Raízes de equações

MÉTODO NEWTON-RAPHSON

Além da dedução geométrica, o método de Newton-Raphson pode ser deduzido a partir da expansão da série de taylor. Essa dedução é útil pois dá informação sobre a taxa de convergência do método.

Comentamos sobre truncamento e série de Taylor no Slide 6

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (1)$$

Onde ε está em algum ponto do intervalor entre x_i a x_{i+1} . Uma versão aproximada é obtida truncando-se a série depois do termo da primeira derivada:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Raízes de equações

Na intersecção com o eixo x, f(x_{i+1}), deveria ser 0, ou

$$0 = f\left(x_i\right) + f^{'}\left(x_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) \qquad (2)$$

Que pode ser reescrita como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{'}(x_i)}$$

Portanto esta é a dedução usando a série de Taylor.

• Além da dedução, a série de Taylor pode ser usada para fazer uma estimativa do erro da fórmula, visto que se a série de Taylor completa fosse usada, resultaria em um resultado exato.

• Neste caso $x_{i+1} = x_r$, na qual x_r é o valor verdadeiro da raiz .

Raízes de equações

Substituindo esse valor junto com f (x_r)=0 na equação (1), obtém-se:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x_r - x_i)^2 \qquad (3)$$

A Eq. (2) pode ser subtraída da Eq. (3)

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x_r - x_i)^2 \qquad (4)$$

Perceba que o erro é igual à diferença entre x_{i+1} e o valor verdadeiro x_r , como em:

$E_{t,i+1} = x_r - x_{i+1}$

Então, a Eq. (4) pode ser reescrita como:

$$0 = f'(x_i)E_{t,i+1} + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}E_{t,i}^2 \qquad (5)$$

Raízes de equações

Se supusermos a convergência, ambos x_{i+1} e $\mathcal{E}$ deveriam ser aproximados pela raiz x_r e a Eq. (5) pode ser organizada para fornecer:

$$E_{t,i+1} = -\frac{f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2 \qquad (6)$$

De acordo com a Eq. (6) o erro é aproximadamente proporcional ao quadrado do erro anterior. Isso significa que o número de casas decimais corretas aproximadamente dobra a cada iteração. Tal comportamento é chamado de **convergência quadrática**.

Raízes de equações

Análise do erro do método Newton-Raphson

Aplique (6) em:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Solução: A primeira derivada da função é:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

O que pode ser calculado em x_r = 0,56714329 como f ' (0,56714329)= -1,56714329.
A segunda derivada é:

$$f''(x) = e^{-x}$$

O que pode ser calculado como f " (0,56714329)= 0,56714329. Esses resultados podem ser substituídos em (6)

Raízes de equações

Análise do erro do método Newton-Raphson

Aplique (6) em:

$$E_{t,i+1} \cong -\frac{0,56714329}{2(\ -1,56714329)} E_{t,i}^2 = 0,18095 E_{t,i}^2$$

Do exemplo do Slide 3 de zeros (Tabela de convergência) de funções para o método Newton-Raphson o erro inicial era $E_{t,0}$ = 0,56714329.

$E_{t,o} = x_r - x_0$ = 0,56714329 – 0 = 0,56714329

Substituindo na equação do erro

$$E_{t,1} = 0,18095(0,56714329)^2 = 0,0582$$

Para a próxima iteração:
$E_{t,1} = x_r - x_1$ = 0,56714329 – 0,5 = 0,06714329

Substituindo na equação do erro

Raízes de equações

Análise do erro do método Newton-Raphson

$$E_{t,2} = 0{,}18095\left(0{,}06714329\right)^2 = 0{,}0008158$$

Para a próxima iteração:
$E_{t,2} = x_r - x_2 = 0{,}56714329 – 0{,}566311003 = 0{,}0008323$

Substituindo na equação do erro:

$$E_{t,3} = 0{,}18095\left(0{,}0008323\right)^2 = 0{,}000000125$$

Para a próxima iteração:
$E_{t,3} = x_r - x_3 = 0{,}56714329 – 0{,}567143165 = 0{,}000000125$

Substituindo na equação do erro:

$$E_{t,4} = 0{,}18095\left(0{,}000000125\right)^2 = 2{,}8 \times 10^{-15}$$

Raízes de equações

A estimativa do erro melhora dessa forma porque, conforme nos aproximamos da raiz, x e $\mathcal{E}$ são mais bem aproximados por x_r . Essa foi a nossa suposição para obtenção da fómula do erro.

Para este caso, o método de Newton-Raphson é, de fato, aproximadamente proporcional (por um fator de 0,18095) ao quadrado do erro da iteração anterior.

Raízes de equações

Armadilhas do Método Newton- Raphson

Embora este método seja em geral muito eficiente, há situações nas quais ele tem um desempenho insatisfatório. Como no caso abaixo:

Determine a raiz positiva de $f(x) = x^{10} - 1$ usando o Método de Newton-Raphson e uma aproximação inicial de x=0,5.

A fórmula de Newton-Raphson para esse caso é

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$$

Raízes de equações

Iteração	x
0	0,5
1	51,65
2	46,65
3	41,8365
4	37,65285
5	33,887565
.	
.	
.	
∞	1,00000

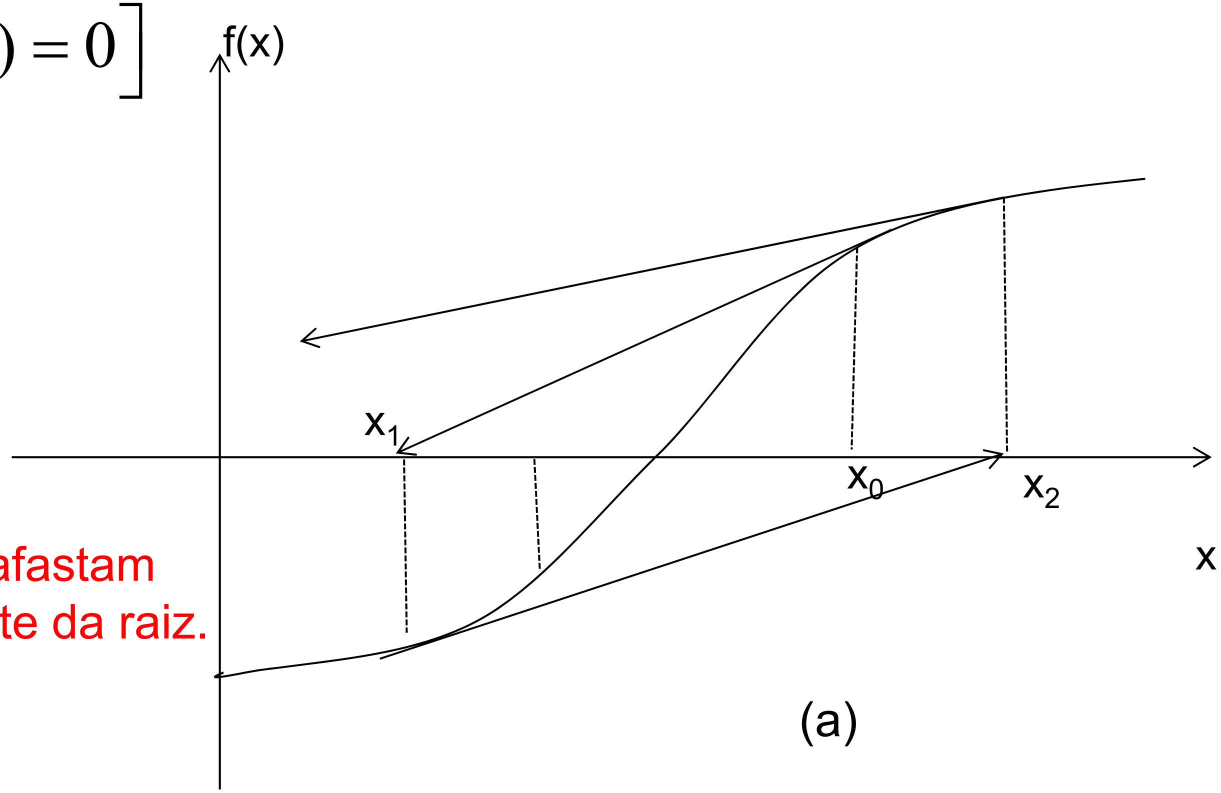
A técnica está covergindo para a raiz verdadeira de 1, mas a uma taxa muito lenta

Raízes de equações

Além da convergência lenta em razão da natureza da função, outras dificuldades podem aparecer.

A figura abaixo descreve uma situação no qual ocorre um ponto de inflexão, na vizinhança de uma raiz.

$$\left[isto, \acute{e} \;\; f''(x) = 0 \right]$$

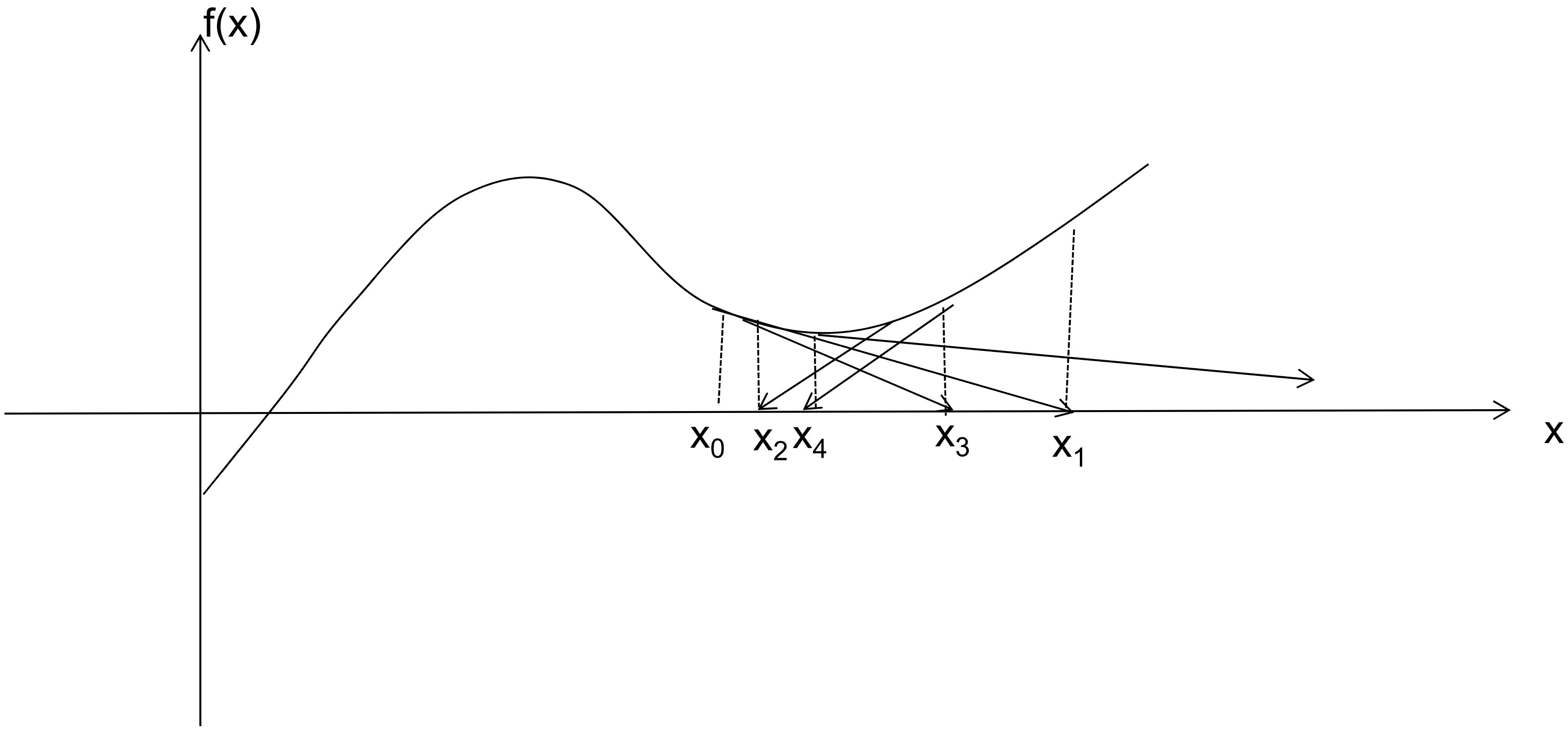


As iterações se afastam progressivamente da raiz.

(a)

Raízes de equações

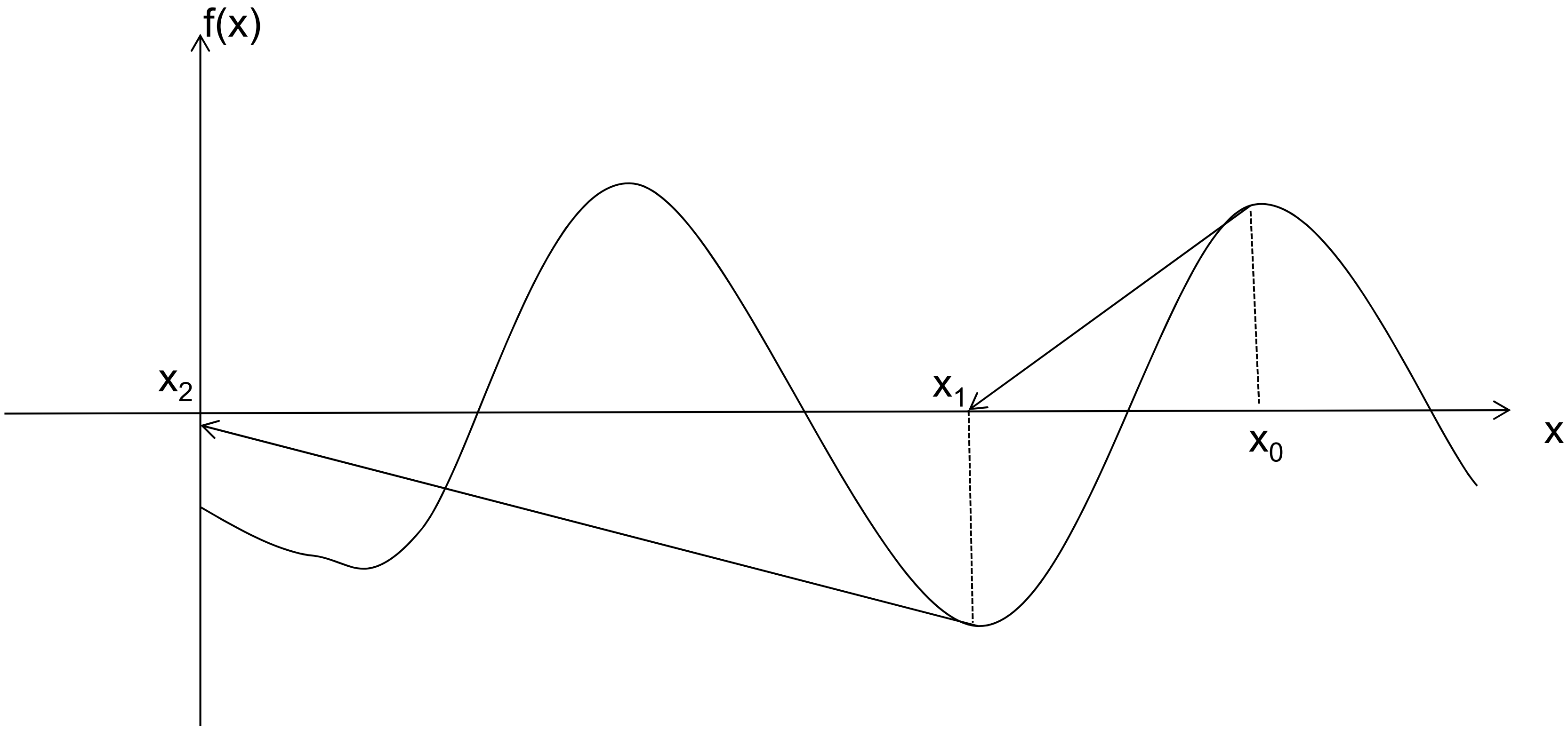
A fig. (b) ilustra a tendência da técnica de Newton-Raphson em oscilar em torno de uma posição de máximo e mínimo. Tais oscilações podem persistir , ou como em (b), é Atingida uma inclinação próxima a zero, em que a solução é mandada para longe da área de interesse.



(b)

Raízes de equações

A fig. (c) mostra como uma aproximação inicial que esteja próxima de uma raiz pode pular para uma posição longe por diversas raízes.

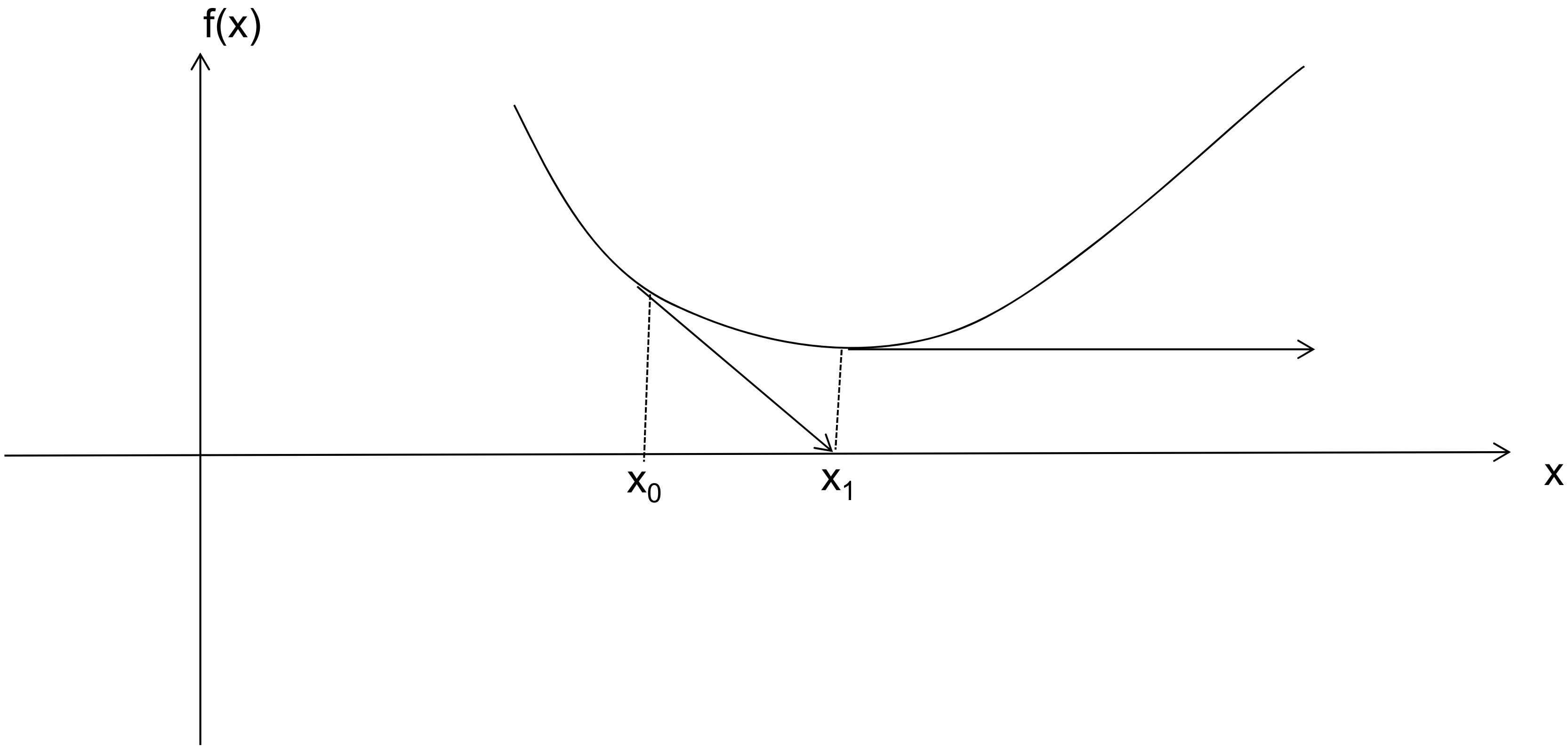


(c)

Raízes de equações

Essa tendência de se afastar da área de interesse se dá porque
foram encontras inclinações próximas de zero. Obviamente, uma inclinação nula

$\left[f^{'}(x) = 0 \right]$ é, na verdade, um desastre para a fórmula de Newton-Raphson. Como mostrado em (d), isso significa que a solução dispara horizontalmente e nunca atinge o eixo x.



(d)

Raízes de equações

Conclusões:

• Não existe nenhum critério de convergência geral para o método de Newton-Raphson

• Sua convergência depende da natureza da função e da precisão da aproximação Inicial.

• A única alternativa, é ter uma aproximação inicial que esteja "suficientemente" próxima da raiz.

• Para algumas fuções, nenhuma aproximação funcionará.

• Boas aproximações dependem em geral do conhecimento do problema físico.

Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE

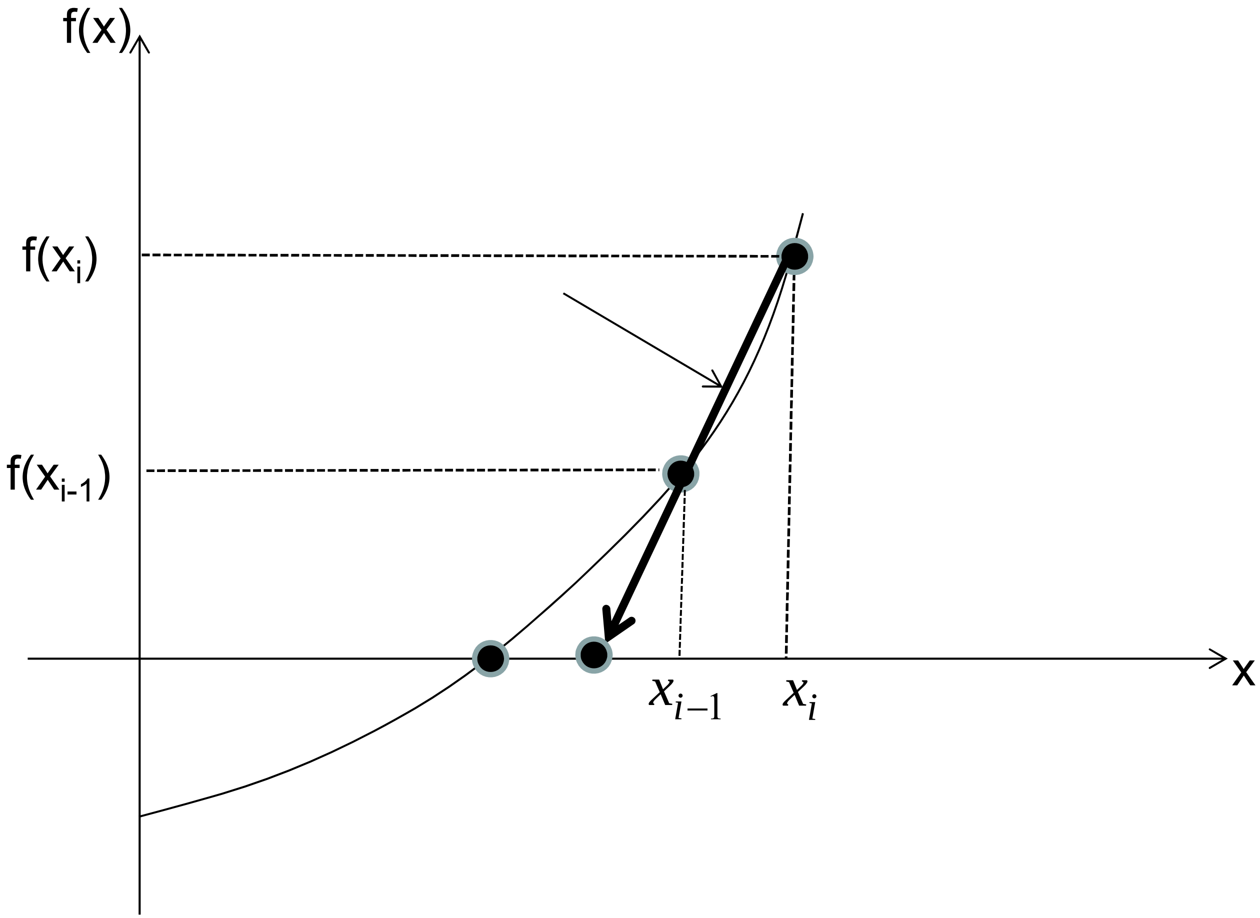
• Um problema potencial na implementação do método de Newton-Raphson é o cálculo da derivada .

• Embora isso não seja um incoveniente para polinômios e muitas outras funções, há certas funções cujas derivadas podem ser extremamente difíceis ou inconvenientes para calcular.

• Nestes casos, a derivada pode ser aproximada por uma diferença dividida atrasada (ou também dita regressiva).

$$f^{'}(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \qquad (7)$$

Raízes de equações



Similar ao método de Newton-Rapson.

- Uma estimativa da raiz é obtida extrapolando-se uma tangente da função até o eixo x.

- Usa uma diferença ao invés de uma derivada.

Raízes de equações

Aplicando-se a Eq.(7) na fórmula de Newton-Raphson obtém-se:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\left(x_{i-1} - x_i\right)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \qquad (8)$$

A Eq. (8) representa a fórmula do método da secante.

- Esta abordagem exige duas estimativas iniciais de x.

- Mas como não é exigido que f(x) mude de sinal entre as estimativas, este método não é classificado como intervalar.

Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE

Use o método da secante para fazer uma estimativa da raiz de $f(x) = e^{-x} - x.$
Comece com as estimativas iniciais $x_{-1} = 0$ e $x_0 = 1{,}0$.

Solução : Lembre-se que a raiz verdadeira é 0,56714329…

Primeira iteração:

$$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1{,}0$$

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0{,}63212$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0{,}63212(0-1)}{1-(-0{,}63212)} = 0{,}61270 \qquad \varepsilon_t = 8{,}0\%$$

Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE

Segunda iteração:

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0,63212$$

$$x_1 = 0,61270 \qquad f(x_1) = -0,07081$$

Observe que ambas as estimativas estão agora do mesmo lado da raiz.

$$x_2 = 1 - \frac{-0,07081(1-0,63212)}{-0,63212-(-0,07081)} = 0,56384 \qquad \varepsilon_t = 0,58\%$$

Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE

Terceira iteração:

$$x_1 = 0,61270 \qquad f(x_1) = -0,07081$$

$$x_2 = 0,56384 \qquad f(x_2) = 0,00518$$

$$x_3 = 0,56384 - \frac{0,00518(0,61270 - 0,56384)}{-0,07081 - (-0,00518)} = 0,56717 \qquad \varepsilon_t = 0,0048\%$$

Raízes de equações

A diferença entre o método da Secante e da Falsa Posição

Observe a semelhança entre o método da secante e o método da falsa posição

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\left(x_{i-1} - x_i\right)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \quad (Secante) \qquad (8)$$

$$x_r = x_u - \frac{f\left(x_u\right)\left(x_l - x_u\right)}{f\left(x_l\right) - f\left(x_u\right)} \quad (Falsa\ Posição - Slide\ 3) \qquad (3)$$

As equações acima são idênticas em uma comparação termo a termo.

• Ambas usam duas estimativas iniciais para calcular uma aproximação da inclinação da função que é utilizada para projetar o eixo x para uma nova estimativa da raiz.

• Entretanto, uma diferença crítica entre os métodos é como um dos valores iniciais é Substituído pela nova estimativa.

Raízes de equações

A diferença entre o método da Secante e da Falsa Posição

- No método da falsa posição a última estimativa da raiz substitui qualquer um dos Valores iniciais que forneça o valor da função com o mesmo sinal de que $f(x_r)$.

- Consequentemente, as duas estimativas sempre delimitam o valor da raiz.

- Portanto, para propósitos práticos, o método sempre converge porque a raiz é Mantida dentro do intervalo.

- Em contraste, o método da secante substitui os valores em sequência estrita, com o Novo valor x_{i+1} substituindo o x_i e x_i substituindo x_{i-1} .

- Para certos casos, isso pode levar à divergência.

Raízes de equações

Comparação da convergência das Técnicas da Secante e Falsa Posição

Problema: Use os métodos da falsa posição e da secante para fazer uma estimativa da raiz $f(x) = \ln(x)$ x=0,5. Comece os cálculos com os valores $x_l = x_{i-1} = 0{,}5$ e $x_u = x_i = 5{,}0$.

Solução: No método da falsa posição, o uso da Eq. (3) e o critério de delimitação para substituir as estimativas resultam nas seguintes iterações:

Iteração	x_l	x_u	x_r
1	0,5	5,0	1,8546
2	0,5	1,8546	1,2163
3	0,5	1,2163	1,0585

Como pode ser visto as estimativas estão convergindo para a raiz verdadeira, que é igual a 1.

Raízes de equações

Comparação da convergência das Técnicas da Secante e Falsa Posição

Para o método da secante, usar a Eq. (8) e o critério sequencial para substituir as estimativas resultam em:

Iteração	X_{i-1}	x_i	X_{i+1}
1	0,5	5,0	1,8546
2	5,0	1,8546	-0,10438

A abordagem é divergente.

Raízes de equações

Exercício 1)

Determinar a maior raíz real de .

$f(x)=2x^3 -11,7x^2 +17,7x -5$

a) graficamente.

b) Pelo método do ponto fixo (três iterações, $x_0 = 3$);

c) Pelo método de Newton-Raphson (três iterações, $x_0 = 3$);

d) Pelo método da secante (três iterações, $x_{-1} = 3$ e $x_0 = 4$)

Calcule o erro relativo percentual para cada caso.