SÉRIE DE TAYLOR

Os erros de truncamento são aqueles que resultam do uso de uma aproximação no lugar de um procedimento matemático exato.

Exemplo:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\left(t_{i+1} - t_i\right)}{t_{i+1} - t_i} \qquad (1)$$

Neste caso, um erro de truncamento foi introduzido na solução numérica porque a equação de diferenças apenas aproxima o valor verdadeiro da derivada.

Para se ter uma percepção de tais erros, vamos utilizar uma formulação que é amplamente utilizada nos métodos numéricos para expressar uma função de forma aproximada.

A série ou fórmula de Taylor

SÉRIE DE TAYLOR

Os erros de truncamento são aqueles que resultam do uso de uma aproximação no lugar de um procedimento matemático exato.

Exemplo:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\left(t_{i+1} - t_i\right)}{t_{i+1} - t_i} \qquad (1)$$

Neste caso, um erro de truncamento foi introduzido na solução numérica porque a equação de diferenças apenas aproxima o valor verdadeiro da derivada.

Para se ter uma percepção de tais erros, vamos utilizar uma formulação que é amplamente utilizada nos métodos numéricos para expressar uma função de forma aproximada.

A série ou fórmula de Taylor

SÉRIE DE TAYLOR

Para uma função f contínua e que a derivada $f^{(n+1)}$ exista no intervalor [a,b] e que x_0 ϵ [a,b]. Para todo x ϵ [a,b], existe um número $\xi(x)$ entre x_0 e x tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

SÉRIE DE TAYLOR

Aqui, P_n (x) é **chamado de polinômio de Taylor de grau n** de f em x_0 e R_n (x) é chamado de **resto** (ou erro de truncamento) relativo a P_n (x).

Como o número ξ(x) no erro de truncamento R_n (x) depende do valor de x no qual o polinômio P_n (x) está sendo calculado, ele é função da variável x. Entretanto não devemos esperar que sejamos capazes de determinar explicitamente ξ(x).

O Teorema de Taylor simplesmente garante que tal função existe e que seu valor está entre x e x_0.

SÉRIE DE TAYLOR

A série infinita obtida pelo limite de P_n (x) quando $n \rightarrow \infty$ é a chamada série de Taylor de f em x_0.

No caso de $x_0 = 0$, o polinômio de Taylor é frequentemente chamado de **polinômio de Maclaurin** e a série de Taylor é chamada de **série de Maclaurin.**

O termo erro de truncamento no polinômio de Taylor refere-se ao erro envolvido na utilização de uma adição truncada ou finita para aproximar a soma de uma série infinita.

SÉRIE DE TAYLOR

• A série de Taylor, é de grande valia no estudo dos métodos numéricos. Em essência, a série fornece um meio para prever o valor da função em um ponto em termos do valor da função e suas derivadas em um outro ponto.

Para ganhar intuição sobre a série de Taylor é interessante construí-la termo a termo. O primeiro termo na série.

$$f\left(x_{i+1}\right) \cong f\left(x_i\right) \qquad (2)$$

Essa é a aproximação de ordem zero, e indica que o valor de f no novo ponto é o mesmo que o seu valor no ponto antigo. Intuitivamente, se x_i e x_{i+1} estiverem bem próximos, é provável que o novo valor seja parecido com o anterior.

• Em (2) a estimativa é perfeita se a função que estiver sendo aproximada for uma constante.

• Caso a função varie, é necessário que sejam acrescentados termos da série para fornecer uma melhor estimativa.

SÉRIE DE TAYLOR

A aproximação de primeira ordem é deduzida adicionand-se mais um termo para obter:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (3)$$

O termo adicional de primeira ordem consiste em uma inclinação f'’(x_i) multiplicada pela distância entre x_i e x_{i+1} .

• Embora (3) possa prever uma variação, ela é exata apenas para retas ou tendências lineares. Portanto um termo de segunda ordem é adicionado à série alguma curvatura que a função possa apresentar:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (4)$$

SÉRIE DE TAYLOR

De forma similar termos podem ser adicionados à expansão completa em série de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n \qquad (5)$$

- Como (5) é uma série infinita, o sinal de igual substitui o sinal de aproximação.

- Em geral é conveniente simplificar a série de Taylor definindo um tamanho do passo $h = x_{i+1} - x_i$, e expressá-lo como:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \qquad (5)$$

SÉRIE DE TAYLOR

Aproximação de um polinômio por série de Taylor

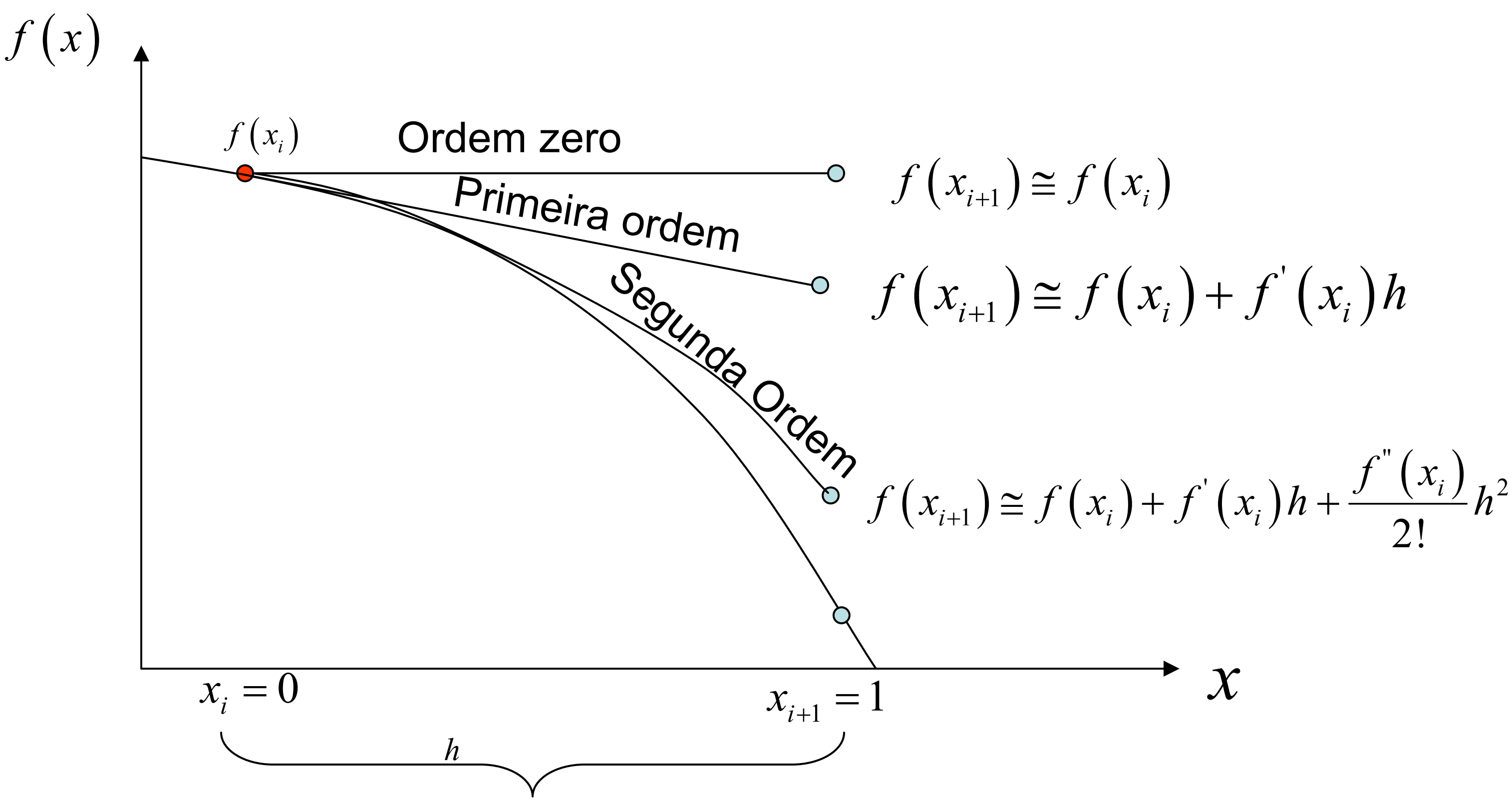
Problema: Use expansões em séries de Taylor de ordem zero até ordem quatro para aproximar a função:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

A partir de x_i =0 com h =1. Isto é, faça uma previsão do valor da função em x_{i+1} =1.

Como se trata de uma função conhecida, f(0)= 1.2 e então a curva para baixo até f(1) = 0.2. Logo o valor da verdadeiro que se tenta é 0.2.

SÉRIE DE TAYLOR



A aproximação de $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ *em* $x = 1$ *por expansões de Taylor de ordem zero, de primeira ordem e de segunda ordem.*

SÉRIE DE TAYLOR

Aproximação em série de Taylor com n=0 é (2) :

$$f\left(x_{i+1}\right) \simeq 1.2$$

Aproximação em série de Taylor de ordem zero é uma constante. O erro de truncamento:

E_t =(valor verdadeiro)- (aproximação)= 0.2 – 1.2= -1.0

Em x=1.

Para n=1, a primeira derivada deve ser determinada e calculada em x=0:

$$f^{'}\left(x\right) = -0.4\left(0.0\right)^{3} - 0.45\left(0.0\right)^{2} - 1(0.0) - 0.25$$

SÉRIE DE TAYLOR

Portanto, a aproximação de primeira ordem é (3):

$$f\left(x_{i+1}\right) \simeq 1.2 - 0.25h$$

Que pode ser usada para calcular f(1)=0.95. Consequentemente, a aproximação começa a capturar a trajetória voltada para baixo da função na forma de uma reta inclinada, o que resulta em uma redução do erro de truncamento para:

Para n=2, a segunda derivada é calculada em x=0:

$$f''\left(x\right) = -1.2\left(0.0\right)^2 - 0.9\left(0.0\right) - 1.0 = -1.0$$

Logo, de acordo com (4):

$$f\left(x_{i+1}\right) \simeq 1.2 - 0.25h - 0.5h^2$$

E substituindo h=1, f(1)=0.45.

SÉRIE DE TAYLOR

A inclusão da segunda derivada agora adicionou alguma curvatura para baixo resultando em uma estimativa melhor, como visto na figura anterior.

O erro de truncamento foi reduzido ainda mais: E_t = 0.2-0.45 = -0.25.

Termos adicionais ajudariam ainda mais. A inclusão da terceira e quarta derivadas resulta exatamente na mesma equação do início do problema.

$$f\left(x\right) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Onde o termo do resto , é:

$$R_4 = \frac{f^{(5)}\left(\xi\right)}{5!}h^5 = 0$$

Porque a quinta derivada de um polinômio de quarta ordem é nula. Consequentemente a expansão em série de Taylor até a quarta derivada fornece uma estimativa exata em $x_{i+1} = 1$

$$f\left(1\right) = 1.2 - 0.25(1) - 0.5(1)^2 - 0.15(1)^3 - 0.1(1)^4 = 0.2$$

SÉRIE DE TAYLOR

Exercício: Use expansões de séries de Taylor com n=0 até n=6 para aproximar f(x) = cos(x) em x_{i+1} = (pi/3) com base no valor de f(x) e suas derivadas em x_i = (pi/4).

Observe que isso significa que h= (pi/3) - (pi/4)= (pi/12).

Calcule também o erro percentual relativo para cada ordem.