LIMITES

Definição. Se *f(x)* torna-se arbitrariamente próxima de um único número *L*, quando *x* tende a *c* pelos dois lados, então $\lim_{x\to c} f(x) = L$ (lê-se: "o **limite** de *f(x)*, quando *x* tende a *c*, é *L*").

Determinação de um limite. Para calcular $\lim_{x\to c} f(x) = L$ pode-se:

1. Substituir na função *f(x)* o *x* por *c*, ou seja, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
2. Caso a função não esteja definida no valor *c*, pode-se tentar simplificar a expressão (por exemplo, fatorar um polinômio) e voltar a substituir *x* por *c*.
3. Construir uma tabela para analisar o comportamento de *f(x)* quando *x* tende a *c*.

Exemplo. Calcular o $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

1. Substituindo x por 1 na função $\frac{x^3-1}{x-1}$ temos que $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação).
2. Como a substituição não funcionou, podemos tentar simplificar a expressão e neste caso obteremos: $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$. Assim, podemos reescrever o limite original e calcular por substituição da seguinte forma: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$.
3. O mesmo resultado seria obtido utilizando a tabela a seguir para analisar o comportamento da função $\frac{x^3-1}{x-1}$ quando *x* tende a 1. Veja que quando *x* fica cada vez mais próximo de 1, *f(x)* fica cada vez mais próximo de 3.

x se aproxima de 1 → ← x se aproxima de 1

x	0,900	0,990	0,999	1,001	1,010	1,100
f(x)	2,710	2,970	2,997	3,003	3,030	3,310

Pela esquerda, f(x) se aproxima de 3 → ← *f(x)* se aproxima de 3 pela direita

Propriedades de limites. Suponha que *b* e *c* sejam números reais e que *n* seja um número inteiro positivo:

1. $\lim_{x\to c} b = b$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} x^n = c^n$
4. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

Operação com limites. Suponha que *b* e *c* sejam números reais e que n seja um numero inteiro positivo. Suponha também que *f* e *g* sejam funções com os seguintes limites $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = K$:

1. Múltiplo por escalar: $\lim_{x\to c}[b.f(x)] = b.\lim_{x\to c} f(x) = b.L$
2. Soma ou diferença: $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = L \pm K$
3. Produto: $\lim_{x\to c} f(x).g(x) = L.K$
4. Quociente: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$
5. Potência: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$
6. Raiz: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Existência de um limite. Se f é uma função e c e L são números reais, então $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se e somente se tanto o limite pela **esquerda** como o pela **direta** forem iguais a L, ou seja, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Fonte: Larson, R. Cálculo.

Exercícios 1.5

Nos Exercícios 1-8, complete a tabela e utilize o resultado para estimar o limite. Use uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico da função para confirmar o resultado.

1. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 5)$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

2. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

7. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x + 4} - \dfrac{1}{4}}{x}$

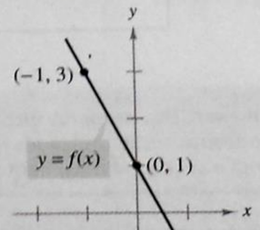
x	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001	0
$f(x)$					?

8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{2x}$

x	0,5	0,1	0,01	0,001	0
$f(x)$					?

Nos Exercícios 9-12, utilize o gráfico para determinar o limite (se existir).

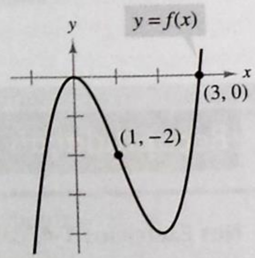
9.



(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

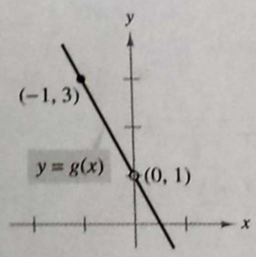
10.



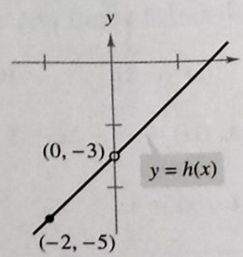
(a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

11.



12.



Exercício extra 1. Calcule $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ sabendo que f(x)=x+2. Em seguida, calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Exercício extra 2. Calcule $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ sabendo que f(x)= x^2. Em seguida, calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ (a) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

Nos Exercícios 13 e 14, determine o limite de (a) $f(x) + g(x)$, (b) $f(x)g(x)$ e (c) $f(x)/g(x)$, quando x tende a c.

13. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to c} g(x) = 9$

14. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to c} g(x) = \frac{1}{2}$

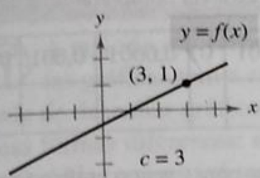
Nos Exercícios 15 e 16, determine o limite de (a) $\sqrt{f(x)}$, (b) $[3f(x)]$ e (c) $[f(x)]^2$, quando x tende a c.

15. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 16$ **16.** $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 9$

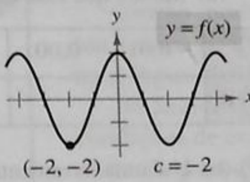
Nos Exercícios 17-22, utilize o gráfico para determinar o limite (se existir).

(a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

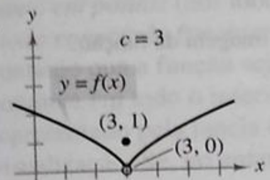
17.



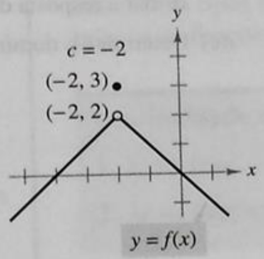
18.



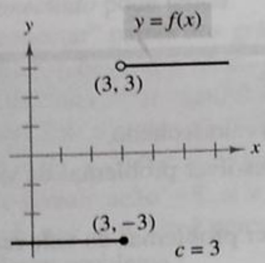
19.



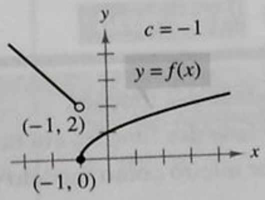
20.



21.



22.



Nos Exercícios 23-40, determine o limite.

23. $\lim\limits_{x\to 2} x^2$

24. $\lim\limits_{x\to -2} x^3$

25. $\lim\limits_{x\to -3} (2x + 5)$

26. $\lim\limits_{x\to 0} (3x - 2)$

27. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x^2)$

28. $\lim\limits_{x\to 2} (-x^2 + x - 2)$

29. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x + 6}$

30. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x + 4}$

31. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2}{x + 2}$

32. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x + 1}{2 - x}$

33. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

34. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x - 5}{3 - x}$

35. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{5x}{x + 2}$

36. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x - 4}$

37. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

38. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

39. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{1}{x + 4} - \dfrac{1}{4}}{x}$

40. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{2}}{x}$

Nos Exercícios 41-60, determine o limite (se existir).

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

42. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

43. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

44. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{x^2 - 4}$

45. $\lim\limits_{t\to 4} \dfrac{t + 4}{t^2 - 16}$

46. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$

47. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

48. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$

49. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x + 2|}{x + 2}$

50. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

51. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

52. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

53. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2, & x \leq 3 \\ -2x + 5, & x > 3 \end{cases}$

54. $\lim\limits_{s\to 1} f(s)$, em que $f(s) = \begin{cases} s, & s \leq 1 \\ 1 - s, & s > 1 \end{cases}$

55. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$

56. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{4(x + \Delta x) - 5 - (4x - 5)}{\Delta x}$

57. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2 + \Delta x} - \sqrt{x + 2}}{\Delta x}$

58. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

59. $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{(t + \Delta t)^2 - 5(t + \Delta t) - (t^2 - 5t)}{\Delta t}$

60. $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{(t + \Delta t)^2 - 4(t + \Delta t) + 2 - (t^2 - 4t + 2)}{\Delta t}$

Ⓣ **Análise gráfica, numérica e analítica** Nos Exercícios 61-64, use uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico da função e estimar o limite. Use uma tabela para reforçar sua conclusão. Em seguida, determine o limite por meio de métodos analíticos.

61. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x^2 - 1}$

62. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5}{1 - x}$

63. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x + 2}$

64. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x + 1}{x}$

Nos Exercícios 65-68, use uma ferramenta gráfica para estimar o limite (se este existir).

Ⓣ **65.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

66. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

67. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2 + x + 4}{2x^2 + 7x - 4}$

68. $\lim_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 7x^2 + x + 6}{3x^2 - x - 14}$

69. Meio ambiente O custo (em dólares) para remover $p\%$ dos poluentes da água de um pequeno lago é dado por

$$C = \frac{25\,000p}{100 - p}, \quad 0 \le p < 100$$

em que C é o custo e p é a porcentagem de poluentes.

(a) Determine o custo para remover 50% dos poluentes.

(b) Qual a porcentagem de poluentes que pode ser removida por \$ 100 000?

(c) Calcule $\lim_{p \to 100^-} C$. Explique sua conclusão.

70. Juros compostos Você efetuou um depósito de \$ 2 000 em uma conta que é capitalizada trimestralmente a uma taxa anual de r (na forma decimal). O saldo A após 10 anos é

$$A = 2000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40}.$$

O limite de A existe quando a taxa de juros tende a 6%? Se sim, qual é esse limite?

Ⓣ **71. Juros compostos** Considere um certificado de depósito que confere 10% (taxa porcentual anual) para um depósito inicial de \$ 1 000. O saldo A após 10 anos é

$$A = 1\,000(1 + 0{,}1x)^{10/x}$$

em que x é a duração do período de capitalização (em anos).

(a) Use uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico de A, em que $0 \le x \le 1$.

(b) Utilize os recursos *zoom* e *trace* para estimar o saldo para capitalização trimestral e para capitalização diária.

(c) Utilize os recursos *zoom* e *trace* para estimar

$$\lim_{x \to 0^+} A.$$

O que você acha que esse limite representa? Explique sua conclusão.

72. Lucro Considere a função do lucro P para o fabricante da Seção 1.4, Exercício 71(b). O limite de P existe quando x tende a 100? Se sim, qual é esse limite?

73. O limite de

$$f(x) = (1 + x)^{1/x}$$

é uma base natural para diversas aplicações empresariais, como você verá na Seção 4.2.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \approx 2{,}718$$

(a) Mostre que esse limite é razoável completando a tabela.

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	0	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$							

Ⓣ (b) Use uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico f e confirmar a resposta do item (a).

(c) Determine o domínio e a imagem da função.

$\lim_{x\to 2}(2x+5) = 9$

3.

x	1,9	1,99	1,999	2
$f(x)$	0,2564	0,2506	0,2501	?

x	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	0,2499	0,2494	0,2439

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$

5.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0
$f(x)$	0,5132	0,5013	0,5001	?

x	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,4999	0,4988	0,4881

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 0,5$

7.

x	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001	0
$f(x)$	−0,0714	−0,0641	−0,0627	−0,0625	?

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{4}}{x} = -\dfrac{1}{16}$

9. (a) 1 (b) 3 **11.** (a) 1 (b) 3

13. (a) 12 (b) 27 (c) $\frac{1}{3}$

15. (a) 4 (b) 48 (c) 256

17. (a) 1 (b) 1 (c) 1

19. (a) 0 (b) 0 (c) 0

21. (a) 3 (b) -3 (c) Limite não existe.

23. 4 **25.** -1 **27.** 0 **29.** 3 **31.** -2

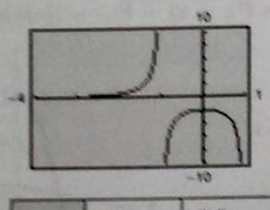
33. $-\frac{3}{4}$ **35.** $\frac{35}{9}$ **37.** $\frac{1}{3}$ **39.** $-\frac{1}{20}$ **41.** 2

43. Limite não existe. **45.** Limite não existe.

47. 12 **49.** Limite não existe. **51.** 2

53. -1 **55.** 2 **57.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ **59.** $2t-5$

61.

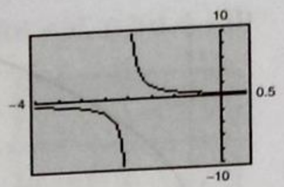


x	0	0,5	0,9	0,99
$f(x)$	−2	−2,67	−10,53	−100,5

x	0,999	0,9999	1
$f(x)$	−1000,5	−10 000,5	Não definida

$-\infty$

63.

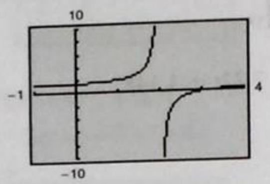


x	−3	−2,5	−2,1	−2,01
$f(x)$	−1	−2	−10	−100

x	−2,001	−2,0001	−2
$f(x)$	−1000	−10 000	Não definida

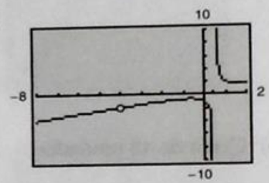
$-\infty$

65.



Limite não existe.

67.

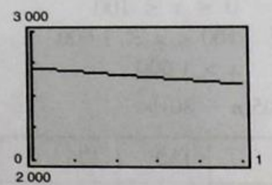


$-\frac{17}{9} \approx -1,8889$

69. (a) \$25 000 (b) 80%

(c) ∞; A função de custo aumenta ilimitadamente quando x tende a 100 pela esquerda. Portanto, de acordo com o modelo, não é possível remover 100% dos poluentes.

71. (a)



(b) Para $x = 0,25$, $A \approx$ \$2 685,06.

Para $x = \frac{1}{365}$, $A \approx$ \$2 717,91.

(c) $\lim_{x\to 0^+} 1\,000(1 + 0,1x)^{10/x} = 1\,000e \approx$ \$2 718,28;

Capitalização contínua

73. (a)

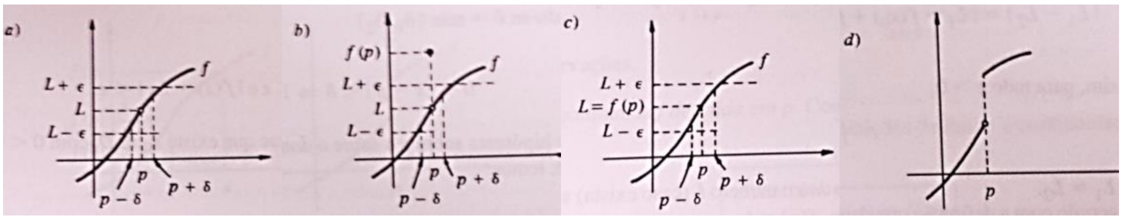
x	−0,01	−0,001	−0,0001	0
$f(x)$	2,732	2,720	2,718	Não definida

x	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	2,718	2,717	2,705

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2,718$

APROFUNDAMENTO EM LIMITES

Definição 1. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um intervalo do domínio de f. Dizemos que *f tem limite L em p* (ou seja, $\lim_{x \to p} f(x) = L$) quando para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se *x* está no intervalo aberto $(p - \delta, p + \delta)$ e $x \neq p$, então *f(x)* está no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



(a) *f* não está definida em *p*, mas existe *L* que satisfaz a Definição 1.
(b) *f* está definida em *p*, mas não é contínua em *p*, entretanto existe *L* satisfazendo a Definição 1 (neste caso, a restrição $x \neq p$ é essencial)
(c) *f* é contínua em *p*, assim *L = f(p)* satisfaz a Definição 1
(d) Não existe *L* satisfazendo a Definição 1 em *p*.

Utilizando o símbolo de valor absoluto (o módulo), a definição anterior pode ser resumida por:

$$para\ todo\ \varepsilon > 0, existe\ \delta > 0\ tal\ que, para\ todo\ x \in D_f,$$
$$se\ 0 < |x - p| < \delta\ então\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exercício. Use a Definição 1 para provar que $\lim_{x \to 4}(3x - 5) = 7$.

Sabemos que *f(x) = 3x – 5*, *p = 4* e *L = 7*. Devemos mostrar que para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos achar um $\delta > 0$ tal que

(*) $se\ 0 < |x - 4| < \delta\ então\ |(3x - 5) - 7| < \varepsilon$

Na resolução de problemas de desigualdade deste tipo, podemos em geral obter uma escolha adequada de δ examinando a afirmação à direita. Isto conduz às seguintes desigualdades equivalentes:

$\lvert(3x - 5) - 7\rvert < \varepsilon$	(expressão de ε)
$\lvert 3x - 12\rvert < \varepsilon$	(simplificação)
$\lvert 3(x - 4)\rvert < \varepsilon$	(fator comum)
$3\lvert x - 4\rvert < \varepsilon$	(propriedade do valor absoluto)
$\lvert x - 4\rvert < \frac{1}{3}\varepsilon$	(multiplicação por $\frac{1}{3}$)

A desigualdade final nos dá a chave necessária para escolher δ, ou seja, se $\delta \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ obtemos:

$0 < \lvert x - 4\rvert < \delta$	(expressão de δ)
$0 < \lvert x - 4\rvert < \frac{1}{3}\varepsilon$	(escolha de $\delta \leq \frac{1}{3}\varepsilon$)
$0 < 3\lvert x - 4\rvert < \varepsilon$	(multiplicação por 3)
$0 < \lvert 3x - 12\rvert < \varepsilon$	(propriedade do valor absoluto)
$0 < \lvert(3x - 5) - 7\rvert < \varepsilon$	(forma equivalente). **Isto verifica (*), completando a prova.**

Auto-avaliação 1. Use a Definição 1 para provar que $\lim_{x \to 2}(5x - 2) = 8$.

Alguns limites e propriedades especiais.

1. **Limite de função composta:** $\lim_{x\to p} g\big(\overbrace{f(x)}^{u}\big) = \lim_{u\to a} g(u)$.
2. **Limite fundamental:** $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, sendo a uma constante real.
5. **Regra de L'Hospital:** Se calcularmos $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ por substituição de x por c e obtivermos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, temos que $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onde f'(x) é a derivada de f(x) e g'(x) é a derivada de g(x).

Exemplo 1. Para calcular $\lim_{x\to 1} \frac{(3-x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$, façamos $u = 3 - x^3$ e teremos $\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1} = \frac{u^4-16}{2-u}$ (já que $x^3 = 3 - u$ e $x \neq 1$). Quando x tende a 1, temos que u tende a 2, então

$$\lim_{x\to 1} \frac{(3-x^3)^4 - 16}{x^3 - 1} = \lim_{u\to 2} \frac{u^4 - 16}{2-u} \overset{fatoração}{\triangleq} \lim_{u\to 2} \frac{(u-2)(u+2)(u^2+4)}{2-u}$$
$$= -\lim_{u\to 2}(u+2)(u^2+4) = -32.$$

Exemplo 2. Para calcular $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$, façamos $u = \sqrt[3]{x+2}$, assim $x = u^3 - 2$. Logo, $\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} = \frac{u-1}{(u^3-2)+1} = \frac{u-1}{u^3-1}$. Quando x tende a − 1, u tende a 1, então $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{u^2+u+1} = \frac{1}{3}$.

Auto-avaliação 2. Calcule os limites: a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ e b) $\lim_{x\to -1} \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$.

Exemplo 3. Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 5x}{x}$, façamos $u = 5x$ e teremos $\frac{sen\, 5x}{5x} = \frac{sen\, u}{\frac{u}{5}} = 5\frac{sen\, u}{u}$. Quando x tende a 0, u tende a 0, então $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 5x}{x} = \lim_{u\to 0} 5\frac{sen\, u}{u} \overset{Prop.2}{\triangleq} 5.1 = 5$.

Auto-avaliação 3. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 10x}{x}$.

Exemplo 4. Mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Fazendo $u = e^x - 1$, temos $x = \ln(1+u)$ e $\frac{e^x-1}{x} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$. Neste caso, quando h tende a 0 então u também tende a 0, assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} \overset{Prop.3}{\triangleq} \frac{1}{\ln e} = 1.$$

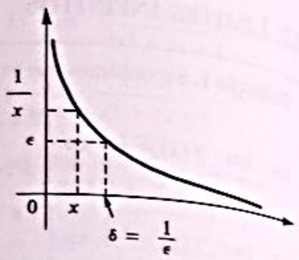
Auto-avaliação 4. Mostre que $\lim_{x\to 0} \frac{\pi^x - 1}{x} = \ln \pi$.

Exemplo 5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{derivadas}{\triangleq} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = \frac{2.1}{1} = 2.$

Justificação

Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \dfrac{1}{\epsilon}$

$$0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \epsilon.$$



Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

EXEMPLO 2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ e justifique.

Solução

Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon$

$$x > \delta \Rightarrow x > \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

Teorema

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty & \text{se } L > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty$

d) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$

e) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$

f) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty \end{cases}$

g) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty & \text{se } L > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty & \text{se } L < 0. \end{cases}$

Demonstração. Para as demonstrações de (*a*) e (*b*), veja Exs. 13 e 14. As demonstrações dos demais itens ficam a cargo do leitor. ■

Observamos que o teorema anterior continua válido se substituirmos "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$" ou por "$x \to p^+$" ou por "$x \to p^-$" ou por "$x \to p$".

Observação. O teorema anterior sugere-nos como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$: $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $L \cdot (+\infty) = +\infty$ se $L > 0$, $L \cdot (+\infty) = -\infty$ se $L < 0$, $L \cdot (-\infty) = -\infty$ se $L > 0$, $L \cdot (-\infty) = +\infty$ se $L < 0$, $L + (+\infty) = +\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $L + (-\infty) = -\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ e $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Indeterminações

$$+\infty - (+\infty),\ -\infty - (-\infty),\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

EXEMPLO 3. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.

Solução

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x \cdot x = +\infty.$$

EXEMPLO 4. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$.

Solução

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left[3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right] = +\infty\,(+\infty \cdot 3).$$

EXEMPLO 5. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$.

Solução

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left[1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right]}{x^2 \left[2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty\left(+\infty \cdot \frac{1}{2}\right).$$