TABLA DE CONTENIDO

UNIDAD 2: METODOS DE EVALUACIÓN ECONOMICA E ALTERNATIVAS

PROFESOR: ING. CÉSAR NEFTALÍ SÁENZ ROMERO

2 Presentación de unidad 2

En esta unidad aprenderemos a obtener y usar los factores de ingeniería económica que incorporan el valor del dinero en el tiempo y aplicar las diferentes técnicas de evaluación de alternativas como, Costo Anual, el valor presente, la tasa de rendimiento y la técnica de Beneficio / Costo.

2.1 Factores: cómo el tiempo y el interés afectan al dinero

El flujo de efectivo resulta fundamental en todo estudio económico. Los flujos de efectivo ocurren en muchas configuraciones y cantidades: valores únicos aislados, series uniformes y series que aumentan o disminuyen en cantidades o porcentajes constantes. n esta unidad realiza deducciones para todos los factores comunes en la ingeniería económica que toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo. La aplicación de los factores se ilustra con sus formas matemáticas y un formato de notación estándar. Se incluyen las funciones de las hojas de cálculo para trabajar de manera rápida con las series de flujo de efectivo y elaborar análisis de sensibilidad.

2.1.1 Factores para una cantidad única (F/P y P/F)

El factor fundamental en ingeniería económica es el que determina la cantidad de dinero F que se acumula después de n años (o periodos) a partir de un valor único presente P con interés compuesto una vez por año (o por periodo). Recuerde que el interés compuesto se refiere al interés pagado sobre el interés. Por consiguiente, si una cantidad P se invierte en algún momento $t = 0$, la cantidad de dinero F_1 acumulada en un año a partir del momento de la inversión con una tasa de interés de i por ciento anual será:

$$F_1 = P + Pi = P(1 + i) \qquad (2.1)$$

Donde la tasa de interés se expresa en forma decimal. Al final del segundo año, la cantidad de dinero acumulada F_2 es la cantidad acumulada después del año 1 más el interés desde el final del año 1 hasta el final del año 2 sobre la cantidad total F_1.

$$F_2 = F_1 + F_1 i = P(1 + i) + P(1 + i)i$$

La cantidad F_2 se expresa como:

$$F_2 = P(1 + i + i + i^2) = P(1 + 2i + i^2) = P(1 + i)^2$$

En forma similar, la cantidad de dinero acumulada al final del año 3, si se utiliza la ecuación (2.1), será:

$$F_3 = F_2 + F_2 i$$

Al sustituir $P(1 + i)^2$ por F_2 y simplificar, se obtiene:

$$F_3 = P(1 + i)^3$$

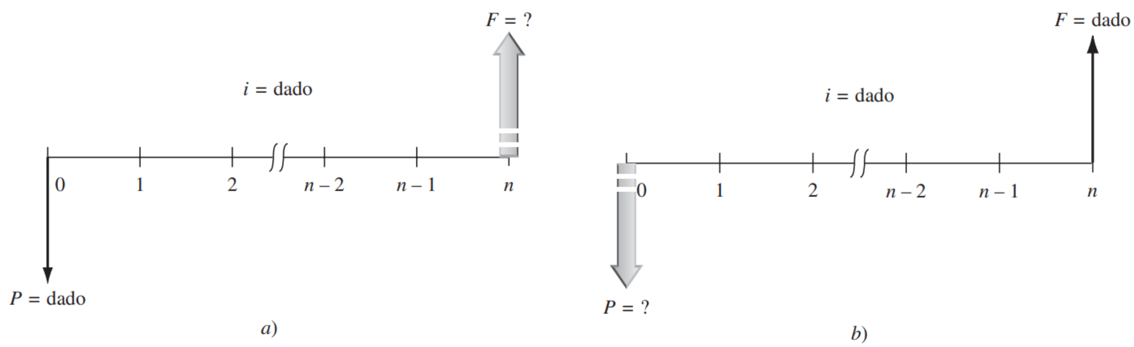


Figura 2-1 Diagramas de flujo de efectivo para factores de pago único: a) Calcular F dado P y b) calcular P dado F.

De acuerdo con los valores anteriores, por inducción matemática es evidente que la fórmula puede generalizarse para n años. Para calcular F, dado P.

$$\boldsymbol{F = P(1 + i)^n} \qquad \textbf{(2.2)}$$

El factor $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$ se denomina *factor de cantidad compuesta de pago único* (FCCPU), pero en general se le conoce como factor $\boldsymbol{F/P}$. Éste es el factor de conversión que, cuando se multiplica por P, produce la cantidad futura F de una inversión inicial P después de n años, con la tasa de interés i. El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.1a).

Invierta la situación para calcular el valor P para una cantidad dada F que ocurre n periodos en el futuro. Tan sólo resuelva la ecuación (2.2) para P.

$$P = F\left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right] = F(1 + i)^{-n} \qquad (2.3)$$

La expresión $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}$ se conoce como *el factor de valor presente de pago único* (FVPPU), o factor P/F. Tal expresión determina el valor presente P de una cantidad futura dada F, después de n años con una tasa de interés i. En la fi gura 2.1b) se muestra el diagrama de flujo de efectivo.

Observe que los dos factores derivados aquí son para pago *único*; es decir, con ellos se determina la cantidad presente o futura cuando se tiene ***sólo un pago o entrada.***

Se adoptó una notación estándar para todos los factores. La notación incluye dos símbolos de flujo de efectivo: tasa de interés y número de periodos. Siempre está en la forma general $(X/Y, i, n)$. La literal X representa lo que ***se busca***, mientras que la literal Y representa lo que ***está dado***. Por ejemplo, F/P significa encuentre F cuando P está dado. La i es la tasa de interés en porcentaje, y n representa el número de periodos implicados.

Con esta notación, $(F/P, 6\%, 20)$ representa el factor que determina la cantidad futura F acumulada en 20 periodos si la tasa de interés es de 6% por periodo. La P está dada. En adelante emplearemos la notación estándar, más sencilla que las fórmulas y los nombres de los factores.

La tabla 2.1 resume la notación estándar y las ecuaciones para los factores F/P y P/F.

TABLA 2-1 Factores *F/P* y *P/F*. Notación y ecuaciones

Factor					
Notación	**Nombre**	**Encontrar/Dado**	**Ecuación con la notación estándar**	**Ecuación con la fórmula desarrollada**	**Función en Excel**
$(F/P,i,n)$	Cantidad compuesta, pago único	F/P	$F = P(F/P,i,n)$	$F = P(1+i)^n$	$= \mathrm{VF}(i\%,n,,P)$
$(P/F,i,n)$	Cantidad presente, pago único	P/F	$P = F(P/F,i,n)$	$P = F(1+i)^{-n}$	$= \mathrm{VA}(i\%,n,,F)$

Para simplificar los cálculos rutinarios de la ingeniería económica se elaboraron las tablas de valores del factor para tasas de interés desde 0.25 hasta 50%, y periodos desde 1 hasta grandes valores de n, según el valor i. Estas tablas, están ordenadas de acuerdo con factores a lo largo de la parte superior y con el número de periodos n de manera descendente a la izquierda. La palabra *discreto* en el encabezado de cada tabla destaca que dichas tablas utilizan la convención de final de periodo y que el interés es compuesto una vez por cada periodo de interés. Para un factor, tasa de interés y tiempo dados, el valor correcto del factor está en la intersección del nombre del factor y n. Por ejemplo, el valor del factor $(P/F, 5\%, 10)$ se encuentra en la columna P/F de la tabla 10 en el periodo 10, como 0.6139. Este valor se determina con la ecuación (2.3).

$$(P/F, 5\%, 10) = \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{1}{(1 + 0.05)^{10}}$$

$$= \frac{1}{1.6289} = 0.6139$$

EJEMPLO 2.2 El caso de la fábrica de cemento

La construcción de la fábrica de Houston American Cement requerirá una inversión de \$200 millones. Los retrasos en la terminación en 2012 requerirán más dinero para la fábrica. Si el costo del dinero es de 10% anual con interés compuesto, utilice tanto **los valores del factor tabulados** para determinar las cantidades siguientes para el consejo de directores de la compañía brasileña que planea instalar la fábrica.

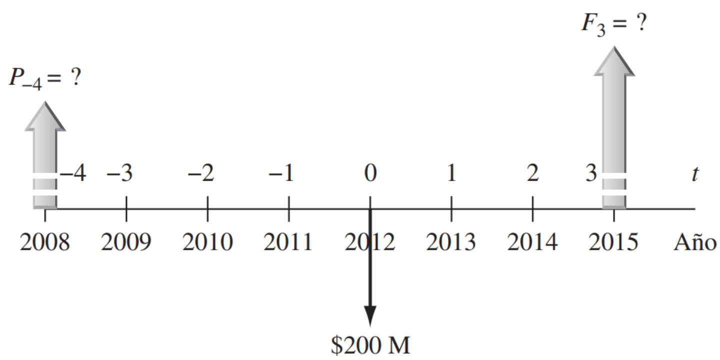
a) La inversión equivalente que se requeriría si la planta se construyera en 2015.

b) La inversión equivalente que sería necesaria si la planta se hubiera construido en 2008.

Solución

En la figura 2-2 se muestra un diagrama de flujo con la inversión de $200 millones ($200 M) en 2012, año que se identifica como momento t = 0. La inversión requerida en el futuro, en tres años, y en el pasado, cuatro años, se indican con $F_3 = ?$ y $P_{-4} = ?$, respectivamente.

Figura 2-2 Diagrama de flujo de efectivo para los incisos a) y b) del ejemplo 2.2



a) Aplique el factor F/P para determinar F después de tres años. Use unidades de $1 millón y el valor tabulado para un interés del 10%.

$$F_3 = P(F/P, i, n) = 200(F/P, 10\%, 3) = 200(1.3310)$$
$$F_3 = \$266.2 \quad (\$266\,200\,000)$$

b) El año 2008 está cuatro años antes de 2012, que es la fecha planeada para la construcción. Para determinar el costo equivalente cuatro años antes, considere los $200 M en 2012 (t = 0) como el valor futuro F y aplique el factor P/F para $n = 4$ a fi n de calcular P_{-4}

$$P_{-4} = F(P/F, i, n) = 200(P/F, 10\%, 4) = 200(0.6830)$$
$$F_3 = \$136.6 \quad (\$136\,600\,000)$$

2.1.2 Factores de valor presente y de recuperación de capital para series uniformes (P/A y A/P)

En la figura 2.4 a) se muestra el valor presente P equivalente de una serie uniforme A de flujo de efectivo al final del periodo. Una expresión para el valor presente se determina considerando cada valor de A como un valor futuro F, calculando su valor presente con el factor P/F, ecuación (2.3), para luego sumar los resultados:

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^2}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^3}\right] + \cdots A\left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Los términos entre corchetes representan los factores P/F durante los años 1 a n, respectivamente. A se factorize.

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \qquad (2.6)$$

Para simplificar la ecuación (2.6) y obtener el factor P/A, multiplique el n-ésimo término de la progresión geométrica entre corchetes por el factor $(P/F, i\%, 1)$, el cual es $1/(1+i)$. Esto da como resultado la ecuación (2.7). Luego reste la ecuación (2.6) de la ecuación (2.7) y simplifi que para obtener la expresión para P cuando $i \neq 0$ (ecuación (2.8)).

$$\frac{P}{1+i} = A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \qquad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+i}P &= A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{(1+i)^n}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \\
-\qquad P &= A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{(1+i)^{n-1}}} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^n}}\right] \\
\hline
\frac{-i}{1+i}P &= A\left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1}\right] \\
P &= \frac{A}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad i \neq 0 \qquad (2.8)}$$

El término entre corchetes en la ecuación (2.8) es el factor de conversión llamado *factor de valor presente de serie uniforme* (FVPSU). Se trata del **factor P/A** con que se calcula el valor P equivalente en el año 0 para una serie uniforme de final de periodo de valores A, que empiezan al final del periodo 1 y se extienden durante n periodos. El diagrama de flujo de efectivo es la fi gura 2-4a).

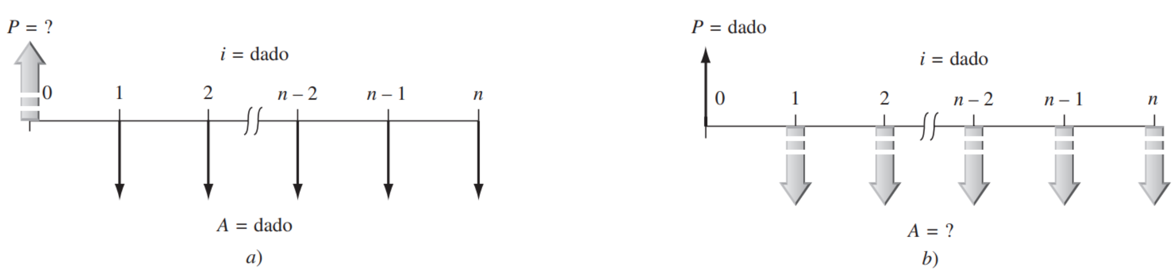


Figura 2-4 Diagramas de flujo para determinar a) P, dada una serie uniforme A, y b) A, dado un valor presente P

Para invertir la situación se conoce el valor presente P y se busca la cantidad equivalente A de serie uniforme figura 2.4b). El primer valor A ocurre al final del periodo 1, es decir, un periodo después de que P ocurre. Se despeja A de la ecuación (2.8) y se obtiene.

$$\boldsymbol{A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad i \neq 0 \qquad\qquad (2.9)}$$

El término entre corchetes se denomina *factor de recuperación del capital* (FRC), o **factor A/P**. Con él se calcula el valor anual uniforme equivalente A durante n años de una P dada en el año 0, cuando la tasa de interés es i.

Los factores P/A y A/P se derivan con el valor presente P y la primera cantidad anual uniforme A, **con un año (periodo) de diferencia.** Es decir, el valor presente P *siempre debe* localizarse **un periodo antes de la primera A**.

TABLA 2-2 Factores P/A y A/P. Notación y ecuaciones

Factor					
Notación	Nombre	Encontrar/Dado	Fórmula del factor	Ecuación con la notación estándar	Función en Excel
$(P/A,i,n)$	Valor presente de una serie uniforme	P/A	$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$	$P = A(P/A,i,n)$	= VA(i%,n,A)
$(A/P,i,n)$	Recuperación de capital	A/P	$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$A = P(A/P,i,n)$	= PAGO(i%,n,P)

Ejemplo 2.3

¿Cuánto dinero estaría usted dispuesto a pagar ahora para obtener $600 garantizados cada año durante nueve años, comenzando el próximo año, con una tasa de retorno de 16% anual?

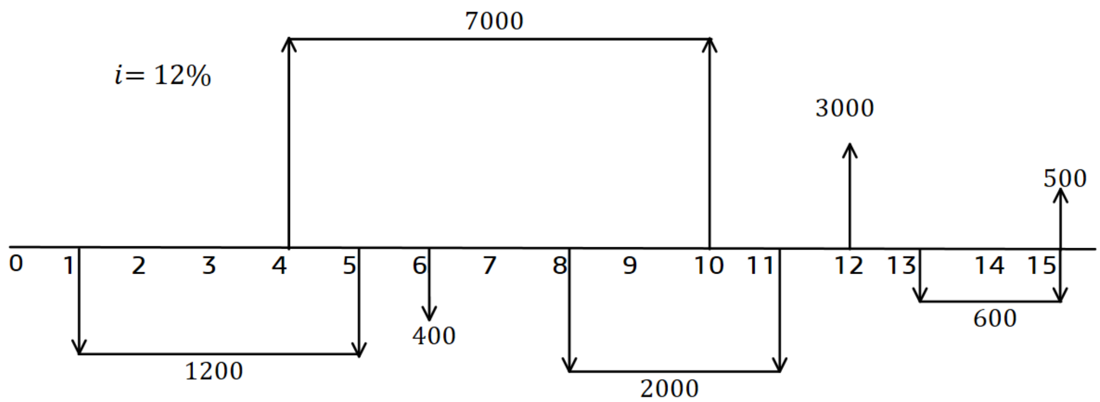
Solución

Los flujos de efectivo siguen el modelo de la figura 2-4a), con $A = \$600, i = 16\%\ y\ n = 9$. El valor presente es:

$$P = 600(P/A, 16\%, 9) = 600(4.6065) = \$2\,763.90$$

Ejemplo 2.3.1

Determine el pago anual uniforme equivalente del siguiente flujo de efectivo, a una tasa de interés del 12%.



Solución

Para resolver este ejercicio primero debemos encontrar el flujo neto de efectivo (ingresos – egresos), dado que se tienen anualidades definidas como diferidas y valores de montos puntuales tanto en los ingresos como los egresos, necesitamos pasar todos esos valores a un valor presente P al cual se le aplicara el factor correspondiente para encontrar el valor anual uniforme equivalente que se está buscando.

Definiendo el valor P para los Ingresos

$$Ingresos = A(P/A, i, n) + F(P/F, i, n) + A(P/A, i, n)(P/F, i, n) + A(P/A, i, n)(P/F, i, n)$$

$$Ingresos = 1200(P/A, 12\%, 5) + 400(P/F, 12\%, 6) + 2000(P/A, 12\%, 4)(P/F, 12\%, 7) + 600(P/A, 12\%, 3)(P/F, 12\%, 12)$$

$$Ingresos = 1\,200(3.6048) + 400(0.5066) + 2\,000(3.0373)(0.4523) + 600(2.4018)(0.2567)$$

$$Ingresos = 4325.76 + 202.64 + 2747.5416 + 369.9252 = \mathbf{7645.90}$$

Definiendo el valor P para los Egresos

$$Egresos = A(P/A, i, n)(P/F, i, n) + F(P/F, i, n) + F(P/F, i, n)$$

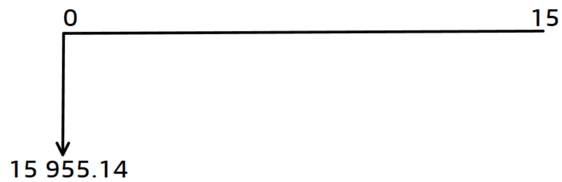
$$Egresos = 7000(P/A, 12\%, 7)(P/F, 12\%, 3) + 3000(P/F, 12\%, 12) + 500(P/F, 12\%, 15)$$

$$Egresos = 7000(4.5638)(0.7118) + 3000(0.2567) + 500(0.1827)$$

$$Egresos = 22739.5899 + 770.1 + 91.35 = \mathbf{23\,601.04}$$

Definiendo Flujo neto de efectivo

$$Flujo\ neto\ de\ efectivo = 7645.90 - 23\,601.04 = 15\,955.14$$



Definiendo Flujo neto de efectivo

$$A = P(A/P, i, n) = 15\,955.14(A/P, 12\%, 15)$$

$$A = 15\,955.14(0.14682) = \mathbf{2\,342.53}$$