

# Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá

## Departamento de Eletroeletrônica

Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos  
Elétricos – Aula 06

**Saulo Augusto Ribeiro Piereti**

Graduado em Eng. Elétrica pela UFMT 2005  
Mestre em Eng. Elétrica (SEP) pela USP 2007  
Doutor em Eng. Elétrica (SEP) pela USP 2011

Currículo Lattes <http://lattes.cnpq.br/2141158868960971>

### Tópicos:

- Introdução
- Análise Nodal
- Análise Nodal Circuitos contendo Fontes de Tensão “Super Nós”
- Análise de Malha
- Análise de Malha Circuito Contendo Fontes de Correntes

# INTRODUÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

Em circuitos elétricos simples, onde existe apenas uma equação para se resolver, as leis de OHM e Kirchhoff, resolvem praticamente todos os problemas, porém, para casos mais complexos necessitamos de novas técnicas para resolução destes circuitos:

- ▶ Métodos de análise
  - ❖ Análise nodal (circuitos com fonte de corrente);
  - ❖ Análise nodal (circuitos com fonte de corrente e tensão);
  - ❖ Análise de malhas (circuitos com fonte de tensão);
  - ❖ Análise de malhas (circuitos com fonte de tensão e corrente).



# INTRODUÇÃO

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

Em circuitos elétricos simples, onde existe apenas uma equação para se resolver, as leis de OHM e Kirchhoff, resolvem praticamente todos os problemas, porém, para casos mais complexos necessitamos de novas técnicas para resolução destes circuitos:

- ▶ Teoremas de rede
  - ❖ Circuitos lineares;
  - ❖ Superposição;
  - ❖ Thévenin e Norton;
  - ❖ Fontes práticas;
  - ❖ Transferência de máxima potência.



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

Na análise nodal, as tensões são as incógnitas a serem determinadas, desta forma uma escolha conveniente de tensões para muitas redes é o conjunto de tensões nodais.

Entre dois nós de um circuito elétrico existe sempre uma ddp, porém para que o circuito tenha uma solução exata, é preciso escolher um nó como referência “nó terra”.

**NOTA 1:** O nó de referência é o que tiver maior incidência ramos “números de linhas conectados ao nó” do circuito elétrico, e tem como indicação o símbolo do TERRA.



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

Na análise nodal, as tensões são as incógnitas a serem determinadas, desta forma uma escolha conveniente de tensões para muitas redes é o conjunto de tensões nodais.

Entre dois nós de um circuito elétrico existe sempre uma ddp, porém para que o circuito tenha uma solução exata, é preciso escolher um nó como referência “nó terra”.

**NOTA 2:** No nó de referência é atribuído uma tensão de zero volts, então os demais nós possuem tensões positivas em relação ao nó de referência.





# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

Na análise nodal, as tensões são as incógnitas a serem determinadas, desta forma uma escolha conveniente de tensões para muitas redes é o conjunto de tensões nodais.

Entre dois nós de um circuito elétrico existe sempre uma ddp, porém para que o circuito tenha uma solução exata, é preciso escolher um nó como referência “nó terra”.

**NOTA 3:** Para cada  $N$  nós, haverá  $(N-1)$  tensões a ser encontrada, já que uma tensão é igual a zero (nó de referência).

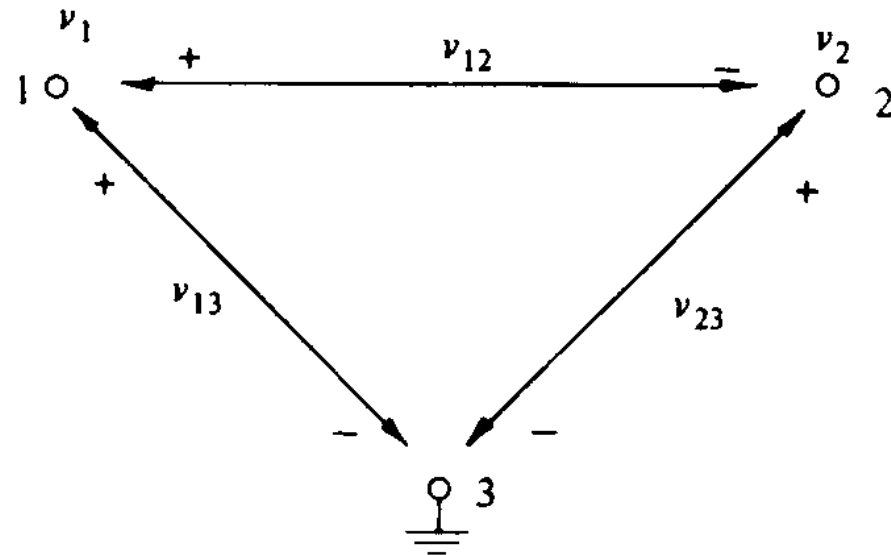


# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► Como as incógnitas são as tensões, aplica-se então a LKC aos nós. A corrente nos elementos do circuito é proporcional às tensões sobre os mesmos, que podem ser:

1. tensão de nó: se um nó do elemento está aterrado;
2. ou, diferença de potencial entre dois nós.



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

O nó 3 é referência, então:  $v_3 = 0[V]$

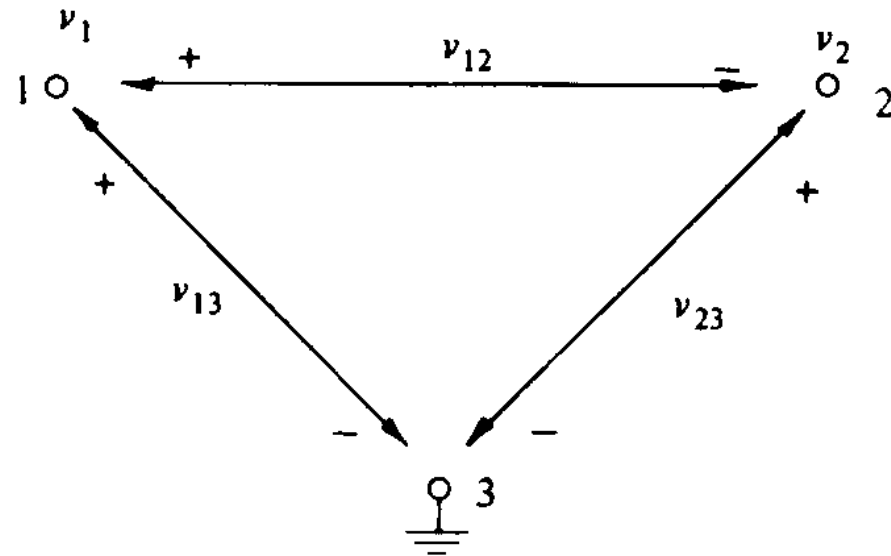
As tensões no nó 1 e 2 são:  $V_1$  e  $V_2$ ,  
então:  $V_{12}$  com a polaridade  
mostrada é:

$$v_{12} = v_1 - v_2$$

As tensões nos outros elementos  
são:

$$v_{13} = v_1 - 0 = v_1$$

$$v_{23} = v_2 - 0 = v_2$$

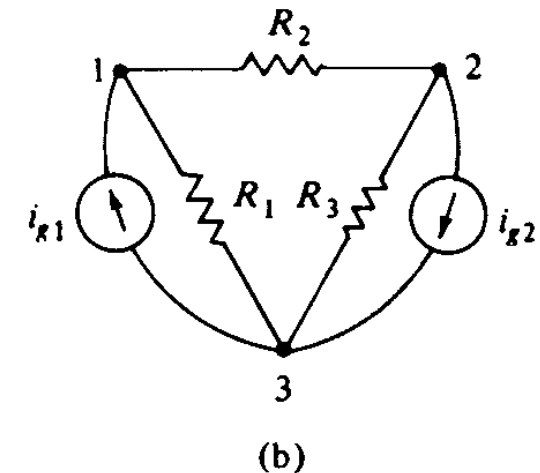
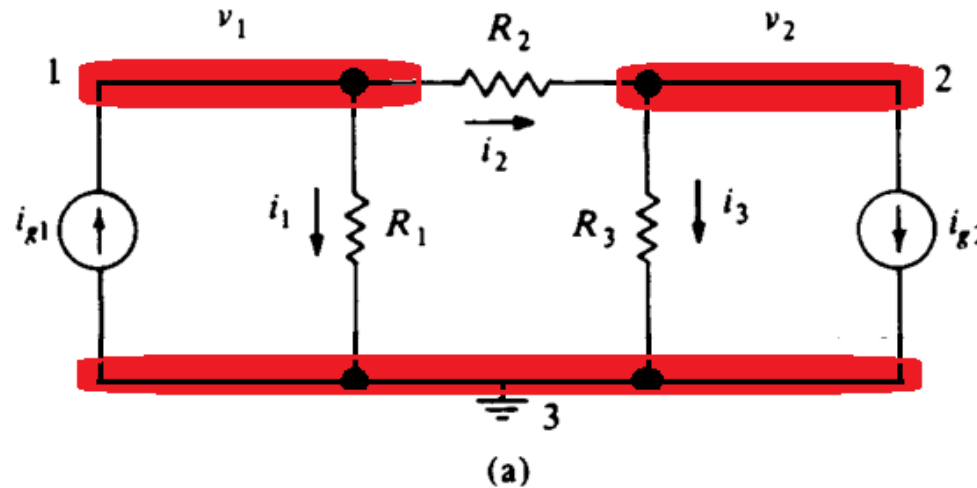




# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

- ▶ Para a LKC, as redes mais simples são as que contêm somente fontes independentes de corrente.
- ▶ O circuito ao lado contém apenas fontes de corrente independentes.



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

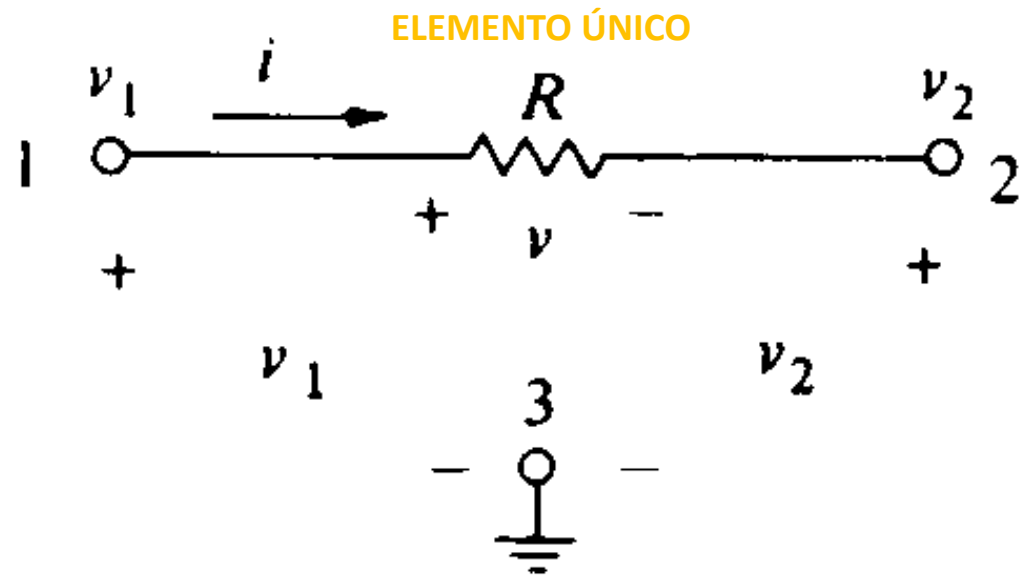
- Antes de escrever as equações dos nós, considere o elemento mostrado ao lado:

A tensão no elemento é:  $v = v_1 - v_2$

Pela lei de OHM:  $i = \frac{v}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R}$

ou  $i = G(v_1 - v_2)$

Lembrando que  $G=1/R$  é a condutância.



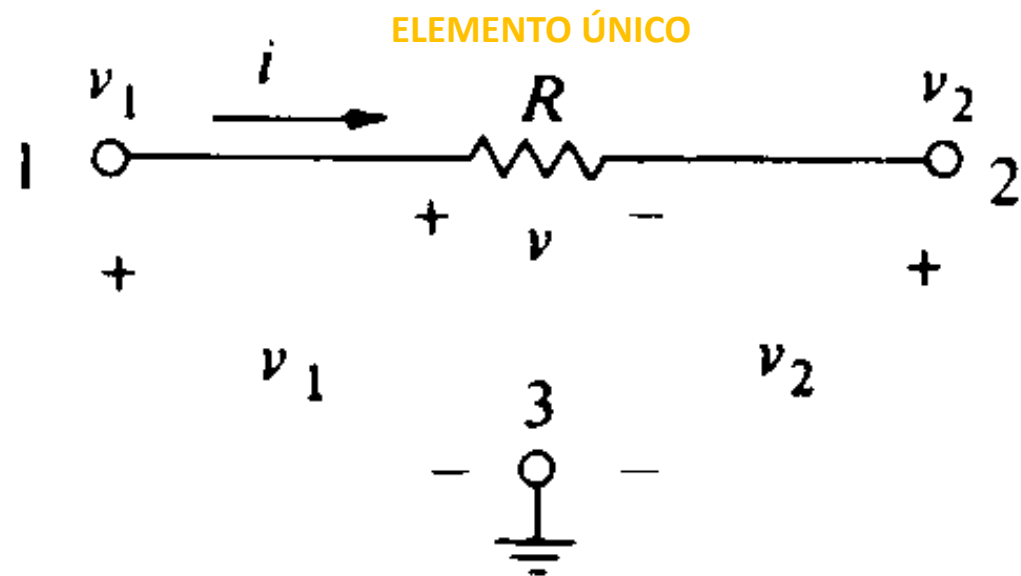
# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

$$v = v_1 - v_2$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R} \quad i = G(v_1 - v_2)$$

- ▶ Neste elemento a corrente que flui do nó 1 para o nó 2 é a diferença entre a tensão de nó no nó 1 e a tensão de nó no nó 2 dividida pela resistência R, ou multiplicada pela condutância G. Usando este raciocínio podemos escrever as equações de qualquer circuito elétrico.



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## ► Análise do exemplo anterior:

Aplicando LKC no nó 1:  $i_1 + i_2 - i_{g1} = 0$

Aplicando a lei de OHM:

$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) - i_{g1} = 0$$

Aplicando LKC no nó 2:  $-i_2 + i_3 + i_{g2} = 0$

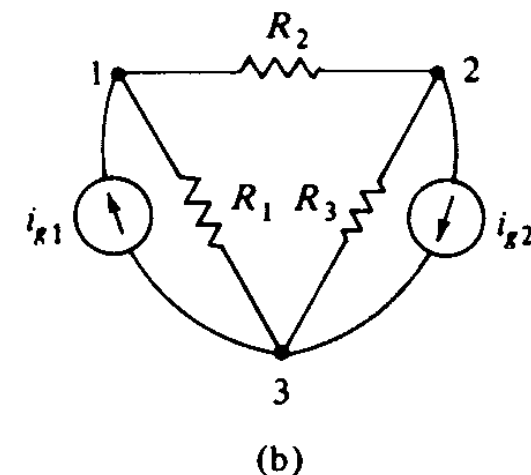
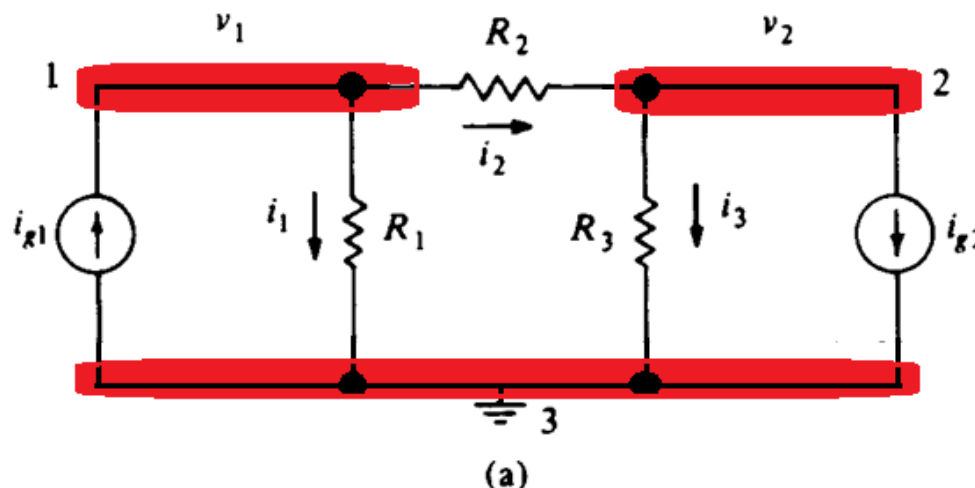
Aplicando a lei de OHM:

$$G_2 (v_2 - v_1) + G_3 v_2 + i_{g2} = 0$$

Se considerarmos as correntes que entram no nó é igual as que saem, temos:

$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) = i_{g1}$$

$$G_2 (v_2 - v_1) + G_3 v_2 = -i_{g2}$$



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

▶ Equações do circuito:

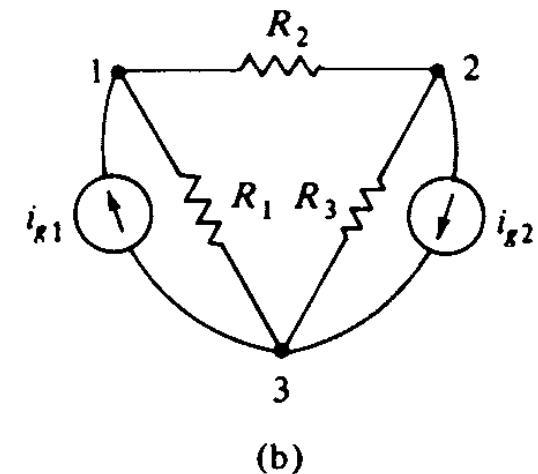
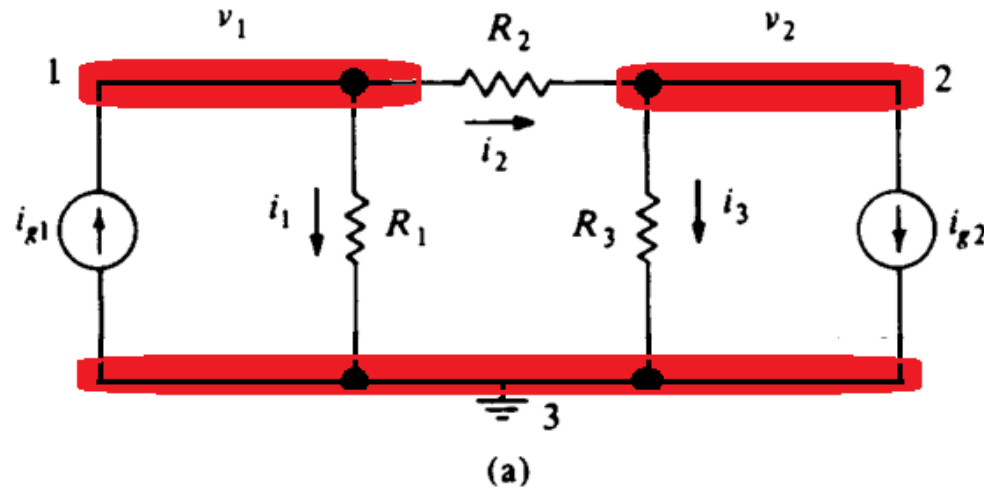
$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) = i_{g1}$$

$$G_2 (v_2 - v_1) + G_3 v_2 = -i_{g2}$$

▶ Rearranjando, temos:

$$(G_1 + G_2) v_1 - G_2 v_2 = i_{g1}$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3) v_2 = -i_{g2}$$

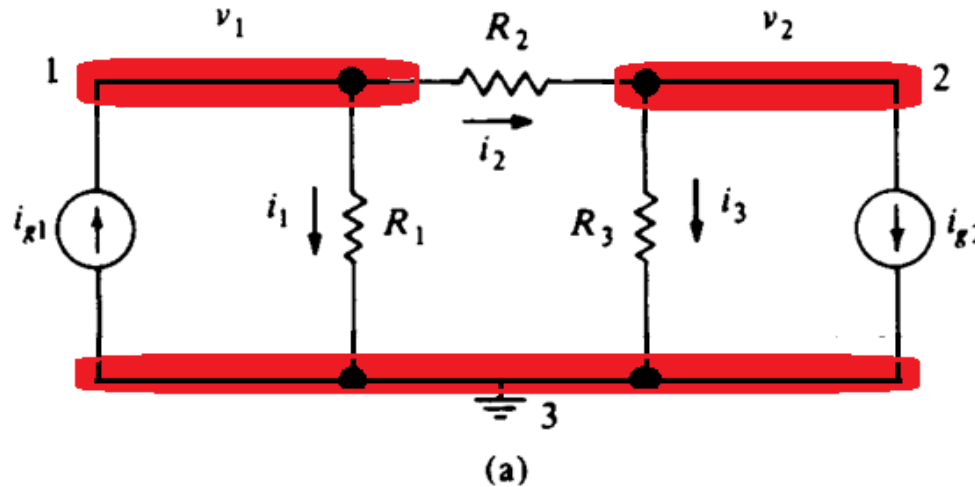


# ANÁLISE NODAL

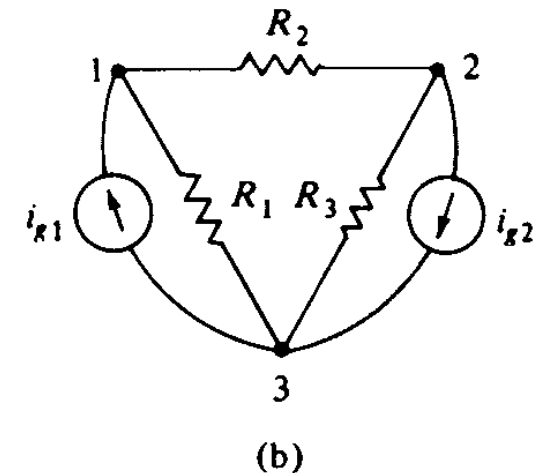
Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► Estas equações podem ser escritas por **inspeção**:

observe que na primeira equação “nó 1”, o coeficiente de  $v_1$  é a soma das condutâncias dos elementos conectados ao nó 1, enquanto o coeficiente de  $v_2$  é o valor negativo da condutância conectada entre os nós 1 e 2. Para segunda equação “nó 2”, pode-se repetir o mesmo raciocínio, ou seja, os coeficientes de  $v_2$  é a soma das condutâncias dos elementos conectados ao nó 2, e o coeficiente de  $v_1$  é o valor negativo da condutância conectada entre os nós 2 e 1.



$$\begin{aligned}(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 &= i_{g1} \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= -i_{g2}\end{aligned}$$



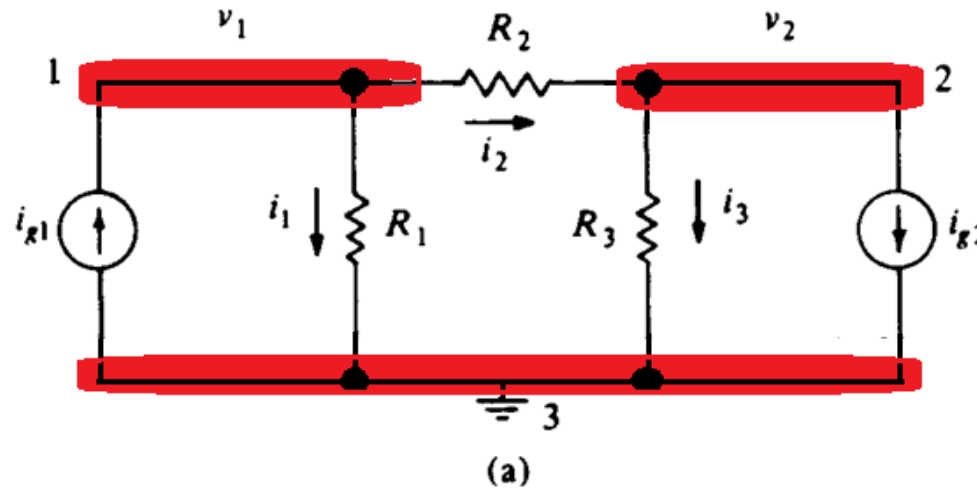
# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

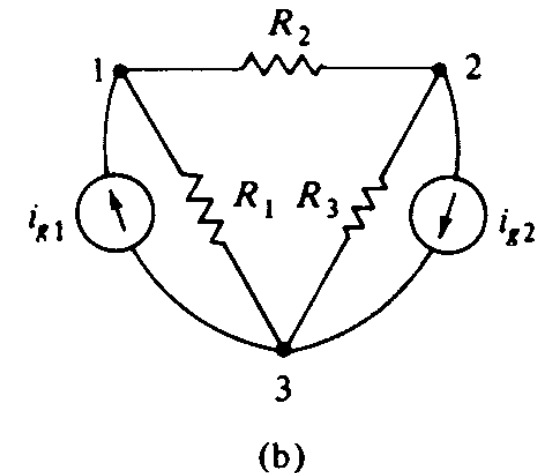
► Estas equações podem ser escritas por **inspeção**:

O nó 3 é o nó de referência, ou seja,  $v_3 = 0[V]$ .

Em cada equação o lado direito é a corrente de uma fonte de corrente que entra no nó correspondente com valor positivo e que sai com valor negativo.



$$\begin{aligned}(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 &= i_{g1} \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= -i_{g2}\end{aligned}$$





# ANÁLISE NODAL

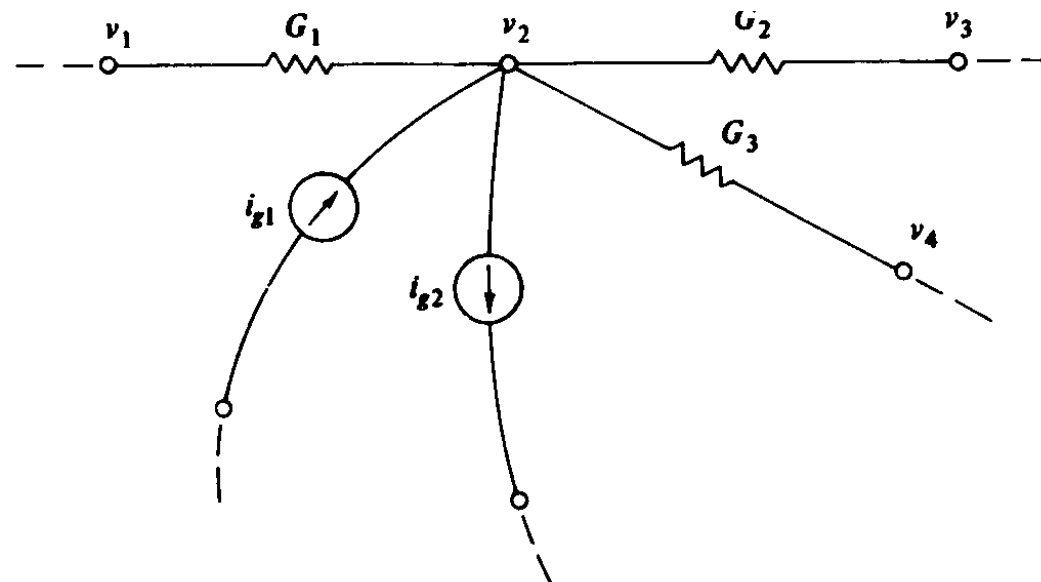
Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

▶ Em geral a ideia anterior pode ser usada para circuitos contendo condutâncias e fontes de correntes.

▶ **Exemplo:** considere a parte de um circuito ao lado.

No nó 2, aplicando o processo simplificado, temos:

O que pode ser encontrado usando LKC:



$$-G_1 v_1 + (G_1 + G_2 + G_3) v_2 - G_2 v_3 - G_3 v_4 = i_{g1} - i_{g2}$$

$$G_1 (v_2 - v_1) + G_2 (v_2 - v_3) + G_3 (v_2 - v_4) + i_{g2} = i_{g1}$$

# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

Processo simplificado para o nó 1:

$$4v_1 - v_2 = 2$$

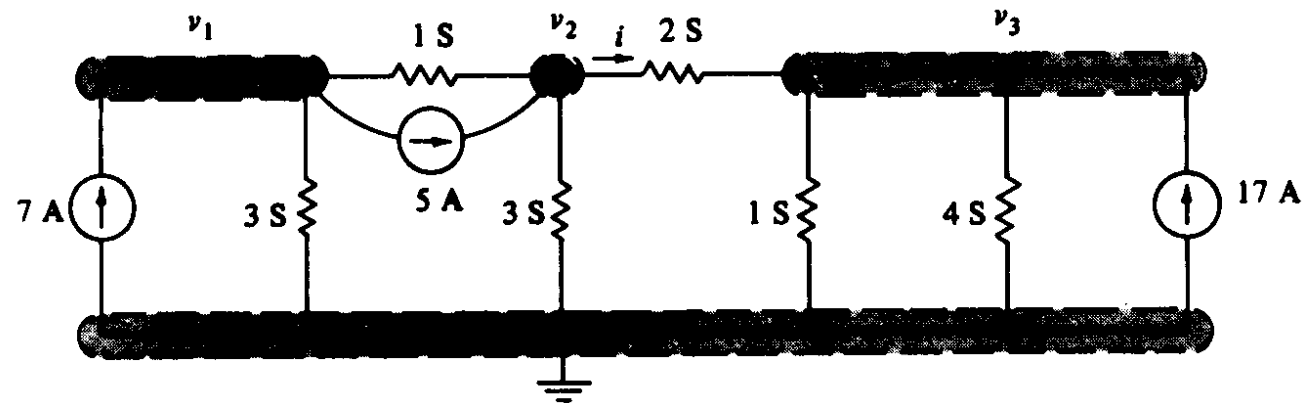
Por LKC, temos:  $1(v_1 - v_2) + 3v_1 + 5 = 7$

Processo simplificado para o nó 2:

$$-v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5$$

Processo simplificado para o nó 3:

$$-2v_2 + 7v_3 = 17$$



# ANÁLISE NODAL

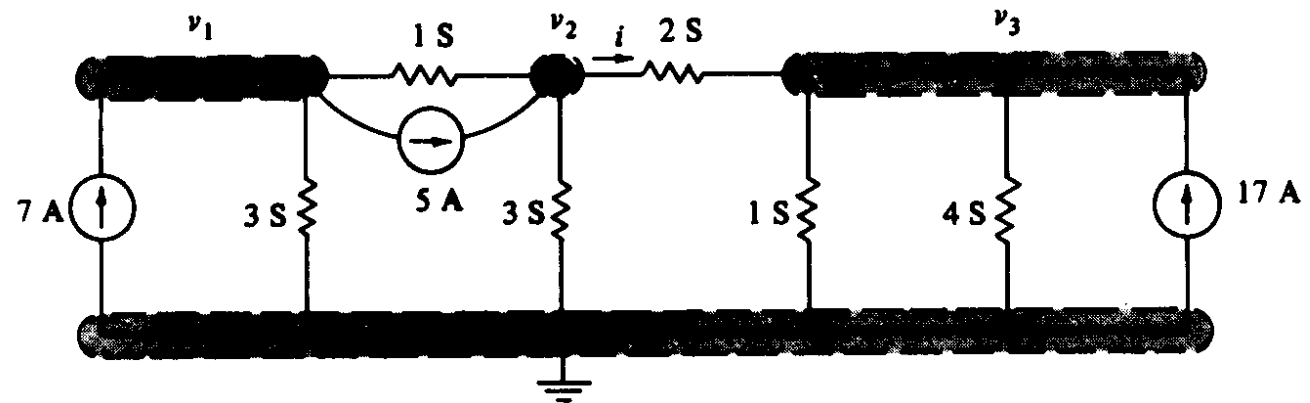
Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

Sistema de equações do circuito:

$$\begin{aligned}4v_1 - v_2 &= 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17\end{aligned}$$

Esse sistema de equação pode ser resolvida através da regra de cramer ou eliminação de Gauss (estudar apêndice A e B livro do Jhonson).



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

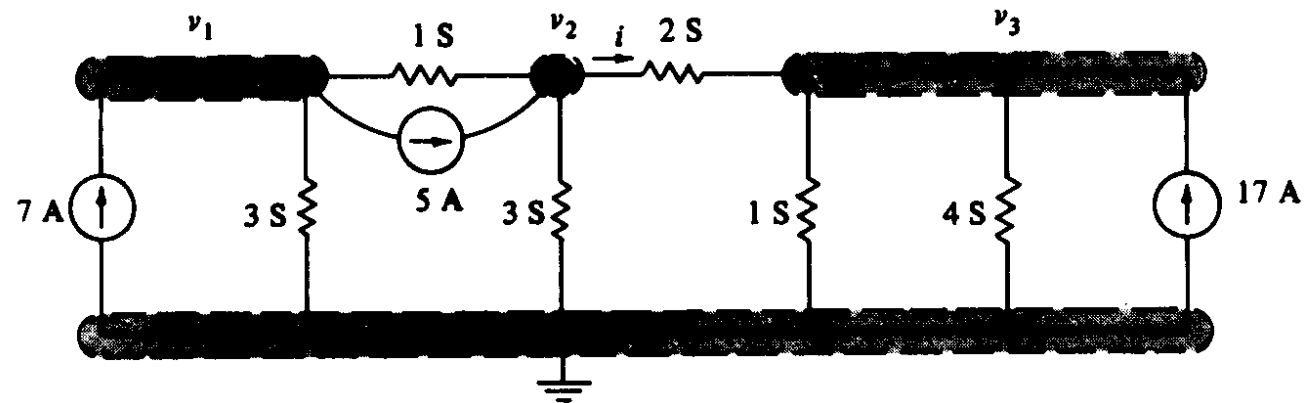
## Exemplo:

$$\begin{aligned}4v_1 - v_2 &= 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17\end{aligned}$$

### Utilizando a regra de Cramer:

**Primeiro:** Deve-se encontrar o determinante e coeficiente do sistema de equações, dado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

### Utilizando a regra de Cramer:

**Segundo:** aplicar a regra de cramer para o sistema de equações.

### Sucinta explicação da regra de Cramer:

Solve Linear System in Two Unknowns by Cramer's Rule

$$\begin{matrix} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} = \frac{CE - FB}{AE - DB}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} = \frac{AF - DC}{AE - DB}$$

$$\begin{matrix} 2x + 9y = 8 \\ x + 5y = 4 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0$$

- A partir das da matriz dos coeficientes, temos as colunas correspondentes a cada nó, neste exemplo a primeira coluna corresponde ao nó 1 “v1”, a segunda ao nó 2 “v2” e a terceira ao nó 3 “v3”.
- Para encontrar v1, substitua a coluna corresponde a v1 pelos valores do lado direito do sistema de equação “valores das fontes de corrente”, em seguida, encontre o valor do determinante dessa matriz e divida o valor encontrado pelo valor do determinante do sistema de equações encontrado anteriormente.
- Repita o procedimento para encontrar v2 e v3, observando que agora se troca a coluna 2 e 3 respectivamente.
- O valores encontrados são os valores das tensões nos nós do circuito.

# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

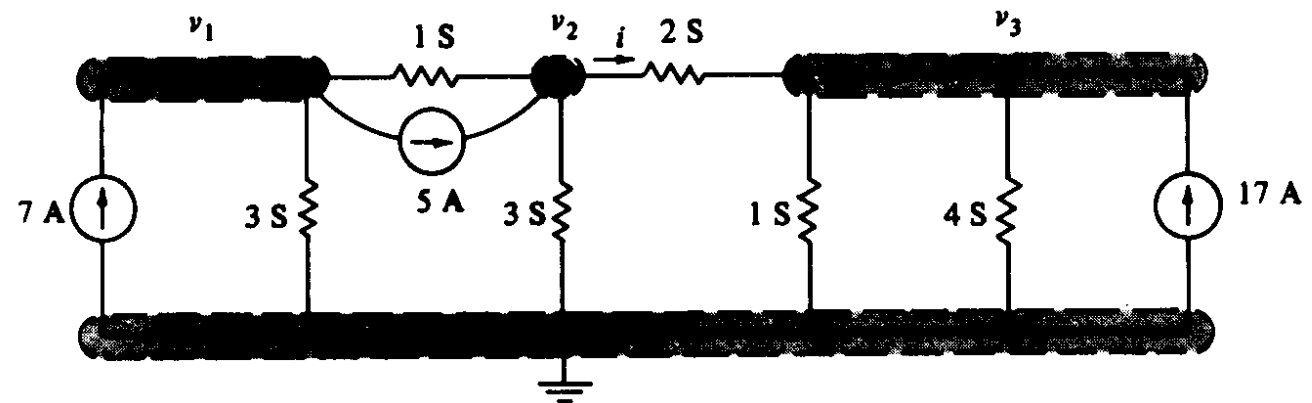
Utilizando a regra de Cramer:

Para  $v_1$ :

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{145}{145} = 1[V]$$

$$\begin{aligned} 4v_1 - v_2 &= 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

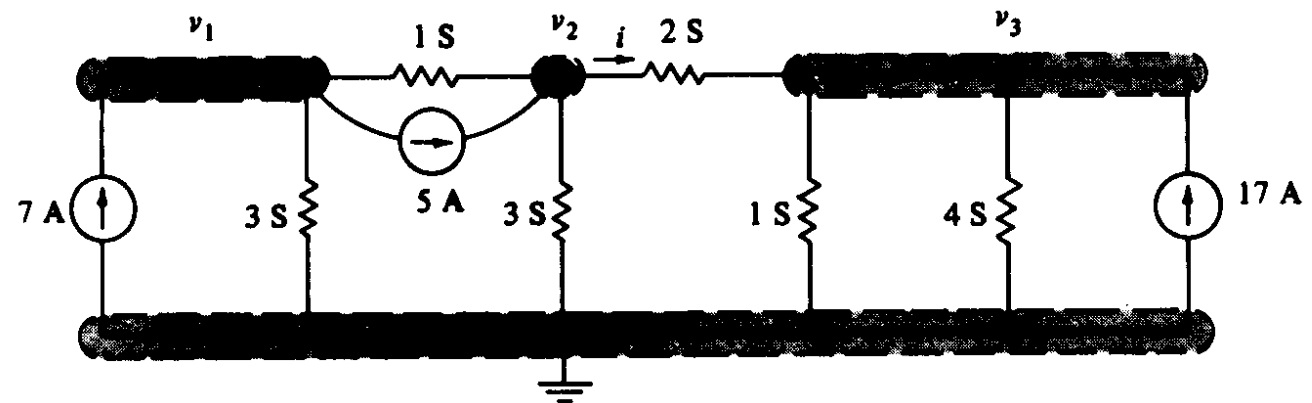
Utilizando a regra de Cramer:

Para  $v_2$ :

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{290}{145} = 2[V]$$

$$\begin{aligned} 4v_1 - v_2 &= 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$





# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

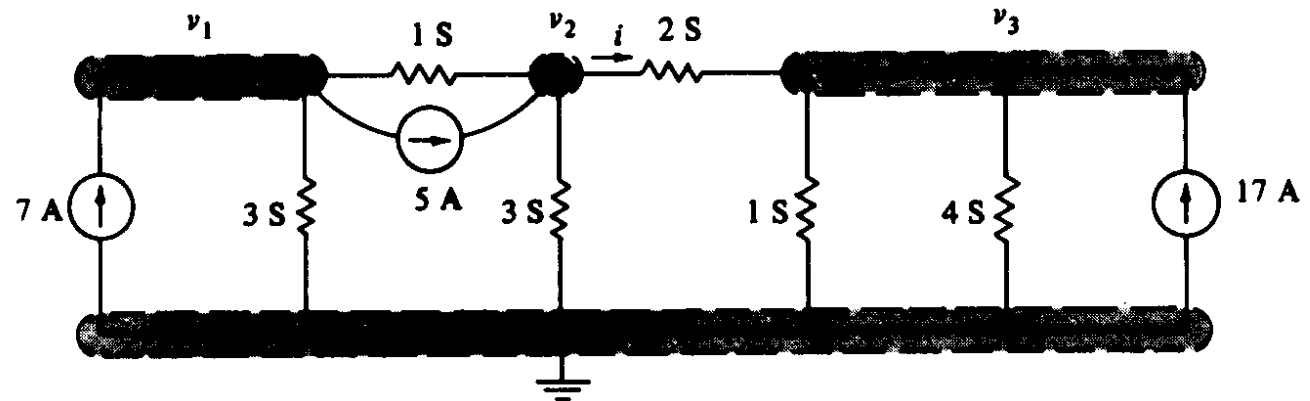
Utilizando a regra de Cramer:

Para  $v_3$ :

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 17 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{435}{145} = 3[V]$$

$$\begin{aligned} 4v_1 - v_2 &= 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$



# ANÁLISE NODAL

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

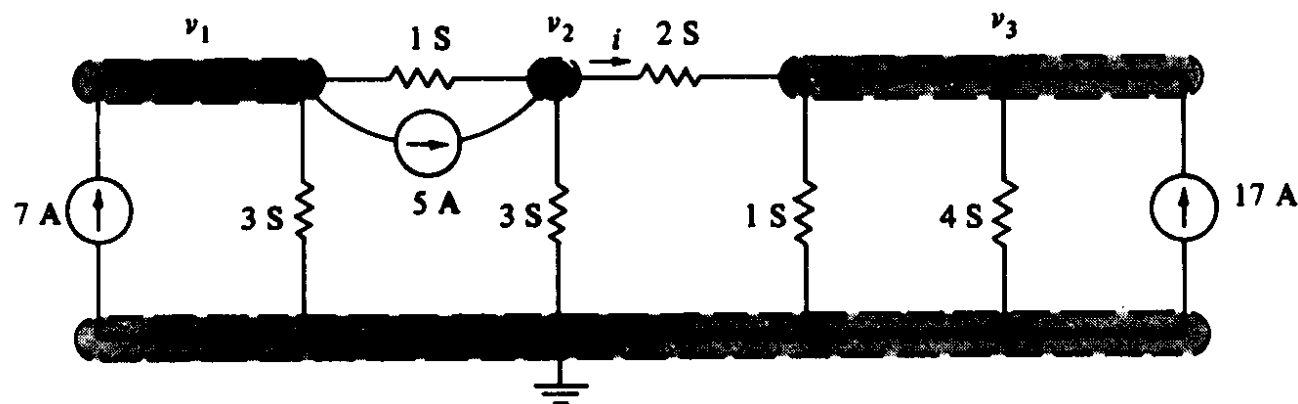
Portanto:  $v_1 = 1[V]$ ,  $v_2 = 2[V]$  e  $v_3 = 3[V]$ :

Se quisermos o valor de  $i$  na condutância de  $2[S]$ , temos:

$$i = 2(v_2 - v_3) = 2(2 - 3) = -2[A]$$

ou seja, podemos resolver todo o problema.

**NOTA:** Observe que a matriz dos coeficientes do sistema é simétrica, pois por exemplo, os elementos do nó 1 para o nó 2 é o mesmo que do nó 2 para o nó 1.



# ANÁLISE NODAL – CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO “SUPER NÓS”

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

- ▶ Não podemos expressar as fontes de tensão pelo processo simplificado, pois não sabemos os valores das correntes que flui por essas fontes.

## Exemplo:

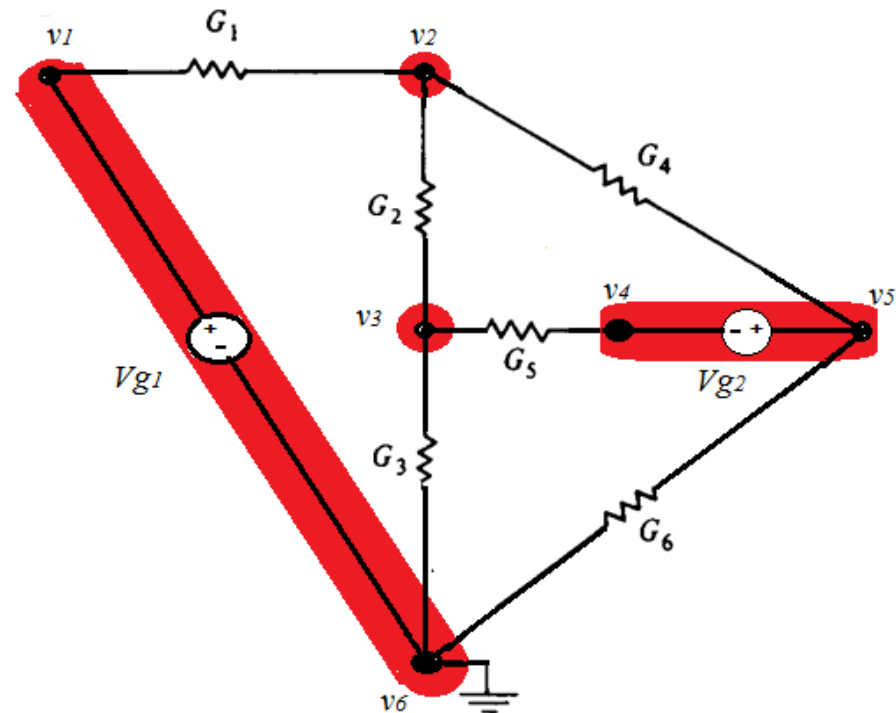
Neste circuito temos, seis nós, sendo, o nó 6 o de referência.

Para esse circuito de 6 nós, precisamos de 5 equações para resolver o problema.

Por LKT, pode-se notar, por inspeção, que:

$$v_1 = v_{g1}$$

$$v_5 - v_4 = v_{g2}$$



# ANÁLISE NODAL – CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO “SUPER NÓS”

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

Por LKT, pode-se notar, por inspeção, que:

$$v_1 = v_{g1}$$

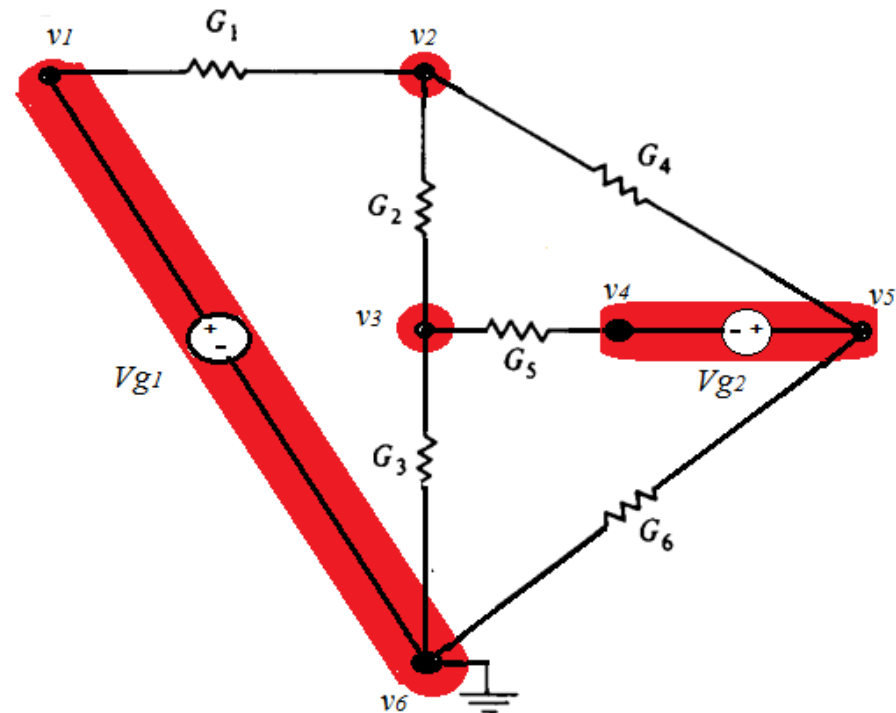
$$v_5 - v_4 = v_{g2}$$

Portanto precisamos de apenas 3 equações obtida por LKC.

Como não sabemos o valor das correntes nas fontes de tensão, envolvemos estas fontes de forma obter um **super nó (veja no circuito)**.

Assim aplica-se LKC no super nó da mesma forma que no nó normal.

O circuito então possui 2 super nós e 2 nós normais.



# ANÁLISE NODAL – CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO “SUPER NÓS”

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

Por LKT, pode-se notar, por inspeção, que:

$$v_1 = v_{g1}$$

$$v_5 - v_4 = v_{g2}$$

Nos nós  $v_2$  e  $v_3$ , temos:

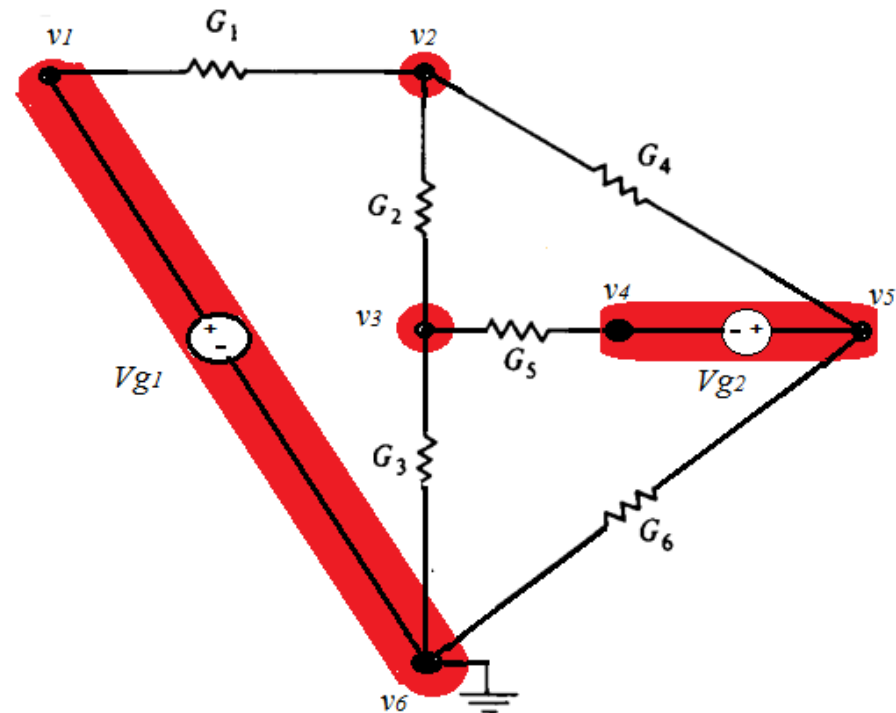
$$(G_1 + G_2 + G_4)v_2 - G_1v_1 - G_2v_3 - G_4v_5 = 0$$

$$(G_2 + G_3 + G_5)v_3 - G_2v_2 - G_5v_4 = 0$$

Igualando a zero as correntes que deixam o super nó, temos:

$$G_4(v_5 - v_2) + G_5(v_4 - v_3) + G_6v_5 = 0$$

Com estas cinco equações, encontramos as variáveis do sistema.



# ANÁLISE NODAL – CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO “SUPER NÓS”

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo numérico:

Qual o valor de  $v$  para o circuito ao lado?

Por inspeção nos Super nós, vemos:

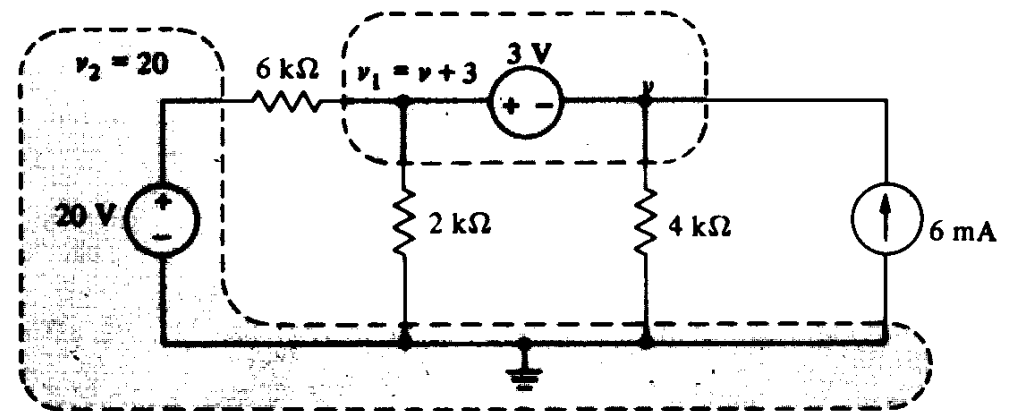
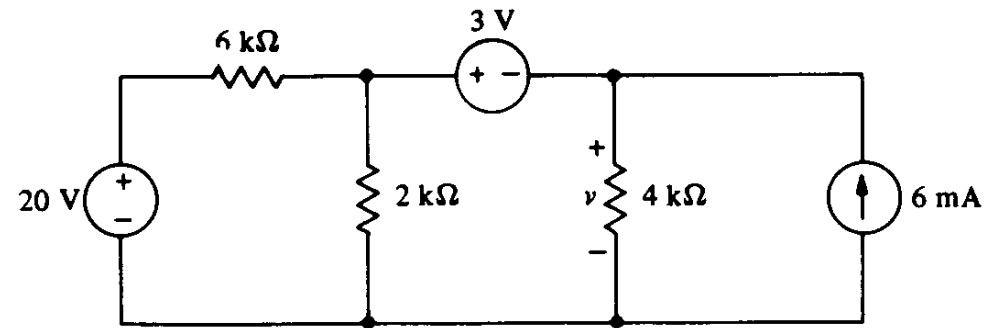
$$v_1 = v + 3$$

$$v_2 = 20[V]$$

Como existem 4 nós, precisamos de apenas mais uma equação (no super nó onde não está a barra de referência), portanto:

$$\frac{v_1 - 20}{6 \cdot 10^3} + \frac{v_1}{2 \cdot 10^3} + \frac{v}{4 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{v + 3 - 20}{6 \cdot 10^3} + \frac{v + 3}{2 \cdot 10^3} + \frac{v}{4 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-3}$$
$$v = 8[V] \quad v_1 = 11[V]$$



Resolvendo a equação acima temos:  
Prof. Dr. Saulo Piereti

Currículo Lattes <http://lattes.cnpq.br/2141158868960971>

# ANÁLISE NODAL – CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO “SUPER NÓS”

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

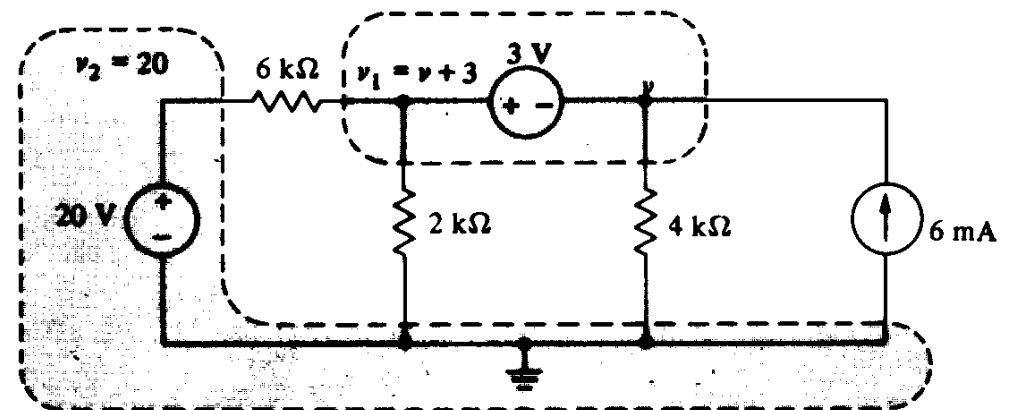
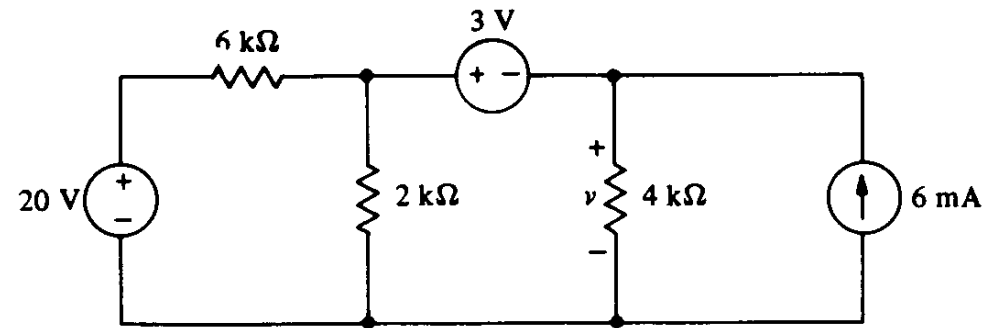
## Exemplo numérico:

$$\frac{v_1 - 20}{6 \cdot 10^3} + \frac{v_1}{2 \cdot 10^3} + \frac{v}{4 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{v + 3 - 20}{6 \cdot 10^3} + \frac{v + 3}{2 \cdot 10^3} + \frac{v}{4 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-3}$$

Resolvendo a equação acima temos:

$$v = 8[V] \quad \text{e} \quad v_1 = 11[V]$$



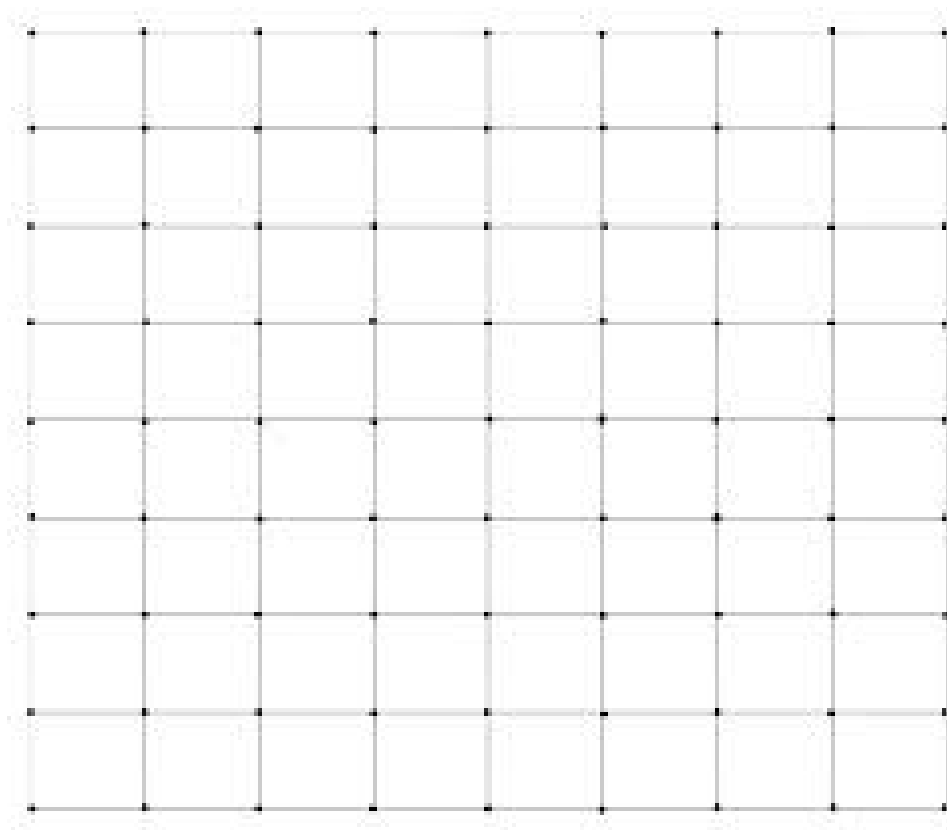


# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

- ▶ Ao contrário da análise nodal, onde aplica-se LKC nos nós de não referência do circuito, na análise de malha, aplica-se a LKT em volta de um percurso fechado do circuito.

**NOTA:** O contorno fechado é chamado de malha do circuito. Então, a malha é um percurso fechado de elementos no circuito que não passa mais de uma vez sobre um nó ou um elemento.



# ANÁLISE DE MALHA

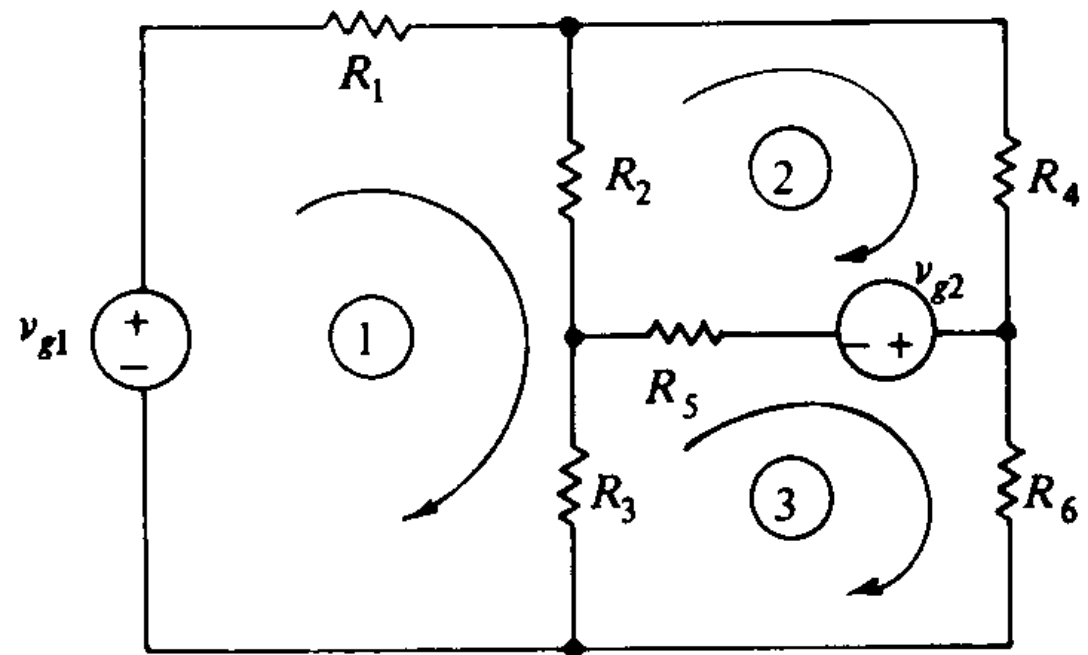
Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► **Exemplo 01:** O circuito ao lado é planar e contém três malhas identificadas pelas setas.

Malha 1: contém os elementos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $V_{g1}$ ;

Malha 2: contém os elementos  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $V_{g2}$  e  $R_5$ ;

Malha 3: contém os elementos  $R_5$ ,  $V_{g2}$ ,  $R_6$  e  $R_3$ .



# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► **Exemplo 02:** Para aplicar a LKT, considere o circuito a ao lado com duas malhas.

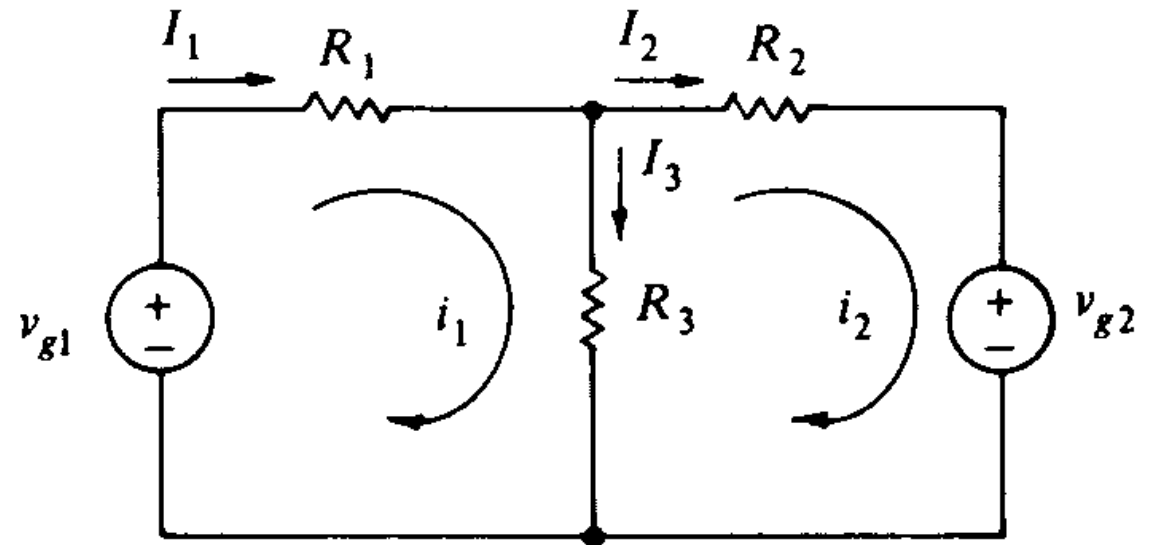
As correntes nos elementos são:  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

Aplicando a LKT na primeira malha, temos:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = v_{g1}$$

e na segunda malha:

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = -v_{g2}$$



# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

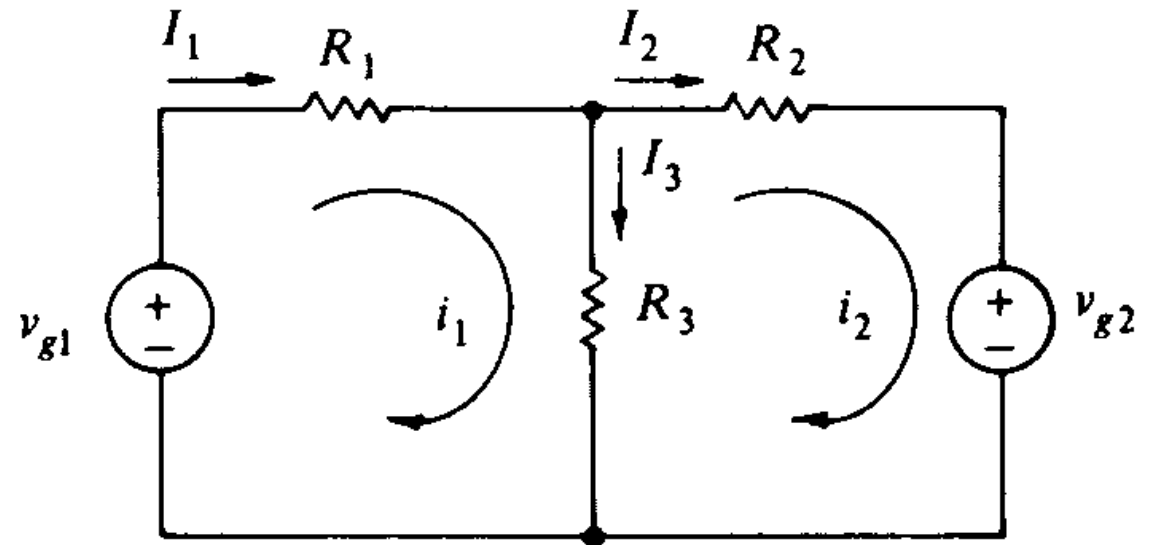
► **Exemplo 02:** Para aplicar a LKT, considere o circuito a ao lado com duas malhas.

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = v_{g1}$$

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = -v_{g2}$$

Define-se um corrente de malha como a corrente que flui ao redor da malha. Assim na primeira malha a corrente de malha é  $i_1$  e na segunda malha  $i_2$  (observe o sentido da corrente).

Nota: as correntes no elementos  $R_1$  e  $R_2$  são correntes de malha, já no elemento  $R_3$  é uma composição de duas correntes de malha.



# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo 02:

Para as considerações anteriores, temos:

A corrente em R1:  $I_1 = i_1$

em R2:  $I_2 = i_2$

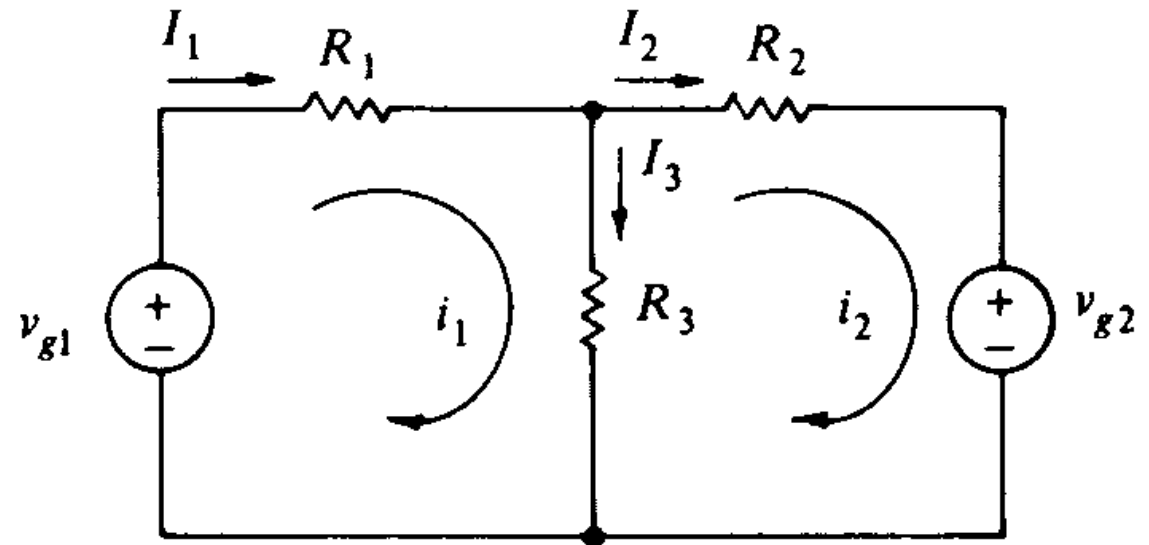
Em R3 aplicando a LKC:  $I_3 = I_1 - I_2 = i_1 - i_2$

Substituindo os valores acima em  $R_1 I_1 + R_3 I_3 = v_{g1}$  e  $R_2 I_2 - R_3 I_3 = -v_{g2}$ ,

temos:  $R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) = v_{g1}$

$$R_2 i_2 - R_3 (i_1 - i_2) = -v_{g2}$$

As equações acima são as equações de malha do circuito.



# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo 02:

Rearranjando

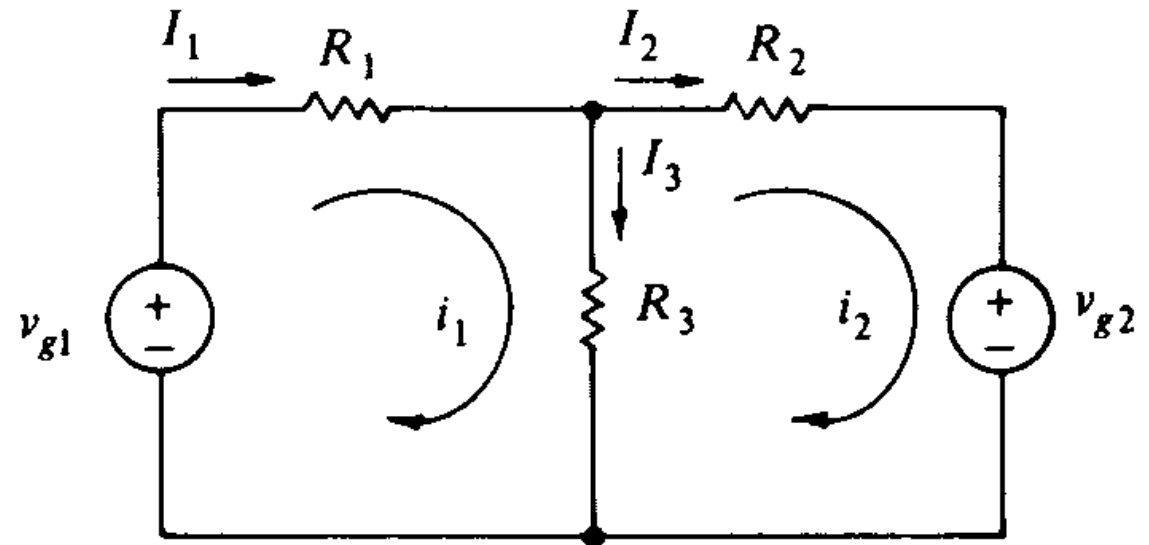
$$R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) = v_{g1}$$

$$R_2 i_2 - R_3 (i_1 - i_2) = -v_{g2}$$

Temos :

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = v_{g1}$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = -v_{g2}$$

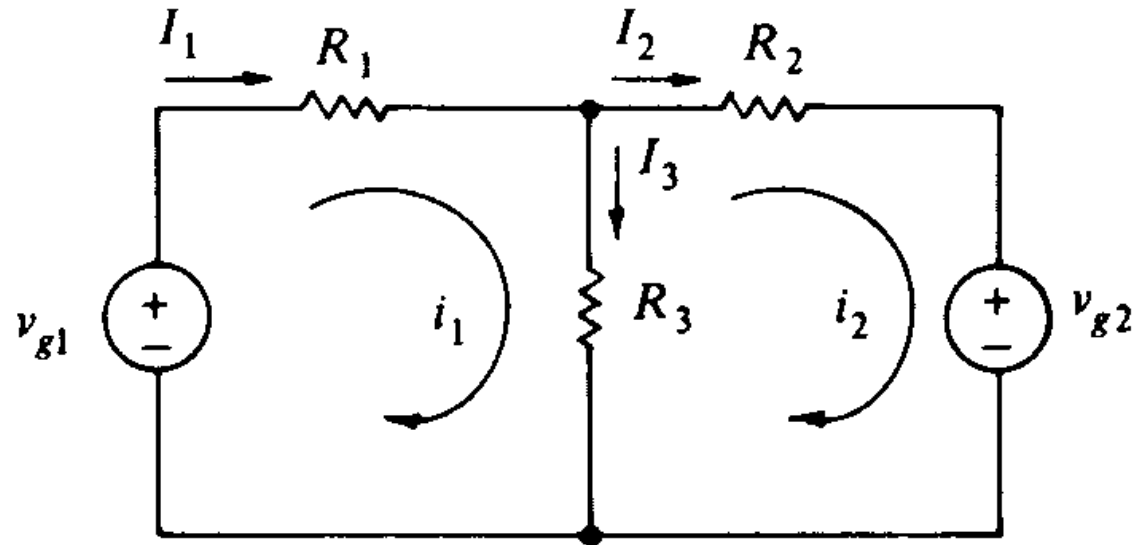


# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo 02:

Existe um procedimento simplificado para escrever estas equações, assim como no processo de análise nodal.



$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_2 = v_{g1}$$

$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -v_{g2}$$



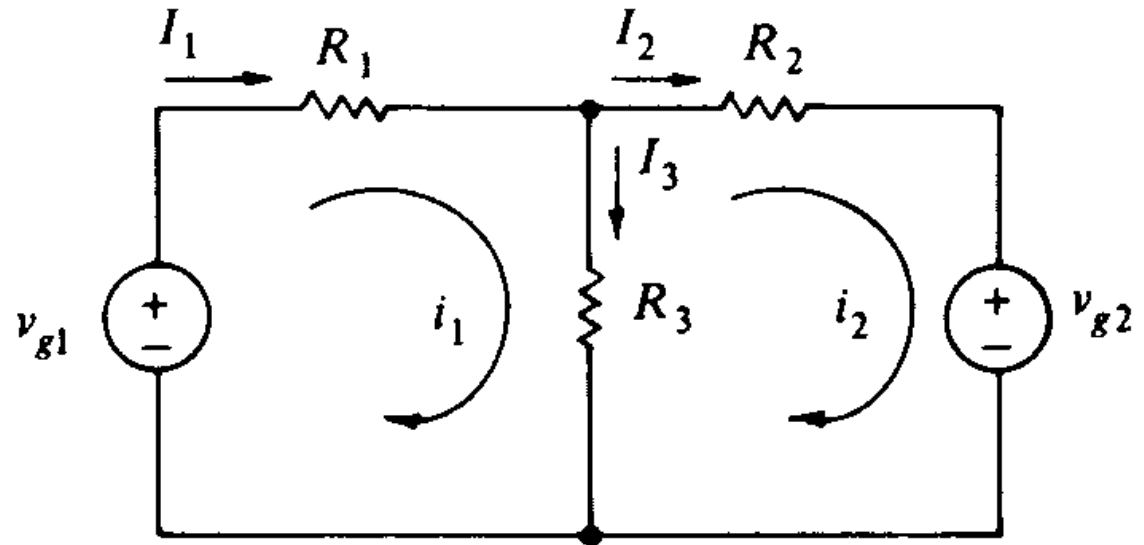
# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo 02:

### O processo simplificado se resume em:

A primeira equação corresponde à primeira malha, o coeficiente da primeira corrente é a soma das resistências da primeira malha, e o coeficiente da qualquer outra corrente de malha é o valor negativo da resistência comum a primeira e a esta malha. O membro da direita da primeira equação é a soma algébrica das fontes de tensão que produzem a corrente da primeira malha. Podemos fazer o mesmo para segunda equação, basta substituir a palavra primeira por segunda na frase acima.



$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_2 = v_{g1}$$

$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -v_{g2}$$

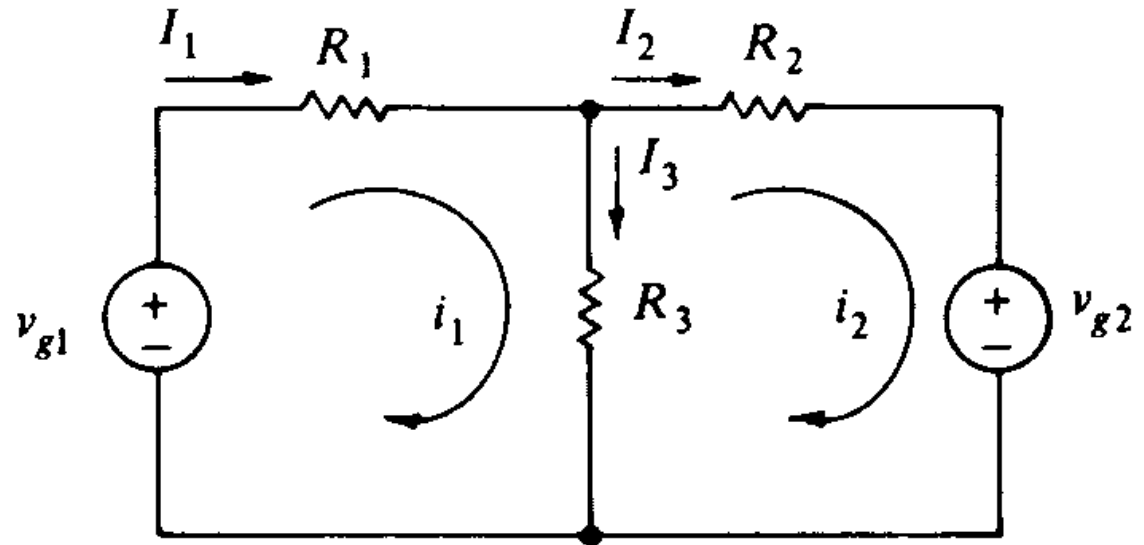
# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo 02:

O processo simplificado se resume em:

**Nota:** este procedimento é válido para escolha das correntes de malha no mesmo sentido, escrevendo a LKT para o sentido escolhido pela corrente e quando só existe fonte de tensão independente.



$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_2 = v_{g1}$$

$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -v_{g2}$$

# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► **Exemplo 03:** Equações do circuito:

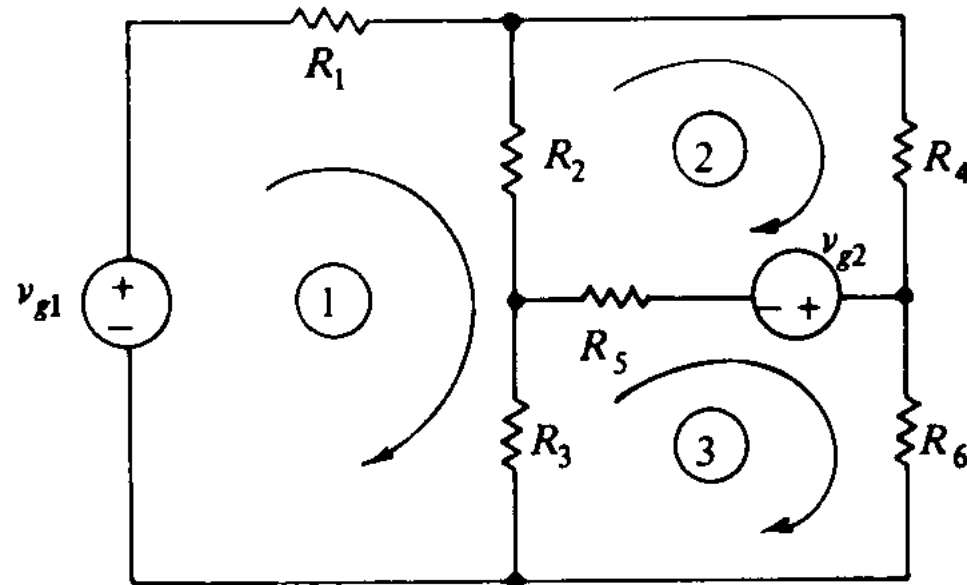
$$(R_1 + R_2 + R_3)i_1 - R_2i_2 - R_3i_3 = v_{g1}$$

$$-R_2i_1 + (R_2 + R_4 + R_5)i_2 - R_5i_3 = -v_{g2}$$

$$-R_3i_1 - R_5i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 = v_{g2}$$

Pode-se utilizar Cramer para resolver o sistemas de equações.

**Nota:** observe que na diagonal principal dos coeficientes, tem-se a soma das resistências da malha, e os elementos da diagonal são as resistências comuns da malha.



$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{vmatrix}$$

# ANÁLISE DE MALHA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

► **Exemplo 03:** Equações do circuito:

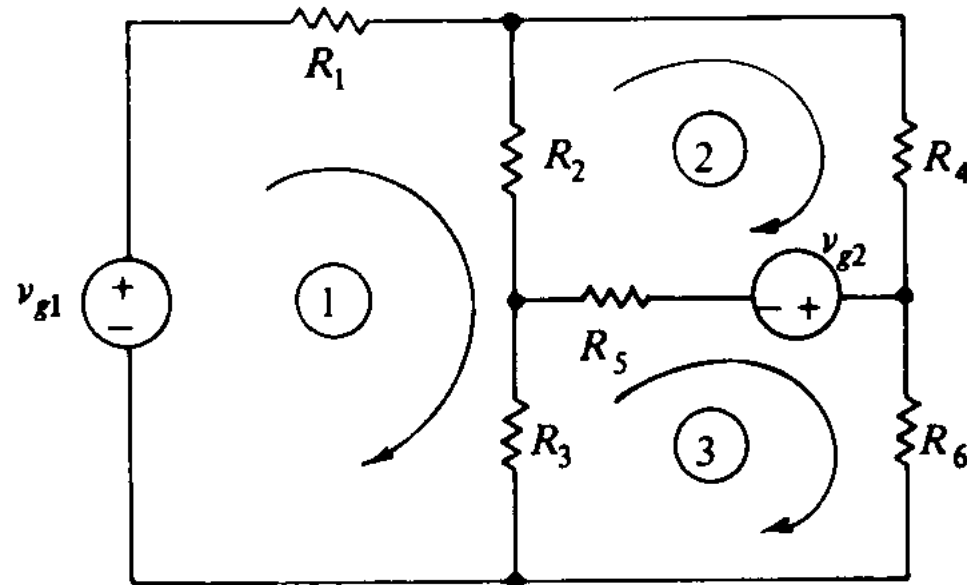
$$(R_1 + R_2 + R_3)i_1 - R_2i_2 - R_3i_3 = v_{g1}$$

$$-R_2i_1 + (R_2 + R_4 + R_5)i_2 - R_5i_3 = -v_{g2}$$

$$-R_3i_1 - R_5i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 = v_{g2}$$

Pode-se utilizar Cramer para resolver o sistemas de equações.

**Nota:** na análise nodal encontra-se as tensões nodais, enquanto na análise de malha encontra-se as correntes de malha.

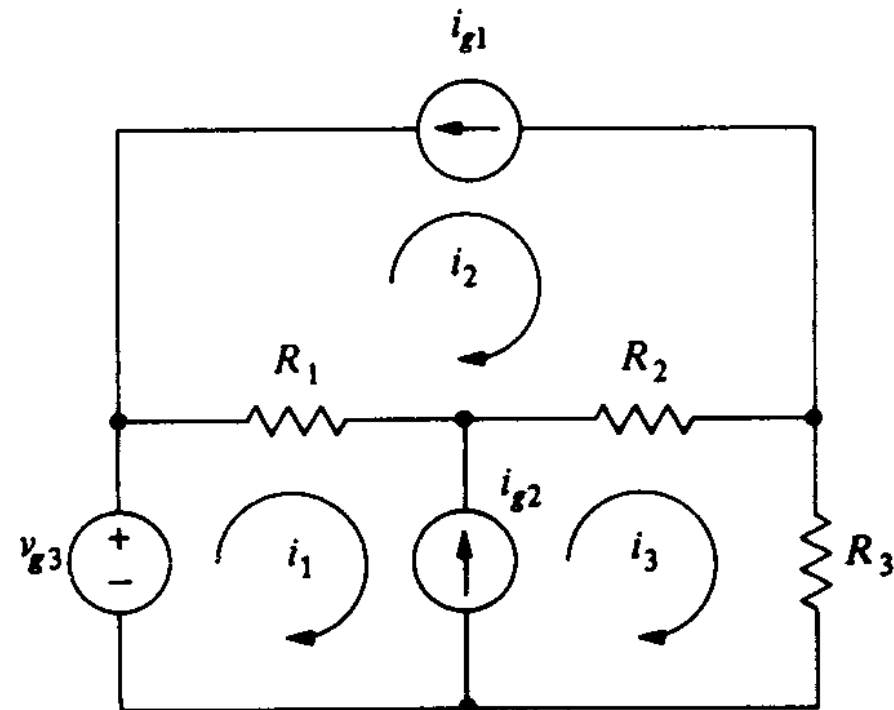


$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{vmatrix}$$

## ANÁLISE DE MALHA – CIRCUITO CONTENDO FONTES DE CORRENTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

- ▶ No caso de análise em malha, quando inclui-se fontes independentes de corrente, o procedimento é mais fácil que no caso de análise nodal com fontes de independentes de tensão.



# ANÁLISE DE MALHA – CIRCUITO CONTENDO FONTES DE CORRENTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

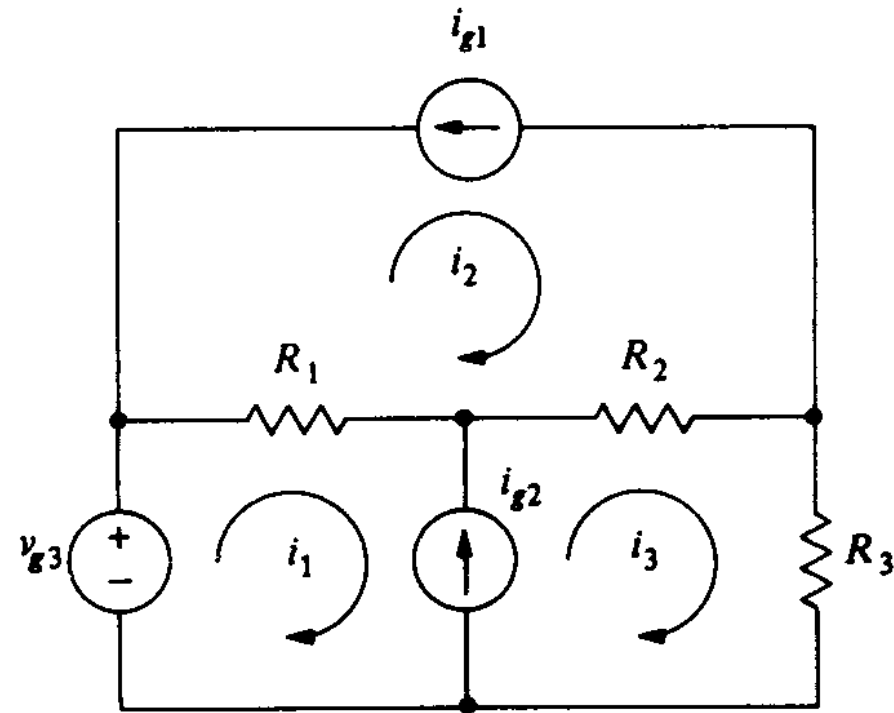
► **Exemplo:** Para o circuito abaixo, possui duas fontes de correntes e uma fonte de tensão, com as correntes de malhas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  escolhidas como indicado no circuito.

Como existe três malhas, necessita-se de três equações independentes, entretanto nem todas precisam ser equações de malha.

Por inspeção nas fontes de correntes, temos:

$$i_2 = -i_{g1}$$

$$i_3 - i_1 = i_{g2}$$



# ANÁLISE DE MALHA – CIRCUITO CONTENDO FONTES DE CORRENTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

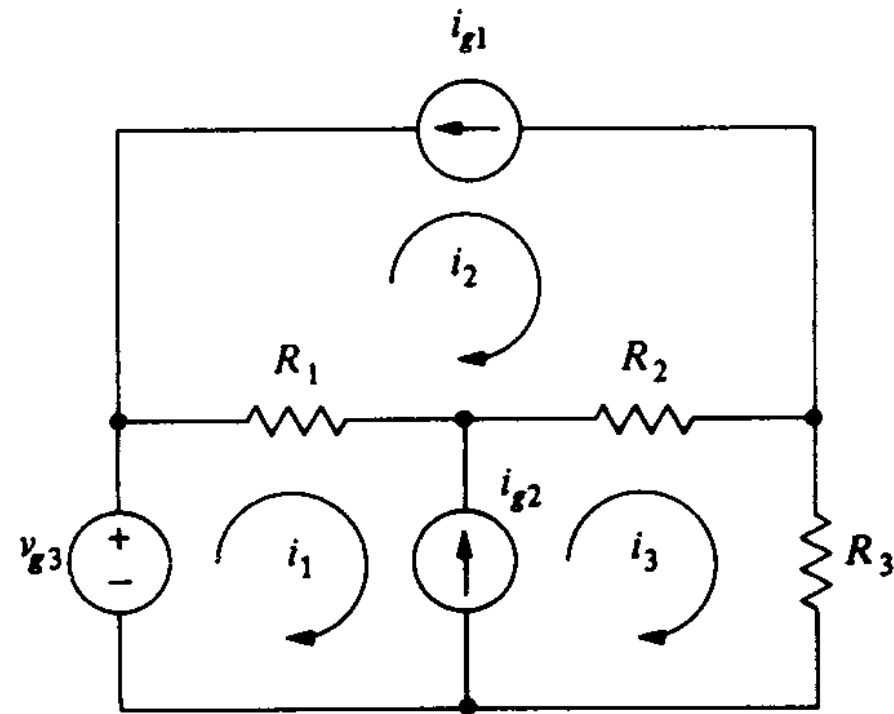
## Exemplo:

$$i_2 = -i_{g1}$$

$$i_3 - i_1 = i_{g2}$$

Com isso agora só precisa-se de uma equação.

**Nota:** esta última equação deve ser obtida pela LKT, e assim necessita escolher um percurso fechado onde as tensões são facilmente obtidas, ou seja, devemos evitar fontes de corrente.



# ANÁLISE DE MALHA – CIRCUITO CONTENDO FONTES DE CORRENTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

$$i_2 = -i_{g1}$$

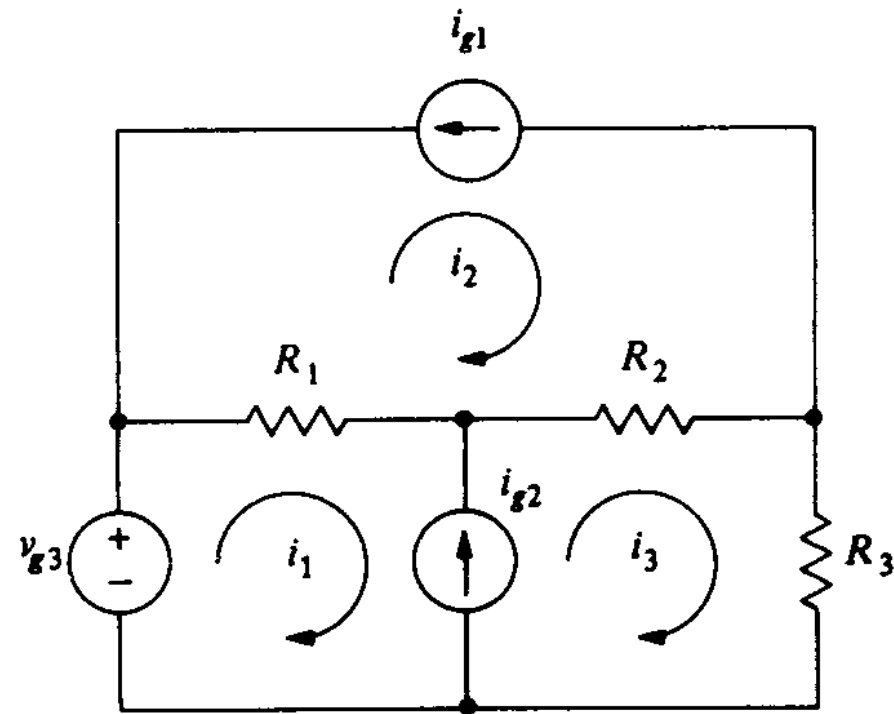
$$i_3 - i_1 = i_{g2}$$

Imaginando que as fontes de correntes estão abertas, observamos que temos apenas uma malha (super malha) que contém os elementos  $v_{g3}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ .

Aplicando a LKT a malha indicada acima, temos:

$$R_1 (i_1 - i_2) + R_2 (i_3 - i_2) + R_3 i_3 = v_{g3}$$

Portanto agora temos três equações e podemos resolver o circuito.





# ANÁLISE DE MALHA – CIRCUITO CONTENDO FONTES DE CORRENTES

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

## Exemplo:

$$i_2 = -i_{g1}$$

$$i_3 - i_1 = i_{g2}$$

$$R_1(i_1 - i_2) + R_2(i_3 - i_2) + R_3i_3 = v_{g3}$$

Para:  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$

$$i_{g1} = 2A, \quad i_{g2} = 5A, \quad v_{g3} = 38V$$

Substituindo nas equações do circuito temos:

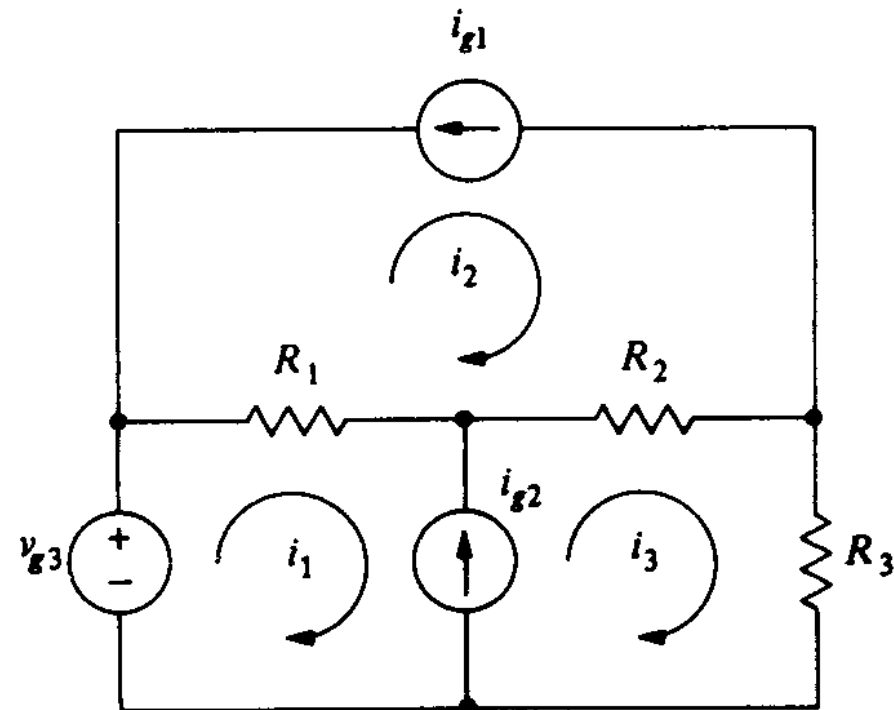
$$i_2 = -2$$

$$i_3 - i_1 = 5$$

$$4(i_1 - i_2) + 1(i_3 - i_2) + 3i_3 = 38$$

resolvendo o sistema de equações obtemos:

$$i_1 = 1A, \quad i_2 = -2A, \quad i_3 = 6A$$



# REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Instituto Federal de Mato grosso – Campus Cuiabá  
Curso: Engenharia de Controle e Automação  
Disciplina: Eletricidade Aplicada  
Tema: Método de Análise de Circuitos Elétricos

HILBURN J. L., JOHNSON D. E., JOHNSON J. R.,  
Fundamentos de Análise de Circuitos  
Elétricos. 4ªed., Rio de Janeiro: LTC, 1994.

BOYLESTAD, R. L. Introdução à Análise de  
Circuitos. Editora Pearson do Brasil, 10.  
ED., 2004

