INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATO GROSSO

Curso: Bacharel em Engenharia de Controle e Automação - Engenharia da Computação

Prof.: Willian Pereira   Disciplina: Cálculo Dif. e Int. IV

Data 01/11/2016 1^a Lista - Entrega: 17/11/2016

Ex. **1.** Calcule

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-sx}dx$ d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+x^2}dx, s>0$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^3}dx$ j) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{x-2}{x^2-5x+4}dx$ l) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x dx$ m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$

Ex. **2.** Verifique se as seguintes integrais são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}sen^2 x dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5+3x+1}dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{senx}{x^2}dx$ h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+2x+1}}dx$ j) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{senx}{x^2}dx$ l) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ m) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$

Ex. **3.** Seja $f : [0,+\infty) \longrightarrow \Re$ uma função com derivada contínua. Suponha que existam constantes positivas C e γ tais que $|f(x)| \leq Ce^{\gamma x}$ para todo $x \geq 0$. Mostre que

- $\mathscr{L}(f)(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx$ é convergente para todo $s > \gamma$.
- $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$ para $s > \gamma$.
- $\mathscr{L}(f)(s-a) = e^{as}\mathscr{L}(f)(s)$ para $s > \gamma$.

Ex. **4.** Sejam $\alpha, s \in \Re, s > 0$. Verifique que

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}sen\ \alpha x dx = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}cos\ \alpha x dx = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{\alpha x}dx = \frac{1}{s-\alpha}, s>\alpha$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}xe^{\alpha x}dx = \frac{1}{(s-\alpha)^2}, s>\alpha$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}xcos\ \omega x dx = \frac{s^2-w^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{2}{x}(1-cos\ ax)dx = \ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$

Ex. **5.** Calcule $\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ e $\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{2c} \frac{1+x}{1+x^2}dx$. A integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ é convergente?

Ex. **6.** Para cada função f dada a seguir mostre que $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Encontre explicitamente $F(x)$ e esboce os gráficos de f e F.

a)$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{se} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{se} \quad t < 1 \end{cases}$ c)$f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$ d)$f(t) =$ $e^{-|t|}$

e)$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$ f) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ e^{-t} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$ g)$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$ h)$f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Ex. **7.** Considere a região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ para $x \geq 1$. Você já sabe que esta região tem "área" infinita. Mostre que mesmo assim, o sólido de revolução obtido girando-se essa região ao redor do eixo x tem volume finito. Calcule este volume.

Ex. **8.** Considere a região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ para $0 \leq x \leq 1$. Calcule a área desta região ilimitada. Mostre que o sólido de revolução obtido girando-se essa região ao redor do eixo x tem "volume" infinito.

Ex. **9.** Mostre que

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{log(n+1)}{logn} = 1. \qquad b. \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

Ex. **10.** Verifique se as sequências abaixo são convergentes.

a.$\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2n}(n+1)\right)$ b.$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ c.$\left(n+\dfrac{1}{n}\right)$ d.$\left(nsen\dfrac{1}{n}\right)$ e.$\left(\dfrac{e^n}{n^4}\right)$ f.$\left((-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$

g.$\left(sen\dfrac{\pi}{2n}\right)$ i.$\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)$ h.$(cosn\pi)$ j.$\left(\dfrac{(n+1)^2}{254(n+1)}\right)$ l.$\left(\dfrac{\sqrt{n}}{|senn^2|}\right)$ m.$\left(\dfrac{\sqrt{n}sen(n!e^n)}{n+1}\right)$

Ex. **11.**a) Calcule:

a1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^3}dx$ a2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xsen\ kxdx$ a3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{2}{x}(1-cos\ ax)dx$

b) Determine a convergência ou não da série $\sum a_n$ onde o termo geral a_n é dado por:

b1) $a_n = \dfrac{2+cos(n)}{3^n}$ b2)$a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$

c) Determine convergência absoluta ou condicional das séries $\sum a_n$ cujo termo genérico a_n é dado por: $a_n = \dfrac{(-n^n)}{n!}$

d) Verifique se é possível construir duas sequências (a_n) e (b_n) de modo que $a_n \longrightarrow k$, $a_n + b_n \longrightarrow l$ com (b_n) divergente.

e) Seja (a_n) uma sequência construída pelo seguinte processo de indução: $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3+2\sqrt{3}}, \ldots, x_{n+1} = \sqrt{3+2\sqrt{x_n}}$. Mostre que (x_n) é uma sequência convergente com limite 3.

f)Calcule a soma da série: $x + 2x^3 + 3x^5 + \ldots + nx^{2n-1} + \ldots$.

g) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t}dt$

h)Determine a série de potência para representar $f(x)$ e dê o raio de convergência $\dfrac{3}{2x+5}$.