IFMT - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Álgebra Linear - 2º Semestre 2015

*Prof*ª Aline Brum Seibel

Determinantes e matrizes inversas

PROPRIEDADES DETERMINANTES

$*$ Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz $\mathbf{A}$ são nulos, então $\det \mathbf{A} = 0$

$*$ $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$

$*$ Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

$*$ Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

$*$ O determinante de uma matriz que tem duas linhas ou colunas iguais é zero.

$*$ O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

$*$ $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ mas $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$

EXERCÍCIOS

1) Mostre que a inversa de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$, quando existe, é única.

2) Mostre que se as matrizes $\mathbf{A}_{n\times n}$ e $\mathbf{B}_{n\times n}$ são invertíveis, então $\mathbf{AB}$ também é invertível, tendo-se ainda que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

3) Sempre que possível calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Calcule o determinante de cada uma das matrizes e indique as que são invertíveis.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}$

6) Sabendo que os valores de γ e δ são tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & -2 \end{vmatrix} = 1$$

calcule:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}$$

7) Mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)$$

8) Mostrar que a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

é inversível para qualquer valor de $a, b, c \in \Re$ e depois encontre sua inversa.

9) Se **A**, **B** e **C** são matrizes inversíveis de mesma ordem, determinar a matris **X** de maneira que $\mathbf{A(B^{-1}X) = C^{-1}A}$.

10) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ calcular $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA}, ..., \mathbf{A}^n = \mathbf{A...A}$.

GABARITO

3) *a*) Não invertível *b*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *f*) Não invertível *g*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *h*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) *a*) -3, *b*) 0, *c*) 9, *d*) 1, *e*) 30, *e*) *f*) 0, *g*) 3, *h*) 0.

5) $a)$ 5, $b)$ 10, $c)$ 5, $d)$ 10.

6) $-\delta\gamma$

8) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$

9) $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$.