Taller 2 Interpolación

Juan Camacho
j_camacho@javeriana.edu.co

Gabriela Camacho
gabriela.m.camacho@javeriana.edu.co

March 2020

1. **Interpolación**

   En general, el problema de la interpolación consiste en determinar una aproximación f(x) en un punto xi del dominio de f(x), a partir del conjunto (xi , yi) de valores conocidos o en sus vecindades Particularmente, la interpolación polinómica consiste en determinar f(xi) a partir de un polinomio P(x) de interpolación de grado menor o igual que n que pasa por los n + 1 puntos

   a) Dados los $n+1$ puntos distintos (xi, yi) el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es único.

   Para poder resolver este punto es necesario comprobar el teorema de unicidad y de existencia de un polinomio interpolante, dentro de un intervalo $[a, b] \in R$ y se tiene $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$, donde se tienen $n+1$ puntos distintos y existe un **único** polinomio de grado n o menor que n, que cumple con lo siguiente:

   $$P_n(x_i) = f(x_i)$$
   $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)Li(x)$$

   También es necesario comprobar el teorema de **existencia** tal que $p(x_j) = y_j$ para cada j en $\{1, 2, ...n\}$

   $$L_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

   Para cada x_i existe un polinomio $L_i(x)$ que siempre existe y es continuo es decir que $P(x_j) = y_j$ para cada j.

   Unicidad, si suponemos que la existencia de dos polinomios $p1_n(x)$ y $p2_n(x)$ de grado menor o igual a n y que ambos polinomios que satisfacen $p_n(x_i) = f(x_i)$, podríamos suponer un nuevo polinomio $H_n(x) = p1_n(x) - p2_n(x)$ que también es de un grado $\leq n$ y cumple con que $H_n(x) = 0$ para cada $i \in x_0, x_1, ..., x_n$.Gracias a esto y al teorema fundamenta del álgebra el polinomio $H_n(x)$ tiene solución y $n+1$ raíces se sabe que tanto $p1_n(x) = p2_n(x)$. al ser iguale se puede concluir que existe un único polinomio que cumple con dichas propiedades *b*) Construya un polinomio de grado tres que pase por: (0, 10),(1, 15),(2, 5) y que la tangente sea igual a 1 en x0.

Con los tres puntos que nos dan , queremos encontrar un polinomio de grado tres que pase por los puntos dados y que a demás, su tangente en x_0 sea igual uno. Por esto tomamos la decisión de utilizar CubicSpline ya que esta nos permite enviar los puntos a interpolar y sus respectivas derivadas, de esta manera garantizamos la condición de la tangente.

Los intervalos de $[0, 1]$ y $[1, 2]$, con ambos intervalos encontramos dos polinomios diferentes, que se muestran y construyen la siguiente gráfica. Para el primer intervalo se obtuvo el polinomio $10x^3 + 8,25x^2 + x - 4,25$ y para el segundo intervalo se encontró este polinomio $15x^3 - 2,50x^2 - 11,75x + 4,25$

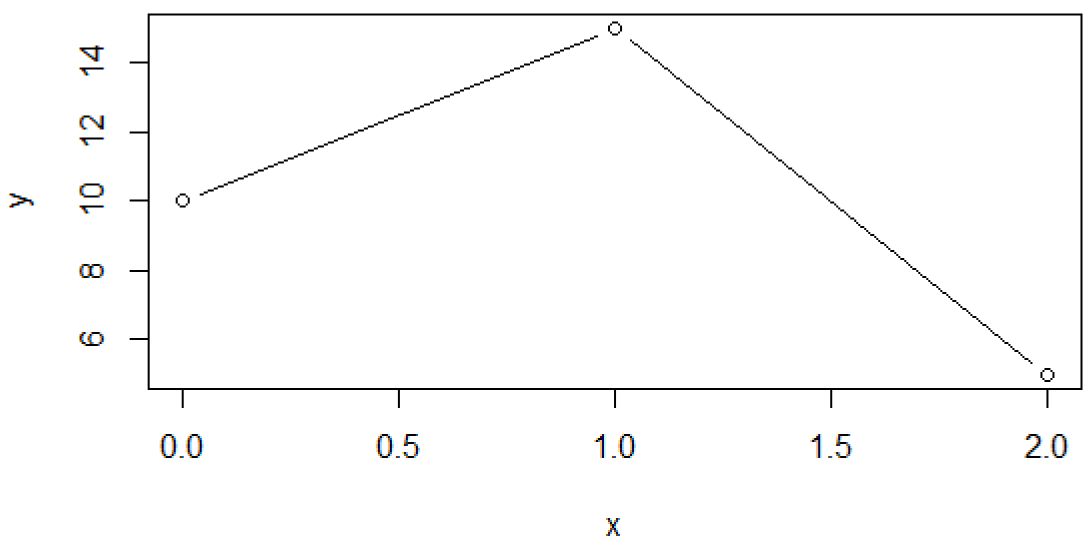

Figura 1: Polinomio e interpolación

c) Construya un polinomio del menor grado que interpole una función f(x) en los siguientes datos: $f(1) = 2; f(2) = 6; f'(1) = 3; f'(2) = 7; f''(2) = 8$

Para poder resolver el problema, a partir de los datos dados es necesario hacer diferencias divididas, las cuales nos dan
$f(1) = 2f'(1) = f[1,1] = 3f[1,1,2] = 1$

$f[1,1,2,2] = 2f[1,1,2,2,2] = -1f(1) = 2f[1,2] = 4f[1,2,2] = 3f[1,2,2,2] = 1$

$f(2) = 6f'(2) = f[2,2] = 7f[2,2,2] = 4f(2) = 6f[2,2] = 7f(2) = 6$

Con estos datos podemos encontrar el polinomio de interpolación, utilizando el método de newton generalizado $p(x) = f[1] + f[1,1](x-1) + f[1,1,2](x-1)^2 + f[1,1,2,2](x-1)^2(x-2) + f[1,1,2,2,2](x-1)^2(x-2)^2$, los primeros elementos son las diferencias divididas y después de operar, finalmente encontramos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, y encontramos la siguiente gráfica.

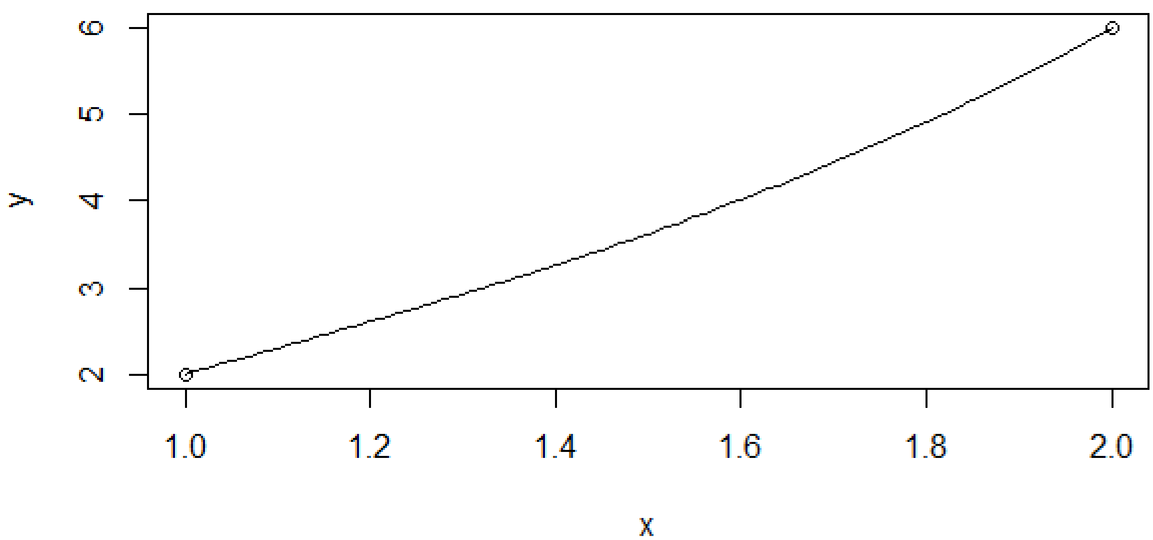

Figura 2: Interpolación con polinomio

d) Con la función $f(x) = lnx$ construya la interpolación de diferencias divididas en $x0 = 1; x1 = 2$ y estime el error en [1, 2].

Por medio de las diferencias divididas, se genera un polinomio interpolante de primer grado, esto lo realizamos dentro del intervalo dado y con los dos puntos que tenemos.

Sabemos que el error se encuentra acota entre las 2 interpolaciones realizadas por cada punto y así finalmente despejando nos resulta el error obtenido es de 0,0693

e) Utilice la interpolación de splines cúbicos para el problema de la mano y del perrito.

Mano:

Para este ejercicio se tienen 67 puntos los cuales al unirse forman la silueta de la mano original para esto se tiene dos vectores en X y en Y,en la gráfica esta se evidencia de color negro.

El código realizado permite con los 67 puntos encontrar la cantidad de segmentos con menor error entre la función interpolada y los puntos originales, de esta forma también se busca minimizar la cantidad de puntos utilizados

Para realizar el algoritmo, como lo dice el enunciado se utilizo Spline, ya que de esta forma un punto del vector original, realiza la segmentación hacia otros puntos de este mismo vector, con base a estos segmentos encontrados calculamos el error respecto al punto original y se seleccionamos el segmento que presente mínimo error entre las opciones de segmentos obtenidos.Este proceso se realiza sucesivamente hasta recrear la mano, solo que cada vez que se genere el punto de inicialización es el ultimo punto obtenido. Con este procedimiento el resultado obtenido se muestra es el siguiente:

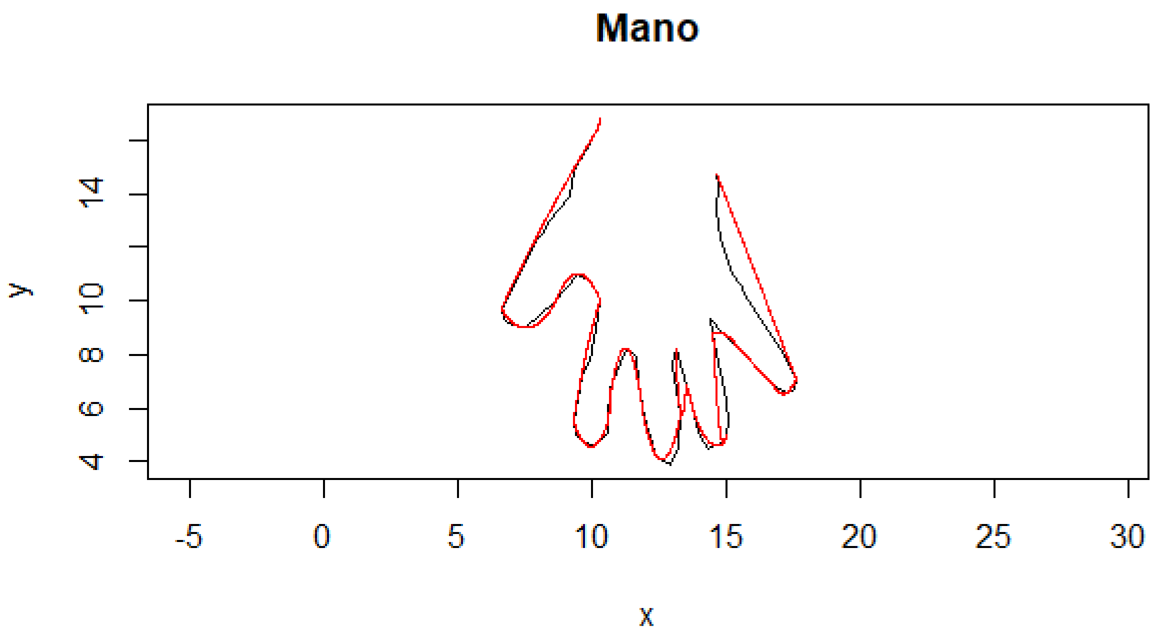

Figura 3: Interpolación de la mano

En este caso solo tuvimos diez puntos intersectantes y un error máximo de 3.20833
Perrito:

Este punto fue desarrollado en el taller anterior por esta razón no se incluye en este documento.

f) Sea $f(x) = \tan x$ utilice la partición de la forma $xi = \delta k$ para implementar una interpolación para n=10 puntos y encuentre el valor δ que minimice el error.

Se definen 10 puntos diferentes dentro de este intervalo, evalúa cada uno de los puntos en la función, luego de obtener estos valores se procede a encontrar el polinomio interpolador:

$$F(x) = -0{,}005859375 + 1{,}110497 * 10^{13} + 0{,}125x^2 - 4{,}270828 * 10^{14}x^3 + x^4 + 2{,}12774 * 10^{15}x^5 - 2{,}993325 * 10^{15}x^7 - 0{,}625x^8 + 1{,}169822 * 10^{15}x^9 \quad (1)$$

Se vuelven a evaluar los 10 valores del intervalo y se procede a comparar los diferentes resultados:

Punto	Función	Polinomio Interpolador	Error
-1.570796	-1.633124e+16	-1.633124e+16	1.469576e-13 %
-1.22173	-2.747477	-3.611396	31.44406 %
-0.8726646	-1.191754	-0.4183298	64.89796 %
-0.5235988	-0.5773503	-0.4568497	20.87131 %
-0.1745329	-0.176327	-0.1797105	1.918907 %
0.1745329	0.176327	0.1775366	0.685981 %
0.5235988	0.5773503	0.6271634	8.627881 %
0.8726646	1.191754	1.596298	33.94533 %
1.22173	2.747477	3.745235	36.31541 %
1.570796	1.633124e+16	1.633124e+16	2.449294e-14 %

Cuadro 1: Tabla de resultados punto F

Para analizar de mejor manera los datos la siguiente gráfica muestra en azul-punto la función y rojo-puntos el polinomio :

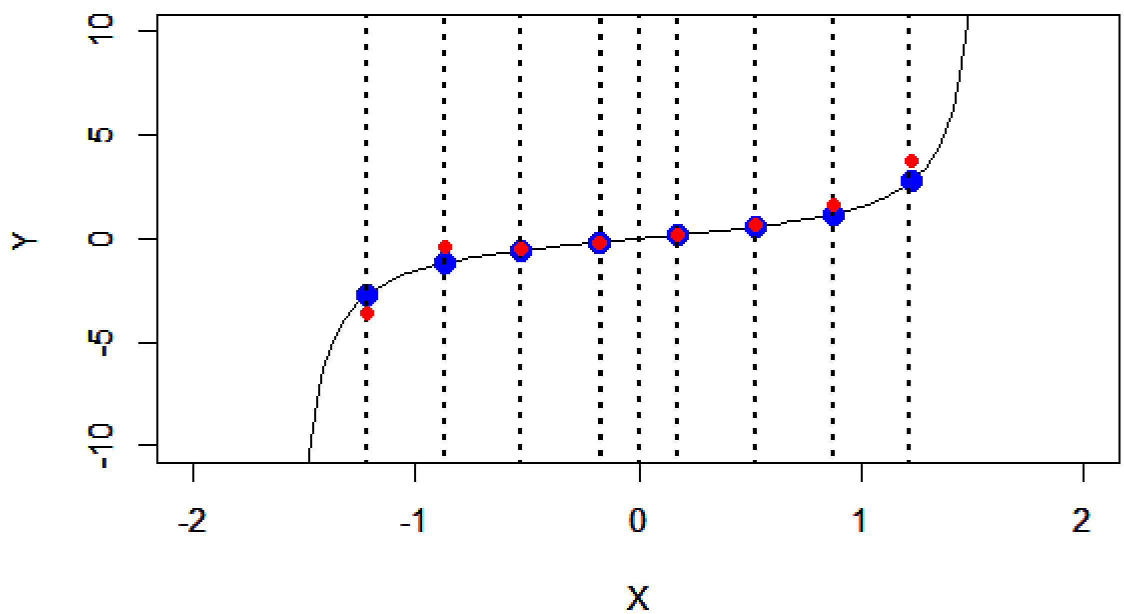

Figura 4: Grafica de tan(x) La linea continua corresponde a la función real de tan(x) junto con los puntos azules. La línea punteada representa la interpolación de los puntos dados. Algunos puntos fueron ignorados para poder observar el error en los puntos interiores, esto causa que el polinomio parezca asintotico, sin embargo no lo es.

g) Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo de [0,1] utilice el método de Lagrange y determine el paso que me produzca un error por debajo de 10^{-5}. Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso? Verifique su respuesta.

Se hallo la interpolación por medio de una división del intervalo dado en 8 puntos iguales y con el fin de probar el método utilizado se interpolo en el punto x = 0,5. Por lo que analizando el valor real de la función con el valor interpolado se obtiene :

L.Baricéntrico	Valor Real	E.Absoluto
1.64872126928892	1.64872127070013	8.55941077754187e-10

Cuadro 2: Comparación valor real con Lagrange Baricéntrico

Por otra parte, con respecto al uso del Teorema de Taylor, es posible obtener un valor aproximado pero, este da un error mas alto al obtenido con respecto a Lagrange Baricéntrico, la siguiente tabla muestra los resultados:

P.Taylor	Valor Real	E.Absoluto
1.64583333333333	1.64872127070013	0.0017516225562909

Cuadro 3: Comparación valor real con Polinomio de Taylor

Entonces el polinomio de Taylor genera un error mas grande que al de hacer uso del método de Lagrange Baricéntrico, por lo que este es mas apropiado para calcular interpolaciones.

h) Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación de estado. Los siguientes datos para el nitrógeno N_2

T(K)	100	200	300	400	500	600
$B(cm^3/mol)$	-160	-35	-4.2	9.0	16.9	21.3

Cuadro 4: Parejas ordenadas

Donde T es la temperatura [K] y B es el segundo coeficiente virial. El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado.

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ..., \tag{2}$$

Donde P es la presión, V el volumen molar de gas. T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal. Los coeficientes B = B(T), C = (T), son el segundo y tercer coeficiente virial, respectivamente. En la practica se usa la serie truncada para aproximar.

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} \tag{3}$$

En la siguiente figura se muestra como se distribuye la variable B a lo largo de la temperatura.

- Determine un polinomio interpolante para este caso.
  El polinomio generado para este caso, haciendo uso del método de diferencias divididas es el siguiente:

$$F(x) = \frac{x^3}{100000} - 0{,}01071x^2 + 3{,}763x - 439{,}2 \tag{4}$$

- Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente virial a 450K.
- Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.

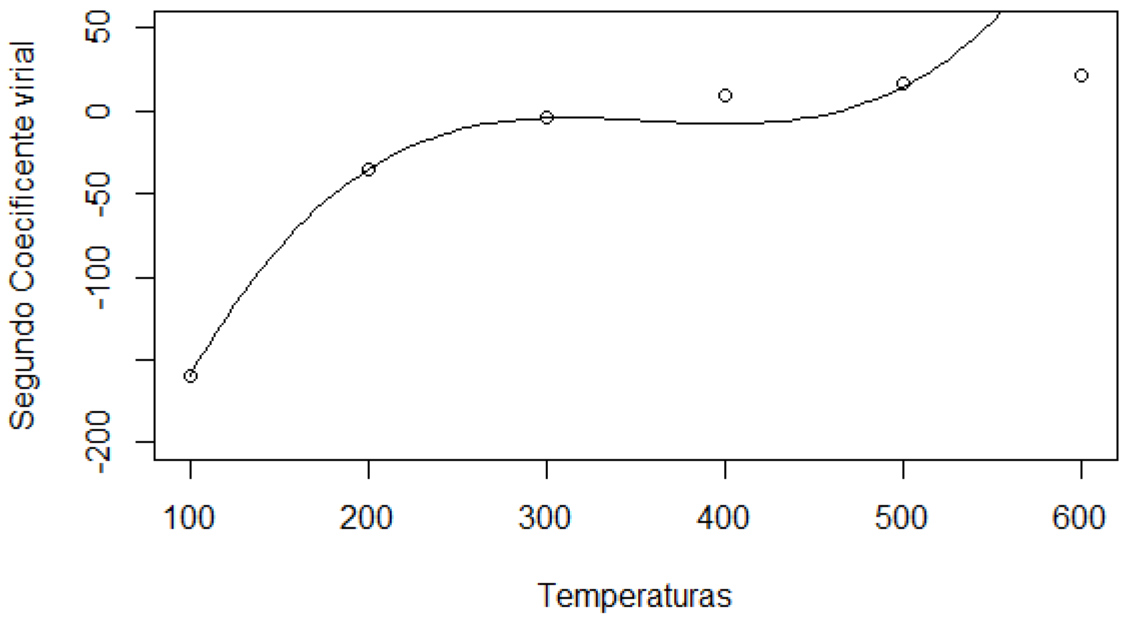

Figura 5: Puntos y el polinomio ajustado

- Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), cual aproximación es mejor por que?

Punto	Diferencia Dividida	L.Baricéntrico	E.Absoluto DD	E.Absoluto L.B
100	-160	-160	0	0 %
200	-35	-35	0	0 %
300	-4.199	-4.2	2.7491236800242e-13	0 %
400	-7.60000000000002	9	184.444444444445	0 %
500	14.8000000000001	16.9	12.4260355029582	0 %
600	123	21.3	477.464788732394	0 %

Cuadro 5: Comparación con la serie truncada

La mejor aproximación fue la de Lagrange Baricéntrico la cual dio un resultado exactamente igual al teórico.