Raízes de equações

MÉTODOS ABERTOS:

Anteriormente vimos os métodos intervalares: Bissecção e Falsa Posição.

- Raiz localizada dentro de um intervalo (inferior e superior).

- Aplicações repetidas desse método sempre resultam em estimativas mais próximas do valor verdadeiro da raiz.

- São chamados métodos convergentes.

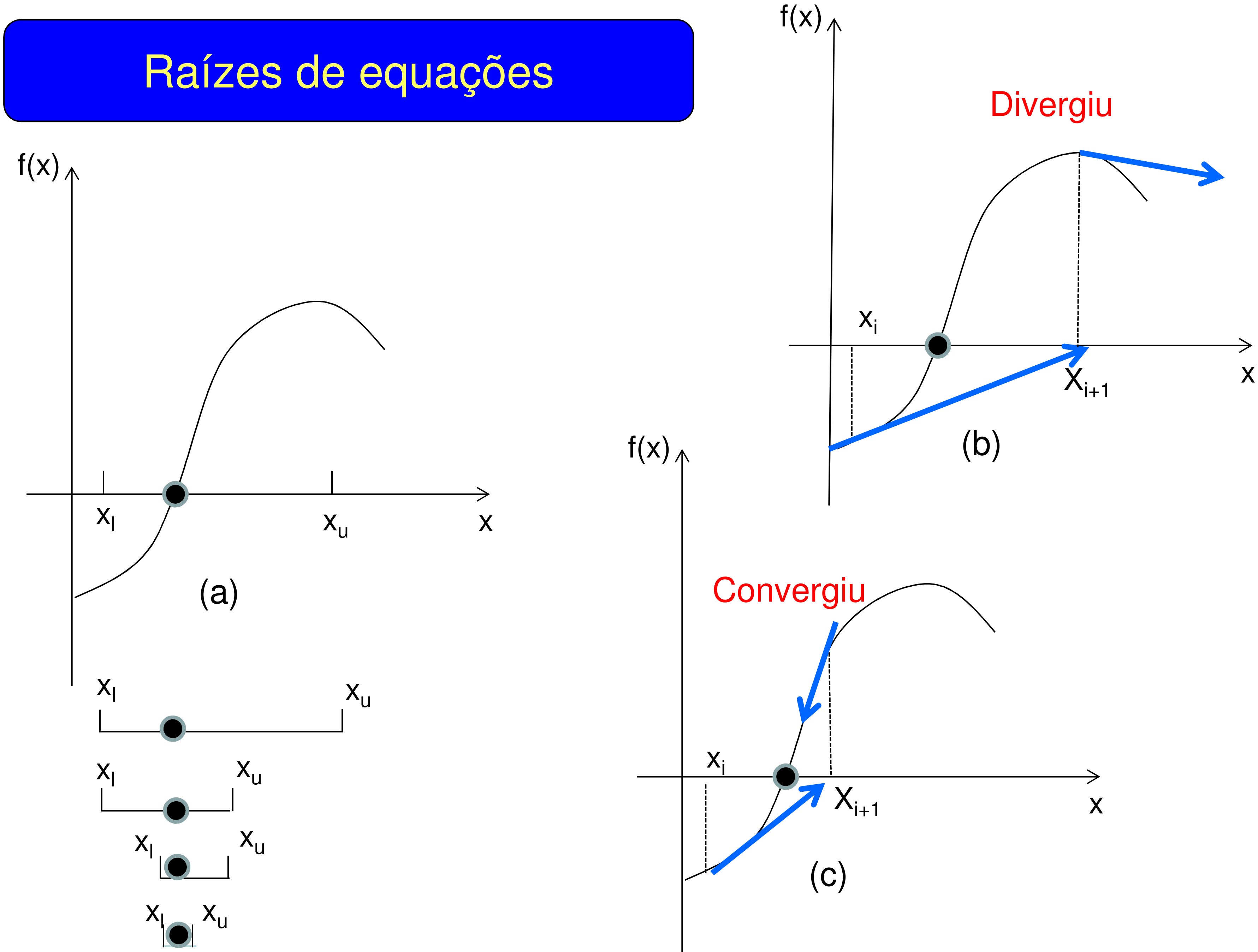
Métodos abertos:

- Exigem apenas um único valor para x ou dois valores iniciais que não delimitam necessariamente a raíz.

- Em algumas vezes eles divergem e se afastam da raiz verdadeira a medida que os cálculos prosseguem.

- Quando convergem, em geral, o fazem muito mais rápido que os intervalares.

Raízes de equações



Raízes de equações

(a) Método intervalar (Bissecção) – raiz está restrita ao interior do intervalor x_l e x_u .
(b) e (c)- é usada uma fórmula para avançar de x_i e x_{i+1} de forma iterativa.
(b) diverge;
(c) converge.

Tal fórmula pode ser deduzida para a iteração de ponto fixo simples (ou, também é chamada de, iteração de um ponto, substituições sucessivas ou aproximações sucessivas).

- Reescreve-se a equação f(x)=0 de modo que x esteja isolado do lado esquerdo da equação:

- x = g(x) (1)

- Pode-se conseguir essa transformação ou por manipulação algébrica ou simplesmente somando x em ambos os lados da equação original. Por exemplo:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \textit{pode ser manipulada de forma simples para obter}$$

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Raízes de equações

(a) Método intervalar (Bissecção) – raiz está restrita ao interior do intervalor x_l e x_u .
(b) e (c)- é usada uma fórmula para avançar de x_i e x_{i+1} de forma iterativa.
(b) diverge;
(c) converge.

Tal fórmula pode ser deduzida para a iteração de ponto fixo simples (ou, também é chamada de, iteração de um ponto, substituições sucessivas ou aproximações sucessivas).

- Reescreve-se a equação f(x)=0 de modo que x esteja isolado esquerdo da equação:

- x = g(x) (1)

- Pode-se conseguir essa transformação ou por manipulação algébrica ou simplesmente somando x em ambos os lados da equação original. Por exemplo:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \textit{pode ser manipulada de forma simples para obter}$$

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Raízes de equações

Enquanto sen (x) = 0 pode ser colocada na forma da equação (1) somando x a ambos os lados da equação:

x = sen(x) + x

A utilidade da equação (1) é que ela fornece uma fórmula para **prever um novo** valor de x **em função do valor velho de x**.

- Portanto, dada uma aproximação inicial para a raiz x_i , a Eq. (1) pode ser usada para calcular a estimativa para x_{i+1} expressa pela fórmula iterativa:

$x_{i+1} = g(x_i)$ (2)

O erro aproximado é dado por:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

Raízes de equações

Exemplo: Iteração de Ponto Fixo Simples.

Use a iteração de ponto fixo simples para localizar a raiz de:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Solução: A função pode ser separada diretamente e expressa na forma da Eq. (2)

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

Começando a calcular a aproximação inicial em $x_0 = 0$, essa equação iterativa pode ser usada para calcular

Raízes de equações

Exemplo: Iteração de Ponto Fixo Simples.

i	x_i	$\varepsilon_a(\%)$
0	0	
1	1,000000	100,0
2	0,367879	171,8
3	0,692201	46,9
4	0,500473	38,3
5	0,606244	17,4
6	0,545396	11,2
7	0,579612	5,9
8	0,560115	3,48
9	0,571143	1,93
10	0,564879	1,11

Assim a cada iteração traz o valor estimado para mais perto do valor verdadeiro: 0,56714329.

Raízes de equações

Uma abordagem gráfica alternativa consiste em separar a equação em duas componentes:

Então, as duas equações:

$y_1 = f_1(x)$

e

$y_2 = f_2(x)$

Podem ser traçadas separadamente. Os valores de x correspondentes às intersecções dessas funções representam as raízes f(x) = 0.

Raízes de equações

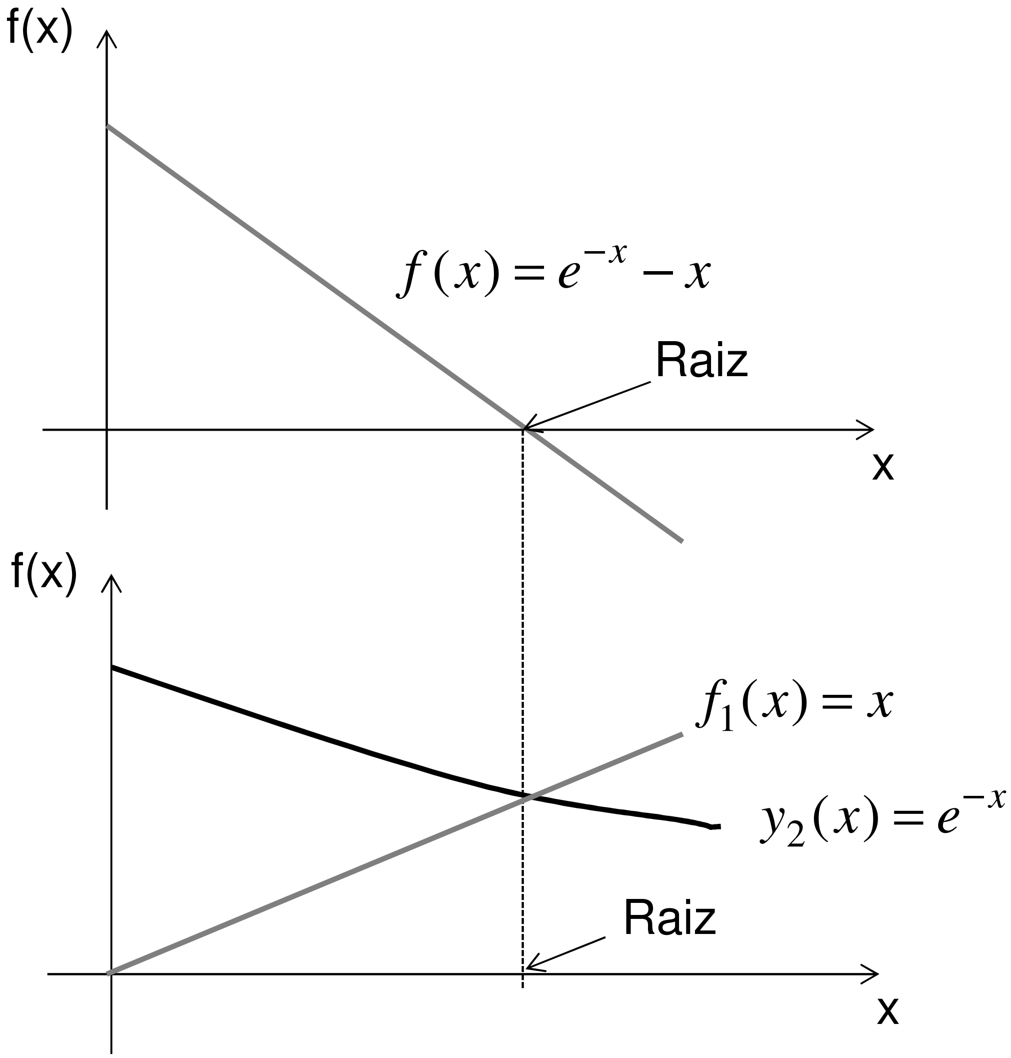
Método Gráfico das Duas Curvas.

Separe a equação $e^{-x} - x = 0$ e determine as suas raízes graficamente.

Solução: Reformular a equação como $y_1 = x$ e $y_2 = e^{-x}$. Os seguintes valores podem ser calculados.

x_1	y_1	y_2
0,0	0,0	1,000
0,2	0,2	0,819
0,4	0,4	0,670
0,6	0,6	0,549
0.8	0.8	0,449
1,0	1,0	0,368

Raízes de equações



Raízes de equações

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

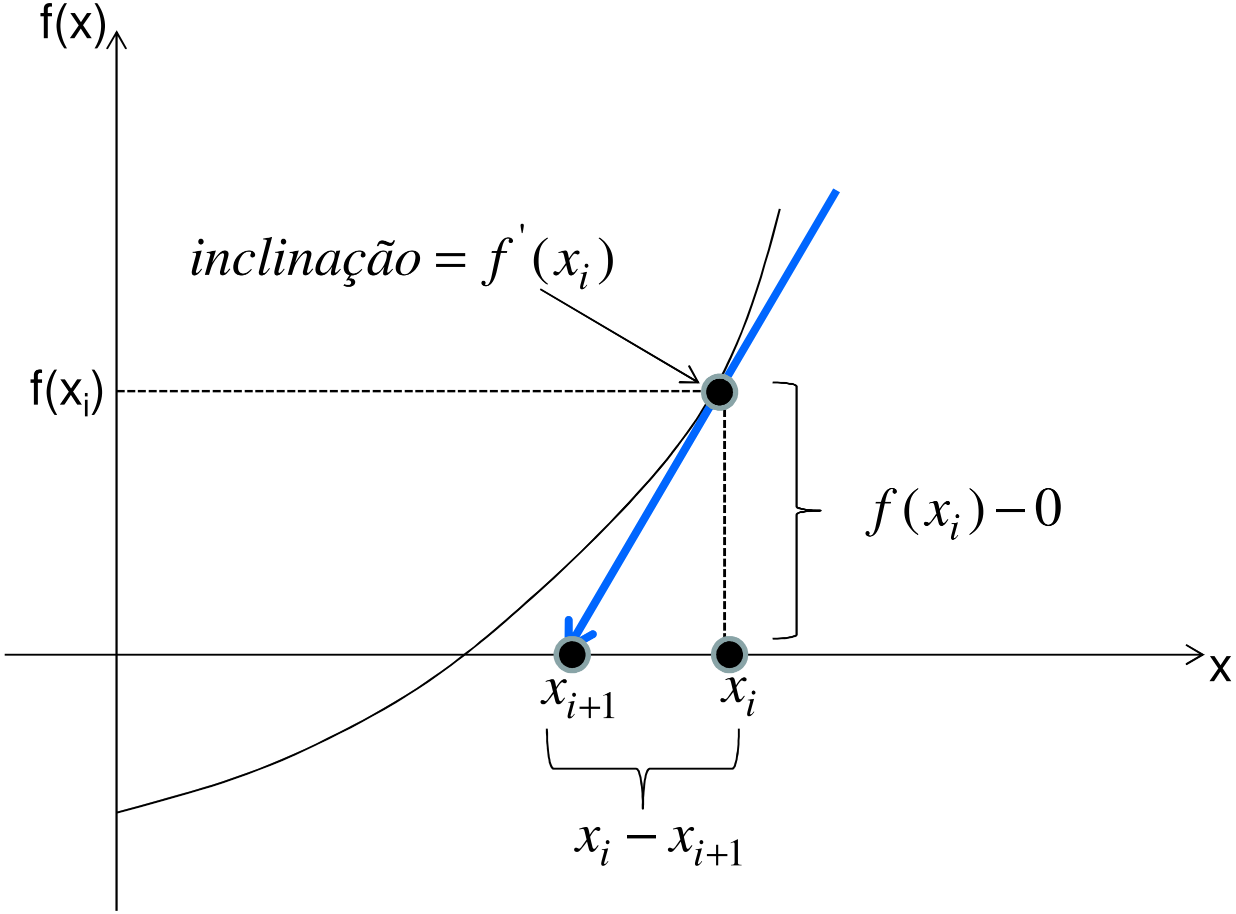
Talvez a fórmula mais amplamente usada para localizar uma raiz seja a equação de Newton-Raphson.

Se a aproximação inicial da raiz for x_I , pode-se estender uma reta tangente a partir do ponto $[x_I , f(x_I)]$.

O ponto onde essa tangente cruza o eixo x usualmente representa uma estimativa melhorada da raiz.

O método de Newton-Raphson pode ser deduzido com base em sua interpretação geométrica.

Raízes de equações



A tangente à função em x_i , isto é, $f^{'}(x)$ é prolongada até o eixo x para fornecer uma estimativa da raiz em x_{i+1} .

Raízes de equações

A partir da figura, a primeira derivada em x é equivalente a inclinação

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

Que pode ser reorganizada:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (3)$$

Que é a chamada **fórmula de Newton-Raphson**.

Raízes de equações

Método de Newton-Raphson.

Use o método de Newton-Raphson para fazer uma estimativa da raiz de:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Utilizando uma aproximação inicial de $x_0 = 0$.

Solução: A primeira derivada da função pode ser calculada como:

$$f^{'}(x) = -e^{-x} - 1$$

Que pode ser substituída em (3), o que resulta em:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Raízes de equações

Começando com a aproximação inicial em $x_0 = 0$, essa equação iterativa pode ser usada para calcular .

i	x_i	$\varepsilon_t(\%)$
0	0	100
1	0,500000000	11,8
2	0,566311003	0,147
3	0,567143165	0,0000220
4	0,567143290	$<10^{-8}$

Assim, a aproximação converge rapidamente para a raiz verdadeira. Observe que o erro relativo percentual verdadeiro converge muito mais rapidamente do que o método da iteração de ponto fixo simples.

Raízes de equações

Exercício 1)

Determine pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com erro menor ou igual a 10^{-3} . Use os métodos ponto fixo simples e Newton-Raphson,

a) $f(x)=x^3 -x^2 -12x =0$
b) $f(x)=2x - \text{sen}x+4=0$

Exercício 2)

Use a iteração de ponto fixo simples para localizer a raiz de:

$$f(x) = 2sen(\sqrt{x}) - \mathrm{x}$$

Use a aproximação inicial x_0 = 0,5 e ε_a =0,001%. Verifique que o processo é linearmente convergente.