Trabalho de Álgebra Linear

Professora: Aline Brum Seibel

Alunos: Luis Alexandre Ferreira Bueno
Luiz Filipe de Jesus
Nicolas Timoteu Cuerbas
Vitor Bruno de Oliveira Barth

Conteúdos: Matrizes canônicas, transformações lineares, operadores lineares, autovalores, autovetores e polinômios característicos

1. Matrizes canônicas e transformações lineares

I) Base de uma Transformação: Seja V um espaço vetorial finito onde $n = dim(V)$ e $\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ a base deste espaço. Sendo assim, posso escrever todos os vetores deste espaço através da combinação $\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n}$, onde c pertence, claro, ao mesmo plano que os o espaço vetorial.

Neste caso, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ é a matriz das coordenadas de V.

Se tenho uma a transformação linear $T : V \to W$, assim como a base de V, consigo dizer onde estão todos os vetores de $T(V)$, pois segundo as regras c.i) e c.ii) podemos dizer que
$T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n}) = T(c_1\vec{v_1}) + T(c_2\vec{v_2}) + ... + T(c_n\vec{v_n}) = c_1T(\vec{v_1}) + c_2T(\vec{v_2}) + ... + c_nT(\vec{v_n})$

II) Imagem e núcleo de uma Transformação: Sendo $T : V \to W$, $Im(T) = \{\vec{w} \in W|$ $\vec{w} = T(\vec{v})$ para alguns $\vec{v} \in V\}$, ou seja, a Imagem de uma Transformação corresponde ao subespaço vetorial de W que possui elementos dados por $T(\vec{v})$. Sendo assim, logicamente $Im(T) \leq W$.

Já o núcleo de uma Transformação (denotado por $Ker(T)$) é dado por $Ker(T) = \{\vec{v} \in V$ $|T(\vec{v}) = 0\}$. Se a transformação é injetora, o núcleo é trivial, afinal $T(0)$ deve obrigatóriamente pertencer à $Im(T)$. Porém caso ela não seja injetora, o núcleo poderá ser um conjunto vetorial. Sendo assim, obrigatoriamente, $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V

Ex. 1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$
$Im(T) = ? \to T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z) = (2x, 3x) + (-y, y) + (z - 2z)$
$Im(T) = x(2, 3) + y(-1, 1) + z(1, -2) \to Im(T) = [(2, 3) + (-1, 1) + (1, -2)]$

$Ker(T) = ? \to Ker(T) = (x, y, z)|(2x - y + z, 3x + y - 2z) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \implies 5x - z = 0 \implies 5x = z$$

$$\implies 2x - y + z = 0 \implies 2x - y + 5x = 0 \implies 7x = y$$

$Ker(T) = \{(x, 7x, 5x)|x \in \mathbb{R}\}$

III) Isomorfismo: Seja $\phi : V \to W$ uma transformação linear. Para que ela exista, é necessário que sejam atendidas algumas condições:

a) V e W precisam estar sobre o mesmo plano
b) ϕ precisa ser bijetora, ou seja, todo elemento em W precisa ser necessáriamente e exclusivamente a imagem de um elemento em V
c) ϕ deve obedecer as regras de soma e multiplicação por escalar:
$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, $\phi(\vec{v_1}), \phi(\vec{v_2}) \in W$ e $c \in \mathbb{R}$
i) $\phi(\vec{v_1}) + \phi(\vec{v_2}) = \phi(\vec{v_1} + \vec{v_2})$
ii) $\phi(c * \vec{v_1}) = c * \phi(\vec{v_1})$

IV) Homomorfismo: Denomina-se uma transformação linear homomórfica a transformação $T : V \to W$ em que a função T não é bijetora.

V) Matriz de uma transformação linear: De modo geral, fixadas as bases $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ e $\beta' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_n}\}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} \ ... \ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ ... \ a_{nn} \end{bmatrix}$ podemos associar $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\vec{v} \to T_A(\vec{v})$.

Seja $X = [\vec{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, logo $A * X = \begin{bmatrix} a_{11} \ ... \ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ ... \ a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Então $T_A(\vec{v}) = y_1\overrightarrow{w_1} + ... + y_m\overrightarrow{w_m}$ onde $y_i = A_i * X$ e A_i é a i-ésima linha de A. Em geral, dada um matriz A_{mxn}, ela é tida como aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônics de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Sendo assim, encontraremos a matriz associada a uma transformação linear: seja $T : V \to W$ linear, $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ base de V e $\beta' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_n}\}$ base de W, então $T(v_1), ..., T(v_n)$ são vetores de W, e portanto

$$T(\overrightarrow{v_1}) = a_{11}\overrightarrow{w_1} + ... + a_{m1}\overrightarrow{w_m}$$
$$\vdots$$
$$T(\overrightarrow{v_n}) = a_{1n}\overrightarrow{w_1} + ... + a_{an}\overrightarrow{w_m}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^\beta_{\beta'}$ é chamada de matriz de W em relação às bases β e β'.

$$[T]^\beta_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} \ ... \ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ ... \ a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

Ex. 2) Dado $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$ e as bases
$\alpha = \{\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1), \overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1)\}$
$\beta = \{\overrightarrow{w1} = (0, 1), \overrightarrow{w_2} = (0, 1)\}$
$T^\beta_\alpha = A =?$

* Matriz T^β_α é de ordem $2x3$:
$$T^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \triangledown & \triangledown & \triangledown \\ T(\overrightarrow{v_1})_\beta & T(\overrightarrow{v_2})_\beta & T(\overrightarrow{v_3})_\beta \end{matrix}$$

- $T(1, 1, 1) = (2 - 1 + 1, 3 + 1 - 2) \implies T(1, 1, 1) = (2, 2)$
$(2, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1) \implies (2, 2) = (a_{11}, a_{22})$

- $T(0, 1, 1) = (0 - 1 + 1, 0 + 1 - 2) \implies T(0, 1, 1) = (0, -1)$
$(0, -1) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1) \implies (0, -1) = (a_{12}, a_{22})$

- $T(0, 0, 1) = (0 - 0 + 1, 0 + 0 - 2) \implies T(0, 0, 1) = (1, -2)$
$(1, -2) = a_{13}(1, 0) + a_{23}(0, 1) \implies (1, -2) = (a_{13}, a_{23})$

$$T^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Operadores lineares

É chamado de Operador Linear a Transformação Linear T tal que $T : V \to V$, ou seja, aquela na qual o domínio e o contradomínio pertencem ao mesmo espaço vetorial.

A condição de existência de um Operador Linear é a mesma que as outras transformações, ou seja, deve obedecer as regras de soma e de multiplicação por escalar dada em 1.c.i) e 1.c.ii), porém V necessita ser um espaço vetorial finito. Como o espaço vetorial do dominio é o mesmo do contradomínio, a base de ambos é a mesma.

Sendo $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ as coordenadas do espaço vetorial V, e A uma matriz de dimensão $n * n$, um operador linear pode ser expresso na forma $T = A * X$, sendo esta a grande diferença entre ele e as outras transformações lineares.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ ... \ a_{nn} \end{bmatrix}$. Ao calcularmos $A * X$, perceberemos que $T(\vec{v_j}) \mid 1 \leq j \leq n$ é dada por $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{v_i}$, assim como $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(\vec{v_j})$. Portanto $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_j(a_{ij}\vec{v_i})$

3. Autovalores e autovetores

Seja V um espaço vetorial sobre K, e seja T um operador linear sobre V. Um vetor não nulo $\vec{v}$ de V é dito um autovetor de T se existir um $\lambda \in K | T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Neste caso λ é dito autovalor de T

Ex. 1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \to T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ Verifique se $\vec{v} = (5, 2)$ é um autovetor de T. Por definição $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \implies T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2) = 6\vec{v}$. Logo $\vec{v} = (5, 2)$ é um autovetor de T e $\lambda = 6$ é o autovalor associado $\vec{v}$.

Agora, verifique se $\vec{u} = (1, 1)$ é um autovetor de T.
$T(\vec{u}) = T(1, 1) = (9, 3) = 3(3, 1)$. $(3, 1) \neq (1, 1)$, logo $\vec{u}$ não é um autovetor de T.

Ex. 2) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, y, 0) = 1(x, y, 0)$. Logo qualquer vetor $(x, y, 0)$ é um autovetor de T e tem seu autovalor associado em 1.
Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $A \in \mathbb{R}^(nxn)$ se existe um vetor $x \in \mathbb{C}$ não nulo tal que $Ax = \lambda x$

Algumas propriedades:

i) Sejam λ e β autovalores diferentes de T e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ autovetores associados a λ e β, respectivamente. Então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes.

ii) $det(A) = (\lambda 1 * \lambda 2 * ... * \lambda n)$, ou seja, o determinante de A é igual ao produto dos seus autovalores.

iii) A é matriz não singular se, e somente se, todos os seus autovalores são diferentes de 0.

iv) Os autovalores de A e de AT são os mesmos, sendo AT a matriz transposta de A.

4. Polinômios característicos

O Polinômio Caracteristico é um metodo pratico para se encontrar autovalores e autovetores de uma matriz de ordem **N**

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix} & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procuramos um vetor $\vec{v} \in R^3$ e escalares $\lambda \in R$ Tal que $A.\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Observe se I for a matriz identidade de mesma ordem a equação pode ser escrita $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Para se calcular os autovetores de A, isto é, vetores v$\neq$ 0, tais que $(A-\lambda I)v = 0$. Neste caso calculamos a $det(A-\lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \implies -\lambda^2 + 7\lambda - 16\lambda + 12 = 0 \implies (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$$

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$são as raizes do polinomio caracteristico de A, e portanto os autovalores da matriz A são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes.

Resolvendo a equação: $Av = \lambda v$

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 4x + 2y & = 2x \\ -x + 1y & = 2y \\ \quad y - 2z & = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x & = y \\ -x & = y \\ \quad yhspace0.5cm & = 0 \end{cases}$$

Implicando em: $y = 0$, x=0 e como nenhuma equação impõe restrição em z, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $v(0,0,z)$ pertendo ao subespaço[(0,0,1)].

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 4x + 2y & = 3x \\ -x + 1y & = 3y \\ \quad y - 2z & = 3z \end{cases} \implies \begin{cases} x & = -2y \\ x & = -2y \\ \quad y & = z \end{cases}$$

Implicando em:y=z,x=2y. Os autovetores associados a $\lambda = 3$ são do tipo (-2y, y, y) pertencendo ao subespaço[(-2,1,1)].

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamemos essa matriz de B. $B.v = 0$. Se a determinante for diferente de zero, temos que o posto da matriz é n. E o sistema linear indica que existe apenas uma única solução: x1=x2=...=xn=0 sempre é solução do sistema homogênio, solução nula. Assim a única solução para encontrar autovetores v é:

$det(A-\lambda I) = 0$

$$P(\lambda) = det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{bmatrix}$$

$P(\lambda) = (a_{1,1}-\lambda)\cdots(a_(n,n)-\lambda)+$ termos de grau $<$ n, e os autovalores são as raizes deste polinômio. P(λ) conhecido como polinômio característico da matriz.

Ex: 1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda + 1) = P(\lambda) \implies P(\lambda) = 0 \implies \lambda = 1 \; e \; \lambda = -1$

$\lambda = 1 \implies \begin{cases} x + 2y = x \\ -y = y \end{cases} \implies y = 0 \; e \; x = x \implies v = (x, 0)$

$\lambda = -1 \implies \begin{cases} x + 2y = -x \\ -y = -y \end{cases} \implies y = y$ e $x = -y \implies v = (-y, y)$

5. Exercícios

1) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas

(a) Qualquer operador linear em V é tal que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$

Veradeiro. Peguemos $x \in V$. Sendo $T = T^2$, temos $Tx = T^2x$ e logo $T(x - Tx) = 0$
Sendo $x - Tx = \xi$ para alguns $\xi \in Ker(T)$, isso mostra que $V = Im(T) + Ker(P)$.

Agora pegue $y \in Im(T) \bigcap Ker(T)$. Visto que $y \in Im(T)$ temos que $y = Tz$ para alguns $z \in V$. Aplicando T em ambos os lados nós obtemos $Ty = T^2z$. Só que $y \in Ker(T)$, logo $0 = Ty = T^2z = Tz = y$. Isso mostra que $Im(T) \bigcap Ker(T) = 0$ e logo temos que $V = Im(T) \oplus Ker(T)$.

(b) Se $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T : (at^2 + bt + c) = (a - b + c, 2a + b - c)$, então $\vec{p}(t) = 5t + 5 \in Ker(T)$

Verdadeiro. $T(at^2 + bt + c) = (a - b + c, 2a + b - c) \implies T(5t + 5) = (-5 + 5, 5 - 5) = (0, 0)$
Logo, $P(t)5t + 5 \in Ker(T)$

(c) Se $Ker(T)$ é gerado por três vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, então a imagem de qualquer operador linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tem dimensão 2

taba Verdadeiro. Pelo teorema do núcleo e da imagem podemos afirmar que dado $T : V \to W$, $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \implies 5 = 3 + x \implies x = 2 \implies dim(Im(T)) = 2$

(d) A aplicação linear $T : M(2,2) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + c - d$ é uma transformação linear

Verdadeiro. Para ser transofrmação linear:

a) $0 \in T? \to T : \begin{bmatrix} 0 \; 0 \\ 0 \; 0 \end{bmatrix} = 0$

b) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = (2(a_1 + a - 2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2))$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = (2a_1 + c_1 + d_1) + (2a_2 + c_2 + d_2)$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

c) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

$T(\alpha\vec{u}) = T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$

$T(\alpha\vec{u}) = (2\alpha a_1, \alpha c_1, -\alpha d_1)$

$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$

$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

(e) Existem transformações lineares $T : P_1 \to P_3$ sobrejetoras

Falso, pois a transformação linear do domínio (P_1) não é capaz de gerar o contradomínio (P_3) por completo, por isso não é sobrejetora.

2) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x + 3y - z)$ determine:

(a) A matriz canônica de T

(b) O núcleo de T, uma base e a dimensão

(c) A imagem de T, uma base e a dimensão

3) Determine a transformação linear que leva os vetores $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ nos vetores $\vec{w_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{w_2} = (3, 1, 0)$ e $\vec{w_3} = (1, 2, 4)$ respectivamente. e responda se esta transformação linear é um isomorfismo

4) Dada a matriz canônica $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ de um operador linear em $\mathbb{R}^3$, verifique se T é um isomorfismo e justifique se $\vec{w} = (2, -1, 0) \in Im(T)$ e se $\vec{u} = (0, 3, 4) \in Ker(T)$?

Bibliografia: BOLDRINI, Jose Luís. *Álgebra Linear.* 3ª Edição.
COELHO, Flávio Uhoa. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª Edição.
WIKIBOOKS. *Álgebra Linear.* Edição de 24/01/2014.