IFMT - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Álgebra Linear - 2º Semestre 2015

Profª Aline Brum Seibel

Matrizes e Sistemas Lineares

1) Sejam $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, .

Encontre:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$
b) $\mathbf{A}.\mathbf{C}$
c) $\mathbf{B}.\mathbf{C}$
d) $\mathbf{C}.\mathbf{D}$
e) $\mathbf{D}.\mathbf{A}$
f) $\mathbf{D}.\mathbf{B}$
g) **-A**
h) **-D**

2) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $\mathbf{A}^t$=**A**, então $x =$?

3) Se **A** é uma matriz simétrica, então $\mathbf{A}^t$-**A**= ?

4) Se **A** é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^t$= ?

5) Se **A** é uma matriz diagonal, então $\mathbf{A}^t$= ?

6) Se **A** e **B** são matrizes simétricas, então **A.B=B.A**

7) Se **A.B=0**, então **A=0** ou **B=0**

8) Ache x, y, z e w se $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Suponha que **A**$\neq$**0** e **AB=AC**, onde **A**, **B** e **C** são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.
a) **B=C**?
b) Se existir uma matriz **Y** tal que **YA=I**, onde **I** é a matriz identidade, então **B=C**?

10) Explique por que, em geral, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ e $(\mathbf{A}-\mathbf{B}).(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

11) Dadas $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Mostre que $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$=**0**, **AC=A** e **CA=C**.

b) Use os resultados de *a*) para mostrar que $\mathbf{ACB}=\mathbf{CBA}$, $(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ e $(\mathbf{A}-\mathbf{B}).(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

12) Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos

sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

13) Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

14) Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 13).

15) Dado o sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

16) Determine k, para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

17) Resolva os sistemas achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

$a)$ $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

$b)$ $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

$f)$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

$g)\quad \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

18) Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.
a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
b) Encontre os valores de $k \in \Re$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad\; + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).