Trabalho de Álgebra Linear

Professora: Aline Brum Seibel

Alunos: Luis Alexandre Ferreira Bueno
Luiz Filipe de Jesus
Nicolas Timoteu Cuerbas
Vitor Bruno de Oliveira Barth

Conteúdos: Matrizes canônicas, transformações lineares, operadores lineares, autovalores, autovetores e polinômios característicos

1. Matrizes canônicas e transformações lineares

I) Isomorfismo: Seja $\phi : V \to W$ uma transformação linear. Para que ela exista, é necessário que sejam atendidas algumas condições:

a) V e W precisam estar sobre o mesmo plano

b) ϕ precisa ser bijetora, ou seja, todo elemento em W precisa ser necessáriamente e exclusivamente a imagem de um elemento em V

c) ϕ deve obedecer as regras de soma e multiplicação por escalar:

$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, $\phi(\vec{v_1}), \phi(\vec{v_2}) \in W$ e $c \in \mathbb{R}$

i) $\phi(\vec{v_1}) + \phi(\vec{v_2}) = \phi(\vec{v_1} + \vec{v_2})$

ii) $\phi(c * \vec{v_1}) = c * \phi(\vec{v_1})$

II) Homomorfismo: Denomina-se uma transformação linear homomórfica a transformação $T : V \to W$ em que a função T não é bijetora.

III) Base de uma Transformação: Seja V um espaço vetorial finito onde $n = dim(V)$ e $\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ a base deste espaço. Sendo assim, posso escrever todos os vetores deste espaço através da combinação $\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n}$, onde c pertence, claro, ao mesmo plano que os o espaço vetorial. Neste caso, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ é a matriz das coordenadas de V.

Se tenho uma a transformação linear $T : V \to W$, assim como a base de V, consigo dizer onde estão todos os vetores de $T(V)$, pois segundo as regras c.i) e c.ii) podemos dizer que
$T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n}) = T(c_1\vec{v_1}) + T(c_2\vec{v_2}) + ... + T(c_n\vec{v_n}) = c_1T(\vec{v_1}) + c_2T(\vec{v_2}) + ... + c_nT(\vec{v_n})$

IV) Imagem e núcleo de uma Transformação: Sendo $T : V \to W$, $Im(T) = \{\vec{w} \in W | \vec{w} = T(\vec{v})$ para alguns $\vec{v} \in V\}$, ou seja, a Imagem de uma Transformação corresponde ao subespaço vetorial de W que possui elementos dados por $T(\vec{v})$. Sendo assim, logicamente $Im(T) \leq W$.

Já o núcleo de uma Transformação (denotado por $Ker(T)$) é dado por $Ker(T) = \{\vec{v} \in V |T(\vec{v}) = 0\}$. Se a transformação é injetora, o núcleo é trivial, afinal $T(0)$ deve obrigatóriamente pertencer à $Im(T)$. Porém caso ela não seja injetora, o núcleo poderá ser um conjunto vetorial. Sendo assim, obrigatoriamente, $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V

V) Exemplos:

2. Operadores lineares

3. Autovalores e autovetores

4. Polinômios característicos

5. Exercícios

1) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas

(a) Qualquer operador linear em V é tal que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$

(b) Se $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T : (at^2 + bt + c) = (a - b + c, 2a + b - c)$, então $\vec{p}(t) = 5t + 5 \in Ker(T)$

(c) Se $Ker(T)$ é gerado por três vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, então a imagem de qualquer operador linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tem dimensão 2

(d) A aplicação linear $T : M(2,2) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + c - d$ é uma transformação linear

(e) Existem transformações lineares $T : P_1 \to P_3$ sobrejetoras

2) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x + 3y - z)$ determine:

(a) A matriz canônica de T
(b) O núcleo de T, uma base e a dimensão
(c) A imagem de T, uma base e a dimensão

3) Determine a transformação linear que leva os vetores $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ nos vetores $\vec{w_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{w_2} = (3, 1, 0)$ e $\vec{w_3} = (1, 2, 4)$ respectivamente. e responda se esta transformação linear é um isomorfismo

4) Dada a matriz canônica $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ de um operador linear em $\mathbb{R}^3$, verifique se T é um isomorfismo e justifique se $\vec{w} = (2, -1, 0) \in Im(T)$ e se $\vec{u} = (0, 3, 4) \in Ker(T)$?

Bibliografia: BOLDRINI, Jose Luís. *Álgebra Linear.* 3ª Edição.
COELHO, Flávio Uhoa. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª Edição.
WIKIBOOKS. *Álgebra Linear.* Edição de 24/01/2014.