

# Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá

## Departamento de Eletroeletrônica

Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes – Aula 07

**Saulo Augusto Ribeiro Piereti**

Graduado em Eng. Elétrica pela UFMT 2005  
Mestre em Eng. Elétrica (SEP) pela USP 2007  
Doutor em Eng. Elétrica (SEP) pela USP 2011

Currículo Lattes <http://lattes.cnpq.br/2141158868960971>

### Tópicos:

- Circuitos lineares e Propriedade da Proporcionalidade
- Teorema da Superposição
- Teoremas de Thévenin e de Norton
- Transferência Máxima de Potência
- Transformação de Fontes

# CIRCUITOS LINEARES E PROPORCIONALIDADE

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ Por definição um circuito é dito linear quando contém somente fontes independentes e/ou elementos lineares. Por exemplo, todos os circuitos que temos considerado até este ponto são circuitos lineares, menos os que contém fontes dependentes.
- ▶ As equações que descrevem circuitos lineares são obtidas pela aplicação da LKT e LKC e , portanto, contêm somas de múltiplos de tensões ou correntes.



# CIRCUITOS LINEARES E PROPORCIONALIDADE

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ Neste sentido a propriedade da proporcionalidade de um único elemento linear também é mantida para um circuito linear no sentido que, se todas as fontes independentes de um circuito forem multiplicadas por uma constante  $K$ , então todas as correntes e tensões sobre os demais elementos são multiplicadas pela mesma constante  $K$ .



# CIRCUITOS LINEARES E PROPORCIONALIDADE

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

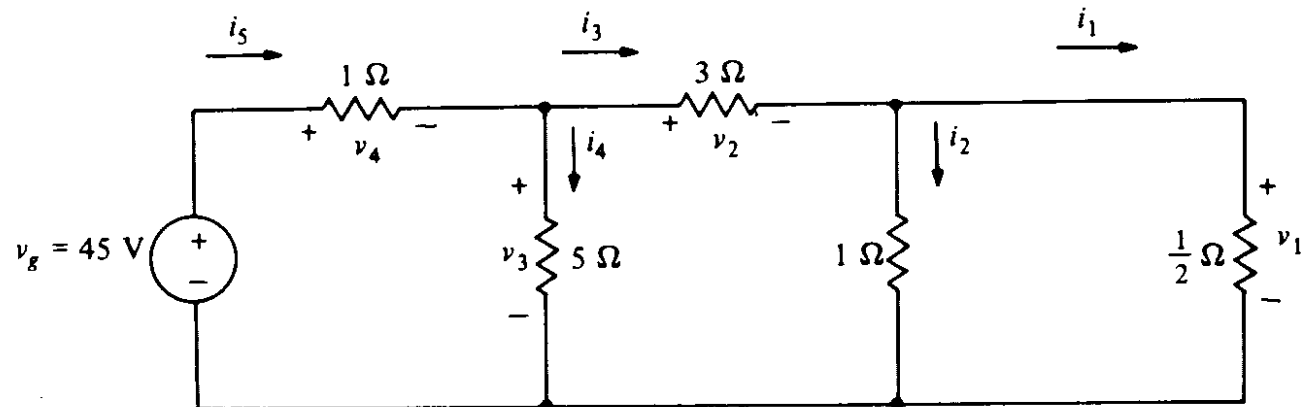
► **Exemplo:** Encontre  $v_1$  no circuito ao lado

Podemos escrever as equações de nó e de malha, mas para ilustrar a propriedade da proporcionalidade, faremos de forma alternativa. Simplesmente devemos assumir o valor da solução. Por exemplo  $v_1 = 1[V]$ .

$$v_1 = 1[V] \quad \text{“Chute”}$$

Assim encontramos as corrente e tensões do circuito até chegar na tensão da fonte.

$$\text{Com } v_1 = 1[V], \text{ então } \begin{cases} i_1 = 2[A] \\ i_2 = 1[A] \end{cases}$$



# CIRCUITOS LINEARES E PROPORCIONALIDADE

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Exemplo:** Encontre  $v_1$  no circuito ao lado

Pela lei de Ohm, LKC e LKT, temos:

$$i_3 = i_1 + i_2 = 3[A]; \quad v_2 = 3i_3 = 9[V];$$

$$v_3 = v_1 + v_2 = 10[V]; \quad i_4 = \frac{v_3}{5} = 2[A];$$

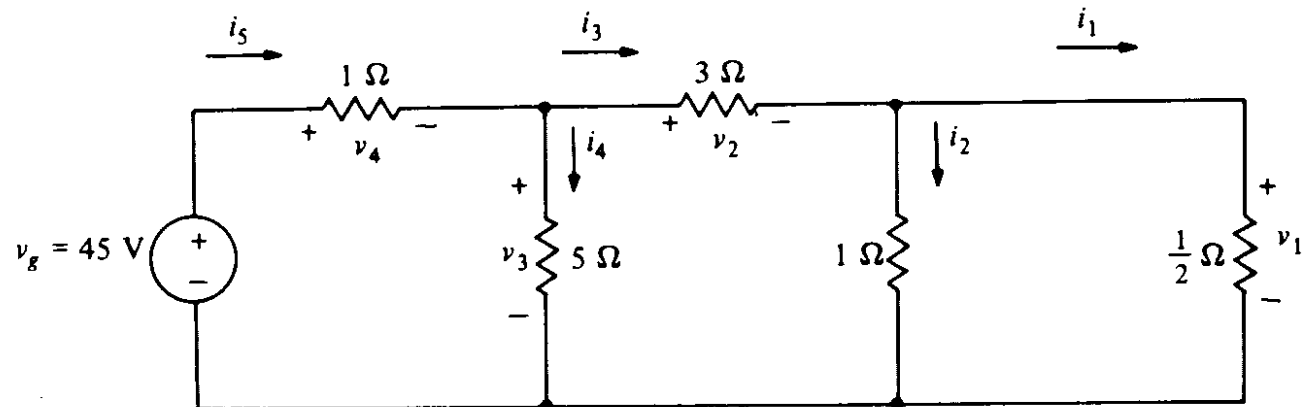
$$i_g = i_3 + i_4 = 5[A]; \quad v_4 = 1i_g = 5[V];$$

$$\therefore v_g = v_3 + v_4 = 15[V]$$

$$v_1 = 1[V] \quad \text{“Chute”}$$

$$i_1 = 2[A]$$

$$i_2 = 1[A]$$



# CIRCUITOS LINEARES E PROPORCIONALIDADE

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Exemplo:** Encontre  $v_1$  no circuito ao lado

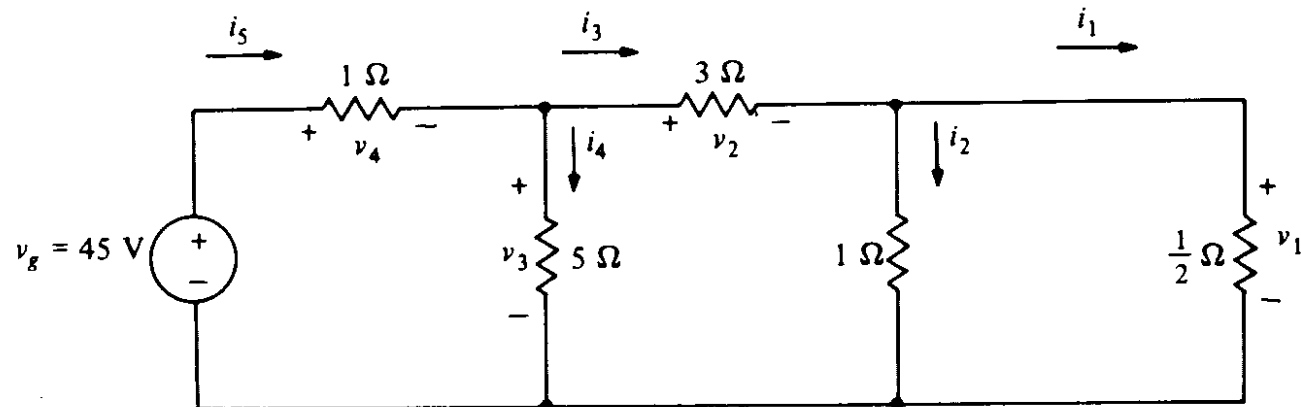
Veja que o valor que foi calculado para a tensão da fonte partindo do “chute inicial” em  $v_1$  não está correto. Portanto a suposição do valor de  $v_1$  não está correta. Contudo, pela relação de proporcionalidade, se uma fonte de 15V fornece uma saída  $v_1=1[V]$ , então nossa fonte de 45[V] dará uma saída três vezes maior, assim a resposta correta é:

$$\text{proporção} = \frac{v_g \text{ “real”}}{v_g \text{ “do chute”}} = 3$$

$$\therefore v_1 = 3 \cdot 1 = 3[V]$$

$$v_1 = 1[V] \quad \text{“Chute”}$$

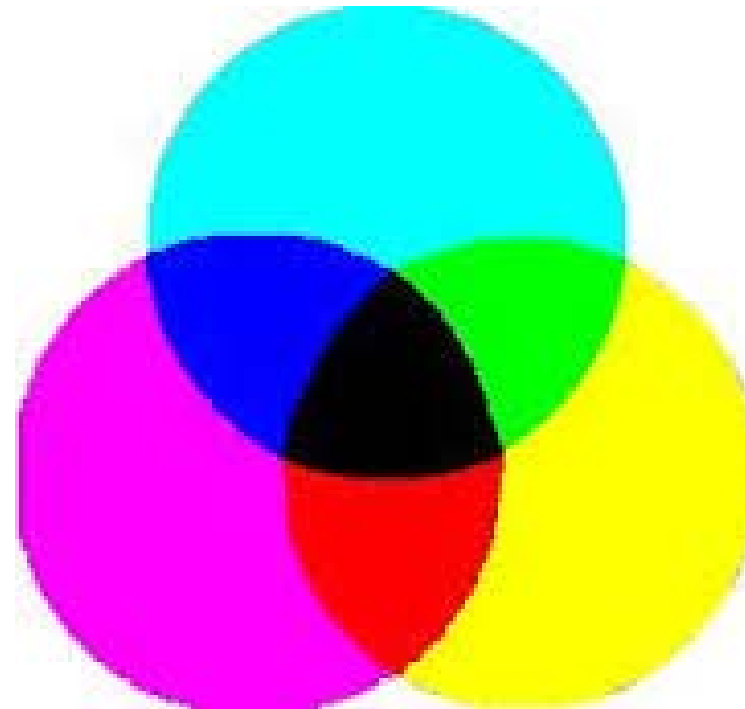
$$v_g = 15[V] \quad \text{“do chute”}$$



# TEOREMA A SUPERPOSIÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ O teorema da Superposição é utilizado quando circuitos lineares possuem mais de uma entrada, ou seja, mais de uma fonte.
- ▶ O teorema da superposição, não exige a necessidade de resolver um sistema de equações lineares, pois permite considerar separadamente os efeitos de cada uma das fontes.



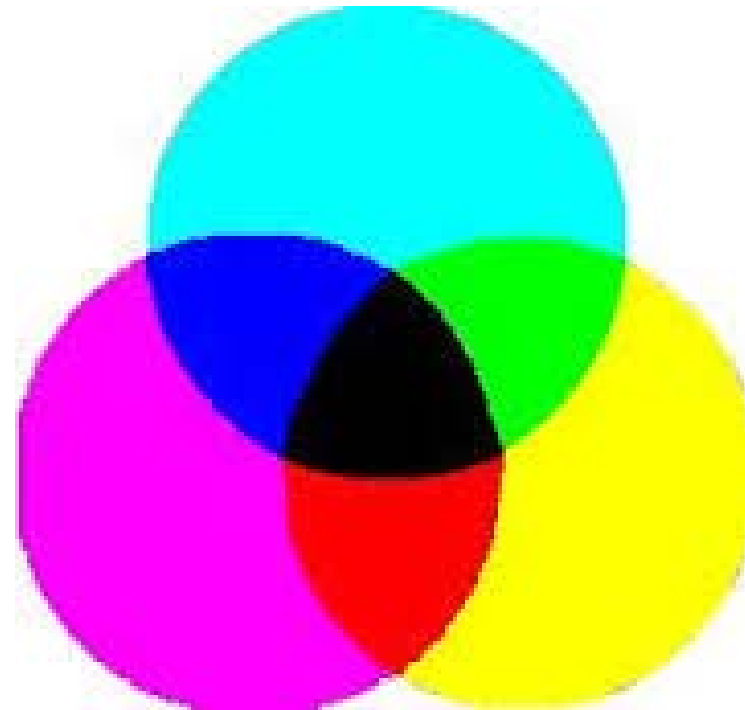
# TEOREMA A SUPERPOSIÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Solução geral:** Para achar uma determinada variável (**tensão** ou **corrente**) de um elemento do circuito faz: considerar isoladamente a contribuição de cada fonte (**tensão** ou **corrente**) para achar a variável desejada, faça a análise de cada fonte isoladamente anulando as demais fontes.

O efeito **de anular uma fonte de tensão** é o mesmo que substituir essa fonte por um **curto-circuito**.

O efeito de **anular uma fonte de corrente** é o mesmo que substituir essa fonte por um **circuito aberto**.





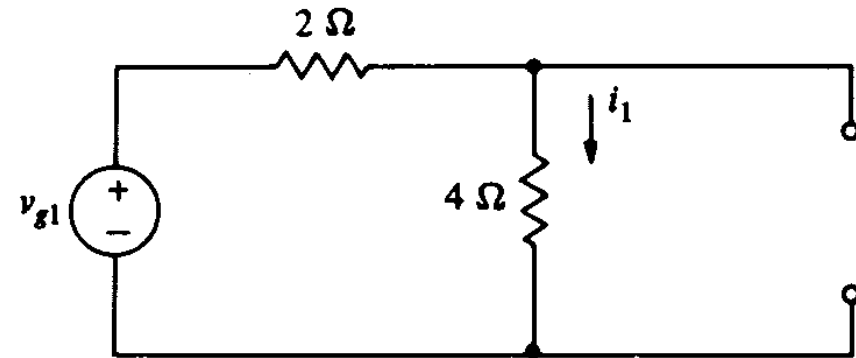
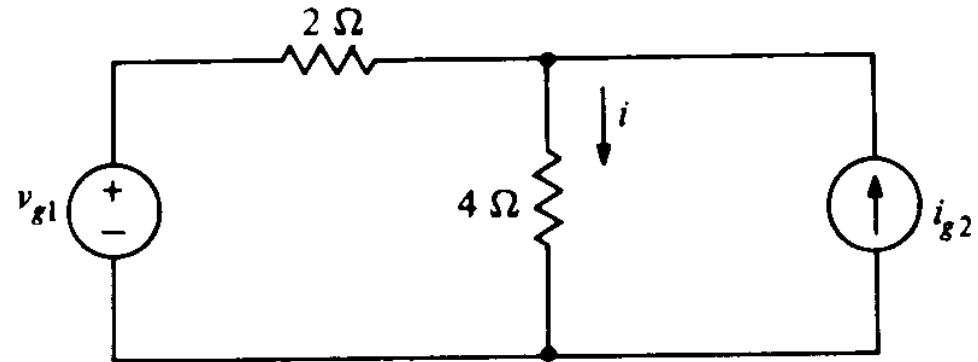
# TEOREMA A SUPERPOSIÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Exemplo:** Calcular o valor da corrente “i” do circuito ao lado. Dados:  $v_{g1}=12[V]$  e  $i_{g2}=3[A]$ .

Calculo de i devido a fonte  $v_{g1}$  . Nota: deve-se anular uma fonte  $i_{g2}$

$$i_{v_{g1}} = \frac{v_{g1}}{2+4} = 2[A]$$



# TEOREMA A SUPERPOSIÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

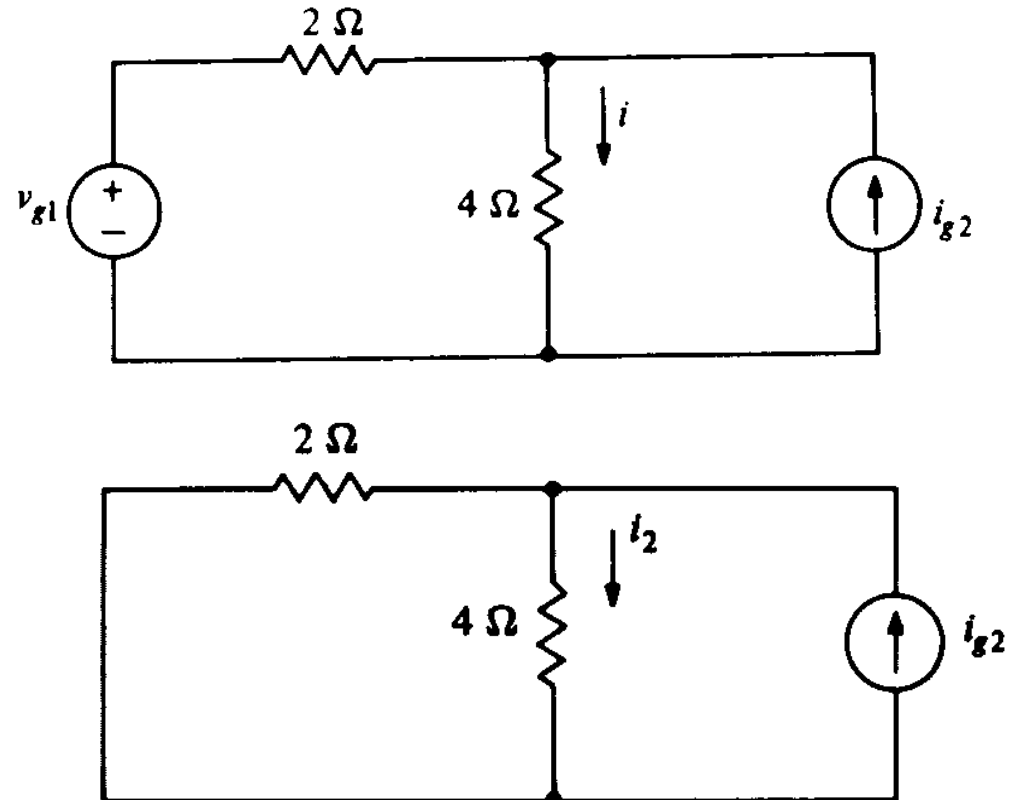
► **Exemplo:** Calcular o valor da corrente “i” do circuito ao lado. Dados:  $v_{g1}=12[V]$  e  $i_{g2}=3[A]$ .

Calculo de i devido a fonte  $i_{g2}$  . Nota: deve-se anular uma fonte  $v_{g1}$

$$i_{i_{g2}} = \frac{2}{2+4} i_{g2} = 1[A]$$

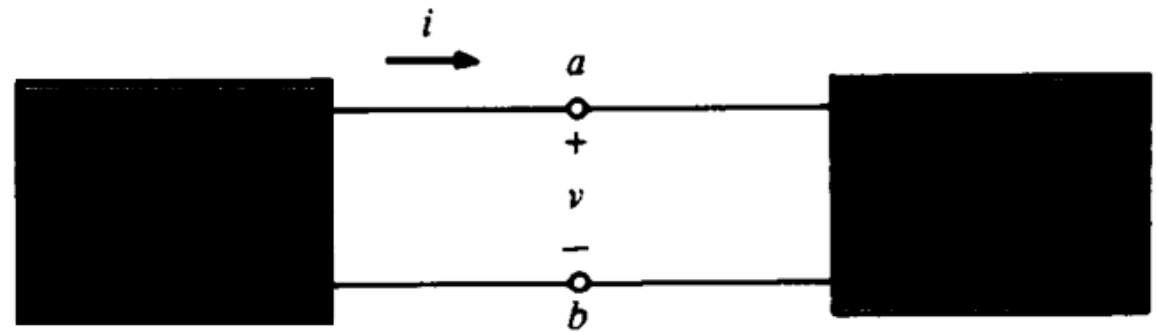
$$\therefore i = i_{v_{g1}} + i_{i_{g2}} = 3[A]$$

Nota: verificar o que cada fonte entrega no elemento. Recalcular via análise nodal e comprovar o resultado.



## TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

- ▶ O uso de qualquer um dos teoremas estudados até esse momento nos habilita a trocar um circuito inteiro, visto nos seus terminais, por um circuito equivalente, composto de uma fonte e um resistor. Então podemos determinar a tensão ou a corrente em um único elemento de um circuito complexo, trocando o restante do circuito por um resistor equivalente e uma fonte, e analisar o circuito resultante, que se torna extremamente simples.



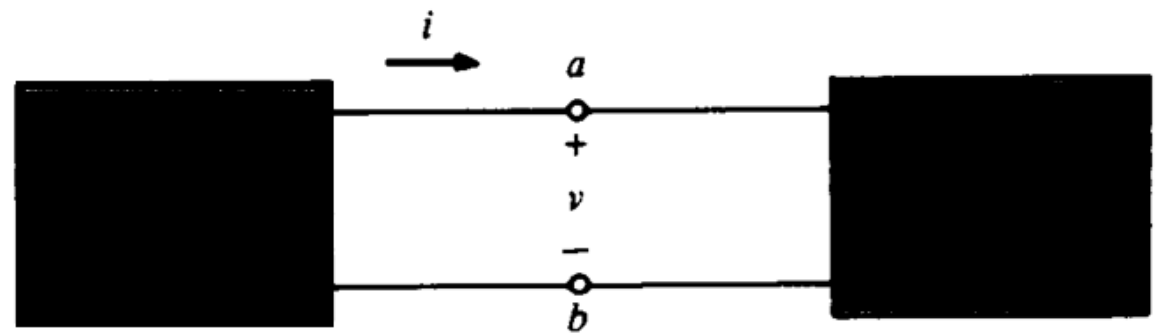
Circuito A

Circuito B

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ Considerando que o circuito possa ser separado em duas partes, como mostrado na figura ao lado.
- ▶ A parte chamada circuito A é um circuito linear contendo resistores, fontes dependentes e fontes independentes. O circuito B pode conter elementos não lineares.

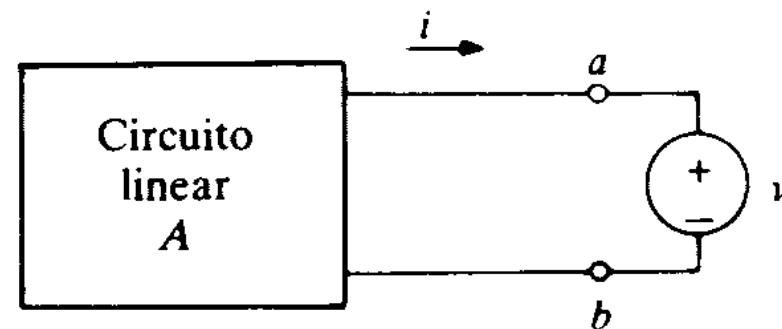
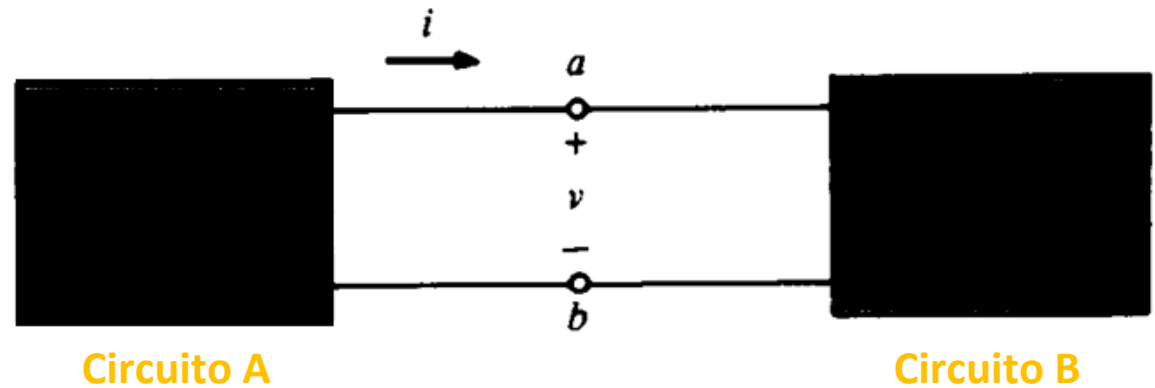


Circuito A

Circuito B

## TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

- ▶ Pode-se substituir o circuito A por um circuito equivalente, contendo um fonte e um resistor, de forma que, nos terminais a-b, as relações de tensão e corrente sejam as mesmas
- ▶ Desta forma consegue-se obter o mesmo efeito se trocarmos o circuito B por uma fonte de tensão de  $v$  volts com polaridade apropriada como mostra a figura ao lado.
- ▶ Obtemos agora um circuito linear, e, conseqüentemente, podemos empregar todas as propriedades que estabelecemos para tais circuitos.

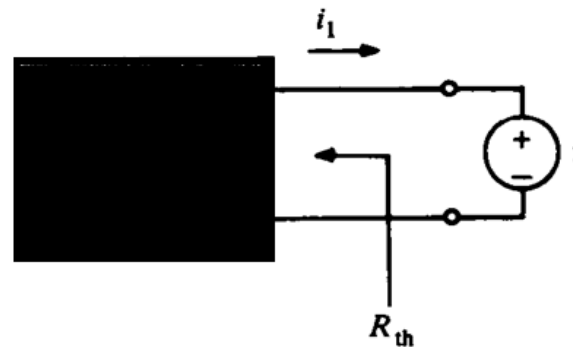


# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

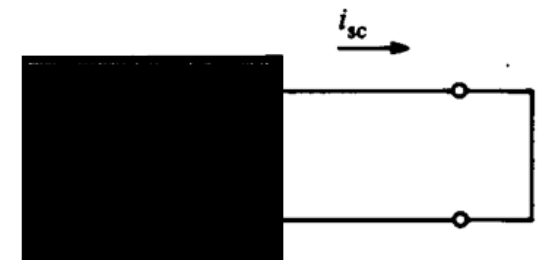
- ▶ A corrente  $i$  é dada por:

$$i = i_1 + i_{sc} \quad \text{eq.(I)}$$

- ▶ Onde  $i_1$  é produzida pela fonte de tensão  $v$  com o circuito A eliminado “morto” (todas as suas fontes independentes foram eliminadas “superposição”) e  $i_{sc}$  é a corrente de curto-circuito produzida por alguma fonte no circuito A com fonte  $v$  eliminada “morta” (trocada por um curto-circuito), como mostra as figuras abaixo, respectivamente.



Circuito A “morto”



Circuito A “vivo”

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

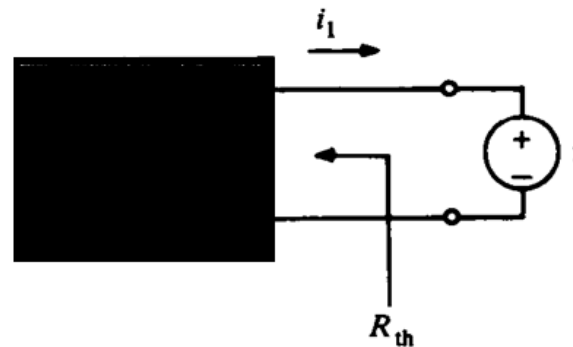
- Uma vez que as fontes independentes estão “mortas” no circuito ao lado dos terminais da fonte  $v$  vemos somente um circuito resistivo, cuja resistência equivalente será chamada de  $R_{th}$  (resistência de Thévenin).

$$i = i_1 + i_{sc} \quad \text{eq.(I)}$$

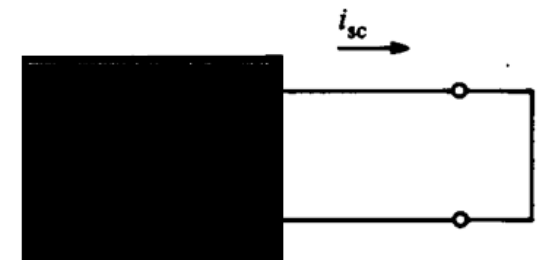
## Do circuito A “morto”

Pela lei de Ohm, temos, então:

$$i_1 = -\frac{v}{R_{th}} \quad \text{eq.(II)}$$



Circuito A “morto”



Circuito A “vivo”

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

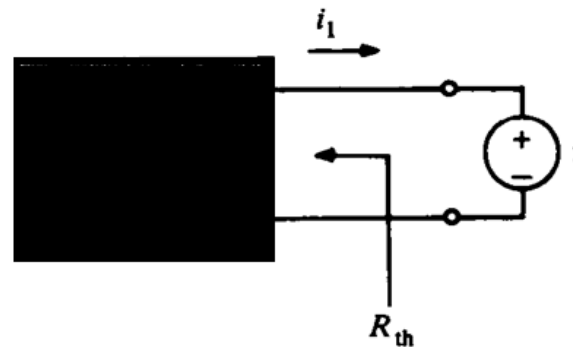
$$i = i_1 + i_{sc} \quad i_1 = -\frac{v}{R_{th}}$$

eq.(I)

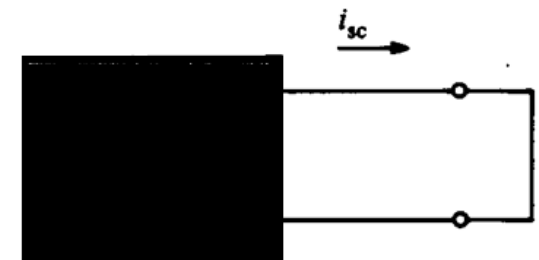
eq.(II)

Substituindo a eq.(II) na eq.(I) ,temos:

$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc} \quad \text{eq.(III)}$$



Circuito A “morto”



Circuito A “vivo”



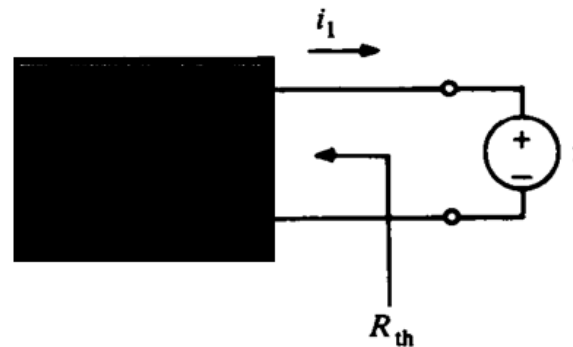
# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc} \quad \text{eq.(III)}$$

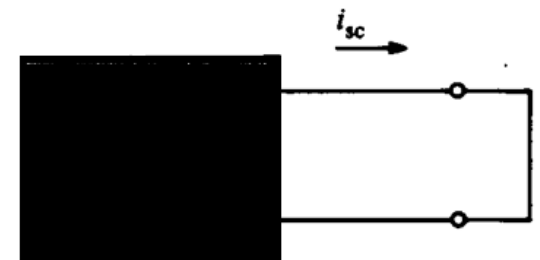
A **eq.(III)** descreve o circuito A no caso geral, ela deve se manter para qualquer condição de seus terminais. Suponha que os terminais estejam abertos. Neste caso,  $i = 0$ , e designaremos a tensão  $v = v_{oc}$ , então da **eq.(III)**, temos:

$$0 = -\frac{v_{oc}}{R_{th}} + i_{sc}$$

ou  $v_{oc} = R_{th} i_{sc} \quad \text{eq.(IV)}$



Circuito A "morto"



Circuito A "vivo"

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

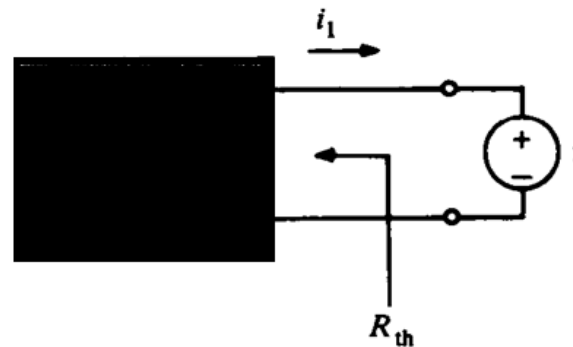
$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$$

eq.(III)

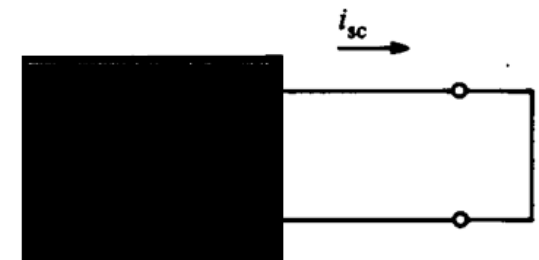
$$v = -R_{th}i + v_{oc}$$

eq.(V)

As **eq.(III)** e **eq.(V)** são usadas para obter dois circuitos (de Thévenin e de Norton).



Circuito A “morto”



Circuito A “vivo”

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

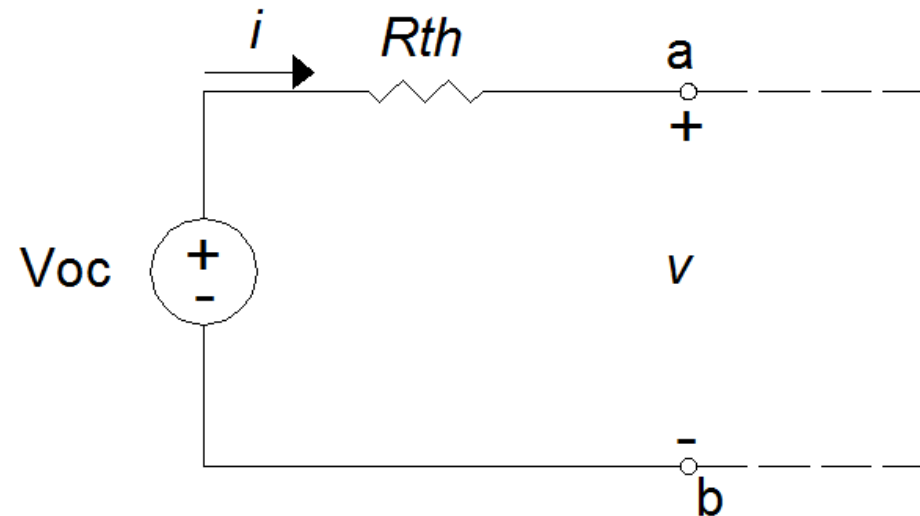
$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$$

eq.(III)

$$v = -R_{th}i + v_{oc}$$

eq.(V)

O circuito equivalente de Thévenin é simplesmente um que seja descrito pela **eq.(V)**, com a tensão nos terminais **v** e a corrente **i**. para desenhar o circuito pode-se observar que a tensão **v** é a soma de dois termos, que, portanto, deve representar dois elementos série, cujas tensões, nos terminais, se somam, dando o valor de **v**.



CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

## TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

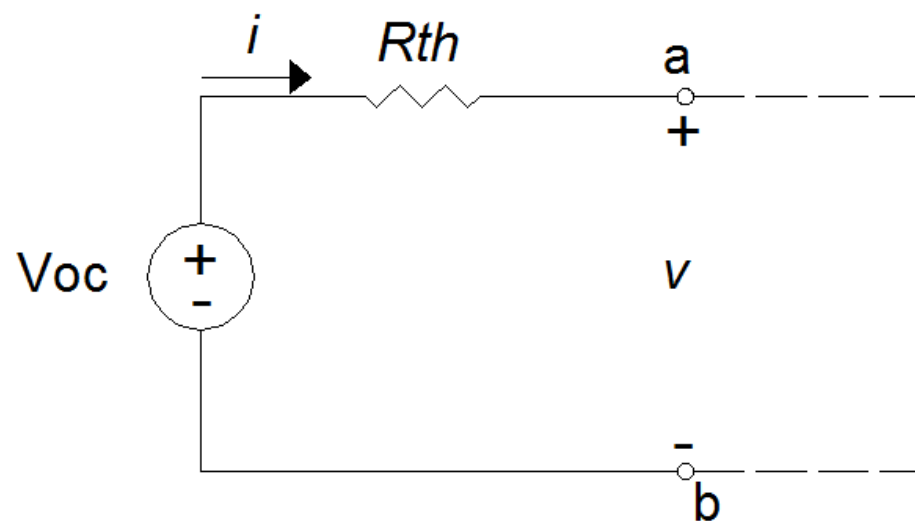
$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$$

eq.(III)

$$v = -R_{th}i + v_{oc}$$

eq.(V)

O primeiro termo, corresponde a resistência de Thévenin “ $R_{th}$ ”, e o segundo termo a uma fonte de tensão nos terminais com valor **voc**, como mostrado na figura ao lado.



CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

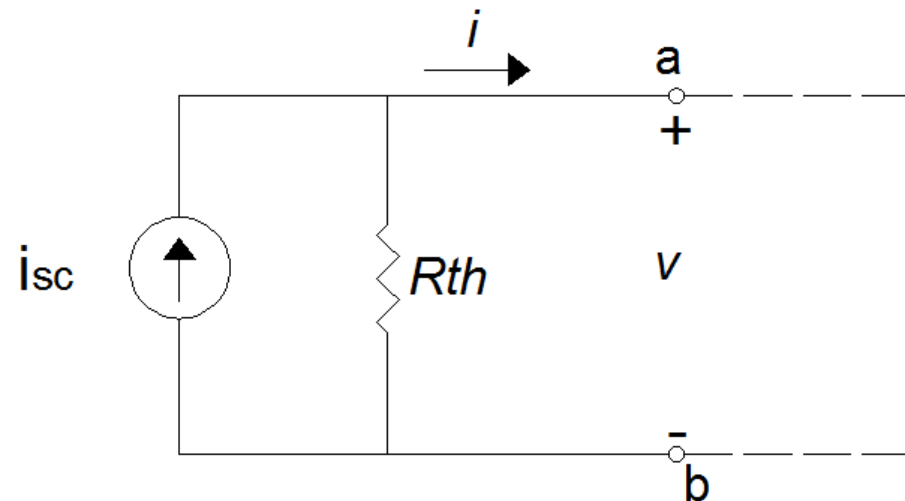
$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$$

eq.(III)

$$v = -R_{th}i + v_{oc}$$

eq.(V)

O circuito dual do Thévenin, é o circuito de Norton, obtido da eq.(III). Para desenhar o circuito pode-se observar que a corrente  $i$  é a soma de dois termos, que, portanto, deve representar dois elementos paralelo, cujas as correntes se somam resultando o valor de  $i$ .



CIRCUITO EQUIVALENTE DE NORTON

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

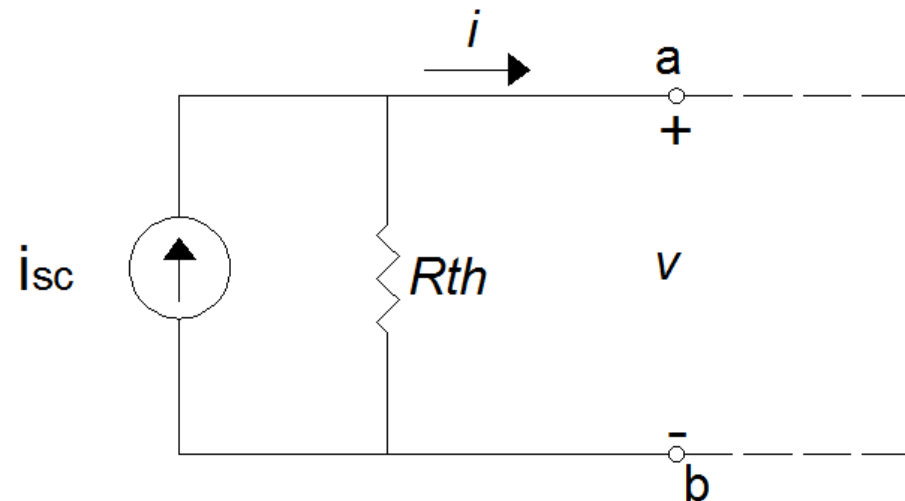
$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$$

eq.(III)

$$v = -R_{th}i + v_{oc}$$

eq.(V)

O primeiro termo, provém da resistência de Thévenin " $R_{th}$ ", e o segundo termo corresponde a um fonte de corrente  $i_{sc}$ , como mostrado na figura abaixo.

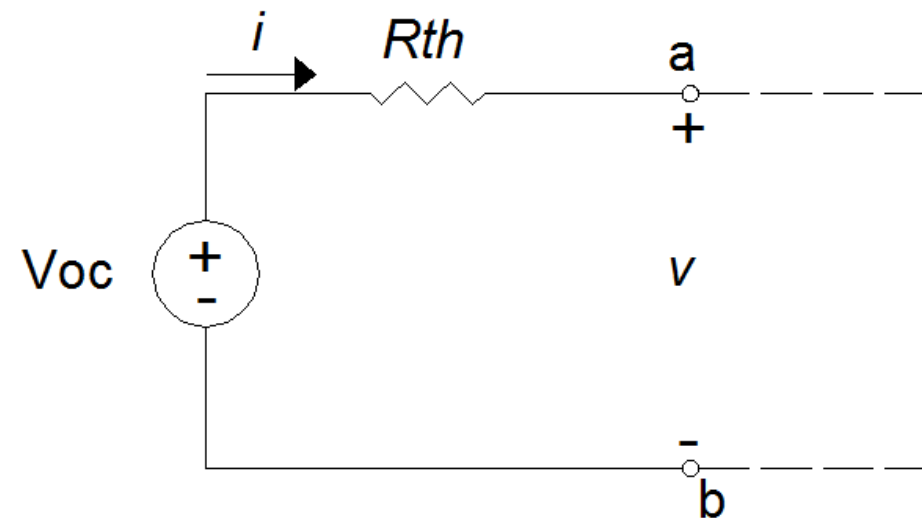


CIRCUITO EQUIVALENTE DE NORTON

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- Passos para resolução do teorema:
1. Remova a parte do circuito para a qual deseja encontrar o circuito equivalente de Thévenin.
  2. Assinale claramente os dois terminais do circuito resultante.
  3. Calcule a resistência equivalente de Thévenin  $R_{th}$  (resistência vista a partir da parte removida do circuito) anulando primeiramente as fontes de tensão e corrente (substituindo-as por curto-circuito e circuitos abertos, respectivamente).



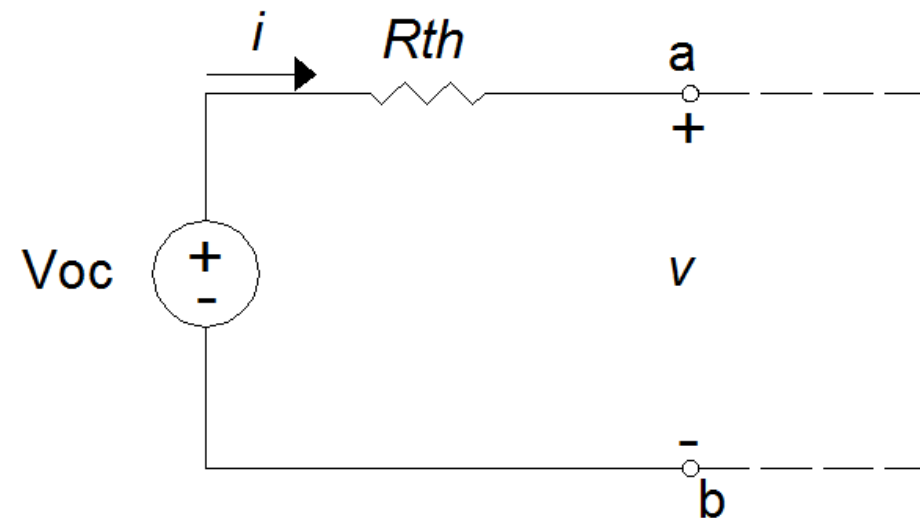
CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

## Passos para resolução do teorema:

4. Obtenha a fonte de tensão equivalente do circuito de Thévenin **Voc** (tensão nos terminais “aberto” do circuito removido), lembrando que aqui deve-se considerar as fontes de corrente e tensão.
5. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin com a parte do circuito previamente removida colocada novamente no lugar.



CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN



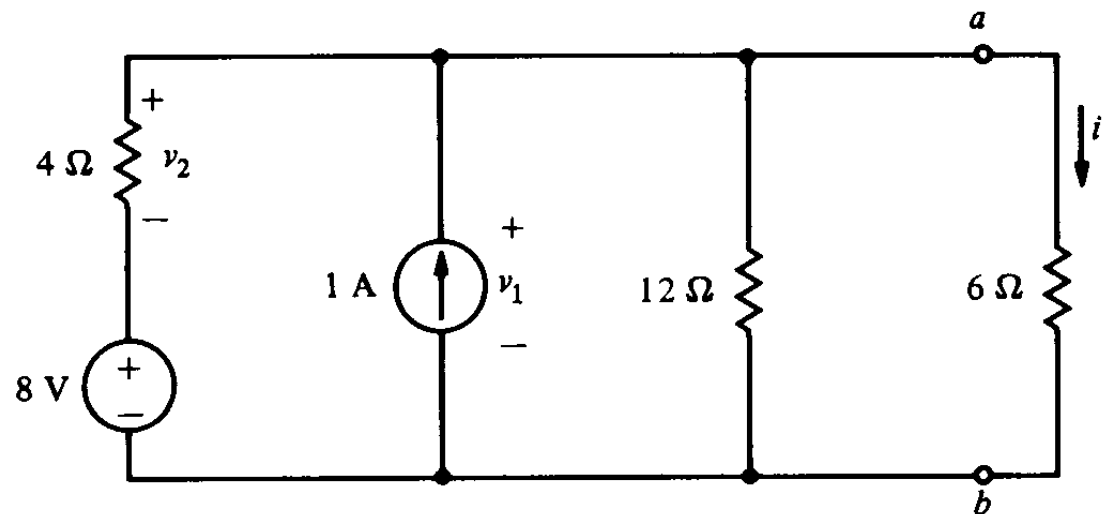
# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Exemplo:** Substitua a rede à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu circuito equivalente de Thévenin e use este resultado para encontrar o valor de  $i$ .

Resposta:  $v_{oc} = 9[V]$ ;  $R_{th} = 3 [\Omega]$ ;  $i = 1 [A]$

**Resolução será feita pelo professor em sala de aula.**

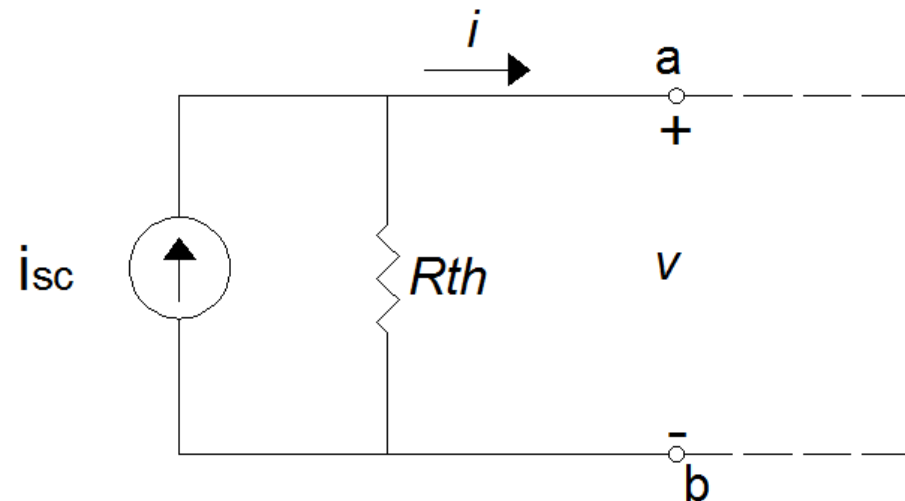


# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

## Passos para resolução do teorema:

1. Remova a parte do circuito para a qual deseja encontrar o circuito equivalente de Norton.
2. Assinale claramente os dois terminais do circuito resultante.
3. Calcule a resistência equivalente de Thévenin  $R_{th}$  (resistência vista a partir da parte removida do circuito) anulando primeiramente as fontes de tensão e corrente (substituindo-as por curto-circuito e circuitos abertos, respectivamente).



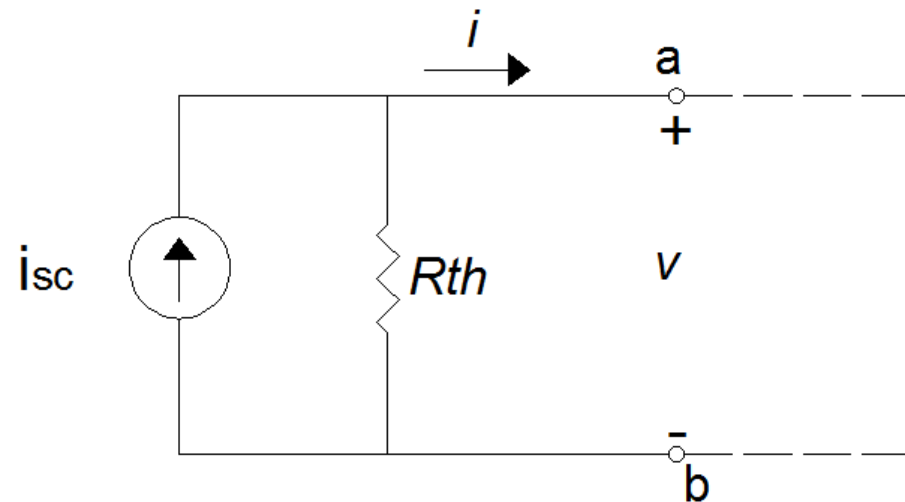
CIRCUITO EQUIVALENTE DE NORTON

# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

## Passos para resolução do teorema:

- Obtenha a fonte de corrente equivalente do circuito de Norton  $I_{sc}$  (Corrente que passa entre os terminais “**curto-circuitado**” do circuito removido), lembrando que aqui deve-se considerar as fontes de corrente e tensão. Nota: pode-se achar  $V_{oc}$  aplicar a **eq.(IV)** para encontrar  $I_{sc}$ .
- Desenhe o circuito equivalente de Norton com a parte do circuito previamente removida colocada novamente no lugar.



**CIRCUITO EQUIVALENTE DE NORTON**

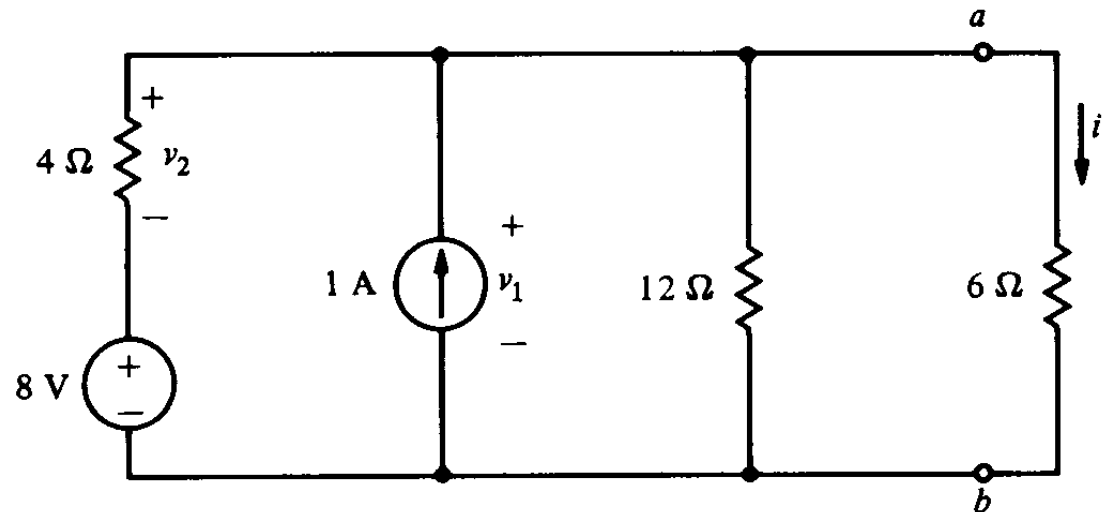
# TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

► **Exemplo:** Substitua a rede à esquerda dos terminais  $a$ - $b$  pelo seu circuito equivalente de Norton e use este resultado para encontrar o valor de  $i$ .

Resposta:  $I_{sc} = 3[A]$ ;  $R_{th} = 3 [\Omega]$ ;  $i = 1 [A]$

**Resolução será feita pelo professor em sala de aula.**



# TRANSFERÊNCIA MÁXIMA DE POTÊNCIA

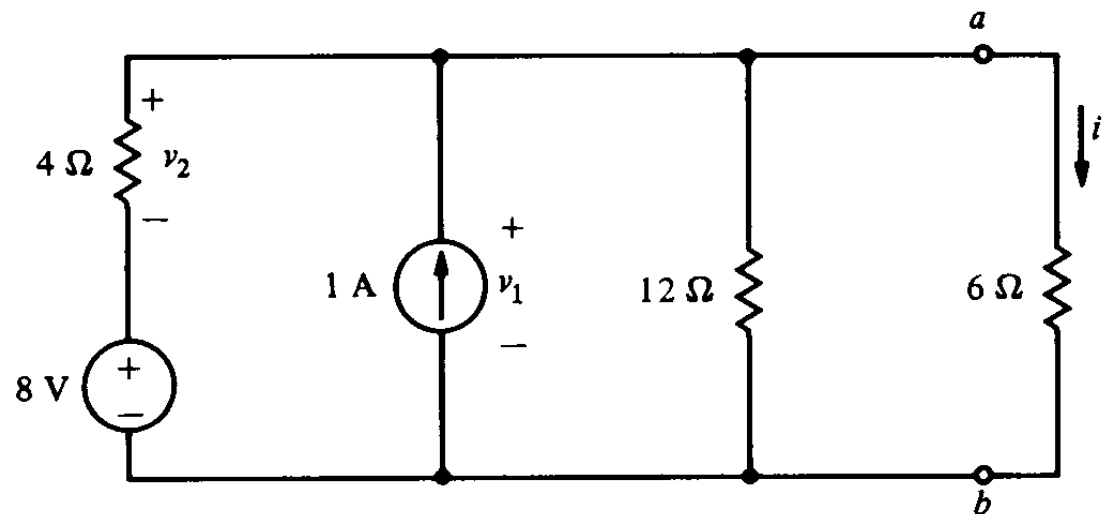
Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ Em resumo, a máxima potência “transferida” em um determinado ponto do circuito é obtida de um circuito linear em um dado par de terminais, quando estes terminais têm carga igual à resistência de Thévenin, do circuito.

**Nota:** veja a teoria complementar nas referências citadas.

- ▶ **Exemplo:** Verifique se nos terminais a-b do circuito abaixo é possível obter a máxima transferência de potência.

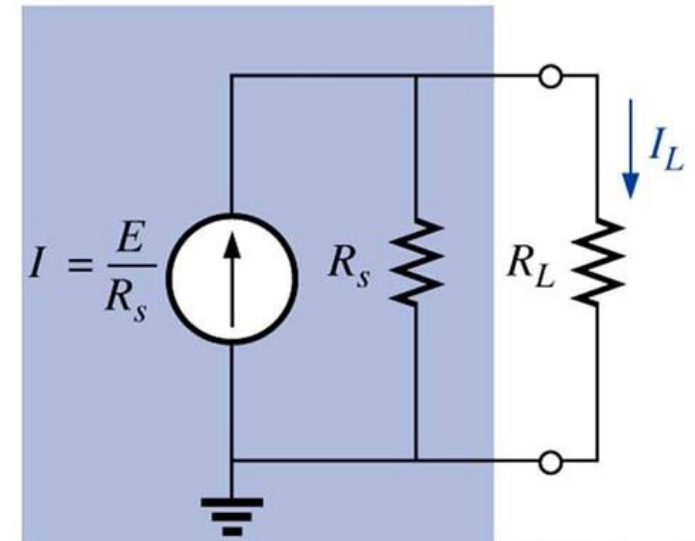
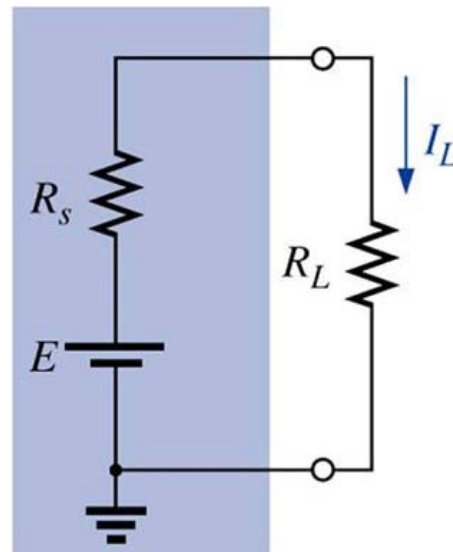
**Resolução será feita pelo professor em sala de aula.**



# TRANSFORMAÇÃO DE FONTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

- ▶ Transformação de fontes produzem valores idênticos de corrente e tensão quando conectadas à mesma carga.



# REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Teorema de Redes

HILBURN J. L., JOHNSON D. E., JOHNSON J. R., Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos. 4ªed., Rio de Janeiro: LTC, 1994.

BOYLESTAD, R. L. Introdução à Análise de Circuitos. Editora Pearson do Brasil, 10. ED., 2004

