

Trabalho de Álgebra Linear

Professora: Aline Brum Seibel

Alunos: Luis Alexandre Ferreira Bueno
Luiz Filipe de Jesus
Nicolas Timoteu Cuebas
Vitor Bruno de Oliveira Barth

Conteúdos: Matrizes canônicas, transformações lineares, operadores lineares, autovalores, autovetores e polinômios característicos

1. Matrizes canônicas e transformações lineares

I) Isomorfismo: Seja $\phi : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Para que ela exista, é necessário que sejam atendidas algumas condições:

- a) V e W precisam estar sobre o mesmo plano
- b) ϕ precisa ser bijetora, ou seja, todo elemento em W precisa ser necessariamente e exclusivamente a imagem de um elemento em V
- c) ϕ deve obedecer as regras de soma e multiplicação por escalar:
 - $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \phi(\vec{v}_1), \phi(\vec{v}_2) \in W$ e $c \in \mathbb{R}$
 - i) $\phi(\vec{v}_1) + \phi(\vec{v}_2) = \phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$
 - ii) $\phi(c * \vec{v}_1) = c * \phi(\vec{v}_1)$

II) Homomorfismo: Denomina-se uma transformação linear homomórfica a transformação $T : V \rightarrow W$ em que a função T não é bijetora.

III) Base de uma Transformação: Seja V um espaço vetorial finito onde $n = \dim(V)$ e $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ a base deste espaço. Sendo assim, posso escrever todos os vetores deste espaço através da combinação $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$, onde c pertence, claro, ao mesmo plano que os o espaço vetorial.

Neste caso, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ é a matriz das coordenadas de V .

Se tenho uma a transformação linear $T : V \rightarrow W$, assim como a base de V , consigo dizer onde estão todos os vetores de $T(V)$, pois segundo as regras c.i) e c.ii) podemos dizer que $T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n) = T(c_1\vec{v}_1) + T(c_2\vec{v}_2) + \dots + T(c_n\vec{v}_n) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \dots + c_nT(\vec{v}_n)$

IV) Imagem e núcleo de uma Transformação: Sendo $T : V \rightarrow W, Im(T) = \{\vec{w} \in W | \vec{w} = T(\vec{v}) \text{ para alguns } \vec{v} \in V\}$, ou seja, a Imagem de uma Transformação corresponde ao subespaço vetorial de W que possui elementos dados por $T(\vec{v})$. Sendo assim, logicamente $Im(T) \leq W$.

Já o núcleo de uma Transformação (denotado por $Ker(T)$) é dado por $Ker(T) = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = 0\}$. Se a transformação é injetora, o núcleo é trivial, afinal $T(0)$ deve obrigatoriamente pertencer à $Im(T)$. Porém caso ela não seja injetora, o núcleo poderá ser um conjunto vetorial. Sendo assim, obrigatoriamente, $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V

Ex. 1) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$
 $Im(T) = ? \rightarrow T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z) = (2x, 3x) + (-y, y) + (z - 2z)$
 $Im(T) = x(2, 3) + y(-1, 1) + z(1, -2) \rightarrow Im(T) = [(2, 3) + (-1, 1) + (1, -2)]$

$Ker(T) = ? \rightarrow Ker(T) = (x, y, z) | (2x - y + z, 3x + y - 2z) = (0, 0)$
 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \implies 5x - z = 0 \implies 5x = z$
 $\implies 2x - y + z = 0 \implies 2x - y + 5x = 0 \implies 7x = y$
 $Ker(T) = \{(x, 7x, 5x) | x \in \mathbb{R}\}$

2. Operadores lineares

É chamado de Operador Linear a Transformação Linear T tal que $T : V \rightarrow V$, ou seja, aquela na qual o domínio e o contradomínio pertencem ao mesmo espaço vetorial.

A condição de existência de um Operador Linear é a mesma que as outras transformações, ou seja, deve obedecer as regras de soma e de multiplicação por escalar dada em 1.c.i) e 1.c.ii), porém V necessita ser um espaço vetorial finito. Como o espaço vetorial do domínio é o mesmo do contradomínio, a base de ambos é a mesma.

Seja $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ as coordenadas do espaço vetorial V , e A uma matriz de dimensão $n * n$, um

operador linear pode ser expresso na forma $T = A * X$, sendo esta a grande diferença entre ele e as outras transformações lineares.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Ao calcularmos $A * X$, perceberemos que $T(\vec{v}_j) \mid 1 \leq j \leq n$ é dada por $\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{v}_i$, assim como $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^n c_j T(\vec{v}_j)$. Portanto $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_j (a_{ij} \vec{v}_i)$

3. Autovalores e autovetores

Seja V um espaço vetorial sobre K , e seja T um operador linear sobre V . Um vetor não nulo \vec{v} de V é dito um autovetor de T se existir um $\lambda \in K \mid T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Neste caso λ é dito autovalor de T

Ex. 1) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \rightarrow T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ Verifique se $\vec{v} = (5, 2)$ é um autovetor de T . Por definição $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \implies T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2) = 6\vec{v}$. Logo $\vec{v} = (5, 2)$ é um autovetor de T e $\lambda = 6$ é o autovalor associado \vec{v} .

Agora, verifique se $\vec{u} = (1, 1)$ é um autovetor de T .

$T(\vec{u}) = T(1, 1) = (9, 3) = 3(3, 1)$. $(3, 1) \neq (1, 1)$, logo \vec{u} não é um autovetor de T .

Ex. 2) Se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0) = 1(x, y, 0)$. Logo qualquer vetor $(x, y, 0)$ é um autovetor de T e tem seu autovalor associado em 1.

Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $A \in \mathbb{R}(n \times n)$ se existe um vetor $x \in \mathbb{C}$ não nulo tal que $Ax = \lambda x$

Algumas propriedades:

i) Sejam λ e β autovalores diferentes de T e \vec{u} e \vec{v} autovetores associados a λ e β , respectivamente. Então os vetores \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes.

ii) $\det(A) = (\lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_n)$, ou seja, o determinante de A é igual ao produto dos seus autovalores.

iii) A é matriz não singular se, e somente se, todos os seus autovalores são diferentes de 0.

iv) Os autovalores de A e de AT são os mesmos, sendo AT a matriz transposta de A .

4. Polinômios característicos

O Polinômio Característico é um metodo pratico para se encontrar autovalores e autovetores de uma matriz de ordem N

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procuramos um vetor $\vec{v} \in R^3$ e escalares $\lambda \in R$ Tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$. Observe se I for a matriz identidade de mesma ordem a equação pode ser escrita $(A - \lambda I) \vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & -2 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Para se calcular os autovetores de A , isto é, vetores $v \neq 0$, tais que $(A - \lambda I)v = 0$. Neste caso calculamos a $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & -2 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \implies -\lambda^2 + 7\lambda - 16\lambda + 12 = 0 \implies (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são as raízes do polinômio característico de A , e portanto os autovalores da matriz A são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes.

Resolvendo a equação: $Av = \lambda v$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + 1y = 2y \\ y - 2z = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ -x = y \\ y - 2z = 2z \end{cases}$$

Implicando em: $y = 0$, $x = 0$ e como nenhuma equação impõe restrição em z , os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $v(0, 0, z)$ pertendo ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

$$\lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + 1y = 3y \\ y - 2z = 3z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ x = -2y \\ y = z \end{cases}$$

Implicando em: $y = z, x = 2y$. Os autovetores associados a $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$ pertencendo ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamemos essa matriz de B . $B \cdot v = 0$. Se a determinante for diferente de zero, temos que o posto da matriz é n . E o sistema linear indica que existe apenas uma única solução: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ sempre é solução do sistema homogêneo, solução nula. Assim a única solução para encontrar autovetores v é:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (a_{1,1} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda) + \text{termos de grau} < n, \text{ e os autovalores são as raízes deste}$$

polinômio. $P(\lambda)$ conhecido como polinômio característico da matriz.

$$\mathbf{Ex: 1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda + 1) = P(\lambda) \implies P(\lambda) = 0 \implies \lambda = 1 \text{ e } \lambda = -1$$

$$\lambda = 1 \implies \begin{cases} x + 2y = x \\ -y = y \end{cases} \implies y = 0 \text{ e } x = x \implies v = (x, 0)$$

$$\lambda = -1 \implies \begin{cases} x + 2y = -x \\ -y = -y \end{cases} \implies y = y \text{ e } x = -y \implies v = (-y, y)$$

5. Exercícios

1) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas

(a) Qualquer operador linear em V é tal que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$

Pegemos $x \in V$. Sendo $T = T^2$, temos $Tx = T^2x$ e logo $T(x - Tx) = 0$

Sendo $x - Tx = \xi$ para alguns $\xi \in \text{Ker}(T)$, isso mostra que $V = \text{Im}(T) + \text{Ker}(P)$.

Agora pegue $y \in \text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)$. Visto que $y \in \text{Im}(T)$ temos que $y = Tz$ para alguns $z \in V$. Aplicando T em ambos os lados nós obtemos $Ty = T^2z$. Só que $y \in \text{Ker}(T)$, logo $0 = Ty = T^2z = Tz = y$. Isso mostra que $\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T) = 0$ e logo temos que $V = \text{Im}(T) \oplus \text{Ker}(T)$.

(b) Se $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T : (at^2 + bt + c) = (a - b + c, 2a + b - c)$, então $\vec{p}(t) = 5t + 5 \in \text{Ker}(T)$

(c) Se $\text{Ker}(T)$ é gerado por três vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, então a imagem de qualquer operador linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tem dimensão 2

(d) A aplicação linear $T : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + c - d$ é uma transformação linear

(e) Existem transformações lineares $T : P_1 \rightarrow P_3$ sobrejetoras

2) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x + 3y - z)$ determine:

(a) A matriz canônica de T

(b) O núcleo de T , uma base e a dimensão

(c) A imagem de T , uma base e a dimensão

3) Determine a transformação linear que leva os vetores $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ nos vetores $\vec{w}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0)$ e $\vec{w}_3 = (1, 2, 4)$ respectivamente. e responda se esta transformação linear é um isomorfismo

4) Dada a matriz canônica $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ de um operador linear em \mathbb{R}^3 , verifique se T é um isomorfismo e justifique se $\vec{w} = (2, -1, 0) \in \text{Im}(T)$ e se $\vec{u} = (0, 3, 4) \in \text{Ker}(T)$?

Bibliografia: BOLDRINI, Jose Luís. *Álgebra Linear*. 3ª Edição.

COELHO, Flávio Uhoa. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2ª Edição.

WIKIBOOKS. *Álgebra Linear*. Edição de 24/01/2014.