A_T = A_A \pm A_G} \qquad (\mathbf{2.20})$$

En el presente texto se obtienen tres factores para los gradientes aritméticos: el factor P/G para el valor presente, el factor A/G para la serie anual y el factor F/G para el valor futuro.

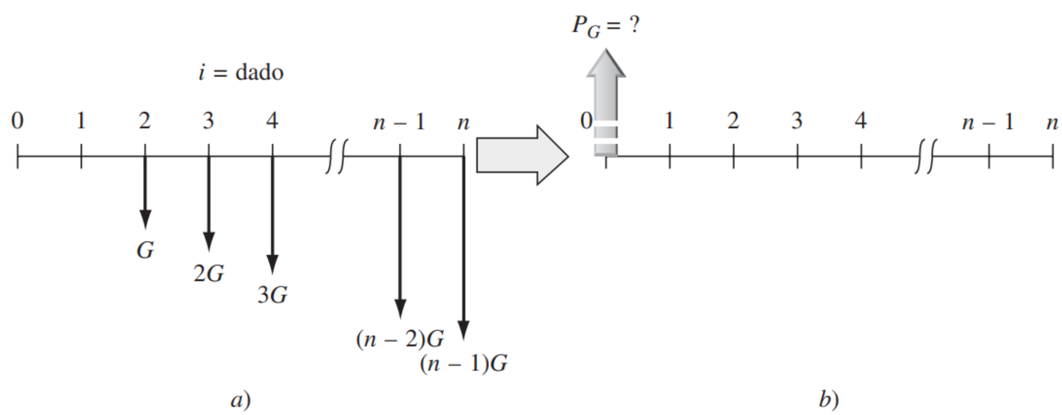


Figura 2-14 Diagrama de conversión de un gradiente aritmético a un valor presente.

$$\boldsymbol{P_G = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]} \qquad (\mathbf{2.24})$$

La ecuación (2.24) es la relación general para **convertir un gradiente aritmético G (sin incluir la cantidad base**) **para n años en un valor presente en el año 0**. La figura 2.14a) se convierte en el flujo de efectivo equivalente que se indica en la fi gura 2.14b). *El factor de valor presente de gradiente aritmético*, o factor P/G, puede expresarse de dos formas:

$$\boldsymbol{(P/G,i,n)=\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]}$$

o

$$\boldsymbol{(P/G,i,n)=\frac{(1+i)^n-in-1}{i^2(1+i)^n}} \qquad \boldsymbol{(2.25)}$$

Recuerde: el gradiente aritmético convencional empieza en el año 2 y P está en el año 0

La ecuación (2.24), expresada como una relación de ingeniería económica, es:

$$\boldsymbol{P_G = G(P/G,i,n)} \qquad \boldsymbol{(2.26)}$$

La serie uniforme equivalente A_G para un gradiente aritmético G se obtiene al multiplicar el valor presente de la ecuación (2.26) por la fórmula de $(A/P,i,n)$. En forma de notación estándar, el equivalente de la cancelación algebraica de P se utiliza para obtener el factor $(A/G,i,n)$.

$$AG = G(P/G,i,n)(AP,i,n)$$

$$\boldsymbol{AG = G(A/G,i,n)}$$

En forma de ecuación,

$$A_G=\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\boldsymbol{A_G=G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right]} \qquad \boldsymbol{(2.27)}$$

Que es el término de la derecha de la ecuación (2.20). La expresión entre corchetes en la ecuación (2.27) se denomina factor de gradiente aritmético de una serie uniforme y se identifica por $(A/G,i,n)$. Este factor convierte la figura 2-15a) en la fi gura 2-15b).

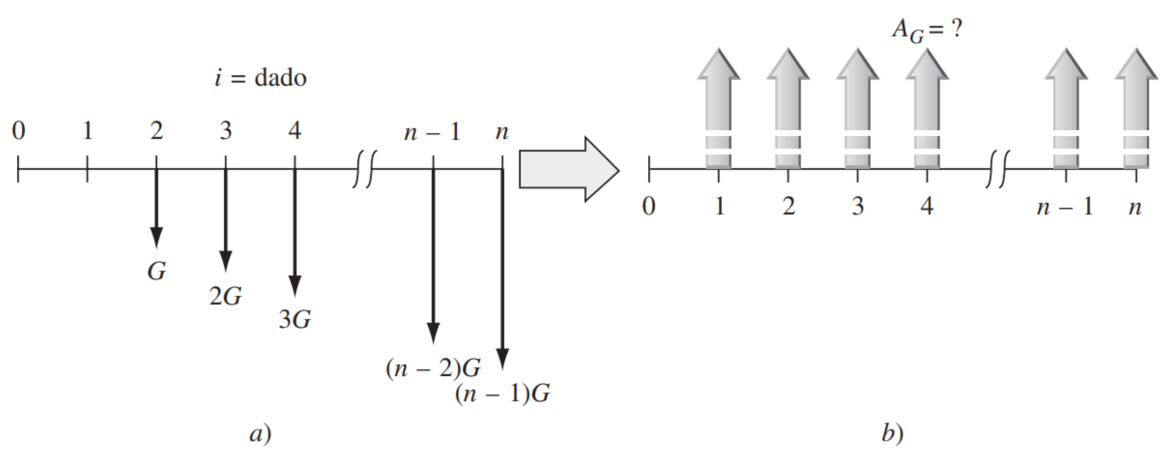


Figura 2-15 Diagrama de conversión de una serie de gradiente aritmético en otra serie equivalente uniforme anual.

Se obtiene un factor F/G (*factor gradiente aritmético, valor futuro*) para calcular el valor futuro $\boldsymbol{F_G}$ de una serie gradiente al multiplicar los factores P/G y F/P. El factor resultante, $(F/G, i, n)$, entre corchetes, y la relación de ingeniería económica es:

$$\boldsymbol{F_G = G\left[\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) - n\right]}$$

$$\boldsymbol{F_G = G(F/G, i, n)} \qquad (\mathbf{2.28})$$