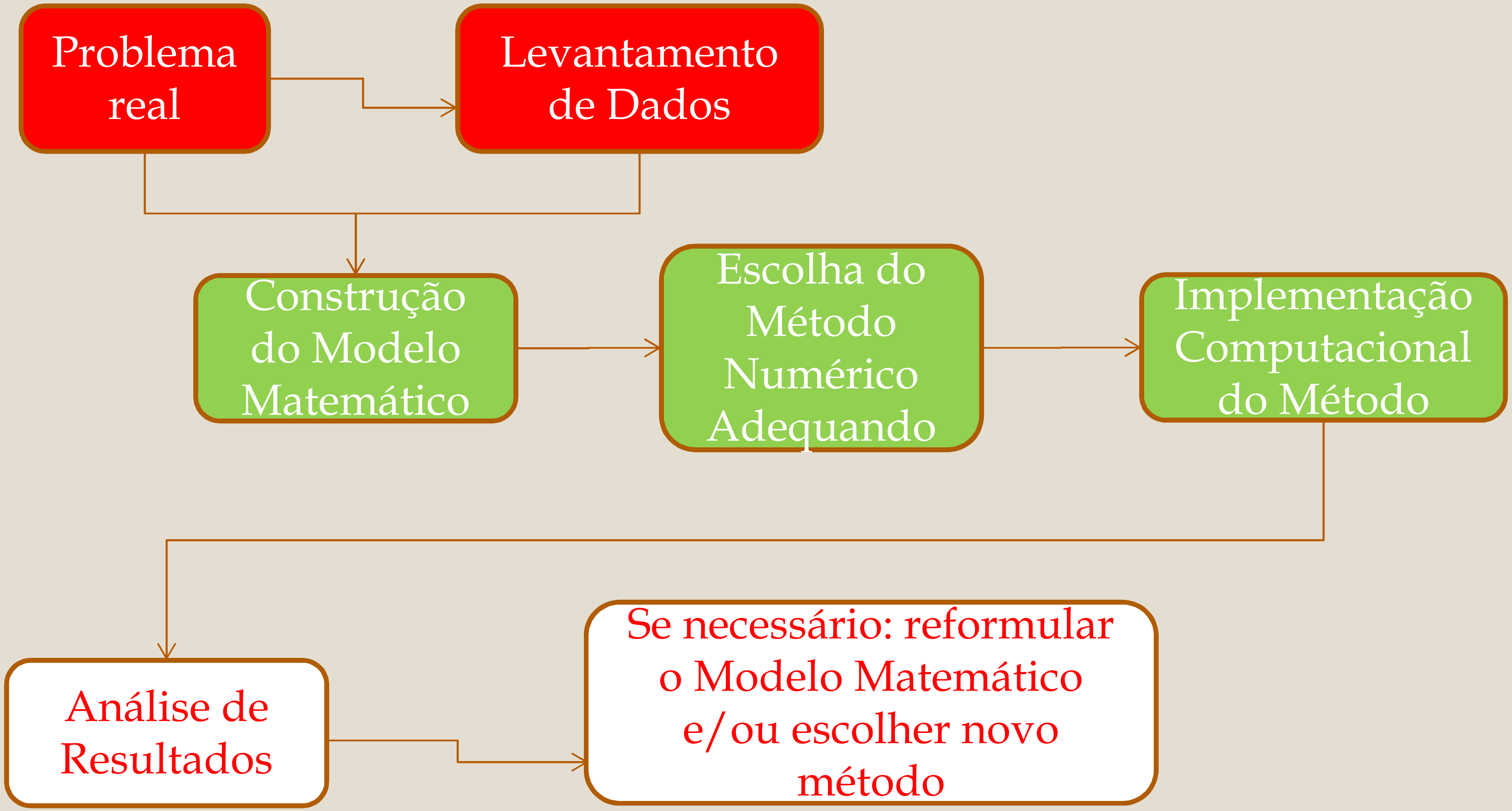
CÁLCULO NUMÉRICO

Introdução

A resolução de problemas envolve várias fases:



Introdução

- **Não é raro chegar a resultados finais diferentes do esperado, ou que não possuem relação alguma com o problema original.**

- **Como justificar tais erros? Como evitar tais erros?**

1 – Vamos fazer uma análise básica sobre análise de erros em resultados numéricos.

2 – Alertar sobre detalhes aparentemente simples, mas que podem conduzir a erros.

3 – Alguns erros são inerentes ao processo total de resolução. Ex: Levantamento de dados.

- **Dependem da precisão do aparelho utilizado e da pessoa que opera o aparelho;**

Ex: Medidas de tensão e corrente em um circuito elétrico; medidas de levantamento topográfico.

4 – Erros que surgem da representação dos números, que são inerentes.

Representação dos números

Problema 1

Calcular a área de uma circunferência de raio 100 m ($A = \pi r^2$)

Resultados obtidos

I) A = 31400 m^2
II) A= 31416 m^2
III) A= 31415.92654 m^2

Como justificar as diferenças entre os resultados? É possível obter "exatamente" esta área?

Problema 2

Efetuar os somatórios seguintes em uma calculadora e em um computador:

S=$\sum(x_i)$ para x_i= 0.5 e para x_i= 0.11 , com i variando de 1 até 30000

Resultados obtidos

I) para x_i= 0.5 na calculadora: S=15000
no computador: S=15000

II) para x_i= 0.11 na calculadora: S = 3300
no computador: S= 3299.99691

Como justificar a diferença entre os resultados obtidos pela calculadora e computador para x_i= 0.11?

Representação dos números

Os "erros" ocorridos nos dois problemas dependem da representação dos números na máquina utilizada.

O número Pi não pode ser representado através de um número finito de dígitos decimais. No problema I, Pi foi escrito como:

3.14 para o caso I
3.1416 para o caso II
3.141592654 para o caso III

Nestes casos o "erro" depende exclusivamente da aproximação escolhida para Pi.

Portanto, qualquer cálculo que envolva números que não podem ser representados através de um número finito de dígitos não fornecerá como resultado um valor exato.

Quanto maior o número de dígitos utilizados maior será a precisão obtida.

- **A base decimal é a que mais empregamos. Na antiguidade, foram utilizadas outras bases como a base 12, a base 60 etc. Já um computador normalmente opera com a base 2.**

- **Interação usuário computador: usuário passa seus dados no sistema decimal e toda a informação é convertida em binário pelo computador.**

- **O inverso ocorre na resposta para o usuário**.

Conversão de números inteiros : binário→decimal

Exemplo 1

$(347)_{10} = 3x10^2 + 4x10^1 + 7x10^0$
$(10111)_2 = 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$

De modo geral, dado um número N na base β, $N = (a_n\ a_{n-1}\ \dots\ a_2\ a_1\ a_0)_\beta$, podemos escrever N na forma polinomial:

$$N = a_n\ \beta^n + a_{n-1}\ \beta^{n-1} + \dots + a_2\ \beta^2 + a_1\ \beta^1 + a_0\ \beta^0$$

Com esta operação podemos facilmente converter um número do sistema binário para o sistema decimal, por exemplo:

$$(10111)_2 = 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = (23)_{10}$$

Dado $N = (a_n\ a_{n-1}\ \dots\ a_2\ a_1\ a_0)_2$ a representação deste número na base 10, denotada por b_0 é dada por:

$b_n = a_n$
$b_{n-1} = a_{n-1} + 2 \cdot b_n$
$b_{n-2} = a_{n-2} + 2 \cdot b_{n-1}$
. . .
. . .
. . .
$b_1 = a_1 + 2 \cdot b_2$
$b_0 = a_0 + 2 \cdot b_1$

Conversão de números inteiros : binário→decimal

Por exemplo:

$(10111)_2$

$b_4 = a_4 \ = 1$

$b_3 = a_3 + 2 \cdot b_4 = 0 + 2 = 2$

$b_2 = a_2 + 2 \cdot b_3 = 1 + 2 \text{ x}2 = 5$

$b_1 = a_2 + 2 \cdot b_2 = 1 + 2 \text{ x}5 = 11$

$b_0 = a_0 + 2 \cdot b_3 = 1 + 2 \text{ x}11 = 23$

Analogamente, para se converter um número da base 10 para a base 2 aplica-se o algoritmo anterior tendo-se o cuidado de escrever todos os dígitos da base 2, inclusive $\beta=10=(1010)_2$ e efetuar as operações na base 2.

Por exemplo

$(347)_{10}$

$b_2 = a_2 \ = 3 = (11)_2$

$b_1 = a_1 + 10 \cdot b_2 = 4 + 10 \cdot \ 3 = (100)_2 + (1010)_2 \ \cdot (11)_2 = (100010)_2$

$b_0 = a_0 + 10 \cdot b_1 = 7 + 10 \cdot \ b1 = (111)_2 + (1010)_2 \ \cdot (100010)_2 = (101011011)_2$

Conversão de bases

Exemplo 1

$(1011)_2 = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}$

Exemplo 2

$(10,1)_2 = 1x2^1 + 0x2^0 + 1x2^{-1} = 2 + 0 + 0.5 = (2.5)_{10}$

Exemplo 3

$(11,01)_2 = 1x2^1 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} = 2 + 1 + 0 + 0.25 = (3.25)_{10}$

Conversão de bases

Vimos nos exemplos anteriores que para mudar da base 2 para a base 10, basta multiplicar o digito binário por uma potência binária adequada.

Para converter um número de base 10 para base 2, tem-se que aplicar um processo para a parte inteira e outro para a parte fracionária.

Parte Inteira

Para transformar um número inteiro na base 10 para a base 2 utiliza-se o método das divisões sucessivas, que consiste em dividir o número por 2, a seguir divide-se por 2 o quociente encontrado e assim repete-se o processo até que o último quociente seja igual a 1 .

O número binário será formado pela concatenação do último quociente com os restos das divisões lidos em sentido inverso ao que foram obtidos.

$$\begin{array}{ll|l} N & & \underline{\;2\;} \\ r_1 & q_1 & \underline{\;2\;} \\ & r_2 \;\; q_2 & \underline{\;2\;} \\ & & r_3 \;\; q_3 \;\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} q_{n-1} & \underline{\;2\;} \\ r_{n-1} & 1 \end{array}$$

$$N_{10} = 1\, r_{n-1} \ldots r_3\, r_2\, r_1$$

$(18)_{10} = (?)_2$

$(11)_{10} = (?)_2$

Conversão de bases

Para transformar um número fracionário inteiro na base 10 para a base 2 utiliza-se o método das multiplicações sucessivas, que consiste em:

a) Multiplicar o número fracionário por 2;

b) Deste resultado, a parte inteira será o primeiro digito do número na base 2 e a parte fracionária é novamente multiplicada por 2. O processo é repetido até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero.

$(0{,}1875)_{10} = (0{,}0011)_2$

$$\begin{array}{r} 0{,}1875 \\ \times 2 \\ \hline 0{,}3750 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}3750 \\ \times 2 \\ \hline 0{,}750 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}750 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}50 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}00 \end{array}$$

$(0{,}6)_{10} = (0{,}10011\ldots)_2$

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}2 \\ \times 2 \\ \hline 0{,}4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}4 \\ \times 2 \\ \hline 0{,}8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}8 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}6 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}2 \end{array}$$

... Os produtos estão começando a se repetir

$(13{,}25)_{10} = (1101)_2 + (01)_2 = (1101{,}01)_2$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ \times 2 \\ \hline 0{,}50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}50 \\ \times 2 \\ \hline 1{,}0 \end{array}$$

Exercícios

1 - Converta os seguintes números decimais para a sua forma binária:

X= 37
Y =2345
Z=0.1217

2 – Converta os seguintes números binários para a sua forma decimal:

X= $(101101)_2$
Y =$(110101011)_2$
Z = $(0.1101)_2$
W= $(0.111111101)_2$