Propagação de Erros

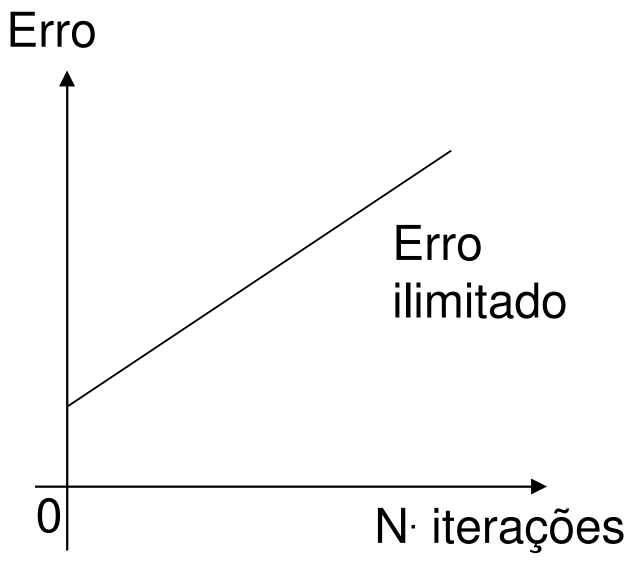
Quando desenvolvemos ou utilizamos um processo numérico para buscar a solução de um determinado problema, normalmente, o processamento envolve um número muito grande de operações elementares.

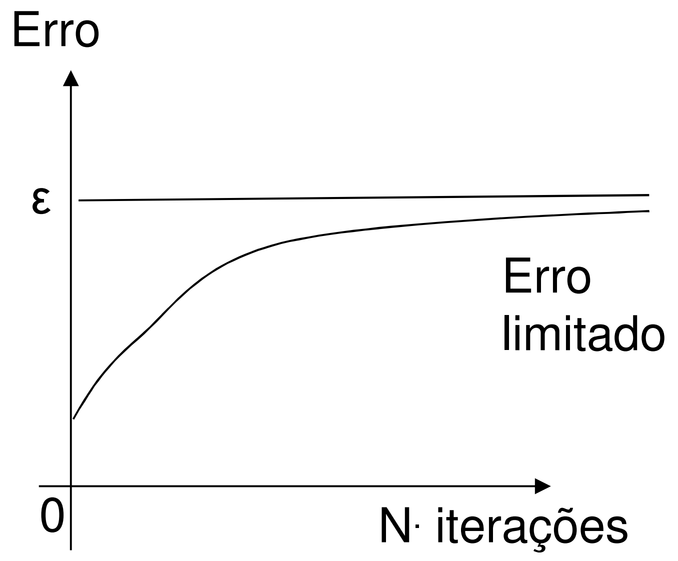
Assim, na maioria das vezes, o erro cometido em uma operação isolada pode não ser muito significativo para a solução do problema que estamos tratando, mas sim, é necessário analisar como os erros se propagam quando tratamos com muitas operações no processamento.

Neste caso, é fundamental termos o conhecimento da forma com que estes erros estão se propagando, isto é, caso estejam se acumulando a uma taxa crescente, dizemos que o erro é ilimitado, e se a sequência de operações é considerada estável

Propagação de Erros

Pode-se visualizar através das figuras abaixo, as situações de erros ilimitados e limitado:





Propagação de Erros

Exemplo 1)
Usando aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, base decimal e truncamento.

$$S = \sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i), \quad sendo\ x_i = 0.46789\ e\ y_i = 3.5678$$

Para i=1, na aritmética definida, realizamos inicialmente a operação que resulta no seguinte valor aproximado:

$S_1 = (x_1 + y_1) = 0.4034 \times 10^1$

Calculando o erro absoluto, temos:
$E_{abs1} = |\ 4.03569 - 4.034\ | = 0.00169 = 0.169 \times 10^{-2}$

Para i = 2, realiza-se a operação que resulta no seguinte valor aproximado:

$S_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0.8068 \times 10^1$

$E_{abs2} = |\ 8.07138 - 8.068\ | = 0.00338 = 0.338 \times 10^{-2}$

Propagação de Erros

Observa-se que, ao realizarmos a mesma operação de adição por duas vezes, Cometemos um erro absoluto significativamente maior:

Para i=3, a operação resulta no seguinte:

$S_3 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0.1210 \times 10^2$

Cujo erro absoluto é dado por:

$E_{abs3} = |\ 12.10707 - 12.10\ | = 0.00707 = 0.707 \times 10^{-2}$

Para i = 4, repete-se o mesmo procedimento, e obtém-se o seguinte valor:

$S_4 = 0.1613 \times 10^2$

$E_{abs4} = |\ 16.14276 - 16.13\ | = 0.01276 = 0.12767 \times 10^{-1}$

Propagação de Erros

Pode-se observar no exemplo anterior, na medida em que aumentamos o número de parcelas na operação de adição, considerando a aritmética definida anteriormente, aumentamos também o erro absoluto cometido na soma final.

Desta forma, a sequência de operações pode torna-se instável conforme a figura do erro ilimitado.

Propagação de Erros

Calcular $e^{-5,25}$ utilizando 5 digitos significativos em todas as operações:

Solução:

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

Se e^{-x} é calculado usando esta fórmula, a série deve ser truncada. Assim, já estamos introduzindo um erro de truncamento.

Vamos considerar os 20 primeiros termos da série anterior para avaliar $e^{-5,25}$. Tem-se então:

Propagação de Erros

Efetuando os cálculos, obtemos: $e^{-5.25} = 0.65974x10^{-2}$. Observe que, usando uma calculadora, o resultado de $e^{-5.25} = 0.52475x10^{-2}$

A pergunta que surge é: Podemos ter um resultado mais preciso? Sim. Basta lembrar que :

$$e^{-5.25} = \frac{1}{e^{5.25}} \quad e \quad que \quad e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!}$$

Para todo número real x. Somando todas as parcelas de $e^{5.25}$ obtemos $e^{5.25}$ = $0.19057x10^{3}$ e assim:

$$e^{-5.25} = \frac{1}{e^{5.25}} = \frac{1}{0.19057 \cdot 10^{3}} = 0.52475 \cdot 10^{-2}$$

Propagação de Erros

Na tabela abaixo são apresentados os cálculos para:

$$e^{-5.25}, \quad e^{5.25} \quad e \quad \frac{1}{e^{5.25}}$$

Considerando a expansão até o termo de ordem 10^k , k = 1,0, -1, …, -6.

Propagação de Erros

10^k	$e^{-5.25}$	$e^{5.25}$	$\frac{1}{e^{5.25}}$
10^1	$0.64630(10^0)$	$0.18907(10^3)$	$0.52890(10^{-2})$
10^0	$0.42990(10^{-1})$	$0.19049(10^3)$	$0.52496(10^{-2})$
10^{-1}	$0.10393(10^{-1})$	$0.19056(10^3)$	$0.52477(10^{-2})$
10^{-2}	$0.69105(10^{-2})$	$0.19056(10^3)$	$0.52477(10^{-2})$
10^{-3}	$0.66183(10^{-2})$	$0.19057(10^3)$	$0.52475(10^{-2})$
10^{-4}	$0.65929(10^{-2})$	$0.19057(10^3)$	$0.52475(10^{-2})$
10^{-5}	$0.65971(10^{-2})$	$0.19057(10^3)$	$0.52475(10^{-2})$
10^{-6}	$0.65974(10^{-2})$	$0.19057(10^3)$	$0.52475(10^{-2})$

Propagação de Erros

Exercício 1) Considere que as operações de uma máquina sejam processadas com 4 dígitos significativos, onde:

$$x_1 = 0,3491 \cdot 10^4$$

$$x_2 = 0,2345 \cdot 10^0$$

Faça:

a) $(x_2 + x_1) - x_1$

b) $x_2 + (x_1 - x_1)$

Exercício 2) Considere que as operações de uma máquina sejam processadas com 4 dígitos significativos, onde:

$$x = 0,7237 \cdot 10^4 \qquad y = 0,2145 \cdot 10^{-3} \qquad z = 0,2585 \cdot 10^1$$

Faça:

a) x+y+z

b) x-y-z

c) x/y

d) (xy)/z

e) x(y/z)