INSTITUTO FEDERAL MATO GROSSO
Campus Cuiabá

DISCIPLINA: Eletricidade Aplicada

TEMA: Elementos armazenadores de energia - circuitos de primeira ordem

Engenharia da Computação

ELEMENTOS ARMAZENADORES DE ENERGIA - CIRC. DE 1º ORDEM

Em 29 de agosto de 1831, o químico e físico inglês Michael Faraday, descobriu a indução eletromagnética, ao constatar que o movimento de um imã através de uma bobina de fio de cobre causava o fluxo de uma corrente elétrica no fio.

Nota: como o motor e o gerador elétrico são baseados neste princípio, a descoberta de Michael Faraday provocou mudanças no curso da história mundial.

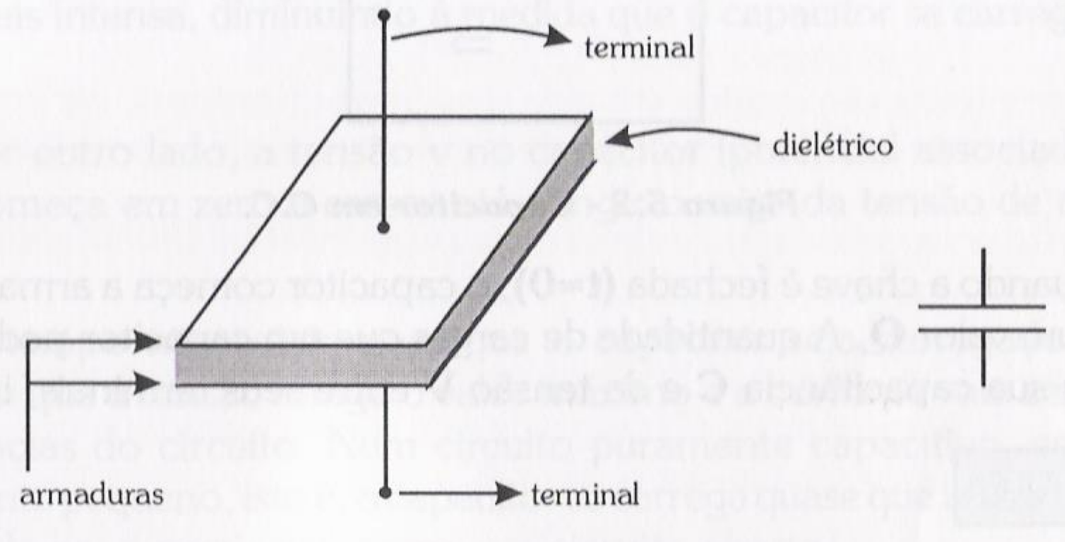
Até agora aprendemos apenas trabalhar com circuitos simples contendo apenas resistores e fontes. A partir daqui será apresentados circuitos com elementos armazenadores de energia (capacitores e indutores).

Michael Faraday
(1791-1867)

Capacitores

6.1 Capacitores

Um *capacitor* é um dispositivo de dois terminais constituído por dois corpos condutores separados por um material não condutor (isolador ou dielétrico). Por causa do dielétrico, as cargas não podem se mover de um corpo condutor a outro, por dentro do dispositivo. Assim essas cargas devem ser transportadas entre dois corpos condutores, através de um circuito externo conectado aos terminais do capacitor.



(a) Detalhes construtivos *(b) Símbolo genérico*

Capacitor.

6.1 Capacitores

A relação carga-tensão do dispositivo pode ser descrita se transferirmos uma carga de uma placa a outra.
Suponha, que, por meio de um circuito externo, levemos uma pequena carga, dita *Δq*, da placa inferior para placa superior, ou seja, deposita *+Δq* na placa superior e deixa a placa inferior com carga *-Δq*. Visto que mover estas cargas requer a separação de cargas diferentes (cargas diferentes se atraem), uma pequena quantidade de trabalho é desenvolvida e a placa superior é elevada a um potencial de, digamos, *Δv*, em relação a placa inferior.

Cada incremento de carga *Δq* que é transferido aumenta a diferença de potencial entre as placas de *Δv*. Assim, conclui-se que a diferença de potencial entre as placas é proporcional à carga transferida. Pode-se escrever essa relação então:

$$q = Cv$$

onde *C* é a constante de proporcionalidade, conhecida com a capacitância do dispositivo, em coulombs por volts. A unidade da capacitância é o Faraday, em homenagem a Michael Faraday e é definida como a capacidade do capacitor em armazenar cargas elétricas, isto é, energia na forma de campo elétrico.

6.1 Capacitores

Os capacitores que satisfazem a equação $q = Cv$, são chamados de *capacitores lineares*, pois sua característica "carga x tensão" é a equação de uma linha reta de inclinação C.

Uma vez que a corrente é definida como a razão de variação das cargas, diferenciando a equação $q = Cv$, tem-se:

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad i = C\frac{dv}{dt}$$

que é a relação "tensão - corrente" em um capacitor.

Exemplo: Suponha que a tensão num capacitor de 1μF é *v = 6 cos 2000t* [V]. Então, a corrente é

$$i = C\frac{dv}{dt} = 10^{-6} \cdot \frac{d\left(6\cos 2000t\right)}{dt} = 10^{-6} \cdot \left(-12000 sen 2000t\right)$$

$$i = -12 sen 2000t [mA]$$

6.1 Capacitores

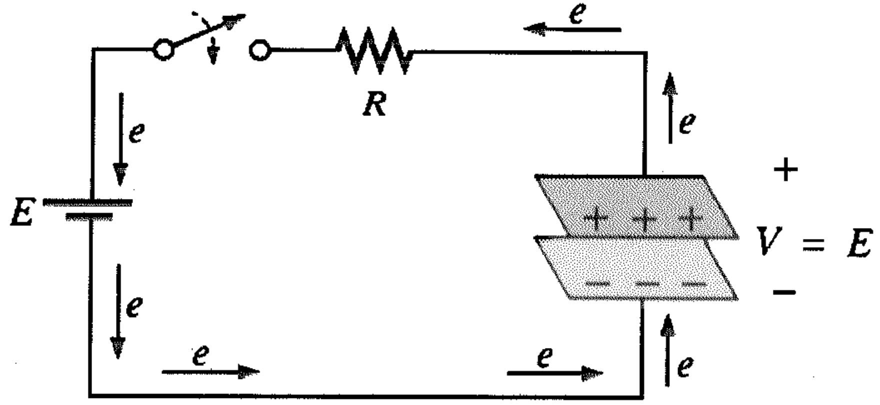
Da equação $i = C\dfrac{dv}{dt}$, verifica, se *v* é constante, então a corrente *i* é zero.

Portanto o capacitor se comporta como um circuito aberto em corrente contínua. Por outro lado quanto mais rápido *v* se altera, maior é a corrente que flui em seus terminais.

No instante em que um fonte externa é conecta ao capacitor, as cargas se deslocam de uma placa condutora para outra, então, neste instante o fluxo de carga inicia imediatamente com valor máximo e vai diminuindo a medida que a ddp entre as placas vai aumentando. O fluxo de carga será igual a zero quando o capacitor estiver totalmente carregado, ou seja, a tensão no capacitor é igual a tensão da fonte externa. Assim podemos concluir que o capacitor não permite uma variação instantânea (brusca) de tensão.

6.1 Capacitores

O circuito abaixo, contendo duas placas paralelas, separada pelo ar (dielétrico), ligados em série com um resistor e uma fonte de tensão CC, pode ser analisado da seguinte forma:



1 – Se as placas estão inicialmente descarregadas e a chave está aberta, as placas permanecem descarregadas.

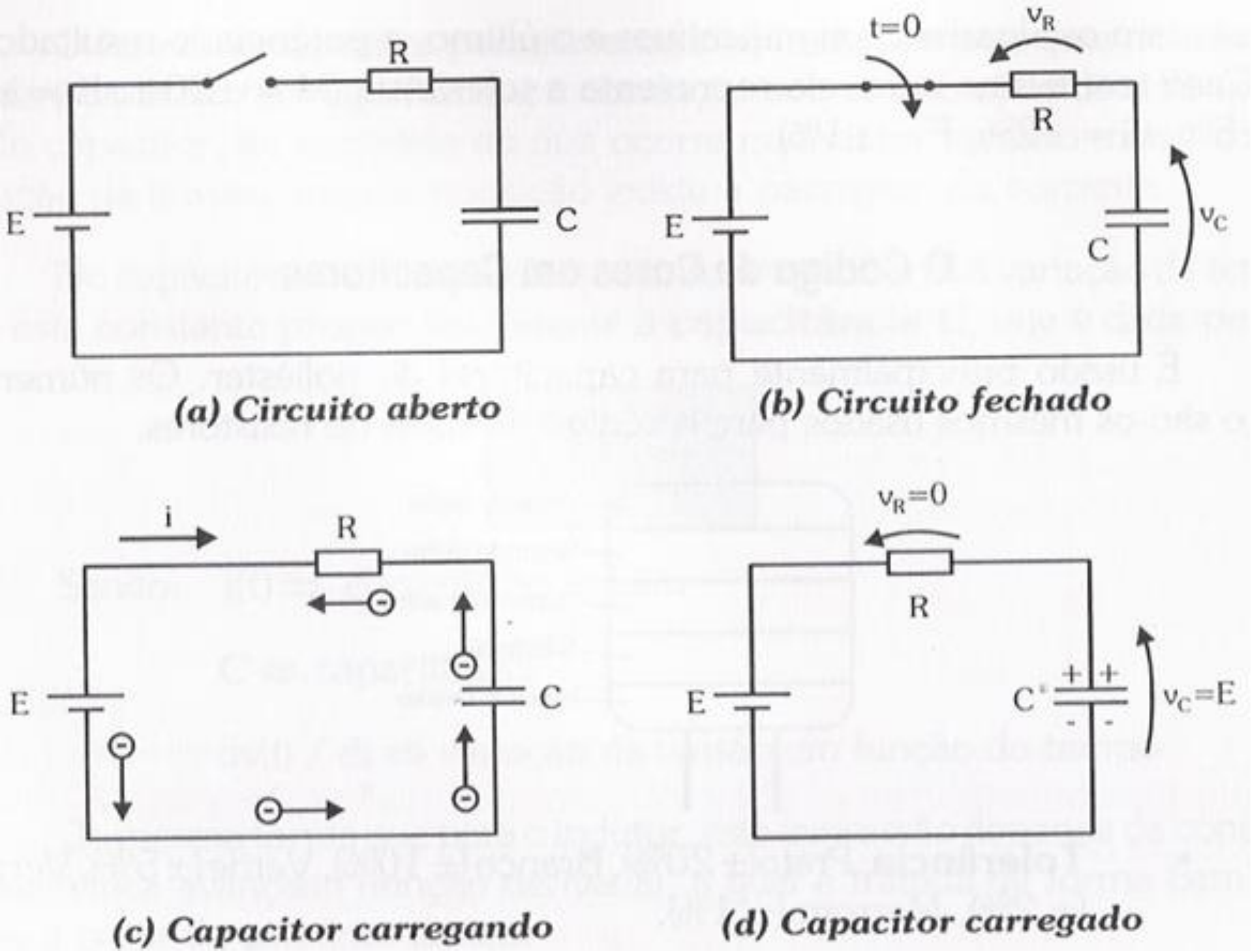
2 – Ao fechar a chave, elétrons começam a sair da placa superior e se acumular na placa inferir, depois de passarem pelo resistor e pela bateria.

3 – A corrente inicialmente é elevada, limitada apenas pelo resistor, com o tempo a corrente diminui.

4 – A transferência de elétrons continua até que a diferença de potencial entre as placas seja exatamente igual à tensão da bateria.

5 – O resultado final é uma carga positiva na placa superior e uma carga negativa na placa inferior.

6.1 Capacitores



(a) Circuito aberto

(b) Circuito fechado

(c) Capacitor carregando

(d) Capacitor carregado

6.1 Capacitores

Para encontrar *v(t)* em função de *i(t)*, basta integrar ambos os lados da eq. $i = C\dfrac{dv}{dt}$ entre os intervalos de tempo t_0 e *t*. O resultado é:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\ dt + v(t_0)$$

onde $v(t_0) = q(t_0)/C$ é a tensão no capacitor C no tempo entre (-∞ e t_0), que é considerada zero, pois neste instante o capacitor esta totalmente descarregado, assim a equação acima, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\ dt$$

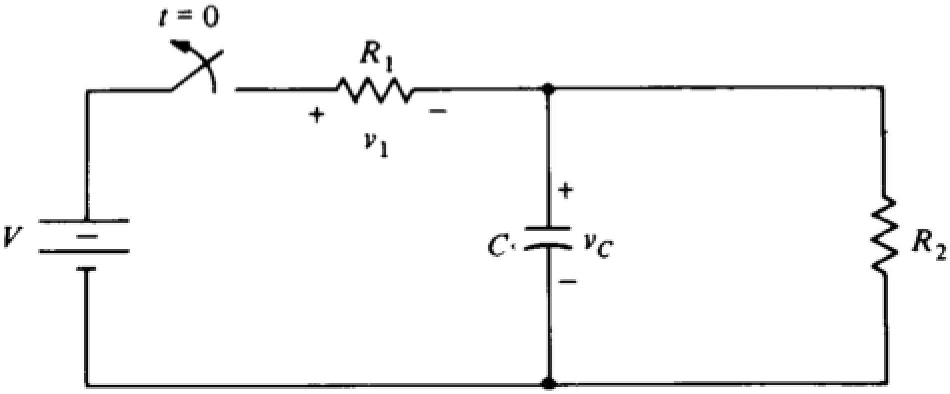
6.1 Capacitores

Exercícios:

1) Um capacitor de 1nF tem uma tensão de $v = 10 \text{ sen} 1000t$ [V]. Calcule sua corrente. **Resposta:** $i = 10 \cos 1000t$ [μA]

2) Uma corrente de 10mA está carregando um capacitor de 10μF (entrando em seu terminal de tensão positivo). Se o capacitor estava inicialmente carregado com 5V, calcule a tensão e a carga sobre ele após 20ms. **Resposta:** 25[V], 0,25[mC]

6.1 Capacitores



Exemplo extra:

1) Dado o circuito ao lado, com C=1/4F, $R_1=R_2=4\Omega$ e $V=20V$. Se a corrente em R_2 em $t=0^-$ é $2A$ no sentido para baixo, calcule em $t=0^-$ e em $t=0^+$:

(a) a carga no capacitor, (b) a corrente em R_1 que flui para a direita, (c) a corrente no capacitor que flui para baixo e (d) dv_c / dt em [V/s].

Nota: t=0 é o instante em que a chave é aberta, assim $t=0^-$ é o instante antes de abrir e $t=0^+$ é o instante após abrir.

Considerações: V_c é o mesmo em $t=0^-$ e em $t=0^+$, pois o capacitor não permite uma variação "brusca" de tensão.

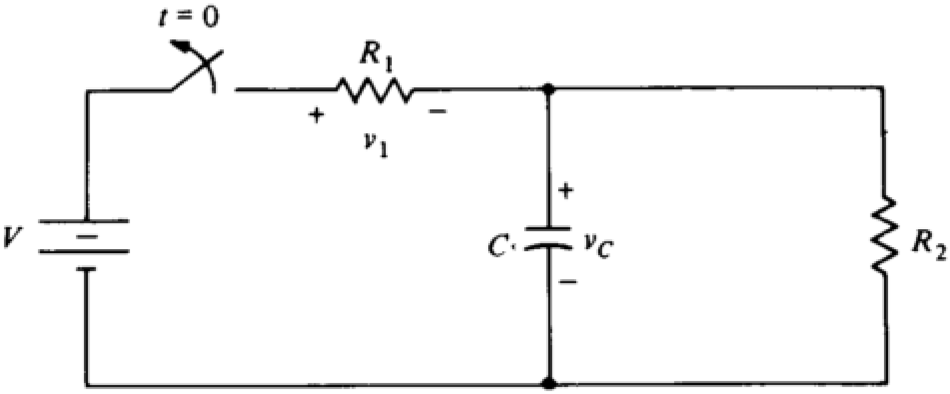
Solução:

(a) Como $q = Cv$, e $V_C = V_{R2} = 4 \cdot 2 = 8[V]$, então $q_{0^-} = q_{0^+} = 0,25 \cdot 8 = 2[C]$

(b) Por LKT em $t=0^-$, $V_{R1} = V - V_{R2} = 12[V]$, então $i_{R1} \text{ em } t_{0^-} = V_{R1} / R_1 = 3[A]$

em $t=0^+$ $V_{R1} = 0[V]$, pois nesse instante a chave está aberta e instantaneamente a corrente no resistor vai a zero, portanto $i_{R1} \text{ em } t_{0^+} = V_{R1} / R_1 = 0[A]$

6.1 Capacitores



Exemplo extra:

1) Dado o circuito ao lado, com *C*=1/4F, $R_1=R_2=4\Omega$ e *V*=20*V.* Se a corrente em R_2 em $t=0^-$ é 2*A* no sentido para baixo, calcule em $t=0^-$ e em $t=0^+$:
(a) a carga no capacitor, (b) a corrente em R_1 que flui para a direita, (c) a corrente no capacitor que flui para baixo e (d) dv_c / dt em [V/s].

Considerações: V_c é o mesmo em $t=0^-$ e em $t=0^+$, pois o capacitor não permite uma variação "brusca" de tensão.

Solução:

(c) Por LKC em $t=0^-$, $i_C = i_{R1} - i_{R2} = 1[A]$.
em $t=0^+$ o capacitor começa a descarregar em R_2, então $i_c = V_C / R_2 = 2[A]$ para cima, ou $i_c = -2[A]$ para baixo.

(d) Utilizando $i = C\dfrac{dv}{dt} \rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{i}{C}$, então

$$dv/dt \text{ em } t_{0^-} = 1/0,25 = 4[V/s]$$

$$dv/dt \text{ em } t_{0^+} = -2/0,25 = -8[V/s]$$

6.2 Energia armazenada em capacitores

A tensão através dos terminais de um capacitor é acompanhada pela separação das cargas elétricas entre as placas do capacitor. Estas cargas têm forças elétricas atuando sobre elas. Um *campo elétrico*, uma grandeza básica na teoria do eletromagnetismo, é definido como a força atuando sobre uma unidade de carga positiva. Então, as forças que atuam nas cargas dentro do capacitor podem ser consideradas como resultantes de um campo elétrico. Por esta razão, a energia armazenada ou acumulada em um capacitor é dita armazenada em um campo elétrico e pode ser escrito da seguinte forma:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} vi\ dt = \int_{-\infty}^{t} v\left(C\frac{dv}{dt}\right)dt = C\int_{-\infty}^{t} vdv = \frac{1}{2}Cv^2(t)\Big|_{t=-\infty}^{t}$$

Visto que v(-∞) =0, então a equação acima se torna:

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)[J]$$

6.2 Energia armazenada em capacitores

Como $w(t) \geq 0$ então o capacitor é um elemento passivo do circuito.
O capacitor ideal não dissipa energia mais pode armazenar na forma de campo elétrico.

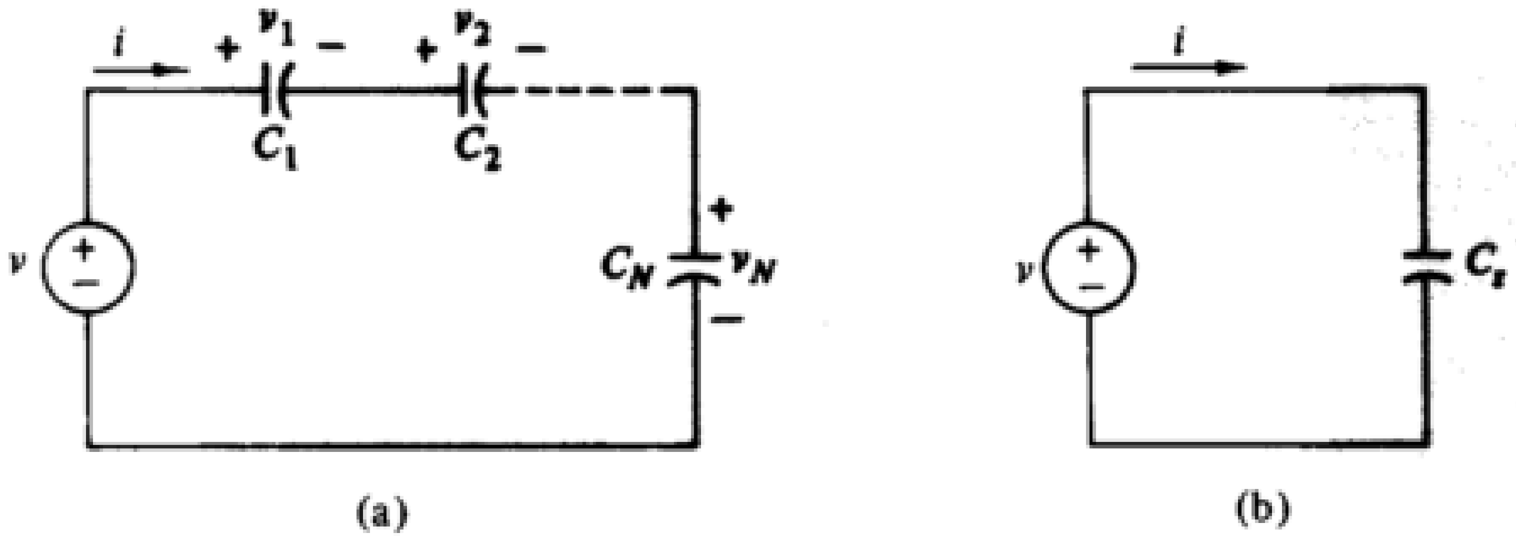
Exemplo: Qual é a energia armazenada em um capacitor de 1F que está submetido a uma tensão de 10V:

$$w = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 50\left[J\right]$$

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

A equivalência da capacitância de circuitos capacitivos associados em série e paralelo é análoga a condutância equivalente de elementos resistivos.

Associação Série de N capacitores:



(a) Associação de *N* capacitores em série; (b) circuito equivalente

.

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

Associação Série de N capacitores:

Aplicando LKT na associação série tem-se: $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$

Que pode ser escrita:

$$v(t) = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\ dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\ dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i\ dt + v_N(t_0)$$

$$v(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i\ dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0)$$

$$v(t) = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i\ dt + v(t_0)$$

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

Associação Série de N capacitores:

$$v(t) = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i \; dt + v(t_0)$$

Do circuito equivalente:

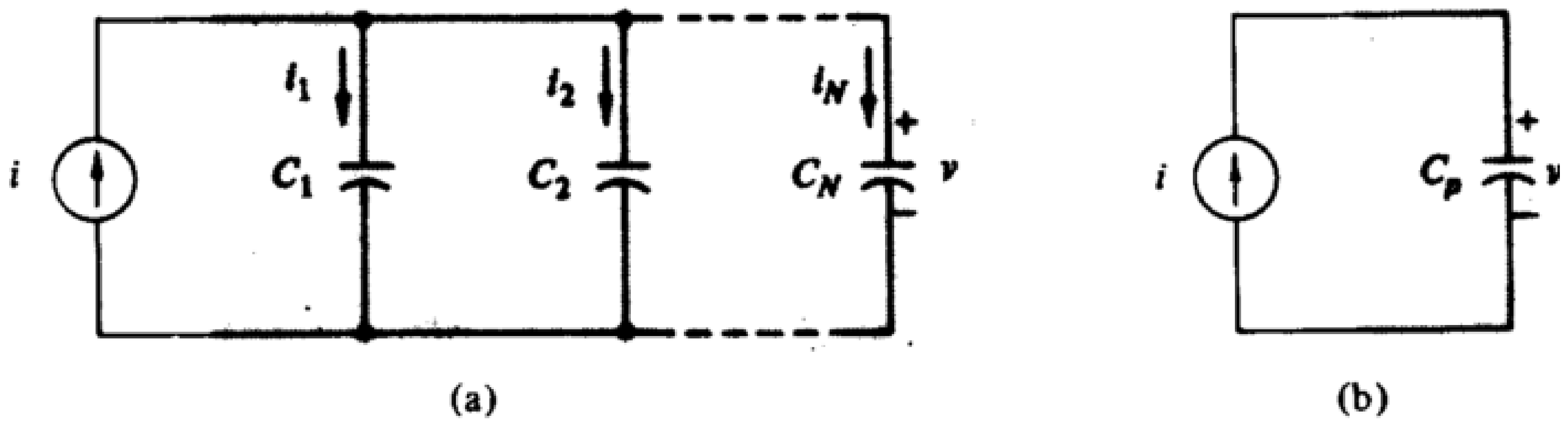
$$v(t) = \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^{t} i \; dt + v(t_0)$$

Comparando as equações acima, conclui-se:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}$$

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

Associação Paralelo de N capacitores:



(a) Associação em paralelo de *N* capacitores; (b) circuito equivalente

.

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

Associação Paralelo de N capacitores:

Aplicando LKC na associação paralela tem-se: $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$

Está equação pode ser escrita, como se segue:

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt}$$

$$i = \left(C_1 + C_2 + \cdots + C_N\right) \frac{dv}{dt}$$

$$i = \left(\sum_{n=1}^{N} C_N\right) \frac{dv}{dt}$$

6.3 Capacitor em Série e Paralelo

Associação Paralelo de N capacitores:

$$i = \left(\sum_{n=1}^{N} C_N \right) \frac{dv}{dt}$$

Do circuito equivalente:

$$i = C_P \frac{dv}{dt}$$

Assim conclui-se:

$$C_P = C_1 + C_2 + \cdots + C_N = \sum_{n=1}^{N} C_N$$

Referencia Bibliográfica:

HILBURN J. L., JOHNSON D. E., JOHNSON J. R., **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos**. 4ªed., Rio de Janeiro: LTC, 1994.

BOYLESTAD, R. L. **Introdução à Análise de Circuitos**. Editora Pearson do Brasil, 10. ED., 2004