Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE MODIFICADO

• Em vez de usarmos dois valores arbitrários para fazermos a estimativa da derivada, uma abordagem alternativa envolve uma pequena perturbação da variável independente para fazer uma estimativa de f '(x),

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i} \qquad (1)$$

Onde δ é uma pequena fração de perturbação. Essa aproximação pode ser substituída na fórmula de Newton-Raphson.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Raízes de equações

MÉTODO DA SECANTE MODIFICADO

Desta forma obtém-se a seguinte equação iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)} \qquad (2)$$

Use o método da secante para fazer uma estimativa da raiz de $f(x) = e^{-x} - x$.
Use um valor de 0,01 para δ e comece com x_0 =1,0.

Solução : Lembre-se que a raiz verdadeira é 0,56714329…

Raízes de equações

Primeira iteração:

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0,63212$$

$$x_0 + \delta x_0 = 1,01 \qquad f(x_0 + \delta x_0) = -0,64578$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0,01(-0,63212)}{-0,64578 - (-0,63212)} = 0,537263 \qquad |\varepsilon_t| = 5,3\%$$

Raízes de equações

Segunda iteração:

$$x_0 = 0,537263 \qquad f(x_0) = 0,047083$$

$$x_0 + \delta x_0 = 0,542635 \qquad f(x_0 + \delta x_0) = 0,038579$$

$$x_1 = 0,537263 - \frac{0,00537263(-0,047083)}{0,038579 - 0,047083} = 0,56701 \qquad |\varepsilon_t| = 0,0236\%$$

Raízes de equações

Terceira iteração:

$$x_0 = 0,56701 \qquad f(x_0) = 0,000209$$

$$x_0 + \delta x_0 = 0,572680 \qquad f(x_0 + \delta x_0) = -0,00867$$

$$x_1 = 0,0,56701 - \frac{0,0056701(0,000209)}{-0,00867 - 0,000209} = 0,567143 \qquad |\varepsilon_t| = 2,365 \times 10^{-5}\%$$

• A escolha para o valor de δ não é automática. Se δ for muito pequeno, o método pode ser sobrecarregado de erros de arredondamento causados pelo cancelamento da subtração no denominador da Eq. (2).

• Se for grande demais, a técnica pode ser ineficiente e tornar-se divergente.

• Se for escolhido adequadamente, fornece uma boa alternativa para os casos nos quais o cálculo da derivada é difícil e encontrar duas aproximações iniciais seja incoveniente.

Raízes de equações

RAÍZES MÚLTIPLAS

Uma raíz múltipla corresponde a um ponto onde a função é tangente ao eixo x. Por exemplo , uma raiz dupla aparece em:

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1) \qquad (3)$$

Ou multiplicando os termos.

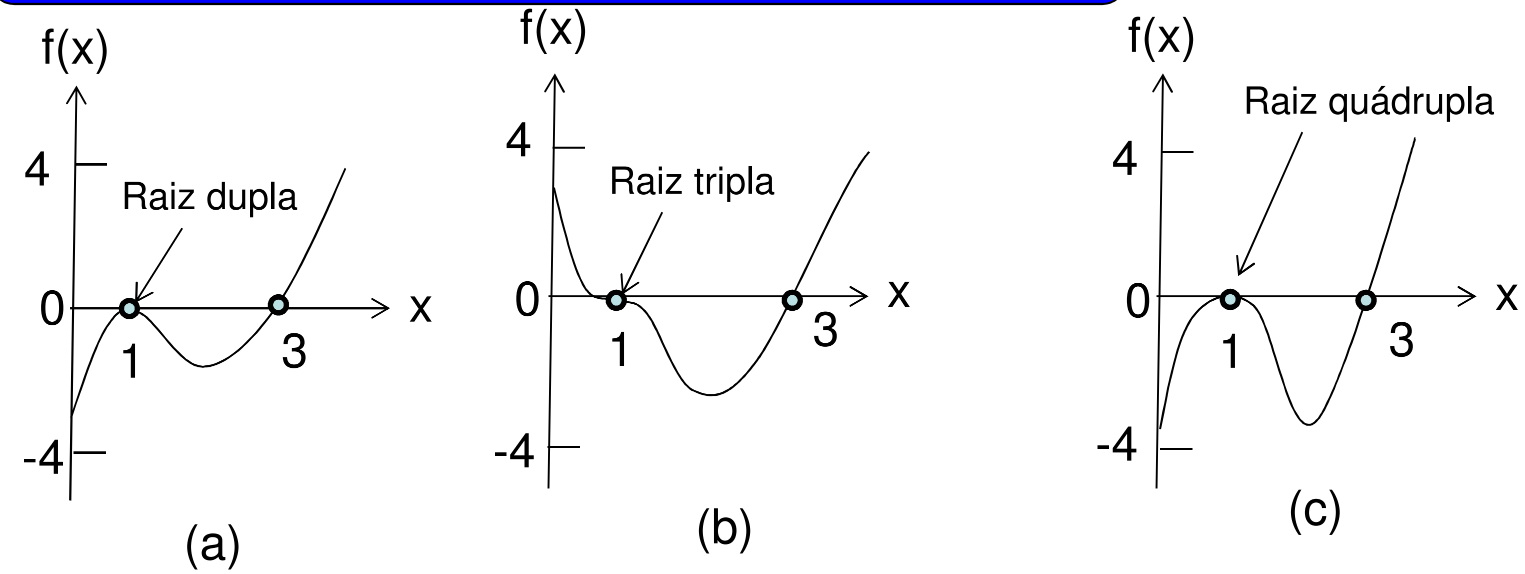
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \qquad (3)$$

A equação tem uma raíz dupla porque um valor de x torna dois termos de (3) iguais a zero.

Graficamente ,isso corresponde à curva tocar o eixo x tangencialmente na raiz dupla.

Veja a figura a seguir.

Raízes de equações



(a) (b) (c)

Uma raiz tripla corresponde ao caso no qual x anula três termos em uma equação:

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Em (b) indica novamente que a função é tangente ao eixo x na raiz, mas neste caso o eixo foi cruzado.

Em geral, as raízes com multiplicidade ímpar cruzam o eixo, enquanto as pares não.

Em (c) multiplicidade par , raiz quádrupla não cruza.

Raízes de equações

As raízes múltiplas causam alguns problemas em métodos numéricos discutidos anteriormente.

1 - O fato da raíz não mudar de sinal em raízes de multiplicidade par **impede o uso de métodos intervalares confiáveis** . Portanto, ficamos limitados a métodos abertos que podem divergir.

2 – Um outro problema é que não só f(x) mas também f ʿ(x) vai a zero na raiz. Isso introduz problemas tanto no método de Newton-Raphson quanto no da secante, já que ambos contém a derivada (ou sua estimativa) no denominador das respectivas fórmulas.

O que pode resultar numa divisão por zero, para quando a solução converge para muito próximo da raiz.

Uma forma simples de contornar esse problema foi demonstrado teoricamente em (Ralsoston e Rabinowitz, 1978) que f(x) sempre atingirá o zero antes de f ʿ(x).

Portanto, se uma verificação do zero for incluída no programa de computador, os cálculos podem ser **parados antes de** f ʿ(x) atingir zero.

Raízes de equações

3 – Os métodos de Newton-Raphson e Secante são linearmente convergentes , em vez de quadraticamente, para raízes múltiplas (Ralston e Rabinowitz, 1978).

Foram propostas modificações para diminuir este problema. Os autores indicaram que uma pequena mudança na fórmulação restaura a convergência quadrática, como em:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f^{'}(x_i)} \qquad (4)$$

Onde **m é multiplicidade da raiz** (m=2 para raiz dupla, m=3 para raíz tripla, etc). Neste caso, o problema é que depende-se do conhecimento prévio da multiplicidade da raíz.

Uma outra alternativa também sugerida pelos autores, é definir uma nova função u(x), isto é, o quociente da função por sua derivada, como em:

$$u(x) = \frac{f(x_i)}{f^{'}(x_i)} \qquad (5)$$

Raízes de equações

A equação (5) pode ser substituída na Eq. original de Newton-Raphson para deduzir a seguinte fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} \qquad (6)$$

A Eq. (5) pode ser derivada e fornecer:

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \qquad (7)$$

Substituindo (5) e (7) em (6) resulta:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \qquad (8)$$

Método de Newton-Raphson Modificado para Raízes Múltiplas

Problema: Use os métodos padrão e modificado de Newton-Raphson para calcular a raiz múltipla da equação f(x)=(x-3) (x-1) (x-1), com aproximação inicial igual x_0 =0.

Solução: A primeira derivada da equação $f'(x)= 3x^2 - 10x + 7$, e portanto, o método padrão para esse problema é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

i	x_i	$\varepsilon_t(\%)$
0	0	100
1	0,4285714	57
2	0,6857143	31
3	0,8328654	17
4	0,9133290	8,7
5	0,9557833	4,4
6	0,9776551	2,2

Método de Newton-Raphson Modificado para Raízes Múltiplas

Como previsto, o método converge linearmente para o valor verdadeiro.
Para o método modificado, a segunda derivada é f ''(x) = 6x -10 e a relação iterativa é (Equação 8):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i\,6 - 3(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7)^2 - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

i	**x_i**	$\varepsilon_t(\%)$
0	0	100
1	1,105263	11
2	1,003082	0,31
3	1,000002	0,00024

Logo a fórmula modificada é quadraticamente convergente.

Pode-se também usar ambos os métodos para procurar a raiz simples x = 3. Basta usar uma aproximação inicial de x_0=4.

Método de Newton-Raphson Modificado para Raízes Múltiplas

i	**Padrão**	$\varepsilon_t(\%)$	**Modificado**	$\varepsilon_t(\%)$
0	4	33	4	33
1	3,4	13	2,636364	12
2	3,1	3,3	2,820225	6,0
3	3,008696	0,29	2,961728	1,3
4	3,000075	0,0025	2,998579	0,0051
5	3,000000	$2x10^{-7}$	2,999998	$7,7x10^{-7}$

Portanto, ambos os métodos convergem rapidamente, sendo o método padrão um pouco mais eficiente.

Método de Newton-Raphson Modificado para Raízes Múltiplas

Este exemplo, mostrou os prós e contras.

O método modificado é preferível para raízes múltiplas. Entretanto, para raízes simples é um pouco menos eficiente e exige mais esforço computacional que o método padrão.

Método de Newton-Raphson Modificado para Raízes Múltiplas

Determinar a maior raíz real de:

$$f(x)=2x^3 -11,7x^2 +17,7x -5$$

A) Pelo método da secante modificado (três iterações, $x_0 = 3$, $\delta = 0,01$)

Calcule o erro relativo percentual para cada caso.