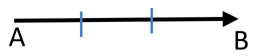
VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

1- VETORES - TRATAMENTO GEOMÉTRICO

NOÇÕES INTUITIVAS

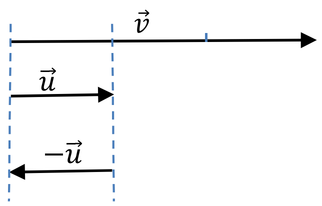
Grandeza escalar – definida a partir de um valor numérico seguida de uma unidade adequada. (Comprimento, área, massa, temperatura,...)
Grandeza vetorial – para serem perfeitamente caracterizadas necessitam de módulo, direção e sentido. (Força, velocidade, aceleração,...)
Vetor – representado por um seguimento de reta orientado (o seguimento está orientado quando nele se escolhe um sentido de percurso, considerado positivo).



A – origem e B – extremidade

Vetor $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, módulo $|\vec{v}| = 3$, direção horizontal e sentido para a direita.

Obs: Qualquer outro vetor que possua as mesmas características deste é um representante de $\vec{v}$.
Vetores paralelos: possuem a mesma direção.
Vetores iguais: possuem mesmo módulo, direção e sentido.
Vetor nulo: módulo nulo. Qualquer ponto do espaço o representa. ($\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$)
Vetor unitário: módulo igual a um.



Obs: O vetor $\vec{u}$, ou qualquer outro representante dele, que tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ é chamado de versor de $\vec{v}$.

É possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$. O vetor unitário $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido é o versor de $\vec{v}$.

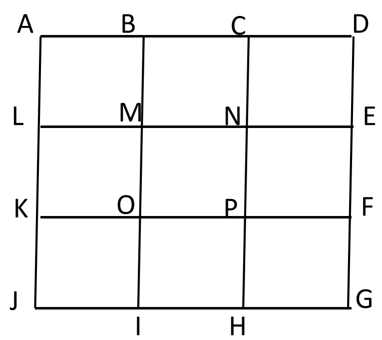
Vetores ortogonais: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. ($\vec{u} \perp \vec{v}$)

Vetores coplanares: pertencentes a um mesmo plano. (No espaço dois vetores de mesma origem são sempre coplanares)

Exemplos

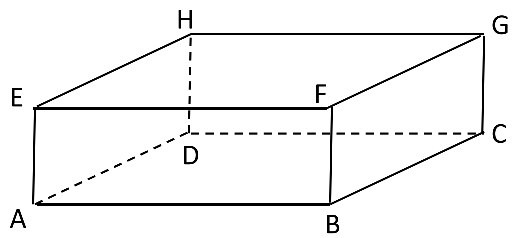
1) A figura é constituída por nove quadrados congruentes. Julgue as afirmações abaixo em V ou F.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$
b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$
c) $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$
d) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$
e) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$
f) $\overrightarrow{AC}\ //\ \overrightarrow{HI}$
g) $\overrightarrow{AJ}\ //\ \overrightarrow{FG}$
h) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$
i) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$
j) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{FP}|$



2) Observe o paralelepípedo retângulo e julgue as afirmações em V ou F.

a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$
b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$



c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{HF}|$

f) $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DF}|$

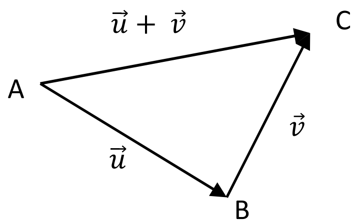
g) $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{ED}$

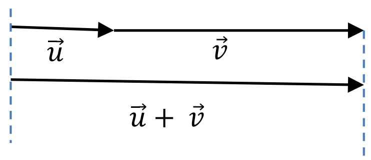
h) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\ e\ \overrightarrow{CG}$ são coplanares.

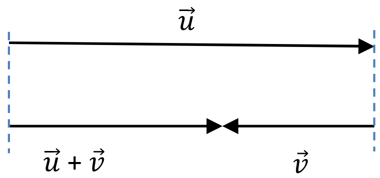
OPERAÇÃO COM VETORES

Adição de vetores

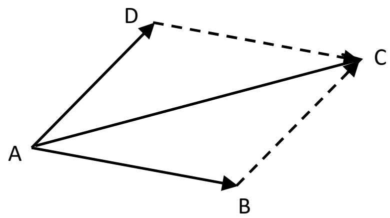
Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ podemos encontrar. Tomemos qualquer ponto A e, com origem nele, tracemos um segmento AB representante de $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar um segmento BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento AC é por definição o vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}\ ou\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



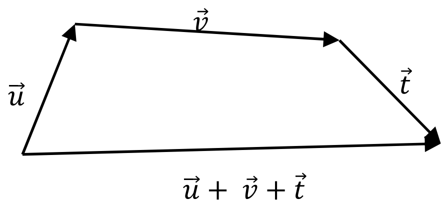




No caso de vetores não paralelos podemos utilizar a regra do paralelogramo. Representa-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem e completa-se o paralelogramo. O segmento $\overrightarrow{AC}$, que é a diagonal representa o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$.



Para a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo.



O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é chamado de vetor diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e é determinado fazendo $\vec{u} + (-\vec{v})$ utilizando os mesmos processos anteriores.

Exemplos

1) Observando a figura, determine o vetor soma em cada caso:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$

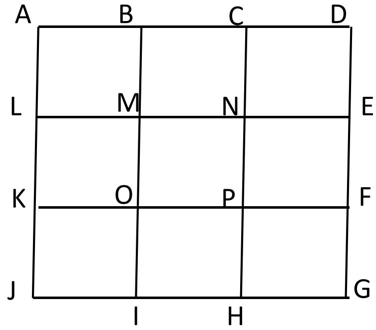
e) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$

f) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$

g) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$

h) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$

i) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$



2) Observando a figura, determine o vetor soma em cada caso:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$

c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$

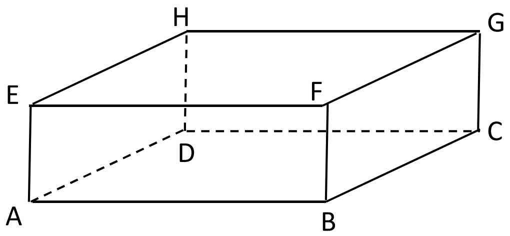
d) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{\grave{A}C}$

h) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$



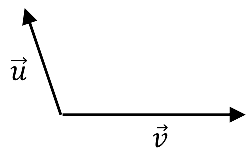
3) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos, determinar geometricamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{v} - \vec{u}$

d) $-\vec{u} - \vec{v}$

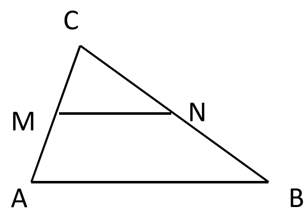


Multiplicação de um número real por um vetor

Neste caso o módulo do vetor será multiplicado pelo número, observando se o número for negativo o vetor terá seu sentido alterado.

Exemplo

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo e paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

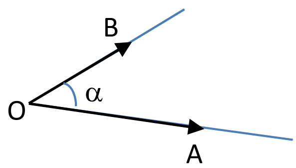


Pela figura temos:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo formado entre as duas semirretas AO e OB de mesma origem.



Exercícios propostos

1) Sendo ABCD um retângulo, EFGH um losango, e o ponto O é o ponto comum entre as diagonais do losango, marque V ou F em cada afirmativa:

a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

d) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

e) $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

f) $\overrightarrow{AF} // \overrightarrow{CD}$

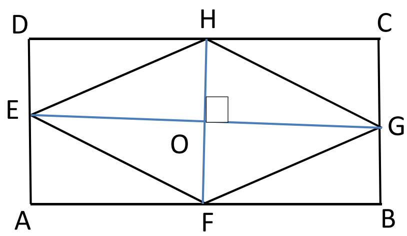
g) $\overrightarrow{GF} // \overrightarrow{HG}$

h) $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{OD}$

i) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$

j) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

k) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$



2) Com base na figura da questão anterior determine:

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$

b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$

e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

f) $2\overrightarrow{EO} + 2\overrightarrow{OC}$

g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EH}$

h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$

j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

3) O paralelogramo é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados AB e DC. Determine:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

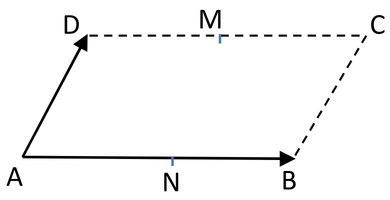
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$



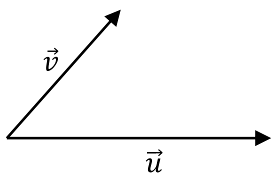
4) Mostrar um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



5) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^0, determine o ângulo formado pelos vetores.

a) $\vec{u}\ e - \vec{v}$

b) $-\vec{u}\ e\ 2\vec{v}$

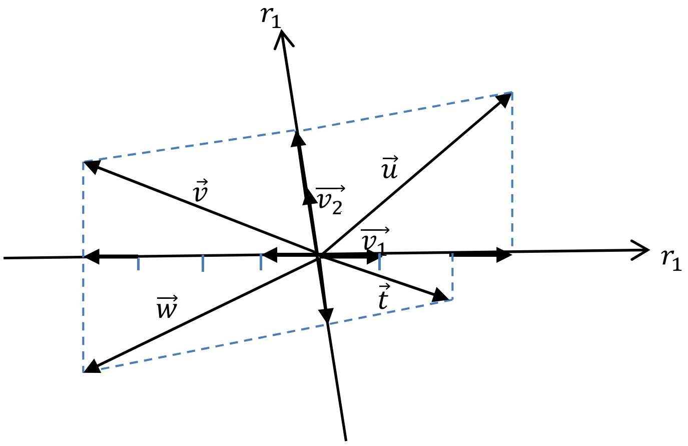
c) $-\vec{u}\ e - \vec{v}$

d) $\overrightarrow{3u}\ e\ 5\vec{v}$

2- VETORES - TRATAMENTO ALGÉBRICO

VETORES NO PLANO

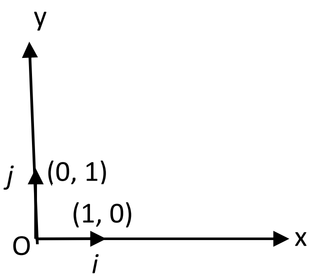
Na figura abaixo os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ e $\vec{w}$ são vetores arbitrários determinados por $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. Estes vetores são denominados combinado linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e o conjunto $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é denominado de base no plano.



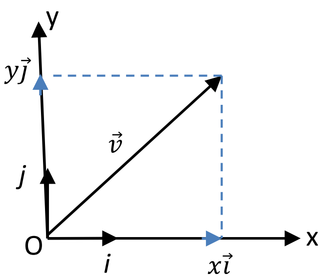
a) $\vec{u} = 3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$
b) $\vec{v} = -4\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$
c) $\vec{w} = -4\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$
d) $\vec{t} = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$

Em geral, existe somente uma dupla de números reais $\overrightarrow{a_1}$ e $\overrightarrow{a_2}$ tal que: $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.

Os números reais $\overrightarrow{a_1}$ e $\overrightarrow{a_2}$ são denominados <u>componentes</u> de $\vec{v}$ na <u>base</u> $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.
Na prática as bases mais utilizadas são as ortogonais.
Dentre as infinitas bases ortogonais no plano, um delas é particularmente importante. Trata-se da base que determina o sistema cartesiano ortogonal x0y.
Os vetores ortogonais e unitários, neste caso simbolizado por i e j, ambos com origem em O e extremidade em (0, 1) e (1, 0). Com i = (0, 1) e j = (1, 0).
A base $C = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$é chamada base canônica.



Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano existe uma só dupla de números x e y tal que $\vec{v} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$.
O vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por $\vec{v} = (x\,, y)$, o qual é denominado <u>expressão analítica</u> do vetor. Assim podemos dizer que vetor no plano é um par ordenado de números reais.

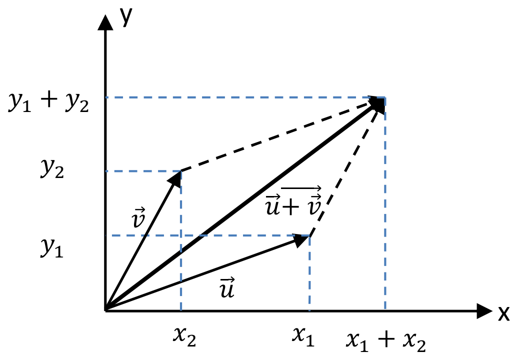


Igualdade de vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Operações com vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e α um número real. Define-se:



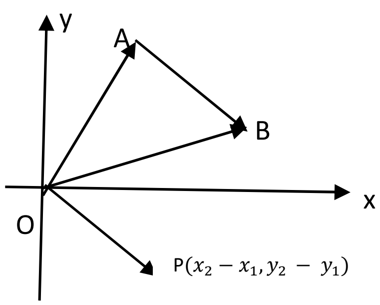
1) $\overrightarrow{\vec{u}+\vec{v}} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$
2) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determinar:
   a) $3\vec{u}$+2 $\vec{v}$ b) $3\vec{u}$ - $2\vec{v}$
2) Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Vetor definido por dois pontos

Seja o vetor $\overrightarrow{AB}$ com $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Com vimos $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.
Pelo triângulo OAB da figura, vem:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
Razão pela qual se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$.
O vetor $\overrightarrow{OP}$ que é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$ é chamado <u>vetor posição</u> ou representante natural de $\overrightarrow{AB}$.

Exemplo

Considere no plano o segmento AB com extremos A(– 2, 3) e B(1, 4), o segmento CD com extremos C(1, 2) e D(4, 3) e OP com extremos O(0, 0) e P (3, 1). Estes segmentos orientados OP, AB e CD representam o mesmo vetor, pois; P – O = B – A = D – C = (3, 1).

Ponto médio

Dado o segmento AB de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, seja *M(x, y)* o ponto médio de AB. Assim:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \rightarrow (x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y) \quad \Rightarrow \quad x - x_1 = x_2 - x \rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y - y_1 = y_2 - y \rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Paralelismo de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u} = (x_1\,, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2\,, y_2)$ são paralelos existe um número real, tal que $(x_1\,, y_1) = \alpha(x_2\,, y_2)$ e dai $(x_1\,, y_1) = (\alpha x_2\,, \alpha y_2)$ e pela igualdade $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$ de onde conclui-se que: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$.

Módulo de um vetor

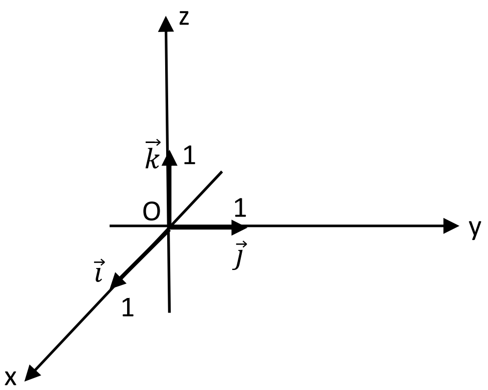
Sendo o vetor $\vec{v} = (x\,, y)$, podemos determinar o seu módulo $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Caso o vetor seja dado por dois pontos A e B seu módulo pode ser determinado por $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exercícios

1) Dados os pontos A(– 1, 2), B(3, – 1) e C(– 2, 4), determine o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2) Sendo A(– 2, 4) e B(4, 1) extremidades de um segmento, determine os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.
3) Sendo A(2, 1) e (5, 2) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, 3) o ponto de intersecção das diagonais, determine os vértices C e D.
4) Determine o ponto médio do segmento de extremos A(– 2, 3) e B(6, 2).
5) Verifique se os vetores $\vec{u} = (-2\,,3)$ e $\vec{v} = (-4\,,6)$ são paralelos.
6) Determine, no eixo 0x, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, -4)$.
7) Dado o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$, achar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
   a) O mesmo sentido e três vezes o módulo $\vec{v}$.
   b) Sentido contrário e a metade do módulo $\vec{v}$.

VETORES NO ESPAÇO

Consideremos a base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ como aquela que irá determinar o sistema cartesiano ortogonal Oxyz, onde estes três vetores unitários e dois a dois ortogonais estão representados com origem no ponto O. Este ponto e a direção de cada um dos vetores da base determinam os três eixos cartesianos: o eixo O*x* corresponde ao veto $\vec{\imath}$, o eixo O*y* corresponde ao vetor $\vec{\jmath}$ e o eixo O*z* ao vetor $\vec{k}$.



Assim como no plano, a cada ponto P(x, y, z) do espaço irá corresponder o vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, isto é, as próprias coordenadas x, y e z do ponto P são as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica. As coordenadas x, y e z são denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente.

A figura (a) representa um ponto P(x, y, z) no espaço e a figura (b) o correspondente vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, que representa a diagonal do paralelepípedo cujas arestas são definidas pelos vetores $x\vec{\imath}, y\vec{\jmath}$ e $z\vec{k}$.

Fig. (a)

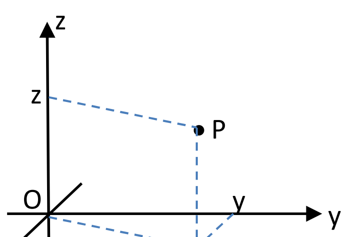
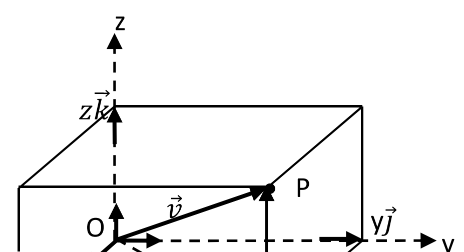


Fig. (b)



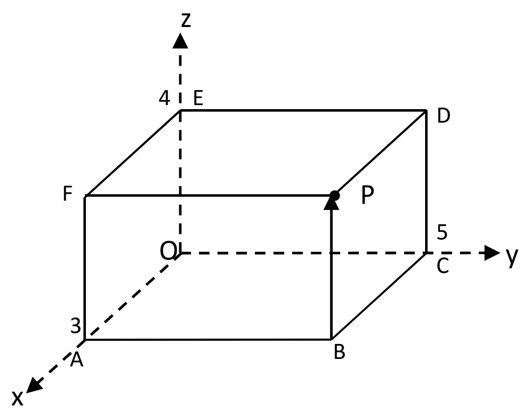
O vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ também será representado por $\vec{v} = (x, y, z)$.

Exemplos

a) $2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (2, 3, -1)$
b) $\vec{i} - 2\vec{j} = (1, -2, 0)$
c) $-2\vec{j} + 4\vec{k} = (0, -2, 4)$

Considere o paralelepípedo cujo ponto P(3, 5, 4).

a) A(3, 0, 0) eixo x.
b) C(0, 5, 0) eixo y.
c) E(0, 0, 4) eixo z.
d) B(3, 5, 0) plano xy.
e) D(0, 5, 4) plano yz.
f) F(3, 0, 4) plano xz.



O ponto B é a projeção de P sobre o plano xy, e os pontos D e F são as projeções de P sobre os planos yz e xz. O ponto A(3, 0, 0) é a projeção de P sobre o eixo x, assim como C(0, 5, 0) e E(0, 0, 4) são as projeções de P sobre os eixos y e z.

Destacamos ainda:

I) PDEF distam 4 unidades do plano xy e assim são pontos de cota z = 4 e portanto do tipo (x, y, 4).
II) PBCD distam 5 unidades do plano xz e assim são pontos de ordenada y = 5 e portanto do tipo (x, 5, z).
III) PBAF distam 3 unidades do plano yz e assim são pontos de abscissa x = 3 e portanto do tipo (3, y, z).

Igualdade

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, teremos: $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow x_2 = x_1, y_2 = y_1 \; e \; z_2 = z_1$.

Soma

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, teremos: $\vec{u} + \vec{v} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1)$.

Diferença

Dados $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$, teremos: $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Ponto médio

Sendo $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ pontos extremos de um segmento e M seu ponto médio, então: $M = (\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}, \frac{z_2+z_1}{2})$.

Paralelismo

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores paralelos, então: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Módulo

Se $\vec{v} = (x, y, z)$ é dado por: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercícios

1) Dados os pontos *A(0, 1, –1)* e *B(1, 2, –1)* e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3, tais que $\vec{w} = a_1.\overrightarrow{AB} + a_2.\vec{u} + a_3.\vec{v}$.
   Obs: Se existirem, os vetores $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ não são coplanares e o conjunto $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base do espaço, ou seja, todo vetor do espaço pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores desta base.
2) Encontre o vértice oposto a D no paralelogramo ABCD, sendo A(3, – 2, 4), B(5, 1, –3) e C(0, 1, 2).
3) Sabendo-se que o ponto P(–3, m, n) pertence á reta que passa pelos pontos A(1, –2, 4) e B(–1, –3, 1), determine m e n.
4) Seja o triângulo de vértices A(4, –1, –2), B(2, 5, –6) e C(1, –1, – 2). Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.
5) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determine:
   a) $2\vec{u} - \vec{v}$
   b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$
   c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$
6) Dados $\vec{u} = (2, -4), \vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.
7) Dados os pontos $A(3, -4)$ e $B(-1, 1)$ e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$ calcular:
   a) $(B - A) + 2\vec{v}$
   b) $(A - B) - \vec{v}$
   c) $B + 2(B - A)$
   d) $3\vec{v} - 2(A - B)$
8) Representar no gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:
   a) $A(-1, 3)$ e $B(3, 5)$
   b) $A(-1, 4)$ e $B(4, 1)$
   c) $A(4, 0)$ e $B(0, -2)$
   d) $A(3, 1)$ e $B(3, 4)$
9) Sejam os pontos $P(2, 3), Q(4, 2)$ e $R(3, 5)$.
   a) Represente em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.
   b) Determine $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
10) Dados os pontos $A(-3, 2)$ e $B(5, -2)$, determine os pontos M e N pertencentes ap segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico marcando os pontos A, B, M, N e P, devendo P ser tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
11) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular:
   a) $|\vec{u}|$ b) $|\vec{v}|$ c) $|\vec{w}|$ d) $|\overrightarrow{2u} - \vec{w}|$ e) $|\vec{u} + \vec{v}|$ f) $|\vec{w} - 3\vec{v}|$
12) Dados os pontos $A(-4, 3)$ e $B(2, 1)$, encontre o ponto P nos casos:
   a) P pertence ao eixo Oy e é equidistante de A e B;
   b) P é equidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;
   c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.
13) Dados os pontos $A(2, -2, 3)$ e $B(1, 1, 5)$ e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:
   a) $A + 3\vec{v}$
   b) $(A - B) - \vec{v}$
   c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 2(B - A)$

14) Dados os pontos $A(3,-4,-2) e\ B(-2,1,0)$, determine o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

15) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determine a, b e c, sendo $\vec{u} = (2,-1,c), \vec{v} = (a, b-2, 3) e\ \vec{w} = (4,-1,0)$.

16) Sendo $A(2,-5,3) e\ B(7,3,-1)$vértices consecutivos de um paralelogramos ABCD e $A(4,-3,3)$ o ponto de intersecção das diagonais, determine C e D.

17) Determine os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios dos lados são $M(5,0,-2), N(3,1,-3)\ e\ P(4,2,1)$.

18) Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4,-6,2)$, $\vec{v} = (-6,9,3)$, $\vec{w} = (14,-21,9)$ e $\vec{t} = (10,-15,5)$ são paralelos?

19) Verificar se são unitários os vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

20) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ seja unitário.

21) Determine o valor de a para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

22) Dados os pontos $A(0,0,-1),\ B(4,2,1)\ e\ C(1,2,0)$, determine o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

23) Obter o ponto P do eixo das abscissas equidistante de $A(3,-1,4) e\ B(1,-2,-3)$.

3- PRODUTO ESCALAR

DEFINIÇÃO ALGÉBRICA

Chama-se produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e se representa por $\vec{u}.\vec{v}$ ao número real $\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$.

Exemplo

1) Dado $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ tem-se:
$\vec{u}.\vec{v} = 3.4 + (-5).(-2) + 8.(-1) = 14$.

2) Sendo $|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = 2\ e\ \vec{u}.\vec{v} = 3$, calcular $(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v})$.

$(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v}) = 3\vec{u}.(-\vec{u} + 4\vec{v}) - 2\vec{v}.(-\vec{u} + 4\vec{v}) =$

$= -3\vec{u}.\vec{u} + 12\vec{u}.\vec{v} + 2\vec{v}.\vec{u} - 8\vec{v}.v = -3|\vec{u}|^2 + 14\vec{u}.\vec{v} - 8|\vec{v}|^2 = -3|4|^2 + 14.3 - 8|2|^2$ = - 38

3) Nota: Para $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2.\vec{u}\vec{v} + |\vec{v}|^2$.

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO ESCALAR

Se $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são vetores não nulos e ∅ o ângulo entre eles, então $\mathbf{\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\,.\cos\varnothing}$ **.**

Exemplos

1) Dados $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3$ e 120^0 o ângulo formado entre os vetores, calcular:

a) $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = 2.3\,.\cos 120^0 = -3$

b) $|\vec{u} + \vec{v}|$

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |u|^2 + 2.\vec{u}\vec{v} + |v|^2 \longrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |2|^2 + 2.(-3) + |3|^2 = 7 \longrightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{7}$

c) $|\vec{u} - \vec{v}|$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |u|^2 - 2.\vec{u}\vec{v} + |v|^2 \longrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |2|^2 - 2.(-3) + |3|^2 = 19 \longrightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$

2) Mostrar que os pares de vetores são ortogonais:

a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 2)$
b) $\vec{i} = (1, 0, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1, 0)$

3) Determinar o vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.

CÁLCULO DO ÂNGULO DE DOIS VETORES

Da igualdade $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}|.|\vec{\mathbf{v}}|.\mathbf{cos}\,\varnothing$, vem $\boldsymbol{cos\varnothing} = \frac{\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}|.|\vec{\mathbf{v}}|}$.

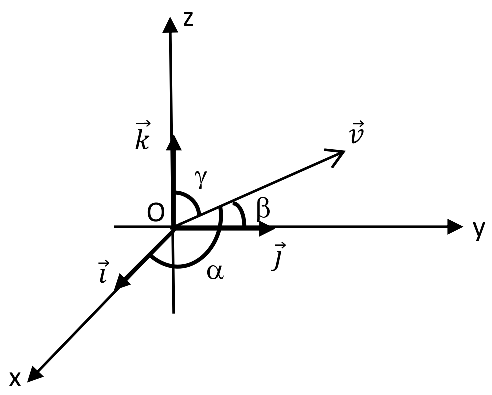
Exemplos

1) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.
2) Determinar os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo $A(3, -3, 3)$, $B(2, -1, 2)\ e\ C(1, 0, 2)$,

ÂNGULOS DIRETORES E CO-SENOS DIRETORES DE VETORES

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.

Ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α**,** β **e** γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i},\ \vec{j}\ e\ \vec{k}$.



Co-senos diretores de $\vec{v}$ são os co-senos dos seus ângulos diretores.

Para o cálculo destes ângulos:

$\cos \propto = \frac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x, y, z)(1,0,0)}{|\vec{v}||1|} = \frac{x}{|\vec{v}|}$ $\qquad$ $\cos\beta = \frac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{y}{|\vec{v}|}$ $\qquad$ $\cos\gamma = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}$

Os co-senos diretores de $\vec{v}$ são as componentes dos versores de $\vec{v}$:

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x,y,z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (\,cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma)$

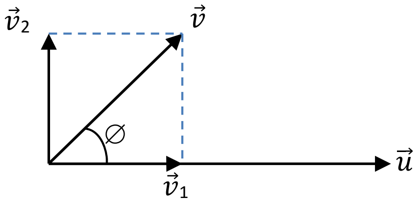
Dai demonstra-se que $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

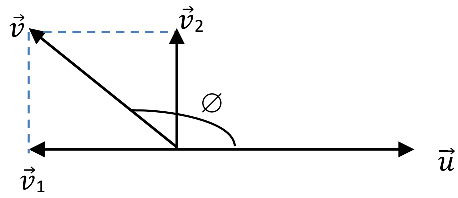
Exemplos

1) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (1, -1, 0)$.
2) Os ângulos diretores de um vetor são α, 45^0 e 60^0. Determine α.
3) Um vetor $\vec{v}$ do espaço forma com os vetores $\vec{i}\ e\ \vec{j}$ ângulos de 60^0 e120^0, respectivamente. Determine o vetor $\vec{v}$, sabendo que seu módulo é 2.

PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE O OUTRO

Seja os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ não nulos e $\varnothing$ o ângulo entre eles. Vamos decompor $\vec{v}$, tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$. São duas as possibilidades: $\varnothing$ agudo ou $\varnothing$ obtuso.





Sendo $\vec{v}_1$a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $\vec{v}_1 // \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = \alpha.\vec{u}$ e como $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \alpha.\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, vem $(\vec{v} - \alpha.\vec{u})\,.\vec{u} = 0$ ou $\vec{v}\,.\vec{u} - \alpha.\vec{u}\,.\vec{u} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\vec{v}\,.\,\vec{u}}{\vec{u}\,.\vec{u}}$. E portanto a projeção $\vec{v}_1 = (\frac{\vec{v}\,.\,\vec{u}}{\vec{u}\,.\vec{u}}).\vec{u}$

Exemplos

1) Determine o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre o vetor $\vec{u} = (1, -1, 0)$**.**
2) Dados os vetores $\vec{v} = (1, 3, -5)$ e $\vec{u} = (4, -2, 8)$, decompor $\vec{v}$ como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

PRODUTO ESCALAR NO PLANO

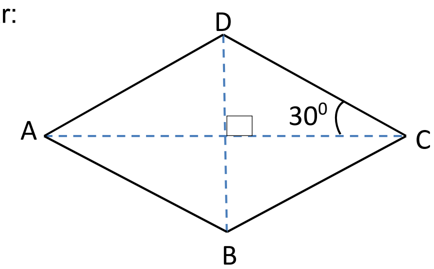
Todas as regras válidas para vetores no espaço também são válidas no plano.

Considerando $\vec{u} = (x_1,\ y_1)$ e $\vec{v} = (x_2,\ y_2)$

a) $\vec{u}\,.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2$
b) Se $\varnothing$ é o ângulo entre $\vec{u}\ e\ \vec{v}$, então: $cos\varnothing = \frac{\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}|.|\vec{\mathbf{v}}|}$.
c) $\vec{v} \perp \vec{u}$ se, e somente se, $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$.
d) Se $\alpha\ e\ \beta$são ângulos diretores de $\vec{u}$, então: $\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{u}|}$ e $\cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{u}|}$.

Exercícios

1) Dados os vetores $\vec{v} = (2, -3, -1)$ e $\vec{u} = (1, -1, 4)$, calcular
   a) $2.\vec{u}\,.(-\vec{v})$
   b) $(\vec{u} + 3.\vec{v}).(\vec{v} - 2.\vec{u})$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$
   d) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{v} - \vec{u})$
2) Sejam os pontos $\vec{u} = (2, a, -1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que $\vec{u}\,.\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{v} + \vec{w}\,)$.
3) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v}\,.\vec{u} = -42$.
4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3,\ 1, 0)$, determine o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\,.\vec{u} = -16$, $\vec{x}\,.\vec{v} = 0$ e $\vec{x}\,.\vec{w} = 3$.
5) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{CA}$.
6) O quadrilátero ABCD é um losango de lado 2 cm. Calcular:
   a) $\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{BD}$
   b) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AD}$.
   c) $\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{BC}$.



d) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BC}$.
e) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{DC}$.
f) $\overrightarrow{BC}\,.\overrightarrow{DA}$.

7) Sabendo que $|\vec{u}| = \sqrt{2}, |\vec{v}| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de 135^0, determine:

a) $|(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - 2.\vec{v})|$
b) $|\vec{u} - 2.\vec{v}|$

8) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{\imath} + (1 - 2\alpha)\vec{\jmath} + 3\vec{k}$sejam ortogonais?
9) Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$ e $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.
10) Determinar o ângulo entre os vetores:
  a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$
  b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$
11) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.
12) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determine as projeções de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ e de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
13) Determine os vetores projeções de $\vec{v} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.
14) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.
  a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$
  b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$
  c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 5, 4)$
  d) $\vec{u} = (3, 1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -3, 1)$
15) O valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$sejam:
  a) Paralelos b) Ortogonais
16) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores:
  a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4,\ -2)$
  b) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$
  c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$
17) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, determine o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{\imath}$:
  a) $\vec{u}$
  b) $\vec{v}$
  c) $\vec{u} + \vec{v}$
  d) $\vec{u} - \vec{v}$
  e) $\vec{v} - \vec{u}$

4- PRODUTO VETORIAL

Preliminares

Considerações importantes:

a) O produto vetorial é um vetor, ao contrario do produto escalar $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ que é um escalar (número real).
b) Para a simplicidade de cálculo do produto vetorial, faremos o uso de determinantes de matrizes.
c) Algumas propriedades serão importantes:
  c. 1) a permutação de duas linhas invertem o sinal do determinante.
  c. 2) se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais, o determinante é zero.
  c. 3) se duas linhas forem constituídas de zeros, o determinante é zero.

Definição

Chama-se produto vetorial de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$, ao vetor: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$

Se preferir: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Exemplo:

Calcular $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$, para $\vec{u} = 5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{k}$.

Características do vetor $\vec{u}$ x $\vec{v}$

Consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

a) Direção do vetor $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$
O vetor $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Dois vetores são ortogonais quando o produto escalar é zero.
$(\vec{u} \text{ x } \vec{v}).\vec{u} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$ pois as duas primeiras linhas são iguais. Logo são ortogonais.

Exemplo

Dados $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 5)$ verifique se são ortogonais.

b) Comprimento de $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$
Se $\emptyset$ é o ângulo entre os vetores $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ não nulos então: $|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\emptyset$.

Considerações finais:

1) O produto vetorial não é associativo, isto é, em geral $\overrightarrow{(u \text{ x } \vec{v})}.\vec{w} \neq \vec{u}.(\vec{v}.\vec{w})$.
Veja: $(\vec{\imath} \text{ x } \vec{\jmath}).\vec{\jmath} = \vec{k} \text{ x } \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ e $\vec{\imath}.(\vec{\jmath} \text{ x } .\vec{\jmath}) = \vec{\imath} \text{ x } 0 = 0$.
2) Para quais quer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e o escalar α, são válidas as propriedades:
I) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
II) $\alpha(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = \alpha\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \vec{u} \text{ x } \alpha\vec{v}$
III) $\vec{u}.(\vec{v} \text{ x } \vec{w}) = (\vec{u} \text{ x } \vec{v}).\vec{w}$

Exemplos

1) Determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo y e $\vec{u} = \vec{x} \text{ x } \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.
2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -1, 4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -2)$. Determine um vetor que seja:
   a) Ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   b) Ortogonal a $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ e unitário.
   c) Ortogonal a $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ e tenha módulo 4.
   d) Ortogonal a $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ e tenha módulo 7.
3) Seja um triângulo equilátero ABC de lado 10. Calcular $|\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC}|$.
4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, calcular:
   a) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.
   b) A altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.
5) Determinar a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa por A(3, 1, 3) e B(4, – 1, 1).
6) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, a)$, calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.
7) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, – 1, 0) e C(4, 2, – 2), determine:
   a) A área do triângulo ABC.

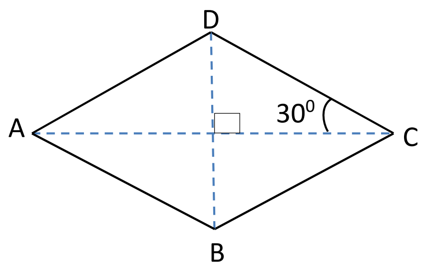
b) A altura do triângulo relativa ao vértice C.

Exercícios

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determine:
a) $|\vec{u} \times \vec{u}|$
b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$
c) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$
d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (v \times \vec{u})$
e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$
f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
h) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

2) Dados os pontos A(2, 1, – 1), B(3, 0, 1) e C(2, – 1, – 3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.
3) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \times (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.
4) Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 3)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

5) Com base na figura ao lado, losango de lado 2, determine:
a) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$
b) $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$
c) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}|$
d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|$
e) $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC}|$
f) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}|$



6) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular:
c) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
d) A altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

7) Sabendo-se que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e 30^0 o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:
a) A área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$.
c) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

8) Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, – 2) são coplanares calcular a área de ABCD.

5- PRODUTO MISTO

Definição

Chama-se produto misto dos vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + 3\vec{k}$, tomados nesta ordem, ao número real $\vec{u} \,.\, (\vec{v} \times \vec{w})$.

Tendo em vista que: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\vec{k}$

vem $\vec{u} \,.\, (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{j} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

e portanto $\vec{u} \,.\, (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

Exemplo

1) Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3 + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
2) Verifique se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1) e\ \vec{w} = (2, -1, 4)$.
3) Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2) e\ \vec{w} = (-1, 3, -1)$.sejam coplanares.

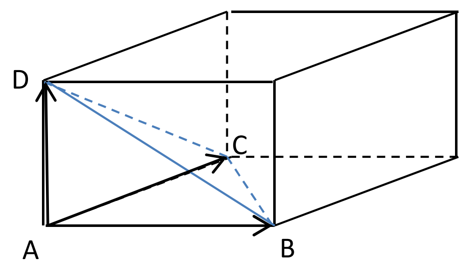
Volume de um Tetraedro

Sejam os pontos A, B, C e D não coplanares. Portanto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ e\ \overrightarrow{AD}$ também não são coplanares. Em consequência, estes vetores determinam um paralelepípedo cujo volume pode ser dado pelo produto

$$V = \left|(\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}\ .\ \overrightarrow{AD})\right|$$

E portanto, o volume do tetraedro determinado como na figura vale:

$$V_1 = \tfrac{1}{6}.\left|\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}\ .\ \overrightarrow{AD}\right|$$



Exemplo

1) Sejam $A = (1, 2, -1), B = (5, 0, 1), C =$ (2, – 1, 1) e D = (6, 1, – 3) vértices de um tetraedro. Calcular:
   a) O volume desse tetraedro
   b) Altura desse tetraedro relativo ao vértice D.

Exercícios

1) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2) e\ \vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular:
   a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
2) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular:
   a) $(\vec{w}, \overrightarrow{\vec{v}, \vec{u}})$ b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ c) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ d) $\vec{v}\,.(\vec{u} \times \vec{w})$
3) Verifique se são coplanares os vetores
   a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1) e\ \vec{w} = (-2, 0, -4)$,
   b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2) e\ \vec{w} = (7, -1, 4)$,
4) Para que valores de m os pontos $A = (m, 1, 2), B = (2, -2, -3), C =$ (5, – 1, 1) e D = (2, – 2, – 2)são coplanares?
5) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1) e\ \vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcular seu volume e a altura relativa a base formada por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
6) Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo $A = (2, 0, 0), B = (2, 4, 0), C =$ (0, 3, 0) e P = (2, -2, 9).
7) Calcular a distancia do ponto D(2, 5, 2) ao plano determinado pelos pontos A(3, 0, 0), B(0, – 3, 0) e C(0, 0, 3).

6 – A RETA

EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem

A direção de $\vec{v}$. Um ponto P(x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$. Isto é: $\overrightarrow{AP} = t.\vec{v}$.

Para algum t real, $P - A = t.\vec{v}$ ou $P = A + t.\vec{v}$ ou em coordenadas $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t.(a, b, c)$.

Em qualquer uma das equações acima o vetor $\vec{v}$ é chamado vetor direção e r e t denominados parâmetros.

Exemplo:

A reta r que passa por A(1, –1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial.

Equações paramétricas da reta

Da equação vetorial da reta $(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + t.(\,a,b,c)$ ou ainda $(x,y,z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$e pela condição de igualdade tem-se: $x = x_1 + at$, $y = \ y_1 + bt$ e $z = z_1 + ct$. Estas equações são denominadas equações paramétricas da reta.

Exemplos:

1) A reta r que passa pelo ponto A(3, – 4, 2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (\,2,1,-3)$, tem equações paramétricas: x = 3 + 2t; y = – 4 + t e z = 2 – 3t
2) Dado o ponto A(2, 3, – 4) e o vetor $\vec{v} = (\,1,-2,3)$, pede -se:
   a) Escrever as equações paramétricas da reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
   b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4. Respectivamente.
   c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
   d) Verificar se os pontos D(4, – 1, 2) e E(5, – 4, 3) pertencem a r.
   e) Determine para que valores de m e n o ponto F(m, 5, 0) pertence a r.
   f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.
   g) Escreva equações paramétricas da reta s que passas pelo ponto G(5, 2, – 4) e é paralela a r.
   h) Escreva equações paramétricas da reta t que passas por A e é paralela ao eixo y.

RETAS DEFINIDAS POR DOIS PONTOS

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passas por A (ou B) e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Exemplo

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A(3, – 1, – 2) e B(1, 2, 4).

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

Das equações paramétricas: $x = x_1 + at$, $y = \ y_1 + bt$ e $z = z_1 + ct$, supondo a.b.c ≠ 0, vem:

$t = \frac{x - x_1}{a}$, $t = \frac{y - y_1}{b}$ e $t = \frac{z - z_1}{c}$. Como cada ponto da reta equivale a um só valor de t, temos $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$.

As equações acima são denominadas equações simétricas da reta que passa por $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a,b,c)$.

Exemplo

Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto A(3, 0, – 5) e tema direção do vetor $\vec{v} = (\,2,2,-1)$.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

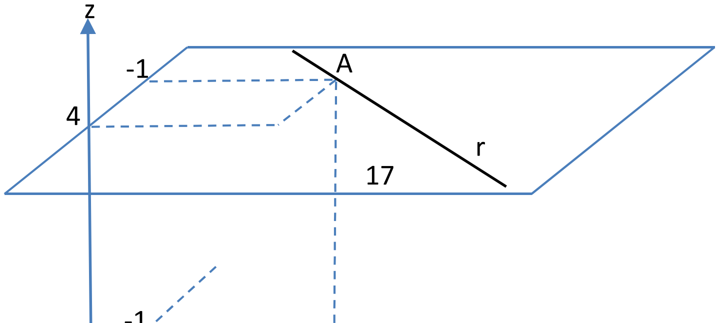
Para este tomamos um caso particular. Seja r a reta definida pelo ponto A(2, – 4, – 3) e pelo vetor $\vec{v} = (\,1,2,-3)$ e expressa pelas equações simétricas r: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$.

A partir destas equações podem-se expressar duas variáveis em função da terceira. Como por exemplo y = 2x – 8 e z = – 3x + 3.

RETAS PARALELAS AOS PLANOS COORDENADOS

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz e yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Nesse caso uma das componentes do vetor é nula.

Na figura, a reta r (r // xOy) e passa pelo ponto A(– 1, 2, 4) e tem vetor diretor $\vec{v} = (2,3,0)$ (a 3ª componente e nula $\vec{v}$ // xOy).



Um sistema paramétrico de r é: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$

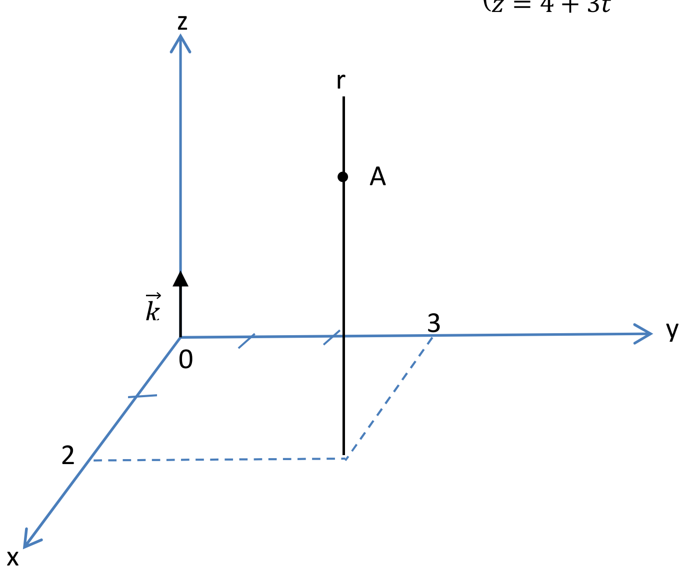
RETAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS

Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Ou e Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$ ou a $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Neste caso duas das componentes do vetor são nulas.

Exemplo:

Seja a reta r que passas pelo por A(2, 3, 4) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, 3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo Oz.

A reta r pode ser representada pelas equações $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

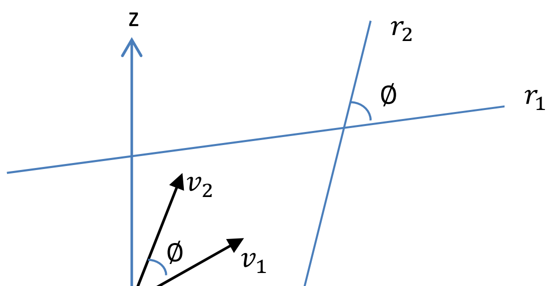


ÂNGULOS DE DUAS RETAS

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, respectivamente. Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e um vetor diretor de r_2. Sendo ∅ este ângulo temos:

$cos\ \emptyset = \frac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|.|\vec{v_2}|}\ , com\ 0\ \leq \emptyset\ \leq\ \frac{\pi}{2}.$

Calcular o ângulo entre as retas:



$r_1 = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ e $r_1 = \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$

RETAS ORTOGONAIS

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, respectivamente. Então:

$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0$.

Exemplo:

As retas $r_1 = \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$ $r_2 = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$ são ortogonais. Pois $\vec{v}_1 = (1, -2, 4)$ e $\vec{v}_2 = (-2,\ 1, 1)$ são os vetores diretores de r_1 e r_2 e têm como produto zero.

RETA ORTOGONAL A DUAS RETAS

Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, respectivamente. Toda reta ao mesmo tempo ortogonal a r_1 e r_2 terá direção deum vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v} . \overrightarrow{v_1} = 0 \\ \vec{v} . \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases}$$

Neste caso: $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} . \overrightarrow{v_2}$.

Exemplo

Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A(3, 4, – 1) e é ortogonal ás retas

$$r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4) \ \ e \ r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Exemplos

Verificar se as retas r_1 e r_2 são concorrentes e, em caso afirmativo, determinar o ponto de interseção:

A) $r_1 : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ B) $r_3 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ Z = -x \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

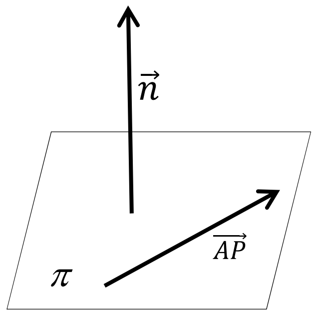
PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Determinar a equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, – 3, 4) e B(1, – 1, 2) e verificar se os pontos C(2,5; – 4; 5) e D(– 1, 3, 4) pertencem a r.
2) Escreva as equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta r: (x, y, z) = (1, 4. 3) + t(0, 0, 1).

3) A reta r passa pelo ponto A(4, – 3, – 2) e é paralela à reta $r_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Se P(m, n, – 5) $\in$r, determine m e n.
4) O ponto P(m, 1, n) pertence à reta que passa por A(3, – 1, 4) e B(4, – 3, – 1). Determine P.
5) Os pontos M_1(2, – 1, 3), M_2(1, – 3, 0) e M_3(2, 1, – 5) são pontos médios de um triângulo ABC. Obter equações paramétricas da reta que contem o lado cujo ponto médio é M_1.
6) Verificar se os pontos P_1(5, – 5, 6) e P_2(4, – 1, 12) pertencem a reta r: $\frac{x-3}{-1} + \frac{y+1}{2} + \frac{z-2}{-2}$.
7) Obter equações reduzidas na variável x, da reta
   a) Que passa por A(4, 0, – 3) e tem direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$.
   b) Que passa pelos pontos A(1, – 2, 3) e B(3, – 1, – 1).
   c) Que passa pelos pontos A(–1, 2, 3) e B(2, – 1, 3).
   d) Dada por $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$
8) Na reta $r_3: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ Z = x - 1 \end{cases}$, determine o ponto de
   a) Ordenada igual a 9;
   b) Abscissa igual ao dobro da cota;
   c) Ordenada igual ao triplo da cota.
9) Escreva as equações paramétricas da reta que passa por:
   a) A(3, – 2, 4) e é paralela ao eixo dos x;
   b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xOy.
   c) A(– 2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y.
   d) A(4, – 1, 3) e tem a direção $3\vec{i} - 2\vec{j}$.
   e) A(3, – 1, 3) e B(3, 3, 4).
10) Determine o ângulo entre as seguintes retas
   a) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ Z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \frac{z+1}{-1}\ ; x = 4$
   b) $r_1: \frac{x-4}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z+1}{-2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$
11) Determinar o valor de n para que seja de 30º o ângulo entre as retas
   a) $r_1: \frac{x-2}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} y = nx + 5 \\ Z = 2x - 2 \end{cases}$
   b) $r_1: \begin{cases} y = nx - 1 \\ Z = 2x \end{cases}$ e $r_2: eixo\ Ox$.

O PLANO

Equação geral do plano



Seja A(x_1, y_1, z_1) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, com $\vec{n}$, não nulo, um vetor ortogonal ao plano.
Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a n todo vetor representado em π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é. $\vec{n}\,.(P - A) = 0$. Efetuando essa multiplicação, obtemos:
$ax + by + cz + d = 0.$

Exemplo:

1) Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2, −1, 3) e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ com um vetor ortogonal.
2) Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2, 1, 3) e é paralelo ao plano de equação: $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

3) A reta $r: \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A(2, 1, – 2). Determine uma equação geral de π.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano

Seja A x_0, y_0, z_0) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos ao plano π, porém não paralelos entre si.

Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existem números reais h e t tais que $P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$ ou em coordenadas $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1)$ +t(a_2, b_2, c_2), h e t $\in$ R.

Pela condição de igualdade $\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = Y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases}$

Exemplo:

1) Seja o plano π que passa pelo ponto $A = (2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral para o plano π.
2) Dado o plano π determinado pelos pontos A(1, – 1, 2), B(2, 1, – 3) e C(– 1, – 2 , 6), obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.
3) Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determine um sistema de equações paramétricas de π.
4) Determinar uma equação geral do plano π que contenha as retas

   $r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$

Equação vetorial de um paralelogramo

Dados os pontos A, B e C não alinhados, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determina o paralelogramo cuja equação vetorial é $P = A + h(\overrightarrow{AB}) + t(\overrightarrow{AC})$ ou $P = A + h(B - A) + t(C - A)$ onde p é um ponto qualquer deste paralelogramo.

Ângulo de dois planos

Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor ortogonal a $\pi_1$forma com um vetor ortogonal a π_2. Sendo θ este ângulo, tem-se $cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Nota: Planos perpendiculares $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Exemplo:

1) Determinar o ângulo entre os planos $\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0$ e $\pi_2: x + y - 4 = 0$.
2) Verifique se os planos são perpendiculares:
   a) $\pi_1: 3x + y - 4z + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 6y + 3z = 0$
   b) $\pi_1: x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e o plano.

Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π.

Conclui-se que:

$i)$ $r // \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} . \vec{n} = 0$

$ii)\ \ r\perp\pi \Leftrightarrow \vec{v}\ //\vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha.\vec{n}$

Reta contida em plano

Uma reta r está contida em um plano π.

i) Dois pontos A e B de r forem também de π ou

ii) $\vec{v}.\vec{n} = 0$, onde $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$, sendo $A \in r$.

Interseção de dois planos

Sejam os planos não paralelos

$\pi_1: 5x - y - 5 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z = 7$

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar. Para tanto, dentre os vários procedimentos, apresentaremos dois.

i) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x, y, z) \in r$ devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos constituem a solução do sistema:

$$r: \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

O sistema possui infinitas soluções que, em termos de x é $r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases}$.

Intersecção de reta com plano

Sejam a reta e o plano de equações:

$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $\pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$

Determine o ponto de intersecção.

Como qualquer ponto de r è da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$, basta verificar se um deles é comum a π.

$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0$. Daí resulta t = -1 e substituindo encontra-se $P = (-3, 2, 4)$.

Exercícios

1) Seja o plano $\pi: 3x + y - z - 4 = 0$, calcular:
   a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
   b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
   c) O valor de k para que o ponto $P(k, 2, k - 1)$pertença a π.
   d) O valor de k para que o plano $\pi_1: kx - 4y + 4z - 7 = 0$seja paralelo a π.
2) Determine uma equação geral do plano que:
   a) É paralelo a $\pi: 2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contém o ponto $A(4, -2, 1)$.
   b) É perpendicular à reta $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$e que contém o ponto $A(-1, 2, 3)$.
   c) Passa pelo ponto médio do segmento de extremos $A(5, -1, 4)$ e $B(-1, -7, 1)$ e seja perpendicular a π.
3) Dada a equação geral o plano $\pi: 3x - 2y - z - 6 = 0$, determine um sistema de equações paramétricas de π.
4) Sendo $\pi: \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$ a equação paramétrica de um plano π, obter sua equação geral.
5) Determine o valor de α para que os pontos $A(\alpha, 1{,}9), B(2, 3, 4), C(-4, -1{,}6) e\ D(0{,}2{,}4)$sejam coplanares.
6) Determine uma equação geral do plano nos seguintes casos:
   a) O plano passa por $A(2{,}0, -2)$ e é paralelo aos vetores $u = i - j + k\ e\ v = 2i + 3j$.
   b) O plano passa pelos pontos $A(-3{,}1, -2) e\ B(-1{,}2{,}1)$ e é paralelo á reta $r: \frac{x}{2} = \frac{z}{-3}\ e\ y = 4$.
   c) O plano contém os pontos $A(2{,}1{,}2) e\ B(1, -1{,}4)$ e é perpendicular ao plano xOy.
   d) O plano contém a reta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + 2y - 3z = 0$.
   e) O plano contém o ponto $A(4{,}1{,}1)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1: 2x + y - 3z = 0\ e \pi_2: x + y - 2z - 3 = 0$.
7) Os pares de retas $r_1\ e\ r_2$ são paralelas ou concorrentes? Encontre uma equação geral do plano que as contém.

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

c) $r_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$

d) $r_1: \begin{cases} x = z \\ y = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

8)