Probabilidade e Estatística – William

Unidade 1 – Introdução a Somatório e Produtório

$\sum$(sigma)=somatório

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

n_p=Número de Termos

n_p=n-m+1

1 – Escreva cada expressão com a notação de somatório:

a) $1+2+3+\ldots+10=\sum_{i=i}^{10} i$

b) $3*1+3*2+3*3+\ldots+3*20=\sum_{i=1}^{20} 3i$

c) $2+4+6+\ldots+20=\sum_{i=1}^{10} 2i$

d) $1+3+5+\ldots+15=\sum_{i=1}^{8}(2i-1)$

e) $1-3+5-7+9=\sum_{i=0}^{4}(2i+1)(-1)^i$

f) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\sum_{i=i}^{5}\frac{1}{i}(-1)^{i-1}$

1.1 Propriedades:

P1) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$

P2) $\sum_{i=1}^{n} a = n*a$

P3) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+a)=\sum_{i=1}^{n} a_i+n_a$

P4) $\sum_{i=1}^{n} k*a_i = k*\sum_{i=1}^{n} a_i$

$P5)$ $\sum_{i=1;j=1}^{n} a_{i*j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i*j} * \sum_{j=1}^{n} a_{i*j}$

$P6)$ $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} b_j * \sum_{i=1}^{n} a_i$

P7) Teorema fundamental da somação por partes

Δa_k=operador linear

a) $\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k = a_n - a_1$

Ex: $\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$$\Delta 3^k = 3^{k+1}-3^k = 3^k(3-1) = 2*3^k$$

$$\frac{1}{2}\Delta 3^k = 3^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Delta 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$$

$Fazendo\ por\ PG$:

$S_n = Soma\ de\ Termos\ de\ Uma\ PG$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-\mathrm{r}}$$

$$S_n = \frac{3(3^n-1)}{9-1}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$$

$b) \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} * \Delta b_k$

$\Delta a_k b_k = a_{k+1} * b_{k+1} - a_k * b_k + a_{k+1} * b_k - a_{k+1} * b_k$
$\Delta a_k b_k = a_{k+1} * (b_{k+1} - b_k) + b_k * (a_{k+1} - a_k)$
$\Delta a_k b_k = a_{k+1} * \Delta b_k + b_k * \Delta a_k$
$\Delta a_k b_k - b_k * \Delta a_k = b_k * \Delta a_k$

Aplicando o somatório em ambos os lados temos
$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} * \Delta b_k = a_{n+1} * b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k$$

$Ex: \sum_{k=1}^{n} k * 3^k = 1 * 3^1 + 2 * 3^2 + 3 * 3^3 + \cdots + n * 3^n$

I − Escolhendo os termos a_k e b_k

$a_{k+1} = k$
$a_{n+1} = n$
$a_1 = 0$
$a_k = k - 1$

$\Delta b_k = \Delta 3^k = 2 * 3^k$
$\frac{1}{2} \Delta b_k = 3^k$
$b_{n-1} = 3^{n+1}$
$b_{n+1} = 3^{n+1}$
$b_1 = 3^1$

II − Transformar usando operador linear:
$$\sum_{k=1}^{n} k * 3^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k \Delta 3^{\mathrm{k}}$$

III − Resolvendo o somatório com o operador linear

$i) \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} * \Delta b_k = a_{n+1} * b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k$
$\sum_{k=1}^{n} k \Delta 3^k = n * 3^{n+1} - 0 * 3 - \sum_{k=1}^{n} 3^k \Delta (k-1)$

$ii) \Delta(k-1) = [(k-1)+1] - (k-1) = k - k + 1 = 1$

Substituindo ii) em i) $\sum_{k=1}^{n} 3^k \Delta(k-1) = \sum_{k=1}^{n} 3^k * 1$ *. Sendo assim:* $\sum_{k=1}^{n} k \Delta 3^k = n * 3^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 3^k$

V) Substituindo III em II

$i) \sum_{k=1}^{n} k * 3^k = (n * 3^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 3^k)$

$ii) \sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$

Substituindo ii) em i) $\sum_{k=1}^{n} k * \Delta 3^k = n * 3^{n+1} - \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$

Fazendo MMC) $\sum_{k=1}^{n} k * \Delta 3^k = \frac{2(n * 3^{n+1}) - 3^{n+1} - 3}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k * 3^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k * \Delta 3^k$

Simplificando: $\sum_{k=1}^{n} k * 3^k = \frac{1}{4}(2n-1) * 3^{n+1} + \frac{3}{4}$