Raízes de equações

Motivação:

A muito tempo atrás, aprendemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

$$para\ resolver$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

Os valores calculados em (1) são chamdos de “raízes” de (2). Eles representam os valores de x que fazem (2) igual a 0.

A equção (1) é muito cômoda para resolver a fórmula quadrática, entretanto existem muito outras funções para as quais as raízes não podem ser determinadas tão facilmente.

Raízes de equações

Motivação:

Antes dos computadores digitais, existiam algumas maneiras para se determinar as raízes de equações algébricas:

- Forma direta como em (1).

- Entretanto existem muitas outras equações que não podem ser resolvidas tão diretamente. Como exemplo, a aparentemente simples função abaixo, não pode ser resolvida analiticamente:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

- Um método para obter uma solução aproximada é traçar o gráfico da função e determinar onde ele cruza o eixo do x, tal que f(x)=0.

Raízes de equações

Motivação:

• Embora os métodos gráficos sejam úteis para obter estimativas grosseiras, eles são limitados pela falta de precisão:

• Uma abordagem alternativa é usar tentativa e erro. Que consiste de chutar um valor de x e calcular para ver se f(x) é zero.

• Se não (como quase sempre) é feito um outro chute, e f(x) é novamente calculado para determinar se o novo valor fornece uma estimativa melhor para a raíz.

• O processo é repetido até que seja feito um chute que resulte em um f(x) que esteja próximo de zero.

• Tais métodos, como pode-se ver, são ineficientes e inadequados.

Raízes de equações

Motivação: A quação abaixo representa, a equação deduzida a partir da segunda lei de Newton, para o cálculo da velocidade de um corpo em queda, considerando à resistência do ar:

$$v = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) \quad (3), \quad onde:$$

v é a variável dependente, o tempo t é variável independente, a constante gravitacional g é termo forçante, e o coeficiente de arrasto c e a massa m são parâmetros.

- Se os parâmetros forem conhecidos (3), pode ser usada para prever a velocidade do corpo como uma função do tempo. Porque v é expressa explicitamente em função do tempo:

Raízes de equações

Entretanto , suponha que tenhamos que determinar o coeficiente de arrasto para que um pára-quedista de uma dada massa atinja uma certa velocidade em um determinado intervalo de tempo.

- Embora (3) forneça uma representação matemática da inter-relação entre as variáveis e os parâmetros do modelo, ela não pode ser resolvida explicitamente para determinar o coeficiente de arrasto.

- Não há maneira de reorganizar a equação de forma que c esteja isolado em um lado do sinal de igual. Em tais casos, dizemos que c está implícito.

- Isto representa um dilema real, porque muitos problemas de projeto de engenharia envolvem especificar as propriedades ou a composição do sistema, para garantir que funcionem de forma desejada.

- Assim, esses problemas frequentemente exigem a determinação de parâmetros implícitos.

Raízes de equações

A solução deste dilema é fornecida pelos métodos numéricos para raízes de equações:

• Para resolver o problema usando métodos numéricos , é conveniente reescrever (3) . Isso é feito subtraindo-se a variável dependente v de ambos os lados da equação para obter:

$$f(c) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) - v \quad (4)$$

O valor que torna f(c)=0, é portanto, a raiz da equação.

• Esse valor também representa o coeficiente de arrasto que resolve o problema:

Raízes de equações

MÉTODO GRÁFICO

Problema: Use o método gráfico para determinar o coeficiente de arrasto c necessário para que um pára-quedista de massa m = 68,1kg tenha uma velocidade de 40m/s depois de cair em queda livre por t = 10s.

Solução: determinar as raízes de (4).

t =10s, g = 9,8m/s^2, v=40 m/s e m = 68,1kg

$$f(c) = \frac{9.8(68.1)}{c}(1 - e^{-(c/68.1)10}) - 40 \quad ou$$

$$f(c) = \frac{667,38}{c}(1 - e^{-0,146843c}) - 40$$

Raízes de equações

MÉTODO GRÁFICO

Problema: Use o método gráfico para determinar o coeficiente de arrasto c necessário para que um pára-quedista de massa m = 68,1kg tenha uma velocidade de 40m/s depois de cair em queda livre por t = 10s.

Solução: determinar as raízes de (4).

t =10s, g = 9,8m/s^2, v=40 m/s e m = 68,1kg

$$f(c) = \frac{9.8(68.1)}{c}\left(1 - e^{-(c/68.1)10}\right) - 40 \quad ou$$

$$f(c) = \frac{667,38}{c}\left(1 - e^{-0,146843c}\right) - 40$$

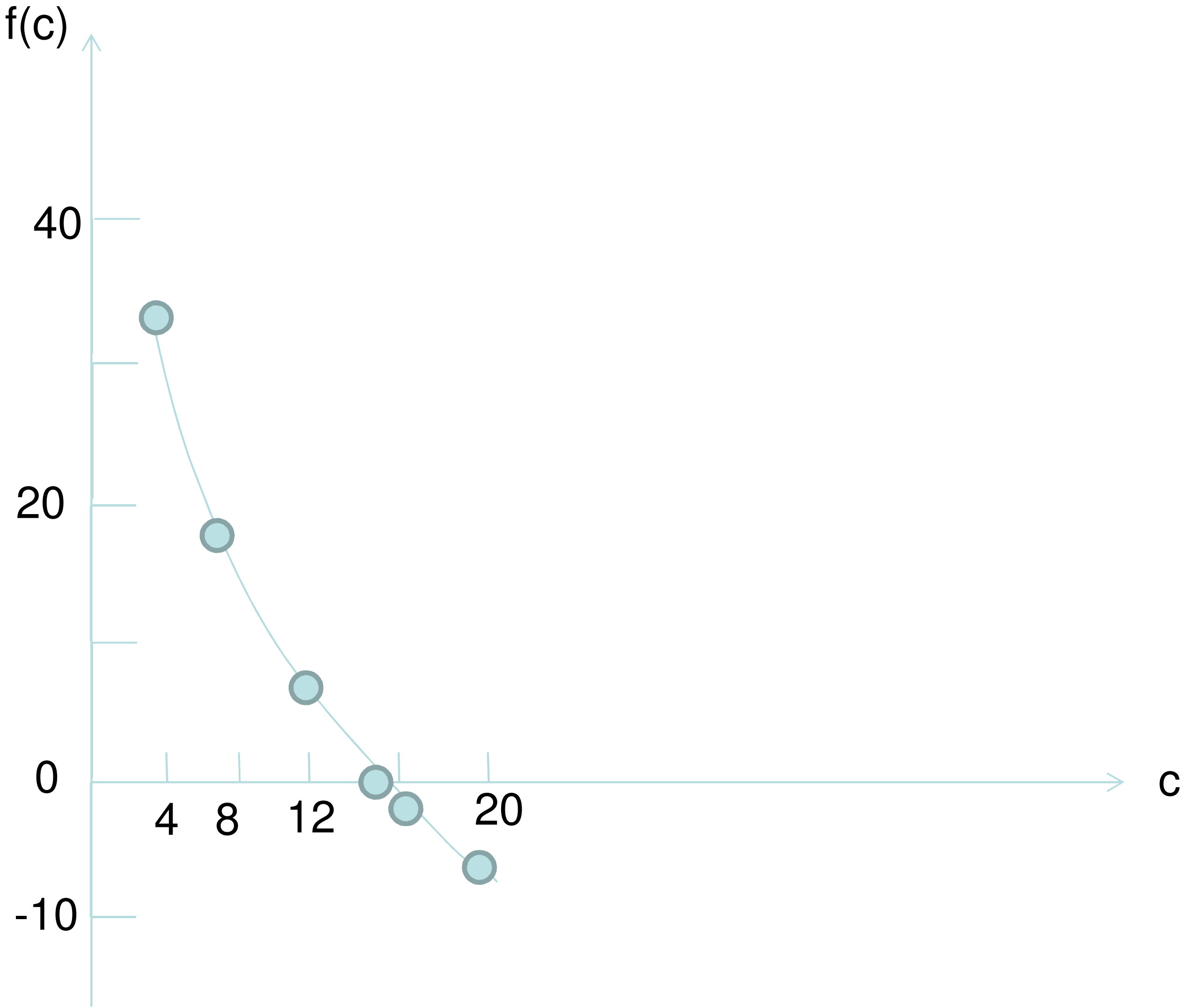
Raízes de equações

MÉTODO GRÁFICO

Substituindo-se vários valores de c no lado direito dessa equação para calcular:

c	f(c)
4	34,115
8	17,653
12	6,067
16	-2,269
20	-8,401

Raízes de equações



Raízes de equações

MÉTODO GRÁFICO

A curva resultante cruza o eixo c entre 12 e 16. Visualmente o gráfico fornece uma estimativa grosseira da raiz 14,75.

$$f(14,75) = \frac{667,38}{14,75}(1 - e^{-0,146843(14,75)}) - 40 = 0,059$$

Valor próximo de zero.

Isso também pode ser verificado, substituindo em (3).

$$v = \frac{9,8(68,1)}{14,75}(1 - e^{-(14,75/68,1)10}) = 40,059$$

Estas estimativas gráficas grosseiras podem ser usadas como aproximações iniciais para os métodos numéricos que serão discutidos futuramente.

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Quando aplicamos o método gráfico no exemplo anterior, verifica-se que f(x) muda de sinal em lados opostos da raiz. Em geral, se f(x) for real e contínua no intervalo x_l a x_u e $f(x_l)$ e $f(x_u)$ tiverem sinais opostos, isto é:

$$f(x_l) \cdot f(x_u) < 0 \qquad (5)$$

Então existe pelo menos uma raiz real entre x_l e x_u .

- Os métodos de busca incrementais tiram vantagem dessa observação localizando um intervalo no qual a função muda de sinal.

- Então, a posição da mudança de sinal (**e, consequentemente da raiz**) é identificada mais precisamente dividindo-se o intervalo em diversos subintervalos.

- Procura-se em cada um desses sub-intervalos a mudança de sinal.

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

- O processo é repetido e a estimativa da raiz é refinada dividindo-se os subintervalos em incrementos menores.

- O método da bissecção, que é alternativamente chamado de truncamento binário, divisão da metade, ou método Bolzano, é um método incremental no qual o intervalo é sempre dividido na metade.

- Se uma função muda de sinal em um intervalo, calcula-se o valor da função em seu ponto médio.

- A posição da raíz é então determinada como sendo o ponto médio do subintervalo no qual a mudança de sinal ocorre.

- O processo é repetido para obter estimativas refinadas .

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

PASSO 1: Escolha as aproximações inferior x_l e superior x_u , para a raiz de modo que a função mude o sinal no intervalo. Isso pode ser verificado garantindo que:

$f(x_l)f(x_u)<0$

PASSO 2: Uma estimativa de raiz é determinada por:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

PASSO 3: Faça os seguintes cálculos para determinar em qual subintervalo a raiz está:

(a) Se $f(x_l)f(x_r)<0$, a raiz está no subintervalo inferior. Portanto, faça $x_u = x_r$ e volte ao passo 2.

(b) Se $f(x_l)f(x_r)>0$, a raiz está no subintervalo superior. Portanto, faça $x_l = x_r$ e volte ao passo 2.

(c) Se $f(x_l)f(x_r)=0$, a raiz é igual a x_r ; Pare os cálculos.

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Exemplo: Use o método da Bissecção para resolver o mesmo problema tratado graficamente anteriormente.

Solução:

Passo 1: Descobrir dois valores para a incógnita , c no caso, que dê valores f(c) com sinais direfentes.

• A partir da figura e da tabela vê-se que a função muda de sinal entre 12 e 16. Portanto, a estimativa de raiz é o ponto médio do intervalor.

$$x_r = \frac{12+16}{2} = 14$$

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Essa estimativa representa um erro relativo percentual verdadeiro de $\varepsilon = 5,3\%$

Em seguida, calcula-se o produto do valor da função no extremo inferior e no ponto médio:

$$f(12)\,f(14) = 6,07(1,569) = 9,517$$

Que é maior do que zero e, portanto, não ocorre troca de sinal entre a extremidade inferior e o ponto médio. Consequentemente, a raíz deve estar localizada entre 14 e 16. Redefinindo a extremidade inferior.

$$x_r = \frac{14+16}{2} = 15$$

Que representa um erro relativo percentual verdadeiro de $\varepsilon = 1,5\%$
O processo pode ser repetido para se obter estimativas mais refinadas.

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$f(14)f(15) = 1,569(-0,425) = -0,666$$

Portanto, a raiz está entre 14 e 15. A extremidade superior é redefinida como 15, e a raiz estimada na terceira iteração é calculada por:

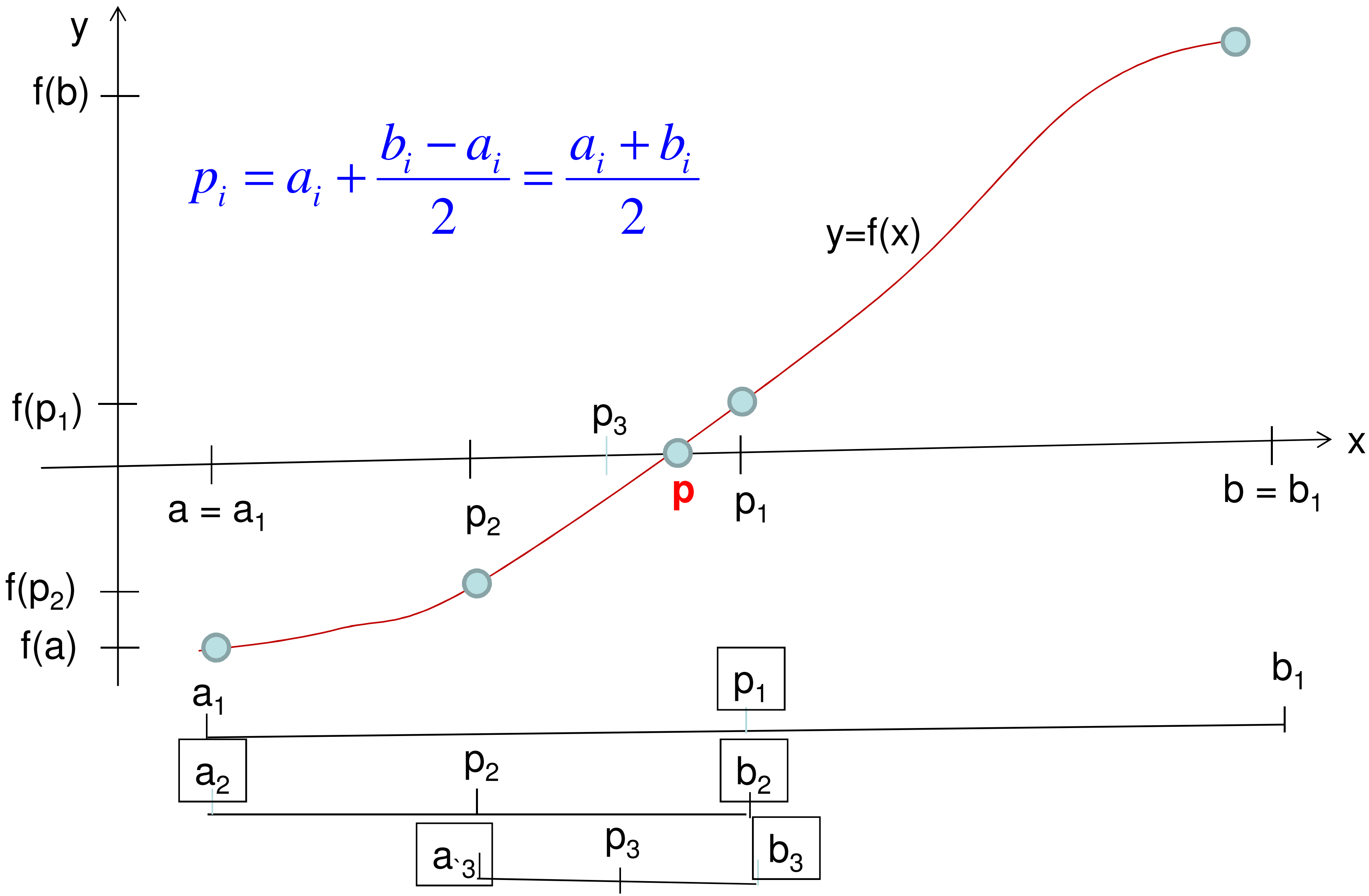
$$x_r = \frac{14+15}{2} = 14,5$$

O método pode ser repetido até que o resultado seja suficientemente preciso para satisfazer as necessidades.

Raízes de equações

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$p_i = a_i + \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{a_i + b_i}{2}$$



Raízes de equações

Algoritmo

Para determinar uma solução de f(x), dada uma função contínua f no intervalo [a,b],
Onde f(a) e f(b) têm sinais opostos:

Raízes de equações

Algoritmo

Entrada: extremidades a,b; tolerância TOL; número máximo de iterações N_0.

Saída : solução aproximada ou mensagem de erro.

Passo 1: Faça i=1
FA=f(a)
Passo 2 Enquanto i<= N_0 , execute os passos 3 a 6.

Passo 3 Faça p = a + (b-a)/2; (calcula p_i)
FP= f(p)
Passo 4 Se FP=0 ou (b-a)/2 < TOL, então
SAÍDA (p) ; (Procedimento concluído com sucesso)
PARE
Passo 5 Faça i = I + 1

Passo 6 se FA x FP>0, então faça a = p; (calcula a_i , b_i)
FA=FP
senão faça b = p
Passo 7 SAÍDA (‘O método falhou após N_0 iterações)
PARE

Raízes de equações

Exercício

A equação $f(x)=x^3 +4x^2 - 10=0$ tem uma raiz em [1,2] visto que f(1) = -5 e f(2) =14.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1,0	2,0	1,5	2,375
2	1,0	1,5	1,25	-1,79687
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				-0,00194

Raízes de equações

Exercício 1)

Determine as raízes reais de $f(x)= -0,5x^2 +2,5x +4,5$:

a) graficamente;
b) Usando a fórmula quadrática;
c) Usando três iterações do método da bissecção para determinar a maior raiz. Use as aproximações iniciais $x_l =5$ e $x_u = 10$. Calcule o erro relativo percentual a cada iteração.

Exercício 2)

Determine a raíz real de $f(x)= 5x^3 -5x^2 + 6x -2$:

a) graficamente;
b) Usando o método da bissecção para localizar a raiz. Use as aproximações iniciais $x_l =0$ e $x_u = 1$. Itere até que o erro relativo percentual fique abaixo de 10%.