TECNOLOGO

GEOPROCESSA MENTO

PROF: JOÃO DIAS

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA

PROGRAMAÇÃO

PARTE 1 – REVISÃO

A- MATRIZES
   Introdução e definição
   Tipos de matrizes
   Igualdade
   Operações
   Exercícios
   Produto de um número real por uma matriz
   Produto de matrizes
   Matriz inversa
   Exercícios
B- DETERMINANTES
   Introdução e definição
   Menor complementar e cofator
   Teorema de Laplace
   Regra de Cramer
   Regra de Sarrus
   Propriedades
   Exercícios
C- SISTEMAS LINEARES
   Equação linear
   Definição e resolução
   Matrizes associadas
   Tipos de sistemas lineares
   Classificação
   Resolução: Regra de Cramer e escalonamento.
   Exercícios

MATRIZES

INTRODUÇÃO

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\text{linha} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{8 \; 7 \; 9 \; 8} \\ 6 \; 6 \; 7 \; 6 \\ 4 \; 8 \; 5 \; 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{r} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow \\ \text{3ª linha} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3ª coluna
2ª coluna
1ª coluna

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, A = $[a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 5$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = \frac{1}{2}$, $a_{23} = \sqrt{2}$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$ e $a_{33} = -2$ ou na matriz B = [–1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha**: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 –3 1], do tipo 1 x 4.
- **Matriz coluna**: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por

exemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos a_{ij} tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.

Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal i = j

diagonal secundária i + j = n + 1

Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1

$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$$a)\ A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por I_n, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}], a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

- **Matriz transposta**: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ij}$.

- **Matriz oposta**: matriz **– A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, $Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ *para* todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le j \le n$

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e A = B, então c = 0 e b = 3

Operações envolvendo matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m\times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le j \le n$.

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A
b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n
d) elemento oposto: A + (– A) = (–A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

ATIVIDADES SALA

1. Escreva explicitamente cada uma das matrizes seguintes:

a) $A = (a_{ij})_{2x2}$ e $a_{ij} = i + j$

b) $B = (b_{ij})_{2x3}$ e $b_{ij} = 2i - j$

c) $C = (c_{ij})_{2x3}$ e $c_{ij} = \text{sen}\left(\frac{i\pi}{j}\right)$

2. (FEI-SP) Se as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ estão assim definidas: $\begin{cases} a_{ij} = 1, se & i = j \\ a_{ij} = 0, se & i \neq j \end{cases}$ e $\begin{cases} b_{ij} = 1, se & i + j = 4 \\ b_{ij} = 0, se & i + j \neq 4 \end{cases}$ em que $i \le 3$, $j \le 3$, determine a matriz A + B.

3. Sejam A e B as matrizes $A = \begin{pmatrix} x+y & 3 \\ 2 & 2x-y \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Encontre os valores de x e y de modo que $A = B^t$.

4. (UNIC) De forma generalizada, qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij}, em que i representa a linha e j a coluna em que esse elemento se localiza na matriz. Uma matriz $S = s_{ij}$, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma entre as matrizes $A = a_{ij}$ e $B = b_{ij}$. Sabendo-se que $(a_{ij}) = i^2 - j^2$ e que $(b_{ij}) = (i - j)^2$, então a soma dos elementos da segunda linha da matriz S é igual a
a) 29;
b) 34;
c) 48;
d) 54;
e) zero.

5. (UFRS) Uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^t$. Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de x, y e z?

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. (Unirio) Seja $X = (x_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 2, em que: $x_{ij} = \begin{cases} i + j, se & i = j \\ 1 - j, se & i > j \\ 1, se & i < j \end{cases}$ a soma de seus elementos vale:
a) –1 b) 1 c) 6 d) 7 e) 8

2. (UFPA) A matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$ é definida de tal modo que: $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, se & i \neq j \\ 0, se & i = j \end{cases}$ então A é igual a:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. (FGV-SP) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$ e sendo 3A = B + c, então:

a) x + y + z + w = 11
b) x + y + z + w = 10
c) x + y – z – w = 0
d) x + y – z – w = –0
e) x + y + z + w > 11

4. (F.M. Santa Casa-SP) Sejam as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e sabendo que A^t é a transposta de A, determine (A^t – B).

5. (U. E. Londrina-PR) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se A = A^t. Assim, se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, então x + y + z é igual a:

a) –2 b) – 1 c) 1 d) 3 e) 5

6) (Unisa-SP) Em $\begin{pmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ x e y valem, respectivamente:

a) – 4 e – 1 b) – 4 e 1 c) – 4 e 0
d) 1 e – 1 e) 1 e 0

7) Determine os valores reais de x, y e z de modo que seja verdadeira a igualdade $\begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}$.

8. Calcule os valores reais de a, b e x e y que tornem verdadeira a igualdade

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 & y \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

GABARITO

1) **D**
2) **A**
3) **B**
4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
5) **E**
6) **D**
7) **x = 2, y = 2 E z = 4.**
8) **a = 2, b = 2, x = ½ e y = 0.**

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{B = x.A}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x . (yA) = (xy) . A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y).A = x.A = y.A

d) elemento neutro: x.A = A, para x = 1, ou seja, A = A

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{}{\overset{c_{11}}{\boxed{1.(-1)+2.4}}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1)+4.4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ 3.(-1)+4.4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3.3+4.2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto AxB, só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n} = (A.B)_{m\times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A** **(m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 5}$, então $(A\,.\,B)_{3\times 5}$
- Se $A_{4\times 1}$ e $B_{2\times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4\times 2}$ e $B_{2\times 1}$, então $(A\,.\,B)_{4\times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:
a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)
b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C
c) elemento neutro: A . I_n = I_n . A = A, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m\times n}$ uma matriz nula, A .B =$0_{m\times n}$ não implica, necessariamente, que A = $0_{m\times n}$ ou B = $0_{m\times n}$.

Matriz inversa

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que A . A' = A' . A = I_n, então **A'** é matriz inversa de **A** . representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$ **.**

Exercícios resolvidos:

1. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 7\end{pmatrix}$ determine a matriz $2A$.

Para determinar a matriz *2A*, basta multiplicar cada elemento de *A* por 2, assim:

$$2A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -6 & 14\end{pmatrix}$$

2. Determine A . B sendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$. Resolução: Note que a matriz A é 1X3 e a matriz B é 3X1, assim a matriz A . B existe e é de ordem 1X1.
A . B = (1. 2 + 2. 2 + 3 . 3) = (16)

3. Determine A x B, sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. Resolução: Com A(2X2) e B(2X2) a matriz A . B existe e é de ordem 2.

$$A.B=\begin{bmatrix}1.2+2.1 & 1.3+2.4\\ 2.2+3.1 & 2.3+3.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 7 & 18\end{bmatrix}$$

4. Determine a inversa de matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

Resolução: A inversa de A é A^{-1}= $\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ e efetuando o produto A . A^{-1} devemos encontrar I_2 = $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Assim, $A.A^{-1}=\begin{bmatrix}a+2b & 2a+3d\\ c+2d & 2c+3d\end{bmatrix}$.

Pela igualdade I_2 = A . A^{-1} temos: $\begin{cases}a+2b=1\\ 2a+3b=0\end{cases}$ e $\begin{cases}c+2d=0\\ 2c+3d=1\end{cases}$. Resolvendo esses sistemas obteremos: a = –1/3, b = 2/3, c = 2 e d = – 1

Portanto: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3} & 2\\ \frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}$.

ATIVIDADES SALA

1. Sejam as matrizes: $A=(a_{ij})_{2x2}$, $a_{ij}=i-j$ e $B=(b_{ij})_{2x2}$, $b_{ij}=2^{i+j}$. Calcule:
a) A . B
b) B . A
c) A . B – B. A

2. Determine os valores de x e y de modo que as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ x & 0\end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}$ sejam comutativas em relação ao produto, ou seja, A . B = B. A .

3. A nutricionista de um clube de futebol recomendou aos atletas a ingestão de uma quantidade mínima necessária de certos alimentos (frutas, leite e cereais) para uma alimentação sadia. A matriz A fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos e a matriz B, mostra a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos, fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados

$$\begin{array}{cccc} & frutas & leite & cereais \\ B = & \begin{pmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} proteinas \\ gorduras \\ carboidratos \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix} \begin{array}{l} frutas \\ leite \\ cereais \end{array}$$

A soma dos elementos da matriz que mostrará a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é

a) 505,8;
b) 508,7;
c) 773,4;
d) 461,9;
e) 411.2.

4. Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, a soma dos elementos da segunda linha da matriz *2.AB* é

a) 4;
b) 6;
c) 3;
d) – 6;
e) – 12.

5. Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

6. (Mackenzie-SP) Se A e B são matrizes tais que $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a matriz Y = A^t. B será nula para:

a) x = 0
b) x = – 1
c) x = – 2
d) x = – 3
e) x = – 4.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. (FGV-SP) Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, o elemento da matriz C= A . B é:

a) 49
b) não existe
c) 29
d) 20
e) 36

2. (Cesgranrio) Multiplicando $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, obtemos $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

O produto dos elementos a e b da primeira matriz é:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 6

3. (Mackenzie- SP) Se A e B são matrizes tais que $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a matriz $Y = A^t \cdot B$ será nula para:

a) x = 0
b) x = –1
c) x = –2
d) x = –3
e) x = –4

4. (PUC/ Campinas) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n e os números reais α e β, não – nulos. Das sentenças a seguir, a falsa é:

$a)\alpha \cdot A + \beta \cdot A = (\alpha + \beta) \cdot A$

$b)(A + B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$c)(A + B) \cdot C = C \cdot (A + B)$

$d)1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

$e)(A + B) + C = A + (B + C)$

5. (FGV-SP) Considere as matrizes

$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e seja C= A . B.

A soma dos elementos da 2ª coluna de C vale:

a) 35
b) 40
c) 45
d) 50
e) 55

6. (Unisa-SP) Dadas as matrizes
$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} e\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ calcule $(A + B)^2$.

7. (PUC- SP) Se $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então calcule a matriz X, de ordem 2, tal que A . X = B

8. (PUC-SP) Sendo as matrizes
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{pmatrix}$
O valor de x tal que AB=BA é:
a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) impossível de ser determinado.

9. (Fuvest-SP) Considere as matrizes:

(1) $A = (a_{ij})_{4 \times 7}$, definida por $a_{ij} = i \cdot j$
(2) $B = (b_{ij})_{7 \times 9}$, definida por $b_{ij} = i$
(3) $C = (c_{ij})$, sendo C = A . B
O elemento C_{63} é:
a) –112
b) –18
c) –9
d) 112
e) inexistente

10. (ITA-SP) Considere P a matriz inversa da matriz M, em que:
$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$
A soma dos elementos da diagonal da matriz P é:

a) $\frac{9}{4}$
b) $\frac{4}{9}$
c) 4
d) $\frac{5}{9}$
e) $-\frac{1}{9}$

11. (Mackenzie-SP) O número de matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} x & para \quad i = j \\ y & para \quad i \neq j \end{cases}$,
tais que $A = A^{-1}$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

12. Seja $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule a matriz M tal que:
$$M = A + A^2 + A^3 + ... + A^{10}$$

13. (Vunesp) Determine os valores de x, y e z na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais de ordem 2.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix}$$

GABARITO

1) C
2) C
3) E
4) C
5) A
6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
8) B
9) E
10) C
11) E
12) $\begin{pmatrix} 10 & 110 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$
13) x = 2; y = 2 e z = 4

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo nxn).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M=[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:
$\det M = |a_{11}| = a_{11}$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

- $M = [5] \Rightarrow \det M = 5$ ou $|5| = 5$
- $M = [-3] \Rightarrow \det M = -3$ ou $|-3| = -3$

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$$Sendo\ M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, temos:$$

$$\det M = 2.5 - 4.3 = 10 - 12 = -2\ 0$$

Menor complementar

Chamamos de *menor complementar* relativo a um elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de uma matriz **M**, quadrada e de ordem n>1, o determinante $\mathbf{MC_{ij}}$, de ordem n - 1, associado à matriz obtida de **M** quando suprimimos a linha e a coluna que passam por $\mathbf{a_{ij}}$.

Vejamos como determiná-lo pelos exemplos a seguir:

a) Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, para determinar o menor complementar relativo ao elemento $\mathbf{a_{11}(MC_{11})}$, retiramos a linha 1 e a coluna 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

Da mesma forma, o menor complementar relativo ao elemento a_{12} é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

b) Sendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, de ordem 3, temos:

$$MC_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$MC_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}$$

Cofator

Chamamos de *cofator* ou *complemento algébrico* relativo a um elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de uma matriz quadrada de ordem **n** o número $\mathbf{A_{ij}}$ tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} . MC_{ij}$.

Veja:

a) Dada $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os cofatores relativos aos elementos $\mathbf{a_{11}}$ e $\mathbf{a_{12}}$ da matriz **M** são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\overbrace{a_{22}}^{MC_{11}} = (-1)^2 a_{22} = +a_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.\overbrace{a_{21}}^{MC_{12}} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$$

b) Sendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, vamos calcular os cofatores **A_{22}**, **A_{23}** e **A_{31}**:

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}^{MC_{22}} = (+1)(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}.\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}^{MC_{23}} = (-1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\overbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}^{MC_{31}} = (+1)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_{mxn}$ $(m \geq 2)$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz **M** pelos respectivos cofatores.

Assim, fixando $j \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq j \leq m$, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

em que $\sum_{i=1}^{m}$ é o somatório de todos os termos de índice **i**, variando de 1 até **m**, $m \in \mathbb{N}$.

Regra de Sarrus

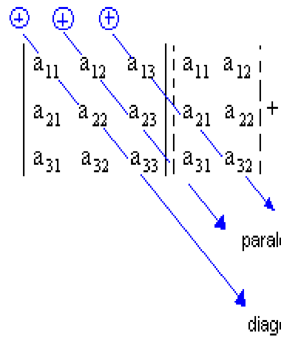
O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus.*

Acompanhe como aplicamos essa regra para $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

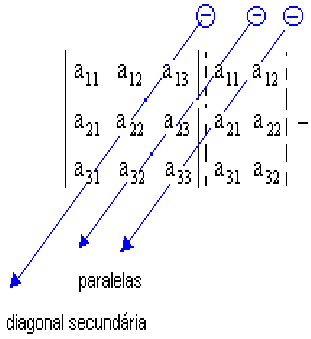
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):



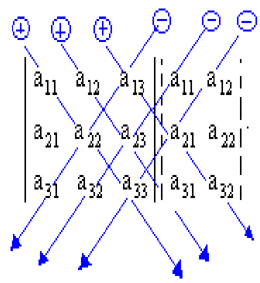
$$+(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):



$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Assim:



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Observação: Se desenvolvermos esse determinante de 3ª ordem aplicando o Teorema de Laplace, encontraremos o mesmo número real.

Determinante de ordem n > 3

Vimos que a regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus.

Propriedades dos determinantes

Os demais associados a matrizes quadradas de ordem **n** apresentam as seguintes propriedades:

P_1) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

P_2) Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \\ L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

P_3) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_3 = 2C_1$$

P_4) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_1 + C_2 = C_3$$

$$b)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2L_1 + L_2 = L_3$$

P_5) **Teorema de Jacobi**: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 2 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_7) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{multiplicando } C_1 \text{ por } 2: \begin{array}{c} 2C_1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 2(-4) = -8$$

$$b)\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -145 \quad \text{Multiplicando } L_1 \text{ por } \frac{1}{5}: \begin{array}{c} \frac{1}{5}L_1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{1}{5}(-145) = -29$$

P₈) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ Trocando as posições de } L_1 \text{ e } L_2: \begin{vmatrix} \boxed{2 \; 1 \; -1} \\ \boxed{1 \; 2 \; 3} \\ 3 \; 2 \; 1 \end{vmatrix} == +4$$

P₉) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

$$a) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = a.b.c \qquad b) \begin{vmatrix} x & g & h \\ 0 & y & i \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x.y.z$$

P₁₀) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exemplos:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a.b \qquad b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = -a.b.c$$

P₁₁) Para **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem **n**, $\boxed{\det(AB) = \det A \, . \det B}$. Como:

$$A \, . \, A^{-1} = I, \; \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Exemplo:

$$Se \; A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e \; A \, . \, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, então:$$

$$\underbrace{\det(AB)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5} . \underbrace{\det B}_{2}$$

P₁₂) $Se \; K \in \mathbb{R}$, então $\det(K \, . \, A) = K^n . \det A$.

Exemplo:

$$Sendo \; K = 3, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } K \, . \, A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}, temos:$$

$$\underbrace{\det(K.A)}_{54} = \underbrace{K^n}_{3^2} . \underbrace{\det A}_{6}$$

ATIVIDADES SALA

1. Calcule cada determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

2. (UFF-RJ) Considere a matriz $M = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Quais são os valores reais de k que tornam nulo o determinante da matriz M – kI, sendo I a matriz identidade?

3. Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4. Pode ser provado que uma matriz quadrada A é inversível se det A ≠ 0. Dê a condição para que a matriz $A = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2x & x & 2 \\ 9 & 2x & x \end{vmatrix}$ seja inversível.

5. Seja a matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$:

a) Calcule os cofatores dos elementos da primeira linha de A.

b) Calcule o determinante de A, pelo Teorema de Laplace.

6. Utilizando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz A, dada a seguir:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

7. Usando a Teorema de Laplace, calcule o determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 25 & 49 \end{vmatrix}$.

9. Considere as matizes A e B de ordem 3, cujos determinantes detA = 5 e detB = 6. Calcule:
a) det(5A)
b) det(3B)
c) det(A x B)
d) det(A + B)

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Verifique que det (A x B) = det A x det B.
b) Verifique que det (A + B) = det A + det B.

2. (Mackenzie-SP) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, então

$\det(A^2 - 3A - 10I_2)$ vale:

a) – 10 b) –1 c) 0 d) 1 e) 10

3. (PUC/Campinas-SP) São dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. O determinante da matriz (A . B^t), em que B^t é a matriz transposta de B é:
a) – 10 b) – 5 c) 5 d) 10 e) 13

4. (Fuvest-SP) O número de raízes da equação $\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

5. (Fatec-SP) Os valores reais de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ são números:
a) pares
b) irracionais
c) inteiros consecutivos
d) inteiros negativos
e) racionais não inteiros

6. (PUC/Campinas-SP) São dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2x2}$ em que $a_{ij} = 2i - 3j$ e $B = (b_{ij})_{2x2}$ em que $b_{ij} = \begin{cases} i+j, & se \quad i = j \\ i-j, & se \quad i \neq j \end{cases}$
Nessas condições, se X = (B – A)², o determinante da matriz X é igual a:
a) 224 b) 286 c) 294 d) 306 e) 324

7. Determine todas as raízes da equação: $\det\begin{pmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

8. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

9. O valor do determinante de uma matriz A é 36.
a) Se multiplicarmos a 2ª linha de A por 3, qual será o valor do determinante da nova matriz?
b) Se dividirmos a 3ª linha de A por 4, qual será o valor do determinante da nova matriz°
c) Se multiplicarmos a 1ª linha de A por 2 e dividirmos a 2ª linha por 6, qual será o valor do determinante da nova matriz?

10. Sabendo-se que $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e que det A = 27, calcule o valor do determinante da matriz: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

GABARITO
1) det A = 3, det B = – 7, det (A x B) = – 21 e det (A + B) = –10
2) C
3) D
4) A
5) C
6) E
7) {1}
8) a) – 5 b) 0
9) a) 108 b) 9 c) 12
10) 9

Equação linear

Equação linear é toda equação da forma:
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ em que $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$ são números reais, que recebem o nome de *coeficientes* das *incógnitas* $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$, e **b** é um número real chamado *termo independente* (quando b = 0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*).
Veja alguns exemplos de equações lineares:

- $3x - 2y + 4z = 7$
- $-2x + 4z = 3t - y + 4$
- $x + y - 3z - \sqrt{7}\,t = 0$

As equações a seguir não são lineares:

- $xy - 3z + t = 8$
- $x^2 - 4y = 3t - 4$
- $\sqrt{x} - 2y + z = 7$

Sistema linear

Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas.

A solução de um sistema linear é a n-upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ que é, simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

Matrizes associadas a um sistema linear

A um sistema linear podemos associar as seguintes matrizes:

- matriz incompleta: a matriz **A** formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + y + z = 7 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases}$$

a matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- matriz completa: matriz **B** que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sitema.

Assim, para o mesmo sistema acima, a matriz completa é:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas homogêneos

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes da equações são nulos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Veja um exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ \sqrt{2}x + 3y = 0 \end{cases}$$

A n-upla (0, 0, 0,...,0) é sempre solução de um sistema homogêneo com **n** incógnitas e recebe o nome de *solução trivial.* Quando existem, as demais soluções são chamadas não-triviais.
Impossível, se D = 0 e $\exists D_{xi} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$; caso em que o sistema não tem solução.
Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$

Como D = 0 e $D_x \neq 0$, o sistema é impossível e não apresenta solução.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.
Por exemplo, dados os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

verificamos que o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

Propriedades

a) Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos outro sistema equivalente.
Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x+y+2z=1 & (\mathrm{I}) \\ x-y=3 & (\mathrm{II}) \\ y+z=2 & (\mathrm{III}) \end{cases} \quad \text{e}$$

$$S_2 = \begin{cases} x-y=3 & (\mathrm{II}) \\ y+z=2 & (\mathrm{III}) \\ x+y+2z=1 & (\mathrm{I}) \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$

b) Multiplicando uma ou mais equações de um sistema por um número **K** (K ∈ IR*), obtemos um sistema equivalente ao anterior. Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x+2y=3 \; (\mathrm{I}) & \text{multiplica ndo a} \\ x-y=0 \; (\mathrm{II}) & \text{equação (II) por 3} \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$

c) Adicionando a uma das equações de um sistema o produto de outra equação desse mesmo sistema por um número **k** (K ∈IR*), obtemos um sistema equivalente ao anterior.
Por exemplo:

Dado $S_1 = \begin{cases} x+2y=4 & (\mathrm{I}) \\ x-y=1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$, substituindo a equação (II) pela soma do produto de (I) por -1 com (II), obtemos:

$$S'_1 = \frac{\begin{cases} -x-2y=-4 \\ x-y=1 \end{cases}}{-3y=-3} \qquad S_2 = \begin{cases} x+2y=4 \\ -3y=-3 \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$, pois (x,y)=(2,1) é solução de ambos os sistemas.

Classificação de um sistema quanto ao número de soluções

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, encontramos uma única solução: o par ordenado (3,5). Assim, dizemos que o <u>sistema é possível (tem solução) e determinado (solução única)</u>.

No caso do sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+2y=16 \end{cases}$, verificamos que os pares ordenados (0,8), (1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),...são algumas de suas infinitas soluções. Por isso, dizemos que o <u>sistema é possível (tem solução) e indeterminado (infinitas soluções)</u>.

Para $\begin{cases} x+y=10 \\ -x-y=10 \end{cases}$, verificamos que nenhum par ordenado satisfaz simultaneamente as equações. Portanto, o <u>sistema é impossível (não tem solução).</u>

Resumindo, um sistema linear pode ser:
a) possível e determinado (solução única);
b) possível e indeterminado (infinitas soluções);
c) impossível (não tem solução).

Sistema normal

Um sistema é normal quando tem o mesmo número de equações (**m**) e de incógnitas (**n**) e o determinante da matriz incompleta associada ao sistema é diferente de zero.
Se m=n e det A ≠ 0, então o sistema é normal.

Regra de Cramer

Todo sistema normal tem uma única solução dada por:

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

em que i ∈{ 1,2,3,...,n}, D = det A é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema, e D_{xi} é o determinante obtido pela substituição, na matriz incompleta, da coluna **i** pela coluna formada pelos termos independentes.

Discussão de um sistema linear
Se um sistema linear tem **n** equações e **n** incógnitas, ele pode ser:

a) possível e determinado, se D = det A $\neq$ 0; caso em que a solução é *única.*

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

M = n = 3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Então, o sistema é possível e determinado, tendo solução única.

b) possível e indeterminado, se D = D_{x1} = D_{x2} = D_{x3} = ... = D_{xn}= 0, para n = 2. Se n $\geq$ 3, essa condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não-proporcionais.
Um sistema possível e indeterminado apresenta infinitas soluções.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

D = 0, D_x = 0, D_y = 0 e D_z = 0
Assim, o sistema é possível e indeterminado, tendo infinitas soluções.

Sistemas escalonados

Utilizamos a regra de Cramer para discutir e resolver sistemas lineares em que o número de equações (**m**) é igual ao número de incógnitas (**n**). Quando **m** e **n** são maiores que três, torna-se muito trabalhoso utilizar essa regra. Por isso, usamos a técnica do *escalonamento,* que facilita a discussão e resolução de quaisquer sistemas lineares.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

a) Fixamos como 1º equação uma das que possuem o coeficiente da 1º incógnita diferente de zero.

b) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.

c) Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Vamos então aplicar a técnica do escalonamento, considerando dois tipos de sistema:

I. O número de equações é igual ao número de incógnitas (m = n)

Exemplo 1:
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

1ºpasso: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes:

- Trocamos de posição a 1º equação com a 2º equação, de modo que o 1º coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Trocamos a 2º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -2, com a 2º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Trocamos a 3º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -3, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2º incógnita a partir da 3º equação:

- Trocamos a 3º equação pela soma da 2º equação, multiplicada por -1, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \Leftarrow [(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + y = 3 \text{ (I)} \\ -7y - 3z = -2 \text{ (II)} \\ -2z = -6 \text{ (III)} \end{cases}$$

Agora o sistema está escalonado e podemos resolvê-lo.
-2z = -6 $\Rightarrow$ z = 3
Substituindo z = 3 em (**II**):
-7y - 3(3) = -2 $\Rightarrow$ -7y - 9 = -2 $\Rightarrow$ y = -1
Substituindo z = 3 e y = -1 em (**I**):
x + 2(-1) + 3= 3 $\Rightarrow$ x =2
Então, x = 2, y =-1 e z = 3

Sistemas Lineares

Matrizes associadas a um sistema linear

A um sistema linear podemos associar as seguintes matrizes:

- matriz incompleta: a matriz **A** formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 4x+y+z=7 \\ -2x+y+z=4 \end{cases}$$

a matriz incompleta é:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- matriz completa: matriz **B** que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

Assim, para o mesmo sistema acima, a matriz completa é:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas homogêneos

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes da equações são nulos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Veja um exemplo:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ -x+4y-3z=0 \\ \sqrt{2}x+3y=0 \end{cases}$$

A n-upla (0, 0, 0,...,0) é sempre solução de um sistema homogêneo com **n** incógnitas e recebe o nome de *solução trivial.* Quando existem, as demais soluções são chamadas não-triviais.

Exemplo 2:
$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação:

- Trocamos a 2º equação pela soma do produto da 1º equação por -2 com a 2º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \Leftarrow[(-2)]\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

- Trocamos a 3º equação pela soma do produto da 1º equação por -3 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \Leftarrow[(-3)]\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 5y-z=-7 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3º equação:

- Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por -1 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 5y-z=-7 \end{cases} \Leftarrow[(-1)]\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 0z=-2 \end{cases}$$

Dessa forma, o sistema está escalonando. Como não existe valor real de z tal que 0z=-2, o sistema é impossível.

II) O número de equações é menor que o número de incógnitas (m < n)

Exemplo:
$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação:

- Trocamos a 2º equação pela soma do produto da 1º equação por -2 com a 2º equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases} \Leftarrow[(-2)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

- Trocamos a 3º equação pela soma do produto da 1º equação por -1 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases} \Leftarrow[(-1)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2º incógnita, a partir da 3º equação:

- Trocamos a 3º equação pela soma do

produto da 2º equação por -3 com a 3º equação

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases} \Leftarrow[(-3)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ 12z-6t=30 \end{cases}$$

O sistema está escalonado. Como m<n, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções. A diferença entre o número de incógnitas (n) e o de equações (m) de um sistema nessas condições é chamada *grau de indeterminação* (GI):

GI= n - m

Para resolver um sistema indeterminado, procedemos do seguinte modo:

- Consideramos o sistema em sua forma escalonada:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ 12z-6t=30 \end{cases}$$

- Calculamos o grau de indeterminação do sistema nessas condições:

GI = n – m = 4 – 3 = 1

Como o grau de indeterminação é **1**, atribuímos a uma das incógnitas um valor α, supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor. Sendo t= α, substituindo esse valor na 3º equação, obtemos:

$$12z - 6\alpha = 30 \Rightarrow 12z = 30 + 6\alpha \Rightarrow z = \frac{30+6\alpha}{12} = \frac{5+\alpha}{2}$$

Conhecidos **z** e **t,** substituímos esses valores na 2º equação:

$$-y-4\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)+3\alpha=-13 \Rightarrow -y-10-2\alpha+3\alpha=-13 \Rightarrow$$

$$-y+\alpha=-13+10 \Rightarrow -y=-\alpha-3 \Rightarrow y=\alpha+3$$

Conhecidos **z,t** e **y**, substituímos esses valores na 1º equação:

$$x+\alpha+3+\frac{5+\alpha}{2}-\alpha=6 \Rightarrow 2x+2\alpha+6+5+\alpha-2\alpha=12 \Rightarrow 2x+$$

$$\alpha+11=12 \Rightarrow 2x=1-\alpha \Rightarrow x=\frac{1-\alpha}{2}$$

Assim, a solução do sistema é dada por

S= $\left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha+3, \frac{5+\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$, com $\alpha \in$ IR.

Para cada valor que seja atribuído a α, encontraremos uma quádrupla que é solução para o sistema.

ATIVIDADES SALA

1. (Fuvest-SP) Se $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4y+5z=23 \\ 6z=18 \end{cases}$ então x é igual a:

a) 27 b) 3 c) 0 d) – 2 e) 1

2. Resolva por escalonamento o sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+4z=3 \\ -x+4y+3z=-1 \end{cases}$

3. Resolva, em R, o sistema: $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ x-3y+2z=-2 \end{cases}$

4. Resolva o sistema nas incógnitas x, y e z: $\begin{cases} x-y+z=a \\ -x+y+z=b \\ x+y-z+c \end{cases}$

5. Verifique que é indeterminado o sistema $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-y-2z=5 \\ x+3y+2z=1 \end{cases}$ e apresente sua solução geral.

6. (PUC-SP) Considere o seguinte problema: "Vito ganhou R$ 3,20 de seu pai em moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos. Tendo recebido um total de 50 moedas, quantas moedas de 5 centavos ele recebeu?" O problema proposto:
   a) não admite solução;
   b) admite uma única solução;
   c) admite apenas duas soluções;
   d) admite apenas três soluções;
   e) admite mais do que três soluções.

7. Utilize a regra de Cramer e resolva o sistema: $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

8. Determine os valores de α para que a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita soluções próprias (distintas da trivial).

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. (U. E. Londrina-PR) Se os sistemas $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-5 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax-by=5 \\ ay-bx=-1 \end{cases}$ são equivalentes, então a² + b² é igual a:
a) 1 b) 4 c) 5 d) 9 e) 10

2. (UFGO) Considere o sistema: $\begin{cases} 2x-y-3z=-5 \\ x+3y-z=11 \\ x-5z=3 \end{cases}$.
O valor da incógnita z é:
a) 1 b) –1 c) –2 d) 2 e) 3

3. (Cesgranrio) O número de soluções do sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=2 \\ z-x=3 \end{cases}$ é:
a) maior que 3 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

4. Numa lanchonete são servidos:
Mesa I: 2 chopes, 3 refrigerantes e 1 café;
Mesa II: 1 chope, 2 refrigerante e 2 cafés;
Mesa III: 3 chopes e 4 refrigerantes.
Se as contas das mesas I e II foram de R$ 6,50 e R$ 4,50, respectivamente, qual foi o valor da mesa III?

5. (Mackenzie-SP) O sistema $\begin{cases} x+my=4 \\ 3x+y=k \end{cases}$ é possível e determinado. Então, temos sempre:
a) m = 0 b) m ≠ k c) m = $\frac{1}{3}$
d) m ≠ $\frac{1}{3}$ e) m ≠ k = 0

6. (Fuvest-SP) Qual é a condição necessária e suficiente para que a solução do sistema linear $\begin{cases} x+4y=a \\ 6x+ky=b \end{cases}$ seja um par de números inteiros, quaisquer que sejam a e b inteiros?
a) k = – 23 b) k = – 24 c) k = – 25
d) k = – 23 e – 25 e) k = – 26

7. Resolva e classifique o sistema abaixo em SPD, SPI ou SI. $\begin{cases} 4x+5y-3z=9 \\ 4y+5z=1 \\ -y+z=0 \end{cases}$

8. O valor de **a** para que o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y-z=0 \end{cases}$ admita soluções diferentes da trivial é:
a) a = 2. b) a = 0 c) a = 3 d) a = – 1

9. Em qualquer torneio de voleibol o regulamento estabelece marcar 2 pontos por vitória e um ponto por derrota. Disputando um torneio uma equipe realizou 9 partidas e ganhou 15 pontos. Quantas partidas a equipe venceu e quantas ela perdeu nesse torneio?

10. Um caminhão fez duas viagens para transportar uma carga de 6 400 kg, composta por telhas e tijolos. Na primeira viagem transportou 500 telhas e 1000 tijolos e na segunda transportou 300 telhas e 600 tijolos. Desse modo pede-se determinar o "peso" da carga transportada na primeira viagem.

11. Resolva e classifique o sistema abaixo em SPD, SPI ou SI.
$\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2y+z=0 \\ -4z=8 \end{cases}$

12. O valor de **a** para que o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y-z=0 \end{cases}$ admita soluções diferentes da trivial é:
a) a = 2. b) a = 0 c) a = 3 d) a = – 1

13. Resolva por escalonamento o sistema
$\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 2x+4y+2z=9 \\ x+y+3z=1 \end{cases}$.

GABARITO

1- E
2- B
3- E
4- R$ 8,50
5- D
6- D
7- SPD e S = { ($\frac{77}{36}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$)}
8- D
9- V = 6 e P = 3
10- 4.000 kg
11- SPD {2, 2, –2}