



PAUL A. TIPLER  
GENE MOSCA

EFC

## Prefixos para as Potências de 10\*

Potência	Prefixo	Símbolo
$10^{24}$	iota	Y
$10^{21}$	zeta	Z
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	quilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centí	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	ato	a
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-24}$	ioeto	y

\*Os prefixos utilizados habitualmente estão indicados em negrito.

## Dados Terrestres e Astronômicos\*\*

Aceleração da gravidade na superfície da Terra	$g$	$9,81 \text{ m/s}^2 = 32,2 \text{ ft/s}^2$	$=$	é igual a
Raio da Terra	$R_E$	$6370 \text{ km} = 3960 \text{ mi}$	$\equiv$	é definido por
Massa da Terra	$M_E$	$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$	$\neq$	é diferente de
Massa do Sol		$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$	$\approx$	é aproximadamente igual a
Massa da Lua		$7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$	$\sim$	é da ordem de
Velocidade de escape na superfície da Terra		$11,2 \text{ km/s} = 6,95 \text{ mi/s}$	$\propto$	é proporcional a
Condições normais de temperatura e pressão (CNTP)		$0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$	$>$	é maior que
		$1 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa}$	$\geq$	é maior que ou igual a
Distância média da Terra à Lua***		$3,84 \times 10^8 \text{ m} = 2,39 \times 10^5 \text{ mi}$	$<$	é menor que
Distância média da Terra ao Sol***		$1,50 \times 10^{11} \text{ m} = 9,30 \times 10^7 \text{ mi}$	$\leq$	é menor que ou igual a
Velocidade do som no ar seco (nas CNTP)		$331 \text{ m/s}$	$\ll$	é muito menor que
Velocidade do som no ar úmido (a $20^\circ\text{C}$ e 1 atm)		$343 \text{ m/s}$	$\Delta x$	variação de $x$
Massa específica do ar (nas CNTP)		$1,29 \text{ kg/m}^3$	$dx$	variação diferencial de $x$
Massa específica da água (a $4^\circ\text{C}$ e 1 atm)		$1,000 \text{ kg/m}^3$	$ x $	valor absoluto de $x$
Calor de fusão da água (a $0^\circ\text{C}$ e 1 atm)	$L_f$	$333,5 \text{ kJ/kg}$	$ \vec{v} $	intensidade ou módulo de $\vec{v}$
Calor de vaporização da água (a $100^\circ\text{C}$ e 1 atm)	$L_v$	$2,257 \text{ MJ/kg}$	$n!$	$n(n-1)(n-2)\dots 1$

\*\*Outros dados sobre o sistema solar podem ser obtidos no Apêndice B e na página <http://nssde.gsfc.nasa.gov/planetfact.html>.

\*\*\* Distância de centro a centro.

## Alfabeto Grego

Alfa	$\text{A}$	$\alpha$	Nu	$\text{N}$	$\nu$
Beta	$\text{B}$	$\beta$	Xi	$\Xi$	$\xi$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	Ômicron	$\text{O}$	$\omega$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Pi	$\Pi$	$\pi$
Epsilon	$\text{E}$	$\epsilon, \varepsilon$	Rô	$\text{P}$	$\rho$
Zeta	$\text{Z}$	$\zeta$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Eta	$\text{H}$	$\eta$	Tau	$\text{T}$	$\tau$
Teta	$\Theta$	$\theta$	Ipsilon	$\text{Y}$	$\upsilon$
Iota	$\text{I}$	$\iota$	Fi	$\Phi$	$\phi$
Capa	$\text{K}$	$\kappa$	Qui	$\text{X}$	$\chi$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Mu	$\text{M}$	$\mu$	Ômega	$\Omega$	$\omega$

## Símbolos Matemáticos

$=$	é igual a
$\equiv$	é definido por
$\neq$	é diferente de
$\approx$	é aproximadamente igual a
$\sim$	é da ordem de
$\propto$	é proporcional a
$>$	é maior que
$\geq$	é maior que ou igual a
$<$	é menor que
$\leq$	é menor que ou igual a
$\ll$	é muito menor que
$\Delta x$	variação de $x$
$dx$	variação diferencial de $x$
$ x $	valor absoluto de $x$
$ \vec{v} $	intensidade ou módulo de $\vec{v}$
$n!$	$n(n-1)(n-2)\dots 1$
$\Sigma$	somatório
$\lim$	limite
$\Delta t \rightarrow 0$	$\Delta t$ tende a zero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de $x$ em relação a $t$
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de $x$ em relação a $t$
$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$	integral definida
$= F(x) \Big _{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$	

## Símbolos de Unidades

A	ampère	H	henry	nm	nanômetro ( $10^{-9}$ m)
Å	angstrom ( $10^{-10}$ m)	h	hora	pt	pinta
atm	atmosfera	Hz	hertz	qt	quarto
Btu	unidade térmica britânica	in	polegada	rev	revolução, rotação (volta)
Bq	becquerel	J	joule	R	roentgen
C	coulomb	K	kelvin	Sv	seivert
°C	grau Celsius	kg	quilograma	s	segundo
cal	caloria	km	quilômetro	T	tesla
Ci	curie	keV	quiroletron-volt	u	unidade unificada de massa
cm	centímetro	lb	libra	V	volt
dyn	dina	L	litro	W	watt
eV	elétron-volt	m	metro	Wb	weber
°F	grau Fahrenheit	MeV	megaelétron-volt	y	ano
fm	femtômetro, Fermi ( $10^{-15}$ m)	Mm	megâmetro ( $10^6$ m)	yd	jarda
ft	pé	mi	milha	μm	micrômetro ( $10^{-6}$ m)
Gm	gigâmetro ( $10^9$ m)	min	minuto	μs	microsegundo
G	gauss	mm	milímetro	μC	microcoulomb
Gy	gray	ms	milissegundo	Ω	ohm
g	grama	N	newton		

## Alguns Fatores de Conversão

### Comprimento

1 m = 39,37 in = 3,281 ft = 1,094 yd  
 1 m =  $10^{15}$  fm =  $10^{10}$  Å =  $10^9$  nm  
 1 km = 0,6215 mi  
 1 mi = 5280 ft = 1,609 km  
 1 ano-luz =  $1 c \cdot y = 9,461 \times 10^{15}$  m  
 1 in = 2,540 cm

### Volume

1 L =  $10^3$  cm<sup>3</sup> =  $10^{-3}$  m<sup>3</sup> = 1,057 qt

### Tempo

1 h = 3.600 s = 3,6 ks  
 1 ano = 365,24 dias =  $3,156 \times 10^7$  s

### Velocidade

1 km/h = 0,278 m/s = 0,6215 mi/h  
 1 ft/s = 0,3048 m/s = 0,6818 mi/h

### Ângulo e velocidade angular

1 rev =  $2\pi$  rad = 360°  
 1 rad = 57,30°  
 1 rev/min = 1 rpm = 0,1047 rad/s

### Força e pressão

1 N =  $10^5$  dyn = 0,2248 lb  
 1 lb = 4,448 N  
 1 atm = 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/in<sup>2</sup>

### Massa

1 u = [( $10^{-3}$  mol<sup>-1</sup>)/N<sub>A</sub>] kg =  $1,661 \times 10^{-27}$  kg  
 1 t =  $10^3$  kg = 1 Mg  
 1 slug = 14,59 kg  
 1 kg pesa cerca de 2,205 lb

### Energia e potência

1 J =  $10^7$  erg = 0,7373 ft·lb =  $9,869 \times 10^{-5}$  L·atm  
 1 kW·h = 3,6 MJ  
 1 cal = 4,184 J =  $4,129 \times 10^{-2}$  L·atm  
 1 L·atm = 101,325 J = 24,22 cal  
 1 eV =  $1,602 \times 10^{-19}$  J  
 1 Btu = 778 ft·lb = 252 cal = 1054 J  
 1 HP = 550 ft·lb/s = 746 W

### Conduvidade térmica

1 W/(m·K) = 6,938 Btu·in/(h·ft<sup>2</sup>·F°)

### Campo magnético

1 T =  $10^4$  G

### Viscosidade

1 Pa·s = 10 poise

No interesse de difusão da cultura e do conhecimento, os autores e os editores envidaram o máximo esforço para localizar os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado, dispondo-se a possíveis acertos posteriores caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

CIP-BRASIL CATALOGAÇÃO-NA-FONTE  
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

T499f

v.2

Tipler, Paul Allan, 1933-

Física para cientistas e engenheiros, v.2 : eletricidade e magnetismo ;  
ótica / Paul A. Tipler, Gene Mosca ; tradução Fernando Ribeiro da Silva,  
Mauro Speranza Neto. - Rio de Janeiro : LTC, 2006

3v. : il.

Tradução de: Physics for scientists and engineers, 5th ed

Apêndices

ISBN 85-216-1463-2 (v.2)

I. Física. I. Mosca, Gene. II. Título.

05-3946.

CDD 530

CDU 53

Capa: Fotografia – cortesia de Fernanda Albuquerque Portella

First published in the United States

by

W.H. FREEMAN AND CO., New York and Basingstoke  
Copyright © 2004 by W.H. Freeman and Co. All Rights Reserved

Publicado originalmente nos Estados Unidos

por

W.H. FREEMAN AND CO., New York and Basingstoke  
Copyright © 2004 by W.H. Freeman and Co. Todos os Direitos Reservados

Editoração Eletrônica: *Eduardo M. Gómez*

Direitos exclusivos para a língua portuguesa

Copyright © 2006 by

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Travessa do Ouvidor, 11

Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040

Tel.: 21-3970-9480

Fax: 21-2221-3202

lte@lceditora.com.br

www.lceditora.com.br

53  
6525f  
5. ed.  
v. 2  
c. 3  
BC 258463  
SUS 88314

# SUMÁRIO GERAL

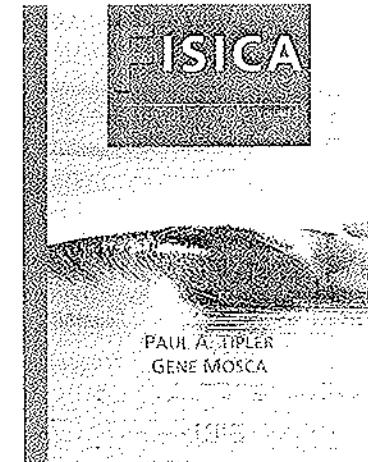
## VOLUME 1

- 1 SISTEMAS DE MEDIDAS

### PARTE I

#### MECÂNICA

- 2 MOVIMENTO EM UMA DIMENSÃO
- 3 MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES
- 4 LEIS DE NEWTON
- 5 APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON
- 6 TRABALHO E ENERGIA
- 7 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA
- 8 SISTEMAS DE PARÍCULAS E CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR
- 9 ROTAÇÃO
- 10 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR
- 11 RELATIVIDADE RESTRITA
- 11 GRAVIDADE
- 12 EQUILÍBrio ESTÁTICO E ELASTICIDADE
- 13 FLUIDOS



### PARTE II

#### OSCILAÇÕES E ONDAS

- 14 OSCILAÇÕES
- 15 MOVIMENTO ONDULATÓRIO
- 16 SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS E ONDAS ESTACIONÁRIAS

### PARTE III

#### TERMODINÂMICA

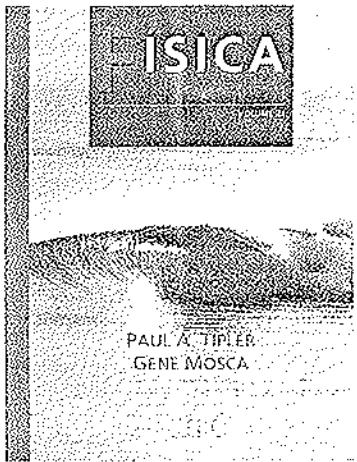
- 17 TEMPERATURA E TEORIA CINÉTICA DOS GASES
- 18 CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA
- 19 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA
- 20 PROPRIEDADES TÉRMICAS E PROCESSOS TÉRMICOS

## APÊNDICES

- A SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) E FATORES DE CONVERSÃO
- B DADOS NUMÉRICOS
- C TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS
- D REVISÃO DE MATEMÁTICA
- CRÉDITOS DAS ILUSTRAÇÕES
- RESPONTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES
- ÍNDICE

**VOLUME 2****PART E IV****ELETRICIDADE E MAGNETISMO**

- 21 O CAMPO ELÉTRICO I: DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE CARGAS
- 22 O CAMPO ELÉTRICO II: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGAS
- 23 O POTENCIAL ELÉTRICO
- 24 ENERGIA ELETROSTÁTICA E CAPACITÂNCIA
- 25 CORRENTE ELÉTRICA E CIRCUITOS E CORRENTE CONTÍNUA
- 26 O CAMPO MAGNÉTICO
- 27 FONTES DO CAMPO MAGNÉTICO
- 28 INDUÇÃO MAGNÉTICA
- 29 CIRCUITOS COM CORRENTE ALTERNADA
- 30 EQUAÇÕES DE MAXWELL E ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

**PART E V****ÓPTICA**

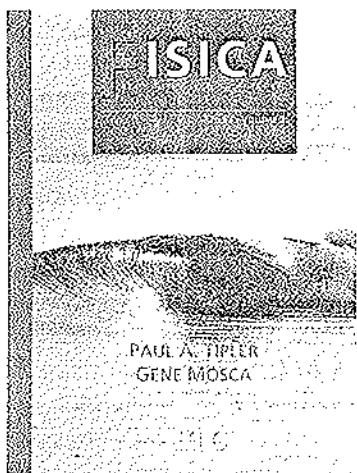
- 31 PROPRIEDADES DA LUZ
- 32 IMAGENS ÓTICAS
- 33 INTERFERÊNCIA E DIFRAÇÃO

**A PÊNDICES**

- A SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) E FATORES DE CONVERSÃO
- B DADOS NUMÉRICOS
- C TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS
- D REVISÃO DE MATEMÁTICA
- CRÉDITOS DAS ILUSTRAÇÕES
- RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES
- ÍNDICE

**VOLUME 3****PART E VI****FÍSICA MODERNA: MECÂNICA QUÂNTICA, RELATIVIDADE E A ESTRUTURA DA MATÉRIA**

- 34 A DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA E A FÍSICA QUÂNTICA
- 35 APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER
- 36 OS ÁTOMOS
- 37 MOLECULAS
- 38 SÓLIDOS
- 39 RELATIVIDADE
- 40 FÍSICA NUCLEAR
- 41 PARTÍCULAS ELEMENTARES E O COMEÇO DO UNIVERSO

**A PÊNDICES**

- A SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) E FATORES DE CONVERSÃO
- B DADOS NUMÉRICOS
- C TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS
- CRÉDITOS DAS ILUSTRAÇÕES
- RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES
- ÍNDICE

# SUMÁRIO

## VOLUME 2

PREFÁCIO xvii

SOBRE OS AUTORES xxvii

\* - material opcional

## PARTE IV ELETRICIDADE E MAGNETISMO 1

### CAPÍTULO 21

#### O CAMPO ELÉTRICO I: DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE CARGAS 1

- 21-1 Carga Elétrica 2
    - Quantização da Carga 3
    - Conservação da Carga 3
  - 21-2 Condutores e Isolantes 5
    - Carga por Indução 5
  - 21-3 Lei de Coulomb 6
    - Força Exercida por um Sistema de Cargas 9
  - 21-4 O Campo Elétrico 12
    - Dipolos Elétricos 16
  - 21-5 Linhas de Campo Elétrico 17
  - 21-6 Movimento das Cargas Puntiformes nos Campos Elétricos 20
  - 21-7 Dipolos Elétricos nos Campos Elétricos 23
- Resumo 25  
Problemas 26

### CAPÍTULO 22

#### CAMPO ELÉTRICO II: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGAS 34

- 22-1 Cálculo do Campo Elétrico  $\vec{E}$  a Partir da Lei de Coulomb 35
  - Campo  $\vec{E}$  sobre o Eixo de um Segmento de Reta Finito Carregado 35
  - Campo  $\vec{E}$  Fora do Eixo de um Segmento de Reta Finito Carregado 36
  - Campo  $\vec{E}$  Devido a um Segmento de Reta Infinito Carregado 37
  - Campo  $\vec{E}$  sobre o Eixo de um Anel Carregado 40
  - Campo  $\vec{E}$  sobre o Eixo de um Disco Carregado Uniformemente 41
  - Campo  $\vec{E}$  Devido a um Plano Infinito Carregado 42
- 22-2 Lei de Gauss 43
  - Fluxo Elétrico 44
  - Enunciado Quantitativo da Lei de Gauss 45
- 22-3 Cálculo do Campo Elétrico  $\vec{E}$  a Partir da Lei de Gauss 47
  - Simetria Plana 48
  - Simetria Esférica 49
  - Campo  $\vec{E}$  Devido a uma Casca Esférica Fina Carregada 50

Campo $\vec{E}$ Devido a uma Esfera Carregada Uniformemente	52
Simetria Cilíndrica	54
22-4 Descontinuidade de $\vec{E}$	55
22-5 Cargas e Campos Elétricos nas Superfícies Condutoras	56
22-6 *Dedução da Lei de Gauss a Partir da Lei de Coulomb	61
Resumo	63
Problemas	64

## CAPÍTULO 23

### O POTENCIAL ELÉTRICO 72

23-1 Diferença de Potencial	73
Continuidade de V	73
Unidades	74
Campo Polencial e Campo Elétrico	75
23-2 Potencial Elétrico Devido a um Sistema de Cargas Puntiformes	75
23-3 Cálculo do Campo Elétrico a Partir do Potencial	80
*Relação Geral entre $\vec{E}$ e V	81
23-4 Cálculo do Potencial V para Distribuições Contínuas de Carga	82
Potencial V no Eixo de um Anel Carregado	82
Potencial Elétrico V no Eixo de um Disco Uniformemente Carregado	83
Potencial Elétrico V Devido a um Plano Infinito de Cargas Elétricas	85
Potencial V Interno e Externo a uma Casca Esférica Carregada	86
Potencial V Devido a um Segmento de Reta Infinito Carregado	89
23-5 Superfícies Eqüipotenciais	90
O Gerador de Van de Graaff	92
Ruptura Dielétrica	94
Resumo	97
Problemas	99

## CAPÍTULO 24

### ENERGIA ELETROSTÁTICA E CAPACITÂNCIA 105

24-1 Energia Potencial Eletrostática	106
24-2 Capacitância	109
Capacitores	110
Capacitores de Placas Paralelas	110
Capacitores Cilíndricos	111
24-3 O Armazenamento de Energia Elétrica	113
Energia do Campo Eletrostático	116
24-4 Capacitores, Baterias e Circuitos	117
Combinações de Capacitores	118
24-5 Dielétricos	124
Energia Armazenada no Capacitor com Dielétrico	128
24-6 Estrutura Molecular de um Dielétrico	130
Valor da Carga Ligada	133
*O Efeito Piezelétrico	133
Resumo	134
Problemas	135

## CAPÍTULO 25

### CORRENTE ELÉTRICA E CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA 144

- 25-1 A Corrente e o Movimento das Cargas 144
- 25-2 Resistência e Lei de Ohm 148
- 25-3 Energia nos Circuitos Elétricos 153
  - FEM e Baterias 154
- 25-4 Combinações de Resistores 157
  - Resistores em Série 157
  - Resistores em Paralelo 158
- 25-5 Regras de Kirchhoff 163
  - Circuitos com uma Única Malha 163
  - Círculo com Múltiplas Malhas 166
  - Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros 170
- 25-6 Circuitos RC 171
  - Descarregando um Capacitor 171
  - Carregando um Capacitor 173
  - Conservação da Energia no Carregamento de um Capacitor 176

Resumo 177

Problemas 178

## CAPÍTULO 26

### O CAMPO MAGNÉTICO 190

- 26-1 A Força Exercida por um Campo Magnético 190
- 26-2 Movimento de uma Carga Pontual em um Campo Magnético 195
  - \*O Seletor de Velocidade 197
  - \*A Medida de Thomson para  $q/m$  dos Elétrons 198
  - \*O Espectrômetro de Massa 200
  - O Ciclotron 201
- 26-3 Torques sobre Espiras com Corrente e Ímãs 202
  - Energia Potencial de um Dipolo Magnético em um Campo Magnético 205
- 26-4 O Efeito Hall 207
  - \*O Efeito Hall Quântico 209

Resumo 210

Problemas 211

## CAPÍTULO 27

### FONTES DO CAMPO MAGNÉTICO 218

- 27-1 O Campo Magnético de Cargas Móveis Pontuais 219
- 27-2 O Campo Magnético de Correntes: A Lei de Biot-Savart 220
  - $\vec{B}$  Devido a uma Espira com Corrente 221
  - $\vec{B}$  Devido à Corrente em um Solenóide 225
  - $\vec{B}$  Devido à Corrente em um Fio Reto 227
  - Força Magnética entre Fios Paralelos 230
- 27-3 Lei de Gauss para o Magnetismo 232
- 27-4 Lei de Ampère 233
  - Limitações da Lei de Ampère 236

- 27-5 Magnetismo nos Materiais 237  
    Magnetização e Suscetibilidade Magnética 238  
    Momentos Magnéticos Atômicos 239  
    \*Paramagnetismo 242  
    \*Ferromagnetismo 243  
    \*Diamagnetismo 247  
Resumo 249  
Problemas 252

## CAPÍTULO 28

### INDUÇÃO MAGNÉTICA 261

- 28-1 Fluxo Magnético 262  
28-2 H&M Induzida e Lei de Faraday 264  
28-3 Lei de Lenz 267  
28-4 FEM Induzida por Movimento 272  
28-5 Correntes Parasitas 277  
28-6 Indutância 278  
    Auto-indutância 278  
    Indutância Mútua 280  
28-7 Energia Magnética 281  
28-8 \*Circuitos RL 283  
28-9 \*Propriedades Magnéticas de Supercondutores 288  
    \*Efeito Meissner 288  
    \*Quantização do Fluxo 289  
Resumo 289  
Problemas 291

## CAPÍTULO 29

### CIRCUITOS COM CORRENTE ALTERNADA 301

- 29-1 Geradores de Corrente Alternada 302  
29-2 Corrente Alternada em um Resistor 303  
    Valor RMS (Root Mean Square) 304  
29-3 Circuitos com Corrente Alternada 306  
    Indutores em Circuitos com Corrente Alternada 306  
    Capacitores em Circuitos com Corrente Alternada 308  
29-4 \*Fasores 311  
29-5 \*Circuitos LC e RLC sem um Gerador 312  
29-6 \*Circuitos RLC Excitados 315  
    Circuitos RLC Série 315  
    Ressonância 317  
    Círculo RLC em Paralelo 323  
29-7 \*O Transformador 323  
Resumo 327  
Problemas 329

**CAPÍTULO 30****EQUAÇÕES DE MAXWELL E ONDAS ELETROMAGNÉTICAS 338**

- 30-1 Corrente de Deslocamento de Maxwell 339  
30-2 Equações de Maxwell 342  
30-3 Ondas Eletromagnéticas 343  
    O Espectro Eletromagnético 344  
    Produção de Ondas Eletromagnéticas 345  
    Radiação de um Dipolo Elétrico 345  
    Energia e Quantidade de Movimento em uma Onda Eletromagnética 349  
30-4 \*A Equação de Onda para Ondas Eletromagnéticas 353  
    Derivação da Equação de Onda 353  
Resumo 359  
Problemas 360

**PARTE V ÓTICA****CAPÍTULO 31****PROPRIEDADES DA LUZ 365**

- 31-1 Dualidade Onda-Partícula 366  
31-2 Espectro de Luz 366  
31-3 Fontes de Luz 367  
    Espectros de Linha 367  
    Absorção, Espalhamento, Emissão Espontânea e Emissão Estimulada 369  
    Lasers 371  
31-4 A Velocidade da Luz 374  
31-5 A Propagação da Luz 379  
    Princípio de Huygens 379  
    Princípio de Fermat 380  
31-6 Reflexão e Refração 380  
    Mecanismos Físicos para Reflexão e Refração 381  
    Reflexão Especular e Reflexão Difusa 382  
    Intensidade Relativa da Luz Refletida e Transmitida 383  
    Reflexão Interna Total 384  
    Miragens 387  
    Dispersão 387  
31-7 Polarização 390  
    Polarização por Absorção 391  
    Polarização por Reflexão 392  
    Polarização por Espalhamento 393  
    Polarização por Birrefringência 394  
31-8 Demonstração das Leis da Reflexão e da Refração 396  
    Princípio de Huygens 396  
    Princípio de Fermat 397  
Resumo 399  
Problemas 401

## CAPÍTULO 32

### IMAGENS ÓTICAS 407

- 32-1 Espelhos 407
  - Espelhos Planos 407
  - Espelhos Esféricos 409
  - Diagramas de Raios para Espelhos 414
- 32-2 Lentes 418
  - Imagens Formadas por Refração 418
  - Lentes Finas 422
  - Diagramas de Raios para Lentes 426
  - Combinação de Lentes 428
  - Lentes Compostas 431
- 32-3 \*Aberrações 431
- 32-4 \*Instrumentos Óticos 433
  - \*O Olho 433
  - \*O Ampliador Simples 436
  - \*O Microscópio Composto 438
  - \*O Telescópio 440

Resumo 444

Problemas 446

## CAPÍTULO 33

### INTERFERÊNCIA E DIFRAÇÃO 454

- 33-1 Diferença de Fase e Coerência 455
- 33-2 Interferência em Filmes Finos 456
- 33-3 Padrão de Interferência em Duas Fendas 459
  - Cálculo da Intensidade 461
- 33-4 Padrão de Difração de uma Fenda Única 463
  - Padrão de Interferência-Difração de Duas Fendas 465
- 33-5 \*Usando Fasores para Somar Ondas Harmônicas 466
  - \*O Padrão de Interferência de Três ou Mais Fontes Igualmente Espaçadas 467
    - \*Calculando o Padrão de Difração de uma Fenda Única 469
    - \*Calculando o Padrão de Difração de Múltiplas Fendas 472
- 33-6 Difração de Fraunhofer e Fresnel 473
- 33-7 Difração e Resolução 475
- 33-8 \*Redes de Difração 477
  - \*Hologramas 480

Resumo 481

Problemas 483

## APÊNDICE A

### SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) E FATORES DE CONVERSÃO 490

## APÊNDICE B

### DADOS NUMÉRICOS 492

**A PÊNDICE C****TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS 495****A PÊNDICE D****REVISÃO DE MATEMÁTICA 497**

Créditos das Ilustrações 520

Respostas dos Problemas Ímpares 522

Índice 545



# PREFÁCIO

Estamos excepcionalmente felizes em apresentar a quinta edição da obra *Física para Cientistas e Engenheiros*. No decorrer da revisão que culminou com esta edição procuramos reforçar os pontos fracos da edição anterior, de modo que este novo texto ficou mais realista e mais empenhado em utilizar ferramentas motivacionais de aprendizado para um curso introdutório de física baseado no cálculo. Com a ajuda dos revisores e de muitos usuários da quarta edição, tivemos o cuidado de examinar e refinar cada aspecto do livro com o objetivo de ampliar a compreensão do estudante e conduzi-lo ao sucesso. Nosso objetivo incluiu a ajuda aos estudantes, aumentando sua capacidade de resolver problemas, tornando o texto mais acessível e de fácil leitura e preservando a flexibilidade do texto para os professores.

## Exemplos

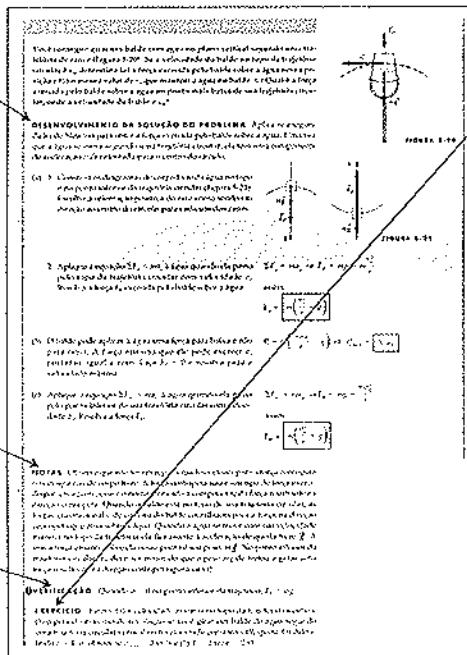
Uma das mais importantes decisões no sentido de atender aos nossos objetivos foi o de incorporar algumas melhorias aos exemplos resolvidos que utilizam o formato lado a lado, introduzido na quarta edição. Nesses exemplos são justapostas as etapas para a solução do problema com as equações necessárias, de modo a ficar mais fácil para os estudantes observarem os desdobramentos de um determinado problema.

## O formato lado a lado utilizado nos exemplos resolvidos foi uma sugestão dos estudantes; apenas adicionamos uns poucos detalhes de acabamento:

- Após o enunciado de cada problema, os estudantes são induzidos a pensar no *Desenvolvimento da Solução do Problema*. Nesse item o problema é analisado tanto conceitual quanto visualmente, e os estudantes são orientados a desenhar um diagrama de corpo livre. Cada etapa da solução é então apresentada na forma de um texto, na coluna do lado esquerdo, e as correspondentes equações matemáticas na coluna do lado direito.

- As *Notas* ao término do exemplo destacam a importância ou a relevância do exemplo ou, ainda, sugerem uma forma distinta para sua solução.

- NOVAS *Verificações* alertam os estudantes para verificar seus resultados tanto em relação à exatidão quanto em relação à razoabilidade dos cálculos matemáticos.



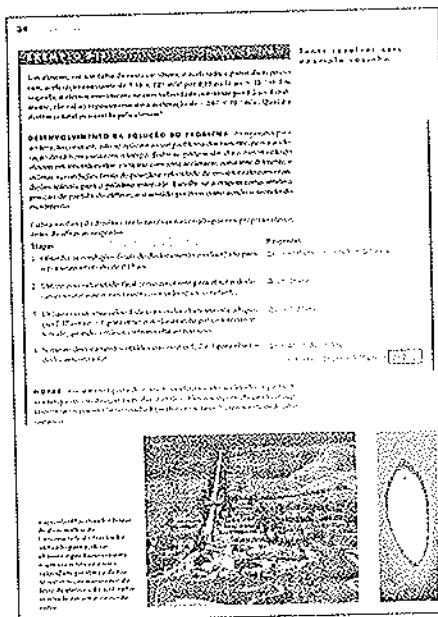
- Um *Exercício* geralmente segue a solução dos exemplos, permitindo aos estudantes testar sua compreensão através da solução de um problema similar sem qualquer ajuda. As respostas são fornecidas com o Exercício, de modo a propiciar um retorno imediato e soluções alternativas.

Todos os exemplos foram analisados, e etapas foram adicionadas sempre que uma hipótese tenha sido utilizada; foram incluídas novas Notas e, quando apropriado, alterada a seqüência na solução de exercícios e apresentados novos diagramas de corpo livre. As respostas foram agora destacadas com um quadro, de forma a torná-las de fácil consulta. As novas características do texto incluem a Verificação dos Exercícios, que oferece um teste rápido, ajudando os estudantes a analisarem suas respostas com lógica.

Esta edição também inclui dois tipos de exemplos específicos que oferecem aos estudantes oportunidades ímpares na solução de problemas. Os exemplos com a indicação "Tente resolver este exemplo sozinho" estimulam os estudantes a serem disciplinados na solução de um problema, e a indicação "Coloque-o no Contexto" indica que o exemplo se aproxima dos cenários da vida real que eles poderão encontrar como cientistas.

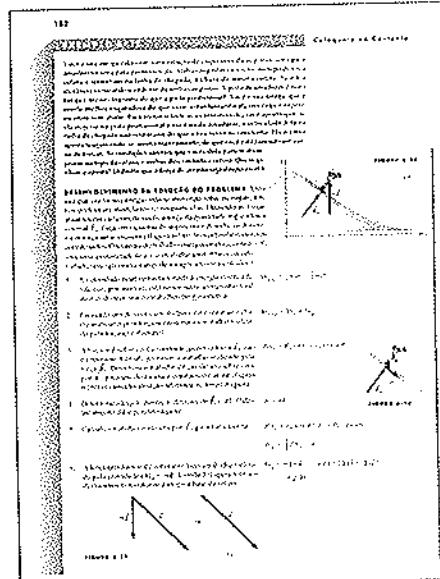
### **Exemplos com a indicação "Tente resolver este exemplo sozinho"**

Como o exemplo resolvido regular, estes utilizam o formato lado a lado, porém nesse caso o item Desenvolvimento da Solução do Problema é omitido algumas vezes e as descrições na coluna do lado esquerdo são mais sucintas. Esses exemplos orientam os estudantes a uma solução passo a passo sem realizarem os cálculos matemáticos correspondentes. Os estudantes perceberão que esses exemplos são muito úteis se cobrirem a coluna do lado direito e ficarem atentos à realização dos cálculos por si próprios, antes de olhar as equações. Dessa forma, os estudantes podem raciocinar através das diversas etapas quando completarem as respostas.



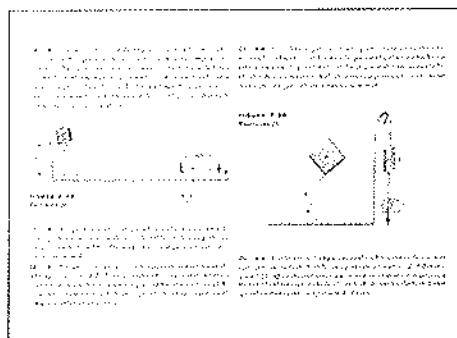
### **Exemplos com a indicação "Coloque-o no Contexto"**

Em cada capítulo desta edição, no mínimo um exemplo resolvido é identificado como "ricamente contextualizado". Esses exemplos podem incluir informações não necessárias à solução do problema ou podem exigir do estudante a obtenção de informações adicionais em tabelas ou dados de experiências ou informações obtidas anteriormente. Exemplos ricamente contextualizados refletem a forma de os cientistas e engenheiros resolverem problemas do mundo real. Laura McCullough, da University of Wisconsin, Stout e Thomas Foster, da Southern Illinois University, Edwardsville, Estados Unidos, iniciaram esse tipo de exemplo, nos consultaram e ajudaram na preparação de muitos deles.



## Problemas Práticos

A qualidade e a clareza dos problemas ao final de cada capítulo receberam extremo cuidado. Cerca de 20% dos 4.500 problemas são novos, elaborados por Charles Adler, do St. Mary's College-Maryland, nos Estados Unidos. Os problemas conceituais foram grupados no início de cada conjunto de problemas, e uma nova categoria de problemas envolvendo Estimativas e Aproximações foi introduzida para encorajar os estudantes a pensarem mais como cientistas ou engenheiros. As respostas aos problemas ímpares são fornecidas no final da obra.



Cada problema é assinalado com um ícone em forma de um, dois ou três pontos, identificando seu nível de dificuldade.

## Características Pedagógicas

Esta nova edição de *Física* tem uma série de características de forma e edição que tornam o livro uma valiosa ferramenta de ensino. Aspectos importantes da última edição foram revisados e algumas novas características foram introduzidas para que o texto ficasse mais envolvente, convidativo e atualizado.

### Nova Abertura do Capítulo

- Agora cada capítulo começa com uma questão que é respondida através de um exemplo resolvido no interior do capítulo. Esse aspecto pedagógico expõe o estudante ao material do capítulo, e desperta sua motivação para a solução do problema.
- Cada capítulo lista os títulos das principais seções, fornecendo um roteiro aos estudantes.
- Os principais conceitos emitidos no capítulo são reforçados.

### Inovações no conteúdo

O Capítulo R, um pequeno capítulo do Volume 1, é breve o suficiente para ser apresentado em uma ou duas aulas, permitindo aos professores incluir esse importante e moderno tópico mais cedo em seu curso de física. O capítulo evita a abstração associada às transformações de Lorentz e se concentra nos conceitos básicos da contração dos comprimentos, da dilatação do tempo e da simultaneidade, utilizando experimentos idealizados envolvendo réguas e relógios de luz. A relação entre quantidade de movimento relativística e energia relativística também é apresentada.

**CAPÍTULO**

## 1

**Sistemas de Medidas**

CLASSIFICAÇÃO DE APARELHOS PARA SERVIR DE REFERÊNCIA PARA OS CONCEITOS DE FÍSICA  
INTRODUÇÃO AO SISTEMA SÉRIE  
MÉTODOS PRACTICOS E DADOS EXPERIMENTAIS

**Objetivo:** Apresentar os sistemas de medida e suas aplicações.

1-1 Unidades

1-2 Conversão de unidades

1-3 Dimensionalidade das equações físicas

1-4 Relatividade

1-5 Álgebra e logaritmo e a cálculo em 3 dimensões

**Teoria Quântica:** Os Capítulos 17, "A Dualidade Onda-Partícula e a Física Quântica", e 27, "A Teoria Microscópica da Condução de Eletricidade", da quarta edição foram deslocados para sua posição mais tradicional no Volume III da quinta edição nos Capítulos 37 e 38.

**Alterações no Procedimento:** o conteúdo desta edição recebeu ainda diversas outras importantes melhorias:

- Os diagramas de movimento foram introduzidos na Seção 3-3 e utilizados para se estimar a orientação do vetor aceleração através da definição de aceleração.
- Na Seção 4-4 as forças de atrito foram agora introduzidas qualitativamente, permitindo que sejam incluídas nos diagramas de corpo livre. Um tratamento quantitativo de forças de atrito é visto na Seção 5-1.
- A Seção 4-7 introduz problemas com dois ou mais corpos. A escolha de um conjunto de eixos coordenados para cada corpo é uma prática robusta para a solução de problemas em que se utilizam as leis de Newton em sistemas constituídos por dois ou mais corpos. O valor dessa prática é revelado no exemplo em que Sílvio desliza por uma geleira enquanto Paulo já caiu de sua borda.
- Na Seção 8-8, "Sistemas com Massa Continuamente Variável", a equação básica de movimento para um corpo com massa continuamente variável (a equação do foguete) é desenvolvida utilizando um corpo que está aumentando sua massa — como o vagão aberto de um trem sob chuva — ao invés de um corpo que está perdendo massa — como um foguete eliminando os gases resultantes da queima do combustível. Essa representação facilita tanto o desenvolvimento da equação básica do movimento quanto sua aplicação a certas situações.
- No Capítulo 9, "Rotação", é apresentada uma nova seção que fornece as orientações para solução de problemas com a aplicação da Segunda Lei de Newton para a rotação.
- Na Seção 13-3 a discussão sobre empuxo inclui agora as forças de empuxo sobre corpos apoiados em superfícies submersas.
- No Capítulo 18, as relações entre trabalho e energia são expressas em função do trabalho realizado sobre o sistema. A primeira lei da termodinâmica também é agora expressa em função do trabalho realizado sobre o sistema. (O Serviço de Testes Educacionais dos EUA adotou a convenção de que o termo trabalho, na primeira lei da termodinâmica, seja o trabalho realizado sobre o sistema. Essa convenção vem sendo adotada nos EUA por todos os órgãos de aplicação desses testes.)

## **Aplicações adicionais em engenharia e biologia**

Aplicações adicionais enfatizam a relevância da física nas experiências acadêmicas, nos estudos posteriores e nas futuras carreiras.

## **Novo foco nas falhas mais comuns**

Alguns tópicos que geralmente causam certa confusão são identificados com um novo ícone , destacando a dificuldade. Por exemplo, na Seção 3-4 o sinal é usado para identificar o ponto de discussão, que no caso é o fato de os movimentos horizontal e vertical serem independentes na trajetória de projéteis.

## **Novo formato e ilustrações adicionais**

O livro apresenta figuras e ilustrações mais realistas. Cada detalhe das figuras foi cuidadosamente considerado, e muitas foram revisadas para se tornarem mais compreensíveis. Aproximadamente 245 novas figuras foram incorporadas, incluindo muitos novos diagramas de corpo livre nos exemplos resolvidos. Novas fotos deram mais realismo a muitas aplicações da física ao mundo real.

## **Seções Opcionais**

O livro foi idealizado de forma a permitir ao professor uma certa flexibilidade e autonomia ao considerar determinadas seções como “opcionais”. Essas seções são marcadas com um asterisco “\*”, e os professores que desejarem pular essas seções podem fazê-lo, ficando conscientes de que seus alunos não perderam qualquer conceito de que precisarão nos capítulos posteriores.

## **Resumo**

Os resumos ao final de cada capítulo são organizados com os tópicos mais importantes à esquerda e as equações e observações mais importantes à direita. Nesses resumos, as equações-chave do capítulo aparecem juntas, para facilidade de consulta.

## **Explorando experiências**

Os estudantes são convidados a analisar desdobramentos interessantes dos conceitos emitidos nos capítulos através de pequenos textos relacionando os conceitos de um capítulo a outros fenômenos, desde o clima até os transdutores.

## **Materiais Suplementares**

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:

LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.  
A/C Editorial Técnico  
Travessa do Ouvidor, 11  
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040  
Tel.: 21-3970-9480  
Fax: 21-2221-3202  
[ltc@ltceditora.com.br](mailto:ltc@ltceditora.com.br)  
[www.ltceditora.com.br](http://www.ltceditora.com.br)

## **Agradecimentos**

Somos gratos a muitos professores, estudantes, colegas e amigos que contribuíram não apenas nesta edição, mas também nas anteriores.

Charles Adler, do St. Mary's College-Maryland, foi autor de novos problemas excelentes. David Mills, do College of Redwoods, realizou uma revisão extensiva do manual de soluções. Robin Jordan, da Florida Atlantic University, desenvolveu os exercícios *Master the Concept* e os problemas *iSOLVE Checkpoint*. Laura McCullough, da University of Wisconsin, Stout, e Thomas Foster, da Southern Illinois University, Edwardsville, colaboraram com suas experiências em pesquisa e educação em física e foram responsáveis pela implementação dos exemplos ricamente contextualizados em cada capítulo, bem como pelos novos problemas sobre Estimativas e Aproximações. Recebemos inestimável ajuda dos professores a seguir relacionados na verificação da exatidão do texto e dos problemas:

Karamjeet Arya,  
San Jose State University

Michael Crivello,  
San Diego Mesa College

David Faust,  
Mt. Hood Community College

Jerome Licini,  
Lehigh University

Dan Lucas,  
University of Wisconsin

Jeannette Myers,  
Clemson University

Marian Peters,  
Appalachian State University

Paul Quinn,  
Kutztown University

**Michael G. Strauss,**  
University of Oklahoma

**George Zober,**  
Yough Senior High School

**Patricia Zober,**  
Ringgold High School

Muitos professores e estudantes contribuíram com extensivas e úteis revisões de um ou mais capítulos. Cada um deu uma contribuição fundamental para a qualidade desta revisão, e são merecedores de nossa gratidão. Desejamos registrar nosso agradecimento aos seguintes revisores:

**Edward Adelson,**  
The Ohio State University

**Todd Averett,**  
The College of William e Mary

**Yildirim M. Aktas,**  
University of North Carolina at Charlotte

**Karamjeet Arya,**  
San Jose State University

**Alison Baski,**  
Virginia Commonwealth University

**Gary Stephen Blanpied,**  
University of South Carolina

**Ronald Brown,**  
California Polytechnic State University

**Robert Coakley,**  
University of Southern Maine

**Robert Coleman,**  
Emory University

**Andrew Cornelius,**  
University of Nevada at Las Vegas

**Peter P. Crooker,**  
University of Hawaii

**N. John DiNardo,**  
Drexel University

**William Ellis,**  
University of Technology-Sydney

**John W. Farley,**  
University of Nevada at Las Vegas

**David Flammer,**  
Colorado School of Mines

**Tom Furtak,**  
Colorado School of Mines

**Patrick C. Gibbons,**  
Washington University

**John B. Gruber,**  
San Jose State University

**Christopher Gould,**  
University of Southern California

**Phuoc Ha,**  
Creighton University

**Theresa Peggy Hartsell,**  
Clark College

**James W. Johnson,**  
Tallahassee Community College

**Thomas O. Krause,**  
Towson University

**Donald C. Larson,**  
Drexel University

**Paul L. Lee,**  
California State University, Northridge

**Peter M. Levy,**  
New York University

**Jerome Licini,**  
Lehigh University

**Edward McCliment,**  
University of Iowa

**Robert R. Marchini,**  
The University of Memphis

**Pete E.C. Markowitz,**  
Florida International University

**Fernando Medina,**  
Florida Atlantic University

**Laura McCullough,**  
University of Wisconsin at Stout

**John W. Norbury,**  
University of Wisconsin at Milwaukee

**Melvyn Jay Oremland,**  
Pace University

**Antonio Pagnamenta,**  
University of Illinois at Chicago

**John Parsons,**  
Columbia University

**Dinko Pocanic,**  
University of Virginia

**Bernard G. Pope,**  
Michigan State University

**Young-Zhong Qian,**  
University of Minnesota

**Ajit S. Rupaal,**  
Western Washington University

**Todd G. Russell,**  
Colorado School of Mines

**Mesgun Sebtatu,**  
Winthrop University

**Marlin L. Simon,**  
Auburn University

**Zbigniew M. Stadnik,**  
University of Ottawa

**G.R. St.**  
Unive...

**Mich...**  
Unive...

**Chin-C...**  
Aubu...

**Stepl...**  
Ecker...

**Suzann...**  
North...

**Ron ...**  
Califor...

**Revi...**  
Lay ...

**Mark ...**  
Colo...

**Bren...**  
UCLA...

**Alan ...**  
Ship...

**Richard...**  
Indiana...

**Mid...**  
Unive...

**David...**  
Mount...

**Philip...**  
Unive...

**Clin...**  
Moor...

**Kris...**  
Unit...

**Mich...**  
Unive...

**Davi...**  
Ohio...

**James...**  
Unive...

**Eric ...**  
Unit...

**Jeron...**  
Lehigh...

**Dan ...**  
Princ...

**Laur...**  
Unive...

**Car...**  
Uni...

**Jeff ...**  
Unive...

**Rob...**  
The...

G.R. Stewart,  
University of Florida  
Michael G. Strauss,  
University of Oklahoma  
Chin-Che Tin,  
Auburn University  
Stephen Weppner,  
Eckerd College  
Suzanne E. Willis,  
Northern Illinois University  
Ron Zammit,  
California Polytechnic State University

**Revisores das Soluções dos Problemas**

Lay Nam Chang,  
Virginia Polytechnic Institute  
Mark W. Coffey,  
Colorado School of Mines  
Brent A. Corbin,  
UCLA  
Alan Cresswell,  
Shippensburg University  
Ricardo S. Decca,  
Indiana University-Purdue University  
Michael Dubson,  
University of Colorado at Boulder  
David Faust,  
Mount Hood Community College  
Philip Fraundorf,  
University of Missouri, Saint Louis  
Clint Harper,  
Moorpark College  
Kristi R.G. Hendrickson,  
University of Puget Sound  
Michael Hildreth,  
University of Notre Dame  
David Ingram,  
Ohio University  
James J. Kolata,  
University of Notre Dame  
Eric Lane,  
University of Tennessee, Chattanooga  
Jerome Licini,  
Lehigh University  
Daniel Marlow,  
Princeton University  
Laura McCullough,  
University of Wisconsin at Stout  
Carl Mungan,  
United States Naval Academy  
Jeffry S. Olafsen,  
University of Kansas  
Robert Pompi,  
The State University of New York at Binghamton

R.J. Rollefson,  
Wesleyan University  
Andrew Scherbakov,  
Georgia Institute of Technology  
Bruce A. Schumm,  
University of California, Santa Cruz  
Dan Styer,  
Oberlin College  
Jeffrey Sundquist,  
Palm Beach Community College-South  
Cyrus Taylor,  
Case Western Reserve University  
Fulin Zuo,  
University of Miami

**Revisores do Guia de Estudo e Banco de Teste (Study Guide & Test Bank)<sup>†</sup>**

Anthony J. Buffa,  
California Polytechnic State University  
Mirela S. Fetea,  
University of Richmond  
James Garner,  
University of North Florida  
Tina Hartiott,  
Mount Saint Vincent, Canada  
Roger King,  
City College of San Francisco  
John A. McClelland,  
University of Richmond  
Chun Fu Su,  
Mississippi State University  
John A. Underwood,  
Austin Community College

**Revisores de Mídia**

Mick Arnett,  
Kirkwood Community College  
Coronel Rolf Enger,  
U.S. Air Force Academy  
John W. Farley,  
The University of Nevada at Las Vegas  
David Ingram,  
Ohio University  
Shawn Jackson,  
The University of Tulsa  
Dan MacIsaac,  
Northern Arizona University  
Peter E.C. Markowitz,  
Florida International University  
Dean Zollman,  
Kansas State University

<sup>†</sup>Este material refere-se à edição original em inglês e não consta da edição brasileira. (N.E.)

**Participantes do Grupo de Mídia**

**Edwin R. Jones,**  
University of South Carolina  
**William C. Kerr,**  
Wake Forest University  
**Taha Mzoughi,**  
Mississippi State University  
**Charles Niederriter,**  
Gustavus Adolphus College

**Cindy Schwarz,**  
Vassar College  
**Dave Smith,**  
University of the Virgin Islands  
**D.J. Wagner,**  
Grove City College  
**George Watson,**  
University of Delaware  
**Frank Wolfs,**  
University of Rochester

Estamos ainda em débito com os revisores das edições anteriores. Portanto, gostaríamos de agradecer aos seguintes revisores, que forneceram suporte indispensável durante o desenvolvimento da quarta edição:

**Michael Arnett,**  
Iowa State University  
**William Bassichis,**  
Texas A&M  
**Joel C. Berlinghieri,**  
The Citadel  
**Frank Blatt,**  
Michigan State University  
**John E. Byrne,**  
Gonzaga University  
**Wayne Carr,**  
Stevens Institute of Technology  
**George Cassidy,**  
University of Utah  
**I.V. Chivets,**  
Trinity College, University of Dublin  
**Harry T. Chu,**  
University of Akron  
**Jeff Culbert,**  
London, Ontario  
**Paul Debevec,**  
University of Illinois  
**Robert W. Detenbeck,**  
University of Vermont  
**Bruce Doak,**  
Arizona State University  
**John Elliott,**  
University of Manchester, Inglaterra  
**James Garland,**  
Aposentado  
**Ian Gatland,**  
Georgia Institute of Technology  
**Ron Gaulreau,**  
New Jersey Institute of Technology  
**David Gavenda,**  
University of Texas at Austin  
**Newton Greenberg,**  
SUNY Binghamton  
**Huidong Guo,**  
Columbia University

**Richard Haracz,**  
Drexel University  
**Michael Harris,**  
University of Washington  
**Randy Harris,**  
University of California at Davis  
**Dieter Hartmann,**  
Clemson University  
**Robert Hollebeek,**  
University of Pennsylvania  
**Madya Jalil,**  
University of Malaya  
**Monwhea Jeng,**  
University of California–Santa Barbara  
**Ilon Joseph,**  
Columbia University  
**David Kaplan,**  
University of California–Santa Barbara  
**John Kidder,**  
Dartmouth College  
**Boris Korsunsky,**  
Northfield Mt. Hermon School  
**Andrew Lang (pós-graduando),**  
University of Missouri  
**David Lange,**  
University of California–Santa Barbara  
**Isaac Leichter,**  
Jerusalem College of Technology  
**William Lichten,**  
Yale University  
**Robert Lieberman,**  
Cornell University  
**Fred Lipschultz,**  
University of Connecticut  
**Graeme Luke,**  
Columbia University  
**Howard McAllister,**  
University of Hawaii  
**M. Howard Miles,**  
Washington State University

Matthew Moelter, University of Puget Sound	Murray Scureman, Amdahl Corporation
Eugene Mosca, United States Naval Academy	Scott Sinawi, Columbia University
Aileen O'Donughue, St. Lawrence University	Wesley H. Smith, University of Wisconsin
Jack Ord, University of Waterloo	Kevork Spartalian, University of Vermont
Richard Packard, University of California	Kaare Stegavik, University of Trondheim, Norway
George W. Parker, North Carolina State University	Jay D. Strieb, Villanova University
Edward Pollack, University of Connecticut	Martin Tiersten, City College of New York
John M. Pratte, Clayton College and State University	Oscar Vilches, University of Washington
Brooke Pridmore, Clayton State College	Fred Watts, College of Charleston
David Roberts, Brandeis University	John Weinstein, University of Mississippi
Lyle D. Roelofs, Haverford College	David Gordon, Wilson, MIT
Larry Rowan, University of North Carolina at Chapel Hill	David Winter, Columbia University
Lewis H. Ryder, University of Kent, Canterbury	Frank L.H. Wolfe, University of Rochester
Bernd Schultler, University of Georgia	Roy C. Wood, New Mexico State University
Cindy Schwarz, Vassar College	Yuriy Zhestkov, Columbia University

Certamente, nosso trabalho jamais será completo. Esperamos continuar a receber comentários e sugestões de nossos leitores, de modo que possamos melhorar o texto e corrigir quaisquer erros eventuais. Se você acredita ter encontrado algum erro ou gostaria de fazer alguns comentários, sugestões ou tirar dúvidas, envie-nos um e-mail para [ltc@ltceditora.com.br](mailto:ltc@ltceditora.com.br). As correções serão incorporadas ao texto nas próximas reimpressões.

Finalmente, gostaríamos de agradecer aos nossos amigos da W. H. Freeman and Company por sua ajuda e encorajamento. Susan Brennan, Kathleen Civetta, Georgia Lee Hadler, Julia DeRosa, Margaret Comaskey, Dena Betz, Rebecca Pearce, Brian Donnellan, Jennifer Van Hove, Patricia Marx e Mark Santee foram extremamente generosos com seu trabalho árduo e criativo em cada estágio do processo. Estamos também agradecidos pela contribuição de Cathy Townsend e Denise Kadlubowski, da PreMediaONE, e pela ajuda de nossos colegas Larry Tankersley, John Ertel, Steve Montgomery e Don Treacy.

Paul Tipler  
Alameda, Califórnia

Gene Mosca  
Annapolis, Maryland

## Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, dos tradutores, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser enviados à LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico [ltc@lceditora.com.br](mailto:ltc@lceditora.com.br)

Paul  
Estadu  
paísc  
Purc  
estu  
Cor  
ty, em  
de iss  
ca. Es  
veu  
(196  
sidd  
Além  
exênc

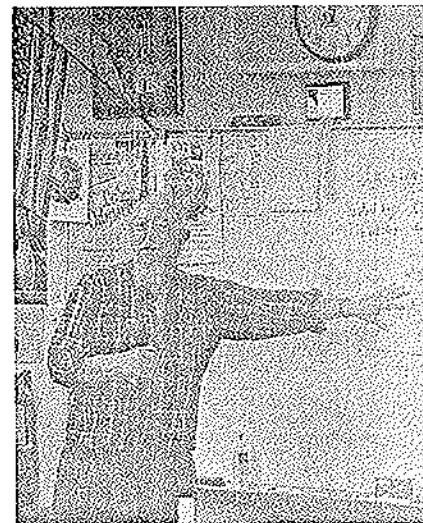
Ger  
Este  
Unive  
High  
1986.  
de E  
de c  
é o q

'Csto

## SOBRE OS AUTORES

### PAUL A. TIPLER

**Paul Tipler** nasceu em 1933 na pequena cidade rural de Antigo, Wisconsin, nos Estados Unidos. Ele se graduou em uma escola de Oshkosh, Wisconsin, onde seu pai foi superintendente de Escolas Públicas. Ele recebeu seu título de bacharel na Purdue University, em 1955, e o de Ph.D. na University of Illinois, em 1962, onde estudou a estrutura dos núcleos. Ensinou por um ano na Wesleyan University, em Connecticut, enquanto escrevia sua tese, em seguida foi para a Oakland University, em Michigan, onde se tornou um dos membros fundadores do departamento de física, dando grandes contribuições ao desenvolvimento dos currículos de física. Durante os 20 anos seguintes lecionou quase todos os cursos de física e escreveu a primeira e a segunda edições de seus livros, muito usados, *Modern Physics* (1969, 1978) e *Physics* (1976, 1982). Em 1982 foi para Berkeley, Califórnia, onde reside atualmente, e escreveu *College Physics* (1987) e a terceira edição de *Physics* (1991). Além da física, seu interesse inclui música, caminhadas e acampamentos, e é um excelente pianista de jazz e jogador de pôquer.



### GENE MOSCA

**Gene Mosca** nasceu na cidade de Nova York e cresceu em Shelter Islands, N.Y. Estudou na Villanova University e se graduou na University of Michigan e na University of Vermont, onde recebeu seu Ph.D. em 1974. Lecionou na Southampton High School, na University of South Dakota e na Emporia State University. Desde 1986 Gene leciona na U.S. Naval Academy. Lá ele coordenou o núcleo dos cursos de física por 16 semestres, e instituiu diversas inovações no laboratório e nas salas de aula. Proclamado por Paul Tipler como "o melhor revisor que eu tive", Mosca é o autor do popular Guia de Estudo<sup>†</sup> para a terceira e a quarta edições deste livro.



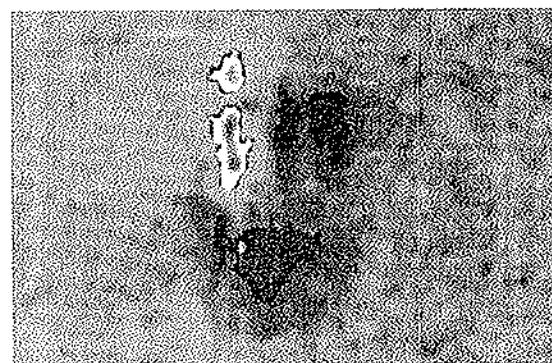
<sup>†</sup>Este material se refere à edição original em inglês e não consta da edição brasileira. (N.E.)

## **Encarte em Cores**

As páginas que se seguem contêm um conjunto selecionado de figuras que reproduzem, em cores, fenômenos físicos e experimentos relacionados com eletricidade, magnetismo e ótica.

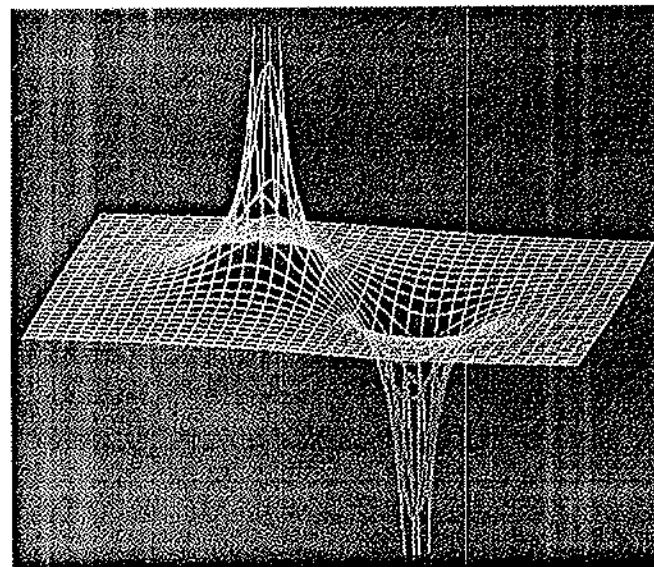
As figuras estão identificadas por capítulo.

# *Capítulo 21*



**Carga por contato.** Um pedaço de plástico de aproximadamente 0,02 mm foi carregado por contato com um pedaço de níquel. Embora o plástico fique com uma carga resultante positiva, a fotografia mostra que existem regiões com carga negativa (manchas escuras) e regiões com carga positiva (manchas claras). A fotografia foi tirada pela varredura de uma agulha carregada com espessura de  $10^{-7}$  m sobre a amostra com o registro da força eletrostática atuante sobre ela.

# *Capítulo 23*

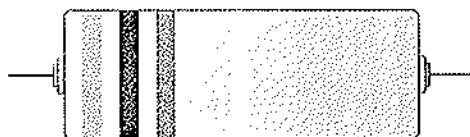


**Potencial eletrostático no plano de um dipolo.** O potencial devido a cada uma das cargas é proporcional à carga e inversamente proporcional à distância da carga.

# Capítulo 25

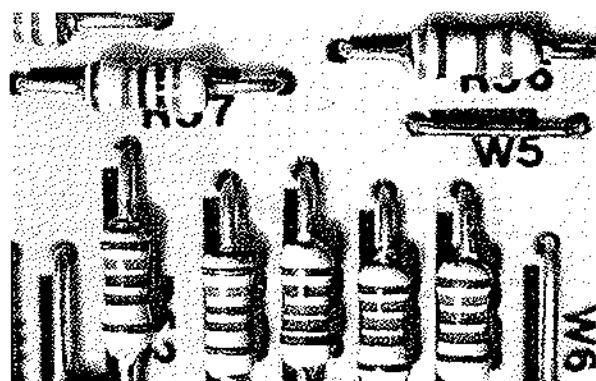
TABELA 25-3

## Código de Cores para os Resistores e Outros Elementos



Cores Número	Tolerância
Preto = 0	Marrom = 1%
Marrom = 1	Vermelho = 2%
Vermelho = 2	Ouro = 5%
Laranja = 3	Prata = 10%
Amarelo = 4	Nenhuma = 20%
Verde = 5	
Azul = 6	
Violeta = 7	
Cinza = 8	
Branco = 9	

As tarjas coloridas devem ser lidas partindo-se da mais próxima da extremidade do resistor. As primeiras duas tarjas representam um número inteiro entre 1 e 99. A terceira tarja indica a quantidade de zeros a seguir. Para o resistor mostrado, as cores das primeiras três tarjas são, respectivamente, laranja, preta e azul. Assim, o número é 30.000.000, indicando uma resistência de  $30\text{ M}\Omega$ . A quarta tarja é a da tolerância. Se a quarta tarja é cinza, conforme indicado nesse exemplo, a tolerância é de 10%. Dez por cento de 30 = 3, logo a resistência desse resistor vale  $(30 \pm 3)\text{ M}\Omega$ .



Resistores de carbono codificados por cores em um circuito.

# Capítulo 26

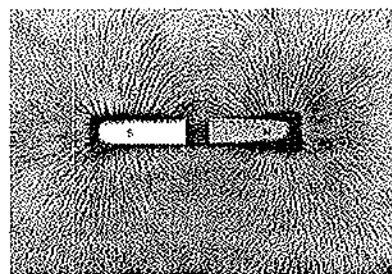
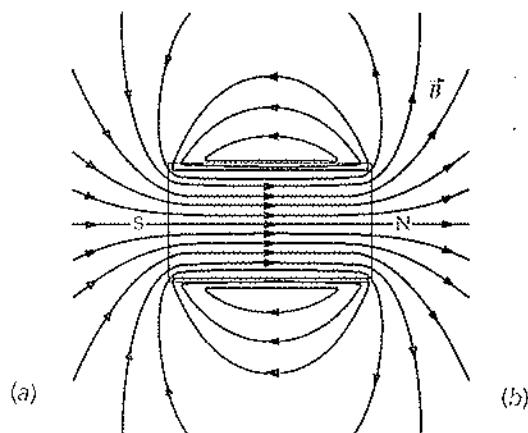
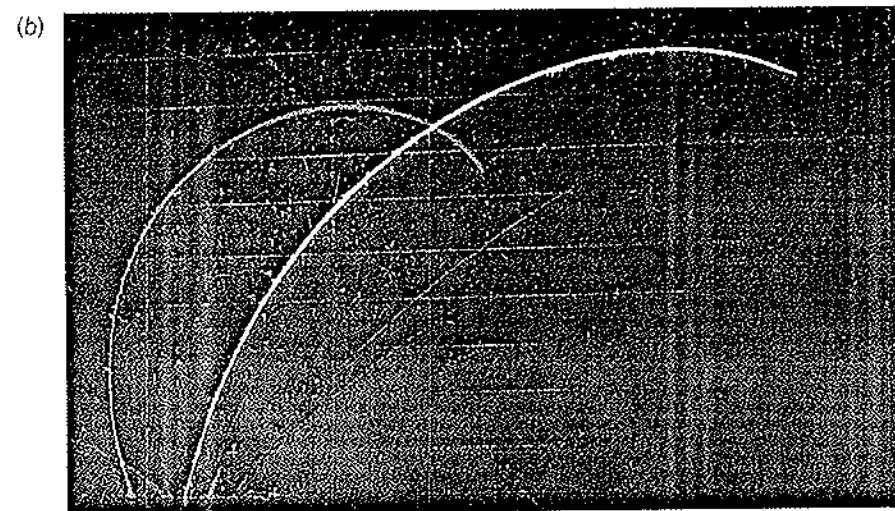


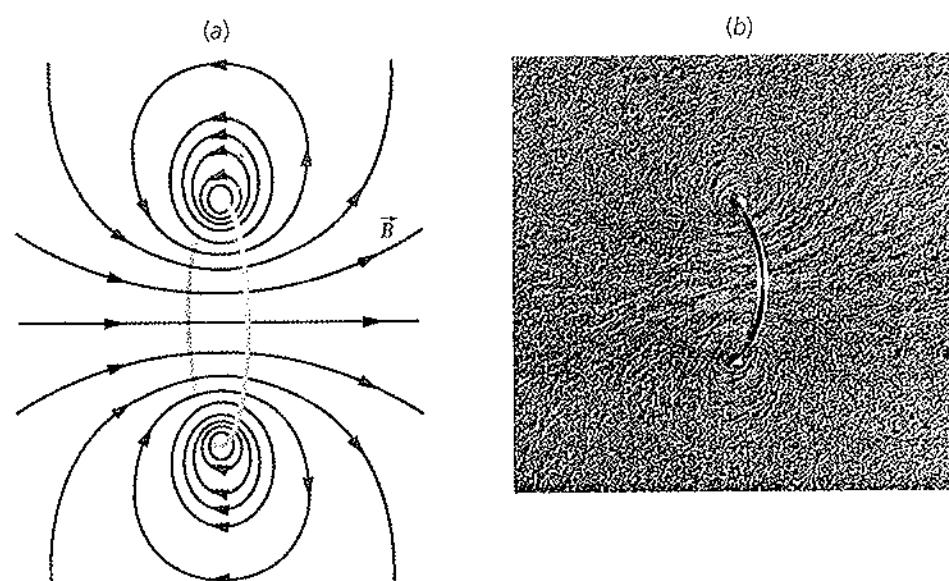
FIGURA 26-8

(a) Linhas de campo magnético internas e externas em uma barra de ímã. As linhas emergem do polo norte e entram no polo sul, mas elas não têm início ou final. Em vez disso, elas formam espiras fechadas. (b) Linhas de campo magnético externas a uma barra imantada indicadas por filetes de ferro.



(b) Uma fotografia com falso colorido mostrando o percurso de um próton de 1,6 MeV (vermelho) e uma partícula  $\alpha$  de 7 MeV (amarelo) em uma câmara escura. O raio de curvatura é proporcional à quantidade de movimento e inversamente proporcional à carga da partícula. Para essas energias, a quantidade de movimento da partícula  $\alpha$ , que tem duas vezes a carga do próton, é cerca de quatro vezes maior que aquela do próton, e então seu raio de curvatura é maior.

## Capítulo 27

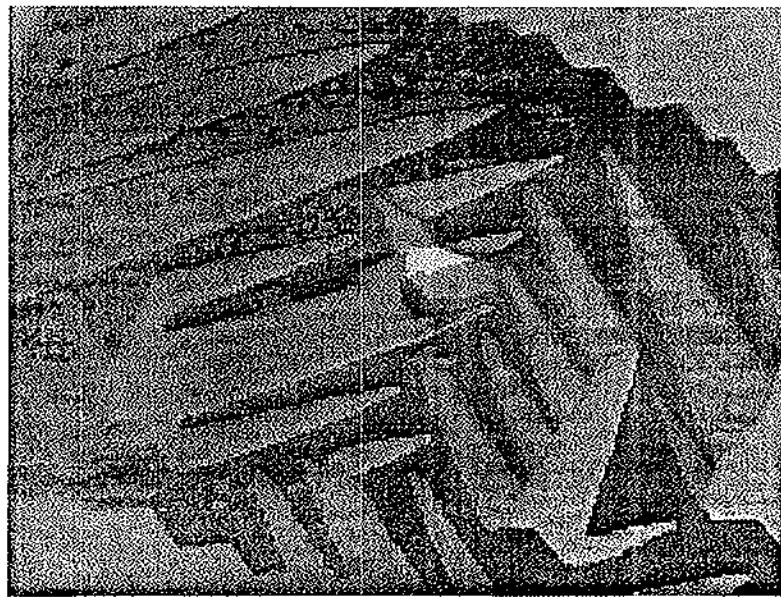


**FIGURA 27-6**

(a) Linhas de campo magnético de uma espira circular com corrente. (b) Linhas de campo magnético de uma espira circular com corrente indicadas por limalhas de ferro.



(a)

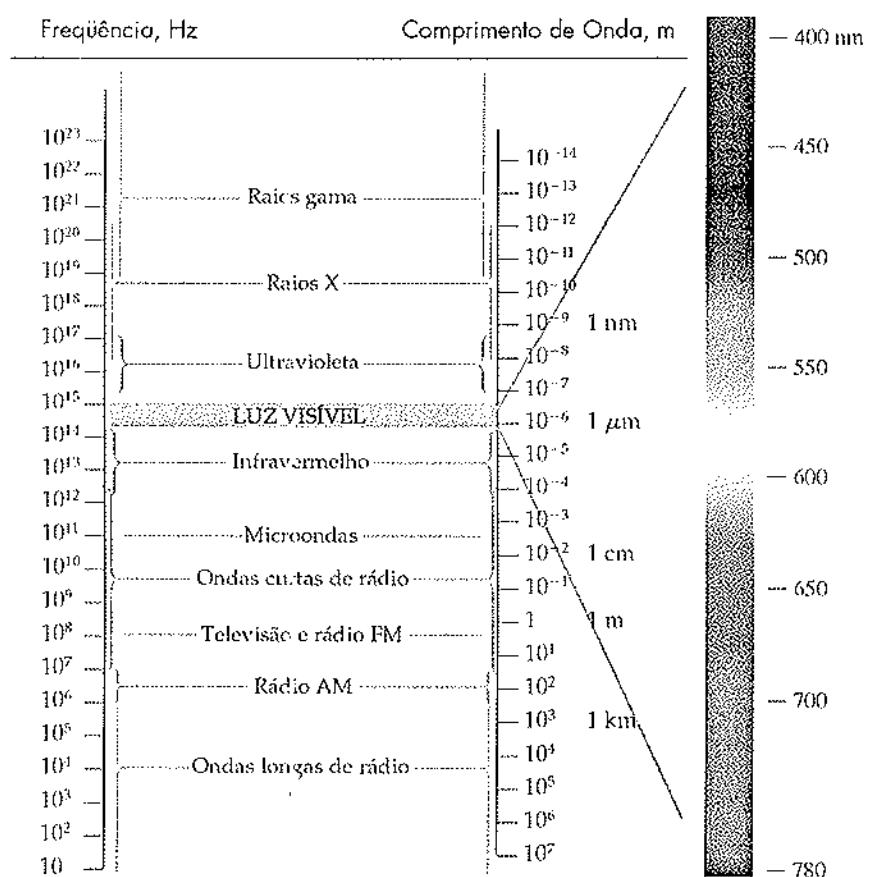


**FIGURA 27-37**

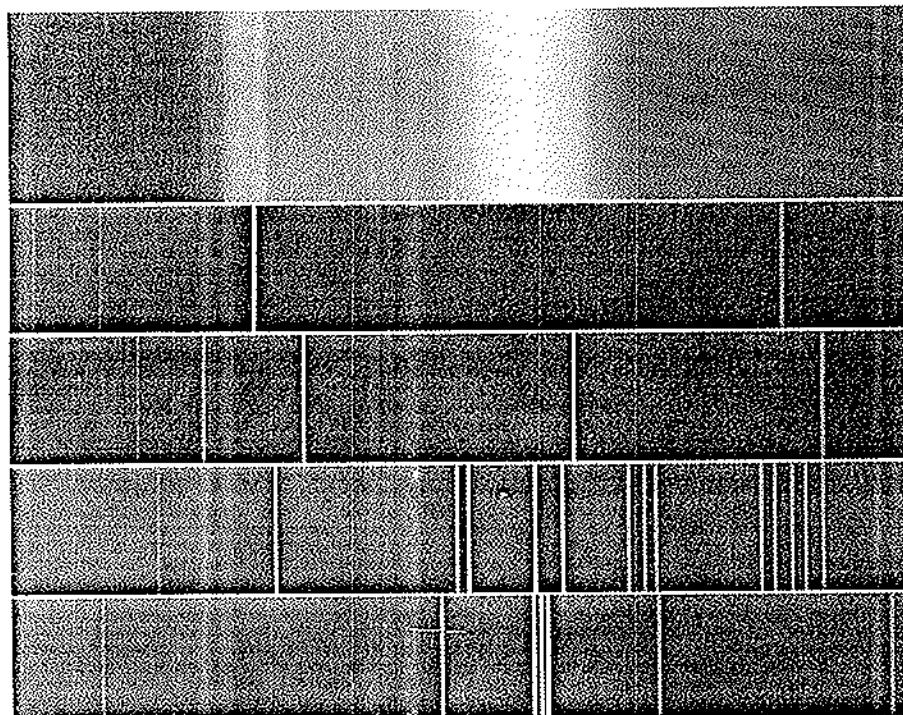
(a) Ilustração esquemática de um domínio ferromagnético. Dentro de um domínio, os dipólos magnéticos estão alinhados, mas a direção de alinhamento varia de domínio para domínio de tal modo que o momento magnético líquido é nulo. Um pequeno campo magnético externo pode causar um aumento daqueles domínios que estão alinhados paralelamente ao campo, ou pode causar uma rotação no alinhamento interno de um domínio. Em qualquer caso, o resultado é um momento magnético líquido paralelo ao campo. (b) Domínios magnéticos sobre a superfície de um cristal de Fe com 3% de Si observados usando um microscópio eletrônico de varredura com análise de polarização. Os diferentes tons de cinza indicam quatro possíveis orientações dos domínios.

## Capítulo 30

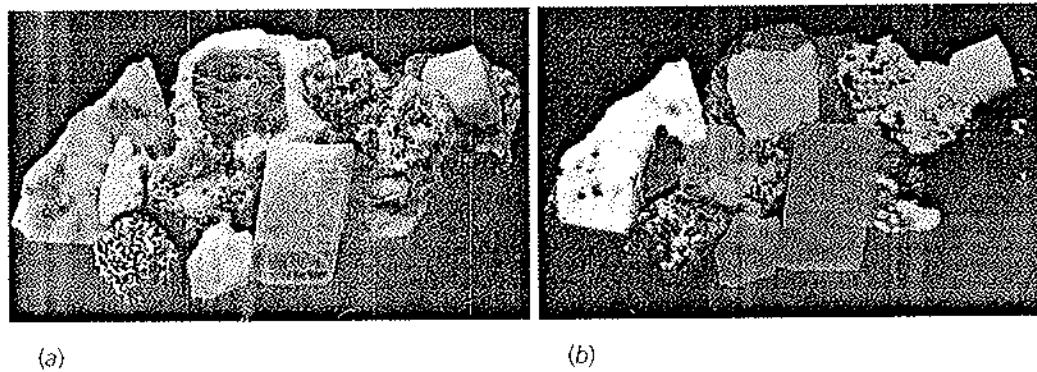
TABELA 30-1  
O Espectro Eletromagnético



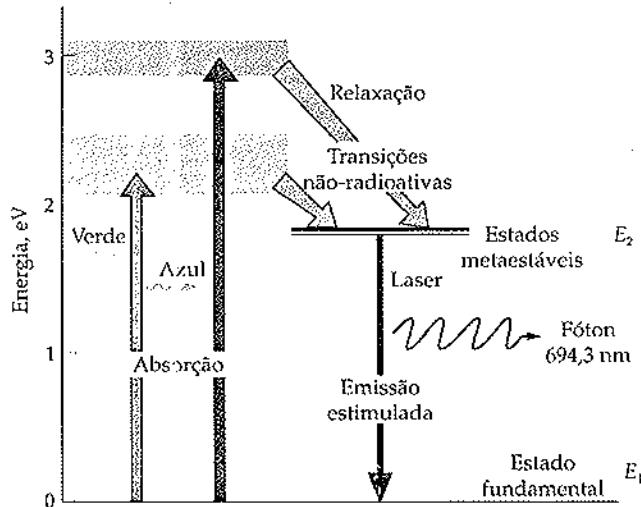
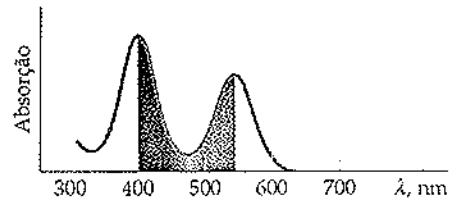
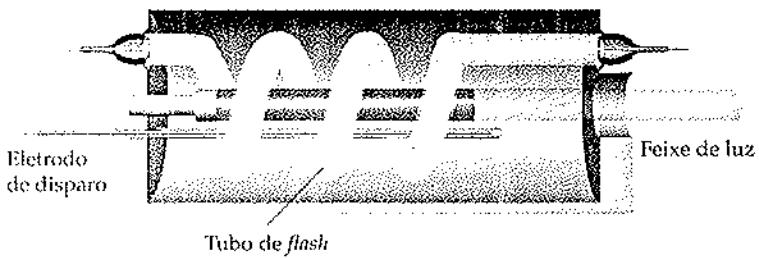
# Capítulo 31

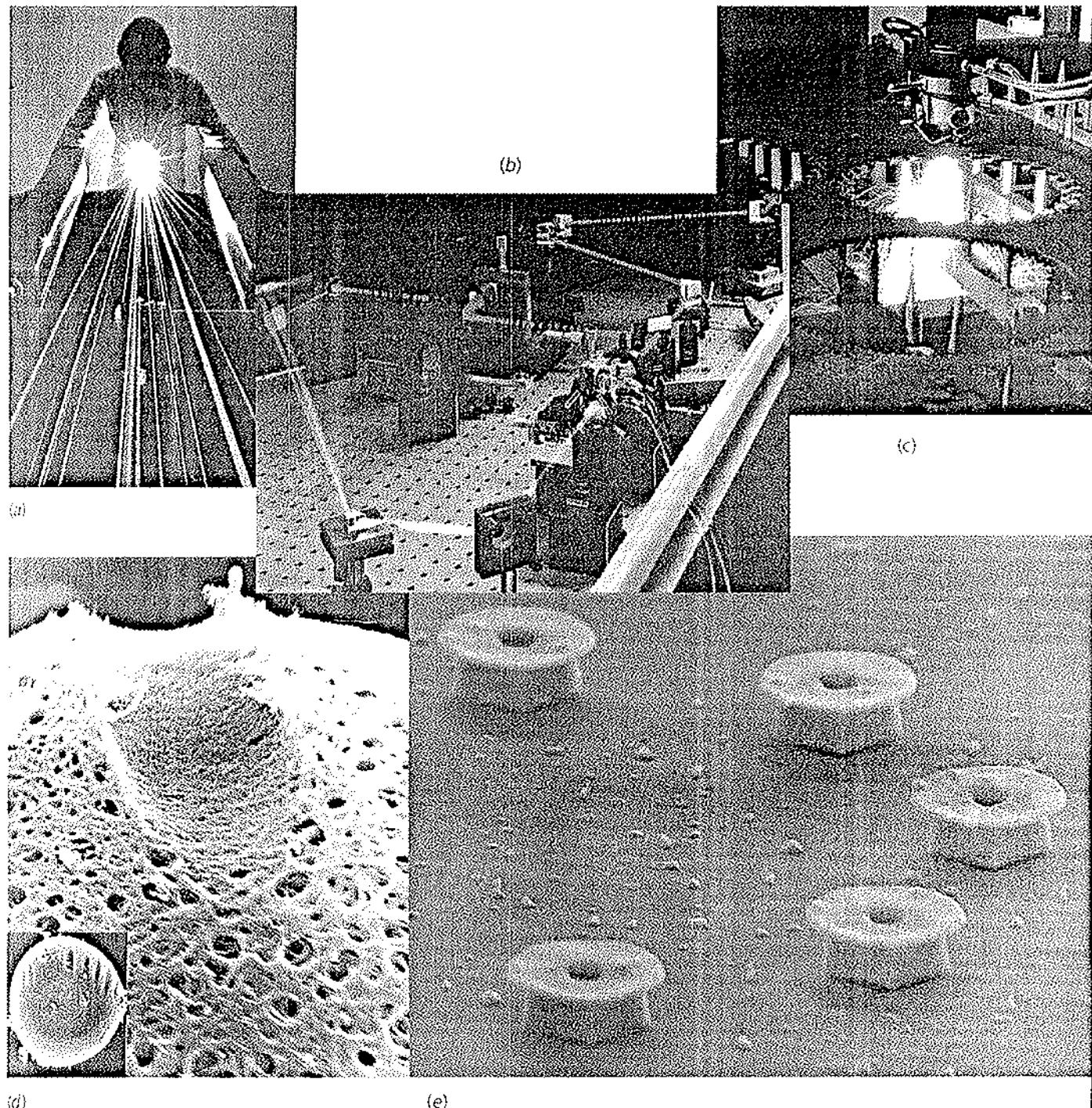


O espectro contínuo visível (topo) e as linhas espectrais (do topo para baixo) do hidrogênio, hélio, bário e mercúrio.



Uma coleção de minerais (a) na luz do dia e (b) na luz ultravioleta (algumas vezes chamada de *luz negra*). Identificados pelos números no esquema (c), eles são 1, powerlita; 2, vilemita; 3, scheelita; 4, calcita; 5, composto de calcita e vilemita; 6, calcita ótica; 7, vilemita; e 8, opal. A variação na cor é devida à fluorescência sob luz ultravioleta. Na calcita ótica ocorre tanto fluorescência quanto fosforescência.





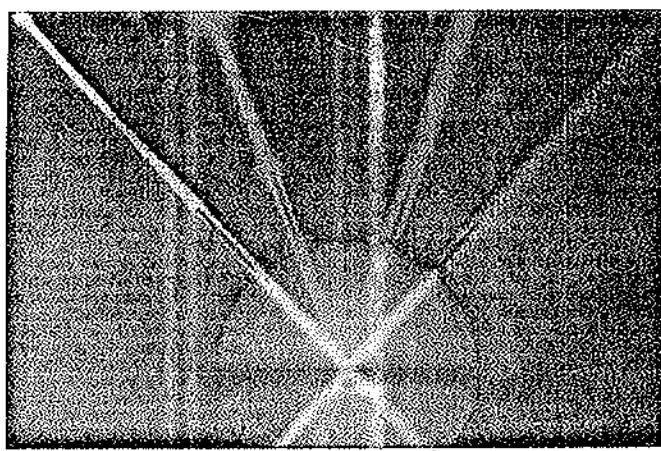
(a) Feixes de um laser de criptônio e de um laser de argônio, divididos em suas componentes de comprimento de onda distintos. Nesses lasers a gás, os átomos de argônio e criptônio têm múltiplos elétrons retirados, formando íons positivos. As transições de energia que emitem luz ocorrem quando elétrons excitados nos íons decaem de um nível de energia superior para outro. Aqui, diversas transições de energia estão ocorrendo, cada uma correspondendo a uma luz emitida de diferente comprimento de onda.

(b) Um laser pulsado de femtossegundo. Através de uma técnica conhecida como *modelocking*, diferentes modos podem ser excitados dentro de uma cavidade laser para interferir uns com os outros e criar uma série de pulsos ultracurtos, que têm duração de picossegundos, correspondente ao tempo que a luz leva para sair e entrar uma vez da cavidade. Pulsos ultracurtos têm sido usados no estudo do comportamento de moléculas durante reações químicas.

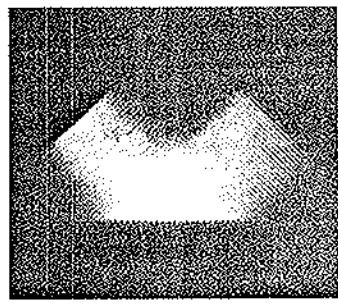
(c) Um laser de dióxido de carbono leva apenas dois minutos para cortar uma lâmina de aço.

(d) Uma cavidade cortada na zona pelúcida (cobertura externa de proteção) de um óvulo de rato feita por uma *tesoura laser* facilita a implantação. Essa técnica já está sendo aplicada em terapias de fertilidade humana. Vários efeitos contribuem para a capacidade de um laser finamente focado para cortar em escala tão delicada — a absorção de fótons para aquecer o alvo, romper as ligações moleculares ou direcionar reações químicas.

(e) Os chamados nanolasers mostrados na figura são discos semicondutores de poucos micrões de diâmetro e de frações de micrões de altura. Esses pequenos lasers trabalham da mesma maneira que os de tamanho maior. Explorando os efeitos quânticos que prevalecem nessa escala microscópica, os nanolasers possuem grande eficiência, e estão sendo explorados como dispositivos ultra-rápidos de troca de pequena quantidade de energia.



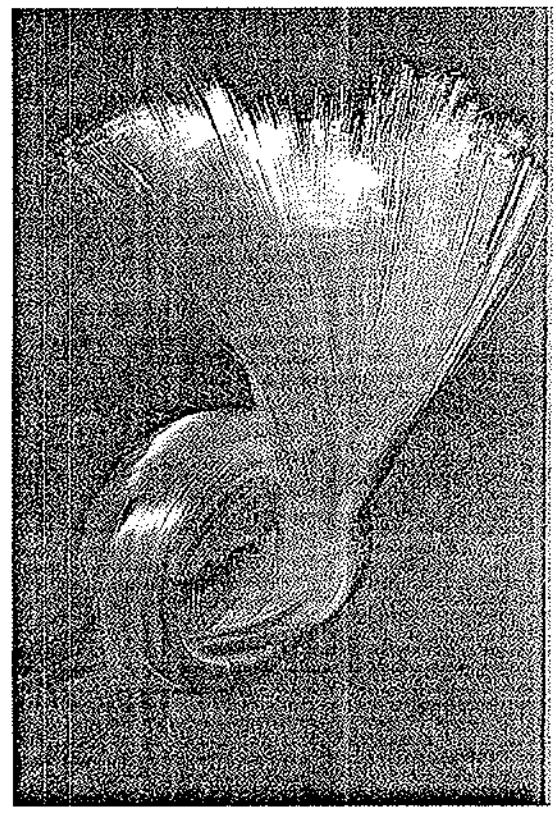
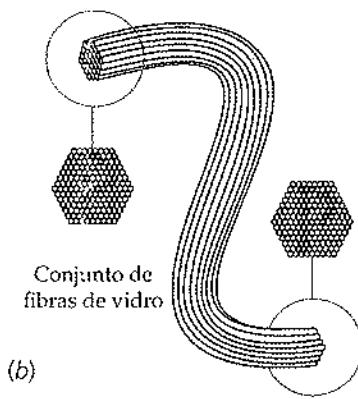
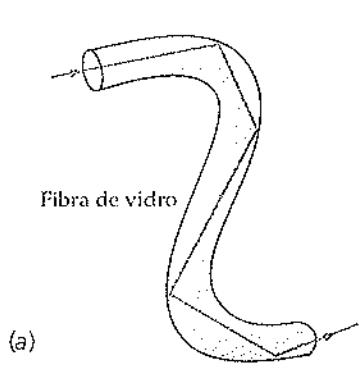
(a)



(b)

**FIGURA 31-19**

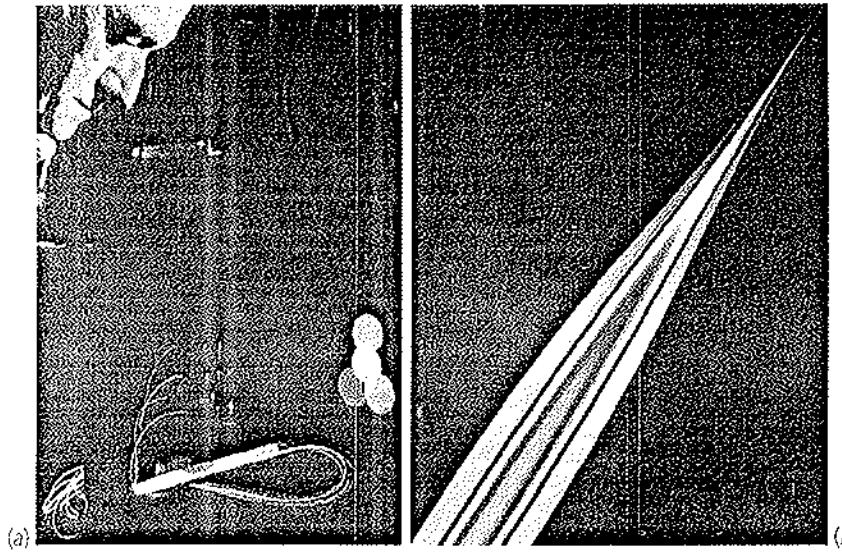
(a) Raios de luz refletindo de uma interface ar-vidro mostrando ângulos iguais de incidência e reflexão. (b) Ondas ultra-sônicas planas na água refletindo de uma placa de aço.



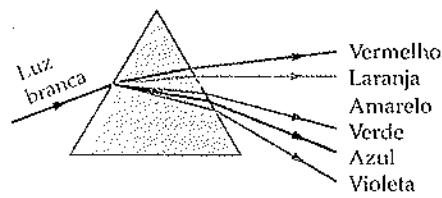
**FIGURA 31-27**

(a) Um tubo de luz. A luz interna do tubo é sempre incidente em um ângulo maior que o ângulo crítico, então não escapa luz do tubo por refração. (b) A luz de um objeto é transportada por um maço de fibras de vidro para formar uma imagem do objeto na outra extremidade do tubo. (c) Luz emergindo de um maço de fibras de vidro.

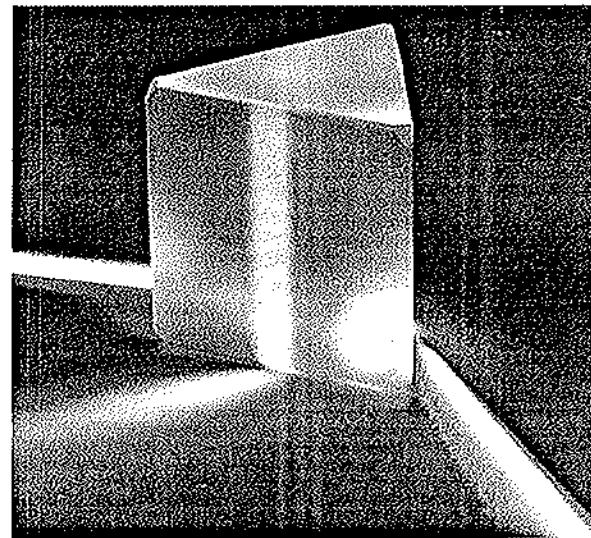
(c)



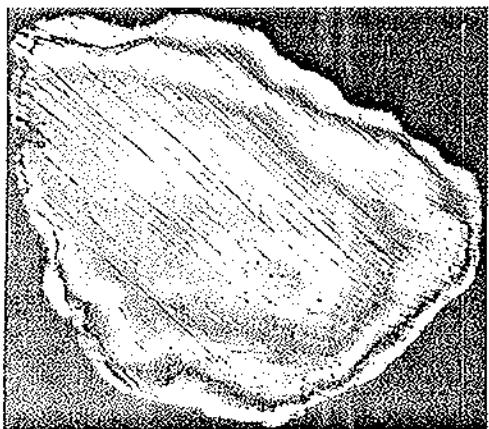
(a) Nesta demonstração do Naval Research Laboratory (Laboratório de Pesquisa Naval dos EUA), uma combinação de fontes laser gera diferentes cores que excitam elementos sensores de fibra próximos, levando à separação da informação como indicado pela separação das cores. (b) A forma da ponta de um guia de luz é gerada por calor e desenhada em uma fibra longa e fina. As cores indicam a estrutura de diferentes composições que é mantida na fibra.



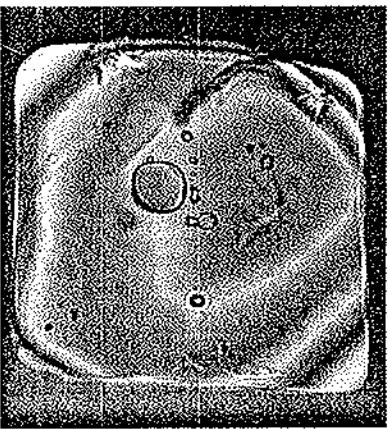
**FIGURA 31-30**  
Um feixe de luz branca incidente sobre um prisma de vidro é dispersado em suas cores componentes. O índice de refração diminui conforme o comprimento de onda aumenta, de tal modo que comprimentos de onda mais longos (vermelho) são menos curvados que os comprimentos de onda mais curtos (violeta).



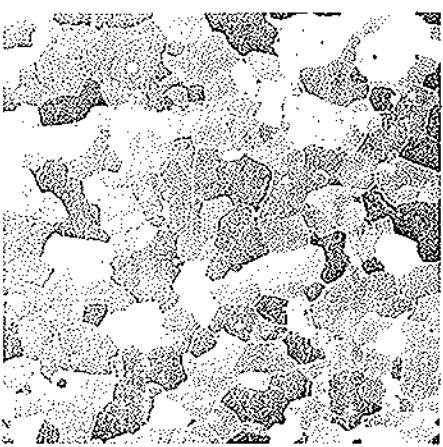
(a)



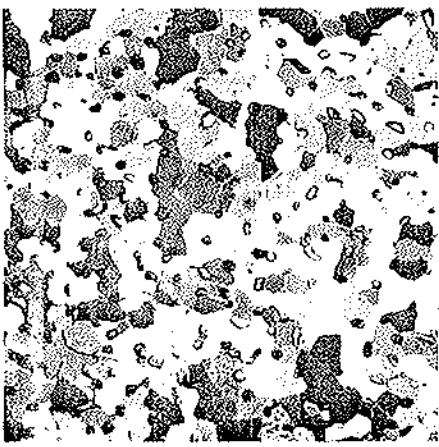
(b)



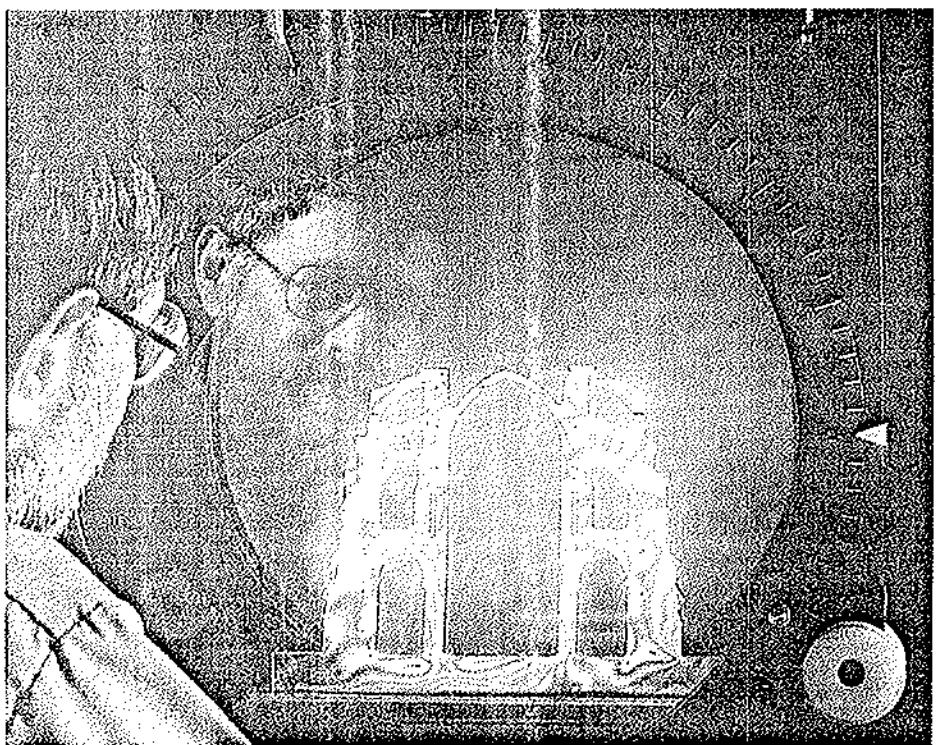
(c)



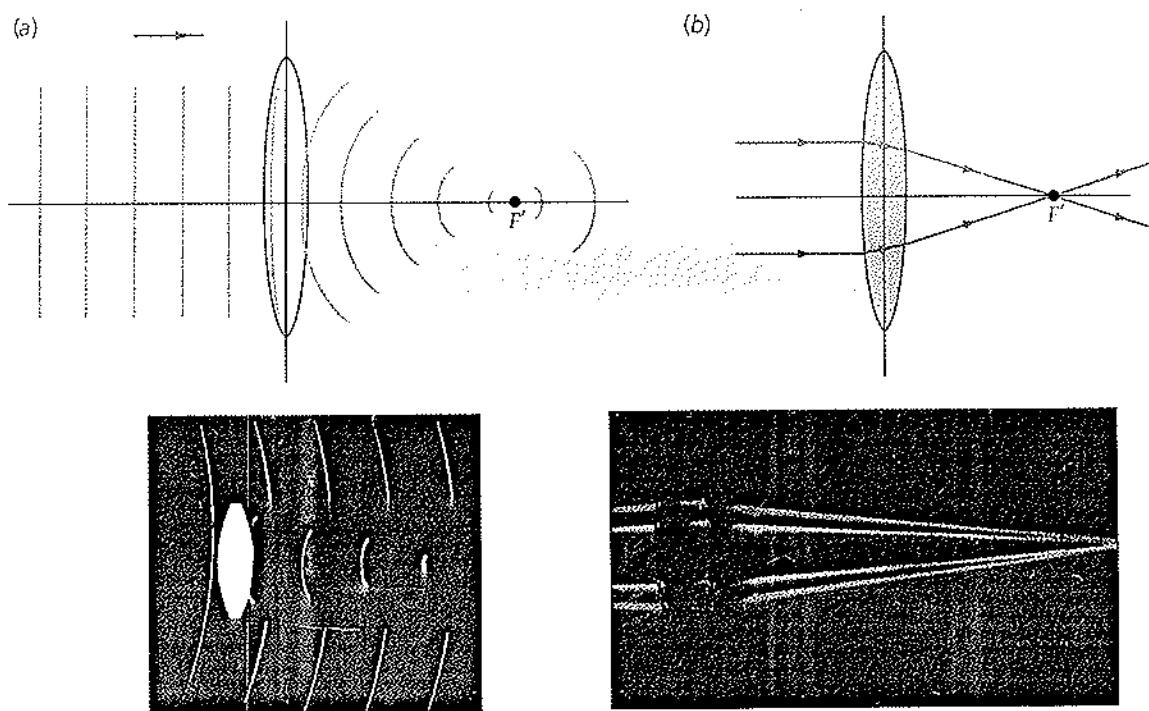
(d)



(e)

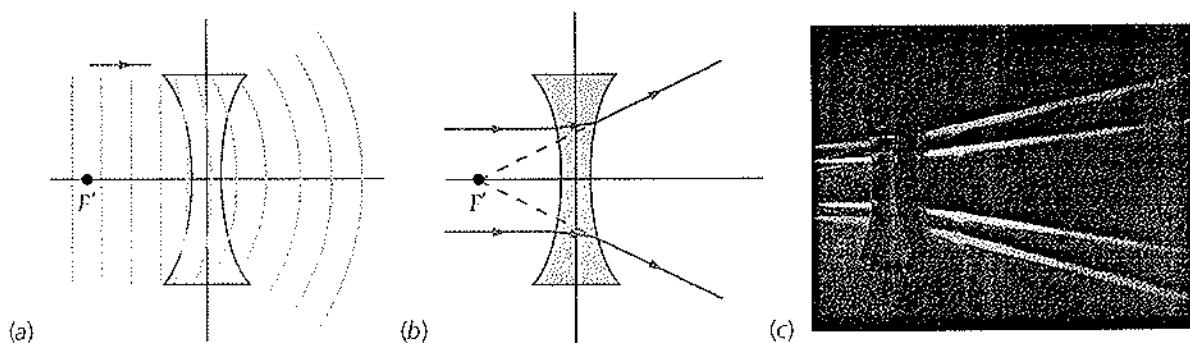


Quando os eixos de transmissão de duas películas polarizantes são perpendiculares, os polarizadores são ditos cruzados e a luz não é transmitida. Entretanto, vários materiais são birrefringentes ou se tornam sob tensão. Tais materiais giram a direção de polarização da luz de tal modo que a luz de um comprimento de onda específico é transmitida através de ambos os polarizadores. Quando um material birrefringente é visto entre dois polarizadores cruzados, informação sobre sua estrutura interna é revelada. (a) Um grão de quartzo de uma cratera resultante da queda de um meteorito. A estrutura em camadas, evidenciada pelas linhas paralelas, surge devido ao impacto do meteorito. (b) Um grão de quartzo tipicamente encontrado em rochas de sílica vulcânica. Não são vistas linhas de choque. (c) Seções finas do núcleo de gelo antártico revelam bolhas capturadas de CO<sub>2</sub>, que aparecem na cor âmbar. Esta amostra foi obtida em uma profundidade de 194 m, correspondente ao ar capturado há 1600 anos, enquanto a amostra em (d) é de uma profundidade de 56 m, correspondente ao ar capturado há 450 anos. Medidas do núcleo do gelo substituíram técnicas menos confiáveis de análise para comparar o nível de CO<sub>2</sub> na atmosfera atual com aqueles existentes no passado. (e) Robert Mark, da Escola de Arquitetura de Princeton, examina os padrões de tensão em um modelo plástico da estrutura da nave da Catedral de Chartres.



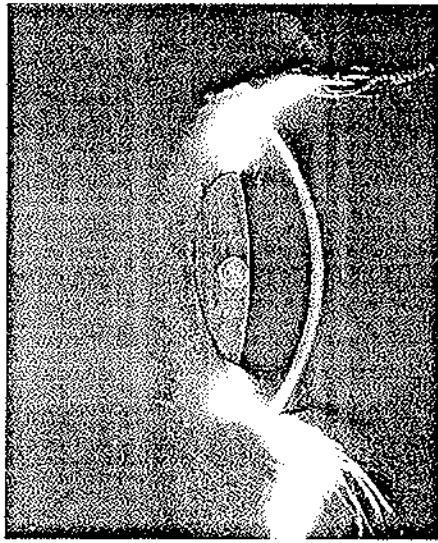
**FIGURA 32-29**

(a) Em cima: frentes de onda para ondas planas atingindo uma lente convergente. A parte central da frente de onda é mais retardada pela lente do que as partes externas, resultando em uma onda esférica que converge no ponto focal  $F'$ . Embaixo: frentes de onda passando através de uma lente, mostradas por uma técnica fotográfica chamada de gravação da luz em movimento, que usa um laser pulsado para fazer um holograma das frentes de onda da luz. (b) Em cima: raios para ondas planas atingindo uma lente convergente. Os raios são curvados em cada superfície e convergem no ponto focal. Embaixo: uma fotografia dos raios focados por uma lente convergente.

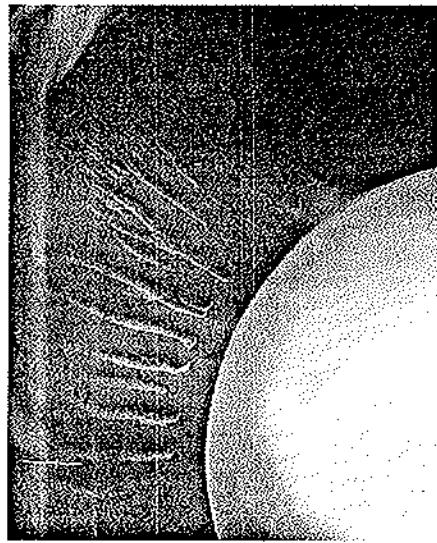


**FIGURA 32-30**

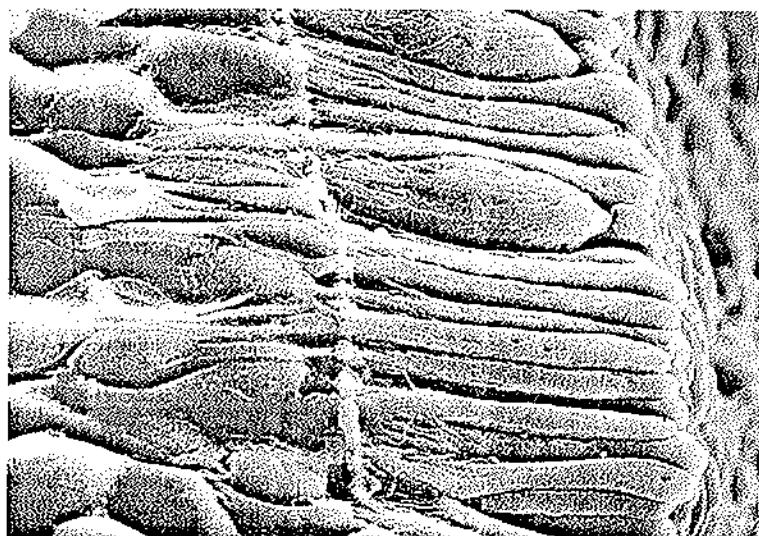
(a) Frentes de onda para ondas planas atingindo uma lente divergente. Aqui, a parte externa da frente de onda é mais retardada que a parte central, resultando em uma onda esférica que diverge conforme se move para fora, como se ela tivesse vindo do ponto focal  $F'$  à esquerda da lente. (b) Raios para ondas planas atingindo a mesma lente divergente. Os raios são curvados para fora e divergem, como se eles tivessem vindo do ponto focal  $F'$ . (c) Uma fotografia dos raios passando através de uma lente divergente.



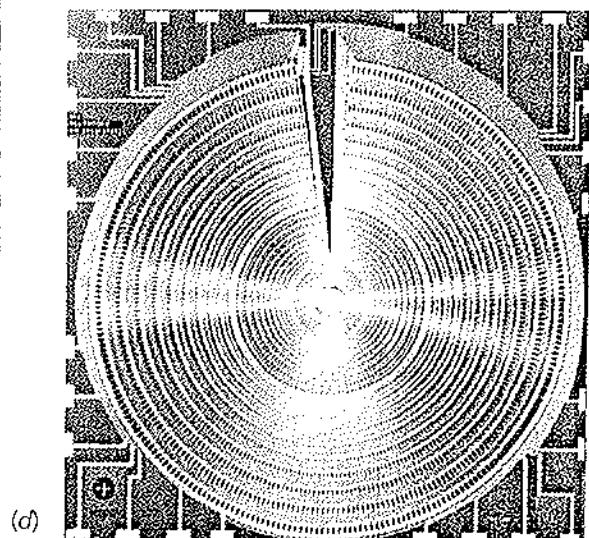
(a)



(b)



(c)

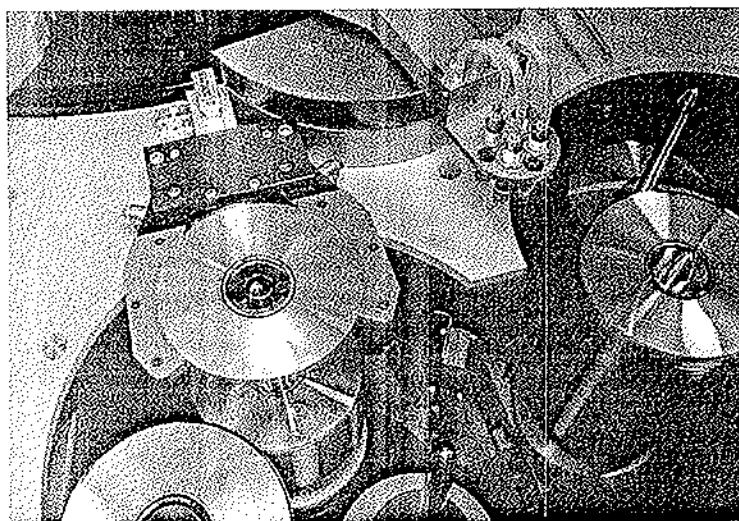


(d)

(a) O olho humano de perfil. (b) O cristalino do olho é mantido na posição pelo músculo ciliar (mostrado aqui na parte superior esquerda), que envolve o cristalino. Quando o músculo ciliar se contraí, o cristalino tende a se dilatar. A maior curvatura do cristalino permite que o olho focalize objetos próximos. (c) Alguns dos 120 milhões de bastonetes e 7 milhões de cones do olho, ampliados aproximadamente 5.000 vezes. Os bastonetes (os mais delgados dos dois) são mais sensíveis na obscuridade, enquanto os cones são mais sensíveis às cores. Os bastonetes e os cones formam a camada do fundo da retina e são cobertos por células nervosas, vasos sanguíneos e células de suporte. A maior parte da luz que entra nos olhos é refletida e absorvida antes de atingir os bastonetes e os cones. A luz que os atinge dispara impulsos elétricos ao longo das fibras dos nervos ópticos que chegam ao cérebro. (d) Uma rede neural usada no sistema de visão de certos robôs. Imitando pobramente um olho humano, ela contém 1920 sensores.

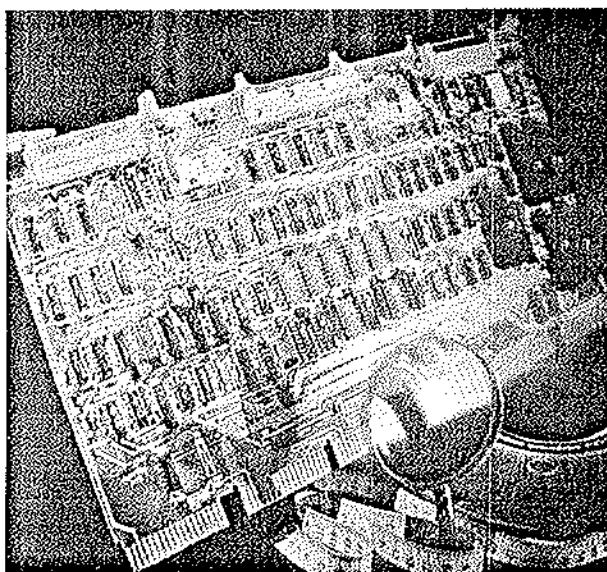
(a)

Um  
colocad

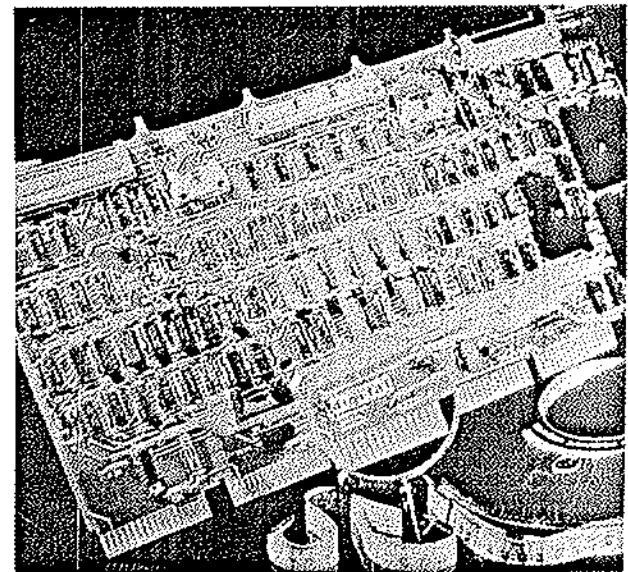


Os discos compactos (CD) atuam como redes de difração.

(a)



(b)

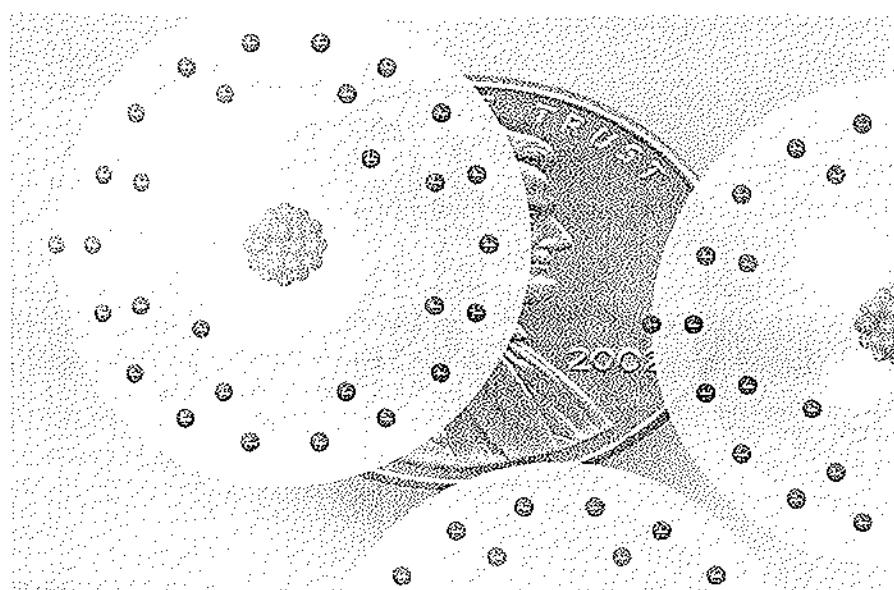


Um holograma visto de dois ângulos diferentes. Note que diferentes partes da placa de circuitos parecem atrás da lente de aumento colocada em primeiro plano.



### O Campo Elétrico I: Distribuições Discretas de Cargas

# 21



O COBRE É UM CONDUTOR, MATERIAL COM PROPRIEDADES ESPECÍFICAS QUE TORNAM POSSÍVEL O TRANSPORTE DA ELETRICIDADE. A ELETRICIDADE UTILIZADA PARA ACIONAR AS MÁQUINAS É RESPONSÁVEL PELOS ÁTOMOS DE COBRE EM SI MESMOS: OS ÁTOMOS SÃO MANTIDOS UNIDOS POR FORÇAS ELÉTRICAS.

 Qual é a carga total de todos os elétrons presentes em uma moeda de cobre? (Veja o Exemplo 21-1.)

- 21-1 Carga Elétrica
- 21-2 Condutores e Isolantes
- 21-3 Lei de Coulomb
- 21-4 O Campo Elétrico
- 21-5 Linhas de Campo Elétrico
- 21-6 Movimento das Cargas Puntiformes nos Campos Elétricos
- 21-7 Dipolos Elétricos nos Campos Elétricos

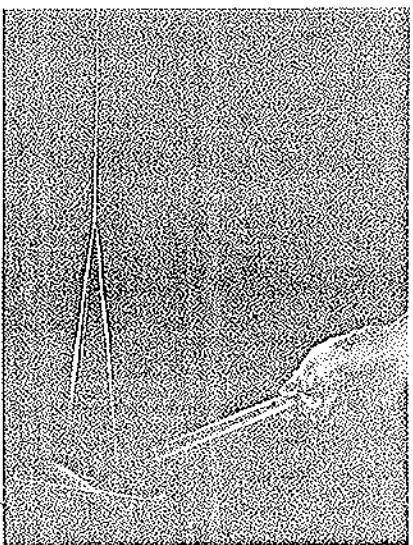
 Enquanto há exatamente um século não havia mais do que umas poucas lâmpadas elétricas, atualmente a humanidade está extremamente dependente da eletricidade em sua vida cotidiana. Embora o uso generalizado da eletricidade ainda seja recente, seu estudo teve uma longa trajetória de pesquisa antes de a primeira lâmpada elétrica ser acesa. As observações dos fenômenos elétricos remontam aos ancestrais gregos, que notaram que atritando o âmbar ele atraía pequenos objetos, como fragmentos de palha ou penas. Na realidade, a palavra *elétrico* tem sua origem na palavra grega que significa âmbar, *elektron*.

Neste capítulo, inicia-se o estudo da eletricidade com a *eletrostática*, o estudo das cargas elétricas em repouso. Após a introdução do conceito de carga elétrica, analisam-se brevemente os condutores e isolantes, e como os condutores podem fornecer uma carga resultante. Em seguida analisa-se a lei de Coulomb, que descreve a força exercida por uma carga elétrica sobre outra. Introduz-se, a seguir, o conceito de campo elétrico, e mostra-se como ele pode ser visualizado através das linhas de campo elétrico, que indicam o módulo e a direção do campo, da mesma forma que foi visualizado o campo de velocidades no escoamento de um fluido através das linhas de corrente (Capítulo 13). Finalmente, discute-se o comportamento das cargas puntiformes e dos dipolos na presença de campos elétricos.

## 21-1 Cargas Elétricas

Imagine que uma barra de plástico seja friccionada com uma pele e, em seguida, suspensa utilizando um fio, de modo que ela fique livre para girar. Agora, aproxime dessa barra uma segunda barra de plástico friccionada, similar à primeira. Você perceberá que as barras se repelem mutuamente (Figura 21-1). O mesmo resultado será obtido se forem utilizados dois bastões de vidro que tenham sido friccionados com um tecido de seda. Todavia, ao se colocar uma barra de plástico friccionada com pele próxima ao bastão de vidro friccionado com seda eles se atraíram mutuamente.

Ao se atritar uma barra ela fica carregada eletricamente. Repetindo o experimento com diversos materiais, verifica-se que todos os corpos carregados podem ser classificados em dois grupos — aqueles como o plástico friccionado com pele e aqueles como o bastão de vidro friccionado com seda. Os corpos de um dos grupos se repelem entre si, enquanto os corpos do outro grupo se atraem mutuamente. Benjamin Franklin explicou esse fenômeno propondo um modelo em que todo corpo possui uma certa quantidade *normal* de eletricidade que pode ser transferida de um corpo para outro quando os dois entram em contato, como no caso em que são atritados entre si. O atrito deixa um corpo com excesso de carga e o outro com falta de carga na mesma quantidade que o excesso. Franklin descreveu as cargas resultantes com os sinais mais (positivo) e menos (negativo), definindo como positiva a carga adquirida pelo bastão de vidro quando é friccionado com um pedaço de seda. O pedaço de seda adquiriu uma carga negativa de mesmo módulo durante o processo. Com base na convenção de Franklin, o plástico friccionado com uma pele adquire uma carga negativa e a pele fica com uma carga positiva. Dois corpos que possuem o mesmo tipo de carga se repelem entre si, e dois corpos que possuem cargas opostas se atraem mutuamente (Figura 21-2).



**FIGURA 21-1**

Duas barras de plástico que foram friccionadas com uma pele se repelem mutuamente.

**TABELA 21-1**

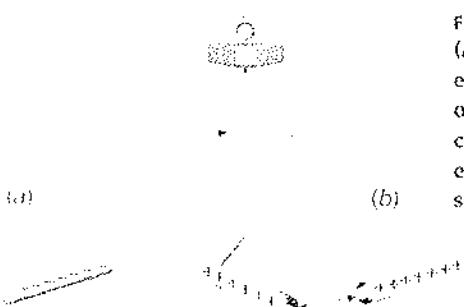
### A Série Triboelétrica

#### (+) Extremidade Positiva da Série

Amianto  
Vidro  
Náilon  
Madeira  
Couro  
Prata

Alumínio  
Papel  
Algodão  
Aço  
Plástico  
Níquel e cobre  
Bronze e prata  
Borracha sintética  
Orlon (tipo de acrílico)  
Saran (tipo de plástico)  
Polietileno  
Teflon  
Borracha de silicone

#### (-) Extremidade Negativa da Série



**FIGURA 21-2**  
(a) Os corpos com cargas elétricas de sinais opostos se atraem. (b) Os corpos com cargas elétricas de mesmo sinal se repelem.

Atualmente, sabe-se que quando o vidro é atritado com seda os elétrons são transferidos do vidro para a seda. Uma vez que a seda é carregada negativamente (de acordo com a convenção de Franklin, ainda utilizada), os elétrons são considerados partículas que carregam cargas negativas. A Tabela 21-1 é uma

**versão resumida da série triboelétrica.** (Em grego, *tribos* significa "fricção".) Quanto mais baixo o material se encontra nessa série, maior será sua afinidade com os elétrons. Se dois desses materiais forem colocados em contato, os elétrons serão transferidos do material mais acima para o material mais abaixo na tabela. Por exemplo, se o Teflon for friccionado com o náilon, os elétrons serão transferidos do náilon para o Teflon.

### Quantização da Carga

A matéria é constituída por átomos que são eletricamente neutros. Cada átomo possui um núcleo maciço cuja massa é minúscula e contém prótons e nêutrons. Os prótons possuem carga positiva, enquanto os nêutrons não são carregados. A quantidade de prótons no núcleo é representada pelo número atômico  $Z$  do elemento. No entorno do núcleo existe uma quantidade idêntica de elétrons carregados negativamente, deixando o átomo com carga resultante nula. A massa do elétron é cerca de 2.000 vezes menor que a do próton  $e$ , mesmo assim, as cargas dessas duas partículas são exatamente iguais em módulo. A carga do próton é  $e$  e a do elétron é  $-e$ , sendo  $e$  a chamada **unidade fundamental de carga elétrica**. A carga elétrica de um elétron ou de um próton é uma propriedade intrínseca da partícula, assim como a massa e o *spin*.

Todas as cargas elétricas observáveis ocorrem na forma de um múltiplo inteiro da unidade fundamental de carga elétrica  $e$ ; isto é, a carga é uma grandeza **quantizada**. Qualquer carga  $Q$  ocorrente na natureza pode ser descrita matematicamente como  $Q = \pm Ne$ , em que  $N$  é um número inteiro.\* Entretanto, para os corpos em geral  $N$  normalmente é muito grande e a carga parece ser contínua, da mesma forma que o ar tem a aparência de ser contínuo, quando se sabe que ele é constituído de muitas moléculas. Apenas a título de exemplo, o ato de se carregar eletricamente uma barra plástica, atritando-a com um pedaço de pele, transfere uma quantidade  $N=10^{19}$  ou mais elétrons à barra.

### Conservação da Carga

Quando dois corpos são friccionados entre si, um deles passa a ter uma quantidade excessiva de elétrons, ficando, portanto, carregado negativamente; o outro fica com menos elétrons, tornando-se positivamente carregado. A carga resultante dos dois corpos permanece constante; isto é, a carga elétrica é conservada. A lei de conservação da carga elétrica é uma lei fundamental da natureza. Em certas interações entre partículas elementares as partículas carregadas, como os elétrons, são criadas ou destruídas. Entretanto, nesses processos uma mesma quantidade de carga positiva e negativa é produzida ou destruída, de modo que a carga elétrica resultante do universo fica inalterada.

No Sistema Internacional de unidades uma carga é expressa em coulomb, que é definido em função da unidade de corrente elétrica, o ampère (A).\*\* O coulomb (C) é igual à quantidade de carga que passa por um condutor em um segundo quando a corrente no condutor é de um ampère. A unidade fundamental de carga elétrica  $e$  está relacionada ao coulomb por

$$e = 1,602177 \times 10^{-19} \text{ C} \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

21-1

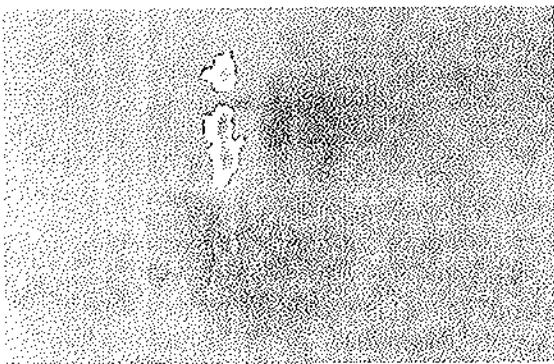
#### UNIDADE FUNDAMENTAL DE CARGA ELÉTRICA

\*No modelo-padrão de partículas elementares, os prótons, os nêutrons e algumas outras partículas elementares são constituídos por partículas mais fundamentais chamadas *quarks*, que possuem cargas de  $\pm\frac{1}{3}e$  ou  $\pm\frac{2}{3}e$ . Apenas são conhecidas as combinações dessas partículas que resultam em cargas de  $\pm Ne$  ou 0.

\*\*O ampère (A) é a unidade de corrente utilizada nos trabalhos de eletricidade do cotidiano.

**EXERCÍCIO** Uma carga de 50 nC ( $1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$ ) pode ser produzida em laboratório pelo simples atrito entre dois corpos. Quantos elétrons deverão ser transferidos para produzir essa carga?

(Resposta  $N = Q/e = (50 \times 10^{-9} \text{ C})/(1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 3,12 \times 10^{11}$ . A quantização da carga não pode ser detectada em uma carga dessa ordem de grandeza; tanto o efeito produzido pela adição quanto o efeito produzido pela subtração de um milhão de elétrons são muito pequenos, podendo ser desprezados.)



**Carga por contato.** Um pedaço de plástico de aproximadamente 0,02 mm foi carregado por contato com um pedaço de níquel. Embora o plástico fique com uma carga resultante positiva, a fotografia mostra que existem regiões com carga negativa (manchas escuras) e regiões com carga positiva (manchas claras). A fotografia foi tirada pela varredura de uma agulha carregada com espessura de  $10^{-7} \text{ m}$  sobre a amostra com o registro da força eletrostática atuante sobre ela. (Veja encarte em cores.)



Uma moeda de cobre ( $Z = 29$ ) possui uma massa de 3 g. Qual é a carga elétrica total de todos os elétrons da moeda?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Os elétrons possuem uma carga total dada pelo número de elétrons na moeda,  $N_e$ , vezes a carga de um elétron,  $-e$ . O número de elétrons é igual a 29 (número atômico do cobre) vezes o número de átomos de cobre  $N_a$ . Para se obter  $N_a$  utiliza-se o fato de que um mol de qualquer substância possui um número de moléculas igual ao número de Avogadro ( $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ ) e o número de gramas em um mol é igual à massa molecular  $M$ , que é de 63,5 g/mol para o cobre. Uma vez que cada molécula de cobre é exatamente igual a um átomo de cobre, determina-se o número de átomos por grama dividindo-se  $N_A$  (átomos/mol) por  $M$  (gramas/mol).

1. A carga total é igual ao número de elétrons multiplicado pela carga elétrica do elétron:  
$$Q = N_e(-e)$$
2. O número de elétrons é igual a  $Z$  multiplicado pelo número de átomos de cobre  $N_a$ :  
$$N_e = ZN_a$$
3. Calcule o número de átomos de cobre em 3 g desse metal:  
$$N_a = (3 \text{ g}) \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{63,5 \text{ g/mol}} = 2,84 \times 10^{22} \text{ átomos}$$
4. Calcule o número de elétrons  $N_e$ :  
$$N_e = ZN_a = (29 \text{ elétrons/átomos})(2,84 \times 10^{22} \text{ átomos})$$
  
$$= 8,24 \times 10^{23} \text{ elétrons}$$
5. Utilize esse valor de  $N_e$  para obter a carga total:  
$$Q = N_e(-e)$$
  
$$= (8,24 \times 10^{23} \text{ elétrons})(-1,6 \times 10^{-19} \text{ C/elétron})$$
  
$$= -1,32 \times 10^5 \text{ C}$$

**EXERCÍCIO** Se um milhão de elétrons fossem dados a cada homem, mulher e criança nos Estados Unidos (cerca de 285 milhões de pessoas), que porcentagem do número de elétrons em uma moeda isso representaria? (Resposta Aproximadamente  $35 \times 10^{-20}\%$ )

## 22.1-52 Condutores e Isolantes

Em muitos materiais, como o cobre e outros metais, alguns elétrons podem se movimentar livremente. Esses materiais são chamados de **condutores**. Já em outros materiais, como a madeira ou o vidro, todos os elétrons estão unidos nas vizinhanças do átomo e não podem se mover livremente. Esses materiais são chamados de **isolantes**.

Em um átomo de cobre, 29 elétrons estão unidos ao núcleo pela atração eletrostática existente entre os elétrons carregados negativamente e o núcleo carregado positivamente. Os elétrons mais externos são mais fracamente unidos do que os elétrons mais internos, devido à maior distância entre eles e o núcleo e devido à força repulsiva exercida pelos elétrons mais internos. Quando uma grande quantidade de átomos de cobre é combinada em um corpo de cobre metálico, a união dos elétrons de cada átomo individual é reduzida pelas interações com os átomos em sua vizinhança. Um ou mais dos elétrons mais externos em cada átomo não fica mais unido, o mesmo que ocorre quando uma molécula de gás fica livre para mover-se no interior de uma caixa. A quantidade de elétrons livres depende do metal em particular, porém uma quantidade típica é de um por átomo. Um átomo com um elétron removido ou adicionado, tendo como consequência uma carga nele resultante, é chamado de **íon**. No cobre metálico, os íons de cobre são dispostos em uma rede cristalina regular chamada *lattice*. Um condutor é eletricamente neutro se para cada íon com uma carga positiva  $+e$  existe um elétron livre com uma carga negativa  $-e$ . A carga elétrica resultante de um condutor pode ser alterada adicionando-se ou removendo-se elétrons. Um condutor com carga resultante negativa possui um excedente de elétrons livres, enquanto um condutor com carga resultante positiva possui um déficit de elétrons livres.

### Carga por Indução

A conservação da carga é ilustrada através de um procedimento simples de carregamento de um condutor chamado de **carga por indução**, conforme mostrado na Figura 21-4. Duas esferas de metal descarregadas estão em contato. Quan-

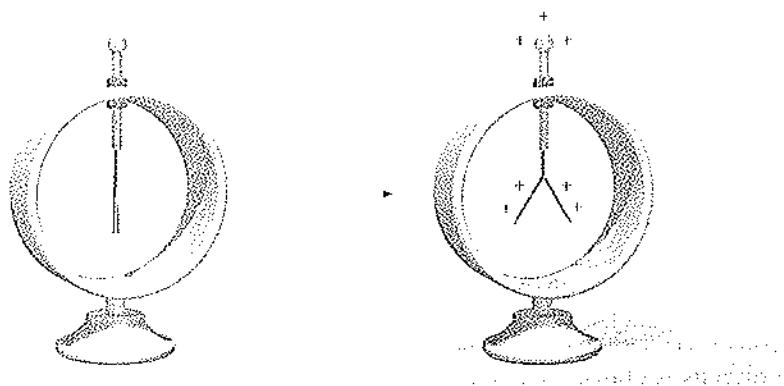


FIGURA 21-3

Eletroscópio. Duas folhas de ouro são ligadas a uma haste condutora que possui uma esfera condutora em sua extremidade superior. As folhas são isoladas da estrutura do eletroscópio. Quando descarregadas, as folhas ficam penduradas juntas na direção vertical. Quando a esfera entra em contato com uma barra de plástico carregada negativamente uma parte da carga negativa da barra é transferida para a esfera que, através da haste, se move para as folhas de ouro, fazendo com que se separem devido à repulsão elétrica entre suas cargas negativas. O contato da esfera com um bastão de vidro carregado positivamente também causa o afastamento das folhas. Nesse caso, o bastão de vidro carregado positivamente atrai os elétrons da esfera de metal, produzindo uma carga resultante positiva nas folhas.

do uma barra carregada é colocada nas proximidades de uma das esferas, os elétrons livres fluem de uma esfera para a outra em direção à barra com carga positiva ou afastando-se de uma barra com carga negativa. A barra com carga positiva mostrada na Figura 21-4a atrai os elétrons, e a esfera mais próxima da barra fica com elétrons da esfera mais afastada. Isso deixa a esfera mais próxima com uma carga resultante negativa e a esfera mais afastada com uma carga resultante positiva de mesmo valor. Diz-se que um condutor que possui cargas *separadas* idênticas e de sinais opostos está **polarizado**. Se as esferas forem separadas antes de a barra ser removida elas ficarão com quantidades iguais de cargas opostas (Figura 21-4b). Resultados análogos seriam obtidos com uma barra carregada negativamente que, ao repelir os elétrons, faria com que eles se movessem da esfera mais próxima para a esfera mais afastada.

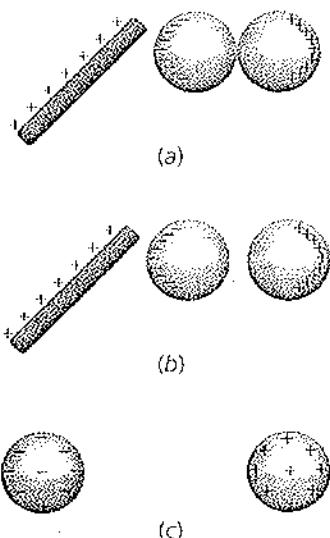
**EXERCÍCIO** Duas esferas condutoras idênticas, uma com carga inicial  $+Q$  e a outra inicialmente descarregada, são colocadas em contato. (a) Qual é o valor da nova carga em cada uma das esferas? (b) Enquanto as esferas estão em contato, uma barra com carga negativa é aproximada de uma das esferas, fazendo com que ela fique com uma carga igual a  $+2Q$ . Qual será o valor da carga na outra esfera? (Resposta (a)  $+\frac{1}{2}Q$ . Uma vez que as esferas são idênticas, elas devem distribuir igualmente a carga total. (b)  $-Q$ , para atender à condição de conservação da carga)

**EXERCÍCIO** Duas esferas idênticas são carregadas por indução e, em seguida, separadas; a esfera 1 possui uma carga  $+Q$  e a esfera 2 uma carga  $-Q$ . Uma terceira esfera idêntica está inicialmente descarregada. Se a esfera 3 entra em contato com a esfera 1 e se afasta e, em seguida, entra em contato com a esfera 2 e é separada, qual será a carga final em cada uma das três esferas? (Resposta  $Q_1 = +Q/2$ ,  $Q_2 = -Q/4$ ,  $Q_3 = -Q/4$ )

Para muitas aplicações, a Terra pode ser considerada um condutor infinitamente grande com suprimento abundante de carga livre. Se um condutor for conectado à Terra, ele será considerado “aterrado” (indicado esquematicamente na Figura 21-5a por um cabo de conexão terminando em um conjunto de linhas horizontais paralelas). A Figura 21-5 mostra como é possível induzir uma carga em um condutor pela transferência de carga da Terra através do fio terra e, em seguida, rompendo a conexão à Terra.

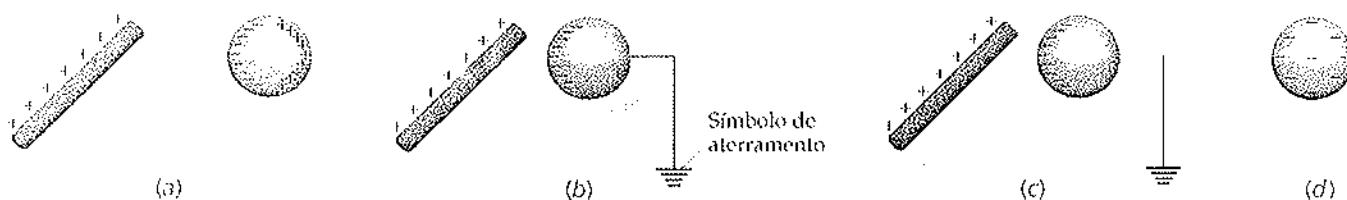
### 21-5 Lei de Coulomb

Charles Coulomb (1736-1806) estudou a força exercida por uma carga sobre outra utilizando uma balança de torção de sua própria invenção.\* No experimento

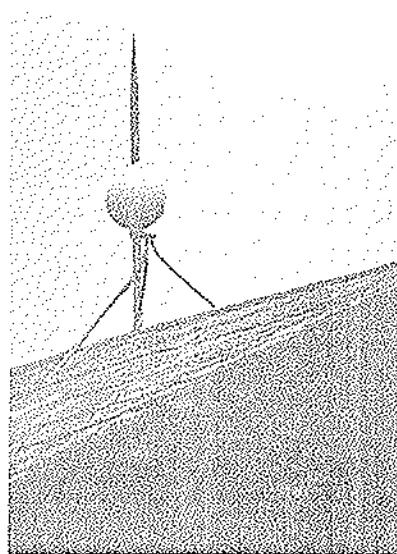


**FIGURA 21-4**  
Carga por indução. (a) Os condutores em contato ficam carregados positivamente quando uma barra carregada atrai os elétrons para a esfera da esquerda. (b) Se as esferas forem separadas antes de a barra ser removida, elas manterão suas cargas iguais e opostas. (c) Quando a barra é removida e as esferas afastadas, a distribuição da carga em cada esfera fica uniforme.

**FIGURA 21-5**  
Indução através do aterramento. (a) A carga livre em uma esfera condutora é polarizada por uma barra carregada positivamente, que atrai as cargas negativas na esfera. (b) Quando o condutor é aterrado através de sua conexão com um fio a um condutor muito grande, como, por exemplo, a Terra, os elétrons da Terra neutralizam a carga positiva, deixando o condutor com excesso de carga negativa. (c) A carga negativa permanece se a conexão à Terra for interrompida antes de a barra ser removida. (d) Após a barra ser removida, a esfera possuirá uma carga negativa uniforme.



\*O dispositivo experimental de Coulomb foi basicamente o mesmo descrito para o experimento de Cavendish no Capítulo 11, com as massas substituídas por pequenas esferas carregadas. Com as cargas elétricas facilmente transferidas por atrito, a atração gravitacional entre as esferas é insignificante se comparada com a atração ou repulsão elétrica entre elas.



O pára-raios desse prédio é aterrado, de modo que pode conduzir os elétrons do solo para as nuvens com carga positiva, neutralizando-as.



Mulheres na moda usam chapéus com correntes metálicas que se arrastam até o solo, supostamente para protegê-las dos raios.

de Coulomb, as esferas carregadas eram muito menores do que a distância entre elas, de modo que as cargas podiam ser consideradas como puntiformes. Coulomb usou o método de carregamento por indução para produzir esferas carregadas igualmente e para variar a quantidade de carga nas esferas. Por exemplo, iniciando com uma carga  $q_0$  em cada esfera ele pôde reduzir a carga para  $\frac{1}{2}q_0$ , aterrando temporariamente uma esfera para descarregá-la e, em seguida, colocando as duas esferas em contato. Os resultados dos experimentos de Coulomb e de outros pesquisadores são resumidos na lei de Coulomb:

A força exercida por uma carga puntiforme sobre outra atua na direção da linha reta que passa pelas cargas. Ela varia inversamente com o quadrado da distância de separação das cargas e é proporcional ao produto das cargas. A força será repulsiva se as cargas possuírem sinais idênticos e atrativa se tiverem sinais opostos.

#### LEI DE COULOMB

O módulo da força elétrica exercida por uma carga  $q_1$  sobre outra  $q_2$  a uma distância  $r$  é, portanto, expresso por

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \quad 21-2$$

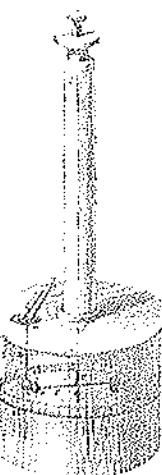
onde  $k$  é uma constante determinada experimentalmente chamada constante de Coulomb, cujo valor é

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \quad 21-3$$

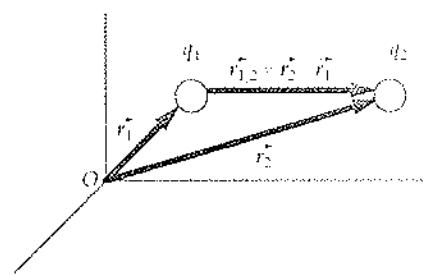
Se  $q_1$  está em uma posição  $\vec{r}_1$  e  $q_2$  em  $\vec{r}_2$  (Figura 21-6), a força  $\vec{F}_{12}$  exercida por  $q_1$  sobre  $q_2$  pode ser expressa como

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad 21-4$$

#### LEI DE COULOMB PARA A FORÇA EXERCIDA POR $Q_1$ SOBRE $Q_2$



Balança de torção de Coulomb.



**FIGURA 21-6**  
Posicionamento da carga  $q_1$  na posição  $\vec{r}_1$  e da carga  $q_2$  em  $\vec{r}_2$ , relativamente à origem  $O$ . A força exercida por  $q_1$  sobre  $q_2$  estará no sentido do vetor  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  se as cargas tiverem o mesmo sinal, e no sentido oposto se tiverem sinais opostos.

onde  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  é o vetor orientado de  $q_1$  para  $q_2$  e  $\hat{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}/r_{1,2}$  é um vetor unitário também orientado de  $q_1$  para  $q_2$ .

Pela terceira lei de Newton, a força  $\vec{F}_{2,1}$  exercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  é a negativa de  $\vec{F}_{1,2}$ . Observe a semelhança entre a lei de Coulomb e a lei da gravitação de Newton. (Veja a Equação 11-3.) Ambas representam forças proporcionais ao inverso do quadrado de uma distância. Todavia, a força gravitacional entre duas partículas é proporcional às massas das partículas e é sempre de atração, enquanto a força elétrica é proporcional às cargas das partículas e é repulsiva, se as cargas tiverem o mesmo sinal, e de atração, se tiverem sinais opostos.

### **EXEMPLO 12-1** Cálculo da força elétrica entre um próton e um elétron

Em um átomo de hidrogênio, o elétron é separado do próton por uma distância média de aproximadamente  $5,3 \times 10^{-11}$  m. Calcule o módulo da força eletrostática de atração exercida pelo próton sobre o elétron.

#### **DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA**

Substitua os valores fornecidos na expressão da lei de Coulomb:

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 8,19 \times 10^{-8} \text{ N}$$

**NOTAS** Comparada com as interações macroscópicas, essa força é muito pequena. Entretanto, uma vez que a massa do elétron é de apenas cerca de  $10^{-30}$  kg, essa força produz uma aceleração muito alta de  $F/m = 8 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$ .

**EXERCÍCIO** Duas cargas puntiformes de  $0,05 \mu\text{C}$  cada são separadas por uma distância de 10 cm. Determine o módulo da força exercida por uma das cargas puntiformes sobre a outra. (*Resposta*  $2,25 \times 10^{-3}$  N)

Uma vez que a força elétrica e a força gravitacional entre quaisquer duas partículas variam inversamente com o quadrado da distância de separação entre elas, a relação entre essas forças é independente da separação. Pode-se, portanto, comparar os valores das forças elétrica e gravitacional para as partículas elementares, como um elétron e um próton.

### **EXEMPLO 12-2** Relação entre a força elétrica e a força gravitacional

Calcule a relação entre a força elétrica e a força gravitacional exercidas por um próton sobre um elétron em um átomo de hidrogênio.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Utiliza-se a lei de Coulomb com  $q_1 = e$  e  $q_2 = -e$  para obter a força elétrica, e a lei da gravitação de Newton com a massa do próton,  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg e a massa do elétron,  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg.

1. Expresse os módulos da força elétrica  $F_e$  e da força gravitacional  $F_g$  em função das cargas, das massas, da distância de separação e das constantes gravitacional e elétrica;
2. Represente a relação entre as forças. Note que a distância de separação é cancelada na relação:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}; F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

3. Substitua os valores numéricos:

$$\begin{aligned} \frac{F_e}{F_g} &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \\ &= 2,27 \times 10^{39} \end{aligned}$$

**NOTAS** Esse resultado mostra por que os efeitos da gravidade não são considerados na discussão das interações atômicas ou moleculares.

Embora a força gravitacional seja extremamente fraca quando comparada com a força elétrica e não apresente qualquer influência perceptível no nível atômico, ela é a força dominante entre os corpos de grande massa, como os planetas e as estrelas. Pelo fato de esses corpos possuírem quase a mesma quantidade de cargas positivas e negativas, as forças elétricas atrativas e repulsivas se cancelam. A força resultante entre os corpos astronômicos é, portanto, quase que exclusivamente a força de atração gravitacional.

### Força Exercida por um Sistema de Cargas

Em um sistema de cargas, cada carga exerce sobre todas as demais cargas uma força que pode ser calculada pela Equação 21-4. A força resultante sobre qualquer carga é o vetor soma das forças exercidas individualmente sobre aquela carga por todas as demais cargas presentes no sistema. Essa conclusão é uma consequência do princípio da superposição das forças.

#### EXEMPLO 21-1

Três cargas puntiformes estão apoiadas sobre o eixo  $x$ ;  $q_1$  está na origem,  $q_2$  está na posição  $x = 2 \text{ m}$  e  $q_0$  está em uma posição  $x$  arbitrária ( $x > 2 \text{ m}$ ).

- (a) Determine a força resultante sobre  $q_0$  devida a  $q_1$  e  $q_2$  se  $q_1 = +25 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -10 \text{ nC}$  e  $x = 3,5 \text{ m}$  (Figura 21-7).
- (b) Obtenha uma expressão para a força resultante sobre  $q_0$  devida a  $q_1$  e  $q_2$  na região  $2 \text{ m} < x < \infty$  (Figura 21-8).

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A força resultante sobre  $q_0$  é o vetor soma da força  $\vec{F}_{1,0}$  exercida por  $q_1$  e da força  $\vec{F}_{2,0}$  exercida por  $q_2$ . As forças individuais são obtidas utilizando a lei de Coulomb. Note que  $\hat{r}_{1,0} = \hat{r}_{2,0} = \hat{i}$ , uma vez que tanto  $\vec{r}_{1,0}$  quanto  $\vec{r}_{2,0}$  estão com a orientação  $x$  positiva.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

Etapas

- (a) 1. Desenhe um esquema do sistema de cargas. Indique as distâncias  $r_{1,0}$  e  $r_{2,0}$ .

Tente resolver este exemplo sozinho

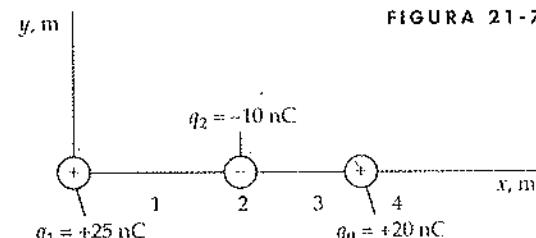


FIGURA 21-7

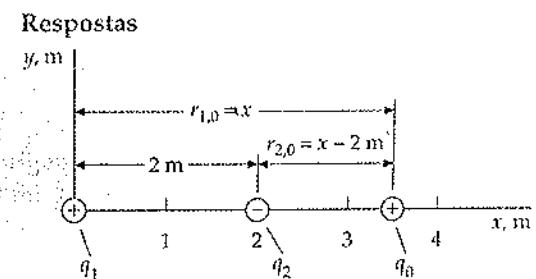


FIGURA 21-8

2. Determine a força  $\vec{F}_{1,0}$  devida a  $q_1$ .

$$\vec{F}_{1,0} = (0,367 \mu\text{N})\hat{i}$$

3. Determine a força  $\vec{F}_{2,0}$  devida a  $q_2$ .

$$\vec{F}_{2,0} = (-0,799 \mu\text{N})\hat{i}$$

4. Combine seus resultados para obter a força resultante.

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0} = -(0,432 \mu\text{N})\hat{i}$$

(b) 1. Obtenha uma expressão para a força devida a  $q_1$ .

$$\vec{F}_{1,0} = \frac{kq_1 q_0}{x^2} \hat{i}$$

2. Obtenha uma expressão para a força devida a  $q_2$ .

$$\vec{F}_{2,0} = \frac{kq_2 q_0}{(x - 2 \text{ m})^2} \hat{i}$$

3. Combine seus resultados para obter uma expressão para a força resultante.

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0} = \left( \frac{kq_1 q_0}{x^2} + \frac{kq_2 q_0}{(x - 2 \text{ m})^2} \right) \hat{i}$$

**NOTAS** A Figura 21-9 mostra a componente  $x$  da força  $F_x$  sobre  $q_0$  em função da posição  $x$  de  $q_0$  na região  $2 \text{ m} < x < \infty$ . Nas proximidades de  $q_2$  a força devida a essa carga domina e, como cargas opostas se atraem, a força sobre  $q_2$  é orientada no sentido negativo da direção  $x$ . Para  $x >> 2 \text{ m}$ , a força passa a ter o sentido positivo da direção  $x$ . Essa condição decorre do fato de que para valores altos de  $x$  a distância entre  $q_1$  e  $q_2$  é desprezível, de modo que a força devida às duas cargas é quase a mesma correspondente a uma carga única de  $\pm 15 \text{ nC}$ .

**EXERCÍCIO** Se  $q_0$  estiver na posição  $x = 1 \text{ m}$ , determine (a)  $\vec{r}_{1,0}$ ,

(b)  $\vec{r}_{2,0}$  e (c) a força resultante atuante em  $q_0$ . (Resposta (a)  $\vec{r}_{1,0} = \hat{i}$ , (b)  $\vec{r}_{2,0} = -\hat{i}$  e (c)  $(6,29 \mu\text{N})\hat{i}$ )

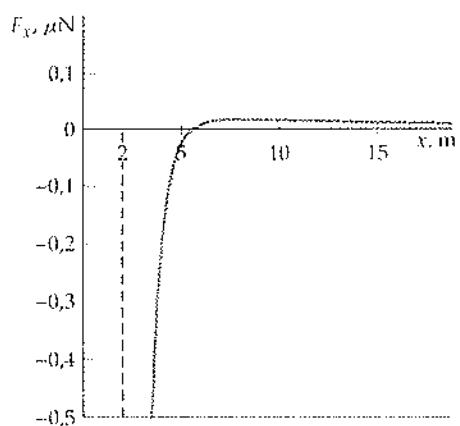


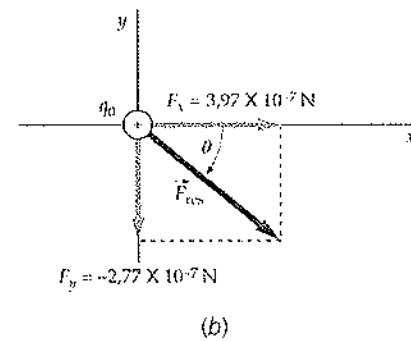
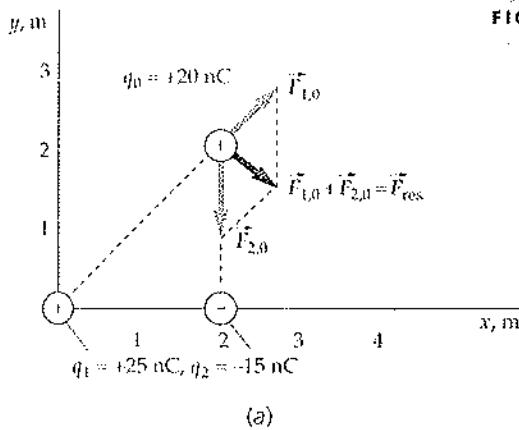
FIGURA 21-9

Se um sistema de cargas deve permanecer estacionário, então deve haver outras forças atuantes sobre as cargas de modo que a força resultante de todas as fontes atuantes sobre cada carga seja nula. No exemplo anterior, e naqueles que se seguem, admita que existam forças atuantes de modo que todas as cargas permaneçam estacionárias.

A carga  $q_1 = +25 \text{ nC}$  está na origem, a carga  $q_2 = -15 \text{ nC}$  está sobre o eixo  $x$  em  $x = 2 \text{ m}$  e a carga  $q_0 = +20 \text{ nC}$  está posicionada em um ponto com as coordenadas  $x = 2 \text{ m}$  e  $y = 2 \text{ m}$ , conforme mostrado na Figura 21-10. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante  $\Sigma F$  sobre  $q_0$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A força resultante é obtida pela soma vetorial das forças individuais exercidas por cada carga sobre  $q_0$ . Calcula-se cada força a partir da lei de Coulomb, representando-a em função de suas componentes retangulares. A Figura 21-10a mostra a força resultante sobre a carga  $q_0$  como o vetor soma das forças  $\vec{F}_{1,0}$  devida a  $q_1$  e  $\vec{F}_{2,0}$  devida a  $q_2$ . A Figura 21-10b mostra a força resultante da Figura 21-10a e suas componentes  $x$  e  $y$ .

FIGURA 21-10



1. Desenhe os eixos coordenados mostrando as posições das três cargas. Mostre a força resultante sobre a carga  $q_0$  como o vetor soma das forças  $\vec{F}_{1,0}$  devida a  $q_1$  e  $\vec{F}_{2,0}$  devida a  $q_2$ .

2. A força resultante  $\sum \vec{F}$  sobre  $q_0$  é igual à soma das forças individuais:

3. A força  $\vec{F}_{1,0}$  é direcionada ao longo da linha que une  $q_1$  a  $q_0$ . Utilize  $r_{1,0} = 2\sqrt{2}$  para a distância entre  $q_1$  e  $q_0$  para calcular seu módulo:

4. Uma vez que  $\vec{F}_{1,0}$  faz um ângulo de  $45^\circ$  com os eixos  $x$  e  $y$ , suas componentes nessas direções são iguais:

5. A força  $\vec{F}_{2,0}$  exercida por  $q_2$  sobre  $q_0$  é de atração e no sentido negativo do eixo  $y$ , conforme mostrado na Figura 21-10a:

6. Calcule as componentes da força resultante:

7. Desenhe a força resultante em relação às suas duas componentes:

8. O módulo da força resultante é obtido a partir de suas componentes:

9. A força resultante é orientada para a direita e para baixo, conforme mostrado na Figura 21-10b, e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ , que pode ser calculado como:

**EXERCÍCIO** Expresse o vetor  $\hat{r}_{1,0}$  do Exemplo 21-5 em função de  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . [Resposta  $\hat{r}_{1,0} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ ]

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0}$$

$$\sum F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x}$$

$$\sum F_y = F_{1,0y} + F_{2,0y}$$

$$F_{1,0} = \frac{k|q_1 q_0|}{r_{1,0}^2}$$

$$= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2\sqrt{2} \text{ m})^2}$$

$$= 5,62 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_{1,0x} = F_{1,0y} = F_{1,0} \cos 45^\circ = \frac{5,62 \times 10^{-7} \text{ N}}{\sqrt{2}} = 3,97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2,0} = \frac{kq_2 q_0}{r_{2,0}^2} \hat{r}_{2,0}$$

$$= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(-15 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2 \text{ m})^2}$$

$$= (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N}) \hat{j}$$

$$\sum F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + 0 = 3,97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\sum F_y = F_{1,0y} + F_{2,0y} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N})$$

$$= -2,77 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3,97 \times 10^{-7} \text{ N})^2 + (-2,77 \times 10^{-7} \text{ N})^2}$$

$$= 4,84 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2,77}{3,97} = -0,698$$

$$\theta = -34,9^\circ$$

### 21-1 O Campo Elétrico

A força elétrica exercida por uma carga sobre outra é um exemplo de ação de força a distância, semelhante à força gravitacional exercida por uma massa sobre outra. A idéia de ação a distância envolve um difícil problema conceitual. Qual é o mecanismo pelo qual uma partícula pode exercer uma força sobre outra através do espaço vazio entre as partículas? Admita que uma partícula carregada, posicionada em algum ponto do espaço, seja subitamente deslocada. A força exercida sobre uma segunda partícula a uma distância  $r$  da primeira varia instantaneamente? Para responder a essa questão da ação a uma certa distância é introduzido o conceito de **campo elétrico**. Uma carga produz um campo elétrico  $\vec{E}$  em todo o espaço, e esse campo exerce uma força sobre a segunda carga. Assim, é o campo  $\vec{E}$  na posição da segunda carga que exerce a força sobre ela, e não a primeira carga, que está a uma certa distância. As variações no campo se propagam através do espaço com a velocidade da luz  $c$ . Assim, se uma carga for subitamente deslocada, a força que ela exerce sobre uma segunda carga a uma distância  $r$  não irá variar antes de decorrido um intervalo de tempo igual a  $r/c$ .

A Figura 21-11 mostra um conjunto de cargas puntiformes,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , arbitrariamente dispostas no espaço. Essas cargas produzem um campo elétrico  $\vec{E}$  em todo o espaço. Ao se colocar uma pequena carga de prova  $q_0$  em algum ponto nas proximidades das três cargas haverá uma força exercida sobre  $q_0$  devida às outras cargas.\* A força resultante sobre  $q_0$  é o vetor soma das forças individuais exercidas sobre  $q_0$  por cada uma das outras cargas presentes no sistema. Uma vez que cada uma dessas forças é proporcional a  $q_0$ , a força resultante será, também, proporcional a  $q_0$ . O campo elétrico  $\vec{E}$  em um ponto será igual a essa força dividida por  $q_0$ .\*\*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (q_0 \text{ pequena}) \quad 21-5$$

#### DEFINIÇÃO – CAMPO ELÉTRICO

A unidade SI do campo elétrico é o newton por coulomb (N/C). A Tabela 21-2 lista os módulos de alguns campos elétricos encontrados na natureza.

O campo elétrico descreve a condição no espaço estabelecida pelo sistema de cargas puntiformes. Ao se mover uma carga de prova  $q_0$  de um ponto para outro, pode-se determinar o campo  $\vec{E}$  para todos os pontos do espaço (exceto para os pontos ocupados por uma carga  $q$ ). Assim, o campo elétrico  $\vec{E}$  é uma função vetorial da posição. A força exercida sobre uma carga de prova  $q_0$  em qualquer ponto está relacionada ao campo elétrico naquele ponto por

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad 21-6$$

**EXERCÍCIO** Quando uma carga de prova de  $5\text{nC}$  é colocada em um certo ponto, ela fica sujeita à ação de uma força de  $2 \times 10^{-4}\text{ N}$  no sentido do aumento da coordenada  $x$ . Qual é o valor do campo elétrico  $\vec{E}$  atuante naquele ponto? [Resposta:  $\vec{E} = \vec{F}/q_0 \approx (4 \times 10^4\text{ N/C})\hat{i}$ ]

\*A presença da carga  $q_0$  geralmente altera a distribuição original das demais cargas, especialmente se estiverem sobre condutores. Entretanto, pode-se escolher a carga  $q_0$  suficientemente pequena, de modo que seu efeito na distribuição de carga original seja desprezível.

\*\*Essa definição é semelhante à do campo gravitacional da Terra, que foi definido na Seção 4-3 como a força por unidade de massa exercida pela Terra sobre um corpo.

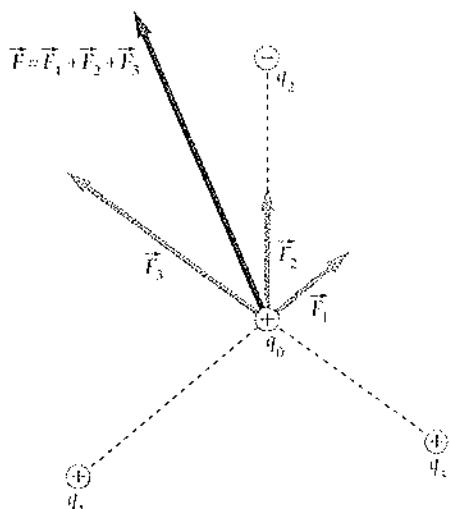


FIGURA 21-11

Uma pequena carga de prova  $q_0$  nas vizinhanças de um sistema de cargas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , ... fica sujeita a uma força  $\vec{F}$  que é proporcional a  $q_0$ . A relação  $\vec{F}/q_0$  é o campo elétrico naquele ponto.

TABELA 21-2

#### Alguns Campos Elétricos Encontrados na Natureza

	$E, \text{N/C}$
Nos condutores elétricos domésticos	$10^{-2}$
Nas ondas de rádio	$10^{-1}$
Na atmosfera	$10^2$
Na luz solar	$10^3$
Sob uma nuvem de tempestade	$10^4$
Em um raio	$10^5$
Em um tubo de raios X	$10^6$
No elétron de um átomo de hidrogênio	$6 \times 10^{11}$
Na superfície de um núcleo de urânia	$2 \times 10^{21}$

**EXERCÍCIO** Qual é a força atuante sobre um elétron colocado em um ponto onde o campo elétrico é  $\vec{E} = (4 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{i}$ ? [Resposta  $(-6,4 \times 10^{-5} \text{ N})\hat{i}$ ]

O campo elétrico devido a uma única carga puntiforme pode ser calculado a partir da lei de Coulomb. Considere uma pequena carga de prova positiva  $q_0$  em um determinado ponto  $P$  a uma distância  $r_{i,P}$  de uma carga  $q_i$ . A força atuante sobre ela vale

$$\vec{F}_{i0} = \frac{kq_i q_0}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P}$$

Assim, o campo elétrico no ponto  $P$  devido à carga  $q_i$  (Figura 21-12) é

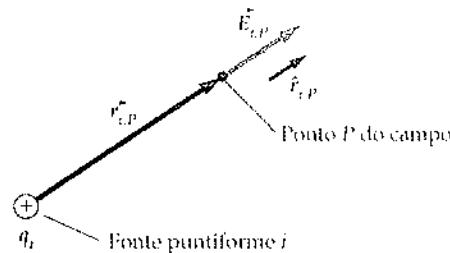
$$\vec{E}_{i,P} = \frac{kq_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P} \quad 21-7$$

#### LEI DE COULOMB PARA O CAMPO $\vec{E}$ DEVIDO A UMA CARGA PUNTIFORME

onde  $\hat{r}_{i,P}$  é o vetor unitário orientado da fonte puntual  $i$  para o ponto  $P$  do campo. O campo elétrico resultante devido à distribuição de cargas puntiformes pode ser obtido pelo somatório dos campos devidos a cada uma das cargas separadamente:

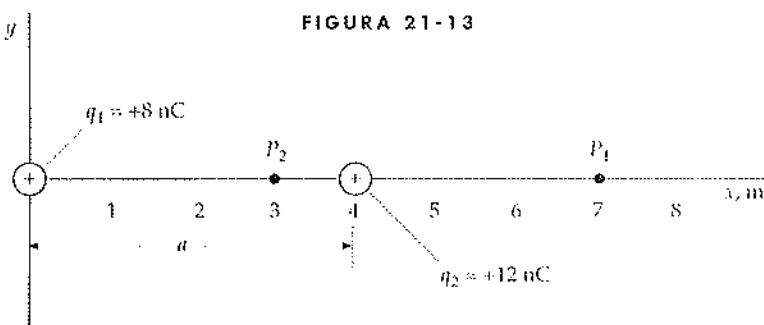
$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{i,P} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P} \quad 21-8$$

#### CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}$ DEVIDO A UM SISTEMA DE CARGAS PUNTIFORMES



**FIGURA 21-12**  
O campo elétrico  $\vec{E}$  no ponto  $P$  do campo devido à carga  $q_i$  na fonte puntual  $i$ .

Uma carga positiva  $q_1 = +8 \text{ nC}$  é posicionada na origem, e uma segunda carga positiva  $q_2 = +12 \text{ nC}$  é colocada sobre o eixo  $x$  a uma distância  $a = 4 \text{ m}$  da origem (Figura 21-13). Determine o campo elétrico resultante (a) no ponto  $P_1$  sobre o eixo  $x$  em  $x = 7 \text{ m}$  e (b) no ponto  $P_2$  sobre o eixo  $x$  em  $x = 3 \text{ m}$ .



**FIGURA 21-13**

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Uma vez que o ponto  $P_1$  está à direita de ambas as cargas, cada carga produzirá um campo orientado para a direita nesse ponto. No ponto  $P_2$ , que está entre as cargas, a carga de 5 nC gera um campo orientado para a direita e a carga de 12 nC gera um campo orientado para a esquerda. Calcula-se cada um desses campos utilizando

$$\vec{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P}$$

No ponto  $P_1$ , ambos os vetores unitários são orientados ao longo do eixo  $x$  no sentido positivo, logo  $\hat{r}_{1,P_1} = \hat{r}_{2,P_1} = \hat{i}$ . No ponto  $P_2$ ,  $\hat{r}_{1,P_2} = \hat{i}$ , porém o vetor unitário referente à carga de 12 nC é orientado no sentido negativo da direção  $x$ , logo  $\hat{r}_{2,P_2} = -\hat{i}$ .

1. Calcule o campo  $\vec{E}$  no ponto  $P_1$  utilizando  $r_{1,P_1} = x = 7 \text{ m}$  e  $r_{2,P_1} = (x - a) = 7 \text{ m} - 4 \text{ m} = 3 \text{ m}$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{kq_1}{r_{1,P_1}^2} \hat{r}_{1,P_1} + \frac{kq_2}{r_{2,P_1}^2} \hat{r}_{2,P_1} = \frac{kq_1}{x^2} \hat{i} + \frac{kq_2}{(x - a)^2} \hat{i} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(7 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &\quad + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &= (1,47 \text{ N/C}) \hat{i} + (12,0 \text{ N/C}) \hat{i} = \boxed{(13,5 \text{ N/C}) \hat{i}}\end{aligned}$$

2. Calcule o campo  $\vec{E}$  no ponto  $P_2$ , onde  $r_{1,P_2} = x = 3 \text{ m}$  e  $r_{2,P_2} = (a - x) = 4 \text{ m} - 3 \text{ m} = 1 \text{ m}$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{kq_1}{r_{1,P_2}^2} \hat{r}_{1,P_2} + \frac{kq_2}{r_{2,P_2}^2} \hat{r}_{2,P_2} = \frac{kq_1}{x^2} \hat{i} + \frac{kq_2}{(a - x)^2} (-\hat{i}) \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &\quad + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(1 \text{ m})^2} (-\hat{i}) \\ &= (7,99 \text{ N/C}) \hat{i} - (108 \text{ N/C}) \hat{i} = \boxed{(-100 \text{ N/C}) \hat{i}}\end{aligned}$$

**NOTAS** O campo elétrico no ponto  $P_2$  é orientado no sentido negativo da direção  $x$  porque o campo devido à carga de  $+12 \text{ nC}$ , que está a uma distância de 1 m, é maior que o devido à carga de  $+8 \text{nC}$ , que está a 3 m de distância. O campo elétrico nos pontos mais próximos da carga de  $+8 \text{nC}$  recebe maior influência do campo gerado pela carga de  $+12 \text{nC}$ . Existe um ponto entre as cargas em que o campo elétrico resultante é nulo. Nesse ponto, a força resultante atuante sobre uma carga de prova é nula. Um gráfico de  $E_x$  em função de  $x$  para esse sistema é mostrado na Figura 21-14.

**EXERCÍCIO** Determine o ponto sobre o eixo  $x$  onde o campo elétrico é nulo.  
(Resposta  $x = 1,80 \text{ m}$ )

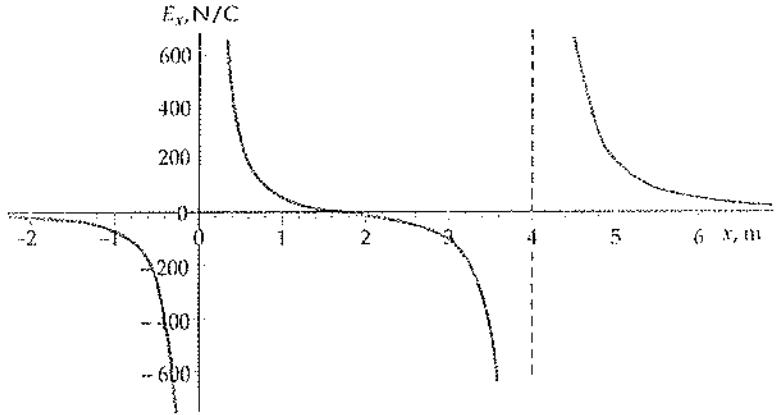


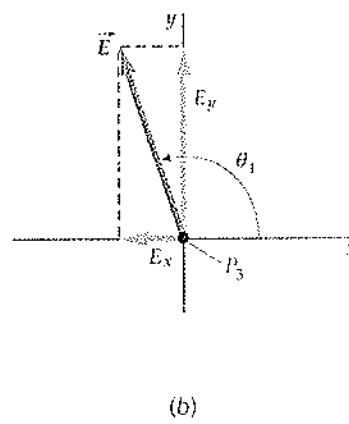
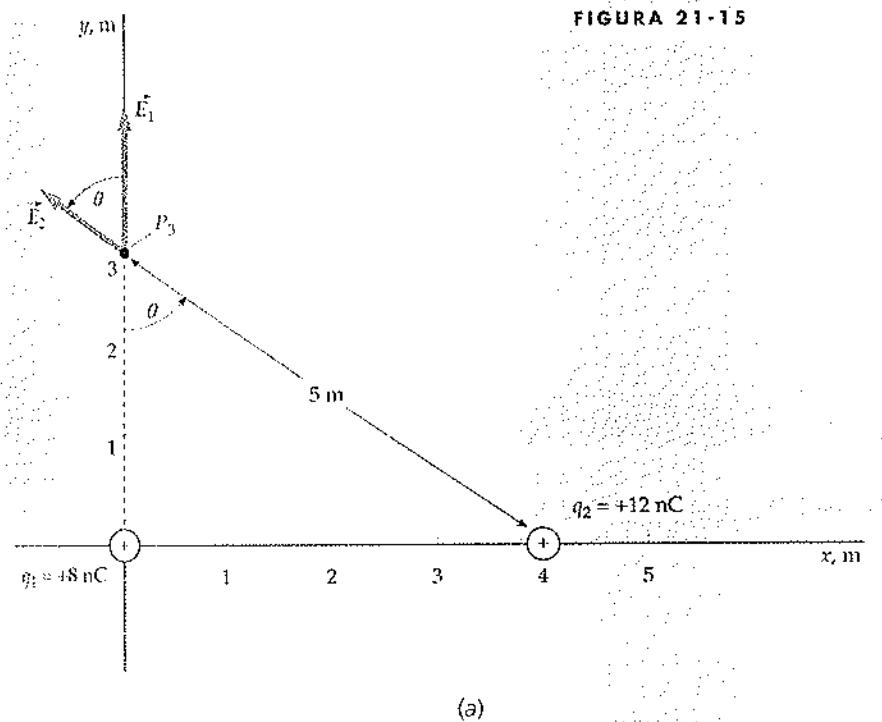
FIGURA 21-14

Tente resolver este exemplo sozinho

Determine o campo elétrico sobre o eixo  $y$ , em  $y = 3 \text{ m}$ , decorrente das cargas definidas no Exemplo 21-6.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Sobre o eixo  $y$ , o campo elétrico  $\vec{E}_1$  devido à carga  $q_1$  é orientado ao longo do eixo  $y$ , e o campo  $\vec{E}_2$  devido à carga  $q_2$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $y$  (Figura 21-15a). Para obter o

campo resultante calcula-se, inicialmente, as componentes  $x$  e  $y$  desses campos, conforme mostrado na Figura 21-15b.



Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

- Calcule o módulo do campo  $\vec{E}_1$  devido a  $q_1$ . Determine as componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{E}_1$ .  $E_1 = kq_1/y^2 = 7,99 \text{ N/C}$   
 $E_{1x} = 0, E_{1y} = 7,99 \text{ N/C}$
- Calcule o módulo do campo  $\vec{E}_2$  devido a  $q_2$ .  $E_2 = 4,32 \text{ N/C}$
- Escreva as componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{E}_2$  em função do ângulo  $\theta$ .  $E_x = -E_2 \sin \theta; E_y = E_2 \cos \theta$
- Calcule  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ .  $\sin \theta = 0,8; \cos \theta = 0,6$
- Calcule  $E_{2x}$  e  $E_{2y}$ .  $E_{2x} = -3,46 \text{ N/C}; E_{2y} = 2,59 \text{ N/C}$
- Determine as componentes  $x$  e  $y$  do campo resultante  $\vec{E}$ .  $E_x = -3,46 \text{ N/C}; E_y = 10,6 \text{ N/C}$
- Calcule o módulo de  $\vec{E}$  a partir de suas componentes.  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \boxed{11,2 \text{ N/C}}$
- Determine o ângulo  $\theta_1$  entre o campo  $\vec{E}$  e o eixo  $x$ .  $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \boxed{108^\circ}$

#### Respostas

Uma carga  $+q$  é posicionada em  $x = a$  e uma segunda carga  $-q$  é colocada em  $x = -a$  (Figura 21-16). (a) Determine o campo elétrico sobre o eixo  $x$  em um ponto arbitrário  $x > a$ . (b) Determine o valor-limite do campo elétrico para  $x \gg a$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Calcula-se o campo elétrico utilizando a expressão

$$\vec{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{ip}^2} \hat{r}_{ip}$$

(Eq. 21-8). Para  $x > a$ , o vetor unitário para cada carga é  $\hat{i}$ . As distâncias são  $x - a$  para a carga positiva e  $x - (-a) = x + a$  para a carga negativa.

(a) 1. Desenhe a disposição das cargas em um eixo coordenado e marque as distâncias de cada uma até o ponto do campo.

2. Calcule o campo  $\vec{E}$  devido às duas cargas para  $x > a$ : (Nota: A expressão do lado direito vale apenas para  $x > a$ . Para  $x < a$ , os sinais dos dois termos são invertidos. Para  $-a < x < a$ , ambos os termos possuem sinal negativo.)

3. Reduza os termos entre colchetes a um mesmo denominador e simplifique:

(b) No limite, quando  $x \gg a$ , pode-se desprezar  $a^2$  quando comparado com  $x^2$  no denominador:

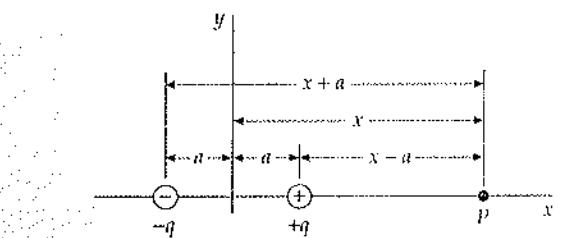


FIGURA 21-16

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2} \hat{i} + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \hat{i}$$

$$= kq \left[ \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \hat{i}$$

$$\vec{E} = kq \left[ \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right] \hat{i} = \boxed{kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}}$$

$$\vec{E} = kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i} \approx kq \frac{4ax}{x^4} \hat{i} = \boxed{\frac{4kqa}{x^3} \hat{i}}$$

**NOTAS** A Figura 21-17 mostra  $E_x$  versus  $x$  para todo  $x$ , considerando  $q = 1 \text{ nC}$  e  $a = 1 \text{ m}$ . Ao se afastar das cargas, o campo fica definido por

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{|x|^3} \hat{i}$$

Entre as cargas, a contribuição de cada carga está no sentido negativo. Uma expressão que vale para qualquer valor de  $x$  é

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2} \left[ \frac{(x-a)\hat{i}}{|x-a|} \right] + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \left[ \frac{(x+a)\hat{i}}{|x+a|} \right]$$

Note que os vetores unitários (grandezas entre colchetes na expressão) são orientados no sentido apropriado para qualquer que seja o valor de  $x$ .

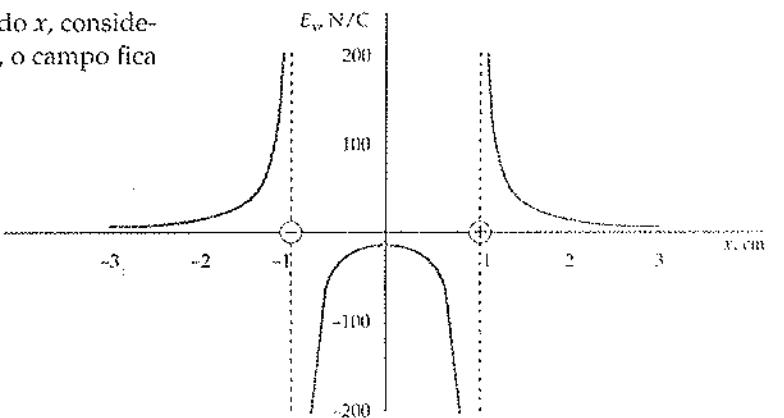


FIGURA 21-17

Gráfico de  $E_x$  em função de  $x$  sobre o eixo  $x$  para a distribuição de cargas do Exemplo 21-8.

## Dipolos Elétricos

Um sistema de duas cargas iguais e opostas  $q$  separadas por uma pequena distância  $L$  é chamado de dipolo elétrico. Sua intensidade e sua orientação são descritas pelo momento do dipolo elétrico  $\vec{p}$ , que é um vetor orientado da carga negativa para a carga positiva e possui uma intensidade de  $qL$  (Figura 21-18).

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

21-9

**DEFINIÇÃO – MOMENTO DE UM DIPOLO ELÉTRICO**

onde  $\vec{L}$  é o vetor orientado da carga negativa para a carga positiva.

Para o sistema de cargas mostrado na Figura 21-16,  $\vec{L} = 2a\hat{i}$ , e o dipolo elétrico vale

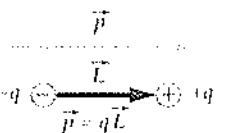


FIGURA 21-18

Um dipolo elétrico consiste em um par de cargas iguais e opostas. O momento do dipolo é  $\vec{p} = q\vec{L}$ , onde  $q$  é a intensidade de uma das cargas e  $\vec{L}$  é o vetor posição relativa orientado da carga negativa para a carga positiva.

$$\vec{p} = 2q\hat{i}$$

Em função do momento de um dipolo, o campo elétrico no eixo do dipolo em um ponto afastado de uma grande distância  $|x|$  está no sentido do momento do dipolo e possui uma intensidade de

$$E = \frac{2kp}{|x|^3} \quad 21-10$$

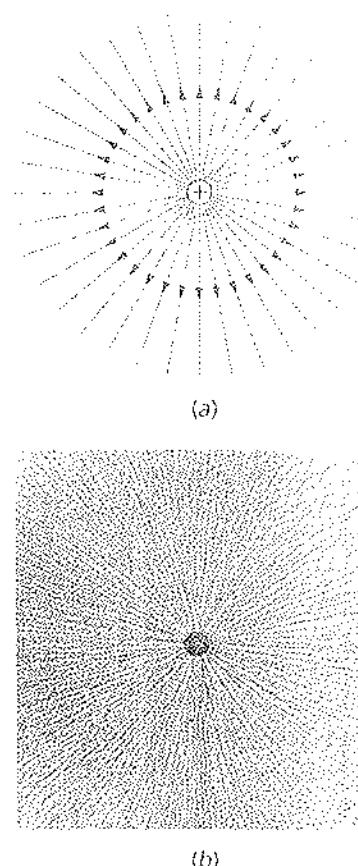
(Veja o Exemplo 21-8.) Em um ponto afastado de um dipolo em qualquer direção o módulo do campo elétrico é proporcional ao momento do dipolo e diminui com o cubo da distância. Se um sistema possui uma carga resultante, o campo elétrico diminui com  $1/r^2$  para grandes distâncias. Em um sistema com carga resultante nula, o campo elétrico diminui mais rapidamente com a distância. No caso de um dipolo elétrico, o campo diminui com  $1/r^3$ .

### 21-19 Linhas do Campo Elétrico

Pode-se visualizar o campo elétrico através da representação de linhas que indiquem sua orientação. Para um ponto arbitrário no campo, o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  é tangente à linha que passa por ele. As linhas do campo elétrico são também chamadas de linhas de força, uma vez que elas mostram a orientação da força exercida sobre uma carga de prova positiva. Para um ponto qualquer nas proximidades de uma carga puntiforme positiva, o campo elétrico  $\vec{E}$  é orientado radialmente afastando-se da carga. Conseqüentemente, as linhas do campo elétrico nas proximidades de uma carga positiva também serão orientadas de forma a se afastarem da carga. Analogamente, nas proximidades de uma carga puntiforme negativa as linhas do campo elétrico são orientadas em direção à carga negativa.

A Figura 21-19 mostra as linhas do campo elétrico de uma única carga puntiforme positiva. O espaçamento das linhas está relacionado ao valor do campo elétrico. Ao se afastar da carga, o campo fica mais fraco e as linhas de campo se tornam mais espaçadas. Considere uma superfície esférica de raio  $r$  com seu centro na carga. Sua área é igual a  $4\pi r^2$ . Assim, quando  $r$  aumenta a densidade das linhas de campo (o número de linhas por unidade de área) diminui proporcionalmente a  $1/r^2$ , a mesma razão de decréscimo de  $E$ . Logo, adotando-se a convenção de desenhar uma quantidade fixa de linhas a partir da carga puntiforme, sendo essa quantidade proporcional à carga  $q$  e se as linhas forem desenhadas simetricamente em relação à carga puntiforme, o valor do campo será indicado pela densidade das linhas. Quanto mais próximas essas linhas, mais intenso será o campo elétrico.

A Figura 21-20 mostra as linhas do campo elétrico de duas cargas puntiformes iguais e positivas  $q$  separadas de uma pequena distância. Nas proximidades de cada uma das cargas o campo é devido quase que exclusivamente àquela carga isolada, uma vez que a outra carga estará bem mais afastada. Conseqüentemente, as linhas de campo nas proximidades de ambas as cargas são radiais e igualmente espaçadas. Uma vez que as cargas são iguais, desenha-se uma mesma quantidade de linhas com origem em cada uma das cargas. Para grandes distâncias, os detalhes da configuração das cargas não são importantes, e o sistema fica semelhante a uma carga puntiforme com intensidade de  $2q$ . (Por exemplo, se as duas cargas estiverem afastadas de 1 mm e elas forem observadas de um ponto afastado de 100 km, sua configuração parecerá a de uma única carga.) Assim, a uma grande distância das cargas o campo é aproximadamente o mesmo devido a uma carga puntiforme  $2q$  e as linhas são, dentro de uma boa aproximação, igualmente espaçadas. Observando-se a Figura 21-20, pode-se



**FIGURA 21-19**  
(a) Linhas do campo elétrico de uma única carga puntiforme positiva. Se a carga fosse negativa, as setas seriam invertidas. (b) As mesmas linhas do campo elétrico evidenciadas por fragmentos de fibra suspensos em um óleo. O campo elétrico do corpo carregado no centro induz cargas opostas nas extremidades de cada fragmento, fazendo com que fiquem alinhados paralelos ao campo.

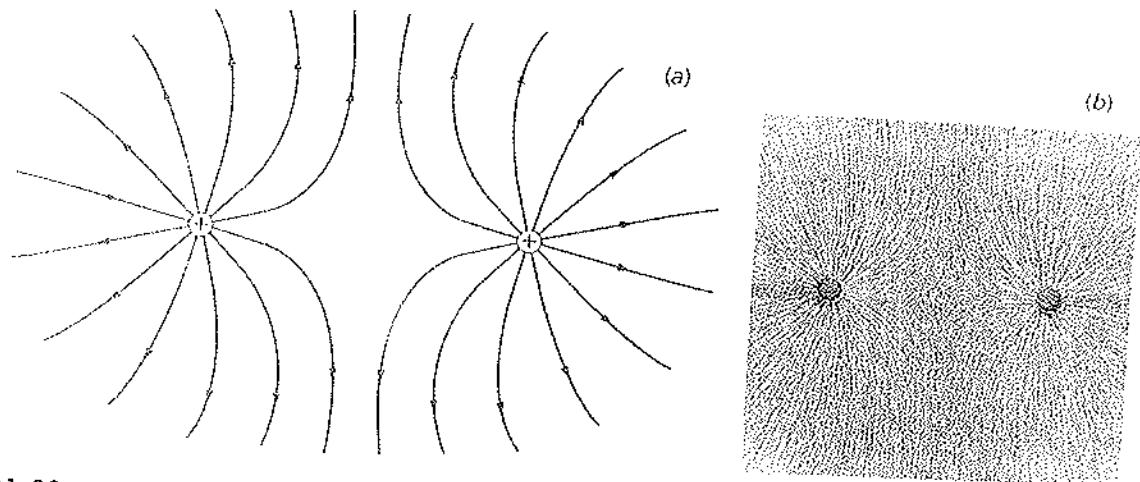


FIGURA 21-20

(a) Linhas do campo elétrico devido às duas cargas puntiformes positivas. As setas seriam invertidas se ambas as cargas fossem negativas. (b) As mesmas linhas do campo elétrico evidenciadas por fragmentos de fibra suspensos em óleo.

notar que a densidade das linhas de campo na região entre as duas cargas é pequena se comparada à densidade das linhas nas regiões imediatamente à esquerda e imediatamente à direita das cargas. Isso indica que a intensidade do campo elétrico na região entre as cargas é menor do que nas regiões imediatamente à esquerda e à direita das cargas, onde as linhas são menos espaçadas. Essa informação também pode ser obtida pelo cálculo direto do campo nos pontos situados nessas regiões.

Pode-se utilizar essas análises qualitativas para desenhar as linhas do campo elétrico para qualquer sistema de cargas puntiformes. A uma posição muito próxima de cada carga as linhas de campo são igualmente espaçadas e saem ou entram radialmente na carga, dependendo de seu sinal. A uma distância muito grande de todas as cargas, o detalhe da estrutura do sistema não é importante e as linhas de campo são similares àquelas de uma única carga puntiforme com o valor da carga equivalente do sistema. As regras de construção das linhas de um campo elétrico podem ser resumidas como segue:

1. O traçado das linhas de um campo elétrico começa com as cargas positivas (ou no infinito) e termina com as cargas negativas (ou no infinito).
2. As linhas são desenhadas com espaçamento uniforme entrando ou saindo de uma carga puntiforme isolada.
3. O número de linhas que saem de uma carga positiva ou que entram em uma carga negativa é proporcional à intensidade da carga.
4. A densidade das linhas (o número de linhas por unidade de área perpendicular às linhas) em qualquer ponto é proporcional à intensidade do campo naquele ponto.
5. Para grandes distâncias de um sistema de cargas com uma carga resultante, as linhas de campo são igualmente espaçadas e radiais. As cargas se comportam como se fossem uma única carga puntiforme com valor igual à carga resultante do sistema.
6. As linhas de campo não se cruzam. (Se duas linhas de campo se cruzassem, isso indicaria duas possíveis direções para o campo  $\vec{E}$  no ponto de interseção.)

#### REGRAS PARA O TRACADO DAS LINHAS DE UM CAMPO ELÉTRICO

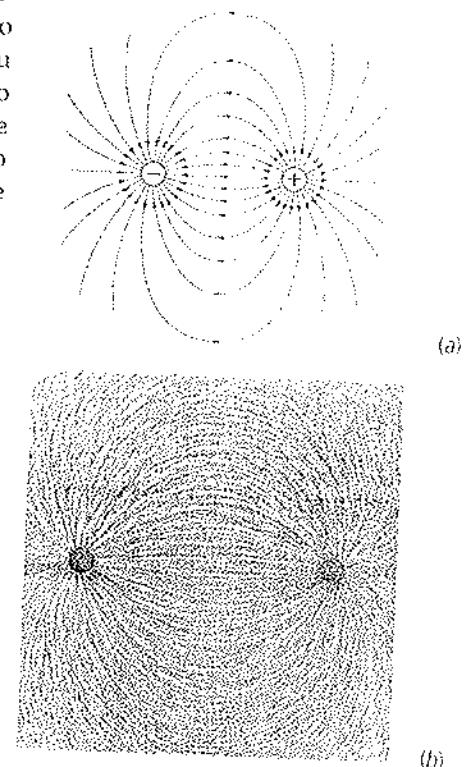


FIGURA 21-21

(a) Linhas do campo elétrico gerado por um dipolo elétrico. (b) As mesmas linhas de campo geradas por fragmentos de fibra em óleo.

A Figura 21-21 mostra as linhas do campo elétrico de um dipolo elétrico. Nas proximidades da carga positiva as linhas são orientadas radialmente saindo da carga. Nas proximidades da carga negativa as linhas são direcionadas radialmente entrando na carga. Uma vez que as cargas são de mesma intensidade, o número de linhas que saem da carga positiva é igual ao número de linhas que entram na carga negativa. Neste caso, o campo é intenso na região entre as cargas, conforme indicado pela alta densidade das linhas de campo nessa região do campo.

A Figura 21-22a mostra as linhas do campo elétrico para uma carga negativa  $-q$  a uma pequena distância de uma carga positiva  $+2q$ . O número de linhas que saem da carga positiva é igual ao dobro do número de linhas que entram na carga negativa. Assim, metade das linhas que saem da carga positiva  $+2q$  entra na carga negativa  $-q$ ; o restante sai do sistema. Para grandes distâncias das cargas (Figura 21-22b), as linhas que saem do sistema são, de forma aproximada, simetricamente espaçadas e orientadas no sentido de sair do sistema, como ocorreria para uma única carga positiva  $+q$ .

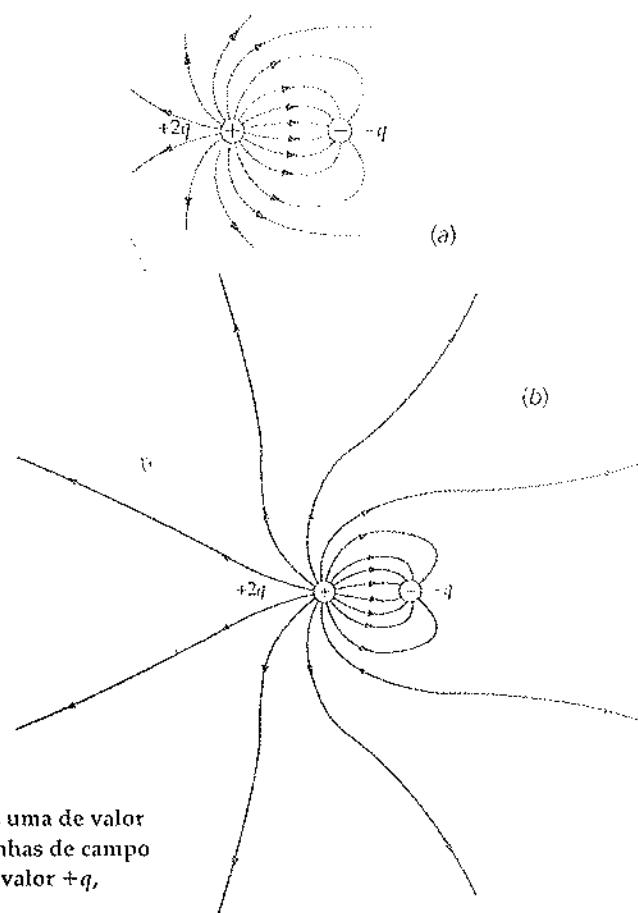


FIGURA 21-22

(a) Linhas do campo elétrico decorrente de duas cargas puntiformes, uma de valor  $+2q$  e outra de valor  $-q$ . (b) Para grandes distâncias das cargas, as linhas de campo se aproximam daquelas geradas por uma única carga puntiforme de valor  $+q$ , localizada no centro de carga.

As linhas do campo elétrico gerado por duas esferas condutoras são mostradas na Figura 21-23. Qual é o sinal e a intensidade das cargas das duas esferas?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A carga de uma esfera é positiva se saem mais linhas do que entram e negativa se entram mais do que saem. A relação das intensidades das cargas é igual à relação entre o número resultante de linhas que entram ou saem das esferas.

Uma vez que 11 linhas de campo elétrico saem da esfera maior à esquerda e 3 entram, o número resultante de linhas que saem é igual a 8, logo a carga da esfera maior é positiva. Para a esfera menor à direita, 8 linhas saem e nenhuma entra, assim sua carga também é positiva. Sendo o número resultante de linhas que deixam cada uma das esferas igual a 8, as esferas possuem cargas iguais e positivas. A carga da esfera menor gera um campo intenso nas vizinhanças da superfície da esfera maior, o que causa um acúmulo local de carga negativa na esfera maior — indicado pelas três linhas de campo entrando na esfera. Boa parte da superfície da esfera maior possui carga positiva, logo sua carga total é positiva.

A convenção que relaciona a intensidade de um campo elétrico às linhas do campo elétrico é válida porque o campo elétrico varia com o inverso do quadrado da distância a uma carga puntiforme. Uma vez que o campo gravitacio-

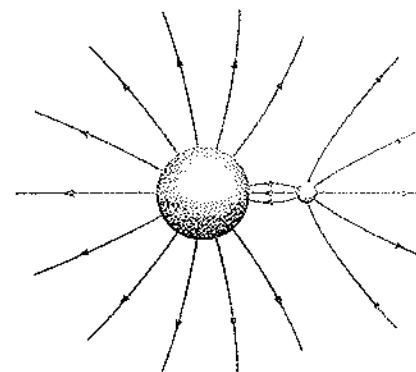
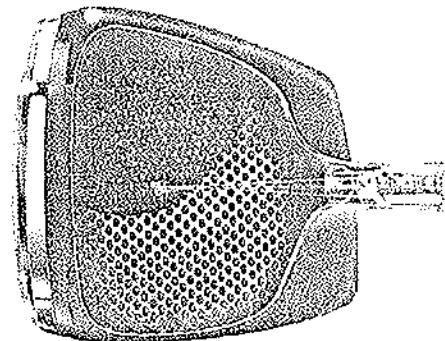


FIGURA 21-23

nal de uma massa puntiforme também varia com o inverso do quadrado da distância, o traçado das linhas de campo também é útil para a representação do campo gravitacional. Nas proximidades de uma massa puntiforme, as linhas do campo gravitacional convergem para a massa da mesma forma que as linhas do campo elétrico convergem para uma carga negativa. Entretanto, diferentemente das linhas do campo elétrico nas proximidades de uma carga positiva, não haverá pontos do espaço dos quais as linhas do campo gravitacional sejam divergentes. Isso ocorre porque a força gravitacional é sempre atrativa, nunca repulsiva.



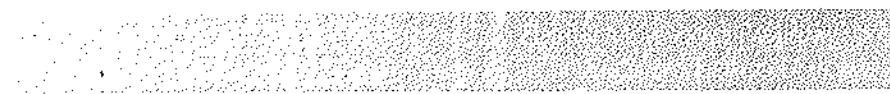
Desenho esquemático de um tubo de raios catódicos utilizado em televisores coloridos. Os feixes de elétrons emitidos pelo canhão de elétrons à direita ativam o material fluorescente da tela à esquerda, originando pontos brilhantes cujas cores dependem da intensidade relativa de cada feixe. Os campos elétricos entre as placas defletoras do canhão (ou campos magnéticos das bobinas circundando o canhão) desviam os feixes. Os feixes varridos ao longo da tela, segundo uma linha horizontal, são desviados para baixo e, em seguida, varridos novamente. A tela, como um todo, é coberta dessa forma a uma taxa de 30 vezes por segundo.

### 21-6 Movimento das Cargas Puntiformes nos Campos Elétricos

Quando uma partícula com uma carga  $q$  é colocada em um campo elétrico  $\vec{E}$ , ela fica sujeita a uma força igual a  $q\vec{E}$ . Se a força elétrica for a única força atuante sobre a partícula, sua aceleração será

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

onde  $m$  é a massa da partícula. (Se a partícula for um elétron, sua velocidade em um campo elétrico, em geral, corresponderá a uma parcela significativa da velocidade da luz. Nesses casos, as leis de Newton para o movimento devem ser modificadas pela teoria da relatividade restrita de Einstein.) Sendo o campo elétrico conhecido, a relação entre a carga e a massa da partícula pode ser determinada pela medida da aceleração. Em 1897, J. J. Thomson utilizou o desvio de elétrons em um campo elétrico uniforme para demonstrar a existência dos elétrons e medir a relação entre sua carga e sua massa. Exemplos do cotidiano relacionados a dispositivos que funcionam baseados no movimento dos elétrons em campos elétricos são os osciloscópios, os monitores utilizados em computadores e os tubos de imagens dos televisores.



Um elétron é projetado em um campo elétrico uniforme  $\vec{E} = (1000 \text{ N/C})\hat{i}$ , com uma velocidade inicial  $v_0 = (2 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$  na direção e no sentido do campo (Figura 21-24). Qual é a distância percorrida pelo elétron antes de atingir momentaneamente o repouso?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Uma vez que a carga do elétron é negativa, a força  $\vec{F} = -q\vec{E}$  atuante sobre ele é orientada no sentido oposto ao do campo. Sendo  $\vec{E}$  constante, a força será também constante, podendo-se, portanto, utilizar as expressões do movimento com aceleração constante do Capítulo 2. Considera-se que o campo seja orientado no sentido positivo do eixo  $x$ .

1. O deslocamento  $\Delta x$  está relacionado às velocidades inicial e final:
- $$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$
2. A aceleração é obtida à partir da segunda lei de Newton:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-qE}{m}$$



FIGURA 21-24

3. Quando  $v_x = 0$ , o deslocamento vale:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{0 - v_{0x}^2}{2(-eE/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE} \\ &= \frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ N/C})} \\ &= 1,14 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,14 \text{ cm}\end{aligned}$$

### PROBLEMA 21-25

Um elétron entra em um campo elétrico uniforme  $\vec{E} = (-2000 \text{ N/C})\hat{j}$ , com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (10^6 \text{ m/s})\hat{i}$  perpendicular ao campo (Figura 21-25). (a) Compare as forças gravitacional e elétrica atuantes sobre o elétron. (b) Qual o valor do desvio sofrido pelo elétron após ter percorrido uma distância de 1 cm na direção  $x$ ?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Calcule a relação entre a força elétrica  $qE = -eE$  e a força gravitacional  $mg$ . (b) Uma vez que  $mg$  é desprezível, a força atuante sobre o elétron é igual a  $-eE$  e possui a orientação vertical para cima. Assim, o elétron se move com velocidade horizontal constante  $v_x$  e é desviado para cima de uma quantidade igual a  $y = \frac{1}{2}at^2$ , onde  $t$  é o tempo necessário para ele percorrer 1 cm na direção  $x$ .

- (a) Calcule a relação entre as intensidades das forças elétrica  $F_e$  e gravitacional,  $F_g$ :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})} = 3,6 \times 10^{13}$$

- (b) 1. Expressse o desvio vertical em função da aceleração  $a$  e do tempo  $t$ :

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

2. Expressse o tempo necessário para o elétron percorrer uma distância horizontal  $x$  com velocidade horizontal constante  $v_0$ :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

3. Utilize esse resultado de  $t$  e  $a_y = eE/m$  para calcular o desvio  $y$ :

$$y = \frac{1}{2}m \left( \frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \left( \frac{0,01 \text{ m}}{10^6 \text{ m/s}} \right)^2$$

$$= 1,76 \text{ cm}$$

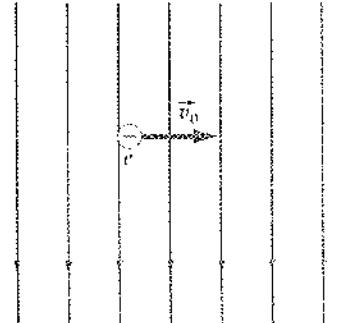


FIGURA 21-25

**NOTAS** (a) Como geralmente ocorre, a força elétrica é muito maior do que a força gravitacional. Assim, não é necessário considerar a gravidade no projeto de um tubo de raios catódicos, por exemplo, ou no cálculo do desvio da trajetória do elétron no exemplo anterior. Na realidade, o tubo de imagem de um televisor opera igualmente bem quando a tela é colocada na horizontal ou na vertical, como se a gravidade não estivesse atuando. (b) A trajetória de um elétron movendo-se em um campo elétrico uniforme é uma parábola, a mesma trajetória de um nêutron movendo-se em um campo gravitacional uniforme.

## Coloque-o no Contexto

Você acaba de terminar a impressão de um longo texto para seu professor de Português e fica curioso sobre como a impressora a jato de tinta sabe onde exatamente a tinta deve ser jateada. Você pesquisa na Internet e encontra um esquema (Figura 21-26) mostrando que as gotas de tinta são carregadas eletricamente e passam entre duas placas metálicas carregadas com cargas opostas, gerando um campo elétrico uniforme entre elas. Tendo estudado o comportamento dos campos elétricos no curso de Física, você é capaz de determinar a intensidade do campo utilizado nesse tipo de impressora. Você continua com sua pesquisa e encontra a informação de que as gotas de tinta passam a uma velocidade inicial de 40 m/s pelo diâmetro de um orifício de 40  $\mu\text{m}$ , e que cada gota carregada com 2 nC é desviada para cima de uma distância de 3 mm enquanto percorre a região de 1 cm de comprimento entre as placas. Determine a intensidade do campo elétrico. (Despreze qualquer efeito da gravidade no movimento das gotas.)

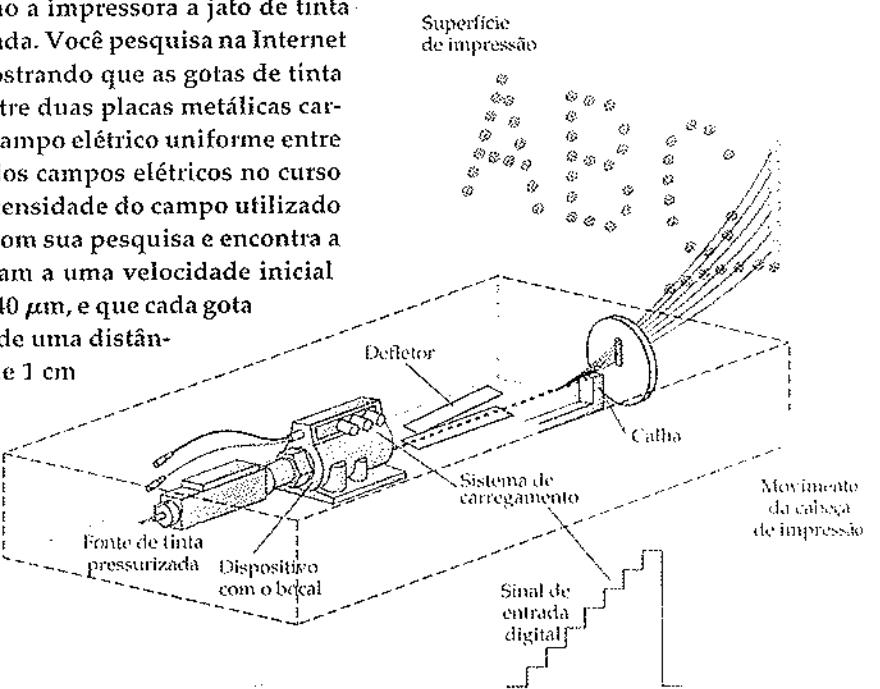
**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA**

O campo elétrico  $E$  exerce uma força elétrica constante  $\vec{F}$  sobre a gota quando ela passa entre as duas placas, onde  $\vec{F} = q\vec{E}$ . De-seja-se determinar  $E$ . Pode-se obter  $\vec{F}$  conhecendo-se a massa e a aceleração,  $\vec{F} = m\vec{a}$ . A aceleração pode ser determinada a partir da cinemática, e a massa pode ser obtida utilizando o raio da gota e admitindo que a massa específica da tinta é de 1000 kg/m<sup>3</sup> (a mesma da água).

1. O campo elétrico é igual à relação entre a força e a carga:
2. A força, orientada no sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), é igual à massa multiplicada pela aceleração:
3. O deslocamento vertical é obtido utilizando uma fórmula da cinemática para movimentos com aceleração constante, com  $v_{0y} = 0$ :
4. O tempo é o gasto pela gota para percorrer uma distância  $\Delta x$  a uma velocidade  $v_0 = 40 \text{ m/s}$ :
5. Resolvendo para  $a$ , tem-se:

6. A massa da gota é igual à massa específica da tinta multiplicada pelo volume:
7. Resolva para  $E$ :

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{\rho_3^2 \pi r^3}{q} \frac{2v_0^2 \Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{8\pi \rho r^3 v_0^2 \Delta y}{3 q (\Delta x)^2} = \frac{8\pi (1000 \text{ kg/m}^3) (20 \times 10^{-6} \text{ m})^3 (40 \text{ m/s})^2 (3 \times 10^{-3} \text{ m})}{(2 \times 10^{-9} \text{ C})(0,01 \text{ m})^2} = 1610 \text{ N/C}$$

**FIGURA 21-26**

Jato de tinta utilizado em impressoras. A tinta sai de um bocal na forma de gotas. Qualquer pequena gota destinada a formar um ponto na imagem é carregada eletricamente. O defletor consiste em um par de placas carregadas com cargas opostas. Quanto maior a carga recebida pela gota, maior a distância de seu desvio quando ela passa entre as placas do defletor. As gotas que não são carregadas eletricamente não são desviadas para cima. Essas gotas caem em uma calha, e a tinta retorna ao reservatório de tinta.

$$E = \frac{F}{q}$$

$$F = ma$$

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x = v_{0x}t = v_0t, \text{ logo } t = \Delta x/v_0$$

$$a = \frac{2\Delta y}{t^2} = \frac{2\Delta y}{(\Delta x/v_0)^2} = \frac{2v_0^2 \Delta y}{(\Delta x)^2}$$

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

**NOTAS** O jato de tinta nesse exemplo é conhecido como jato de tinta contínuo com desvio múltiplo. Ele é utilizado em diversas impressoras industriais. As impressoras a jato de tinta vendidas para uso com computadores caseiros não utilizam gotas carregadas desviadas por um campo elétrico.

### 21-7 Dipólos Elétricos nos Campos Elétricos

No Exemplo 21-6 obteve-se o campo elétrico produzido por um dipolo, um sistema de duas cargas puntiformes iguais e opostas próximas uma da outra. Considera-se, agora, o comportamento de um dipolo elétrico na presença de um campo elétrico externo. Algumas moléculas possuem momentos de dipolo elétrico permanentes devidos a uma distribuição não-uniforme das cargas em seu interior. Essas moléculas são chamadas de moléculas polares. Um exemplo é o HCl, que é constituído por um íon de hidrogênio positivo de carga  $+e$  combinado com um íon de cloro negativo, de carga  $-e$ . O centro de carga do íon positivo não coincide com o centro de carga do íon negativo, assim a molécula possui um momento de dipolo permanente. Outro exemplo é o da água (Figura 21-27).

Um campo elétrico externo uniforme não exerce qualquer força sobre um dipolo, porém um torque que tende a girar o dipolo no sentido do campo. Na Figura 21-28 pode-se observar que o torque calculado em relação à posição de qualquer das cargas possui uma intensidade  $\tau = qEL \sin \theta = pE \sin \theta$ .<sup>\*</sup> O sentido do torque é o de entrar para o plano da figura, de modo que ele gira o momento do dipolo  $\vec{p}$  no sentido de  $\vec{E}$ . O torque pode ser convenientemente escrito como o produto vetorial entre o momento do dipolo  $\vec{p}$  e o campo elétrico  $\vec{E}$ .

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

21-11

Quando o dipolo gira de um ângulo  $d\theta$ , o campo elétrico realiza o trabalho:

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta$$

(O sinal negativo indica que o torque é oposto a qualquer incremento no ângulo  $\theta$ .) Igualando o negativo desse trabalho à variação da energia potencial, tem-se

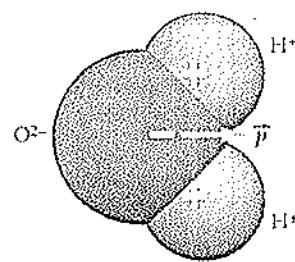
$$dU = -dW = +pE \sin \theta d\theta$$

Integrando, obtém-se

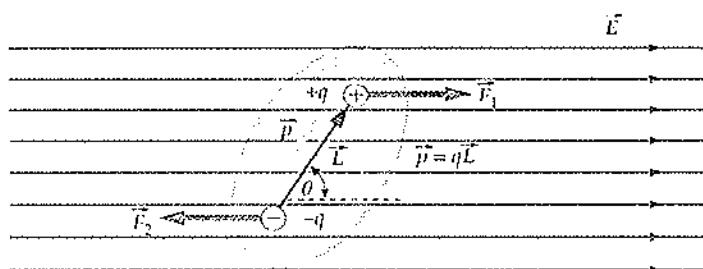
$$U = -pE \cos \theta + U_0$$

Definindo a energia potencial  $U_0$  como sendo nula quando  $\theta = 90^\circ$ , a energia potencial do dipolo será

$$U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



**FIGURA 21-27**  
Uma molécula de  $\text{H}_2\text{O}$  possui um momento de dipolo elétrico permanente orientado do centro da carga negativa para o centro da carga positiva.



**FIGURA 21-28**  
Um dipolo em um campo elétrico uniforme fica sujeito a forças iguais e opostas que tendem a girá-lo de modo que seu momento fique alinhado com o campo elétrico.

Os fornos de microondas aproveitam o momento do dipolo elétrico das moléculas da água para cozinhar os alimentos. Como todas as ondas eletromagnéticas, as microondas possuem campos elétricos oscilantes que exercem torques

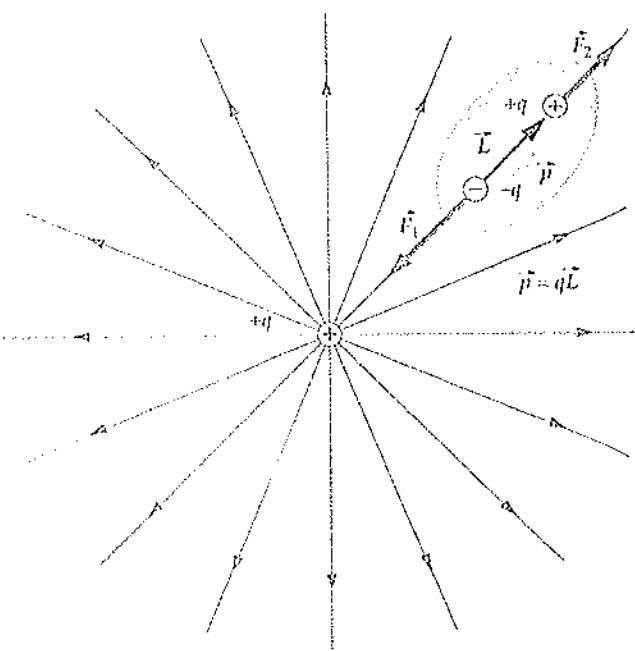
\*O torque produzido por duas forças iguais e opostas (um arranjo chamado binário) é o mesmo em relação a qualquer ponto do espaço.

sobre os dipolos elétricos. Esses torques causam uma rotação das moléculas de água cuja energia cinética é significativa. Dessa forma, a energia é rapidamente transferida para as moléculas de água distribuídas no alimento pela radiação das microondas, provocando o cozimento em um curto intervalo de tempo, o que torna os fornos de microondas tão atrativos.

As moléculas não-polares não apresentam movimento de dipolo elétrico permanente. Entretanto, todas as moléculas neutras contêm quantidades iguais de cargas positivas e negativas. Na presença de um campo elétrico externo  $\vec{E}$ , as cargas ficam separadas no espaço. As cargas positivas são empurradas no sentido de  $\vec{E}$  e as cargas negativas são empurradas no sentido oposto. Assim, a molécula adquire um momento de dipolo induzido paralelo ao campo elétrico externo e fica polarizada.

Em um campo elétrico não-uniforme, o dipolo fica sujeito a uma força resultante, uma vez que o campo elétrico possui intensidades diferentes nos pólos positivo e negativo. A Figura 21-29 mostra como uma carga puntiforme positiva polariza uma molécula não-polar e a atrai. Um exemplo familiar é a atração que mantém uma bola de encher carregada eletrostaticamente contra uma parede. O campo não-uniforme produzido pela carga sobre a bola polariza as moléculas na parede e as atrai. Uma força igual e oposta é exercida pelas moléculas da parede sobre a bola.

O diâmetro de um átomo ou molécula é da ordem de  $10^{-10}\text{ m} = 0,1\text{ nm}$ . Uma unidade conveniente para o momento de dipolo elétrico dos átomos e das moléculas é obtida pelo produto da carga elétrica fundamental pela distância de 1 nm. Por exemplo, o momento do dipolo de  $\text{H}_2\text{O}$  nessas unidades tem uma intensidade de cerca de  $0,04\text{ e}\cdot\text{nm}$ .



**FIGURA 21-29**

Uma molécula não-polar em um campo elétrico não-uniforme de carga puntiforme positiva. O momento de dipolo elétrico induzido  $\vec{p}$  é paralelo ao campo da carga. Uma vez que a carga puntiforme está mais próxima do centro da carga negativa do que do centro da carga positiva, existe uma força resultante de atração entre o dipolo e a carga. Se a carga puntiforme fosse negativa, o momento de dipolo induzido seria invertido e a molécula continuaria a ser atraída pela carga puntiforme.

Um dipolo com momento de  $0,02\text{ e}\cdot\text{nm}$  faz um ângulo de  $20^\circ$  com um campo elétrico uniforme de  $3 \times 10^3\text{ N/C}$  (Figura 21-30). Determine (a) a intensidade do torque sobre o dipolo e (b) a energia potencial do sistema.

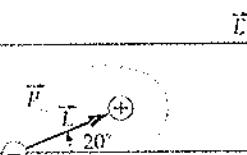
**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O torque é obtido a partir da relação  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ , e a energia potencial pela relação  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .

1. Calcule a intensidade do torque:

$$\begin{aligned}\tau &= |\vec{p} \times \vec{E}| = pE \sin \theta = (0,02\text{ e}\cdot\text{nm})(3 \times 10^3\text{ N/C})(\sin 20^\circ) \\ &= (0,02)(1,6 \times 10^{-19}\text{ C})(10^{-9}\text{ m})(3 \times 10^3\text{ N/C})(\sin 20^\circ) \\ &= 3,28 \times 10^{-27}\text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

2. Calcule a energia potencial:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta = -(0,02)(1,6 \times 10^{-19}\text{ C})(10^{-9}\text{ m})(3 \times 10^3\text{ N/C}) \cos 20^\circ = -9,02 \times 10^{-27}\text{ J}$$



**FIGURA 21-30**

## RESUMO

1. A quantização e a conservação são propriedades fundamentais da carga elétrica.
2. A lei de Coulomb é a lei fundamental de interação entre cargas em repouso.
3. O campo elétrico descreve as condições no espaço estabelecidas por uma distribuição de carga.

### Tópicos

### Equações e Observações Importantes

#### 1. Carga Elétrica

Existem dois tipos de carga elétrica, a positiva e a negativa.

##### Quantização

A carga elétrica é quantizada, isto é, ela sempre se apresenta na forma de um múltiplo inteiro da unidade fundamental de carga  $e$ . A carga do elétron é  $-e$  e a do próton é  $+e$ .

21-1

##### Intensidade

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

##### Conservação

A carga elétrica é conservada. Em um processo qualquer, ela não pode ser criada nem destruída, apenas transferida.

#### 2. Condutores e Isolantes

Nos condutores, cerca de um elétron por átomo é livre para mover-se por todo o material. Nos isolantes, todos os elétrons são ligados aos átomos vizinhos.

##### Aterramento

Um condutor de grandes dimensões que possa fornecer uma quantidade ilimitada de carga (como a Terra) é chamado de terra.

#### 3. Carga por Indução

Um condutor pode ser carregado mantendo-se em suas proximidades um corpo carregado que atrai ou repele os elétrons livres. Aterrando-se o condutor pode-se, em seguida, descarregar as cargas mais afastadas.

#### 4. Lei de Coulomb

A força exercida por uma carga  $q_1$  sobre outra carga  $q_2$  é expressa por

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{kq_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$$

21-2

onde  $\hat{r}_{1,2}$  é um vetor unitário orientado de  $q_1$  para  $q_2$ .

##### Constante de Coulomb

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

21-3

#### 5. Campo Elétrico

O campo elétrico gerado por um sistema de cargas em um ponto do espaço é definido como a força resultante exercida pelas cargas sobre uma carga de prova muito pequena  $q_0$  dividida por  $q_0$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

21-5

##### Campo devido a uma carga puntiforme

$$\vec{E}_{i,p} = \frac{kq_i}{r_{i,p}^2} \hat{r}_{i,p}$$

21-7

##### Campo devido a um sistema de cargas puntiformes

O campo elétrico devido à ação de diversas cargas é o vetor resultante da soma dos vários campos gerados pelas cargas individualmente:

$$\vec{E}_{n,p} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,p}^2} \hat{r}_{i,p}$$

21-8

#### 6. Linhas de Campo Elétrico

O campo elétrico pode ser representado pelas linhas de campo elétrico que se originam nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas. A intensidade do campo elétrico é indicada pela densidade das linhas de campo elétrico.

## 7. Dipolo Elétrico

Um dipolo elétrico é um sistema constituído por duas cargas iguais e opostas separadas por uma pequena distância.

Momento de um dipolo

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

21-9

onde  $\vec{L}$  é orientado da carga negativa para a carga positiva.

Campo gerado por um dipolo

O campo elétrico a uma grande distância de um dipolo é proporcional ao momento do dipolo e diminui com o cubo da distância.

Torque sobre um dipolo

Em um campo elétrico uniforme, a força resultante sobre um dipolo é nula, porém existe um torque que tende a alinhar o dipolo na direção do campo.

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

21-11

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

21-12

Energia potencial de um dipolo

Moléculas polares, como  $H_2O$ , possuem momentos de dipolo permanentes, uma vez que seus centros de carga positiva e de carga negativa não coincidem. Na presença de um campo elétrico, elas se comportam como simples dipolos. As moléculas não-polares não possuem momentos de dipolo permanentes, porém quando na presença de um campo elétrico elas adquirem momento de dipolo induzido.



## PROBLEMAS

- Problema com conceito único, uma única etapa, e relativamente fácil
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador

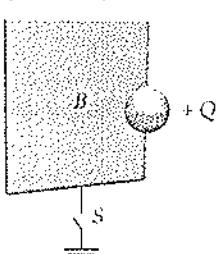
Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário. Em outros, é necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e estimativas.

### Problemas Conceituais

1 • • Discuta as semelhanças e diferenças entre as propriedades da carga elétrica e da massa gravitacional.

2 • Podem os isolantes ser carregados por indução?

3 • • A placa retangular metálica  $B$  é aterrada através de uma chave  $S$  que, inicialmente, está fechada (Figura 21-31). Enquanto a carga  $+Q$  se mantém próxima a  $B$ , a chave  $S$  fica aberta. A carga  $+Q$  é então removida. Qual é a condição de carga da placa retangular metálica  $B$ ? (a) A placa fica carregada positivamente. (b) A placa fica descarregada. (c) A placa fica carregada negativamente. (d) A carga pode estar em qualquer das situações anteriores, dependendo da carga que tinha antes de a carga  $+Q$  ser colocada em sua proximidade.



**FIGURA 21-31**  
Problema 3

4 • • Explique, descrevendo cada etapa, como um bastão isolante carregado positivamente pode ser utilizado para carregar uma esfera metálica (a) negativamente e (b) positivamente. (c) Pode o mesmo bastão ser utilizado para tornar simultaneamente uma esfera carregada positivamente e outra negativamente, sem que o bastão seja recarregado?

5 • • Duas esferas condutoras descarregadas, com suas superfícies em contato, são apoiadas sobre uma grande mesa de madeira, montada sobre suportes isolantes. Um bastão com carga positiva é aproximado de uma delas pelo lado diametralmente oposto ao ponto de contato com a outra esfera. (a) Descreva a carga induzida nas duas esferas condutoras e esquematize as distribuições de carga sobre elas. (b) As duas esferas são afastadas e o bastão carregado é removido. Esquematize as distribuições de carga nas esferas separadas.

6 • Três cargas,  $+q$ ,  $+Q$  e  $-Q$ , são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero conforme mostrado na Figura 21-32. A força resultante sobre a carga  $+q$  devida às duas outras cargas é (a) Vertical para cima. (b) Vertical para baixo. (c) Nula. (d) Horizontal para a esquerda. (e) Horizontal para a direita.



**FIGURA 21-32**  
Problema 6

7 • Uma carga positiva é livre para mover-se, porém está em repouso em um campo elétrico  $\vec{E}$ . Pode-se afirmar que essa carga: (a) acelera na direção perpendicular a  $\vec{E}$ .



- (b) permanece em repouso.  
 (c) acelera no sentido oposto a  $\vec{E}$ .  
 (d) acelera no mesmo sentido de  $\vec{E}$ .  
 (e) nenhuma das alternativas anteriores.
- 8** • Se quatro cargas são colocadas nos vértices de um quadrado, conforme mostrado na Figura 21-33, o campo  $\vec{E}$  será nulo  
 (a) em todos os pontos médios dos lados do quadrado.  
 (b) no centro do quadrado.  
 (c) no ponto médio entre as duas cargas de cima e no ponto médio entre as duas cargas de baixo.  
 (d) nenhuma das alternativas anteriores.

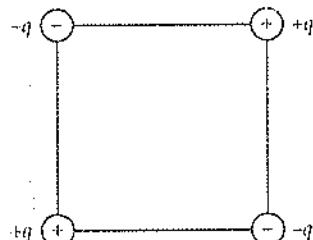


FIGURA 21-33  
Problema 8

- 9** • • Em um ponto específico do espaço, a força resultante atuante sobre uma carga  $Q$  é nula. Dentro dessa premissa, pode-se afirmar que  
 (a) não existem cargas nas vizinhanças do ponto.  
 (b) havendo cargas nas vizinhanças desse ponto, elas têm o sinal oposto ao de  $Q$ .  
 (c) havendo cargas nas vizinhanças desse ponto, a carga total positiva deve ser igual à carga total negativa.  
 (d) nenhuma das afirmativas anteriores é verdadeira.
- 10** • Duas cargas, uma de  $+4q$  e outra de  $-3q$ , são separadas de uma pequena distância. Desenhe as linhas do campo elétrico gerado por esse sistema.

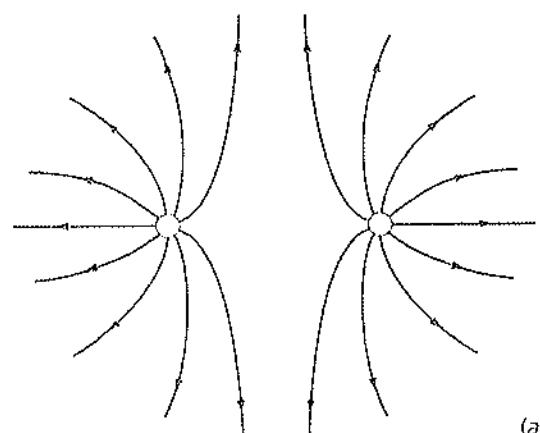
- 11** • Duas cargas, uma de  $+q$  e outra de  $-3q$ , são separadas de uma pequena distância. Desenhe as linhas do campo elétrico gerado por esse sistema.

- 12** • Três cargas puntiformes iguais e positivas são posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero. Esquematize as linhas do campo elétrico no plano do triângulo.

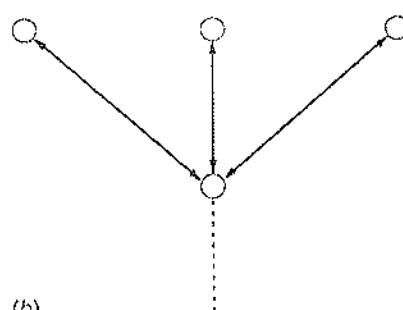
- 13** • Quais das seguintes afirmativas estão corretas?  
 (a) Uma carga positiva sofre a ação de uma força eletrostática atrativa orientada para um condutor neutro em suas vizinhanças.  
 (b) Uma carga positiva não sofre a ação de qualquer força eletrostática quando posicionada nas proximidades de um condutor neutro.  
 (c) Uma carga positiva sofre a ação de uma força repulsiva quando nas proximidades de um condutor.  
 (d) Independentemente do sentido da força atuante em uma carga positiva nas proximidades de um condutor neutro, a força atuante em uma carga negativa será oposta.  
 (e) Nenhuma das afirmativas anteriores é correta.

- 14** • Qual dos diagramas mostrados na Figura 21-34 (se algum) representa melhor as linhas do campo elétrico no entorno de um dipolo elétrico?

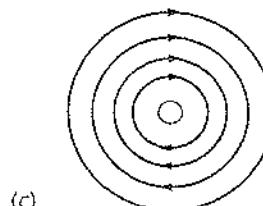
- 15** • • Uma molécula com momento de dipolo elétrico  $\vec{p}$  é orientada de modo que  $\vec{p}$  faz um ângulo  $\theta$  com um campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ . O dipolo é livre para mover-se em resposta à força gerada pelo campo. Descreva o movimento do dipolo. Admita ago-



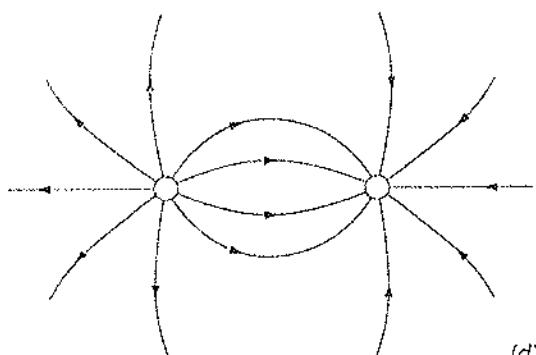
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 21-34  
Problema 14

ra que o campo elétrico não seja uniforme e aumente com o aumento da coordenada  $x$ . Como será o movimento do dipolo?

- 16** • • Verdadeiro ou falso:  
 (a) O campo elétrico de uma carga puntiforme é sempre orientado no sentido de afastar-se da carga.  
 (b) Qualquer carga macroscópica  $Q$  pode ser expressa como  $Q = \pm Ne$ , onde  $N$  é um inteiro e  $e$  é a carga do elétron.  
 (c) As linhas de campo elétrico nunca divergem de um ponto no espaço.

- (d) As linhas de campo elétrico nunca se cruzam em um ponto do espaço.  
 (e) Todas as moléculas possuem momentos de dipolo elétrico na presença de um campo elétrico externo.

17 •• Duas esferas metálicas possuem cargas  $+q$  e  $-q$ . De que forma a força atuante em uma delas varia se (a) as esferas forem colocadas na água e a distância entre elas não for alterada, e (b) uma terceira esfera metálica for colocada entre as duas primeiras? Explique.

18 •• Uma esfera metálica possui carga elétrica positiva. Seria possível para ela atrair outra esfera carregada positivamente? Explique.

19 •• Uma simples demonstração da atração eletrostática pode ser realizada pendurando-se uma pequena esfera de estanho a um fio e aproximando-se dela uma pequena vareta carregada. Inicialmente a esfera será atraída pela varinha, porém ao se tocarem a esfera será violentamente repelida. Explique esse comportamento.

### Estimativas e Aproximações

20 •• Duas pequenas esferas são conectadas às extremidades opostas de um cabo de aço com comprimento de 1 m e área de seção transversal de  $1,5 \text{ mm}^2$ . Uma carga positiva  $Q$  é colocada em cada esfera. Estime o maior valor possível de  $Q$  antes de o cabo ser rompido, dado que a resistência à tração do aço é de  $5,2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ .

21 •• A carga resultante em um corpo qualquer é o resultado do excesso ou do déficit de uma fração de elétrons extremamente pequena no corpo. Na realidade, uma carga desbalanceada maior do que essa resultaria na destruição do corpo. (a) Estime a força atuante em um bastão de cobre de  $0,5 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$  se o número de elétrons no cobre for superior ao dos prótons em 0,0001%. Admita que metade do excesso de elétrons migre para cada uma das extremidades do bastão de cobre. (b) Calcule o maior desbalanceamento possível, sabendo que o cobre apresenta uma resistência à tração de  $2,3 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ .

22 •• As descargas elétricas (raios) no ar ocorrem quando os íons livres são acelerados por um campo elétrico a uma velocidade alta o suficiente para ionizar outras moléculas de gás com o impacto. (a) Admitindo que, na média, o íon se move ao longo de uma trajetória livre média através do gás antes de atingir uma molécula e que ele necessita de uma energia de aproximadamente 1 eV para ionizá-la, estime o valor do campo necessário para a "ruptura elétrica" do ar a uma pressão de  $1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  e uma temperatura de 300 K. Admita que a área de seção transversal de uma molécula de nitrogênio seja de aproximadamente  $0,1 \text{ nm}^2$ . (b) Qual a dependência do potencial da ruptura com a temperatura (mantidas as demais características constantes)? E quanto à pressão?

23 •• Uma demonstração comum em sala de aula consiste em friccionar um bastão de plástico com uma pele para carregá-lo e, em seguida, colocá-lo ao lado de uma lata de refrigerante vazia (Figura 21-35). A lata rolará em direção ao bastão e adquirirá, por indução,

uma carga no lado mais próximo do bastão. Tipicamente, se o bastão for mantido a uma distância de aproximadamente 10 cm da lata, esta terá uma aceleração inicial de cerca de  $1 \text{ m/s}^2$ . Se a massa da lata for de  $0,018 \text{ kg}$ , estime a carga no bastão.

24 •• Estime a força necessária para unir os núcleos de He, sabendo que a distância entre os núcleos é de aproximadamente  $10^{-16} \text{ m}$  e que estes contêm 2 prótons.

### Carga Elétrica

25 • Um bastão de plástico é friccionado com uma camisa de lã, ficando carregado com  $-0,8 \mu\text{C}$ . Quantos elétrons foram transferidos da camisa de lã para o bastão de plástico?

26 • A carga de uma quantidade de prótons igual ao número de Avogadro ( $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ ) é chamada de faraday. Calcule o número de coulombs em um faraday.

27 • Quantos coulombs de carga positiva existem em 1 kg de carbono? Sabe-se que em doze gramas de carbono existe um número de Avogadro de átomos e que cada átomo de carbono possui seis prótons e seis elétrons.

### Lei de Coulomb

28 • Uma carga  $q_1 = 4,0 \mu\text{C}$  é posicionada na origem e uma carga  $q_2 = 6,0 \mu\text{C}$  é posicionada no eixo  $x$  em  $x = 3,0 \text{ m}$ . (a) Determine a força sobre a carga  $q_2$ . (b) Determine a força sobre  $q_1$ . (c) Quais seriam suas respostas aos itens (a) e (b) se  $q_2$  fosse igual a  $-6,0 \mu\text{C}$ ?

29 • Três cargas puntiformes são posicionadas no eixo  $x$ :  $q_1 = -6,0 \mu\text{C}$  em  $x = -3,0 \text{ m}$ ,  $q_2 = 4,0 \mu\text{C}$  na origem e  $q_3 = -6,0 \mu\text{C}$  em  $x = 3,0 \text{ m}$ . Determine a força atuante em  $q_1$ .

30 •• Três cargas, cada uma com intensidade de  $3 \text{ nC}$ , estão localizadas nos vértices de um quadrado cujo lado é igual a  $5 \text{ cm}$ . As duas cargas nos vértices opostos são positivas e a outra carga é negativa. Determine a força exercida por essas cargas sobre uma quarta carga  $q = +3 \text{ nC}$  localizada no vértice remanescente.

31 •• Uma carga de  $5 \mu\text{C}$  é posicionada sobre o eixo  $y$  em  $y = 3 \text{ cm}$  e uma segunda carga de  $-5 \mu\text{C}$  é posicionada também sobre o eixo  $y$  em  $y = -3 \text{ cm}$ . Determine a força sobre uma carga de  $2 \mu\text{C}$  localizada sobre o eixo  $x$  em  $x = 8 \text{ cm}$ .

32 •• Uma carga puntiforme de  $-2,5 \mu\text{C}$  está localizada na origem. Uma segunda carga puntiforme de  $6 \mu\text{C}$  está posicionada no ponto de coordenadas  $x = 1 \text{ m}$ ,  $y = 0,5 \text{ m}$ . Determine as coordenadas  $x$  e  $y$  da posição na qual um elétron fica em equilíbrio.

33 •• Uma carga de  $-1,0 \mu\text{C}$  está localizada na origem; uma segunda carga de  $2,0 \mu\text{C}$  está posicionada no ponto de coordenadas  $x = 0$ ,  $y = 0,1 \text{ m}$ ; e uma terceira carga de  $4,0 \mu\text{C}$  está posicionada no ponto de coordenadas  $x = 0,2$ ,  $y = 0$ . Determine as forças que atuam em cada uma das três cargas.

34 •• Uma carga de  $5,0 \mu\text{C}$  está localizada no ponto de coordenadas  $x = 0$ ,  $y = 0$  e uma carga  $Q_2$  está posicionada no ponto de coordenadas  $x = 4,0$ ,  $y = 0$ . A força sobre uma carga de  $2,0 \mu\text{C}$  em  $x = 8,0$ ,  $y = 0$  é de  $19,7 \text{ N}$ , orientada no sentido negativo do eixo  $x$ . Quando essa carga de  $2,0 \mu\text{C}$  é posicionada em  $x = 17,75 \text{ cm}$ ,  $y = 0$ , a força sobre ela é nula. Determine a carga  $Q_2$ .

35 •• Cinco cargas iguais a  $Q$  são igualmente espaçadas em um semicírculo de raio  $R$ , conforme mostrado na Figura 21-36. Determine a força atuante sobre uma carga  $q$  localizada no centro do semicírculo.

36 •• A configuração da molécula do  $\text{NH}_3$  é aproximadamente a de um tetraedro retangular, com os íons  $\text{H}^+$  formando a base e o

**FIGURA 21-35**

Problema 23



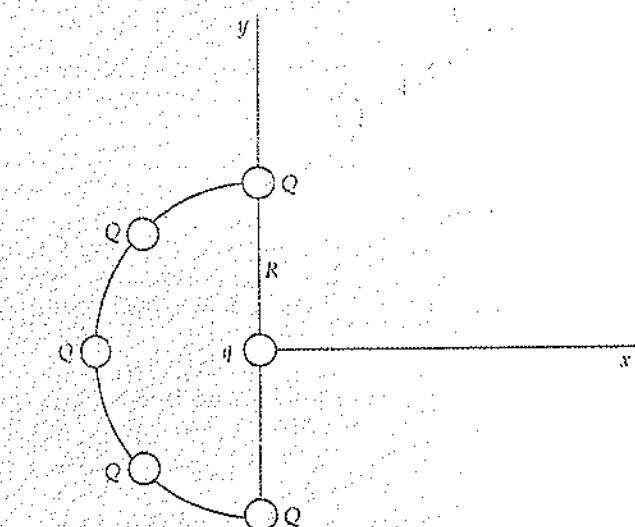


FIGURA 21-36

Problema 35

ion N<sup>+</sup> no ápice do tetraedro. O comprimento de cada lado é de  $1,64 \times 10^{-10}$  m. Calcule a força que atua sobre cada íon.

### O Campo Elétrico

37 •• Uma carga de  $4,0 \mu\text{C}$  é posicionada na origem. Qual é a intensidade e o sentido do campo elétrico no eixo  $x$  em (a)  $x = 6 \text{ m}$  e (b)  $x = -10 \text{ m}$ ? (c) Esquematize a função  $E_x$  versus  $x$  para valores positivos e negativos de  $x$ . (Lembre-se de que  $E_x$  é negativo quando o vetor  $E$  é orientado no sentido negativo da direção  $x$ .)

38 • Duas cargas, cada uma de  $+4 \mu\text{C}$ , são posicionadas sobre o eixo  $x$ , uma na origem e outra em  $x = 8 \text{ m}$ . Determine o campo elétrico no eixo  $x$  em (a)  $x = -2 \text{ m}$ , (b)  $x = 2 \text{ m}$ , (c)  $x = 6 \text{ m}$  e (d)  $x = 10 \text{ m}$ . (e) Em que ponto do eixo  $x$  o campo elétrico é nulo? (f) Esquematize a função  $E_x$  versus  $x$ .

39 • Quando uma carga de prova  $q_0 = 2 \text{nC}$  é colocada na origem ela fica sob a ação de uma força de  $8,0 \times 10^{-4} \text{ N}$  no sentido positivo do eixo  $y$ . (a) Qual é o valor do campo elétrico na origem? (b) Qual seria a força atuante em uma carga de  $-4 \text{nC}$  colocada na origem? (c) Se essa força é devida a uma carga colocada sobre o eixo  $y$  na posição  $y = 3 \text{ cm}$ , qual é o valor daquela carga?

40 • O campo elétrico nas proximidades da superfície da Terra é orientado para baixo e possui uma intensidade de  $150 \text{ N/C}$ . (a) Compare a força elétrica atuante sobre um elétron, orientada para cima, com a força gravitacional, orientada para baixo. (b) Qual deveria ser a carga atribuída a uma pequena massa de  $3 \text{ g}$  de modo que a força elétrica equilibrasse o peso dessa massa nas proximidades da superfície da Terra?

41 •• Duas cargas positivas iguais com intensidades  $q_1 = q_2 = 6,0 \text{nC}$  são posicionadas sobre o eixo  $y$  em  $y_1 = +3 \text{ cm}$  e  $y_2 = -3 \text{ cm}$ . (a) Quais são a intensidade e a orientação do campo elétrico no eixo  $x$  em  $x = 4 \text{ cm}$ ? (b) Qual é a força exercida sobre uma terceira carga  $q_0 = 2 \text{nC}$  quando é colocada sobre o eixo  $x$  em  $x = 4 \text{ cm}$ ?

42 •• Uma carga puntiforme de  $+5,0 \mu\text{C}$  é localizada em  $x = -3 \text{ cm}$ , e uma segunda carga puntiforme de  $-8,0 \mu\text{C}$  é localizada em  $x = +4,0 \text{ cm}$ . Qual deve ser a localização de uma terceira carga de  $+6,0 \mu\text{C}$  de modo que o campo elétrico em  $x = 0$  seja nulo?

43 •• Uma carga puntiforme de  $-5 \mu\text{C}$  está localizada no ponto cujas coordenadas são  $x = 4 \text{ m}$ ,  $y = -2 \text{ m}$ . Uma segunda carga

puntiforme de  $12 \mu\text{C}$  é localizada em  $x = 1 \text{ m}$ ,  $y = 2 \text{ m}$ . (a) Determine a intensidade e a orientação do campo elétrico em  $x = -1 \text{ m}$ ,  $y = 0$ . (b) Calcule a intensidade e a orientação da força atuante sobre um elétron localizado no ponto de coordenadas  $x = -1 \text{ m}$ ,  $y = 0$ .

44 •• Duas cargas  $q$ , iguais e positivas, são posicionadas sobre o eixo  $y$ , uma em  $y = +a$  e a outra em  $y = -a$ . (a) Mostre que o campo elétrico no eixo  $x$  é orientado ao longo desse eixo e possui uma intensidade  $E_x = 2kqy(x^2 + a^2)^{-3/2}$ . (b) Mostre que nas vizinhanças da origem, quando  $x$  é muito menor do que  $a$ ,  $E_x$  é aproximadamente igual a  $2kqy/a^3$ . (c) Mostre que para valores de  $x$  muito maiores do que  $a$ ,  $E_x$  é aproximadamente igual a  $2kq/x^2$ . Explique por que esse resultado seria esperado antes mesmo de ser calculado.

45 •• Uma carga puntiforme de  $5 \mu\text{C}$  é localizada no ponto de coordenadas  $x = 1 \text{ m}$ ,  $y = 3 \text{ m}$ ; e uma carga puntiforme de  $-4 \mu\text{C}$  é localizada no ponto  $x = 2 \text{ m}$ ,  $y = -2 \text{ m}$ . (a) Determine a intensidade e a orientação do campo elétrico no ponto de coordenadas  $x = -3 \text{ m}$ ,  $y = 1 \text{ m}$ . (b) Determine a intensidade e a orientação da força atuante sobre um próton localizado no ponto de coordenadas  $x = -3 \text{ m}$ ,  $y = 1 \text{ m}$ .

46 •• (a) Mostre que o campo elétrico para a distribuição de carga do Problema 44 possui sua maior intensidade nos pontos cujas coordenadas são  $x = a/\sqrt{2}$  e  $x = -a/\sqrt{2}$ , calculando a derivada  $dE_x/dx$  e igualando-a a zero. (b) Faça um esquema mostrando a função  $E_x$  versus  $x$  utilizando os resultados do item (a) desse problema e dos itens (b) e (c) do Problema 44.

47 ••• O campo elétrico para a distribuição de carga do Problema 44 é nulo na origem. Portanto, uma carga de prova  $q_0$  colocada na origem estará em equilíbrio. (a) Discuta a estabilidade do equilíbrio para uma carga de prova positiva considerando pequenos deslocamentos em relação à condição de equilíbrio ao longo do eixo  $x$  e pequenos deslocamentos ao longo do eixo  $y$ . (b) Repita o item (a) para uma carga de prova negativa. (c) Determine a intensidade e o sinal de uma carga  $q_0$  que, ao ser colocada na origem, apresenta em uma força resultante nula em cada uma das três cargas. (d) O que ocorrerá se qualquer das cargas for levemente deslocada da posição de equilíbrio?

48 ••• Duas cargas puntiformes positivas  $+q$  são posicionadas sobre o eixo  $y$  em  $y = +a$  e  $y = -a$ , conforme ocorreu no Problema 44. Uma conta de massa  $m$  com carga negativa  $-q$  desliza sem atrito ao longo de um fio orientado na direção do eixo  $x$ , podendo girar em seu entorno. (a) Mostre que para pequenos deslocamentos próximos a  $x << a$ , a conta fica sob a ação de uma força restauradora proporcional a  $x$  e, portanto, sujeita a um movimento harmônico simples. (b) Determine o período desse movimento.

### Movimento de Cargas Puntiformes na Presença de Campos Elétricos

49 • A aceleração de uma partícula em um campo elétrico depende da relação entre a carga e a massa da partícula. (a) Calcule  $e/m$  para um elétron. (b) Qual é a intensidade e a orientação da aceleração de um elétron em um campo elétrico uniforme cuja intensidade é de  $100 \text{ N/C}$ ? (c) Quando a velocidade do elétron se aproxima da velocidade da luz  $c$ , a mecânica relativística deve ser utilizada no cálculo de seu movimento, porém para velocidades significativamente menores do que  $c$  pode-se utilizar a mecânica newtoniana. Utilizando a mecânica newtoniana, calcule o tempo necessário para um elétron colocado em repouso em um campo elétrico com intensidade de  $100 \text{ N/C}$  atingir a velocidade de  $0,01c$ . (d) Qual é a distância percorrida pelo elétron durante esse tempo?

50 • (a) Calcule  $e/m$  para um próton e determine sua aceleração em um campo elétrico uniforme com intensidade de  $100 \text{ N/C}$ . (b) Determine o tempo necessário para um próton, inicialmente em repouso nesse campo, atingir a velocidade de  $0,01c$  (onde  $c$  é a velocidade da luz).

51 • Um elétron possui velocidade inicial de  $2 \times 10^6 \text{ m/s}$  na direção  $x$ . Ele entra em um campo elétrico uniforme definido pelo vetor  $\vec{E} = (400 \text{ N/C})\hat{j}$ , que possui a orientação  $y$ . (a) Determine a aceleração do elétron. (b) Quanto tempo é necessário para o elétron mover-se 10 cm na direção  $x$  na presença desse campo? (c) Qual é o valor do desvio do elétron e em que direção ele ocorre após o percurso de 10 cm na direção  $x$  na presença desse campo?

52 • Um elétron, partindo do repouso, é acelerado por um campo elétrico uniforme de  $8 \times 10^4 \text{ N/C}$  que se estende por uma distância de 5,0 cm. Determine a velocidade do elétron após deixar a região do campo elétrico uniforme.

53 • Um corpo de 2 g, localizado em uma região onde atua o campo elétrico uniforme  $\vec{E} = (300 \text{ N/C})\hat{i}$ , possui uma carga  $Q$ . O corpo, abandonado do repouso em  $x = 0$ , possui uma energia cinética de 0,12 J em  $x = 0,50 \text{ m}$ . Determine a carga  $Q$ .

54 • Uma partícula parte da origem com velocidade de  $3 \times 10^6 \text{ m/s}$  a um ângulo de  $35^\circ$  com o eixo  $x$ . Ela se move no campo elétrico uniforme  $\vec{E} = E_y\hat{j}$ . Determine  $E_y$  de modo que a partícula cruze o eixo  $x$  em  $x = 1,5 \text{ cm}$  considerando que ela seja (a) um elétron e (b) um próton.

55 • Um elétron parte da posição mostrada na Figura 21-37 com uma velocidade inicial  $v_0 = 5 \times 10^6 \text{ m/s}$  a um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x$ . O campo elétrico é orientado no sentido positivo da direção  $y$  e possui uma intensidade de  $3,5 \times 10^3 \text{ N/C}$ . Em qual das placas e em que local o elétron irá colidir?

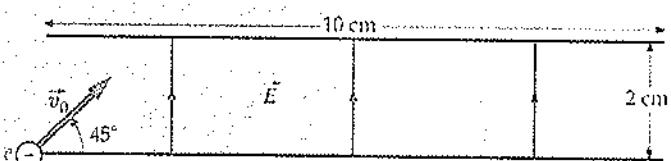


FIGURA 21-37  
Problema 55

56 • Um elétron com energia cinética de  $2 \times 10^{-16} \text{ J}$  se move para a direita ao longo do eixo de um tubo de raios catódicos, conforme mostrado na Figura 21-38. Na região entre as placas defletoras existe um campo elétrico  $\vec{E} = (2 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{j}$ . Em qualquer outro lugar,  $\vec{E} = 0$ . (a) A que distância o elétron estará do eixo do tubo quando atingir as extremidades das placas? (b) A que ângulo o elétron se moverá em relação ao eixo? (c) A que distância do eixo o elétron colidirá com a tela fluorescente?

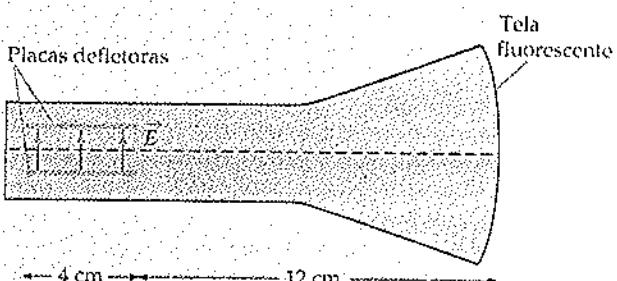


FIGURA 21-38  
Problema 56

57 • Duas cargas puntiformes,  $q_1 = 2,0 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -2,0 \mu\text{C}$ , são separadas por 4  $\mu\text{m}$ . (a) Qual é o momento de dipolo desse par de cargas? (b) Esquematize o par de cargas e mostre a orientação do momento de dipolo.

58 • Um dipolo com momento de  $0,5 \text{ e} \cdot \text{nm}$  é colocado em um campo elétrico uniforme com intensidade de  $4,0 \times 10^4 \text{ N/C}$ . Qual é a intensidade do torque atuante no dipolo quando (a) o dipolo estiver paralelo ao campo elétrico, (b) o dipolo for perpendicular ao campo elétrico e (c) o dipolo fizer um ângulo de  $30^\circ$  com o campo elétrico? (d) Determine a energia potencial do dipolo no campo elétrico para cada um dos casos.

59 • Para um dipolo orientado ao longo do eixo  $x$ , o campo elétrico diminui de forma proporcional a  $1/x^3$  na direção  $x$  e  $1/y^3$  na direção  $y$ . Utilize uma análise adimensional para provar que o campo elétrico em uma direção qualquer distante do dipolo também diminui de forma proporcional a  $1/r^3$ .

60 • Uma molécula de água possui seu átomo de oxigênio na origem, um núcleo de hidrogênio no ponto de coordenadas  $x = 0,077 \text{ nm}$ ,  $y = 0,058 \text{ nm}$  e o outro núcleo de hidrogênio em  $x = -0,077 \text{ nm}$ ,  $y = 0,058 \text{ nm}$ . Se os elétrons do hidrogênio são transferidos completamente para o átomo de oxigênio de forma que ele fique com uma carga de  $-2e$ , qual é o momento do dipolo da molécula de água? (Note que a caracterização das ligações químicas da água como totalmente iônicas é simplesmente uma aproximação que superestima o momento do dipolo de uma molécula de água.)

61 • Um dipolo elétrico consiste em duas cargas  $+q$  e  $-q$  separadas por uma distância muito pequena igual a  $2a$ . Seu centro está sobre o eixo  $x$  em  $x = x_1$  e ele é orientado ao longo do eixo  $x$  em seu sentido positivo. O dipolo está em um campo elétrico não-uniforme que também está na direção  $x$  e pode ser expresso por  $\vec{E} = Cx\hat{i}$ , onde  $C$  é uma constante. (a) Determine as forças atuantes sobre as cargas positiva e negativa, e mostre que a força resultante no dipolo é  $Cp\hat{i}$ . (b) Mostre que, em geral, se um dipolo de momento  $\vec{p}$  apóia-se sobre o eixo  $x$  em um campo elétrico na direção  $x$ , a força resultante atuante no dipolo é expressa, aproximadamente, por  $(dE_x/dx)\vec{p}\hat{i}$ .

62 • Uma carga puntiforme positiva  $+Q$  está posicionada na origem e um dipolo de momento  $\vec{p}$  está afastado de uma distância  $r$  ( $r \gg L$ ) e no sentido radial, conforme mostrado na Figura 21-29. (a) Mostre que a força exercida sobre o dipolo pela carga puntiforme é de atração e possui uma intensidade  $\approx 2kQp/r^3$  (veja o Problema 61). (b) Admita agora que o dipolo é centrado na origem e que a carga puntiforme  $Q$  está afastada de uma distância  $r$  ao longo da linha do dipolo. Utilizando a terceira lei de Newton e seus resultados para o item (a), mostre que na localização da carga puntiforme positiva o campo elétrico  $\vec{E}$  devido ao dipolo é orientado à frente do dipolo e possui um módulo de  $\approx 2kp/r^3$ .

### Problemas Gerais

63 • (a) Qual deve ser o valor da massa de um próton se sua atração gravitacional com um outro próton equilibra exatamente a repulsão eletrostática entre eles? (b) Qual é a verdadeira relação dessas duas forças?

64 • Cargas puntiformes de  $-5,0 \mu\text{C}$ ,  $+3,0 \mu\text{C}$  e  $+5,0 \mu\text{C}$  são localizadas ao longo do eixo  $x$  em  $x = -1,0 \text{ cm}$ ,  $x = 0 \text{ e } x = +1,0 \text{ cm}$ , respectivamente. Calcule o campo elétrico em  $x = 3,0 \text{ cm}$  e em  $x = 15,0 \text{ cm}$ . Existe algum ponto do eixo  $x$  onde a intensidade do campo elétrico seja nula? Se existir, localize esse ponto.

65 • Para a distribuição de cargas do Problema 64, determine

o campo elétrico em  $x = 15,0$  cm como o vetor soma dos campos elétricos devidos a um dipolo formado pelas duas cargas de  $5,0 \mu\text{C}$  e a uma carga puntiforme de  $3,0 \mu\text{C}$ , ambos localizados na origem. Compare seu resultado com o obtido no Problema 64 e explique qualquer diferença entre esses dois procedimentos.

66 •• No cobre, cerca de um elétron por átomo é livre para se mover. Uma conta de cobre possui uma massa de 3 g. (a) Que porcentagem de carga livre deve ser removida para que a conta fique com uma carga de  $15 \mu\text{C}$ ? (b) Qual seria a força de repulsão entre duas contas com essa carga se elas estivessem separadas de 25 cm? Admita que as contas sejam cargas puntiformes.

67 •• Duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  possuem uma carga total de  $6 \mu\text{C}$ . Quando elas são separadas de 3 m, a força exercida por uma das cargas sobre a outra possui uma intensidade de 8 mN. Determine as cargas  $q_1$  e  $q_2$  considerando que (a) ambas sejam positivas de modo que se repelem e (b) uma seja positiva e a outra negativa, de modo que se atraem mutuamente.

68 •• Três cargas,  $+q$ ,  $+2q$  e  $+4q$ , são conectadas por um cabo, conforme mostrado na Figura 21-39. Determine as forças  $T_1$  e  $T_2$  atuantes no cabo.

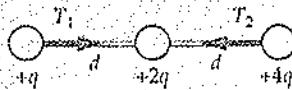


FIGURA 21-39

Problema 68

69 •• Uma carga positiva  $Q$  deve ser dividida em duas cargas positivas  $q_1$  e  $q_2$ . Mostre que, para uma dada separação  $D$ , a força exercida por uma das cargas sobre a outra será a maior se  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$ .

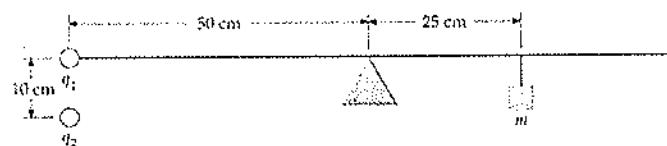
70 •• Uma carga  $Q$  é localizada em  $x = 0$  e uma carga  $4Q$  em  $x = 12,0$  cm. A força atuante sobre uma carga de  $-2 \mu\text{C}$  será nula se essa carga for colocada em  $x = 4,0$  cm, e será igual a 126,4 N no sentido positivo da direção  $x$  se colocada em  $x = 8,0$  cm. Determine a carga  $Q$ .

71 •• Duas pequenas esferas (cargas puntiformes) separadas de 0,60 m possuem uma carga total de  $200 \mu\text{C}$ . (a) Se as duas esferas se repelem com uma força de 80 N, quais são as cargas em cada uma das duas esferas? (b) Se as duas esferas se atraem com uma força de 80 N, quais são as cargas das duas esferas?

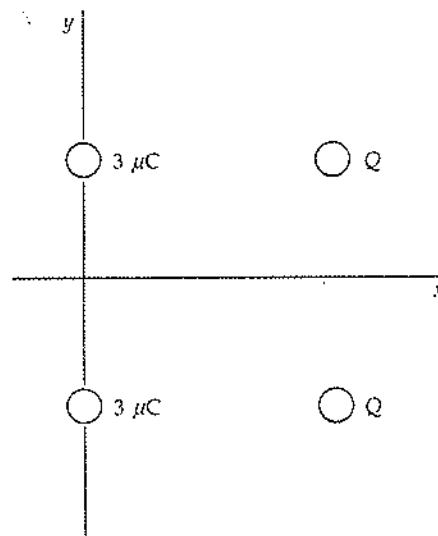
72 •• Uma esfera de carga  $q$  conhecida e massa  $m$  desconhecida, inicialmente em repouso, cai livremente de uma altura  $h$  em um campo elétrico uniforme  $E$  direcionado verticalmente para baixo. A esfera atinge o solo com uma velocidade  $v = 2\sqrt{gh}$ . Determine a massa  $m$  em função de  $E$ ,  $q$  e  $g$ .

73 •• Uma régua rígida com um metro de comprimento é pivotada em seu centro (Figura 21-40). Uma carga  $q_1 = 5 \times 10^{-7} \text{ C}$  é colocada sobre uma das extremidades da régua, e uma carga  $q_2$  igual e oposta a  $q_1$  é colocada a uma distância  $d = 10$  cm diretamente abaixo de  $q_1$ . (a) Qual é a força resultante entre as duas cargas? (b) Qual é o torque (medido do centro da régua) devido a esta força? (c) Para contrabalançar a atração entre as duas cargas, pendura-se um bloco a 25 cm do pivô do lado oposto ao das cargas. Qual deve ser o valor da massa  $m$  do bloco? (Veja a Figura 21-40.) (d) Move-se agora o bloco para uma distância a 25 cm do ponto de apoio, no mesmo lado das cargas. Mantendo os mesmos valores de  $q_1$  e  $d$ , qual deve ser o valor de  $q_2$  para manter esse aparato em equilíbrio?

74 •• Cargas de  $3,0 \mu\text{C}$  são localizadas nos pontos de coordenadas  $x = 0$ ,  $y = 2,0$  m e  $x = 0$ ,  $y = -2,0$  m. Cargas  $Q$  são localizadas

FIGURA 21-40  
Problema 73

nos pontos de coordenadas  $x = 4,0$  m,  $y = 2,0$  m e  $x = 4,0$ ,  $y = -2,0$  m (Figura 21-41). O campo elétrico em  $x = 0$ ,  $y = 0$  é igual a  $(4,0 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{i}$ . Determine  $Q$ .

FIGURA 21-41  
Problema 74

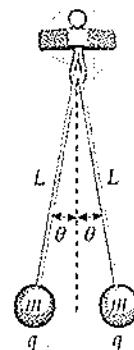
75 •• Dois pequenos condutores esféricos idênticos (cargas puntiformes), separados de 0,60 m, possuem uma carga total de  $200 \mu\text{C}$ . Eles se repelem com uma força de 120 N. (a) Determine a carga em cada esfera. (b) As duas esferas são colocadas em contato elétrico e, em seguida, separadas, de modo que cada uma fique com uma carga de  $100 \mu\text{C}$ . Determine a força exercida por uma esfera sobre a outra quando elas são afastadas de 0,60 m.

76 •• Repita o Problema 75 considerando que as duas esferas estejam inicialmente se atraindo com uma força de 120 N.

77 •• Uma carga de  $-3,0 \mu\text{C}$  está localizada na origem; uma carga de  $4,0 \mu\text{C}$  está localizada em  $x = 0,2$  m,  $y = 0$ ; uma terceira carga  $Q$  está localizada em  $x = 0,32$  m,  $y = 0$ . A força atuante sobre uma carga de  $4,0 \mu\text{C}$  é de 240 N, direcionada no sentido positivo do eixo  $x$ . (a) Determine a carga  $Q$ . (b) Com essa configuração das três cargas, em que posição do eixo  $x$  o campo elétrico é nulo?

78 •• Duas pequenas esferas de massa  $m$  são suspensas de um ponto comum por fios de comprimento  $L$ . Quando cada uma das esferas possui uma carga  $q$ , o ângulo entre os fios e a direção vertical é igual a  $\theta$ , conforme mostrado na Figura 21-42. (a) Mostre que a carga  $q$  pode ser expressa por

$$q = 2L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{mg \operatorname{tg} \theta}{k}}$$

FIGURA 21-42  
Problema 78

onde  $k$  é a constante de Coulomb. (b) Determine  $q$  considerando que  $m = 10\text{ g}$ ,  $L = 50\text{ cm}$  e  $\theta = 10^\circ$ .

79 •• (a) No Problema 78, admita que  $L = 1,5\text{ m}$ ,  $m = 0,01\text{ kg}$  e  $q = 0,75\text{ }\mu\text{C}$ . Qual é o ângulo de cada cabo com a direção vertical?

(b) Determine o ângulo de cada cabo com a vertical quando uma das massas possui uma carga de  $0,50\text{ }\mu\text{C}$  e a outra uma carga de  $1,0\text{ }\mu\text{C}$ .

80 •• Quatro cargas de mesma intensidade são arranjadas nos vértices de um quadrado de lado  $L$ , conforme mostrado na Figura 21-43. (a) Determine a intensidade e a orientação da força exercida sobre a carga situada no vértice mais baixo à esquerda pelas demais cargas. (b) Mostre que o campo elétrico no ponto médio de um dos lados do quadrado possui a direção daquele lado, é orientado no sentido da carga negativa e tem uma intensidade expressa por

$$E = \frac{8q}{L^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25}\right)$$

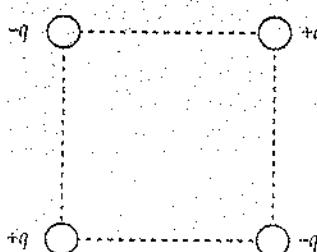


FIGURA 21-43  
Problema 80

81 •• A Figura 21-44 mostra um haltere consistindo em duas massas idênticas  $m$  fixadas às extremidades de uma barra esbelta (de massa desprezível) com comprimento  $a$ , rotulada em seu centro. As massas possuem cargas de  $+q$  e  $-q$ , e o sistema é colocado sob a ação de um campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ . Mostre que para pequenos valores do ângulo  $\theta$  entre a direção do dipolo e a direção do campo elétrico o sistema apresenta um movimento harmônico simples. Obtenha uma expressão para o período desse movimento.

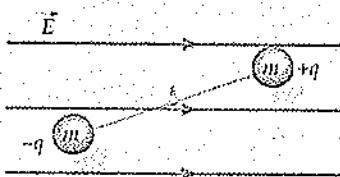


FIGURA 21-44  
Problemas 81 e 82

82 •• Para o haltere da Figura 21-44, considere  $m = 0,02\text{ kg}$ ,  $a = 0,3\text{ m}$  e  $\vec{E} = (600\text{ N/C})\hat{i}$ . Inicialmente o haltere está em repouso e faz um ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $x$ . O haltere é, então, abandonado do repouso, e quando fica momentaneamente alinhado com o campo elétrico sua energia cinética é de  $5 \times 10^{-3}\text{ J}$ . Determine a intensidade de  $q$ .

83 •• Um elétron (carga  $-e$  e massa  $m$ ) e um pósitron (carga  $+e$  e massa  $m$ ) giram em torno de seu centro de massa comum sob a influência de suas forças de atração coulombiana. Determine a velocidade  $v$  de cada partícula em função de  $e$ ,  $m$ ,  $k$  e da distância de separação  $r$ .

84 •• A separação de equilíbrio entre os núcleos da molécula iônica KBr é de  $0,282\text{ nm}$ . As massas dos dois íons,  $K^+$  e  $Br^-$ , são

aproximadamente iguais,  $1,4 \times 10^{-25}\text{ kg}$ , e cada um dos dois íons possui uma carga com intensidade  $e$ . Utilize o resultado do Problema 81 para determinar a freqüência de oscilação de uma molécula de KBr em um campo elétrico uniforme de  $1000\text{ N/C}$ .

85 •• Uma pequena massa (puntiforme)  $m$ , que possui uma carga  $q$ , é restrita a mover-se verticalmente no interior de um cilindro estreito sem atrito (Figura 21-45). Na parte inferior do cilindro há uma massa puntiforme com carga  $Q$  que possui o mesmo sinal de  $q$ . (a) Mostre que a massa  $m$  estará em equilíbrio a uma altura  $y_0 = (kqQ/mg)^{1/2}$ . (b) Mostre que se a massa  $m$  for ligeiramente deslocada em relação à sua posição de equilíbrio e abandonada ela exibirá um movimento harmônico simples com freqüência angular  $\omega = (2g/y_0)^{1/2}$ .



FIGURA 21-45  
Problema 85

86 •• Uma pequena conta de massa  $m$  possui carga negativa  $-q$  e está restrita a mover-se ao longo de uma barra esbelta sem atrito (Figura 21-46). A uma distância  $L$  dessa barra existe uma carga positiva  $Q$ . Mostre que se a conta é deslocada de uma distância  $x$ , onde  $x \ll L$ , e abandonada, ela exibirá um movimento harmônico simples. Obtenha uma expressão para o período desse movimento em função dos parâmetros  $L$ ,  $Q$ ,  $q$  e  $m$ .

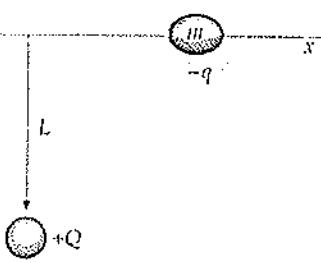


FIGURA 21-46  
Problema 86

87 •• Repita o Problema 79 com o sistema sujeito à ação de um campo elétrico uniforme de  $1,0 \times 10^5\text{ N/C}$  orientado verticalmente para baixo.

88 •• Admita que as massas das duas esferas do Problema 78 não sejam iguais, sendo uma delas igual a  $0,01\text{ kg}$  e a outra  $0,02\text{ kg}$ . As cargas das duas massas são de  $2,0\text{ }\mu\text{C}$  e  $1,0\text{ }\mu\text{C}$ , respectivamente. Determine o ângulo entre cada um dos cabos de sustentação das massas e a direção vertical.

89 •• Um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,0\text{ m}$  e massa  $M = 5,0 \times 10^{-3}\text{ kg}$  é colocado na presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  uniforme na direção vertical. A massa do pêndulo possui uma carga de  $-8,0\text{ }\mu\text{C}$  e seu período é de  $1,2\text{ s}$ . Qual é a intensidade e a orientação do campo  $\vec{E}$ ?

90 ••• Duas moléculas polares neutras se atraem mutuamente. Admita que cada molécula possua um momento de dipolo  $\vec{p}$  e que esses dipolos estejam alinhados com o eixo  $x$  e separados de uma distância  $d$ . Deduza uma expressão para a força de atração em função de  $p$  e  $d$ .

91 ••• Duas cargas positivas e idênticas  $Q$  estão sobre o eixo  $x$  em  $x = \frac{1}{2}L$  e  $x = -\frac{1}{2}L$ . (a) Obtenha uma expressão para o campo elétrico no eixo  $y$  em função de  $y$ . (b) Um anel de massa  $m$  e carga  $q$  se move ao longo de uma barra fina sem atrito posicionada sobre o eixo  $y$ . Determine a força atuante em uma carga  $q$  em função de  $y$ ; determine o sinal de  $q$  de modo que essa força seja sempre orientada para  $y = 0$ . (c) Mostre que para pequenos valores de  $y$  o anel exibe um movimento harmônico simples. (d) Se  $Q = 5 \mu\text{C}$ ,  $|q| = 2 \mu\text{C}$ ,  $L = 24 \text{ cm}$  e  $m = 0,03 \text{ kg}$ , qual é o valor da frequência de oscilação para pequenas amplitudes?

92 ••• No experimento de Millikan, utilizado para determinar a carga de um elétron, uma pequena esfera de poliestireno carregada é abandonada no ar calmo em um campo elétrico vertical conhecido. A pequena esfera carregada será acelerada no sentido da força resultante até atingir sua velocidade terminal. A carga atuante sobre a pequena esfera é determinada pela medição da velocidade terminal. Nesse experimento, a pequena esfera apresenta um raio de  $5,5 \times 10^{-7} \text{ m}$  e o campo possui uma intensidade  $E = 6 \times 10^5 \text{ N/C}$ . A intensidade da força de arrasto sobre a esfera é  $F_D =$

$6\pi\eta rv$ , onde  $v$  é a velocidade da esfera e  $\eta$  é a viscosidade do ar ( $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ). O poliestireno possui massa específica de  $1,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . (a) Se o campo elétrico está orientado para baixo, de modo que a esfera de poliestireno atinge uma velocidade terminal  $v = 1,16 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ , qual é a carga da esfera? (b) Quantos elétrons em excesso existem na esfera? (c) Se a orientação do campo elétrico for invertida, mantendo-se sua intensidade, qual será a velocidade terminal?

93 ••• No Problema 92 houve uma descrição do experimento de Millikan utilizado para determinar a carga de um elétron. No experimento é utilizada uma chave para a fonte de potência, de modo que o campo elétrico pode ser orientado tanto para cima quanto para baixo, porém sempre com a mesma intensidade, para que seja possível medir a velocidade terminal da pequena esfera quando ela é empurrada para cima (contra a força da gravidade) e quando ela desce. Considere que  $v_u$  represente a velocidade terminal quando a partícula se move para cima e  $v_d$  a velocidade terminal quando ela se move para baixo. (a) Fazendo  $v = v_u + v_d$ , mostre que  $v = \frac{qE}{3\pi\eta r}$ , onde  $q$  é a carga resultante da pequena esfera. Qual é a vantagem de medir tanto  $v_u$  quanto  $v_d$  em vez de apenas uma velocidade? (b) Uma vez que a carga é quantizada,  $v$  só pode ser alterada por passos cuja intensidade é  $\Delta v$ . Utilizando os dados do Problema 92, calcule  $\Delta v$ .

## 22

## © Campo Elétrico III: Distribuições Contínuas de Cargas

- 22-1 Cálculo do Campo Elétrico  $\mathbf{E}$  a Partir da Lei de Coulomb
- 22-2 Lei de Gauss
- 22-3 Cálculo do Campo Elétrico  $\mathbf{E}$  a Partir da Lei de Gauss
- 22-4 Descontinuidade de  $E$
- 22-5 Cargas e Campos Elétricos nas Superfícies Condutoras
- \*22-6 Dedução da Lei de Gauss a Partir da Lei de Coulomb

A DESCRIÇÃO DE UMA CARGA EM FUNÇÃO DE UMA DENSIDADE CONTÍNUA Torna POSSÍVEL CÁLCULO DA CARGA SOBRE A SUPERFÍCIE DE CORPOS DE DIMENSÕES CELESTIAIS.



Como você calcularia a carga presente na superfície da Terra?  
(Veja o Exemplo 22-10.)

**A**carga elétrica é quantizada em uma escala microscópica. Entretanto, existem, em geral, situações em que diversas cargas estão muito próximas umas das outras, permitindo a idealização de cargas continuamente distribuídas. A utilização de uma densidade contínua de carga para descrever um grande número de cargas discretas é análoga ao uso da massa específica como uma grandeza contínua para descrever o comportamento do ar, que, na realidade, consiste em um grande número de moléculas discretas. Em ambos os casos, é fácil obter um elemento de volume  $\Delta V$  grande o suficiente para conter diversas cargas ou moléculas individuais e pequeno o suficiente de modo a permitir a substituição de  $\Delta V$  por um volume diferencial  $dV$  a ser analisado pelos procedimentos do cálculo sem a introdução de erros apreciáveis.

Descreve-se a carga elétrica por unidade de volume pela densidade volumétrica de carga  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad 22-1$$

Geralmente a carga é distribuída em uma camada muito fina sobre a superfície de um corpo. Define-se a densidade superficial de carga  $\sigma$  como a carga por unidade de área:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad 22-2$$

Analogamente, pode-se encontrar, algumas vezes, uma distribuição de carga ao longo de uma linha no espaço. Assim, define-se a densidade linear de carga  $\lambda$  como a carga por unidade de comprimento.

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad 22-3$$

» Neste capítulo, mostra-se como a lei de Coulomb é utilizada para calcular o campo elétrico produzido por diversos tipos de distribuições contínuas de carga. Introduz-se, em seguida, a lei de Gauss, que relaciona o campo elétrico em superfícies fechadas com a carga resultante na superfície, e utiliza-se essa relação para calcular o campo elétrico para distribuições simétricas de carga.

## 22-1 Cálculo do Campo Elétrico à Partir da Lei de Coulomb

A Figura 22-1 mostra um elemento de carga  $dq = \rho dV$  pequeno o suficiente para ser considerado uma carga puntiforme. Ao utilizar-se a lei de Coulomb para expressar o campo elétrico  $d\vec{E}$  em um ponto  $P$  do campo devido a esse elemento de carga, obtém-se

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \hat{r}$$

onde  $\hat{r}$  é um vetor unitário orientado da fonte puntiforme para o ponto  $P$  do campo. O campo total em  $P$  é obtido pela integração dessa expressão ao longo de toda a região de distribuição de carga. Isto é,

$$\vec{E} = \int_V \frac{k dq}{r^2} \hat{r} \quad 22-4$$

### CAMPO ELÉTRICO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA

onde  $dq = \rho dV$ . Se a carga for distribuída sobre uma superfície ou sobre uma linha, utilize  $dq = \sigma dA$  ou  $dq = \lambda dL$ , e integre sobre a superfície ou linha.

## Campo E sobre o Eixo de um Segmento de Reta Finito Carregado

Seja uma carga  $Q$  uniformemente distribuída ao longo do eixo  $x$  desde  $x = -\frac{1}{2}L$  até  $x = +\frac{1}{2}L$ , conforme mostrado na Figura 22-2. A densidade de carga linear dessa carga é  $\lambda = Q/L$ . Deseja-se determinar a ação do campo elétrico produzido por esse segmento de linha carregado em um ponto  $P$  genérico sobre o eixo  $x$  com coordenada  $x_p$ , onde  $x_p > \frac{1}{2}L$ . Na figura, define-se como  $dq$  a carga elemental de um pequeno elemento de comprimento  $dx$  na posição  $x$ . O ponto  $P$  está a uma distância  $r = x_p - x$  de  $dx$ . A lei de Coulomb fornece o campo elétrico em  $P$  devido à carga  $dq$  desse elemento  $dx$ . O campo está orientado ao longo do eixo  $x$  e pode ser expresso por

$$dE_x \hat{i} = \frac{k dq}{(x_p - x)^2} \hat{i} = \frac{k\lambda dx}{(x_p - x)^2} \hat{i}$$

Obtém-se o campo total  $\vec{E}$  integrando-se ao longo de todo o segmento carregado no sentido do aumento de  $x$  (de  $x_1 = -\frac{1}{2}L$  até  $x_2 = +\frac{1}{2}L$ ):

$$E_x = k\lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(x_p - x)^2} = -k\lambda \int_{x_p - (L/2)}^{x_p - (L/2)} \frac{du}{u^2}$$

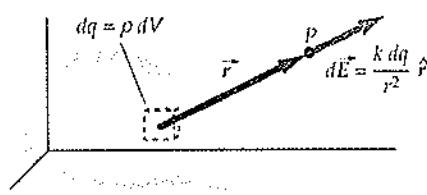
onde  $u = x_p - x$  (e portanto,  $du = -dx$ ). Note que se  $x = -\frac{1}{2}L$ ,  $u = x_p + \frac{1}{2}L$ , e se  $x = +\frac{1}{2}L$ ,  $u = x_p - \frac{1}{2}L$ . O cálculo da integral fornece

$$E_x = +k\lambda \frac{1}{u} \Big|_{x_p - (L/2)}^{x_p + (L/2)} = k\lambda \left\{ \frac{1}{x_p - \frac{1}{2}L} - \frac{1}{x_p + \frac{1}{2}L} \right\} = \frac{k\lambda L}{x_p^2 - (\frac{1}{2}L)^2}$$

Substituindo  $Q$  por  $\lambda L$ , tem-se

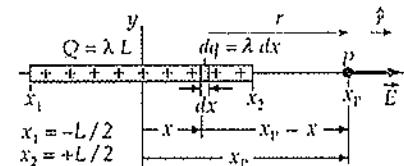
$$E_x = \frac{kQ}{x_p^2 - (\frac{1}{2}L)^2}, \quad x_p > \frac{1}{2}L \quad 22-5$$

Pode-se verificar que se  $x_p$  for muito maior do que  $L$ , o campo elétrico em  $x_p$



**FIGURA 22-1**

Um elemento de carga  $dq$  produz um campo  $d\vec{E} = (kdq/r^2)\hat{r}$  em um ponto  $P$ . O campo em  $P$  é obtido pela integração ao longo de toda a distribuição da carga.



**FIGURA 22-2**

Geometria para o cálculo do campo elétrico sobre o eixo de uma linha de carga uniforme de comprimento  $L$ , carga  $Q$  e densidade de carga linear  $\lambda = Q/L$ . Um elemento  $dq = \lambda dx$  é tratado como uma carga puntiforme.

será aproximadamente igual a  $kQ/x_p^2$ . Isto é, a uma distância suficientemente afastada do segmento carregado o campo elétrico aproxima-se do correspondente a uma carga  $Q$  puntiforme na origem.

**EXERCÍCIO** A validade da Equação 22-5 foi estabelecida para a região  $x_p > \frac{1}{2}L$ . Pode-se afirmar que ela também é válida na região  $-\frac{1}{2}L \leq x_p \leq \frac{1}{2}L$ ? Explique. (Resposta Não. A simetria estabelece que o campo  $E_x$  é nulo em  $x_p = 0$ . Entretanto, a Equação 22-5 fornece um valor negativo para  $E_x$  em  $x_p = 0$ . Esses resultados contraditórios não podem ser válidos.)

### Campo $E$ Fora do Eixo de um Segmento de Reta Finito Carregado

Seja uma carga  $Q$  uniformemente distribuída sobre um segmento retilíneo de comprimento  $L$ , conforme mostrado na Figura 22-3. Deseja-se determinar o campo elétrico em um ponto  $P$  do campo, arbitrariamente posicionado. Para calcular o campo elétrico em  $P$  escolhe-se, inicialmente, a posição do sistema de eixos coordenados. Define-se o eixo  $x$  coincidente com o eixo do segmento carregado e o eixo  $y$  passando pelo ponto  $P$ , conforme indicado. As extremidades do segmento carregado são designadas por  $x_1$  e  $x_2$ . O elemento de carga típico  $dq = \lambda dx$  que produz um campo  $d\vec{E}$  é mostrado na figura. O campo em  $P$  possui componentes nas direções  $x$  e  $y$ . Nesse desenvolvimento, apenas a componente  $y$  será calculada. (A componente  $x$  deve ser obtida no Problema 22-27.)

A intensidade do campo produzido pelo elemento de carga  $dq = \lambda dx$  vale

$$|d\vec{E}| = \frac{k dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

e a componente  $y$  é

$$dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta = \frac{k\lambda dx}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{k\lambda y dx}{r^3} \quad 22-6$$

onde  $\cos \theta = y/r$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . A componente  $y$  total  $E_y$  é calculada pela integração no domínio do segmento, isto é, de  $x = x_1$  até  $x = x_2$ .

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} dE_y = k\lambda y \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^3} \quad 22-7$$

No cálculo dessa integral,  $y$  permanece fixo. Uma forma de executar esse cálculo é utilizar uma substituição trigonométrica. Pela figura pode-se perceber que  $x = y \operatorname{tg} \theta$ , logo,  $dx = y \sec^2 \theta d\theta$ .\* Pode-se notar também que  $y = r \cos \theta$ , logo,  $1/r = \cos \theta/y$ . A substituição dessas relações na Equação 22-7 fornece

$$E_y = k\lambda y \frac{1}{y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{k\lambda}{y} (\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) = \frac{kQ}{Ly} (\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) \quad 22-8a$$

#### Campo $E$ , Devido a um Segmento Carregado Uniformemente

**EXERCÍCIO** Mostre que para o segmento carregado mostrado na Figura 22-3,  $dE_x = -k\lambda x dx / r^3$ .

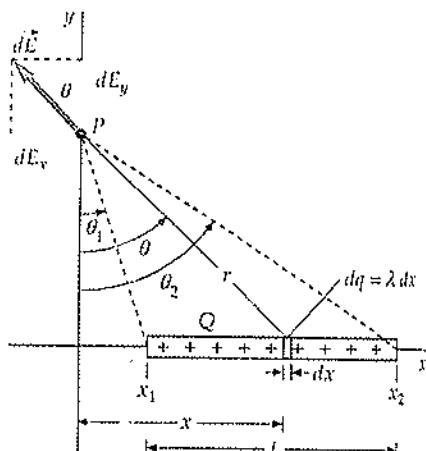


FIGURA 22-3

Geometria para o cálculo do campo elétrico em um ponto  $P$  do campo devido a uma linha de carga finita uniforme.

\*Foi utilizada a relação  $d(\operatorname{tg} \theta)/d\theta = \sec^2 \theta$ .

A componente  $x$  para o segmento finito carregado mostrado na Figura 22-3 (e calculada no Problema 22-27) é

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad 22-8b$$

CAMPO  $E$  DEVIDO A UM SEGMENTO CARREGADO UNIFORMEMENTE

### Campo $E$ Devido a um Segmento de Reta Infinito Carregado

Um segmento de reta carregado pode ser considerado infinito se para qualquer ponto  $P$  de interesse do campo (veja a Figura 22-3),  $x_1 \rightarrow -\infty$  e  $x_2 \rightarrow +\infty$ . Calculam-se as componentes  $E_x$  e  $E_y$  para um segmento de reta infinito carregado utilizando as Equações 22-8a e b, considerando as condições limites  $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$  e  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ . (Pela Figura 22-3 pode-se observar que esses limites são correspondentes às condições  $x_1 \rightarrow -\infty$  e  $x_2 \rightarrow +\infty$ .) Substituindo  $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$  e  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$  nas Equações 22-8a e b tem-se  $E_x = 0$  e  $E_y = \frac{2k\lambda}{y}$ , onde  $y$  é a distância medida perpendicularmente ao segmento carregado até o ponto do campo. Assim,

$$E_R = 2k \frac{\lambda}{R} \quad 22-9$$

CAMPO  $E$  A UMA DISTÂNCIA  $R$  DO SEGMENTO DE RETA INFINTO CARREGADO

onde  $R$  é a distância do segmento de reta carregado até o ponto do campo.

**EXERCÍCIO** Mostre que a Equação 22-9 possui unidades compatíveis com as do campo elétrico.



Linhos do campo elétrico nas proximidades de um longo fio. O campo elétrico nas proximidades de uma linha de alta tensão pode ser suficientemente intenso para ionizar o ar, tornando-o condutor. O brilho resultante da recombinação dos elétrons livres com os íons é chamado de descarga corona.

Utilizando as Equações 22-8a e b, obtenha uma expressão para o campo elétrico sobre a mediatrix de um segmento de reta carregado uniformemente com uma carga linear com densidade  $\lambda$  e comprimento  $L$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Esquematize o segmento de reta carregado sobre o eixo  $x$  e a linha mediana sobre o eixo  $y$ . De acordo com a Figura 22-4, essa escolha corresponde a  $x_1 = -\frac{1}{2}L$  e  $x_2 = \frac{1}{2}L$ , logo  $\theta_1 = \theta_2$ . Em seguida utilize as Equações 22-8a e 22-8b para obter o campo elétrico.

1. Esquematize o segmento de reta carregado sobre o eixo  $x$  e a linha mediana perpendicular ao segmento sobre o eixo  $y$  a uma distância genérica  $y$  da origem;
2. Utilize a Equação 22-8a para obter uma expressão para  $E_y$ . Simplifique-a utilizando a condição  $\theta_2 = -\theta_1 = \theta$ :

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{k\lambda}{y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{k\lambda}{y} [\sin \theta - \sin (-\theta)] \\ &= \frac{2k\lambda}{y} \sin \theta \end{aligned}$$

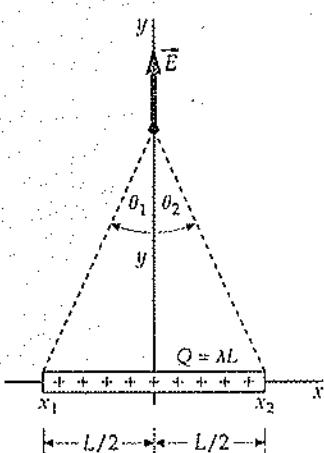


FIGURA 22-4

3. Expressse  $\sin \theta$  em função de  $y$  e  $L$  e substitua o resultado na expressão da etapa 2:

$$\sin \theta = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}}$$

assim

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}}$$

4. Utilize a Equação 22-8b para determinar  $E_x$ :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{k\lambda}{y} [\cos \theta - \cos(-\theta)] \\ &= \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta - \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

5. Expressse o vetor  $\vec{E}$  segundo suas componentes:

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = \boxed{\frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}} \hat{j}}$$

Um segmento de reta com uma carga cuja densidade linear é  $\lambda = 4,5 \text{ nC/m}$  apóia-se sobre o eixo  $x$ , desde  $x = -5 \text{ cm}$  até  $x = 5 \text{ cm}$ . Utilizando a expressão de  $E_y$  obtida no Exemplo 22-1, calcule o campo elétrico sobre o eixo  $y$  em (a)  $y = 1 \text{ cm}$ , (b)  $y = 4 \text{ cm}$  e (c)  $y = 40 \text{ cm}$ . (d) Estime o campo elétrico sobre o eixo  $y$  em  $y = 1 \text{ cm}$ , admitindo que o segmento de reta carregado seja infinito. (e) Determine a carga total e estime o campo em  $y = 40 \text{ cm}$ , admitindo que a linha de carga seja puntiforme.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Utilize o resultado do Exemplo 22-1 para obter o campo elétrico sobre o eixo  $y$ . Na expressão para  $\sin \theta_0$ , pode-se expressar  $L$  e  $y$  em centímetros, uma vez que as unidades se cancelam. (d) Para obter o campo em um ponto muito próximo da carga em linha, utiliza-se  $E_y = 2k\lambda/y$ . (e) Para obter o campo em um ponto muito distante da carga, utiliza-se  $E_y = kQ/y^2$  com  $Q = \lambda L$ .

1. Calcule  $E_y$  em  $y = 1 \text{ cm}$  para  $\lambda = 4,5 \text{ nC/m}$  e  $L = 10 \text{ cm}$ . Pode-se expressar  $L$  e  $y$  em centímetros na fração da direita, uma vez que as unidades se cancelam.

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}} \\ &= \frac{2(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(4,5 \times 10^{-9} \text{ C/m})}{0,01 \text{ m}} \frac{5 \text{ cm}}{\sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (1 \text{ cm})^2}} \\ &= \frac{80,9 \text{ N} \cdot \text{m/C}}{0,01 \text{ m}} \frac{5 \text{ cm}}{\sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (1 \text{ cm})^2}} = 7,93 \times 10^3 \text{ N/C} \\ &= \boxed{7,93 \text{ kN/C}} \end{aligned}$$

2. Repita os cálculos para  $y = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$  utilizando o resultado  $2k\lambda = 80,9 \text{ N} \cdot \text{m/C}$  já calculado na etapa anterior:

$$E_y = \frac{80,9 \text{ N} \cdot \text{m/C}}{0,04 \text{ m}} \frac{5 \text{ cm}}{\sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2}} = 1,58 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$= \boxed{1,58 \text{ kN/C}}$$

3. Repita os cálculos para  $y = 40 \text{ cm}$ :

$$E_y = \frac{80,9 \text{ N} \cdot \text{m/C}}{0,40 \text{ m}} \frac{5 \text{ cm}}{\sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (40 \text{ cm})^2}} = \boxed{25,1 \text{ N/C}}$$

4. Calcule o campo em  $y = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$  devendo a um segmento de reta infinito carregado:

$$E_y \approx \frac{2k\lambda}{y} = \frac{80,9 \text{ N} \cdot \text{m/C}}{0,01 \text{ m}} = \boxed{8,09 \text{ kN/m}}$$

5. Calcule a carga total  $\lambda L$  para  $L = 0,1$  m e utilize-a para obter o campo de uma carga puntiforme em  $y = 0,4$  m:

$$Q = \lambda L = (4,5 \text{ nC/m})(0,1 \text{ m}) = 0,45 \text{ nC}$$

$$E_y \approx \frac{k\lambda L}{y^2} = \frac{kQ}{y^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(0,45 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0,40 \text{ m})^2}$$

$$= 25,3 \text{ N/C}$$

**NOTAS** A 1 cm do segmento de reta de 10 cm eletricamente carregado, o valor estimado de 8,09 kN/C, obtido admitindo-se que o segmento seja infinito, difere do valor exato 7,93 kN/C, calculado em (a), em apenas 2%. A 40 cm de distância, o valor estimado de 25,3 N/C, calculado admitindo que a carga seja puntiforme, difere do valor exato de 25,1 N/C calculado em (c) em apenas 1%.

A Figura 22-5 mostra o resultado exato para esse segmento de reta de 10 cm de comprimento e densidade de carga de 4,5 nC/m e os resultados para os casos limites de um segmento de reta infinito carregado com a mesma densidade de carga e uma carga puntiforme  $Q = \lambda L$ .

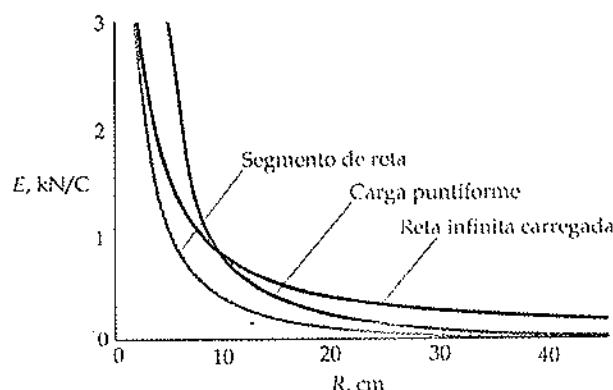


FIGURA 22-5

Intensidade do campo elétrico em função da distância para uma linha de carga com 10 cm de comprimento, para uma carga puntiforme e a linha de carga infinita apresentada no Exemplo 22-2. Observe que o campo de um segmento de reta finito converge para o campo de uma carga puntiforme quando as distâncias são relativamente grandes, e para o campo de uma linha de carga infinita quando as distâncias são pequenas.

### EXEMPLO 22-3

### COMO HISTÓRICO: CAMPONGUE DE RETA CARREGADA COM CARGA PUNTIFORME

Tente resolver este exemplo sozinho

Um segmento de reta infinito carregado com uma carga cuja densidade é  $\lambda = 0,6 \mu\text{C/m}$  apóia-se no eixo z, e uma carga puntiforme  $q = 8 \mu\text{C}$  apóia-se no eixo y em  $y = 3$  m. Determine o campo elétrico em um ponto  $P$  sobre o eixo x em  $x = 4$  m.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo elétrico para esse sistema é obtido pela superposição dos campos devidos ao segmento de reta infinito carregado e à carga puntiforme. O campo do segmento de reta,  $\vec{E}_L$ , é orientado radialmente no sentido de afastar-se do eixo z (Figura 22-6). Assim, em um ponto  $P$  sobre o eixo x  $\vec{E}_L$  estará no sentido positivo do eixo x. A carga puntiforme gera um campo  $\vec{E}_P$  ao longo da linha que une  $q$  ao ponto  $P$ . A distância de  $q$  a  $P$  é  $r = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$ .

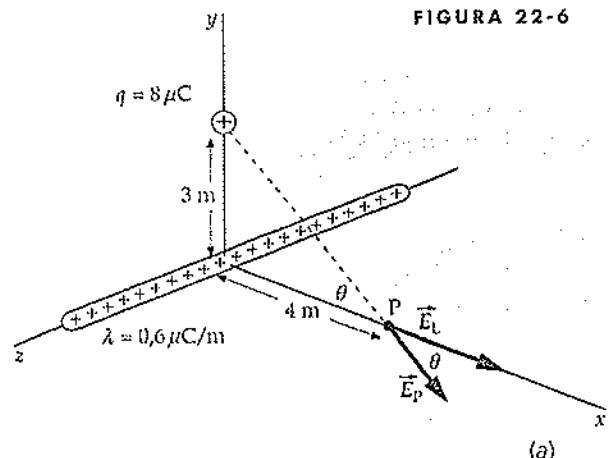
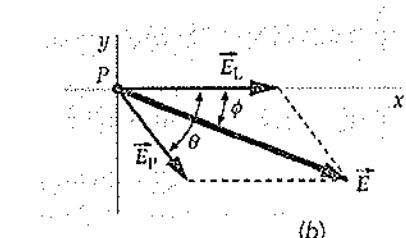


FIGURA 22-6



Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

### Etapas

### Respostas

- Calcule o campo  $\vec{E}_L$  no ponto  $P$  devido ao segmento de reta infinito carregado.  $\vec{E}_L = 2,70 \text{ kN/C} \hat{i}$
- Determine o campo  $\vec{E}_P$  no ponto  $P$  devido à carga puntiforme. Expressse  $\vec{E}_P$  em função do vetor unitário  $\hat{r}$  orientado de  $q$  para  $P$ .  $\vec{E}_P = 2,88 \text{ kN/C} \hat{r}$
- Determine as componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{E}_P$ .  $E_{Px} = E_P (0,8) = 2,30 \text{ kN/C}$   
 $E_{Py} = E_P (-0,6) = -1,73 \text{ kN/C}$
- Determine as componentes  $x$  e  $y$  do campo total no ponto  $P$ .  $E_x = 5,00 \text{ kN/C}$ ,  $E_y = -1,73 \text{ kN/C}$
- Utilize seu resultado da etapa 4 para calcular a intensidade do campo total.  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 5,29 \text{ kN/C}$
- Utilize os resultados obtidos na etapa 4 para determinar o ângulo  $\phi$  entre o campo e a direção de aumento  $x$ .  $\phi = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} = -19,1^\circ$

### Campo $\vec{E}$ sobre o Eixo de um Anel Carregado

A Figura 22-7a mostra um anel de raio  $a$  carregado uniformemente com uma carga total  $Q$ . O campo  $d\vec{E}$  no ponto  $P$ , sobre seu eixo devido ao elemento de carga  $dq$ , é mostrado na figura. Esse campo possui uma componente  $dE_x$  direcionada ao longo do eixo do anel e uma outra componente  $dE_{x\perp}$  direcionada perpendicularmente ao eixo. As componentes perpendiculares se cancelam aos pares, como pode ser visto na Figura 22-7b. Pela simetria da distribuição da carga, pode-se perceber que o campo resultante devido a todo o anel deve apoiar-se sobre o eixo do anel; isto é, a resultante das componentes perpendiculares é nula.

A componente axial do campo devido ao elemento de carga mostrado é

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k dq x}{r^2 r} = \frac{k dq x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

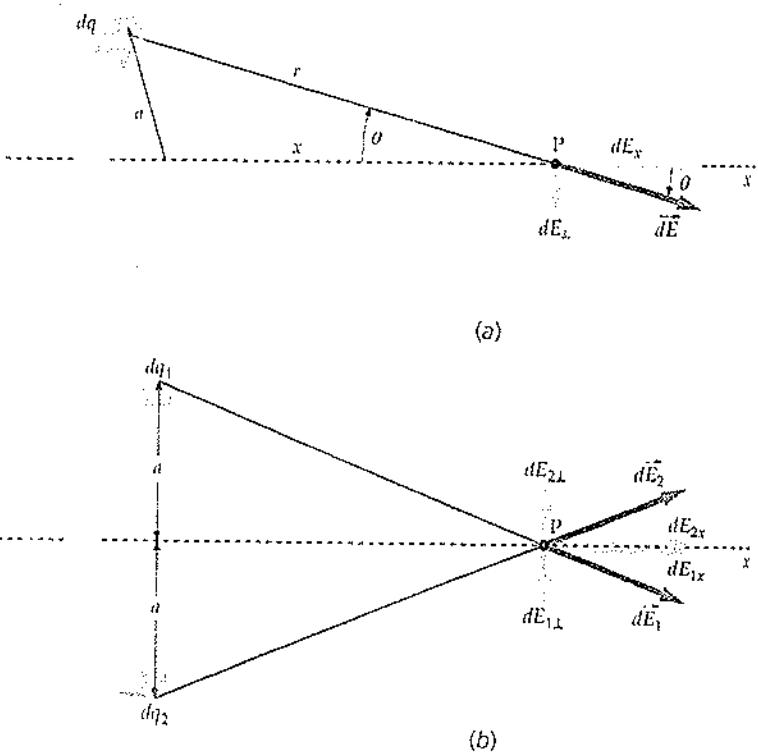
onde

$$r^2 = x^2 + a^2 \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

O campo devido a todo o anel carregado é

$$E_x = \int \frac{kx dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Uma vez que  $x$  não varia quando a integração é realizada ao longo dos elementos de carga, pode-se fatorar qualquer função de  $x$  da integral. Assim,



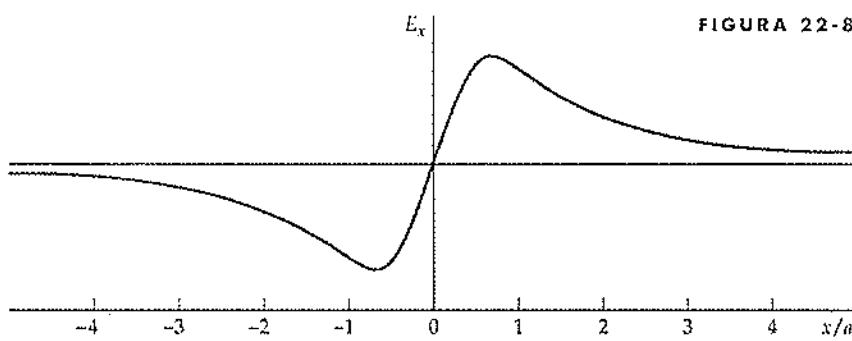
**FIGURA 22-7**  
(a) Anel de raio  $a$  carregado. O campo elétrico em um ponto  $P$  sobre o eixo  $x$ , devido ao elemento de carga  $dq$  mostrado, tem uma componente ao longo do eixo  $x$  e outra perpendicular ao eixo  $x$ . (b) Para qualquer elemento de carga  $dq_1$  existe um elemento de carga  $dq_2$  idêntico e oposto a  $dq_1$ , e as componentes do campo elétrico perpendiculares ao eixo  $x$  têm resultante nula.

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq$$

ou

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad 22-10$$

O gráfico da função  $E_x$  versus  $x$  ao longo do eixo do anel é mostrado na Figura 22-8.



**EXERCÍCIO** Determine o ponto sobre o eixo do anel onde o campo  $E_x$  é máximo. (Resposta  $x = a/\sqrt{2}$ )

### Campo $\vec{E}$ sobre o Eixo de um Disco Carregado Uniformemente

A Figura 22-9 mostra um disco de raio  $R$  carregado uniformemente com uma carga total  $Q$ . Pode-se calcular o campo sobre o eixo do disco tratando-o como um conjunto de anéis concêntricos carregados. Seja  $x$  o eixo do disco. O campo  $\vec{E}$  devido à carga em cada anel apóia-se sobre o eixo  $x$ . Um anel de raio  $a$  e espessura  $da$  é mostrado na figura. A área desse anel é  $dA = 2\pi a da$ , e sua carga é  $dq = \sigma dA = 2\pi a \sigma da$ , onde  $\sigma = Q/\pi R^2$  é a densidade superficial de carga (a carga por unidade de área). O campo produzido por esse anel é expresso pela Equação 22-10 substituindo-se  $Q$  por  $dq = 2\pi a \sigma da$ .

$$dE_x = \frac{kx 2\pi a \sigma da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

O campo total é obtido pela integração de  $a = 0$  até  $a = R$ :

$$E_x = \int_0^R \frac{kx 2\pi a \sigma da}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = kx \pi \sigma \int_0^R (x^2 + a^2)^{-3/2} 2a da = kx \pi \sigma \int_{x^2+0^2}^{x^2+R^2} u^{-3/2} du$$

onde  $u = x^2 + a^2$  e, portanto,  $du = 2a da$ . Após a integração obtém-se

$$E_x = kx \pi \sigma \left. \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right|_{x^2}^{x^2+R^2} = -2kx \pi \sigma \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)$$

Essa expressão pode ser escrita como

$$E_x = 2\pi k \sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right), \quad x > 0 \quad 22-11$$

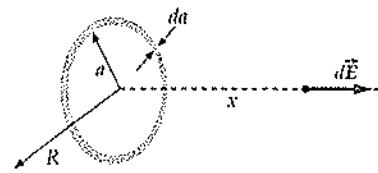


FIGURA 22-9

Um disco uniforme carregado pode ser tratado como um conjunto de anéis carregados, cada um com raio  $a$ .

### Campo $\vec{E}$ sobre o Eixo de um Disco Carregado

**EXERCÍCIO** Determine uma expressão para a componente  $E_x$  do campo elétrico em um ponto sobre o eixo  $x$  negativo. (Resposta  $E_x = -2\pi k \sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$  para  $x < 0$ )

Para  $x \gg R$  (sobre o eixo positivo  $x$  em um ponto bastante afastado do disco) espera-se que o disco se comporte como uma carga puntiforme. Substituindo-se  $R^2/x^2$  por 0, para  $x \gg R$ , tem-se  $E_x \rightarrow 0$ . Embora esse resultado esteja correto, ele não informa como o campo  $E_x$  depende de  $x$  para valores altos dessa

coordenada. Pode-se obter essa dependência utilizando a expansão do tipo  $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ , para  $|\epsilon| \ll 1$ . Com essa aproximação do segundo termo da Equação 22-11, fica

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2x^2}$$

A substituição desse resultado na Equação 22-11 fornece

$$E_x \approx 2\pi k\sigma \left(1 - 1 + \frac{R^2}{2x^2}\right) = \frac{2k\pi R^2 \sigma}{2x^2} = \frac{kQ}{x^2}, \quad x \gg R \quad 22-12$$

onde  $Q = \sigma\pi R^2$  é a carga total do disco. Para altos valores de  $x$ , o campo elétrico do disco carregado aproxima-se daquele referente a uma carga puntiforme  $Q$  na origem.

### Campo $\vec{E}$ Devido a um Plano Infinito Carregado

O campo elétrico de um plano infinito carregado pode ser obtido pela Equação 22-11 fazendo-se a relação  $R/x$  tender ao infinito. Assim,

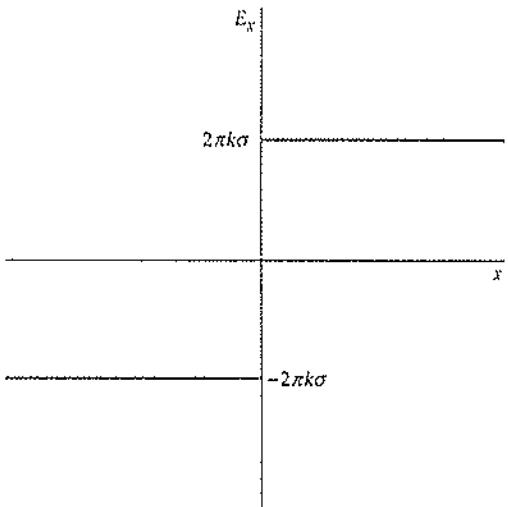
$$E_x = 2\pi k\sigma, \quad x > 0 \quad 22-13a$$

#### Campo $\vec{E}$ nas Proximidades de um Plano Infinito Carregado

Assim, o campo devido a um plano infinito carregado com distribuição de carga uniforme não depende de  $x$ . No outro lado do plano infinito, para valores negativos de  $x$  o campo é orientado no sentido negativo de  $x$ , logo,

$$E_x = -2\pi k\sigma, \quad x < 0 \quad 22-13b$$

Quando um ponto se move ao longo do eixo  $x$ , o campo elétrico atuante sobre ele dá um salto de  $-2\pi k\sigma \hat{i}$  para  $+2\pi k\sigma \hat{i}$  quando ele passa através de um plano infinito carregado (Figura 22-10). Há, portanto, uma descontinuidade finita no campo  $E_x$ , cujo valor é  $4\pi k\sigma$ .



**FIGURA 22-10**  
Gráfico mostrando a descontinuidade do campo  $\vec{E}$  no plano de carga.

Um disco, cujo raio é de 5 cm, possui em sua superfície uma carga uniforme com densidade de  $4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Utilizando aproximações apropriadas, determine o campo elétrico sobre o eixo do disco em pontos dele afastados de (a) 0,01 cm, (b) 0,03 cm e (c) 6 m. (d) Compare os resultados dos itens (a), (b) e (c) com os valores exatos obtidos pela utilização da Equação 22-11.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Para efeito das comparações do item (d), todos os cálculos serão realizados com cinco algarismos significativos. Para os itens (a) e (b), os pontos do campo são muito próximos do disco, comparativamente a seu raio, logo pode-se aproximar o disco de um plano infinito. Para o item (c), o ponto do campo está suficientemente afastado do disco ( $x/R = 120$ ) podendo-se, portanto, aproximar o disco de uma carga puntiforme. (d) Para efeito de comparação, determina-se a diferença percentual entre os valores aproximados e os valores exatos.

- (a) O campo elétrico nas proximidades do disco é aproximadamente igual àquele devido a um plano infinito carregado:

$$\begin{aligned} E_x &\approx 2\pi k\sigma \\ &= 2\pi(8,98755 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2) \\ &= 225,88 \text{ kN/C} \end{aligned}$$

- (b) Uma vez que 0,03 cm é uma distância muito pequena do disco, ele ainda parecerá um plano infinito carregado:

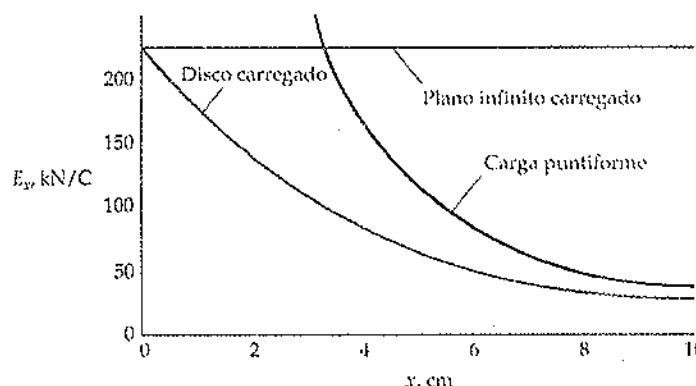
$$E_x \approx 2\pi k\sigma = 225,88 \text{ kN/C}$$

- (c) A um ponto muito afastado do disco, o campo será aproximadamente aquele devido a uma carga puntiforme:

$$\begin{aligned} E_x &\approx \frac{kQ}{x^2} = \frac{k\sigma\pi R^2}{x^2} = 2\pi k\sigma \frac{R^2}{2x^2} \\ &= (225,88 \text{ kN/C}) \frac{(0,05 \text{ m})^2}{2(6 \text{ m})^2} = 7,8431 \text{ N/C} \end{aligned}$$

- (d) Utilizando a expressão exata (Equação 22-11) para  $E_x$ , calculam-se os valores exatos nos pontos específicos:

$$E_x(\text{exato}) = 2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$



$x$ (cm)	$E_x$ (exato) (N/C)	$E_x$ (aprox.) (N/C)	diferença %
0,01	225,430	225,880	0,2
0,03	224,530	225,880	0,6
600	7,8427	7,8431	0,005

FIGURA 22-11

Note que o campo do disco carregado converge para o campo da carga puntiforme em grandes distâncias e é igual ao campo de um plano infinito carregado no limite quando  $x$  tende a zero.

**NOTAS** A Figura 22-11 mostra  $E_x$  versus  $x$  para o disco carregado desse exemplo, para um plano infinito com a mesma densidade de carga e para uma carga puntiforme.

## 22-2 Lei de Gauss

No Capítulo 21, o campo elétrico foi descrito visualmente através das linhas de campo elétrico. Agora, aquela descrição será colocada sob uma linguagem matemática rigorosa chamada lei de Gauss. A lei de Gauss é uma das equações de Maxwell — as equações fundamentais do eletromagnetismo, que são apresentadas e analisadas no Capítulo 31. Para cargas estáticas, a lei de Gauss e a lei de Coulomb são equivalentes. Os campos elétricos originários de uma distribuição de carga simétrica, como uma casca esférica carregada ou um segmento de reta infinito carregado, podem ser facilmente calculados utilizando a lei de Gauss. Nesta seção, é fornecido um argumento para a validade da lei de Gauss baseado nas propriedades das linhas de campo elétrico. Uma dedução rigorosa da lei de Gauss é apresentada na Seção 22-6.

Uma superfície fechada é aquela que divide o universo em duas regiões distintas: a região interna à superfície e a região externa à superfície. A Figura 22-12 mostra uma superfície fechada de forma arbitrária contendo um dipolo em seu interior. O número de linhas de campo que partem da carga positiva e atravessam a superfície depende dos limites da superfície, porém qualquer linha que atravesse a superfície partindo de seu interior também a atravessa retornando ao seu interior. Para se quantificar o número resultante de linhas ex-

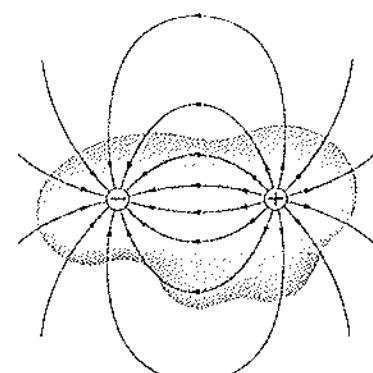


FIGURA 22-12  
Uma superfície de forma arbitrária envolve um dipolo elétrico. Desde que a superfície envolva ambas as cargas, a quantidade de linhas que atravessam a superfície de dentro para fora é exatamente igual à quantidade de linhas que atravessam a superfície de fora para dentro, independentemente de onde a superfície é desenhada.

ternas a qualquer superfície fechada, atribui-se o valor +1 a qualquer linha que atravessasse a superfície do interior para o exterior, e o valor -1 quando ela atravessasse no sentido do exterior para o interior. Assim, para a superfície mostrada na Figura 22-12 o número resultante de linhas que atravessam a superfície é igual a zero. Para superfícies envolvendo outros tipos de distribuições de cargas, como aquela mostrada na Figura 22-13, o número resultante de linhas que atravessam qualquer superfície que envolva as cargas é proporcional à carga resultante envolvida pela superfície. Este é um enunciado qualitativo da lei de Gauss.

## Fluxo Elétrico

A grandeza matemática correspondente à quantidade de linhas de campo que atravessam uma superfície é chamada de fluxo elétrico  $\phi$ . Para uma superfície perpendicular ao campo  $\vec{E}$  (Figura 22-14), o fluxo elétrico é igual ao produto da intensidade do campo  $E$  pela área  $A$ , isto é,

$$\phi = EA$$

As unidades do fluxo no sistema internacional são  $N \cdot m^2/C$ . Uma vez que  $E$  é proporcional ao número de linhas de campo por unidade de área, o fluxo também é proporcional ao número de linhas de campo que atravessam a superfície.



**FIGURA 22-14**  
Linhas de campo elétrico de um campo uniforme atravessando uma superfície de área  $A$  que é orientada perpendicularmente ao campo. O produto  $EA$  é igual ao fluxo elétrico através da superfície.

Na Figura 22-15, a superfície de área  $A_2$  não é perpendicular ao vetor campo elétrico  $\vec{E}$ . Entretanto, o número de linhas que atravessam a superfície de área  $A_2$  é igual ao número de linhas que atravessam a superfície de área  $A_1$ , que é perpendicular a  $\vec{E}$ . Essas áreas são relacionadas por

$$A_2 \cos \theta = A_1 \quad 22-14$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor  $\vec{E}$  e o vetor unitário  $\hat{n}$ , que é normal à superfície  $A_2$ , conforme mostrado na figura. O fluxo elétrico através de uma superfície é definido como sendo

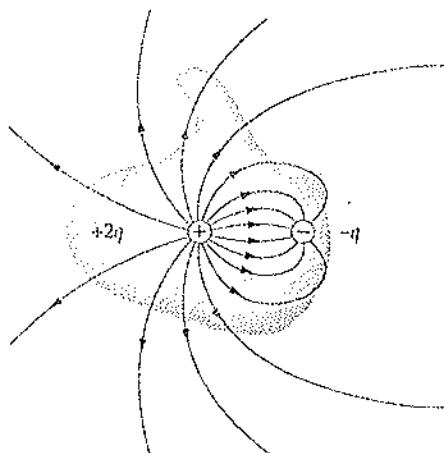
$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} A = EA \cos \theta = E_n A \quad 22-15$$

onde  $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$  é a componente de  $\vec{E}$  normal (perpendicular) à superfície.

A Figura 22-16 mostra uma superfície curva sobre a qual  $\vec{E}$  pode variar. Se a área  $\Delta A_i$  da superfície do elemento escolhido for suficientemente pequena, ela pode ser considerada como plana, e a variação do campo elétrico através do elemento pode ser desprezada. O fluxo do campo elétrico através desse elemento é

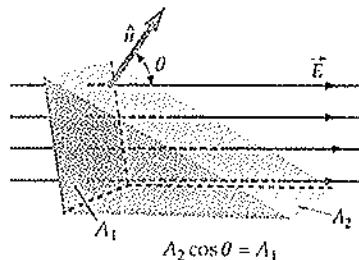
$$\Delta\phi_i = E_{ni} \Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$$

onde  $\hat{n}_i$  é o vetor unitário perpendicular à superfície do elemento e  $\vec{E}_i$  é o campo elétrico em um local qualquer sobre a superfície do elemento. Se a superfície for curva, os vetores unitários para diferentes elementos possuirão diferentes orientações. O fluxo total através da superfície é a soma dos  $\Delta\phi_i$  de todos os elementos que constituem a superfície. No limite, quando o número de elementos



**FIGURA 22-13**

Uma superfície de forma arbitrária envolve as cargas  $+2q$  e  $-q$ . As linhas que terminam na carga  $-q$  não atravessam a superfície ou a retornam a seu interior. O número de linhas que saem da superfície é o mesmo correspondente a uma única carga de valor  $+q$ , que é igual à carga resultante envolvida pela superfície.



**FIGURA 22-15**

Linhas de campo elétrico de um campo uniforme que é perpendicular à superfície de área  $A_1$ , porém faz um ângulo  $\theta$  com o vetor unitário  $\hat{n}$ , que é normal à superfície de área  $A_2$ . Onde  $\vec{E}$  não é perpendicular à superfície, o fluxo é igual a  $E_n A$ , em que  $E_n = E \cos \theta$  é a componente de  $\vec{E}$  perpendicular à superfície. O fluxo através da superfície de área  $A_2$  é idêntico ao que atravessa a superfície de área  $A_1$ .

se torna infinito e a área de cada elemento se aproxima de zero esse somatório tende a uma integral. A definição geral de fluxo elétrico, portanto, fica:

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad 22-16$$

#### DEFINIÇÃO – FLUXO ELÉTRICO

onde  $S$  estabelece o domínio da superfície sobre a qual a integração deve ser realizada.

Quando a superfície é *fechada*, tem-se interesse no fluxo elétrico que sai da superfície, assim escolhe-se o vetor unitário  $\hat{n}$  como sendo orientado para fora da superfície em cada ponto. A integral realizada sobre uma superfície fechada é indicada pelo símbolo  $\oint$ . Portanto, o fluxo total ou resultante que sai de uma superfície fechada pode ser expresso por

$$\phi_{res} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA \quad 22-17$$

O fluxo resultante  $\phi_{res}$  através de uma superfície fechada pode ser positivo ou negativo, dependendo de o vetor campo  $\vec{E}$  ser predominantemente para fora ou para dentro da superfície. Nos pontos sobre a superfície onde  $\vec{E}$  é orientado para dentro  $E_n$  é negativo.

#### Enunciado Quantitativo da Lei de Gauss

A Figura 22-17 mostra uma superfície esférica de raio  $R$  com uma carga puntiforme  $Q$  em seu centro. O campo elétrico em uma posição qualquer dessa superfície é normal à superfície e possui a intensidade

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

O fluxo resultante  $\vec{E}$  através dessa superfície esférica é

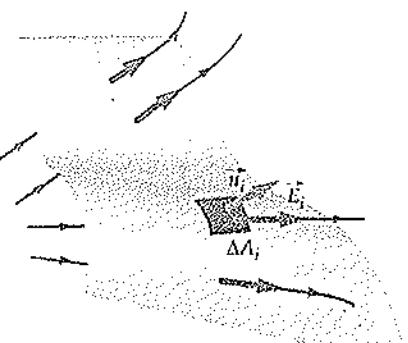
$$\phi_{res} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA$$

onde o módulo  $E_n$  foi retirado da integral por ser constante para qualquer ponto sobre a superfície. A integral de  $dA$  ao longo da superfície é igual à área total da superfície que, para uma esfera de raio  $R$  vale  $4\pi R^2$ . Utilizando esse resultado e substituindo  $E_n$  por  $kQ/R^2$ , obtém-se

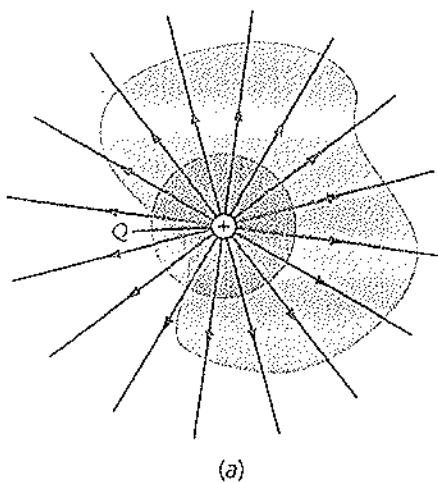
$$\phi_{res} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ \quad 22-18$$

Assim, o fluxo resultante que atravessa a superfície esférica com uma carga puntiforme em seu centro é dependente do raio  $R$  da esfera e é igual a  $4\pi k$  vezes o valor da carga  $Q$  (a carga puntiforme). Esse resultado é consistente com as observações anteriores, em que a quantidade de linhas que saem de uma superfície fechada é proporcional à carga resultante no interior da superfície. Essa *quantidade de linhas é a mesma para todas as superfícies fechadas que circundam a carga, independentemente da forma da superfície*. Assim, o fluxo resultante que sai de *qualquer superfície* que envolve uma carga puntiforme  $Q$  é igual a  $4\pi kQ$ .

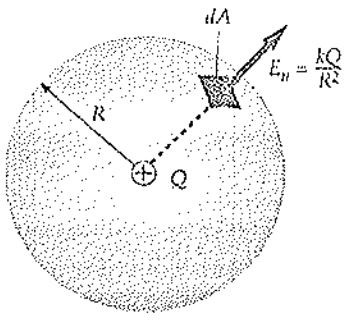
Pode-se estender esse resultado a sistemas que possuam múltiplas cargas. Na Figura 22-18 a superfície envolve duas cargas puntiformes  $q_1$  e  $q_2$ , e existe uma terceira carga puntiforme  $q_3$  externa à superfície. Uma vez que o campo elétrico em um ponto qualquer sobre a superfície é igual à soma dos vetores do campo elétrico produzido por cada uma das três cargas, o fluxo resultante



**FIGURA 22-16**  
Se  $E_n$  varia ao longo dos pontos da superfície, seja porque  $\vec{E}$  varia, seja porque o ângulo entre  $\vec{E}$  e  $\hat{n}$  varia, a área da superfície deve ser dividida em pequenos elementos de área  $\Delta A_i$ . O fluxo através da superfície será, assim, calculado somando-se  $\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$  ao longo de todos os elementos de área.



(a)



(b)

**FIGURA 22-17**  
Uma superfície esférica envolve uma carga puntiforme  $Q$ . (a) A quantidade de linhas de campo elétrico que atravessam essa superfície e a quantidade referente a qualquer outra superfície que também envolve  $Q$  são as mesmas. (b) O fluxo resultante é facilmente calculado para uma superfície esférica. Ele é igual ao campo  $E_n$  multiplicado pela área da superfície, ou  $E_n 4\pi R^2$ .

$\phi_{\text{res}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$  que passa pela superfície será igual à soma dos fluxos devidos às cargas individuais. O fluxo decorrente da carga  $q_3$  que está fora da superfície é nulo, porque cada linha de campo que sai de  $q_3$  e entra na superfície em um determinado ponto deixa a superfície em um outro ponto qualquer. O fluxo que sai da superfície devido à carga  $q_1$  é  $4\pi k q_1$ , e aquele devido à carga  $q_2$  é  $4\pi k q_2$ . O fluxo resultante que atravessa a superfície é, portanto, igual a  $4\pi k(q_1 + q_2)$  e pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo dos sinais e da intensidade das cargas  $q_1$  e  $q_2$ .

O fluxo resultante que atravessa uma superfície fechada é igual a  $4\pi k$  vezes a carga resultante no interior da superfície:

$$\phi_{\text{res}} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{\text{int}} \quad 22-19$$

lei de Gauss

Essa é a lei de Gauss. Sua validade depende do fato de que o campo elétrico devido a uma única carga puntiforme varia inversamente com o quadrado da distância da carga. Foi essa propriedade do campo elétrico que tornou possível o traçado de uma quantidade definida de linhas de campo elétrico a partir de uma carga e permitiu obter a densidade de linhas proporcional à intensidade do campo.

É comum escrever-se a constante de Coulomb  $k$  em função de uma outra constante  $\epsilon_0$ , que é chamada permissividade do vácuo:

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \quad 22-20$$

Utilizando essa notação, a lei de Coulomb para o campo  $\vec{E}$  é escrita como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad 22-21$$

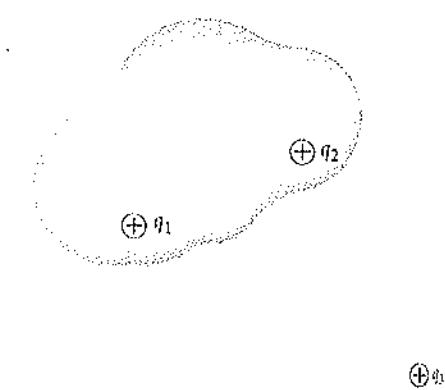
e a lei de Gauss é expressa por

$$\phi_{\text{res}} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad 22-22$$

O valor de  $\epsilon_0$  em unidades do Sistema Internacional (SI) é

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi (8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad 22-23$$

A lei de Gauss é válida para todas as superfícies e quaisquer distribuições de carga. Para as distribuições que possuem alto grau de simetria ela pode ser utilizada para calcular o campo elétrico, conforme será ilustrado na próxima seção. Para as distribuições estáticas de carga, as leis de Gauss e de Coulomb são equivalentes. Entretanto, a lei de Gauss é mais geral por ser sempre válida, enquanto a lei de Coulomb é válida apenas para distribuições estáticas de carga.



**FIGURA 22-18**  
Uma superfície envolvendo as cargas puntiformes  $q_1$  e  $q_2$ , mas não envolvendo  $q_3$ . O fluxo resultante através dessa superfície é igual a  $4\pi k(q_1 + q_2)$ .

Um campo elétrico vale  $\vec{E} = (200 \text{ N/C}) \hat{i}$  na região em que  $x > 0$  e  $\vec{E} = (-200 \text{ N/C}) \hat{i}$  na região em que  $x < 0$ . Uma superfície cilíndrica imaginária com comprimento de 20 cm e raio  $R = 5$  cm tem seu centro geométrico na origem e seu

eixo longitudinal coincidente com o eixo  $x$ , de modo que uma de suas extremidades está em  $x = +10 \text{ cm}$  e a outra em  $x = -10 \text{ cm}$  (Figura 22-19). (a) Qual o valor do fluxo elétrico que atravessa toda a superfície fechada definida pelo cilindro? (b) Qual é a carga resultante no interior da superfície fechada?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A superfície fechada descrita, que representa um elemento contínuo, consiste em três regiões — duas extremidades planas e uma lateral curva. Calcule separadamente o fluxo gerado pelo campo  $\vec{E}$  que atravessa cada região da superfície. Para calcular o fluxo através de cada região, desenhe um vetor  $\hat{n}$  normal à superfície posicionado em um ponto qualquer e o vetor  $\vec{E}$  referente ao mesmo ponto. Se  $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$  for o mesmo em qualquer ponto do trecho, então o fluxo através desse trecho será  $\phi = \vec{E} \cdot \hat{n}A$  (Equação 22-15). O fluxo resultante através de toda a superfície fechada será obtido pela soma dos fluxos através das regiões individualmente. O fluxo resultante está relacionado à carga no interior da superfície pela lei de Gauss (Equação 22-19).

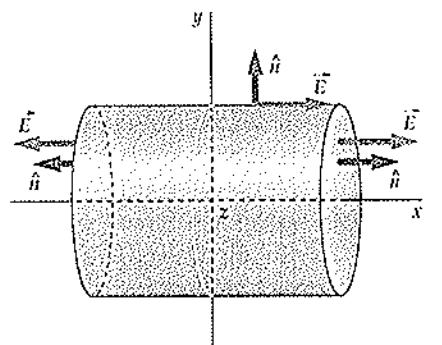


FIGURA 22-19

(a) 1. Esquematize a superfície de forma cilíndrica. Em cada uma das regiões da superfície desenhe o vetor normal  $\hat{n}$  e o vetor campo  $\vec{E}$ :

2. Calcule o fluxo através da superfície circular plana da direita, onde  $\hat{n} = \hat{i}$ :

$$\begin{aligned}\phi_{\text{direita}} &= \vec{E}_{\text{direita}} \cdot \hat{n}_{\text{direita}} A = \vec{E}_{\text{direita}} \cdot \hat{i} \pi R^2 \\ &= (200 \text{ N/C}) \hat{i} \cdot \hat{i} (\pi)(0,05 \text{ m})^2 \\ &= 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

3. Calcule o fluxo através da superfície circular plana da esquerda, onde  $\hat{n} = -\hat{i}$ :

$$\begin{aligned}\phi_{\text{esquerda}} &= \vec{E}_{\text{esquerda}} \cdot \hat{n}_{\text{esquerda}} A = \vec{E}_{\text{esquerda}} \cdot (-\hat{i}) \pi R^2 \\ &= (-200 \text{ N/C}) \hat{i} \cdot (-\hat{i}) (\pi)(0,05 \text{ m})^2 \\ &= 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

4. Calcule o fluxo através da superfície curva, onde o campo  $\vec{E}$  é perpendicular a  $\hat{n}$ :

$$\phi_{\text{curva}} = \vec{E}_{\text{curva}} \cdot \hat{n}_{\text{curva}} A = 0$$

5. O fluxo resultante através da superfície é igual à soma dos fluxos através de todas as superfícies individuais:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{res}} &= \phi_{\text{direita}} + \phi_{\text{esquerda}} + \phi_{\text{curva}} \\ &= 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} + 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} + 0 \\ &= 3,14 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

(b) A lei de Gauss relaciona a carga no interior da superfície ao fluxo resultante:

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \epsilon_0 \phi_{\text{res}} \\ &= (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3,14 \times \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) \\ &= 2,78 \times 10^{-11} \text{ C} = 27,8 \text{ pC}\end{aligned}$$

**NOTAS** O fluxo não depende do comprimento da superfície cilíndrica. Isso significa que a carga no interior da superfície se situa totalmente sobre o plano  $yz$ .

### 22-3 Cálculo do Campo Elétrico $E$ a Partir da Lei de Gauss

Em geral, dada uma distribuição simétrica de carga é mais fácil determinar o campo elétrico pela lei de Gauss do que pela lei de Coulomb. Idealiza-se, inicialmente, uma superfície imaginária fechada, chamada de superfície gaussiana (o cilindro no Exemplo 22-5). Essa superfície é escolhida de modo que em cada uma de suas faces o campo  $\vec{E}$  seja nulo, perpendicular a  $\hat{n}$  ou paralelo a  $\hat{n}$  com  $E_n$  constante. Dessa forma o fluxo através de cada superfície é igual a  $E_n A$  e a lei

de Gauss é utilizada para relacionar o campo às cargas no interior da superfície fechada.

### Simetria Plana

Uma distribuição de carga possui simetria plana se ao ser observada de todos os pontos situados sobre uma superfície plana infinita ela apresentar a mesma aparência. A Figura 22-20 mostra um plano infinito de carga com carga de superfície uniforme de densidade  $\sigma$ . Pela simetria, o campo  $\vec{E}$  deve ser perpendicular ao plano e pode depender apenas da distância ao plano. O campo  $\vec{E}$  também deve ter o mesmo módulo, porém sentidos opostos, nos pontos à mesma distância do plano carregado em ambos os lados do plano. Para a superfície gaussiana, escolhe-se uma forma cilíndrica, conforme mostrado, com o plano carregado dividindo o cilindro em duas partes. Em cada face do cilindro são desenhados os vetores  $\hat{n}$  e  $\vec{E}$ . Uma vez que o produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  é nulo em qualquer ponto da região curva da superfície gaussiana, não haverá fluxo através dessa face. O fluxo através de cada uma das regiões planas da superfície é  $E_n A$ , onde  $A$  é a área de cada uma das faces planas. Assim, o fluxo total através da superfície fechada é igual a  $2E_n A$ . A carga resultante no interior da superfície é  $\sigma A$ . A lei de Gauss, então, fornece

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0 \phi_{\text{res}}$$

$$\sigma A = \epsilon_0 2E_n A$$

(Você pode perceber por que  $Q_{\text{int}} = \sigma A$ ?) A solução para  $E_n$  fornece

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma \quad 22-24$$

### CAMPO $\vec{E}$ PARA UM PLANO INFINITO DE CARGAS

$E_n$  será positivo se  $\sigma$  for positivo, e  $E_n$  será negativo se  $\sigma$  for negativo. Isso significa que se  $\sigma$  for positivo, o campo  $\vec{E}$  é orientado no sentido de afastar-se do plano carregado, e se  $\sigma$  for negativo o campo  $\vec{E}$  é orientado em direção a ele. Esse resultado é idêntico ao obtido, com muito maior dificuldade, através da lei de Coulomb (Equações 22-13a e b). Note que o campo é descontínuo no plano carregado. Se o plano carregado for o plano  $yz$ , o campo será  $\vec{E} = \sigma/(2\epsilon_0)\hat{i}$  na região em que  $x > 0$  e  $\vec{E} = -\sigma/(2\epsilon_0)\hat{i}$  na região em que  $x < 0$ . Assim, a descontinuidade do campo é  $\Delta\vec{E} = \sigma/(2\epsilon_0)\hat{i} - [-\sigma/(2\epsilon_0)\hat{i}] = (\sigma/\epsilon_0)\hat{i}$ .

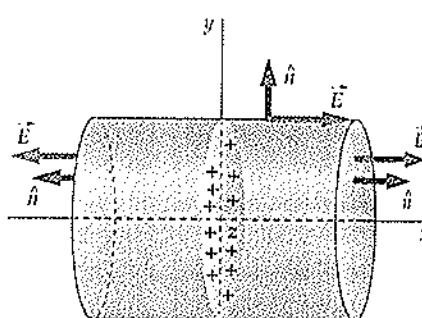


FIGURA 22-20

Superfície gaussiana para o cálculo do campo  $\vec{E}$  devido a um plano infinito carregado. (Apenas a parte do plano interno à superfície gaussiana é mostrada.) Nas faces planas desse cilindro,  $\vec{E}$  é perpendicular à superfície e constante em módulo. Na região curva o campo  $\vec{E}$  é paralelo à superfície.

Na Figura 22-21, um plano infinito com densidade superficial de carga  $\sigma = +4,5 \text{ nC/m}^2$  situa-se no plano de coordenada  $x = 0$ , e um segundo plano infinito com densidade superficial de carga  $\sigma = -4,5 \text{ nC/m}^2$  situa-se em um plano paralelo ao anterior na coordenada  $x = 2 \text{ m}$ . Determine o campo elétrico em (a)  $x = 1,8 \text{ m}$  e (b)  $x = 5 \text{ m}$ .

### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Cada plano produz um campo elétrico uniforme cujo módulo é  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ . Utiliza-se o princípio da superposição para determinar o campo resultante. Entre os planos os campos se somam, produzindo um campo resultante de módulo  $\sigma/\epsilon_0$  no sentido

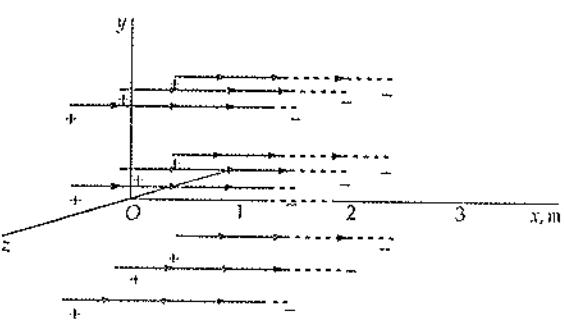


FIGURA 22-21

positivo da direção  $x$ . Para  $x > 2$  m e para  $x < 0$  os campos são orientados em sentidos opostos e se cancelam.

- (a) 1. Calcule o módulo do campo  $E$  produzido por cada plano:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4,5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2}{2(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} \\ = 254 \text{ N/C}$$

2. Em  $x = 1,8$  m, posição entre os planos, o campo devido a cada plano é orientado no sentido positivo da direção  $x$ :

$$E_{x,\text{res}} = E_1 + E_2 = 254 \text{ N/C} + 254 \text{ N/C} \\ = 508 \text{ N/C}$$

- (b) Em  $x = 5$  m, os campos devidos aos dois planos possuem sentidos opostos:

$$E_{x,\text{res}} = E_1 - E_2 = \boxed{0}$$

**NOTAS** Uma vez que os dois planos possuem densidades de carga iguais e opostas, as linhas de campo elétrico têm origem no plano positivo e terminam no plano negativo. O vetor  $\vec{E}$  é nulo exceto entre os planos. Observe que  $E_{x,\text{res}} = 508 \text{ N/C}$  não apenas em  $x = 1,8$  m, mas também em qualquer ponto na região entre os planos carregados.

### Simetria Esférica

Admita que uma distribuição de carga seja concêntrica em relação a uma superfície esférica. Uma distribuição de carga possui simetria esférica se ela for idêntica quando observada de todos os pontos de uma superfície esférica. Para calcular o campo elétrico devido às distribuições de carga com simetria esférica, utiliza-se uma superfície esférica como superfície gaussiana. Ilustra-se essa condição determinando, inicialmente, o campo elétrico a uma distância  $r$  de uma carga puntiforme  $q$ . Escolhe-se uma superfície esférica de raio  $r$ , centrada na carga puntiforme, como superfície gaussiana. Pela simetria, o campo  $\vec{E}$  deve ser orientado radialmente entrando ou saindo da superfície. A componente de  $\vec{E}$  normal à superfície é igual à componente radial de  $E$  em cada ponto sobre a superfície. Isto é,  $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n} = E_r$ , onde  $\hat{n}$  é o vetor normal que sai da superfície e possui o mesmo valor em qualquer ponto da superfície esférica. O módulo do campo  $\vec{E}$  também pode depender da distância à carga, porém não depende da direção em relação à carga. Assim, o fluxo resultante através da superfície esférica de raio  $r$  é

$$\phi_{\text{es}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

onde  $\oint_S dA = 4\pi r^2$  é a área total da superfície esférica. Uma vez que a carga total no interior da superfície é exatamente igual à carga puntiforme  $q$ , a lei de Gauss fornece

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Explicitando-se  $E$ , tem-se

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

que é a lei de Coulomb. Assim, deduziu-se a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss. Uma vez que a lei de Gauss também pode ser deduzida da lei de Coulomb (veja a Seção 22-6), pode-se afirmar que as duas leis são equivalentes para cargas estáticas.

### Campo $\vec{E}$ Devido a uma Casca Esférica Fina Carregada

Considere uma casca esférica fina carregada uniformemente com raio  $R$  e carga total  $Q$ . Pela simetria, o campo  $\vec{E}$  é radial e seu módulo depende apenas da distância  $r$  até o centro da esfera. Na Figura 22-22, escolhe-se uma superfície gaussiana esférica de raio  $r > R$ . Uma vez que o campo  $\vec{E}$  é normal a essa superfície e possui o mesmo módulo em qualquer ponto sobre a superfície, o fluxo através da superfície é

$$\phi_{\text{res}} = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

Como a carga total no interior da superfície gaussiana é igual à carga total  $Q$  da casca, a lei de Gauss fornece

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ou

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R \quad 22-25a$$

### Campo $\vec{E}$ no Exterior de uma Casca Esférica Carregada

Assim, o campo elétrico externo a uma casca esférica carregada uniformemente é idêntico ao produzido por uma carga que estivesse no centro da casca.

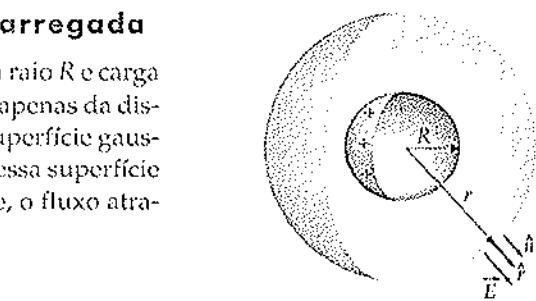
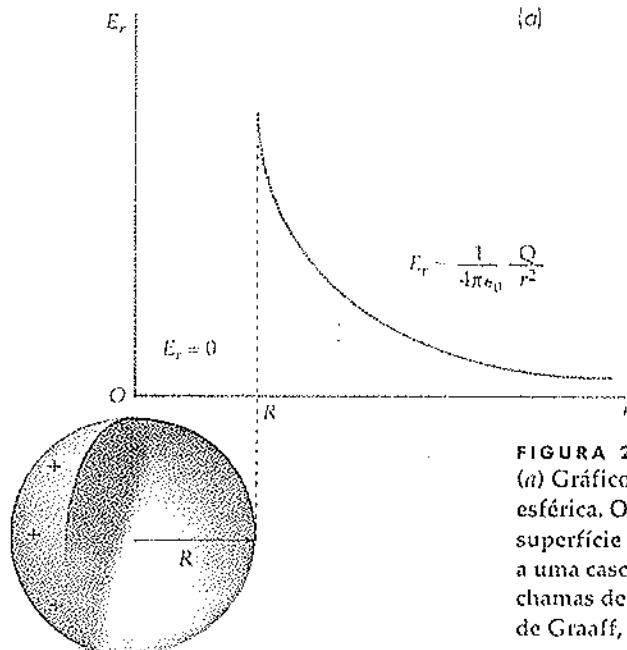
Escolhendo-se uma superfície gaussiana esférica no interior da casca, onde  $r < R$ , o fluxo resultante é novamente  $E_r 4\pi r^2$ , porém a carga total no interior da superfície é nula. Portanto, para  $r < R$ , a lei de Gauss fornece

$$\phi_{\text{res}} = E_r 4\pi r^2 = 0$$

assim,

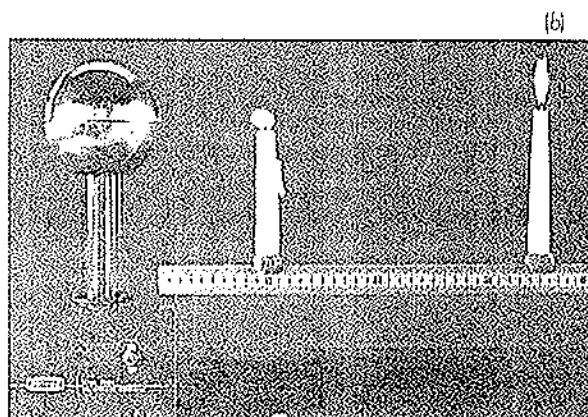
$$E_r = 0, \quad r < R \quad 22-25b$$

### Campo $\vec{E}$ no Interior de uma Casca Esférica Carregada



**FIGURA 22-22**

Superfície gaussiana esférica de raio  $r > R$  para o cálculo do campo elétrico externo a uma casca esférica fina de raio  $R$  carregada uniformemente.



**FIGURA 22-23**

(a) Gráfico de  $E_r$  em função de  $r$  para a distribuição de carga sobre uma casca esférica. O campo elétrico é descontínuo em  $r = R$ , onde há uma carga de superfície com densidade  $\sigma$ . (b) A diminuição de  $E_r$  ao longo da distância devido a uma casca esférica carregada é evidenciada pelo efeito do campo sobre as chamas de duas velas. A casca esférica à esquerda (parte de um gerador de Van de Graaff, um dispositivo que é discutido no Capítulo 24) tem uma alta carga negativa que atrai os fons positivos nas vizinhanças das chamas das velas. A chama da direita, que está bem mais afastada, não é significativamente afetada.

Esses resultados também podem ser obtidos pela integração direta da lei de Coulomb, porém os cálculos serão muito mais difíceis.

A Figura 22-23 mostra uma curva qualitativa do comportamento do campo  $E$ , em função de  $r$  para uma distribuição uniforme da carga elétrica sobre uma casca esférica. Observe, novamente, que o campo elétrico é descontínuo em  $r = R$ , onde a densidade de carga na superfície é  $\sigma = Q/4\pi R^2$ . Em uma posição imediatamente externa à casca, onde  $r \approx R$ , o campo elétrico vale  $E_s = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 \approx \sigma/\epsilon_0$ , uma vez que  $\sigma = Q/4\pi R^2$ . Uma vez que o campo no interior da casca é nulo, o campo elétrico apresenta uma descontinuidade de  $\sigma/\epsilon_0$  ao se atravessar a casca.

Uma casca esférica de raio  $R = 3$  m tem seu centro na origem e uma densidade de carga superficial  $\sigma = 3$  nC/m<sup>2</sup>. Uma carga puntiforme  $q = 250$  nC é posicionada sobre o eixo  $y$  em  $y = 2$  m. Determine o campo elétrico sobre o eixo  $x$  em (a)  $x = 2$  m e (b)  $x = 4$  m.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Determinam-se os campos devidos à carga puntiforme e à casca esférica para, em seguida, proceder-se à soma de seus vetores representativos. Para o item (a), o ponto do campo é interno à casca, assim o campo é devido apenas à carga puntiforme (Figura 22-24a). No item (b), o ponto do campo está externo à casca, logo esta pode ser considerada uma carga puntiforme na origem. Determina-se, então, o campo devido às duas cargas puntiformes (Figura 22-24b).

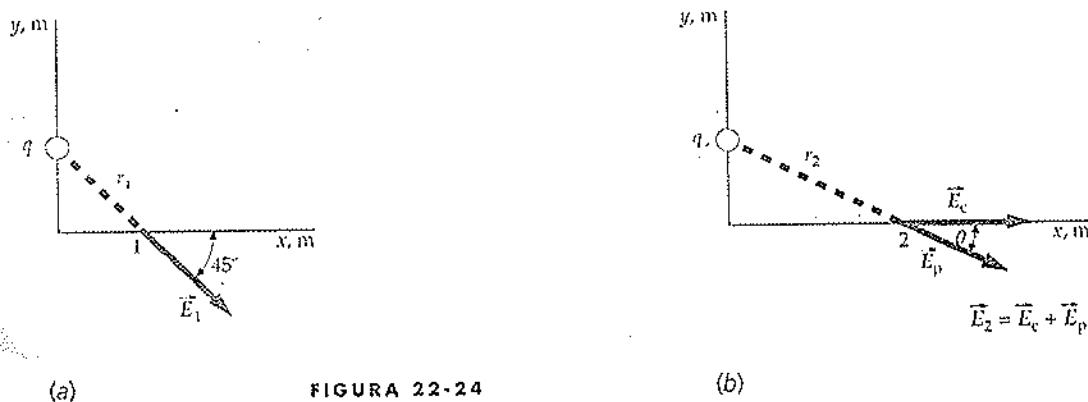


FIGURA 22-24

- (a) 1. Internamente à casca,  $\vec{E}_1$  é devido apenas à carga puntiforme:

$$2. \text{ Calcule o quadrado da distância } r_1^2:$$

$$3. \text{ Utilize } r_1^2 \text{ para calcular o módulo do campo:}$$

4. Pode-se perceber pela Figura 22-24a que o campo faz um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x$ :

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2} \hat{r}_1$$

$$r_1^2 = (2 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2 = 8 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{8 \text{ m}^2} \\ &\approx 281 \text{ N/C} \end{aligned}$$

5. Expresso o campo  $\vec{E}_i$  em função de suas componentes:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_{ix}\hat{i} + E_{iy}\hat{j} = E_i \cos 45^\circ \hat{i} - E_i \sin 45^\circ \hat{j} \\ &= (281 \text{ N/C}) \cos 45^\circ \hat{i} - (281 \text{ N/C}) \sin 45^\circ \hat{j} \\ &= 199 (\hat{i} - \hat{j}) \text{ N/C}\end{aligned}$$

- (b) 1. Externamente a seu perímetro, a casca pode ser tratada como uma carga puntiforme localizada na origem, e o vetor campo devido à casca  $\vec{E}_c$  estará, portanto, ao longo do eixo  $x$ :

2. Calcule a carga total  $Q$  da casca:

3. Utilize a carga  $Q$  para calcular o campo devido à casca:

$$\vec{E}_c = \frac{kQ}{x_2^2} \hat{i}$$

$$Q = \sigma 4\pi R^2 = (3 \text{ nC/m}^2) 4\pi (3 \text{ m})^2 = 339 \text{ nC}$$

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{kQ}{x_2^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9} \text{ C})}{(4 \text{ m})^2} \\ &= 190 \text{ N/C}\end{aligned}$$

4. O campo devido à carga puntiforme é:

$$\vec{E}_p = \frac{kq}{r_2^2} \hat{r}_2$$

5. Calcule o quadrado da distância da carga puntiforme  $q$  sobre o eixo  $y$  até o ponto do campo em  $x = 4 \text{ m}$ :

$$r_2^2 = (2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2 = 20 \text{ m}^2$$

6. Calcule o módulo do campo devido à carga puntiforme:

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{kq}{r_2^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{20 \text{ m}^2} \\ &= 112 \text{ N/C}\end{aligned}$$

7. Esse campo faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ , onde:

$$\tan \theta = \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26,6^\circ$$

8. Portanto, as componentes  $x$  e  $y$  do campo resultante são:

$$E_x = E_{px} + E_{cx} = E_p \cos \theta + E_c$$

$$= (112 \text{ N/C}) \cos 26,6^\circ + 190 \text{ N/C} = 290 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_{py} + E_{cy} = -E_p \sin \theta + 0$$

$$= -(112 \text{ N/C}) \sin 26,6^\circ = -50,0 \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = (290 \hat{i} - 50,0 \hat{j}) \text{ N/C}$$

**NOTAS** Conhecidas as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um vetor, este fica completamente definido. Nos casos do exemplo, a componente  $z$  é nula.

### Campo $\vec{E}$ Devido a uma Esfera Carregada Uniformemente

Determine o campo elétrico (a) externamente e (b) internamente a uma esfera maciça carregada uniformemente de raio  $R$  com uma carga total  $Q$  distribuída uniformemente ao longo de seu volume. A densidade de carga é  $\rho = Q/V$ ,

onde  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  é o volume da esfera.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pela simetria, o campo elétrico deve ser radial. (a) Para obter  $E$ , externamente a esfera carregada, escolhe-se uma superfície gaussiana esférica de raio  $r > R$  (Figura 22-25a). (b) O campo  $E$ , no interior da esfera carregada pode ser obtido escolhendo-se

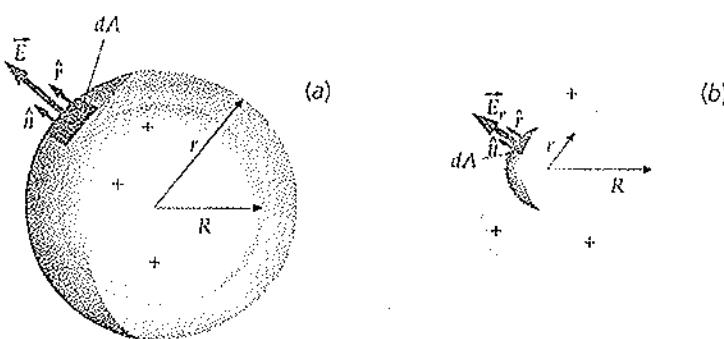


FIGURA 22-25

uma superfície gaussiana esférica de raio  $r < R$  (Figura 22-25b). Em cada uma dessas superfícies o campo  $E_r$  é constante. Assim, a lei de Gauss relaciona  $E_r$  à carga total no interior da superfície gaussiana.

- (a) 1. (Externamente) Desenhe uma esfera de raio  $R$  carregada e uma superfície gaussiana esférica com raio  $r > R$ :

2. Relacione o fluxo através da superfície gaussiana ao campo elétrico  $E$ , sobre ela. Em cada ponto dessa superfície  $\hat{n} = \hat{r}$  e  $E$ , possui um único valor:

3. Aplique a lei de Gauss para relacionar o campo à carga total no interior da superfície, que é  $Q$ :

4. Explicite o módulo do campo  $E_r$ :

- (b) 1. (Internamente) Desenhe outra vez a esfera carregada de raio  $R$ . Agora desenhe uma superfície gaussiana esférica com raio  $r < R$ :

2. Relacione o fluxo através da superfície gaussiana ao campo elétrico  $E$ , sobre ela. Em cada ponto dessa superfície  $\hat{n} = \hat{r}$  e  $E$ , possui um único valor:

3. Aplique a lei de Gauss para relacionar o campo à carga total no interior da superfície, que é  $Q_{int}$ :

4. A carga total interna à superfície é  $\rho V'$ , onde  $\rho = Q/V$ ,  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  e  $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$ .  $V$  é o volume da esfera maciça e  $V'$  é o volume no interior da superfície gaussiana:

5. Substitua esse valor por  $Q_{int}$  e resolva para  $E_r$ :

$$\phi_{res} = \vec{E} \cdot \hat{n}A = \vec{E} \cdot \hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R$$

$$\phi_{res} = \vec{E} \cdot \hat{n}A = \vec{E} \cdot \hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \rho V' = \left(\frac{Q}{V}\right)V' = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r, \quad r \leq R$$

**NOTAS** A Figura 22-26 mostra o gráfico de  $E_r$  em função de  $r$  para a distribuição de carga desse exemplo. No interior da esfera carregada  $E_r$  aumenta com  $r$ . Observe que o campo  $E_r$  é contínuo em  $r = R$ . Uma esfera carregada uniformemente algumas vezes é utilizada como modelo para descrever o campo elétrico de um núcleo atômico.

O Exemplo 22-8 mostrou que o campo elétrico a uma distância  $r$  do centro de uma esfera de raio  $R$  carregada uniformemente é expresso por

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R \quad 22-26a$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r, \quad r \leq R \quad 22-26b$$

onde  $Q$  é a carga total da esfera.

### Simetria Cilíndrica

Considere uma superfície coaxial e uma distribuição de carga uniforme. Uma distribuição de carga possui simetria cilíndrica se for idêntica quando vista de todos os pontos sobre uma superfície cilíndrica de comprimento infinito. Para calcular o campo elétrico devido às distribuições de carga com simetria cilíndrica, utiliza-se uma superfície gaussiana cilíndrica. Ilustrase esse caso calculando o campo elétrico devido a um cabo de comprimento infinito carregado uniformemente, isto é, considerando a densidade de carga linear uniforme, um problema já resolvido com o uso da lei de Coulomb.

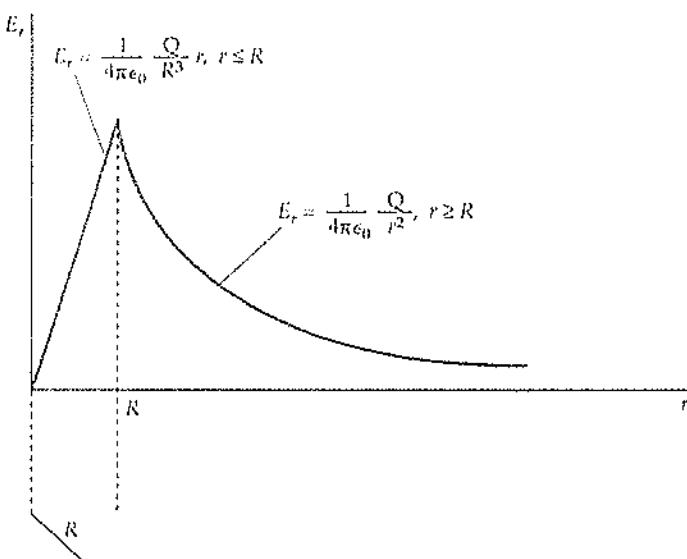


FIGURA 22-26

Utilize a lei de Gauss para determinar o campo elétrico em um ponto qualquer devido a uma carga em linha de comprimento infinito com densidade de carga uniforme  $\lambda$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Tendo em vista a simetria do problema, sabe-se que o campo elétrico é orientado afastando-se da linha, se a densidade  $\lambda$  for positiva (ou orientado para a linha, se  $\lambda$  for negativa), e sabe-se também que o módulo do campo depende apenas da distância radial da linha até o ponto desejado. Portanto, escolhe-se uma superfície gaussiana de forma cilíndrica coaxial com a linha. Essa superfície consiste em três regiões, duas extremidades planas e uma lateral curva. Calcula-se o fluxo de  $\vec{E}$  através de cada superfície e, utilizando a lei de Gauss, relaciona-se o fluxo resultante à densidade de carga  $\lambda$ .

1. Esquematize a linha de carga e uma superfície gaussiana de forma cilíndrica (Figura 22-27) com comprimento  $L$  e raio  $R$ . A superfície fechada consiste em três regiões, duas extremidades planas e uma lateral curva. Desenhe os vetores  $\vec{E}$  e  $\hat{n}$  para um ponto escolhido aleatoriamente em cada região. Sendo o problema simétrico, sabe-se que o sentido de  $\vec{E}$  é o de afastar-se da linha de carga, se  $\lambda$  for positiva (ou o de aproximar-se da linha, se  $\lambda$  for negativa), e sabe-se também que o módulo de  $\vec{E}$  depende apenas da distância radial da linha de carga até o ponto escolhido.
2. Calcule o fluxo que atravessa a região curva da superfície gaussiana. Em cada ponto da superfície curva  $\hat{R} = \hat{n}$ , onde  $\hat{R}$  é o vetor unitário na direção radial.
3. Calcule o fluxo através de cada uma das regiões planas da superfície gaussiana.

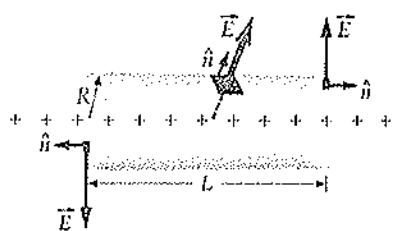


FIGURA 22-27

$$\begin{aligned}\phi_{\text{curva}} &= \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{curva}} = \vec{E} \cdot \hat{R} A_{\text{curva}} \\ &= E_R 2\pi RL\end{aligned}$$

$$\phi_{\text{esquerda}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{esquerda}} = 0$$

ana. Nessas regiões a direção de  $\hat{n}$  é paralela à linha de carga (e, portanto, perpendicular a  $\vec{E}$ ):

4. Aplique a lei de Gauss para relacionar o campo à carga total no interior da superfície,  $Q_{\text{int}}$ . O fluxo resultante que sai da superfície gaussiana será igual ao somatório dos fluxos que saem das três regiões da superfície, e  $Q_{\text{int}}$  é a carga correspondente a um comprimento  $L$  da linha de carga:

$$\phi_{\text{direta}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{direta}} = 0$$

$$\phi_{\text{res}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E_R 2\pi RL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

assim

$$E_R = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 R} \frac{\lambda}{L}$$

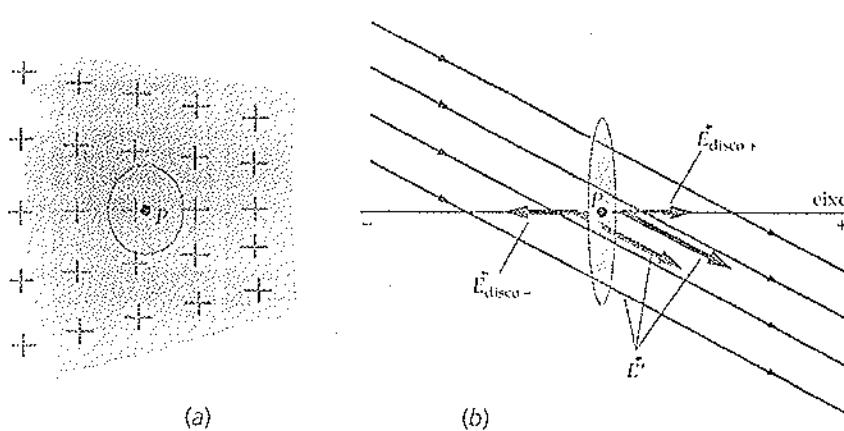
**NOTAS** Uma vez que  $1/(2\pi\epsilon_0) = 2k$ , o campo vale  $2k\lambda/R$ , o mesmo previsto pela Equação 22-9.

É importante lembrar que, embora a lei de Gauss seja válida para qualquer superfície que envolva qualquer distribuição de carga, ela é muito útil no cálculo dos campos elétricos para distribuições de carga com forte simetria. Ela também é bastante utilizada nos cálculos que envolvem condutores em equilíbrio eletrostático, conforme será visto na Seção 22-5. No cálculo do Exemplo 22-9, foi necessário admitir que o ponto do campo estava bem longe das extremidades da linha de carga, de modo que  $E_n$  foi considerado constante em qualquer ponto da superfície gaussiana cilíndrica. (Essa condição é equivalente a admitir-se que a uma distância  $R$  a linha de carga aparenta ser infinitamente longa.) Se o ponto estiver nas proximidades da extremidade de uma linha de carga finita, não será possível admitir que  $\vec{E}$  seja perpendicular à superfície curva do cilindro ou que  $E_n$  seja constante para qualquer ponto sobre ela, e, nesse caso, não se pode utilizar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico.

#### 22-4 Descontinuidade de $E_n$

Foi mostrado que o campo elétrico para um plano infinito carregado e para uma casca esférica fina carregada é descontínuo. O valor da descontinuidade é de  $\sigma/\epsilon_0$  entre os lados de uma superfície cuja densidade de carga é  $\sigma$ . Mostra-se agora que esse é um resultado geral para a componente do campo elétrico perpendicular a uma superfície com densidade de carga  $\sigma$ .

A Figura 22-28 mostra uma superfície qualquer cuja densidade de carga superficial é  $\sigma$ . A superfície é qualquer, isto é, sua curvatura é arbitrária, embora



**FIGURA 22-28**  
(a) Superfície carregada. (b) Campo elétrico  $E_{\text{discos}}$  devido à carga de um disco circular, superposto ao campo elétrico  $E$  devido a todas as demais cargas. O lado direito do disco é o lado positivo, e o lado esquerdo o negativo.

ela não possua qualquer quina viva e  $\sigma$  possa variar continuamente sobre a superfície de ponto para ponto. Considera-se o campo elétrico  $\vec{E}$  nas vizinhanças de um ponto  $P$  sobre a superfície como sendo a superposição do campo elétrico  $\vec{E}_{\text{disco}}$ , devido à carga sobre um pequeno disco centrado no ponto  $P$ , com o campo  $\vec{E}'$  devido a todas as outras cargas do universo. Assim,

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{disco}} + \vec{E}' \quad 22-27$$

O disco é pequeno o suficiente, de modo que pode ser considerado plano e uniformemente carregado. No eixo do disco, o campo elétrico  $\vec{E}_{\text{disco}}$  pode ser expresso pela Equação 22-11. Nos pontos sobre o eixo que estão muito próximos do disco, o módulo desse campo é dado por  $E_{\text{disco}} = |\sigma|/(2 \epsilon_0)$ , e seu sentido é o de afastar-se do disco, se  $\sigma$  for positivo, e o de aproximar-se dele se  $\sigma$  for negativo. O módulo e o sentido do campo elétrico  $\vec{E}'$  são desconhecidos. Entretanto, nas vizinhanças do ponto  $P$  esse campo é contínuo. Assim, nos pontos sobre o eixo do disco e muito próximo a ele  $\vec{E}'$  é basicamente uniforme.

O eixo do disco é normal à superfície, logo as componentes vetoriais ao longo desse eixo podem ser referenciadas como componentes normais. As componentes normais dos vetores da Equação 22-27 estão relacionadas por  $E_n = E_{\text{disco}} + E'_n$ . Considerando um dos lados da superfície como o lado positivo e o outro como o lado negativo, tem-se que  $E_{n+} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} + E'_{n+}$  e  $E_{n-} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} + E'_{n-}$ . Assim,  $E_n$  varia de forma descontínua de um lado da superfície para o outro. Isto é:

$$\Delta E_n = E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} - \left( -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 22-28$$

#### DESCONTINUIDADE DO CAMPO $E_n$ EM UMA SUPERFÍCIE CARREGADA

onde considerou-se o fato de que nas proximidades do disco  $E'_{n+} = E'_{n-}$  (uma vez que  $\vec{E}'$  é contínuo e uniforme).

Note que a descontinuidade de  $E_n$  ocorre nos casos de um disco finito carregado, de um plano infinito carregado (veja a Figura 22-10) e de uma casca esférica carregada (veja a Figura 22-23). Entretanto, ela não ocorre no perímetro de uma esfera maciça carregada (veja a Figura 22-26). O campo elétrico é descontínuo em qualquer local onde a densidade de carga por volume é infinita. Isso inclui os locais com uma carga puntiforme finita, os locais com uma densidade de carga por comprimento finita e os locais com uma densidade de carga por área de superfície finita. Em todos os locais com uma densidade de carga por área de superfície finita, a componente normal do campo elétrico é descontínua — de acordo com a Equação 22-28.

---

### 22-29 Cargas e Campos Elétricos nas Superfícies Condutoras

---

Um condutor contém uma grande quantidade de cargas móveis que podem se mover livremente em seu interior. Caso o interior do condutor seja submetido a um campo elétrico, haverá uma força resultante sobre essas cargas causando uma corrente elétrica momentânea (as correntes elétricas são discutidas no Capítulo 25). Entretanto, a menos que haja uma fonte de energia para manter essa corrente a carga livre em um condutor será apenas redistribuída, gerando um campo elétrico que cancela o campo externo no condutor. Diz-se,

assim, que o condutor está em equilíbrio eletrostático. Logo, no equilíbrio eletrostático o campo elétrico no interior de um condutor é nulo em qualquer local. O tempo necessário para o condutor atingir o equilíbrio depende de suas propriedades. Para o cobre e outros condutores metálicos o tempo é muito pequeno, de modo que em muitos casos o equilíbrio eletrostático é atingido em alguns nanosegundos.

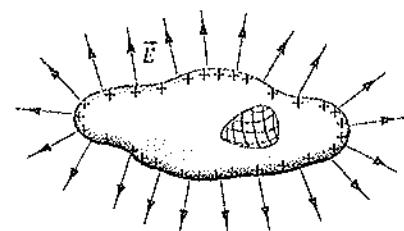
Pode-se utilizar a lei de Gauss para mostrar que qualquer carga elétrica resultante em um condutor mantém-se sobre a superfície do condutor. Considere uma superfície gaussiana completamente interna ao material de um condutor em equilíbrio eletrostático (Figura 22-29). As dimensões e a forma da superfície gaussiana não são importantes, desde que toda a superfície esteja interna ao material do condutor. O campo elétrico é nulo em qualquer ponto da superfície gaussiana, uma vez que a superfície está completamente no interior do condutor onde o campo é nulo em qualquer ponto. O fluxo resultante do campo elétrico através da superfície deve, portanto, ser nulo e, pela lei de Gauss, a carga resultante no interior da superfície deve também ser nula. Assim, não pode haver qualquer carga resultante no interior de qualquer superfície completamente imersa no material do condutor. Se um condutor possui uma carga resultante, ela deve alojar-se em sua superfície. Na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático, o campo  $\vec{E}$  deve ser perpendicular à superfície. Esta conclusão deve-se ao fato de que se o campo elétrico tivesse uma componente tangencial à superfície a carga livre seria acelerada tangencialmente até que o equilíbrio eletrostático fosse restabelecido.

Uma vez que a descontinuidade do campo  $E_n$  em qualquer superfície carregada é igual a  $\sigma/\epsilon_0$  e como  $\vec{E}$  é nulo no interior do material de um condutor, o campo na face externa de um condutor pode ser expresso por

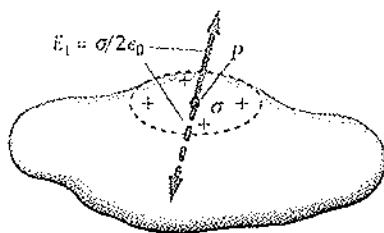
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 22-29$$

#### CAMPO $E_n$ NA FACE EXTERNA DA SUPERFÍCIE DE UM CONDUTOR

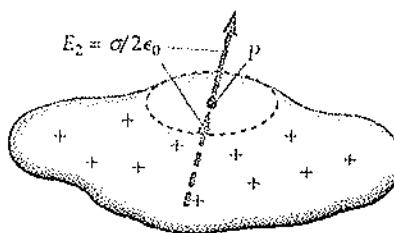
Esse resultado é exatamente igual a duas vezes o campo produzido por um disco uniformemente carregado. Pode-se compreender esse resultado a partir da Figura 22-30. A carga em um condutor consiste em duas partes: (1) a carga nas proximidades de um ponto  $P$  e (2) todo o restante da carga. A carga próxima ao



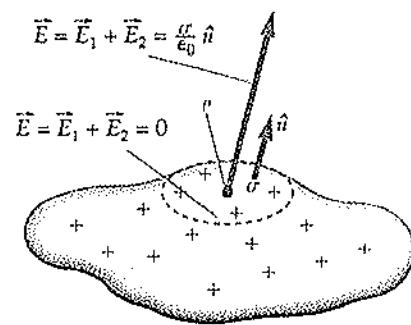
**FIGURA 22-29**  
Uma superfície gaussiana completamente imersa em um material condutor. Uma vez que o campo elétrico é nulo no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático, o fluxo resultante através dessa superfície também deve ser nulo. Portanto, a densidade de carga resultante  $\rho$  no interior do material de um condutor é nula.



(a)



(b)



(c)

**FIGURA 22-30**

Condutor de forma arbitrária com carga em sua superfície. (a) A carga nas vizinhanças do ponto  $P$  nas proximidades da superfície é similar a um disco circular carregado uniformemente e centrado em  $P$ , fornecendo um campo elétrico com módulo  $\sigma/(2\epsilon_0)$  orientado no sentido de afastar-se da superfície tanto do lado interno quanto externo. No interior do condutor, esse campo é orientado no sentido de afastar-se do ponto  $P$  no sentido oposto. (b) Uma vez que o campo resultante no interior do condutor é nulo, o restante das cargas no universo deve produzir um campo com módulo igual a  $\sigma/(2\epsilon_0)$  no sentido de sair da superfície. O campo devido a essa carga é o mesmo tanto na superfície interna quanto na externa. (c) Na superfície interna, os campos mostrados em (a) e (b) se cancelam, porém saindo do ponto  $P$  eles se somam, fornecendo  $E_n = \sigma/\epsilon_0$ .

ponto  $P$  é similar à de um pequeno disco centrado em  $P$  carregado uniformemente, que produz um campo em suas vizinhanças cujo módulo é  $\sigma/(2\epsilon_0)$ , nas faces interna e externa ao condutor. A carga restante deve produzir um campo de módulo  $\sigma/(2\epsilon_0)$  que cancela o campo no interior do condutor. Esse campo devido ao restante da carga é somado ao campo devido ao pequeno disco carregado na face externa do condutor, resultando em um campo total de  $\sigma/\epsilon_0$ .

Ao assistir a um programa científico sobre a atmosfera, você ficou sabendo que, na média, o campo elétrico da Terra é de aproximadamente 100 N/m dirigido verticalmente para baixo. Tendo estudado sobre os campos elétricos em suas aulas de Física, você ficou curioso em determinar o valor da carga total sobre a superfície da Terra.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A Terra é condutora, assim, qualquer carga que ela possua fica sobre sua superfície. A densidade superficial de carga  $\sigma$  está relacionada à componente normal do campo elétrico  $E_n$  pela Equação 22-29. A carga total  $Q$  é igual à densidade de carga  $\sigma$  multiplicada pela área da superfície  $A$ .

1. A densidade superficial de carga  $\sigma$  está relacionada à componente normal do campo elétrico  $E_n$  pela Equação 22-29:

$$E_n = \vec{E} \cdot \hat{n} = E \times 1 \times \cos 180^\circ = -E = -100 \text{ N/C}$$

2. Sobre a superfície da Terra, o vetor  $\hat{n}$  é orientado para cima e o campo  $\vec{E}$  para baixo, logo  $E_n$  é negativo:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 (-E) = -\epsilon_0 E$$

$$Q = \sigma A = -\epsilon_0 E_n A = -\epsilon_0 EA$$

$$Q = -\epsilon_0 EA = -\epsilon_0 E 4\pi R_T^2 = -4\pi \epsilon_0 ER_T^2$$

$$5. \text{ O raio da Terra vale } 6,38 \times 10^6 \text{ m:}$$

$$Q = -4\pi \epsilon_0 ER_T^2$$

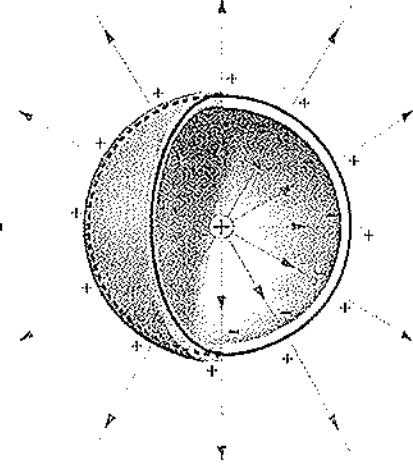
$$= -4\pi (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(100 \text{ N/C})(6,38 \times 10^6 \text{ m})^2$$

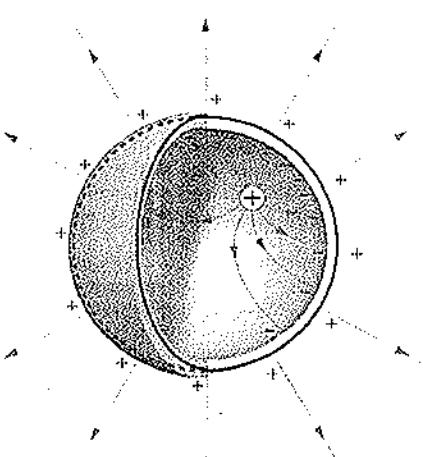
$$= \boxed{-4,53 \times 10^5 \text{ C}}$$

A Figura 22-31 mostra uma carga puntiforme positiva  $q$  no centro de uma cavidade esférica no interior de um condutor esférico. Uma vez que a carga resultante deve ser nula no interior de qualquer superfície gaussiana que envolva o condutor, deve haver uma carga negativa  $-q$  induzida na superfície interna. Na Figura 22-32, a carga puntiforme foi deslocada, afastando-

**FIGURA 22-31**

Carga puntiforme  $q$  posicionada em uma cavidade no centro de uma casca condutora esférica espessa. Uma vez que a carga resultante no interior da superfície gaussiana deve ser nula, uma carga superficial  $-q$  é induzida na superfície interna da casca, e uma vez que o condutor é neutro, uma carga igual e oposta  $+q$  é induzida na superfície externa. As linhas de campo elétrico começam na carga puntiforme e terminam sobre a superfície interna. As linhas de campo começam novamente na superfície externa.

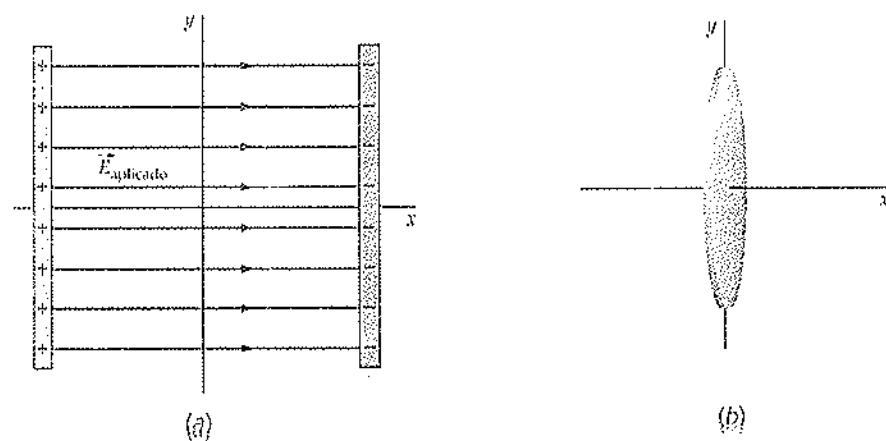
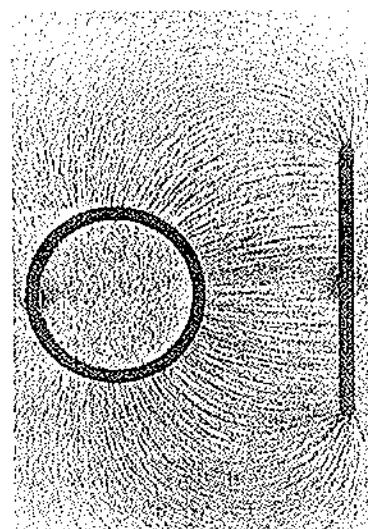




**FIGURA 22-32**  
O mesmo condutor mostrado na Figura 22-31 com a carga puntiforme deslocada do centro da esfera. A carga na superfície externa e as linhas de campo elétrico que saem da esfera não são afetadas.

se do centro da cavidade. As linhas de campo na cavidade são alteradas e a densidade superficial da carga negativa induzida na superfície interna não mais será uniforme. Entretanto, a densidade superficial de carga positiva na superfície externa não é alterada — permanecendo ainda uniforme —, uma vez que ela é eletricamente isolada da cavidade pelo material condutor.

Um plano infinito não-condutor carregado uniformemente é posicionado na coordenada  $x = -a$ , e um segundo plano com as mesmas características é localizado em  $x = +a$  (Figura 22-33a). O plano em  $x = -a$  tem uma densidade de carga positiva, enquanto o plano em  $x = +a$  tem uma densidade de carga negativa de mesma intensidade. O campo elétrico devido às cargas de ambos os planos é  $\vec{E}_{\text{aplicado}} = (450 \text{ kNC})\hat{i}$  na região entre eles. Um disco fino, condutor, descarregado com 2 m de diâmetro é colocado no plano  $x = 0$  e centrado na origem (Figura 22-33b). (a) Determine a densidade de carga e o campo elétrico em cada face do disco. (Admita que qualquer carga presente nas faces do disco seja uniformemente distribuída.) (b) Uma carga resultante de  $96 \mu\text{C}$  é colocada no disco. Determine a nova densidade de carga e o campo elétrico em cada uma de suas faces nos pontos distantes das bordas do disco.



Linhos de campo elétrico para um cilindro e uma placa com cargas opostas. As linhas ficam realçadas por fragmentos de fibra suspensos em óleo. Observe que as linhas de campo são perpendiculares aos condutores e que não há linhas no interior do cilindro.

**FIGURA 22-33**

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Determina-se a densidade de carga utilizando o fato de que a carga total do disco é nula e que não há campo elétrico interno ao material condutor do disco. As cargas da superfície do disco devem produzir um campo elétrico interno que é cancelado com  $\vec{E}_{\text{aplicado}}$ . (b) A carga adicional de  $96 \mu\text{C}$  deve ser distribuída de modo que o campo elétrico interno ao disco condutor permaneça nulo.

1. Sejam  $\sigma_D$  e  $\sigma_E$  as densidades de carga nas faces direita e esquerda do disco condutor, respectivamente. Uma vez que o disco está descarregado, a soma dessas densidades deve ser nula.
2. No interior do disco condutor o campo elétrico devido às cargas em sua superfície deve se anular com  $\vec{E}_{\text{aplicado}}$ . Sejam  $\vec{E}_D$  e  $\vec{E}_E$  os campos elétricos devidos às cargas nas faces direita e esquerda, respectivamente.
3. Utilizando as Equações 22-13a e b, pode-se expressar o campo elétrico devido à carga em cada superfície do disco pela correspondente densidade superficial de carga. O campo nas proximidades de um disco com alta densidade superficial  $\sigma$  é dado por  $[\sigma/(2\epsilon_0)]\hat{n}$ , em que  $\hat{n}$  é um vetor unitário orientado no sentido de afastar-se da carga superficial.
4. Substituindo  $-\sigma_D$  e  $\sigma_E$  e resolvendo para a densidade superficial de carga, tem-se:

$$\sigma_D + \sigma_E = 0$$

assim

$$\sigma_E = -\sigma_D$$

$$\vec{E}_D + \vec{E}_E + \vec{E}_{\text{aplicado}} = 0$$

$$\vec{E}_D + \vec{E}_E + \vec{E}_{\text{aplicado}} = 0$$

$$\frac{\sigma_D}{2\epsilon_0}(-\hat{i}) + \frac{\sigma_E}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}_{\text{aplicado}} = 0$$

$$\frac{\sigma_D}{2\epsilon_0}(-\hat{i}) + \frac{-\sigma_D}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}_{\text{aplicado}} = 0$$

$$-\frac{\sigma_D}{\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}_{\text{aplicado}} = 0$$

$$\sigma_D\hat{i} = \epsilon_0\vec{E}_{\text{aplicado}} \\ = (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(450 \text{ kN/C})\hat{i}$$

$$\sigma_D = 3,98 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 = \boxed{3,98 \mu\text{C/m}^2}$$

$$\sigma_E = -\sigma_D = \boxed{-3,98 \mu\text{C/m}^2}$$

5. Utilize a Equação 22-29 ( $E_n = \sigma/\epsilon_0$ ) para relacionar o campo elétrico na face de um condutor à sua densidade superficial. Na face direita do disco  $n = \hat{i}$ , e na face esquerda  $n = -\hat{i}$ :

$$E_{Dn} = \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} = \frac{3,98 \mu\text{C/m}^2}{8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} \\ = 450 \text{ kN/C}$$

$$\vec{E}_D = E_{Dn}\hat{i} = E_{Dn}\hat{i} = \boxed{450 \text{ kN/C}\hat{i}}$$

$$E_{En} = \frac{\sigma_E}{\epsilon_0} = \frac{-3,98 \mu\text{C/m}^2}{8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$\vec{E}_E = E_{En}\hat{i} = E_{En}(-\hat{i}) = \boxed{450 \text{ kN/C}(-\hat{i})}$$

$$Q_D + Q_E = Q_{\text{res}}$$

$$\sigma_D A + \sigma_E A = Q_{\text{res}}$$

ou

$$\sigma_E = \frac{Q_{\text{res}}}{A} - \sigma_D$$

1. A soma das cargas nas duas faces do disco deve ser igual à carga resultante no disco.

2. Substitua essa expressão de  $\sigma_i$  no resultado da etapa 2 do item a e resolva para as densidades superficiais de carga:

$$\frac{\sigma_D}{2\epsilon_0}(-\hat{i}) + \frac{(Q_{res}/A) - \sigma_D}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}_{aplicado} = 0$$

$$\frac{(Q_{res}/A) - 2\sigma_D}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}_{aplicado} = 0$$

$$\sigma_D\hat{i} = \epsilon_0 \vec{E}_{aplicado} + \frac{Q_{res}}{2A}\hat{i} = \epsilon_0(450 \text{ kN/C})\hat{i} + \frac{Q_{res}}{2A}\hat{i}$$

$$\sigma_D = (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(450 \text{ kN/C}) + \frac{Q_{res}}{2A}$$

$$= 3,98 \mu\text{C/m}^2 + \frac{96 \mu\text{C}}{2\pi(1 \text{ m})^2} = \boxed{19,3 \mu\text{C/m}^2}$$

$$\sigma_E = \frac{Q_{res}}{A} - \sigma_D = \frac{Q_{res}}{A} - \left(\epsilon_0(450 \text{ kN/C}) + \frac{Q_{res}}{2A}\right)$$

$$= -\epsilon_0(450 \text{ kN/C}) + \frac{Q_{res}}{2A}$$

$$= -3,98 \mu\text{C/m}^2 + \frac{96 \mu\text{C}}{2\pi(1 \text{ m})^2} = \boxed{11,3 \mu\text{C/m}^2}$$

3. Utilizando a Equação 22-29 ( $E_n = \sigma/\epsilon_0$ ), relate o campo elétrico na face de um condutor à sua densidade superficial de carga.

$$E_{Dn} = \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} = \frac{19,3 \mu\text{C/m}^2}{8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$= 2,17 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_D = E_{Dn}\hat{n} = E_{Dn}\hat{i} = \boxed{+2,17 \text{ MN/C}\hat{i}}$$

$$E_{En} = \frac{\sigma_E}{\epsilon_0} = \frac{11,3 \mu\text{C/m}^2}{8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$\vec{E}_E = E_{En}\hat{n} = E_{En}(-\hat{i}) = \boxed{-1,28 \text{ MN/C}\hat{i}}$$

**NOTAS** A carga adicionada ao disco foi distribuída igualmente, metade para uma de suas faces e metade para outra. O campo elétrico no interior do disco devido a essa carga adicional é exatamente igual a zero. Em cada uma das faces de um disco fino condutor carregado real o módulo da densidade de carga é maior nas proximidades dos bordos do disco.

**EXERCÍCIO** O campo elétrico na face de um certo condutor é orientado no sentido de afastar-se do condutor e possui um módulo de 2000 N/C. Qual é a densidade superficial de carga na superfície do condutor? (Resposta 17,7 nC/m<sup>2</sup>)

### 22-6 Dedução da Lei de Gauss a Partir da Lei de Coulomb

A lei de Gauss pode ser deduzida matematicamente utilizando o conceito de ângulo sólido. Considere um elemento de área  $\Delta A$  sobre uma superfície esférica. O ângulo sólido  $\Delta\Omega$  correspondente a  $\Delta A$  no centro da esfera é definido por

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

onde  $r$  é o raio da esfera. Uma vez que  $\Delta A$  e  $r^2$  possuem dimensões de comprimento ao quadrado, o ângulo sólido é adimensional. Sua unidade no SI de uni-

dades é o esterorradiano (sr). Uma vez que a área total de uma esfera é  $4\pi r^2$ , o ângulo sólido total correspondente a uma esfera é

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ esterorradianos}$$

Existe uma analogia total entre o ângulo sólido e o ângulo plano ordinário  $\Delta\theta$ , que é definido como sendo a relação entre o comprimento de um elemento de arco de um círculo  $\Delta s$  e o raio do círculo:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ radianos}$$

O ângulo plano total subentendido por um círculo é igual a  $2\pi$  radianos.

Na Figura 22-34, o elemento de área  $\Delta A$  não é perpendicular às linhas radiais que partem do ponto O. O vetor unitário  $\hat{n}$  normal ao elemento de área faz um ângulo  $\theta$  com o vetor unitário radial  $\hat{r}$ . Nesse caso, o ângulo sólido subentendido por  $\Delta A$  no ponto O é

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2} \quad 22-30$$

A Figura 22-35 mostra uma carga puntiforme  $q$  envolvida por uma superfície S de forma arbitrária. Para calcular o fluxo do campo  $\vec{E}$  através dessa superfície, deve-se determinar  $\vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A$  para cada elemento de área da superfície e proceder-se ao somatório ao longo de toda a superfície. O campo elétrico no elemento de área mostrado é dado por

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$

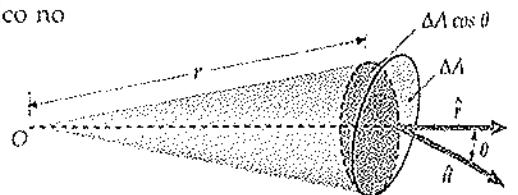
logo, o fluxo através do elemento é

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} \Delta A = kq \Delta\Omega$$

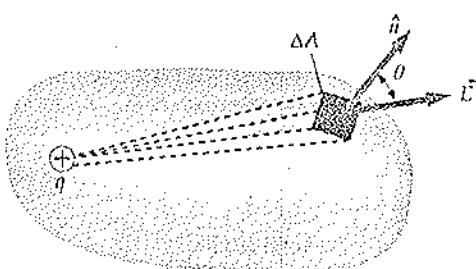
O ângulo sólido  $\Delta\Omega$  é idêntico ao subentendido para o correspondente elemento de área de uma superfície esférica de raio arbitrário. O somatório dos fluxos através de toda a superfície é igual ao produto de  $kq$  pelo ângulo sólido total subentendido pela superfície fechada, que é igual a  $4\pi$  esterorradianos:

$$\phi_{ws} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = kq \oint d\Omega = kq 4\pi = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0} \quad 22-31$$

que é a lei de Gauss.



**FIGURA 22-34**  
Um elemento de área  $\Delta A$ , cuja normal não é paralela à linha radial que passa por O e pelo centro do elemento. O ângulo sólido subentendido por esse elemento em O é definido como sendo  $(\Delta A \cos \theta)/r^2$ .



**FIGURA 22-35**  
Uma carga puntiforme envolvida por uma superfície S arbitrária. O fluxo através de um elemento de área  $\Delta A$  é proporcional ao ângulo sólido subentendido pelo elemento de área na posição da carga. O fluxo resultante através da superfície, obtido pelo somatório ao longo de todos os elementos de área, é proporcional ao ângulo sólido total  $4\pi$  na posição da carga, que é independente da forma da superfície.

## RESUMO

1. A lei de Gauss é uma lei fundamental da Física equivalente à Lei de Coulomb para cargas estáticas.
2. Para distribuições de carga simétricas, a lei de Gauss pode ser utilizada para calcular o campo elétrico.

Tópicos	Equações e Observações Importantes	
1. Campo Elétrico para uma Distribuição de Carga Contínua	$\vec{E} = \int_V \frac{k dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (\text{lei de Coulomb})$ onde $dq = \rho dV$ para uma carga distribuída no interior de um volume, $dq = \sigma dA$ para uma carga distribuída sobre uma superfície e $dq = \lambda dL$ para uma carga distribuída ao longo de uma linha.	22-4
2. Fluxo Elétrico	$\phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$	22-16
3. Lei de Gauss	$\phi_{res} = \int_S E_n dA = 4\pi k Q_{int} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	22-19
	O fluxo resultante através de uma superfície fechada é igual a $4\pi k$ vezes a carga resultante no interior da superfície.	
4. Constante de Coulomb $k$ e Permissividade do Vácuo $\epsilon_0$	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$	22-23
5. Lei de Coulomb e Lei de Gauss	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ $\phi_{res} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	22-21 22-22
6. Descontinuidade de $E_n$	Em uma superfície que possui uma densidade superficial de carga $\sigma$ , a componente do campo elétrico perpendicular à superfície é descontínua de um valor igual a $\sigma/\epsilon_0$ .	
	$E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22-28
7. Carga em um Condutor	No equilíbrio eletrostático, a carga elétrica resultante em um condutor fica localizada na superfície do condutor.	
8. Campo Elétrico na Face Externa de um Condutor	O campo elétrico resultante na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície e possui o módulo de $\sigma/\epsilon_0$ , em que $\sigma$ é a densidade superficial de carga local no ponto específico do condutor:	
	$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22-29
	A força por unidade de área exercida sobre a carga na superfície de um condutor por todas as demais cargas é chamada de tensão eletrostática.	

## 9. Campos Elétricos para Diversas Distribuições Uniformes de Carga

De um segmento de reta carregado	$E_y = \frac{k\lambda}{y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1); E_x = \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$	22-8
De uma reta infinita carregada	$E_R = 2k \frac{\lambda}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$	22-9
Sobre o eixo de um anel carregado	$E_y = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$	22-10
Sobre o eixo de um disco carregado	$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right), \quad x > 0$	22-11
De um plano carregado	$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad x > 0$	22-12
De uma casca esférica carregada	$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R$	22-25
	$E_r = 0, \quad r < R$	22-25
De uma esfera maciça carregada	$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R$	22-26
	$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r, \quad r \leq R$	22-26

## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa de solução e relativamente fácil
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador
- • • Problema que pode ser resolvido com auxílio de planilha

### Problemas Conceituais

- 1 • • Verdadeiro ou falso:  
 (a) A lei de Gauss é válida apenas para distribuições de carga simétricas.  
 (b) O resultado nulo para o campo elétrico no interior de um condutor pode ser deduzido a partir da lei de Gauss.
- 2 • • Qual é a informação, além da carga total no interior de uma superfície, necessária para se determinar o campo elétrico através da lei de Gauss?

- 3 • • • Na lei de Gauss, o campo elétrico  $E$  corresponde apenas àquela parte do campo devido à carga no interior de uma superfície ou é o campo elétrico total devido a todas as cargas no interior e fora da superfície?
- 4 • • Explique por que o campo elétrico aumenta com  $r$ , em vez de diminuir com  $1/r^2$ , quando o ponto do campo se move afastando-se do centro geométrico no interior de uma distribuição de carga esférica com densidade de carga volumétrica constante.
- 5 • Verdadeiro ou falso:

- 22-8
- 22-9
- 22-10
- 22-11
- 22-24
- 22-25a
- 22-25b
- 22-26a
- 22-26b
- 5
- ser
- u.
- apenas
- pe. cie
- r e fora
- efez
- façan-
- de car-
- (a) Não havendo qualquer carga em uma determinada região do espaço, o campo elétrico sobre uma superfície envolvendo a região deve ser nulo em qualquer ponto.
- (b) O campo elétrico no interior de uma casca esférica carregada uniformemente é nulo.
- (c) Na condição de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico no interior de um condutor é nulo.
- (d) Se a carga resultante em um condutor é nula, a densidade de carga deve ser nula em cada ponto da superfície do condutor.
- 6 • Se o campo elétrico  $E$  for nulo em qualquer ponto de uma superfície fechada, o fluxo resultante através da superfície será necessariamente nulo? Qual será, então, a carga resultante no interior da superfície?

- 7 • Uma carga puntiforme  $-Q$  é posicionada no centro de uma casca condutora esférica com raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ , conforme ilustrado na Figura 22-36. A carga na superfície interna da casca é (a)  $+Q$ , (b) nula, (c)  $-Q$ , (d) dependente da carga total da casca.

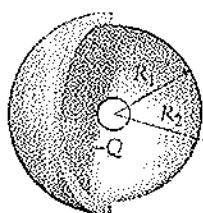


FIGURA 22-36 Problema 7

- 8 • Para a configuração da Figura 22-36, a carga sobre a superfície externa da casca é (a)  $+Q$ , (b) nula, (c)  $-Q$ , (d) dependente da carga total da casca.

- 9 • Admita que a carga total da casca condutora da Figura 22-36 seja nula. Pode-se afirmar que o campo elétrico para os pontos onde  $r < R_1$  e  $r > R_2$

- (a) é orientado no sentido de afastar-se do centro da casca em ambas as regiões.
- (b) é orientado no sentido do centro da casca em ambas as regiões.
- (c) é orientado para o centro da casca na região em que  $r < R_1$  e é nulo para  $r > R_2$ .
- (d) é orientado no sentido de afastar-se do centro da casca para  $r < R_1$  e é nulo para  $r > R_2$ .

- 10 • Se a casca condutora da Figura 22-36 for aterrada, qual das seguintes afirmativas estará correta?

- (a) A carga na superfície interior da casca será  $+Q$  e a da superfície exterior será  $-Q$ .
- (b) A carga na superfície interior da casca será  $+Q$  e a da superfície exterior será nula.
- (c) As cargas de ambas as superfícies da casca serão  $+Q$ .
- (d) As cargas de ambas as superfícies da casca serão nulas.

- 11 • Para a configuração descrita no Problema 10, em que a casca condutora é aterrada, o campo elétrico para os pontos onde  $r < R_1$  e  $r > R_2$

- (a) é orientado no sentido de afastar-se do centro da casca em ambas as regiões.
- (b) é orientado no sentido do centro da casca em ambas as regiões.
- (c) é orientado para o centro da casca na região em que  $r < R_1$  e é nulo para  $r > R_2$ .

- (d) é orientado para o centro da casca na região em que  $r < R_1$  e é nulo para  $r > R_2$ .
- 12 • Se o fluxo resultante através de uma superfície fechada é nulo, pode-se concluir que o campo elétrico  $E$  é nulo em qualquer ponto da superfície? Como consequência, a carga resultante no interior da superfície é nula?

- 13 • Verdadeiro ou falso: o campo elétrico é descontínuo em todos os pontos para os quais a densidade de carga é descontínua.

### Estimativas e Aproximações

- 14 • Dado que o campo elétrico máximo sustentável no ar sem descarga elétrica é de aproximadamente  $3 \times 10^6 \text{ N/C}$ , estime a carga total de um relâmpago. Faça qualquer hipótese que parecer razoável.

- 15 • Se você atritar um balão de borracha contra o cabelo seco, a carga estática resultante será suficiente para manter as extremidades do cabelo "em pé". Estime a densidade superficial da carga sobre o balão e seu campo elétrico.

- 16 • Um disco com 2,5 cm de raio possui uma densidade superficial de carga uniforme de  $3,6 \mu\text{C/m}^2$ . Utilizando aproximações razoáveis, determine o campo elétrico no eixo do disco para as distâncias de (a) 0,01 cm, (b) 0,04 cm, (c) 5 m e (d) 5 cm.

### Cálculo do Campo $E$ a Partir da Lei de Coulomb

- 17 • Um segmento de reta carregado com densidade de carga linear  $\lambda = 3,5 \text{ nC/m}$  é posicionado de  $x = 0$  até  $x = 5 \text{ m}$ . (a) Qual é o valor da carga total? Determine o campo elétrico sobre o eixo  $x$  em (b)  $x = 6 \text{ m}$ , (c)  $x = 9 \text{ m}$  e (d)  $x = 250 \text{ m}$ . (e) Determine o campo em  $x = 250 \text{ m}$  considerando que a carga seja puntiforme e posicionada na origem, e compare o resultado com o obtido pelo cálculo exato utilizado no item (d).

- 18 • Dois planos verticais infinitos carregados são paralelos entre si e separados de uma distância  $d = 4 \text{ m}$ . Determine o campo elétrico à esquerda dos planos, à direita dos planos e entre os planos (a) quando cada plano possui uma densidade de carga superficial uniforme  $\sigma = +3 \mu\text{C/m}^2$ , e (b) quando o plano da esquerda possui densidade de carga superficial uniforme  $\sigma = +3 \mu\text{C/m}^2$  e o plano da direita uma densidade  $\sigma = -3 \mu\text{C/m}^2$ . Desenhe as linhas de campo para cada um dos casos.

- 19 • Uma carga de  $2,75 \mu\text{C}$  é uniformemente distribuída sobre um anel cujo raio é de 8,5 cm. Determine o campo elétrico sobre o eixo do anel a (a) 1,2 cm, (b) 3,6 cm e (c) 4,0 m de seu centro. (d) Determine o campo a 4,0 m utilizando a hipótese de que o anel é uma carga puntiforme na origem e compare o resultado com o do item (c).

- 20 • Para o disco carregado do Problema 16, calcule exatamente o campo elétrico sobre o eixo para distâncias de (a) 0,04 cm e (b) 5 m, e compare os resultados com os obtidos nos itens (b) e (c) do Problema 16.

- 21 • Um segmento de reta carregado uniformemente é posicionado de  $x = -2,5 \text{ cm}$  a  $x = +2,5 \text{ cm}$  e possui uma densidade de carga linear  $\lambda = 6,0 \text{ nC/m}$ . (a) Determine a carga total. Determine o campo elétrico sobre o eixo  $y$  em (b)  $y = 4 \text{ cm}$ , (c)  $y = 12 \text{ cm}$  e (d)  $y = 4,5 \text{ m}$ . (e) Determine o campo em  $y = 4,5 \text{ m}$ , admitindo que a carga seja puntiforme, e compare o resultado com o do item (d).

- 22 • Um disco de raio  $a$  apóia-se no plano  $yz$  com seu eixo coincidindo com o eixo  $x$  e tendo uma densidade de carga superficial uniforme  $\sigma$ . Determine o valor de  $x$  para o qual  $E_x = \frac{1}{2}\sigma/2\epsilon_0$ .

23 • Um anel de raio  $a$  com centro na origem e eixo coincidente com o eixo  $x$  possui carga total  $Q$ . Determine o campo  $E_x$  em (a)  $x = 0,2a$ , (b)  $x = 0,5a$ , (c)  $x = 0,7a$  e (d)  $x = a$  e (e)  $x = 2a$ . (f) Utilize os resultados para construir o gráfico de  $E_x$  em função de  $x$  para valores positivos e negativos de  $x$ .

24 • Repita o Problema 23 para um disco com densidade de carga superficial uniforme  $\sigma$ .

25 • (a) Utilize um programa gerador de tabelas ou uma calculadora gráfica e faça um gráfico representando o comportamento do campo elétrico sobre o eixo de um disco de raio  $r = 30$  cm com densidade de carga superficial  $\sigma = 0,5 \text{ nC/m}^2$ . (b) Compare o campo ao valor aproximado  $E = 2\pi k\sigma$ . A que distância essa aproximação difere da solução exata em 10%?

26 • Mostre que a componente  $E_x$  do campo sobre o eixo de um anel de raio  $a$  carregado possui seus valores máximo e mínimo nas coordenadas  $x = +a/\sqrt{2}$  e  $x = -a/\sqrt{2}$ . Esquematize  $E_x$  em função de  $x$  para valores positivos e negativos de  $x$ .

27 • Um segmento de reta carregado com densidade de carga linear uniforme  $\lambda$  apóia-se sobre o eixo  $x$  desde a coordenada  $x = x_1$  até  $x = x_2$ , onde  $x_1 < x_2$ . Mostre que a componente  $x$  do campo elétrico em um ponto sobre o eixo  $y$  pode ser expressa por

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

onde  $\theta_1 = \tan^{-1}(x_1/y)$  e  $\theta_2 = \tan^{-1}(x_2/y)$ .

28 • Um anel de raio  $R$  possui uma distribuição de carga definida por  $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin \theta$ , conforme mostrado na Figura 22-37. (a) Qual é a orientação do campo no centro do anel? (b) Qual é o módulo do campo no centro do anel?

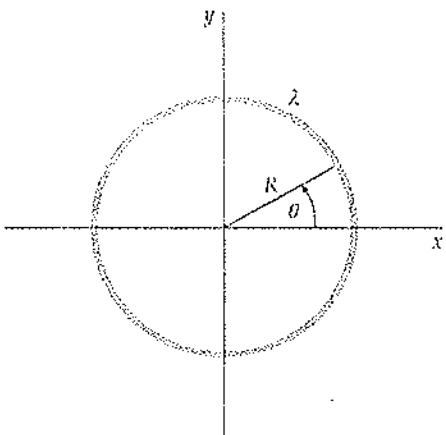


FIGURA 22-37 Problema 28

29 • A carga de um segmento de reta finito possui densidade superficial uniforme. O segmento é posicionado entre as coordenadas  $x = 0$  e  $x = a$ . Mostre que a componente  $y$  do campo elétrico em um ponto sobre o eixo  $y$  pode ser expressa por

$$E_y = \frac{k\lambda}{y} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

30 • Uma casca hemisférica fina de raio  $R$  possui uma carga superficial uniforme  $\sigma$ . Determine o campo elétrico no centro da casca ( $r = 0$ ).

### Lei de Gauss

31 • Considere um campo elétrico uniforme  $\vec{E} = 2 \text{ kN/Ci}$ . (a) Qual é o fluxo desse campo através de um quadrado com 10 cm de lado em um plano paralelo ao plano  $yz$ ? (b) Qual é o fluxo através do mesmo quadrado se a normal a seu plano faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ ?

32 • Uma única carga puntiforme  $q = +2 \mu\text{C}$  está posicionada na origem. Uma superfície esférica com 3,0 m de raio tem seu centro geométrico sobre o eixo  $x$  em  $x = 5 \text{ m}$ . (a) Esquematize as linhas do campo elétrico para a carga puntiforme. Existe alguma linha entrando através da superfície esférica? (b) Qual é a quantidade de linhas que cruzam a superfície esférica, incluindo aquelas que entram como negativas? (c) Qual é o fluxo resultante do campo elétrico devido à carga puntiforme através da superfície esférica?

33 • Um campo elétrico é definido como  $\vec{E} = 300 \text{ N/Ci}$  para  $x > 0$  e  $\vec{E} = -300 \text{ N/Ci}$  para  $x < 0$ . Um cilindro com 20 cm de comprimento e 4 cm de raio tem seu centro na origem e seu eixo longitudinal sobre o eixo  $x$ , de modo que uma de suas extremidades é posicionada em  $x = +10 \text{ cm}$  e a outra em  $x = -10 \text{ cm}$ . (a) Qual é o fluxo através de cada uma das extremidades do cilindro? (b) Qual é o fluxo através de sua superfície curva? (c) Qual é o fluxo resultante que sai da superfície de todo o cilindro? (d) Qual é a carga resultante no interior do cilindro?

34 • Medidas precisas do campo elétrico na superfície de uma caixa preta indicam que o fluxo resultante que atravessa a superfície da caixa é de  $6,0 \text{ kN} \cdot \text{m}^2/\text{Ci}$ . (a) Qual é a carga resultante no interior da caixa? (b) Se o fluxo resultante através da superfície da caixa fosse nulo, seria possível concluir que não haveria cargas no interior da caixa? Explique.

35 • Uma carga puntiforme  $q = +2 \mu\text{C}$  situa-se no centro de uma esfera com 0,5 m de raio. (a) Determine a área da superfície da esfera. (b) Determine o módulo do campo elétrico nos pontos da superfície da esfera. (c) Qual é o fluxo do campo elétrico devido à carga puntiforme através da superfície da esfera? (d) A resposta ao item (c) poderia ser mudada se a carga puntiforme fosse movimentada de modo que ela continuasse interna à esfera, porém não mais em seu centro? (e) Qual é o fluxo resultante através de um cubo com 1 m de lado que envolve a esfera?

36 • Uma vez que a lei da gravitação de Newton e a lei de Coulomb têm a mesma dependência do inverso do quadrado da distância, uma expressão de forma análoga à lei de Gauss pode ser obtida para o campo gravitacional. Esse campo  $\vec{g}$  representa a força por unidade de massa atuante sobre uma massa de teste  $m_0$ . Assim, para uma massa pontual  $m$  na origem, o campo gravitacional em uma posição qualquer  $r$  é

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r}$$

Calcule o fluxo do campo gravitacional através de uma superfície esférica de raio  $R$  centrada na origem, e mostre que o análogo gravitacional da lei de Gauss é  $\phi_{gr} = -4\pi Gm_{int}/R$ .

37 • Uma carga de  $2 \mu\text{C}$  está 20 cm acima do centro de um quadrado cujo lado tem comprimento de 40 cm. Determine o fluxo através do quadrado. (Sugestão: não integre.)

38 • Em uma região específica da atmosfera da Terra, o campo elétrico acima da superfície foi medido e registraram-se os seguintes valores:  $150 \text{ N/C}$  orientado para baixo a uma altitude de 250 m e  $170 \text{ N/C}$  orientado para baixo a uma altitude de 400 m. Calcule a densidade volumétrica de carga da atmosfera admitindo que seja uniforme entre 250 e 400 m. (Você pode desprezar a curvatura da Terra. Por quê?)

### Simetria Esférica

39 •• Uma casca esférica de raio  $R_1$  tem uma carga total  $q_1$  uniformemente distribuída em sua superfície. Uma segunda casca esférica maior com raio  $R_2$ , concêntrica com a primeira, tem carga  $q_2$  também uniformemente distribuída em sua superfície. (a) Utilize a lei de Gauss para determinar o campo elétrico nas regiões  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  e  $r > R_2$ . (b) Qual seria a relação entre as cargas  $q_1/q_2$  e seus sinais relativos para que o campo elétrico fosse nulo para  $r > R_2$ ? (c) Esquematize as linhas de campo elétrico para a situação descrita no item (b) quando a carga  $q_1$  é positiva.

40 •• Uma casca esférica com 6 cm de raio apresenta uma densidade superficial de carga uniforme  $\sigma = 9 \text{ nC/m}^2$ . (a) Qual é a carga total sobre a casca? Determine o campo elétrico em (b)  $r = 2 \text{ cm}$ , (c)  $r = 5,9 \text{ cm}$ , (d)  $r = 6,1 \text{ cm}$  e (e)  $r = 10 \text{ cm}$ .

41 •• Uma esfera com 6 cm de raio tem uma densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho = 450 \text{ nC/m}^3$ . (a) Qual é a carga total da esfera? Determine o campo elétrico em (b)  $r = 2 \text{ cm}$ , (c)  $r = 5,9 \text{ cm}$ , (d)  $r = 6,1 \text{ cm}$  e (e)  $r = 10 \text{ cm}$ . Compare suas respostas com as do Problema 40.

42 •• Considere duas esferas condutoras concêntricas (Figura 22-38). A esfera mais externa é oca e tem inicialmente uma carga de  $-7Q$ . A esfera mais interna é maciça e tem carga de  $+2Q$ . (a) Como é a distribuição da carga na esfera mais externa? Isto é, quais os valores das cargas nas faces externa e interna? (b) Suponha que um fio condutor seja conectado entre as esferas interna e externa. Após o equilíbrio eletrostático ser estabelecido, qual o valor da carga na esfera externa? Quais são as cargas nas faces externa e interna da esfera externa? O campo elétrico na superfície da esfera interna é alterado quando o fio é conectado? Em caso afirmativo, como? (c) Suponha que se retorne às condições originais do item (a), com uma carga de  $+2Q$  na esfera interna e  $-7Q$  na esfera externa. Aterre agora a esfera externa com um fio condutor e, em seguida, desconecte-a. Qual o valor da carga total na esfera externa? Quais serão os valores das cargas nas faces interna e externa da esfera externa?

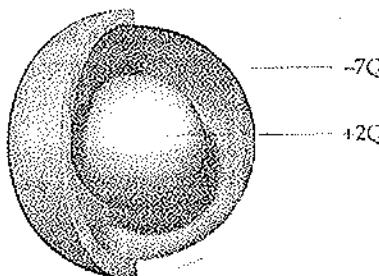


FIGURA 22-38  
Problema 42

43 •• Uma esfera não-condutora de raio  $R = 0,1 \text{ m}$  tem uma densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho = 2,0 \text{ nC/m}^3$ . O módulo do campo elétrico em  $r = 2R$  é  $1883 \text{ N/C}$ . Determine o módulo do campo elétrico em  $r = 0,5R$ .

44 •• Uma esfera não-condutora de raio  $R$  possui densidade volumétrica de carga proporcional à distância ao centro:  $\rho = Ar$  para  $r \leq R$ , onde  $A$  é uma constante;  $\rho = 0$  para  $r > R$ . (a) Determine a carga total da esfera, admitindo que as cargas estejam sobre cascas de espessura  $dr$  e volume  $4\pi r^2 dr$ . (b) Determine o campo elétrico  $E$ , interno e externo à distribuição de carga e esquematize  $E$ , em função de  $r$ .

45 •• Repita o Problema 44 para uma esfera com densidade volumétrica de carga  $\rho = B/r$  para  $r < R$  e  $\rho = 0$  para  $r > R$ .

46 •• Repita o Problema 44 para uma esfera com densidade volumétrica de carga  $\rho = C/r^2$  para  $r < R$  e  $\rho = 0$  para  $r > R$ .

47 •• Uma casca esférica grossa não-condutora, com raios interno  $a$  e externo  $b$ , tem densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho$ . Determine (a) a carga total e (b) o campo elétrico em qualquer local.

### Simetria Cilíndrica

48 •• Mostre que o campo elétrico devido a uma casca cilíndrica de comprimento infinito e raio  $R$  carregada uniformemente e apresentando uma densidade superficial de carga  $\sigma$  é expresso por

$$E_r = 0, \quad r < R$$

$$E_r = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad r > R$$

onde  $\lambda = 2\pi R\sigma$  é a carga por unidade de comprimento da casca.

49 •• Uma casca cilíndrica com 200 m de comprimento e 6 cm de raio tem densidade superficial de carga uniforme  $\sigma = 9 \text{ nC/m}^2$ . (a) Qual é a carga total da casca? Determine o campo elétrico em (b)  $r = 2 \text{ cm}$ , (c)  $r = 5,9 \text{ cm}$ , (d)  $r = 6,1 \text{ cm}$  e (e)  $r = 10 \text{ cm}$ . (Utilize os resultados do Problema 48.)

50 •• Um cilindro não-condutor infinitamente longo de raio  $R$  tem densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho(r) = \rho_0$ . Mostre que o campo elétrico é dado por

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\lambda}{r} \quad r > R$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2 r} \quad r < R$$

onde  $\lambda = \rho\pi R^2$  é a carga por unidade de comprimento.

51 •• Um cilindro com 200 m de comprimento e raio de 6 cm tem densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho = 300 \text{ nC/m}^3$ . (a) Qual é a carga total do cilindro? Utilize as fórmulas fornecidas no Problema 50 para calcular o campo elétrico em um ponto equidistante das extremidades em (b)  $r = 2 \text{ cm}$ , (c)  $r = 5,9 \text{ cm}$ , (d)  $r = 6,1 \text{ cm}$  e (e)  $r = 10 \text{ cm}$ . Compare seus resultados com os do Problema 49.

52 •• Considere duas cascas cilíndricas concêntricas de comprimento infinito. A casca interna tem raio  $R_1$  e densidade superficial de carga uniforme  $\sigma_1$ , e a casca externa uma densidade superficial de carga uniforme  $\sigma_2$ . (a) Utilize a lei de Gauss para determinar o campo elétrico nas regiões onde  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  e  $r > R_2$ . (b) Qual será a relação entre as densidades superficiais de carga  $\sigma_2/\sigma_1$  e seus sinais relativos se o campo elétrico for nulo em  $r > R_2$ ? Qual será o campo elétrico entre as cascas nesse caso? (c) Esquematize as linhas do campo elétrico para a situação do item (b) se  $\sigma_1$  for positivo.

53 •• A Figura 22-39 mostra um trecho da seção transversal de um cabo concêntrico de comprimento infinito. O condutor mais interno tem carga de  $6 \text{ nC/m}$ ; o condutor mais externo está descarregado. (a) Determine o campo elétrico para todos os valores de  $r$ , onde  $r$  é a distância ao eixo do sistema cilíndrico. (b) Quais são as densidades superficiais de carga nas superfícies interna e externa do condutor externo?

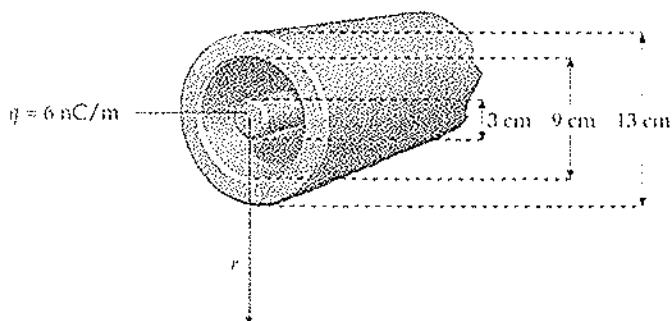


FIGURA 22-39 Problemas 53 e 57

54 •• Um cilindro não-condutor com comprimento infinito e raio  $R$  tem densidade volumétrica de carga não-uniforme  $\rho(r) = ar$ . (a) Mostre que a carga por unidade de comprimento do cilindro é  $\lambda = 2\pi aR^3/3$ . (b) Determine as expressões para o campo elétrico devido a esse cilindro carregado. Você deve obter uma expressão para o campo elétrico na região  $r < R$  e uma segunda expressão para o campo na região  $r > R$ , como no Problema 50.

55 •• Repita o Problema 54 para uma densidade volumétrica de carga não-uniforme  $\rho = br^2$ . No item (a) mostre que  $\lambda = \pi bR^4/2$  (em vez da expressão fornecida para  $\lambda$  no Problema 54).

56 •• Uma casca cilíndrica não-condutora, grossa, de comprimento infinito, raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , tem densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho$ . Determine o campo elétrico para um ponto qualquer.

57 •• Admita que o cilindro interno da Figura 22-39 seja feito de um material não-condutor e tenha uma distribuição de carga volumétrica expressa por  $\rho(r) = C/r$ , onde  $C = 200 \text{ nC/m}^3$ . O cilindro externo é metálico. (a) Determine a carga por metro do cilindro interno. (b) Calcule o campo elétrico para todos os valores de  $r$ .

### Cargas e Campos Elétricos nas Superfícies Condutoras

58 • Uma moeda está sob a ação de um campo elétrico externo de módulo igual a  $1,6 \text{ kN/C}$  direcionado perpendicularmente a suas faces. (a) Determine a densidade de carga em cada face da moeda, admitindo que sejam planas. (b) Considerando que o raio da moeda seja de 1 cm, determine a carga total correspondente a uma face.

59 • Uma placa metálica descarregada tem faces quadradas com 12 cm de lado. Ela é colocada em um campo elétrico externo perpendicular a suas faces. A carga total induzida em uma das faces é de  $1,2 \text{ nC}$ . Qual é o módulo do campo elétrico?

60 • Uma carga de  $6 \text{ nC}$  é distribuída uniformemente sobre uma placa quadrada de material não-condutor com 20 cm de lado no plano  $yz$ . (a) Qual é a densidade superficial de carga  $\sigma$ ? (b) Qual é o módulo do campo elétrico nas faces direita e esquerda da placa? (c) A mesma carga é colocada em uma placa quadrada de material condutor com 20 cm de lado e 1 mm de espessura. Qual é a densidade superficial de carga  $\sigma$ ? (Admita que a carga seja distribuída uniformemente sobre as grandes superfícies quadradas.) (d) Qual é o módulo do campo elétrico nas faces direita e esquerda da placa?

61 • Uma casca esférica condutora com carga resultante nula tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$ . Uma carga puntiforme  $q$  é colocada no centro da casca. (a) Utilize a lei de Gauss e as propriedades dos condutores em equilíbrio para determinar o campo elétrico nas regiões  $r < a$ ,  $a < r < b$  e  $b < r$ . (b) Desenhe as linhas de

campo elétrico para essa situação. (c) Determine a densidade de carga sobre as superfícies interna ( $r = a$ ) e externa ( $r = b$ ) da casca.

62 •• O campo elétrico na superfície da Terra foi medido como de  $150 \text{ N/C}$  direcionado para baixo. Qual é a carga total sobre a Terra decorrente dessa medida?

63 •• Uma carga puntiforme positiva com módulo de  $2,5 \mu\text{C}$  é posicionada no centro de uma casca condutora esférica descarregada com raio interno de 60 cm e externo de 90 cm. (a) Determine as densidades de carga sobre as superfícies interna e externa da casca e a carga total em cada superfície. (b) Determine o campo elétrico em um ponto qualquer. (c) Repita os itens (a) e (b) com uma carga resultante de  $+3,5 \mu\text{C}$  colocada sobre a casca.

64 •• Quando o módulo de um campo elétrico no ar é da ordem de  $3 \times 10^6 \text{ N/C}$ , o ar fica ionizado e se torna condutor. Esse fenômeno é chamado de colapso dieletétrico. Considere que uma carga de  $18 \mu\text{C}$  seja colocada em uma esfera condutora. Qual deve ser o raio mínimo dessa esfera de modo que ela mantenha essa carga sem que ocorra a ionização?

65 •• Uma placa quadrada condutora com 5 m de lado tem uma carga resultante de  $80 \mu\text{C}$ . (a) Determine a densidade de carga e o campo elétrico em cada uma das faces da placa. (b) A placa é colocada à direita de um plano infinito não-condutor com uma densidade de carga de  $2,0 \mu\text{C/m}^2$ , de modo que as faces da placa fiquem paralelas ao plano. Determine o campo elétrico e a densidade de carga em cada face da placa, desprezando os efeitos das bordas.

### Problemas Gerais

66 •• Considere as três esferas metálicas concêntricas mostradas na Figura 22-40. A esfera n.º 1 é macia, com raio  $R_1$ . A esfera n.º 2 é oca, com raio interno  $R_2$  e raio externo  $R_3$ . A esfera n.º 3 é oca, com raio interno  $R_4$  e raio externo  $R_5$ . Inicialmente, com todas as três esferas sem excesso de carga, uma carga negativa  $-Q_0$  é colocada na esfera 1 e uma carga positiva  $+Q_0$  é colocada na esfera 3. (a) Após as cargas atingirem o equilíbrio, o campo elétrico no espaço entre as esferas 1 e 2 será orientado em direção ao centro, afastando-se dele ou nenhuma dessas condições? (b) Qual o valor da carga na superfície interna da esfera n.º 2? Forneça o sinal apropriado. (c) Qual o valor da carga na superfície externa da esfera n.º 2? (d) Qual o valor da carga na superfície interna da esfera n.º 3? (e) Qual o valor da carga na superfície externa da esfera n.º 3? (f) Faça um gráfico indicando o valor do campo  $E$  em função do raio  $r$ .

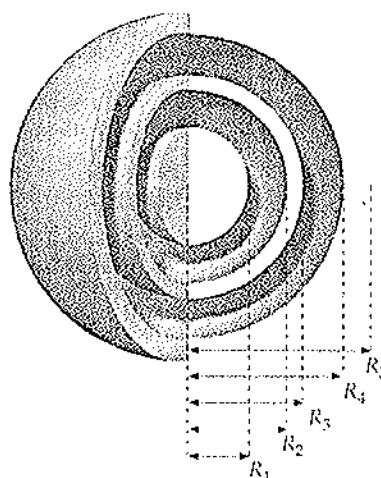


FIGURA 22-40 Problema 66

67 •• Uma carga superficial não-uniforme é distribuída no plano  $yz$ . Na origem, a densidade superficial de carga é  $\sigma = 3,10 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Outros corpos carregados também podem estar presentes. Imediatamente à direita da origem, a componente do campo elétrico vale  $E_x = 4,65 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Qual é o valor do campo  $E_y$  imediatamente à esquerda da origem?

68 •• Um segmento de reta infinito carregado com densidade de carga linear  $\lambda = -1,5 \mu\text{C/m}$  é posicionado paralelamente ao eixo  $y$  em  $x = -2 \text{ m}$ . Uma carga puntiforme de  $1,3 \mu\text{C}$  é colocada no ponto de coordenadas  $x = 1 \text{ m}, y = 2 \text{ m}$ . Determine o campo elétrico no ponto de coordenadas  $x = 2 \text{ m}, y = 1,5 \text{ m}$ .

69 •• Uma casca esférica fina não-condutora de raio  $r$  é carregada uniformemente com uma carga total  $Q$  (Figura 22-41a). Um pequeno cilindro circular é removido de sua superfície. (a) Qual é o módulo e a orientação do campo elétrico no centro do furo? (b) Considerando que o cilindro seja colocado novamente no furo (Figura 22-41b), utilize o resultado do item (a) para calcular a força que atua sobre ele. (c) Com esse resultado, calcule a "pressão eletrostática" (força por unidade de área) que tende a expandir a esfera.

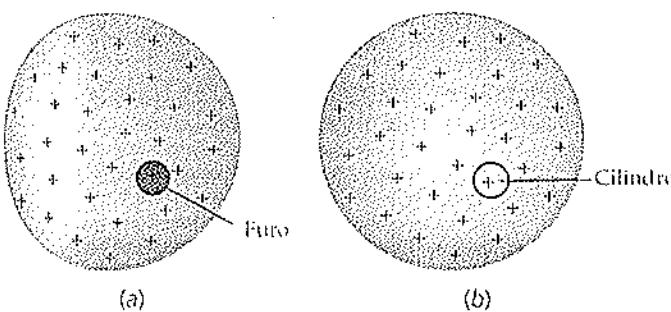


FIGURA 22-41 Problema 69

70 •• Uma bolha de sabão de raio  $R_1 = 10 \text{ cm}$  possui uma carga de  $3 \text{nC}$  uniformemente distribuída sobre ela. Devido à repulsão eletrostática, a bolha se expande até romper a um raio  $R_2 \approx 20 \text{ cm}$ . A partir dos resultados do Problema 69, calcule o trabalho realizado pela força eletrostática na expansão da bolha.

71 •• Se a bolha de sabão do Problema 70 rompe, transformando-se em uma gota esférica de água, estime o campo elétrico em sua superfície.

72 •• Dois planos infinitos carregados são paralelos entre si e ao plano  $yz$ . Um é posicionado em  $x = -2 \text{ m}$  e tem densidade superficial de carga  $\sigma = -3,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . O outro é posicionado em  $x = 2 \text{ m}$  e tem densidade superficial de carga  $\sigma = 6,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Determine o campo elétrico para (a)  $x < -2 \text{ m}$ , (b)  $-2 \text{ m} < x < 2 \text{ m}$  e (c)  $x > 2 \text{ m}$ .

73 •• Uma casca cilíndrica de comprimento infinito é coaxial com o eixo  $y$  e tem um raio de  $15 \text{ cm}$ . Ela apresenta uma densidade superficial de carga  $\sigma = 6 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Uma casca esférica com  $25 \text{ cm}$  de raio é centrada no eixo  $x$  em  $x = 50 \text{ cm}$  e tem uma densidade superficial de carga uniforme  $\sigma = -12 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Calcule o módulo e a orientação do campo elétrico (a) na origem; (b) no ponto de coordenadas  $x = 20 \text{ cm}, y = 10 \text{ cm}$  e (c) no ponto de coordenadas  $x = 50 \text{ cm}, y = 20 \text{ cm}$ . (Veja o Problema 48.)

74 •• Um plano infinito apoiado no plano  $xz$  tem uma densidade superficial de carga uniforme  $\sigma_1 = 65 \text{nC/m}^2$ . Um segundo plano infinito, com uma densidade de carga uniforme  $\sigma_2 = 45 \text{nC/m}^2$ , intercepta o plano  $xz$  no eixo  $z$  e faz um ângulo de  $30^\circ$  com o plano  $xz$ , conforme mostrado na Figura 22-42. Determine o campo elétri-

co no plano  $xy$  nos pontos de coordenadas (a)  $x = 6 \text{ m}, y = 2 \text{ m}$  e (b)  $x = 6 \text{ m}, y = 5 \text{ m}$ .

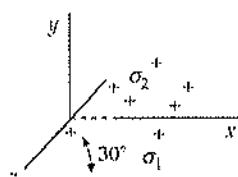


FIGURA 22-42 Problema 74

75 •• Uma abordagem da mecânica quântica para o átomo de hidrogênio mostra que o elétron desse átomo pode ser tratado como uma cobertura representando a distribuição de carga, cuja forma pode ser expressa por  $p(r) = p_0 e^{-2r/a}$ , onde  $r$  é a distância ao núcleo e  $a$  é o raio Bohr ( $a \approx 0,0529 \text{ nm}$ ). (a) Calcule  $p_0$ , considerando o fato de que o átomo seja desprovido de carga. (b) Calcule o campo elétrico a uma distância  $r$  qualquer do núcleo. Trate o próton como uma carga puntiforme.

76 •• Utilizando os resultados do Problema 75, se um próton for colocado acima do núcleo de um átomo de hidrogênio qual seria a distância  $r$  para a qual a força elétrica sobre o próton equilibraria a força gravitacional  $mg$  atuante sobre ele? A partir desse resultado, explique por que mesmo sabendo que a força eletrostática é expressivamente maior do que a força gravitacional esta é a força mais observada.

77 •• Um anel de raio  $R$  tem densidade linear de carga positiva e uniforme  $\lambda$ . A Figura 22-43 mostra um ponto  $P$  no plano do anel, porém não em seu centro. Considere os dois elementos do anel cujos comprimentos são  $s_1$  e  $s_2$ , mostrados na figura distando  $r_1$  e  $r_2$  do ponto  $P$ , respectivamente. (a) Qual é a relação entre as cargas desses elementos? Qual deles produz o maior campo elétrico no ponto  $P$ ? (b) Qual é a orientação do campo no ponto  $P$  devido a cada um dos elementos? Qual é a orientação do campo elétrico total no ponto  $P$ ? (c) Admita que o campo elétrico devido a uma carga puntiforme varie com  $1/r$  em vez de  $1/r^2$ . Qual seria o campo elétrico no ponto  $P$  devido aos elementos mostrados? (d) Como ficariam suas respostas aos itens (a), (b) e (c) se o ponto  $P$  estivesse no interior de uma casca esférica carregada uniformemente e os elementos tivessem áreas  $s_1$  e  $s_2$ ?

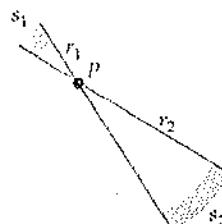


FIGURA 22-43 Problema 77

78 •• Um anel de raio  $R$  carregado uniformemente com carga  $Q$  apóia-se em um plano horizontal. Uma partícula de massa  $m$  com uma carga  $q$  e sinal oposto ao de  $Q$  está sobre o eixo do anel. (a) Qual é o valor mínimo de  $|q|/m$  de modo que a partícula fique em equilíbrio sob a ação da gravidade e da força eletrostática? (b) Se  $|q|/m$  for igual ao dobro do calculado no item (a), onde a partícula deverá se situar quando estiver em equilíbrio?

79 •• Um bastão plástico fino e longo, não-condutor, é moldado formando um aro de raio  $R$ . Entre as extremidades do bastão é mantida uma pequena folga de comprimento  $l$  ( $l \ll R$ ). Uma carga  $Q$  é igualmente distribuída sobre o bastão. (a) Indique a orientação do campo elétrico no centro do aro. (b) Determine o módulo do campo elétrico no centro do aro.

80 •• Uma esfera não-condutora com 1,2 m de diâmetro, com seu centro sobre o eixo  $x$  em  $x = 4$  m, tem densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho = 5 \mu\text{C}/\text{m}^3$ . Envolvendo a esfera há uma casca esférica com diâmetro de 2,4 m e densidade superficial de carga uniforme  $\sigma = -1,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Calcule o módulo e a orientação do campo elétrico nos pontos de coordenadas (a)  $x = 4,5$  m,  $y = 0$ ; (b)  $x = 4,0$  m,  $y = 1,1$  m e (c)  $x = 2,0$  m,  $y = 3,0$  m.

81 •• Um plano infinito carregado com uma densidade superficial de carga  $\sigma_1 = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$  é paralelo ao plano  $xz$  em  $y = -0,6$  m. Um segundo plano infinito carregado com uma densidade superficial  $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2$  é paralelo ao plano  $yz$  em  $x = 1$  m. Uma esfera com raio de 1 m e centro no plano  $xy$  na interseção dos dois planos carregados ( $x = 1$  m,  $y = -0,6$  m) tem densidade superficial de carga  $\sigma_3 = -3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Determine o módulo e a orientação do campo elétrico sobre o eixo  $x$  em (a)  $x = 0,4$  m e (b)  $x = 2,5$  m.

82 •• Um plano infinito paralelo ao plano  $yz$  em  $x = 2$  m tem densidade superficial de carga uniforme  $\sigma = 2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Um segmento de reta com densidade de carga linear uniforme  $\lambda = 4 \mu\text{C}/\text{m}$  passa pela origem a um ângulo de 45° com o eixo  $x$  no plano  $xy$ . Uma esfera com densidade volumétrica de carga  $\rho = -6 \mu\text{C}/\text{m}^3$  e raio de 0,8 m tem seu centro sobre o eixo  $x$  em  $x = 1$  m. Calcule o módulo e a orientação do campo elétrico em um ponto sobre o plano  $xy$  com coordenadas  $x = 1,5$  m,  $y = 0,5$  m.

83 •• Uma reta infinita com densidade linear de carga  $\lambda$  é posicionada sobre o eixo  $z$ . Uma partícula de massa  $m$  com carga  $q$  de sinal oposto ao de  $\lambda$  está em órbita circular no plano  $xy$  em torno da reta carregada. Obtenha uma expressão para o período da órbita em função de  $m$ ,  $q$ ,  $R$  e  $\lambda$ , onde  $R$  é o raio da órbita.

84 •• Um anel de raio  $R$  apóia-se no plano  $yz$  e tem carga positiva  $Q$  uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. Uma partícula de massa  $m$  que apresenta uma carga negativa de módulo  $q$  é posicionada no centro do anel. (a) Mostre que se  $x \ll R$ , o campo elétrico ao longo do eixo do anel é proporcional a  $x$ . (b) Determine a força atuante sobre a partícula de massa  $m$  em função de  $x$ . (c) Mostre que se à partícula de massa  $m$  é dado um pequeno deslocamento na direção  $x$ , ela apresentará um movimento harmônico simples. Calcule o período desse movimento.

85 •• Quando as cargas  $Q$  e  $q$  do Problema 84 forem de  $5 \mu\text{C}$  e  $-5 \mu\text{C}$ , respectivamente, e o raio do anel for de 8,0 cm, a massa  $m$  oscila em torno de sua posição de equilíbrio com uma freqüência angular de 21 rad/s. Determine a freqüência angular de oscilação da massa se o raio do anel for dobrado para 16 cm e todos os demais parâmetros permanecerem inalterados.

86 •• Dadas as condições iniciais do Problema 85, determine a freqüência angular de oscilação da massa se o raio do anel for dobrado para 16 cm mantendo a densidade linear de carga do anel constante.

87 •• Uma esfera não-condutora de raio  $a$ , carregada uniformemente, tem seu centro na origem e uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ . (a) Mostre que em um ponto no interior da esfera a uma distância  $r$  do centro,  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r}$ . (b) Material é removido da esfera, deixando uma cavidade esférica de raio  $b = a/2$  com centro em  $x =$

$b$  sobre o eixo  $x$  (Figura 22-44). Calcule o campo elétrico nas posições 1 e 2 mostradas na Figura 22-44. (Sugestão: substitua a esfera cavitada por duas esferas uniformes com densidades de carga iguais, uma positiva e outra negativa.)

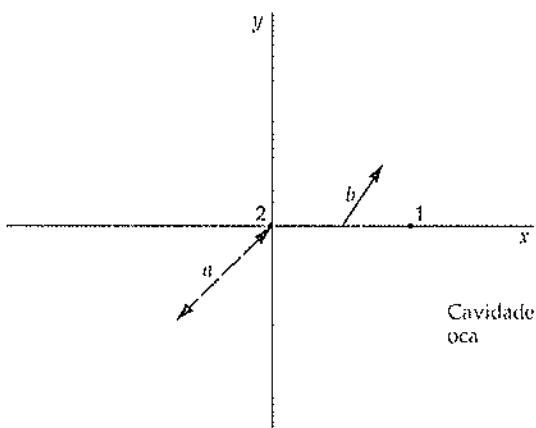


FIGURA 22-44 Problema 87

88 ••• Mostre que o campo elétrico através da cavidade do Problema 87 é uniforme e pode ser expresso por

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b \hat{x}$$

89 •• Repita o Problema 87, admitindo que a cavidade seja preenchida com um material carregado uniformemente com uma carga total  $Q$ .

90 •• Um cilindro não-condutor com 1,2 m de raio e 2,0 m de comprimento tem carga de  $50 \mu\text{C}$  uniformemente distribuída através de seu volume. Determine o campo elétrico sobre o eixo do cilindro a uma distância de (a) 0,5 m, (b) 2,0 m e (c) 20 m do centro do cilindro.

91 •• Um segmento de reta carregado uniformemente, com densidade  $\lambda$ , apóia-se sobre o eixo  $x$  entre  $x = 0$  e  $x = L$ . Sua carga total é  $Q = 8 \text{nC}$ . O campo elétrico em  $x = 2L$  é de  $600 \text{ N/C}$ . Determine o campo elétrico em  $x = 3L$ .

92 ••• Uma pequena superfície gaussiana na forma de um cubo, com faces paralelas aos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  (Figura 22-45), está em uma região onde o campo elétrico permanece paralelo ao eixo  $x$ . Utilizando uma série de Taylor (e desprezando os termos superiores aos de primeira ordem), mostre que o fluxo resultante do campo elétrico saindo da superfície gaussiana é dado por

$$\phi_{\text{res}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$$

onde  $\Delta V$  é o volume envolvido pela superfície gaussiana. Sugestão: o correspondente resultado para situações nas quais a orientação do campo elétrico não é restrita a uma dimensão é

$$\phi_{\text{res}} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

onde a combinação de derivadas entre os parênteses é normalmente escrita como  $\nabla \cdot \vec{E}$  e é chamada de divergência de  $\vec{E}$ .

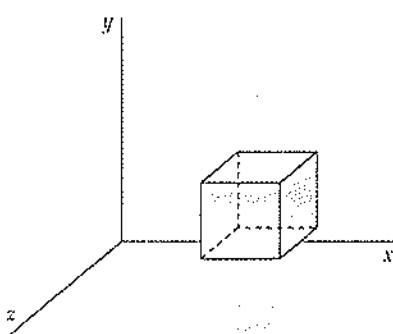


FIGURA 22-45 Problema 92

93 •• Utilizando a lei de Gauss e os resultados do Problema 92, mostre que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga. (Essa equação é conhecida como a forma puntiforme da lei de Gauss.)

94 ••• Um dipolo  $\vec{\beta}$  é localizado a uma distância  $r$  de uma reta infinita carregada com densidade linear de carga uniforme  $\lambda$ . Ad-

mita que o dipolo esteja alinhado com o campo devido à reta carregada. Determine a força que atua no dipolo.

95 •• Considere um simples, porém surpreendente e preciso modelo para a molécula de hidrogênio: duas cargas puntiformes positivas, cada uma com carga  $+e$ , são colocadas no interior de uma esfera de raio  $R$ , que tem densidade de carga uniforme  $-2e$ . As duas cargas puntiformes são posicionadas simetricamente (Figura 22-46). Determine a distância do centro,  $a$ , onde a força resultante em ambas as cargas seja nula.

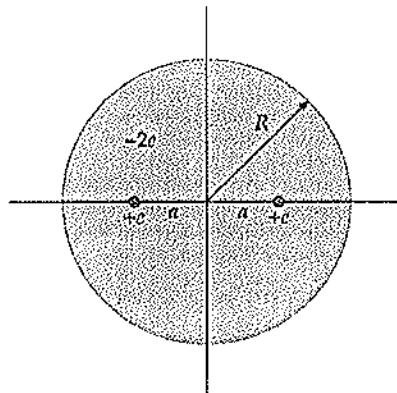


FIGURA 22-46 Problema 95

## ● Potencial Elétrico



UMA PESSOA PODE FICAR SOB A AÇÃO DE UM ALTO POTENCIAL QUANDO ENTRA EM CONTATO COM A CÚPULA DE UM GERADOR DE VAN DE GRAAFF, ESTANDO DE PÉ SOBRE UMA PLATAFORMA ISOLADA ELETRICAMENTE DO SOLO. ELA ARMAZENA CARGA DO GERADOR. SEUS CABELOS FICARÃO ARREPPIADOS PORQUE AS CARGAS EM SUA CABEÇA E AS CARGAS NOS FIOS DE SEUS CABELOS POSSUEM O MESMO SINAL E, PORTANTO, SE REPELEM.

 Você sabia que o potencial máximo que a cúpula de um gerador do Van de Graaff pode atingir é determinado pelo raio da cúpula? Para uma discussão desse assunto veja o Exemplo 23-14.

- 23-1 Diferença de Potencial
- 23-2 Potencial Elétrico Devido a um Sistema de Cargas Puntiformes
- 23-3 Cálculo do Campo Elétrico a Partir do Potencial
- 23-4 Cálculo do Potencial V para Distribuições Contínuas de Carga
- 23-5 Superfícies Eqüipotenciais

A força elétrica entre duas cargas é direcionada ao longo da linha que une as cargas e varia com o inverso do quadrado da distância de sua separação; a mesma dependência da força gravitacional entre duas massas. Analogamente à força gravitacional, a força elétrica é conservativa, de modo que existe uma função energia potencial  $U$  a ela associada. Colocando-se uma carga de prova  $q_0$  na presença de um campo elétrico, sua energia potencial é proporcional a  $q_0$ . A energia potencial por unidade de carga é uma função da posição da carga no espaço, e é chamada de potencial elétrico. Como ela é um campo escalar, em muitas situações é mais fácil de ser manipulada do que o campo elétrico.

► Neste capítulo é estabelecida a relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico, e calcula-se o potencial elétrico de diversas distribuições contínuas de cargas. Em seguida, pode-se utilizar o potencial elétrico para determinar o campo elétrico dessas regiões.

### 23-1 Diferença de Potencial

Em geral, quando o ponto de aplicação de uma força conservativa  $\vec{F}$  sofre um deslocamento  $d\vec{\ell}$ , a variação na função energia potencial  $dU$  é calculada como

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

A força exercida por um campo elétrico  $\vec{E}$  sobre uma carga puntiforme  $q_0$  é

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

Assim, quando uma carga é submetida a um deslocamento  $d\vec{\ell}$ , a variação na energia potencial eletrostática é

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad 23-1$$

A variação da energia potencial é proporcional à carga  $q_0$ . A variação da energia potencial *por unidade de carga* é chamada de diferença de potencial  $dV$ :

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad 23-2a$$

#### DEFINIÇÃO — DIFERENÇA DE POTENCIAL

Para um deslocamento finito desde o ponto  $a$  até o ponto  $b$ , a variação no potencial vale

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad 23-2b$$

#### DEFINIÇÃO — DIFERENÇA DE POTENCIAL FINITA

A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é igual ao negativo do trabalho por unidade de carga, realizado pelo campo elétrico sobre uma pequena carga de prova positiva quando esta se move de um ponto  $a$  para um ponto  $b$ . Este cálculo é válido mantendo-se fixas as posições de todas as demais cargas do sistema.

A função  $V$  é chamada de potencial elétrico e, geralmente, referenciada apenas como potencial. Como o campo elétrico, o potencial  $V$  é uma função da posição. Diferentemente do campo elétrico,  $V$  é uma função escalar, enquanto que  $\vec{E}$  é uma função vetorial. Da mesma forma que a energia potencial  $U$ , apenas as *diferenças* no potencial  $V$  são importantes. Escolhe-se livremente o ponto onde, por conveniência, o potencial é considerado nulo, exatamente como foi considerado no caso da energia potencial. Por conveniência, o potencial elétrico e a energia potencial de uma carga de prova são adotados como nulos no mesmo ponto. Nessas condições eles ficam relacionados por

$$U = q_0 V \quad 23-3$$

#### RELAÇÃO ENTRE ENERGIA POTENCIAL E POTENCIAL ELÉTRICO

#### Continuidade de $V$

No Capítulo 22, foi mostrado que o campo elétrico apresenta uma descontinuidade de  $\sigma/\epsilon_0$  nos pontos onde se tem uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . A função potencial, por outro lado, é contínua em todos os locais do espaço, exceto nos pontos onde o campo elétrico é infinito (pontos onde existe uma

carga puntiforme ou uma linha carregada). Pode-se verificar essa condição a partir da própria definição da função potencial. Considere uma região onde atue um campo elétrico  $\vec{E}$ . A diferença no potencial entre dois pontos vizinhos separados por um deslocamento  $d\vec{l}$  está relacionada ao campo elétrico pela equação  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$  (Equação 23-2a). O produto escalar pode ser expresso como  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$ , onde  $E$  é a componente de  $\vec{E}$  na direção de  $d\vec{l}$  e  $dl$  é o módulo de  $d\vec{l}$ . A substituição desse resultado na Equação 23-2a fornece  $dV = -E dl$ . Se  $E$  for sínito em cada um dos dois pontos e ao longo do segmento de reta de comprimento infinitesimal  $dl$  que os une, então  $dV$  será infinitesimal. Assim, a função potencial  $V$  é contínua em qualquer ponto do espaço que não seja ocupado por uma carga puntiforme ou por uma linha carregada.

## Unidades

Uma vez que o potencial é igual à energia potencial por unidade de Carga, as unidades no SI para o potencial e para a diferença de potencial são o joule por coulomb, que é chamado de volt (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} \quad 23-4$$

A diferença de potencial entre dois pontos (medida em volts) é geralmente chamada de tensão. Na bateria de 12 V de um veículo de passeio, o terminal positivo tem um potencial 12 V maior do que o terminal negativo. Ligando-se um circuito externo à bateria e transferindo-se uma carga de um coulomb do terminal positivo passando pelo circuito até o terminal negativo, a energia potencial da carga diminui de  $Q \Delta V = (1 \text{ C})(12 \text{ V}) = 12 \text{ J}$ .

Pela Equação 23-2 verifica-se que as dimensões do potencial são as do campo elétrico multiplicado por uma distância. Assim, as unidades do campo elétrico são volt por metro:

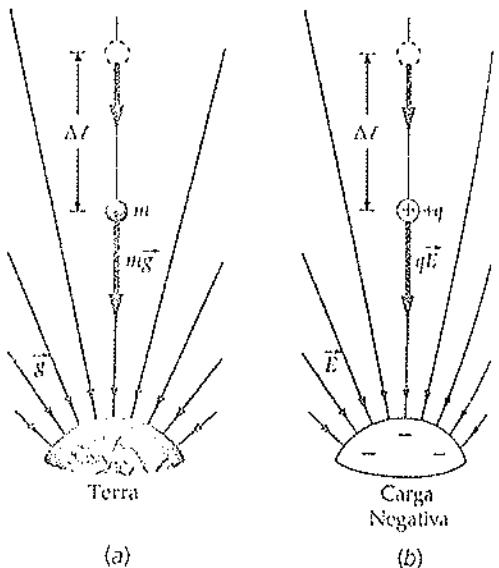
$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m} \quad 23-5$$

logo, pode-se imaginar a resistência de um campo elétrico tanto como uma força por unidade de carga ou como uma taxa de variação de  $V$  em relação a uma distância. Nas físicas atômica e nuclear geralmente trata-se de partículas elementares com cargas de módulo  $e$ , como os elétrons e os prótons, movendo-se em um meio onde as diferenças de potencial chegam a milhares ou mesmo milhões de volts. Uma vez que a energia possui dimensão de carga elétrica multiplicada por potencial elétrico, uma unidade de energia é o produto da unidade de carga fundamental  $e$  por um volt. Essa unidade é chamada de elétron-volt (eV). As energias nas físicas atômica e molecular são tipicamente da ordem de alguns eV, tornando o elétron-volt uma unidade bastante conveniente a ser utilizada nos processos atômicos e moleculares. A conversão entre elétron-volts e joules é obtida expressando-se a carga do elétron em coulombs:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad 23-6$$

### ○ ELÉTRONVOLT

Por exemplo, um elétron movendo-se do terminal negativo para o terminal positivo da bateria de 12 V de um automóvel perde 12 eV de energia potencial.

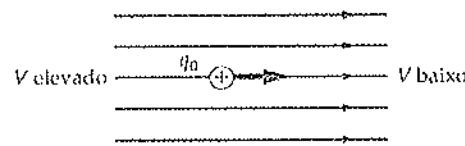


**FIGURA 23-1**  
 (a) O trabalho realizado pelo campo gravitacional  $\vec{g}$  sobre uma massa  $m$  é igual à diminuição da energia potencial gravitacional. (b) O trabalho realizado pelo campo elétrico  $\vec{E}$  sobre uma carga é igual à diminuição da energia potencial elétrica.

### Campo Potencial e Campo Elétrico

Colocando-se uma carga de prova positiva  $q_0$  na presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  e deixando-a livre, ela se acelera na direção de  $\vec{E}$ . Quando a energia cinética da carga aumenta, sua energia potencial diminui. A carga, portanto, se acelera em direção à região de menor energia potencial, da mesma forma que uma massa se acelera em direção a uma região de menor energia potencial gravitacional (Figura 23-1). Assim, conforme ilustrado na Figura 23-2,

O campo elétrico é orientado na direção em que o potencial diminui mais rapidamente.



**FIGURA 23-2**

O campo elétrico é orientado no sentido em que o potencial diminui mais rapidamente. Se uma carga de prova positiva  $q_0$  for colocada sob a ação de um campo elétrico, ela se acelerará no sentido de atuação do campo. Se ela for liberada a partir do repouso, sua energia cinética irá aumentar e sua energia potencial diminuirá.

Um campo elétrico é orientado no sentido positivo do eixo  $x$  e tem um módulo constante  $E = 10 \text{ N/C} = 10 \text{ V/m}$ . Determine o potencial em função de  $x$ , admitindo que  $V = 0$  em  $x = 0$ .

#### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Pela definição, a variação no potencial  $dV$  está relacionada ao deslocamento  $d\vec{l}$  e ao campo elétrico  $\vec{E}$ :  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E\hat{i} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = -E dx$
- Integre  $dV$ :  $V(x) = \int dV = \int -E dx = -Ex + C$
- A constante de integração  $C$  é obtida fazendo-se  $V = 0$  em  $x = 0$ :  $V(0) = C \Rightarrow 0 = C$
- Assim, o potencial vale:  $V(x) = -Ex = -(10 \text{ V/m})x$

**NOTA** O potencial é nulo em  $x = 0$  e diminui de 10 V a cada 1 m de aumento em  $x$ .

**EXERCÍCIO** Repita esse exemplo para o campo elétrico  $\vec{E} = (10 \text{ V/m}^2)x\hat{i}$  [Resposta  $V(x) = -(5 \text{ V/m}^2)x^2$ ]

### 23-3 Potencial Elétrico Devido a um Sistema de Cargas Puntiformes

O potencial elétrico a uma distância  $r$  de uma carga puntiforme  $q$  posicionada na origem pode ser calculado a partir do campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

Para um deslocamento infinitesimal  $d\vec{l}$ , em que a distância  $r$  representa a distância até o ponto do campo  $r_i$  (Figura 23-3), a variação no potencial é

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{l} = -\frac{kq}{r^2}dr$$

Integrando ao longo da trajetória desde um ponto de referência arbitrário até um ponto do campo também arbitrário, tem-se

$$\int_{r_{\text{ref}}}^P dV = - \int_{r_{\text{ref}}}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -kq \int_{r_{\text{ref}}}^{r_p} r^{-2} dr = -kq \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_{\text{ref}}}^{r_p} = \frac{kq}{r_p} - \frac{kq}{r_{\text{ref}}}$$

ou

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{\text{ref}}} \quad 23-7$$

#### POTENCIAL DEVIDO A UMA CARGA PUNTIFORME

onde  $r_p$  (a distância ao ponto do campo) foi substituída por  $r$ . O ponto de referência é escolhido de forma arbitrária, de modo que sua definição pode atender à condição de que o potencial possua a forma algébrica mais simples possível. A escolha do ponto de referência a uma grande distância da carga puntiforme ( $r_{\text{ref}} = \infty$ ) atende a essa condição. Assim,

$$V = \frac{kq}{r} \quad 23-8$$

#### POTENCIAL DE COULOMB

O potencial expresso pela Equação 23-8 é chamado de potencial de Coulomb. Ele pode ser positivo ou negativo, dependendo de a carga  $q$  ser positiva ou negativa.

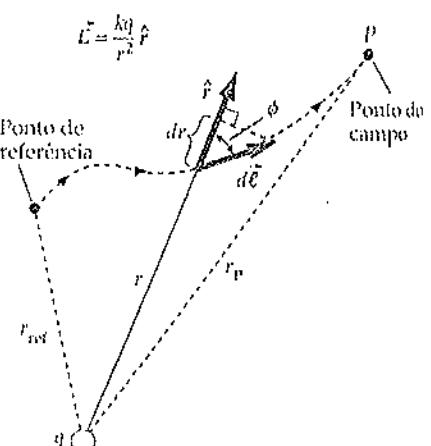
A energia potencial  $U$  de uma carga de prova  $q$  colocada a uma distância  $r$  da carga puntiforme vale:

$$U = q_0 V = \frac{kq_0 q}{r} \quad 23-9$$

#### ENERGIA POTENCIAL ELETROSTÁTICA DE UM SISTEMA COM DUAS CARGAS

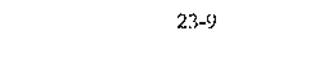
Esta é a energia potencial elétrica de um sistema com duas cargas em relação a  $U = 0$  a uma distância infinita. Liberando-se uma carga de prova  $q_0$  a partir do repouso a uma distância  $r$  de  $q$  (mantendo-se  $q$  fixa), a carga de prova se acelerará, afastando-se de  $q$  (admitindo que  $q$  possua o mesmo sinal de  $q_0$ ). A uma distância muito grande de  $q$  sua energia potencial será nula e, portanto, sua energia cinética será  $kq_0 q / r$ . Outra interpretação seria: ao mover-se uma carga de prova  $q_0$  inicialmente em repouso no infinito para um ponto a uma distância  $r$  de  $q$ , o trabalho a ser realizado contra o campo vale  $kq_0 q / r$  (Figura 23-4). O trabalho por unidade de carga é  $kq/r$ , isto é, o potencial elétrico no ponto  $P$  em relação ao potencial nulo no infinito.

A escolha da energia potencial eletrostática de duas cargas como sendo nula a uma distância de separação infinita é análoga à escolha feita no Capítulo 11, quando a energia potencial gravitacional de duas massas puntiformes era nula a uma separação infinita. Se duas cargas (ou duas massas) estão a uma distância de separação infinita, pode-se imaginá-las sem interação. Existe um certo apego físico ao se considerar a energia potencial nula para o caso de as partículas não interagirem entre si.



**FIGURA 23-3**

A variação em  $r$  é  $dr$ . Esta variação é a componente de  $d\ell$  na direção de  $\hat{r}$ . Pode-se perceber na figura que  $|d\ell| \cos \phi = dr$ . Uma vez que  $\hat{r} \cdot d\ell = |d\ell| \cos \phi$ , tem-se que  $dr = \hat{r} \cdot d\ell$ .



**FIGURA 23-4**

O trabalho necessário para trazer uma carga de prova  $q_0$  do infinito até um ponto  $P$  é  $kq_0 q / r$ , onde  $r$  é a distância de  $P$  até a carga  $q$ . O trabalho por unidade de carga é  $kq/r$ , o potencial elétrico no ponto  $P$  em relação ao potencial nulo no infinito. Se a carga de prova for abandonada no ponto  $P$ , o campo elétrico realizará um trabalho igual a  $kq_0 q / r$  sobre a carga para levá-la até o infinito.

- (a) Qual é o potencial elétrico a uma distância  $r = 0,529 \times 10^{-10}$  m de um próton? (Esta é a distância média entre um próton e um elétron no átomo de hidrogênio.) (b) Qual é a energia potencial elétrica do elétron e do próton a essa distância de separação?

#### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

- (a) Utilize a expressão  $V = kq/r$  para calcular o potencial  $V$  devido ao próton:

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{ke}{r} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{0,529 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ = 27,2 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{C} = \boxed{27,2 \text{ V}}$$

- (b) Utilize a expressão  $U = q_0V$ , com  $q_0 = -e$ , para calcular a energia potencial:

$$U = q_0V = (-e)(27,2 \text{ V}) = \boxed{-27,2 \text{ eV}}$$

**NOTAS** Se o elétron estivesse em repouso a essa distância do próton seriam necessários no mínimo 27,2 eV para removê-lo do átomo. Entretanto, o elétron possui uma energia cinética de 13,6 eV, logo, sua energia total no átomo é de 13,6 eV - 27,2 eV = -13,6 eV. Assim, a energia mínima necessária para remover o elétron do átomo é de 13,6 eV. Essa energia é chamada de energia de ionização.

**EXERCÍCIO** Qual é o valor da energia potencial do elétron e do próton no Exemplo 23-2 em unidades do Sistema Internacional (SI)? (Resposta  $-4,35 \times 10^{-18}$  J)

Na fissão nuclear, um núcleo de urânio 235 capture um nêutron e se divide em dois núcleos mais leves. Algumas vezes os dois produtos da fissão são um núcleo de bário (carga de  $56e$ ) e um núcleo de criptônio (carga de  $36e$ ). Admita que imediatamente após a divisão esses núcleos se tornem cargas puntiformes positivas separadas de uma distância  $r = 14,6 \times 10^{-15}$  m. Calcule a energia potencial desse sistema de duas cargas em elétrons-volt.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A energia potencial das duas cargas puntiformes separadas de uma distância  $r$  é  $U = kq_1q_2/r$ . Para obter essa energia em elétrons-volt, calcula-se a energia potencial devida a uma das cargas,  $kq_1/r$ , em volts, e multiplica-se o resultado pela outra carga.

1. A Equação 23-9 fornece a energia potencial das duas cargas:
2. Coloque um dos fatores  $e$  em evidência e substitua os valores conhecidos:

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{k(56e)(36e)}{r} \\ U = \frac{k(56e)(36e)}{r} = e \frac{56 \cdot 36 ke}{r} \\ = e \frac{56 \cdot 36 \cdot (8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{14,6 \times 10^{-15} \text{ m}} \\ = e(1,99 \times 10^8 \text{ V}) = \boxed{199 \text{ MeV}}$$

**NOTAS** A distância de separação  $r$  foi escolhida como sendo a soma dos raios dos dois núcleos. Após a fissão, os dois núcleos se repelem devido à repulsão eletrostática entre eles. A energia potencial de 199 MeV é convertida em energia cinética  $e$ , como resultado da colisão com os átomos vizinhos, em energia térmica. Dois

ou três nêutrons também são liberados durante o processo de fissão. Em uma reação em cadeia, um ou mais desses nêutrons produzem a fissão de outros núcleos de urânio. A energia média liberada em uma reação em cadeia desse tipo é de cerca de 200 MeV por núcleo, conforme calculado neste exemplo.

O potencial em um ponto qualquer devido a um conjunto de cargas puntiformes é igual à soma dos potenciais devidos a cada uma das cargas separadamente. (Esta é uma conclusão proveniente do princípio da superposição de efeitos aplicado aos campos elétricos.) O potencial devido a um sistema de cargas puntiformes  $q_i$  é, assim, expresso por

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \quad 23-10$$

#### POTENCIAL DEVIDO A UM SISTEMA DE CARGAS PUNTIFORMES

onde a soma se estende a todas as cargas e  $r_i$  é a distância da  $i$ -ésima carga até o ponto do campo em relação ao qual o potencial deve ser calculado.



Duas cargas puntiformes de  $+5 \text{ nC}$  estão sobre o eixo  $x$ , uma na origem e outra em  $x = 8 \text{ cm}$ . Determine o potencial (a) no ponto  $P_1$  sobre o eixo  $x$  em  $x = 4 \text{ cm}$  e (b) no ponto  $P_2$  sobre o eixo  $y$  em  $y = 6 \text{ cm}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** As duas cargas puntiformes positivas posicionadas sobre o eixo  $x$  são mostradas na Figura 23-5, e o potencial deve ser obtido nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

- (a) 1. Utilize a Equação 23-10 para escrever o potencial  $V$  em função das distâncias  $r_1$  e  $r_2$  até as cargas:
- 2. O ponto  $P_1$  dista 4 cm de cada uma das cargas que, por sua vez, são idênticas:
- 3. Utilize essas informações para determinar o potencial no ponto  $P_1$ :

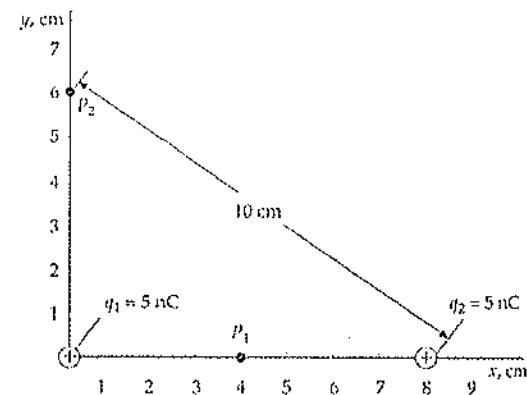


FIGURA 23-5

$$\begin{aligned} V &= \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} \\ r_1 &= r_2 = r = 0,04 \text{ m} \\ q_1 &= q_2 = q = 5 \times 10^{-9} \text{ C} \\ V &= \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{2kq}{r} \\ &= \frac{2 \times (8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,04 \text{ m}} \\ &= 2250 \text{ V} = 2,25 \text{ kV} \end{aligned}$$

- (b) O ponto  $P_2$  está a uma distância de 6 cm de uma das cargas e a 10 cm da outra. Utilize essas informações para determinar o potencial no ponto  $P_2$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,06 \text{ m}} \\ &\quad + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,10 \text{ m}} \\ &= 749 \text{ V} + 450 \text{ V} = 1,20 \text{ kV} \end{aligned}$$

**NOTAS** Observe que no item (a) o campo elétrico é nulo no ponto médio entre as cargas, porém o potencial não. É necessário realizar trabalho para trazer uma carga de prova muito afastada para esse ponto, pois o campo elétrico é nulo apenas na posição final.

Na Figura 23-6, uma carga puntiforme  $q_1$  é posicionada na origem e uma segunda carga puntiforme  $q_2$  é colocada sobre o eixo  $x$  em  $x = a$ . Determine o potencial em um ponto qualquer sobre o eixo  $x$ .

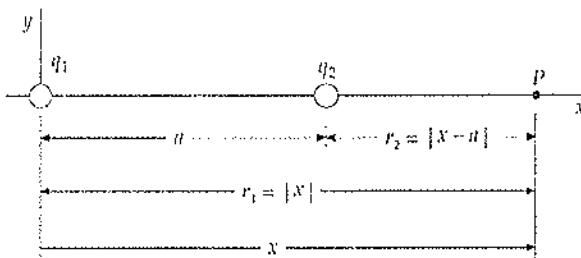


FIGURA 23-6

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O potencial total é igual à soma dos potenciais devidos a cada uma das cargas separadamente. A distância  $r_1$  de  $q_1$  até um ponto  $P$  arbitrário do campo é  $|x|$ , e a distância  $r_2$  de  $q_2$  até  $P$  é  $|x - a|$ .

Escreva o potencial como uma função das distâncias até as duas cargas:

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{kq_1}{|x|} + \frac{kq_2}{|x - a|}$$

$$x \neq 0, \quad x \neq a$$

**NOTA** A Figura 23-7 mostra o potencial  $V$  em função de  $x$  para  $q_1 = q_2 > 0$ . O potencial se torna infinito na posição das cargas.

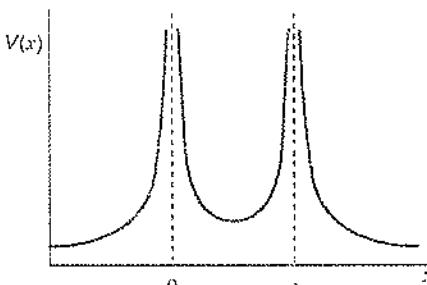


FIGURA 23-7

Um dipolo elétrico consiste em uma carga positiva  $+q$  sobre o eixo  $x$  em  $x = +a$  e uma carga negativa  $-q$  sobre o eixo  $x$  em  $x = -a$ , conforme mostrado na Figura 23-8. Determine o potencial no eixo  $x$  para  $x \gg a$  em função do momento do dipolo  $p = 2qa$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O potencial é igual à soma dos potenciais de cada carga. Para  $x > a$ , a distância do ponto  $P$  do campo até a carga positiva é  $x - a$  e a distância até a carga negativa é  $x + a$ .

- Para  $x > a$ , o potencial devido às duas cargas vale:

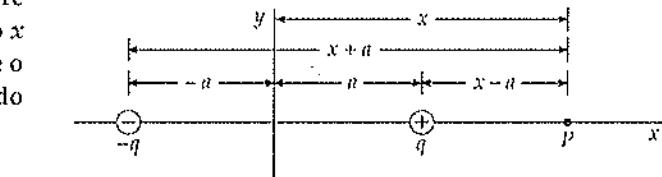


FIGURA 23-8

$$V = \frac{kq}{x - a} + \frac{k(-q)}{x + a} = \frac{2kqa}{x^2 - a^2}$$

2. Para  $x \gg a$ , pode-se desprezar  $a^2$  em comparação com  $x^2$  no denominador. Assim, tem-se:
- $$V \approx \frac{2kqa}{x^2} = \frac{k\rho}{x^2}, \quad x \gg a$$

23-11

**NOTA** Longe do dipolo, o potencial diminui com  $1/r^2$  (diferentemente do potencial de uma carga puntiforme, que diminui com  $1/r$ ).

### 23-3 Cálculo do Campo Elétrico a Partir do Potencial

Conhecendo-se o potencial, pode-se utilizá-lo para calcular o campo elétrico. Considere um pequeno deslocamento  $d\vec{l}$  em um campo elétrico arbitrário  $\vec{E}$ . A variação no potencial pode ser expressa como

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \cos \theta d\ell = -E_x d\ell \quad 23-12$$

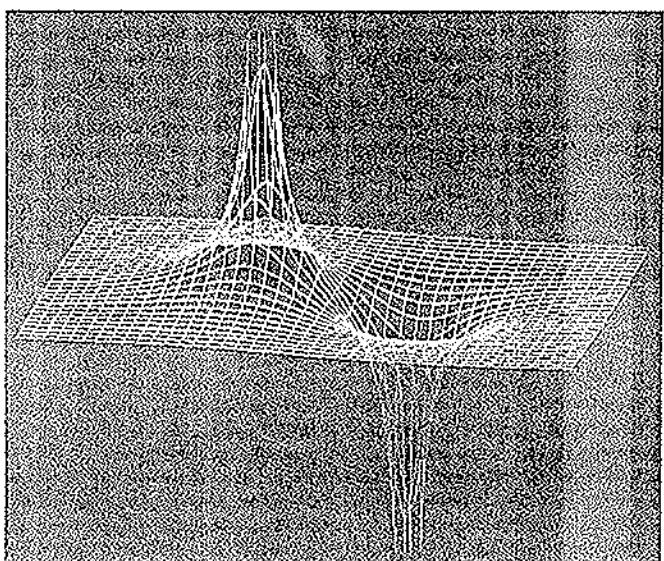
onde  $E_x = E \cos \theta$  é a componente de  $\vec{E}$  na direção de  $d\vec{l}$ . Logo,

$$E_x = -\frac{dV}{d\ell} \quad 23-13$$

Se o deslocamento  $d\vec{l}$  for perpendicular ao campo elétrico,  $dV = 0$  (o potencial não varia). Para um determinado valor de  $d\vec{l}$ , o maior aumento em  $V$  ocorre quando o deslocamento  $d\vec{l}$  estiver na mesma direção de  $\vec{E}$ . Um vetor orientado na direção da maior variação de uma função escalar e que tenha um módulo igual à derivada daquela função em relação à distância naquela direção é chamado de gradiente da função. Assim, o campo elétrico  $\vec{E}$  é igual ao negativo do gradiente do potencial  $V$ . As linhas do campo elétrico são orientadas na direção da maior taxa de decréscimo da função potencial.

Se o potencial  $V$  depender apenas de  $x$ , não haverá variação em  $V$  para deslocamentos nas direções  $y$  ou  $z$ , logo  $E_y$  e  $E_z$  serão nulos. Para um deslocamento na direção  $x$ ,  $d\vec{l} = dx\hat{i}$ , e a Equação 23-13 fica

$$dV(x) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot dx\hat{i} = -\vec{E} \cdot \hat{i}dx = -E_x dx$$



Potencial eletrostático no plano de um dipolo. O potencial devido a cada uma das cargas é proporcional à carga e inversamente proporcional à distância da carga. (Veja encarte em cores.)

Assim,

$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx} \quad 23-14$$

Analogamente, para uma distribuição de carga com simetria esférica, o potencial é função apenas da distância radial  $r$ . Os deslocamentos perpendiculares à direção radial não propiciam qualquer variação em  $V(r)$ , logo o campo elétrico deve ser radial. Um deslocamento na direção radial é representado matematicamente por  $d\hat{r} = dr\hat{r}$ . Assim, a Equação 23-12 fica

$$dV(r) = -\vec{E} \cdot d\hat{r} = -\vec{E} \cdot dr\hat{r} = -E_r dr$$

e

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \quad 23-15$$

Conhecido o potencial ou o campo elétrico em uma determinada região do espaço, pode-se utilizar um para calcular o outro. O potencial é geralmente mais fácil de ser calculado, pois é uma função escalar, enquanto o campo elétrico é uma função vetorial. Note que não é possível calcular  $\vec{E}$  se o potencial  $V$  for conhecido apenas em um único ponto — deve-se conhecer  $V$  em uma região do espaço para que seja calculada a derivada necessária à obtenção de  $\vec{E}$ .

Determine o campo elétrico para a função potencial elétrico  $V$  expressa por  $V = 100 \text{ V} - (25 \text{ V/m})x$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Essa função potencial depende apenas de  $x$ . O campo elétrico é obtido pela Equação 23-14:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{i} = \boxed{+(25 \text{ V/m})\hat{i}}$$

**NOTAS** Esse campo elétrico é uniforme e atua na direção  $x$ . Note que a constante 100 V na expressão de  $V(x)$  não produz qualquer efeito no campo elétrico. O campo elétrico não depende da escolha da referência nula para a função potencial.

**EXERCÍCIO** (a) Em que ponto  $V$  é igual a zero nesse exemplo? (b) Escreva a função potencial correspondente ao mesmo campo elétrico com  $V = 0$  em  $x = 0$  [Respostas (a)  $x = 4 \text{ m}$  e (b)  $V = -(25 \text{ V/m})x$ ]

### \*Relação Geral entre $\vec{E}$ e $V$

Utilizando a notação vetorial, o gradiente de  $V$  pode ser escrito tanto como  $\vec{\nabla}V$  quanto como  $\vec{\nabla}V$ . Assim,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad 23-16$$

Em geral, a função potencial pode depender de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As componentes retangulares do campo elétrico estão relacionadas às derivadas parciais do potencial em relação a  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , mantidas as demais variáveis constantes. Por exemplo, a componente  $x$  do campo elétrico é calculada como

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad 23-17a$$

Analogamente, as componentes  $y$  e  $z$  do campo elétrico estão relacionadas ao potencial pelas derivadas

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad 23-17b$$

e

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad 23-17c$$

Assim, a Equação 23-16 em coordenadas retangulares fica

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad 23-18$$

### 23-4 Cálculo do Potencial $V$ para Distribuições Contínuas de Carga

O potencial devido a uma distribuição contínua de carga pode ser calculado adotando-se um elemento de carga  $dq$ , que pode ser tratado como uma carga puntiforme, e utilizando o princípio da superposição. Transformando o somatório da Equação 23-10 em uma integral, tem-se

$$V = \int \frac{k dq}{r} \quad 23-19$$

#### POTENCIAL DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA

Essa equação estabelece que  $V = 0$  a uma distância infinita das cargas, logo não pode ser utilizada quando existe alguma carga no infinito, como é o caso das distribuições idealizadas de carga do tipo segmento de reta infinito carregado ou plano infinito carregado.

#### Potencial $V$ no Eixo de um Anel Carregado

A Figura 23-9 mostra um anel uniformemente carregado de raio  $a$  e carga total  $Q$ . A distância de um elemento de carga  $dq$  até o ponto  $P$  do campo sobre o eixo do anel é  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Uma vez que essa distância é a mesma para todos os elementos de carga do anel, pode-se removê-la do integrando da Equação 23-19. O potencial no ponto  $P$  devido ao anel carregado será, portanto,

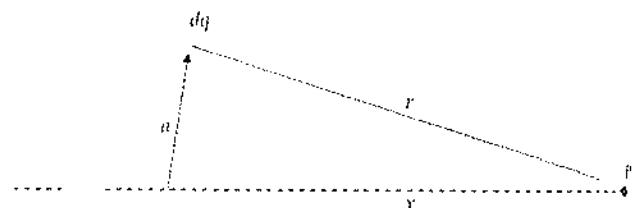
$$V = \int_0^Q \frac{k dq}{r} = \frac{k}{r} \int_0^Q dq = \frac{kQ}{r}$$

ou

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{kQ}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2/x^2)}} \quad 23-20$$

#### POTENCIAL NO EIXO DE UM ANEL CARREGADO

Note que quando  $|x|$  é muito maior do que  $a$ , o potencial tende a  $kQ/|x|$ , o mesmo de uma carga puntiforme  $Q$  na origem.



**FIGURA 23-9**  
Geometria para o cálculo do potencial elétrico em um ponto sobre o eixo de um anel carregado de raio  $a$ .

**EXEMPLO 23-3**

Tente resolver este exemplo sozinho

Um anel com 4 cm de raio está apoiado no plano  $xy$  com seu centro na origem. O anel possui uma carga uniforme de 8 nC. Uma pequena partícula de massa  $m = 6 \text{ mg} = 6 \times 10^{-6} \text{ kg}$  e carga  $q_0 = 5 \text{ nC}$  é colocada em  $x = 3 \text{ cm}$  e liberada. Determine a velocidade da partícula quando estiver a uma grande distância do anel. Admita que os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A partícula é repelida pelo anel. Ao mover-se ao longo do eixo  $x$ , sua energia potencial diminui e sua energia cinética aumenta. Utilize a conservação da energia mecânica para obter a energia cinética da partícula quando estiver a uma grande distância do anel. A velocidade final é determinada através da energia cinética final.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

**Etapas**

1. Escreva a relação entre a energia cinética e a velocidade.
2. Utilize  $U = q_0 V$ , com  $V$  expresso pela Equação 23-20, para representar a energia potencial da carga puntiforme  $q_0$  em função de sua distância  $x$  ao centro do anel.
3. Utilize a conservação da energia mecânica para relacionar a velocidade à posição  $x$  e resolva para a velocidade quando  $x$  tende a infinito.

**Respostas**

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = q_0 V = \frac{kq_0Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$\frac{kq_0Q}{\sqrt{x_i^2 + a^2}} + \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{kq_0Q}{\sqrt{x_f^2 + a^2}} + \frac{1}{2}mv_f^2$$

assim

$$v_f = 1,55 \text{ m/s}$$

**EXERCÍCIO** Qual é a energia potencial da partícula quando passa por  $x = 9 \text{ m}$ ? (Resposta  $3,65 \times 10^{-6} \text{ J}$ )

### Potencial Elétrico $V$ no Eixo de um Disco Uniformemente Carregado

Pode-se utilizar os resultados para o potencial no eixo de um anel carregado para calcular o potencial no eixo de um disco uniformemente carregado.

Determine o potencial no eixo de um disco de raio  $R$  que tem uma carga total  $Q$  distribuída uniformemente sobre sua superfície.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Considerando que o eixo do disco seja o eixo  $x$ , trata-se o disco como um conjunto de anéis carregados. O anel de raio  $a$  e espessura  $da$  mostrado na Figura 23-10 tem uma área de  $2\pi a da$  e sua carga é  $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi a da$ , onde  $\sigma = Q/(\pi R^2)$  é a densidade superficial de carga. O potencial devido à carga desse anel no ponto  $P$  é dado pela Equação 23-20. Assim, pode-se integrar de  $a = 0$  até  $a = R$  para determinar o potencial total devido à carga no disco.

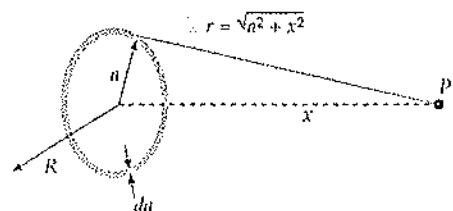


FIGURA 23-10

1. Escreva o potencial  $dV$  no ponto  $P$  devi-  
do à carga do anel de raio  $a$ :

2. Integre de  $a = 0$  até  $a = R$ :

3. A integral é da forma  $\int u^n du$ , com  $u = x^2 + a^2$ ,  $du = 2xdx$  e  $n = -\frac{1}{2}$ . Quando  $a = 0$ ,  $u = x^2$  e quando  $a = R$ ,  $u = x^2 + R^2$ :

4. Arrume esse resultado para obter  $V$ :

$$dV = \frac{k dq}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{k\sigma 2\pi a da}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi a da}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = k\sigma\pi \int_0^R (x^2 + a^2)^{-1/2} 2a da$$

$$V = k\sigma\pi \int_{x^2+0^2}^{x^2+R^2} u^{-1/2} du = k\sigma\pi \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} = 2k\sigma\pi (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2})$$

$$V = \boxed{2\pi k\sigma |x| \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right)}$$

**VERIFICAÇÃO** Para  $|x| > R$ , a função potencial  $V$  deveria tender àquela de uma carga puntiforme  $Q$  na origem. Espera-se que para um alto módulo de  $x$ ,  $V \approx kQ/|x|$ . Para aproximar o resultado para  $|x| > R$ , utiliza-se a expansão polinomial:

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \dots$$

Assim,

$$V \approx 2\pi k\sigma |x| \left[ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \dots\right) - 1 \right] = \frac{k(\sigma\pi R^2)}{|x|} = \frac{kQ}{|x|}$$

Pelo Exemplo 23-9, verifica-se que o potencial no eixo de um disco uniformemente carregado é

$$V = 2\pi k\sigma |x| \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right) \quad 23-21$$

#### POTENCIAL NO EIXO DE UM DISCO UNIFORMEMENTE CARREGADO

Calcule o campo elétrico no eixo de (a) um anel uniformemente carregado e (b) um disco uniformemente carregado, utilizando as funções potenciais desenvolvidas anteriormente para esses casos.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Utilizando a expressão  $E_x = -dV/dx$ , pode-se calcular  $E_x$  por derivação. Todavia, não é possível calcular  $E_y$  ou  $E_z$  por derivação, uma vez que a variação de  $V$  nessas direções não é conhecida. Entretanto, a simetria das distribuições das cargas estabelece que no eixo  $x$ ,  $E_y = E_z = 0$ .

- (a) 1. Escreva a Equação 23-20 para o potencial no eixo de um anel uniformemente carregado:

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \approx kQ(x^2 + a^2)^{-1/2}$$

2. Calcule  $-dV/dx$  para obter  $E_x$ :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = +\frac{1}{2} kQ(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x) = \boxed{\frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}}$$

- (b) 1. Escreva a Equação 23-21 para o potencial no eixo de um disco uniformemente carregado:

$$V = 2\pi k\sigma [(x^2 + a^2)^{1/2} - |x|]$$

2. Calcule  $-dV/dx$  para obter  $E_x$ :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\pi k\sigma \left[ \frac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-1/2} 2x - \frac{d|x|}{dx} \right]$$

3. Calcule  $d|x|/dx$ . Esta é a inclinação da curva de  $|x|$  em função de  $x$  (veja a Figura 23-11):

$$\frac{d|x|}{dx} = +1, \quad x > 0; \quad \frac{d|x|}{dx} = -1, \quad x < 0$$

4. A substituição de  $d|x|/dx$  no resultado da etapa 2 do item (b) fornece:

$$E_x = -2\pi k\sigma \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1 \right), \quad x > 0$$

e

$$E_x = -2\pi k\sigma \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + 1 \right), \quad x < 0$$

5. Uma ligeira arrumação coloca essas expressões em uma forma que revela mais claramente que  $E_x$  é uma função ímpar (Figura 23-12). [Uma função  $f$  é ímpar se  $f(-x) = -f(x)$  para qualquer valor de  $x$ ]:

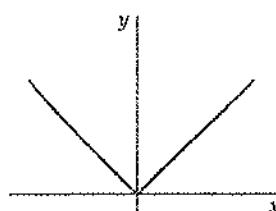


FIGURA 23-11  
Gráfico de  $y \approx |x|$ .

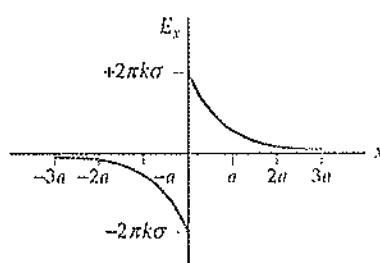


FIGURA 23-12

**NOTA** Os resultados dos itens (a) e (b) são idênticos aos das Equações 22-10 e 22-11, que foram calculados diretamente a partir da lei de Coulomb.

### Potencial Elétrico $V$ devido a um Plano Infinito de Cargas Elétricas

Aumentando-se significativamente o raio  $R$  de um disco, este se aproxima da idealização de um plano infinito. Quando  $R$  tende ao infinito, a função potencial (Equação 23-21) tende ao infinito. Entretanto, a Equação 23-21 foi obtida a partir da Equação 23-19, que admite que  $V = 0$  no infinito, logo essa equação não pode ser utilizada. Para distribuições infinitas de cargas, deve-se admitir  $V = 0$  em algum ponto a uma distância finita, e não no infinito. Para esses casos obtém-se, inicialmente, o campo elétrico  $\vec{E}$  (por integração direta ou pela lei de Gauss) e, em seguida, calcula-se a função potencial  $V$  a partir de sua definição  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Para um plano infinito com densidade de carga  $\sigma$  uniforme no plano  $yz$ , o campo elétrico para valores positivos de  $x$  é expresso por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} = 2\pi k\sigma \hat{i}$$

Assim, o potencial vale

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(2\pi k\sigma \hat{i}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -2\pi k\sigma dx$$

onde foi utilizada a relação  $d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ . Integrando, obtém-se

$$V = -2\pi k\sigma x + V_0$$

onde a constante arbitrária de integração  $V_0$  é o potencial em  $x = 0$ . Note que o

potencial diminui com a distância ao plano e tende a  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Portanto, em  $x \rightarrow +\infty$  o potencial tende a  $-\infty$ . Para valores negativos de  $x$ , o campo elétrico vale

$$\vec{E} = -2\pi k\sigma \hat{i}$$

logo,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = +2\pi k\sigma dx$$

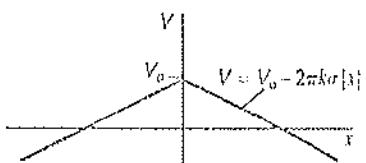
e o potencial é

$$V = V_0 + 2\pi k\sigma x$$

Uma vez que  $x$  é negativo, o potencial novamente diminui com a distância ao plano e tende a  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ . Tanto para valores positivos quanto negativos de  $x$  o potencial pode ser expresso como

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma|x| \quad 23-22$$

#### POTENCIAL NAS PROXIMIDADES DE UM PLANO INFINITO DE CARGAS



**FIGURA 23-13**

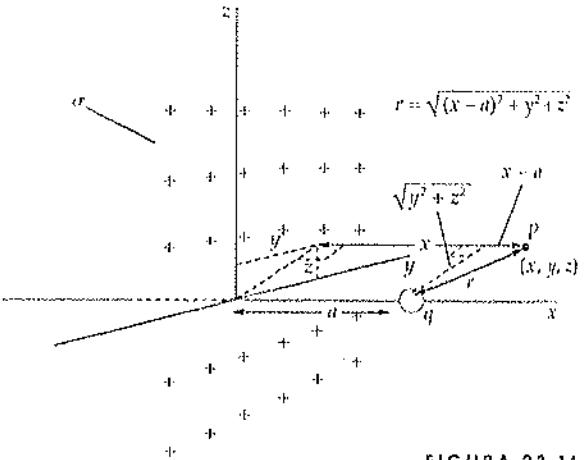
Gráfico do potencial  $V$  em função de  $x$  para um plano infinito de cargas no plano  $xy$ . Note que o potencial é contínuo em  $x = 0$ , embora o campo elétrico  $E_x = dV/dx$  não o seja.

Um plano infinito com densidade de carga  $\sigma$  uniforme é posicionado na coordenada  $x = 0$ , e uma carga puntiforme  $q$  é posicionada sobre o eixo  $x$  na coordenada  $x = a$  (Figura 23-14). Determine o potencial em um ponto  $P$  situado a uma distância  $r$  da carga puntiforme.

#### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Nesse caso pode-se utilizar o princípio da superposição de efeitos. O potencial total  $V$  é igual à soma dos potenciais individuais devidos ao plano e à carga puntiforme. Deve-se incluir uma constante arbitrária na expressão de  $V$ , que é determinada pela escolha do ponto de referência, onde  $V = 0$ . A posição do ponto de referência é escolhida livremente, não podendo ser em  $x \rightarrow \pm\infty$  e  $x = a$  sobre o eixo  $x$ . Para a solução aqui apresentada, a origem foi escolhida para  $V = 0$ .

- O potencial devido ao plano carregado é calculado pela Equação 23-22:
- A Equação 23-7 fornece o potencial devido a uma carga puntiforme. A distância  $r$  da carga puntiforme até o ponto do campo é igual a  $\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$ :
- Os resultados anteriores podem ser somados para se obter o potencial total  $V$ . Uma constante é incorporada à soma para que possa ser considerado o potencial nulo no ponto de referência:
- Atribui-se o valor  $V = 0$  na origem. Matematicamente, impõe-se a condição  $V = 0$  em  $x = y = z = 0$  e calcula-se a constante  $C$ :



**FIGURA 23-14**

$$V_{\text{plano}} = -2\pi k\sigma|x|$$

$$V_{\text{ponto}} = \frac{kq}{r} = \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$V = V_{\text{plano}} + V_{\text{ponto}}$$

$$= -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + C$$

$$0 = 0 + \frac{kq}{a} + C, \text{ assim } C = -\frac{kq}{a}$$

5. Substitua a constante C da etapa 3 pelo valor  $-kq/a$ :

$$V = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{kq}{a}$$

$$= -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{r} - \frac{kq}{a}$$

**NOTA** Essa resposta não é única. O potencial poderia ter sido especificado em qualquer outro ponto, desde que não situado em  $x = a$  ou em  $x \rightarrow \pm\infty$ .

### Potencial V Interno e Externo a uma Casca Esférica Carregada

Determina-se, agora, o potencial devido a uma casca esférica fina de raio  $R$  carregada com uma carga  $Q$  uniformemente distribuída em sua superfície. O interesse está na determinação do potencial em todos os pontos internos, externos e sobre a casca. Diferentemente do plano infinito carregado, essa distribuição de carga é confinada a uma região finita do espaço, e assim em princípio seria possível calcular o potencial por integração direta da Equação 23-19. Entretanto, existe uma forma mais simples de se obter esse resultado. Uma vez que o campo elétrico para essa distribuição de carga pode ser facilmente obtido a partir da lei de Gauss, o potencial será calculado através do campo elétrico utilizando a equação  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

Externamente à casca esférica, o campo elétrico é radial e igual ao caso de uma carga puntiforme  $Q$  posicionada na origem:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

A variação no potencial para um deslocamento  $d\vec{r}$  externo à casca será, portanto,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

O produto  $\hat{r} \cdot d\vec{l}$  é igual a  $dr$  (a componente de  $d\vec{l}$  na direção de  $\hat{r}$ ). Integrando ao longo de uma trajetória desde o ponto de referência no infinito, tem-se

$$V_p = - \int_{\infty}^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{r_p} \frac{kQ}{r^2} dr = -kQ \int_{\infty}^{r_p} r^{-2} dr = \frac{kQ}{r_p}$$

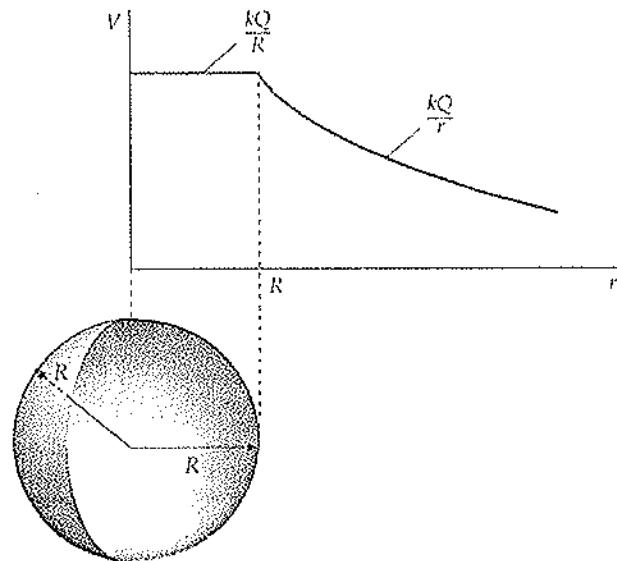
onde  $P$  é um ponto arbitrário do campo na região  $r \geq R$ , e  $r_p$  é a distância desde o centro da casca até o ponto  $P$  do campo. Admite-se que o potencial seja nulo no infinito. Uma vez que  $P$  é um ponto arbitrário, pode-se considerar  $r_p = r$  e escrever

$$V = \frac{kQ}{r}, \quad r \geq R$$

No interior da casca esférica, o campo elétrico é nulo em qualquer ponto. Novamente, integrando desde o ponto de referência no infinito, obtém-se

$$V_p = - \int_{\infty}^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^R \frac{kQ}{r^2} dr - \int_R^{r_p} (0) dr = \frac{kQ}{R}$$

onde  $P$  é um ponto arbitrário do campo na região  $r < R$  e  $r_p$  é a distância do centro da casca até o ponto  $P$  do campo. O potencial em um ponto arbitrário no



**FIGURA 23-15**  
Potencial elétrico de uma casca esférica de raio  $R$  carregada uniformemente em função da distância  $r$  ao centro da casca. No interior da casca, o potencial tem o valor constante  $kQ/R$ . Externamente à casca, o potencial é idêntico ao de uma carga puntiforme posicionada no centro da esfera.

interior da casca é  $kQ/R$ , onde  $R$  é o raio da casca. No interior da casca o potencial  $V$  é o mesmo em qualquer ponto. Ele representa o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga de prova do infinito até a casca. Não é necessário qualquer trabalho adicional para trazê-la da casca até um ponto qualquer em seu interior. Assim,

$$V = \frac{kQ}{r}, \quad r \geq R$$

$$V = \frac{kQ}{R}, \quad r \leq R \quad 23-23$$

#### POTENCIAL DEVIDO A UMA CASCA ESFÉRICA

O comportamento dessa função potencial é mostrado na Figura 23-15.

- 0** Um erro comum é imaginar que o potencial deve ser nulo no interior de uma casca esférica porque o campo elétrico é nulo naquela região. Uma região de campo elétrico nulo significa, simplesmente, que o potencial é uniforme. Considere uma casca esférica com um pequeno furo, de modo que seja possível mover uma carga de prova para dentro e para fora, conforme a conveniência. Ao mover-se a carga de prova de um ponto no infinito até a casca, o trabalho por unidade de carga a ser realizado é  $kQ/R$ . No interior da casca não há qualquer campo elétrico, assim nenhuma energia é gasta para mover a carga de prova em seu interior. O trabalho total por unidade de carga gasto para trazer a carga de prova do infinito até um ponto qualquer no interior da casca é exatamente igual ao trabalho por unidade de carga gasto para trazer a carga de prova até a casca de raio  $R$ , que é igual a  $kQ/R$ . O potencial é, portanto,  $kQ/R$  em qualquer ponto no interior da casca.

**EXERCÍCIO** Qual é o potencial de uma casca esférica com 10 cm de raio que tem uma carga de  $6 \mu\text{C}$ ? (Resposta  $5,39 \times 10^5 \text{ V} = 5,39 \text{ kV}$ )

#### EXEMPLO 23-12

#### DIFERENÇA DE POTENCIAL ENTRE O INTERIOR E O EXTERIOR DE UMA ESFERA MACIÇA

Tente resolver este exemplo sozinho

No desenvolvimento de um modelo, um próton é considerado como uma esfera maciça com densidade volumétrica de carga uniforme, raio  $R$  e carga total  $Q$ . O campo elétrico no interior de uma esfera é dado pela Equação 22-26b,

$$E_r = k \frac{Q}{R^3} r$$

Determine o potencial  $V$  interno e externo à esfera.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Externamente à esfera a carga se comporta como uma carga puntiforme, logo o potencial pode ser calculado como  $V = kQ/r$ . No interior da esfera, o potencial  $V$  pode ser obtido integrando-se  $dV = -E \cdot d\ell$ .

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

### Etapas

1. Externamente à esfera, o campo elétrico é idêntico àquele de uma carga puntiforme. Considerando o potencial nulo no infinito, ele também o será para uma carga puntiforme.

2. Para  $r \leq R$ , determine  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ .

3. Calcule a integral definida utilizando a expressão obtida na etapa 2. Determine a variação no potencial desde o infinito até um ponto  $P$  arbitrário do campo na região em que  $r_p < R$ , onde  $r_p$  é a distância do ponto  $P$  em relação ao centro da esfera:

4. Uma vez que a posição do ponto do campo é arbitrária, expresse o resultado em função de  $r = r_p$ :

### Respostas

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r}, & r \geq R \\ \end{cases}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E_r dr = -\frac{kQ}{R^3} r dr, \quad r \leq R$$

$$\begin{aligned} V_p &= - \int_{\infty}^{r_p} E_r dr = - \int_{\infty}^R \frac{kQ}{r^2} dr - \int_R^{r_p} \frac{kQ}{R^3} r dr \\ &= \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R^3} (r_p^2 - R^2) = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r_p^2}{R^2} \right), \quad r \leq R \end{aligned}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R \\ \frac{kQ}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

**VERIFICAÇÃO** A substituição de  $r$  por  $R$  no resultado da etapa 4 fornece  $V(R) = kQ/R$  conforme requerido. Em  $r = 0$ ,  $V(0) = 3kQ/2R = 1,5kQ/R$ , que é maior do que  $V(R)$ , conforme esperado, uma vez que o campo elétrico tem sentido radial positivo para  $r < R$  e, portanto, um trabalho positivo deve ser realizado para mover uma carga de prova positiva contra o campo desde  $r = R$  até  $r = 0$ .

**NOTAS** A Figura 23-16 mostra o campo  $V(r)$  em função de  $r$ . Note que tanto  $V(r)$  quanto  $E_r = -dV/dr$  são funções contínuas para qualquer posição.

**EXERCÍCIO** Qual seria a expressão para  $V(r)$  se fosse admitido que  $V(R) = 0$ ? [Resposta  $V(r) = kQ/r - kQ/R$  para  $r \geq R$ ;  $V(r) = \frac{1}{2}(kQ/R)(1 - r^2/R^2)$  para  $r \leq R$ ]

### Potencial $V$ Devido a um Segmento de Reta Infinito Carregado

Calcula-se agora o potencial devido a um segmento de reta infinito carregado uniformemente. Considera-se que a carga por unidade de comprimento seja  $\lambda$ . Analogamente ao plano infinito carregado, essa distribuição de carga não é confinada a uma região finita do espaço, logo em princípio não se pode calcular o potencial diretamente pela integração de  $dV = kdq/r$  (Equação 23-19). Ao invés disso, o potencial será obtido pela integração direta do campo elétrico. Inicialmente, deve-se obter o campo elétrico de um segmento de reta infinito carregado uniformemente. O campo, uma distribuição de carga simétrica de forma cilíndrica como esta, pode ser obtido utilizando a lei de Gauss ( $\phi_{res} = 4\pi kQ_{int}$ ). O fluxo que passa através de uma superfície gaussiana coaxial com forma cilíndrica de raio  $R$  e comprimento  $L$  é  $E_R(2\pi RL)$ , e a carga total interna à superfície é  $\lambda L$ . Substituindo essas expressões na equação da lei de Gauss e explicitando  $E_R$ , tem-se  $E_R = 2k\lambda/R$ . A variação no potencial para um deslocamento  $d\vec{\ell}$  é dada por

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E_R \hat{R} \cdot d\vec{\ell}$$

onde  $\hat{R}$  é um vetor na direção radial. O produto  $\hat{R} \cdot d\vec{\ell}$  é igual a  $dR$  (a componente de  $d\vec{\ell}$  na direção de  $\hat{R}$ ), logo  $dV = -E_R dR$ . A integração desde um ponto

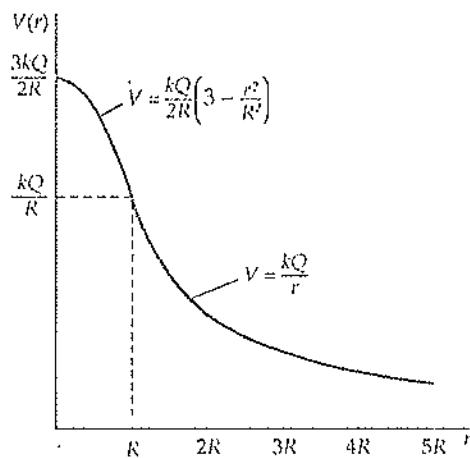


FIGURA 23-16

de referência arbitrário até um ponto  $P$  arbitrário do campo (Figura 23-17) fornece

$$V_p - V_{ref} = - \int_{R_{ref}}^{R_p} E_R dR = -2k\lambda \int_{R_{ref}}^{R_p} \frac{dR}{R} = -2k\lambda \ln \frac{R_p}{R_{ref}}$$

onde  $R_p$  e  $R_{ref}$  são as distâncias radiais desde o segmento de reta carregado até o ponto  $P$  do campo e até o ponto de referência, respectivamente. Por conveniência, admite-se que o potencial seja nulo no ponto de referência ( $V_{ref} = 0$ ). Não se pode adotar  $R_{ref}$  como sendo nulo porque  $\ln(0) = -\infty$ , e também não é possível adotar-se  $R_{ref}$  como sendo infinito porque  $\ln(\infty) = +\infty$ . Entretanto, qualquer outra escolha no intervalo  $0 < R_{ref} < \infty$  pode ser aceita, e a função potencial fica expressa como

$$V = 2k\lambda \ln \frac{R_{ref}}{R} \quad 23-24$$

#### POTENCIAL DEVIDO A UM SEGMENTO DE RETA CARREGADO

Os planos infinitos ou segmentos de reta infinitos carregados não são encontrados na natureza, todavia essas distribuições tornam-se excelentes modelos para algumas situações reais. Por exemplo, o potencial nas proximidades de uma linha de transmissão de energia elétrica de alta tensão com 500 m de comprimento.

### 23-5 Superfícies Eqüipotenciais

Uma vez que o campo elétrico no interior do material de um condutor em equilíbrio eletrostático é nulo, a variação do potencial no interior do condutor é nula. Assim, o potencial elétrico é o mesmo ao longo do material do condutor; isto é, o condutor ocupa uma região eqüipotencial tridimensional, e sua superfície é uma superfície eqüipotencial. Como o potencial  $V$  tem o mesmo valor em qualquer posição sobre uma superfície eqüipotencial, a variação em  $V$  é nula. Se a uma carga de prova sobre a superfície for imposto um pequeno deslocamento  $d\ell$  paralelo à superfície,  $dV = -\vec{E} \cdot d\ell = 0$ . Uma vez que o produto escalar  $\vec{E} \cdot d\ell$  é nulo para qualquer  $d\ell$  paralelo à superfície,  $\vec{E}$  deve ser perpendicular a todo e qualquer  $d\ell$  paralelo à superfície. Entretanto, a única maneira de o campo  $\vec{E}$  ser perpendicular a cada  $d\ell$  paralelo à superfície é ser normal a ela. Portanto, quaisquer linhas de campo elétrico que iniciam ou terminam em uma superfície eqüipotencial devem ser normais à superfície. As Figuras 23-18 e 23-

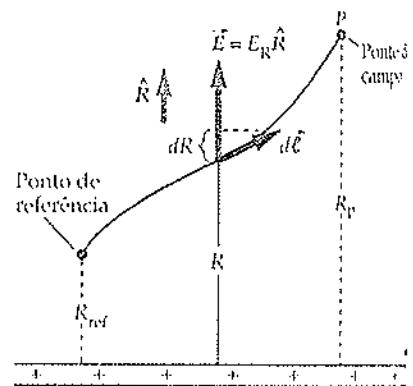
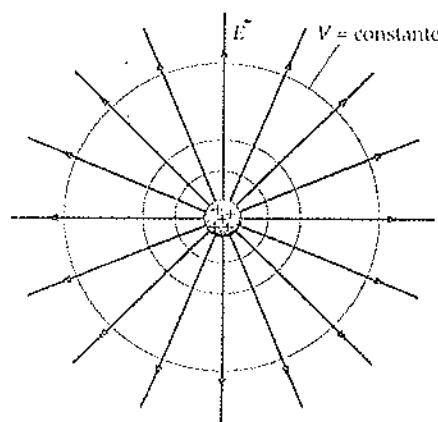


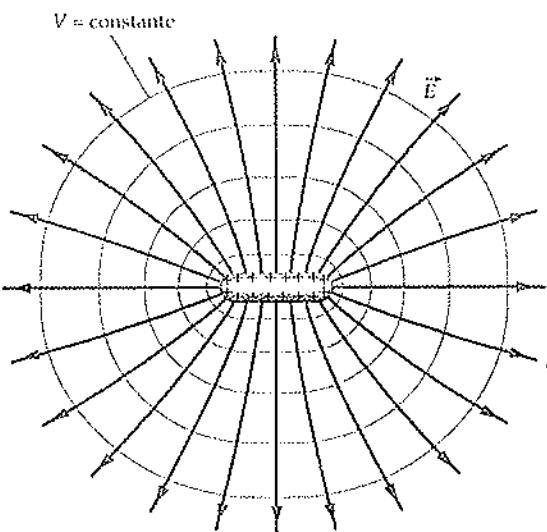
FIGURA 23-17



**FIGURA 23-18**  
Superfícies eqüipotenciais e linhas de campo elétrico externas a um condutor esférico carregado uniformemente. As superfícies eqüipotenciais são esféricas; as linhas de campo são radiais e perpendiculares às superfícies eqüipotenciais.

19 mostram as superfícies eqüipotenciais nas proximidades de um condutor esférico e de um condutor não-esférico, respectivamente. Note que em qualquer posição em que uma linha de campo encontra ou atravessa uma superfície eqüipotencial, a linha é normal a essa superfície. Ao se movimentar de uma superfície eqüipotencial para outra em sua vizinhança através de um deslocamento  $d\ell$  sobre uma linha de campo no sentido do campo, o potencial varia de  $dV = -\vec{E} \cdot d\ell = -Ed\ell$ . Assim, pode-se concluir que as superfícies eqüipotenciais que possuem uma diferença de potencial constante estarão mais próximas onde a intensidade do campo elétrico  $E$  for maior.

**FIGURA 23-19**  
Superfícies eqüipotenciais e linhas de campo elétrico externas a um condutor não-esférico. As linhas de campo elétrico sempre interceptam as superfícies eqüipotenciais em ângulos retos.

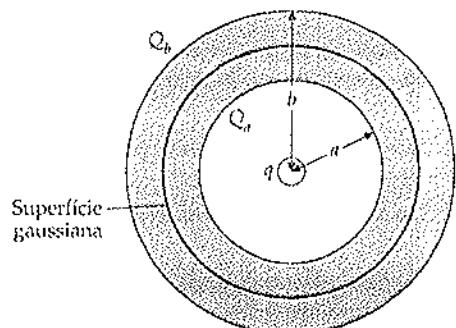


Uma casca esférica condutora oca, descarregada, tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$ . Uma carga puntiforme positiva  $+q$  é colocada na cavidade, no centro da esfera. (a) Determine a carga em cada superfície do condutor. (b) Determine o potencial  $V(r)$  em qualquer posição, admitindo que  $V = 0$  em  $r = \infty$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) A distribuição de carga apresenta simetria esférica, assim a aplicação da lei de Gauss deve ser um bom procedimento para a obtenção das cargas nas superfícies interna e externa da casca. (b) Some os potenciais individuais de cada carga para obter o potencial resultante. As expressões para o potencial de uma carga puntiforme e de uma casca esférica fina carregada uniformemente já foram deduzidas (Equações 23-8 e 23-23).

1. A carga no interior de uma superfície fechada é proporcional ao fluxo  $\vec{E}$  que atravessa a superfície:
2. Faça um esquema da carga puntiforme e da casca esférica. Em um condutor, a carga se situa apenas em sua superfície. Atribua um nome para a carga em cada uma das superfícies da casca. Represente uma superfície gaussiana no interior do material do condutor:
3. Aplique a lei de Gauss (resultado da etapa 1) à superfície gaussiana e determine a carga na superfície interna da casca:

$$\phi_{res} = 4\pi k Q_{int}, \text{ onde } \phi_{res} = \oint_S E_n dA$$



**FIGURA 23-20**

$$E_n = 0 \Rightarrow Q_{int} = q + Q_a = 0 \\ \text{assim}$$

$$Q_a = -q$$

4. Sendo a casca neutra, a carga em sua superfície interior pode ser determinada:

$$Q_a + Q_b = 0$$

assim

$$Q_b = +q$$

- (b) 1. O potencial total é igual à soma dos potenciais devidos às cargas individuais:

2. Some os potenciais na região externa à casca. O potencial para uma casca esférica fina carregada é expresso pela Equação 23-23:

3. Some os potenciais na região interna do material da casca condutora:

4. Some os potenciais na região entre a carga puntiforme e a casca:

$$V = V_q + V_{Q_a} + V_{Q_b}$$

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \frac{kq}{r}, \quad r \geq b$$

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} = \frac{kq}{b}, \quad a \leq r \leq b$$

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} - \frac{kq}{a}, \quad 0 < r \leq a$$

**NOTAS** Cada uma das funções que definem o potencial tem seu ponto de referência com potencial nulo em  $r = \infty$ . Assim, a soma dessas funções também apresenta seu ponto de referência com potencial nulo em  $r = \infty$ . O potencial resultante nesse exemplo pode ser obtido diretamente pelo cálculo da integral  $-\int E \cdot d\vec{r} = -\int E dr$ . Uma terceira forma de se obter o potencial é calcular a integral indefinida  $-\int E dr$  em cada uma das regiões e determinar as constantes de integração igualando as funções potenciais nas fronteiras. Essa igualdade nas fronteiras é válida porque o potencial deve ser contínuo.

A Figura 23-21 mostra o potencial elétrico em função da distância ao centro da cavidade. No interior do material condutor, onde  $a \leq r \leq b$ , o potencial tem o valor constante  $kq/b$ . Externamente à casca, o potencial é idêntico àquele referido a uma carga puntiforme  $q$  posicionada no centro da casca. Note que  $V(r)$  é contínuo para qualquer posição  $r$ . O campo elétrico é descontínuo nas superfícies condutoras, conforme indicado pela inclinação descontínua da função  $V(r)$  em  $r = a$  e  $r = b$ .

Em geral, dois condutores separados no espaço não estarão em um mesmo potencial. A diferença de potencial entre esses condutores depende de suas formas geométricas, suas distâncias e da carga resultante em cada um deles. Quando dois condutores são colocados em contato suas cargas são distribuídas, de modo que o equilíbrio eletrostático seja estabelecido e o campo elétrico fique nulo no interior de ambos os condutores. Enquanto permanecem em contato, os dois condutores podem ser considerados como um único condutor com uma única superfície eqüipotencial. Ao se colocar um condutor esférico carregado em contato com um segundo condutor esférico descarregado, a carga fluirá entre eles até que ambos os condutores fiquem em um mesmo potencial. Se os condutores esféricos forem idênticos, eles dividirão a carga original igualmente. Se os condutores esféricos idênticos forem agora separados, cada um terá metade da carga original.

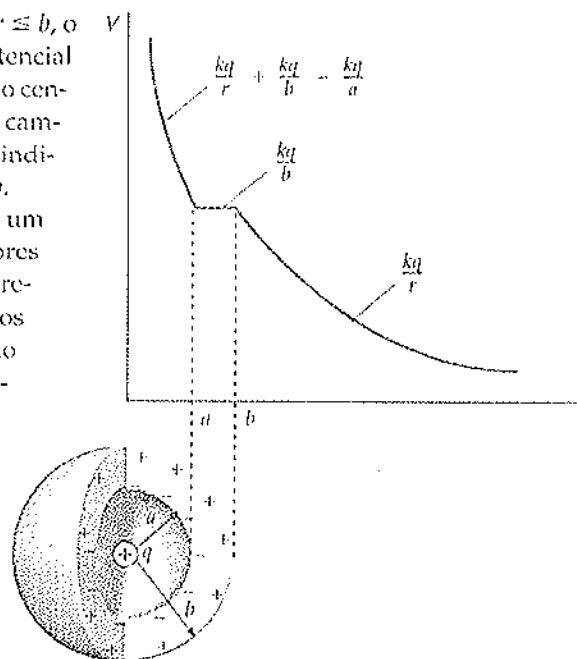
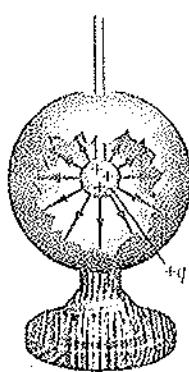


FIGURA 23-21

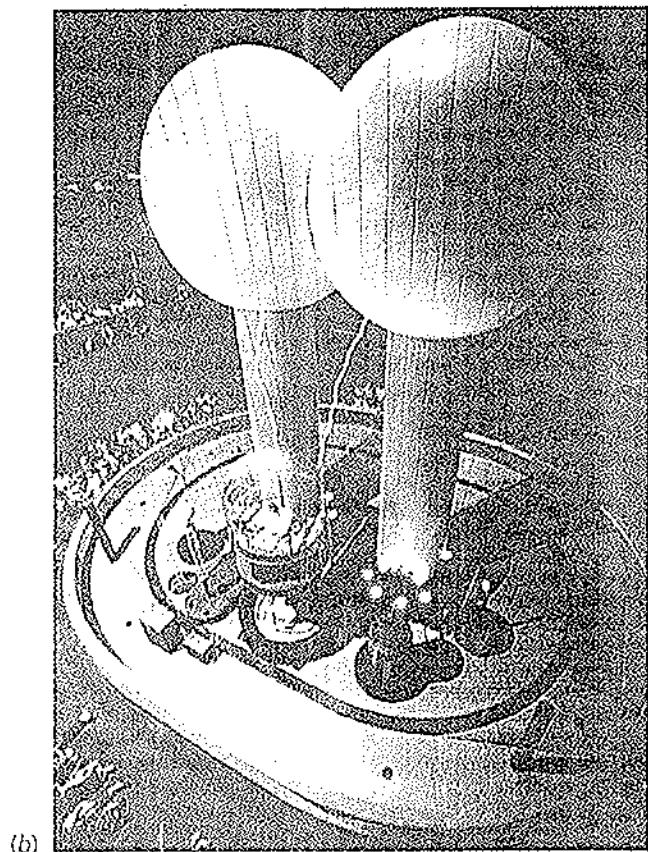
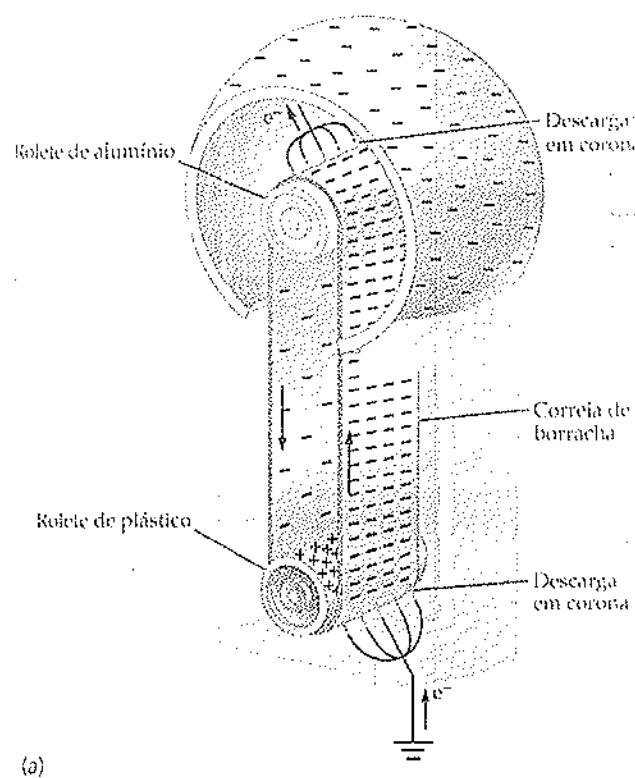
### O Gerador de Van de Graaff

Na Figura 23-22, um pequeno condutor com carga positiva  $q$  é colocado internamente à cavidade de um grande condutor. Na condição de equilíbrio, o campo elétrico é nulo no interior do material de ambos os condutores. As linhas de

campo elétrico que saem da carga positiva  $q$  devem terminar na superfície interna do condutor maior. Esse fenômeno deve ocorrer independentemente da carga que pode existir fora da superfície do condutor maior. Seja qual for a carga no condutor maior, o condutor menor, colocado no interior da cavidade, está sujeito a um potencial maior, uma vez que as linhas de campo elétrico estão orientadas desse condutor para o condutor maior. Se os condutores forem agora conectados através de um fio condutor fino, toda a carga originalmente no condutor menor fluirá para o condutor maior. Quando essa conexão for interrompida não mais haverá carga no condutor menor posicionado no interior da cavidade, e não mais haverá linhas de campo entre os condutores. A carga positiva transferida do condutor menor estará totalmente na superfície externa do condutor maior. Se mais carga positiva for colocada no condutor menor da cavidade e novamente os condutores forem conectados com um fio fino, toda a carga do condutor interno fluirá novamente para o condutor externo. O processo pode ser repetido indefinidamente. Esse método é utilizado para produzir grandes potenciais em um dispositivo chamado gerador de Van de Graaff, no qual a carga é conduzida para a superfície interna de um grande condutor esférico através de uma correia carregada (Figura 23-23). Deve-se realizar trabalho pelo motor que aciona a correia levando a carga da parte inferior para a parte superior da



**FIGURA 23-22**  
Pequeno condutor com carga positiva no interior de um grande condutor oco.



**FIGURA 23-23**  
(a) Diagrama esquemático de um gerador de Van de Graaff. O rolete inferior fica carregado positivamente devido ao contato com a correia em movimento. (A superfície inferior da correia adquire uma carga negativa idêntica que é distribuída sobre uma área maior.) A concentração de carga positiva no rolete atrai elétrons para as extremidades do pente inferior, onde ocorre a ruptura dielétrica, e a carga negativa é transportada para a correia através da descarga pelo efeito corona. No rolete superior, a correia carregada negativamente repele os elétrons das extremidades do pente, e a carga negativa é transferida da correia para o pente. A carga é então transferida para a superfície externa do condutor esférico oco. (b) Essa grande demonstração dos geradores de Van de Graaff no museu de Ciência de Boston, nos Estados Unidos, está descarregando na cabine de controle aterrada do operador.

correia, onde o potencial é muito alto. Geralmente pode-se perceber a diminuição da velocidade do motor quando a esfera fica carregada. Quanto maior a carga no condutor externo, maior seu potencial e maior o campo elétrico imediatamente externo à sua superfície externa. Um acelerador de Van de Graaff é um dispositivo que utiliza o intenso campo elétrico produzido pelo gerador de Van de Graaff para acelerar íons (partículas atômicas carregadas), como os prótons.

### Ruptura Dielétrica

Muitos materiais não-condutores ficam ionizados em campos elétricos muito intensos e se tornam condutores. Esse fenômeno, conhecido como **ruptura dielétrica**, ocorre no ar com um campo elétrico cuja intensidade é  $E_{\max} \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MN/C}$ . Alguns dos íons existentes no ar são acelerados, atingindo altos níveis de energia cinética antes de colidirem com moléculas vizinhas. A ruptura dielétrica ocorre quando esses íons são acelerados até atingirem energias cinéticas capazes de propiciar o crescimento da concentração de íons devido às colisões com moléculas vizinhas. O potencial máximo que pode ser obtido em um gerador de Van de Graaff é limitado pela ruptura dielétrica do ar. No vácuo, os geradores de Van de Graaff podem atingir potenciais muito mais altos. A intensidade do campo elétrico na qual ocorre a ruptura dielétrica no material é chamada de resistência dielétrica daquele material. A rigidez dielétrica do ar é de aproximadamente 3 MV/m. A descarga elétrica através do ar condutor resultante de uma ruptura dielétrica é chamada de arco elétrico. O choque elétrico que você sente quando toca na maçaneta metálica de uma porta após caminhar sobre um tapete em um dia seco é um exemplo comum de arco elétrico. Essas rupturas ocorrem com mais freqüência nos dias secos porque o ar úmido pode conduzir a carga antes de a condição de ruptura ser atingida. O raio é outro exemplo de arco elétrico, dessa vez em maior escala.

Um condutor esférico tem um raio de 30 cm. (a) Qual é a carga máxima que pode ser colocada sobre a esfera antes de ocorrer a ruptura dielétrica do ar em suas vizinhanças? (b) Qual é o potencial máximo da esfera?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Determina-se a carga máxima relacionando a carga ao campo elétrico e igualando o campo à resistência dielétrica do ar,  $E_{\max}$ . (b) O potencial máximo pode então ser determinado a partir da carga máxima calculada no item (a).

- (a) 1. A densidade superficial de carga em um condutor  $\sigma$  está relacionada ao campo elétrico imediatamente externo ao condutor:

2. Iguala esse campo a  $E_{\max}$ :

$$E_{\max} = 4\pi k \sigma_{\max}$$

3. A carga máxima  $Q_{\max}$  é obtida a partir de  $\sigma_{\max}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{Q_{\max}}{4\pi R^2}$$

4. Explicitando  $Q_{\max}$  tem-se:

$$Q_{\max} = 4\pi R^2 \sigma_{\max} = 4\pi R^2 \frac{E_{\max}}{4\pi k} = \frac{R^2 E_{\max}}{k}$$

$$= \frac{(0,3 \text{ m})^2 (3 \times 10^6 \text{ N/C})}{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)} = \boxed{3,00 \times 10^{-5} \text{ C}}$$

- (b) Utilize a expressão da carga máxima para calcular o potencial máximo da esfera:

$$V_{\max} \approx \frac{kQ_{\max}}{R} = \frac{k}{R} \left( \frac{R^2 E_{\max}}{k} \right) = RE_{\max}$$

$$= (0,3 \text{ m}) (3 \times 10^6 \text{ N/C}) = \boxed{9,00 \times 10^5 \text{ V}}$$

Dois condutores esféricos carregados com raios  $R_1 = 6 \text{ cm}$  e  $R_2 = 2 \text{ cm}$  (Figura 23-24) são separados de uma distância muito maior que 6 cm e conectados por um longo fio condutor fino. Uma carga total  $Q = +80 \text{ nC}$  é colocada em uma das esferas. (a) Qual é a carga em cada esfera? (b) Qual é o campo elétrico próximo à superfície de cada esfera? (c) Qual é o potencial elétrico de cada esfera? (Admita que a carga no fio de conexão seja desprezível.)

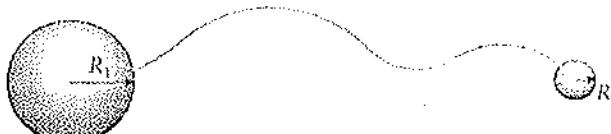


FIGURA 23-24

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A carga total será distribuída, ficando a esfera 1 com  $Q_1$  e a esfera 2 com  $Q_2$ , de modo que ambas as esferas estarão sujeitas a um mesmo potencial. Pode-se utilizar a expressão  $V = kQ/R$  para o potencial de cada esfera, uma vez que elas estão suficientemente afastadas.

- (a) 1. A conservação da carga fornece uma relação entre as cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ :

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

2. A igualdade do potencial das esferas fornece uma segunda relação entre as cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ :

$$\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{R_2}{R_1} Q_1$$

3. Combine os resultados das etapas 1 e 2 e calcule  $Q_1$  e  $Q_2$ :

$$Q_1 + \frac{R_2}{R_1} Q_1 = Q, \text{ assim}$$

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} (80 \text{ nC}) = \boxed{60 \text{ nC}}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = \boxed{20 \text{ nC}}$$

- (b) Utilize esses resultados para calcular os campos elétricos na superfície das esferas:

$$E_1 = \frac{kQ_1}{R_1^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(60 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0,06 \text{ m})^2}$$

$$= \boxed{150 \text{ kN/C}}$$

$$E_2 = \frac{kQ_2}{R_2^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0,02 \text{ m})^2}$$

$$= \boxed{450 \text{ kN/C}}$$

- (c) Calcule o potencial comum a ambas as esferas através da expressão  $kQ/R$ :

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(60 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,06 \text{ m}}$$

$$= \boxed{8,99 \text{ kV}}$$

**VERIFICAÇÃO** Utilizando a esfera 2 para calcular  $V$ , tem-se  $V_2 = kQ_2/R_2 = (8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(20 \times 10^{-9} \text{ C})/0,02 \text{ m} = 8,99 \times 10^3 \text{ V}$ . Pode-se proceder a uma verificação adicional, uma vez que o campo elétrico na superfície de cada esfera é proporcional à sua densidade de carga. O raio da esfera 1 é igual a três vezes o da esfera 2, logo a área de sua superfície é igual a nove vezes a da esfera 2. E uma vez que ela possui uma carga três vezes maior, sua densidade de carga será três vezes menor que a da esfera 2. Portanto, o campo da esfera 1 deve ser igual a um terço do da esfera 2, o que coincide com o valor obtido.

Quando a carga é colocada em um condutor de forma não-esférica, como o mostrado na Figura 23-25a, a superfície do condutor será uma superfície eqüipotencial, porém a densidade superficial de carga e o campo elétrico na superfície externa do condutor variarão de ponto a ponto. Nas proximidades de um ponto onde o raio de curvatura é pequeno, como o ponto A na figura, a densidade superficial de carga e o campo elétrico serão grandes, enquanto nas proximidades de um ponto onde o raio de curvatura é grande, como o ponto B na figura, o campo e a densidade superficial de carga serão pequenos. Pode-se compreender essa condição qualitativamente considerando as extremidades do condutor como sendo esferas de raios distintos. Seja  $\sigma$  a densidade superficial de carga.

O potencial de uma esfera de raio  $R$  é

$$V = \frac{kQ}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad 23-25$$

Uma vez que a área de uma esfera é  $4\pi R^2$ , a carga em uma esfera está relacionada à densidade de carga pela expressão  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ . Substituindo essa expressão de  $Q$  na Equação 23-25, tem-se

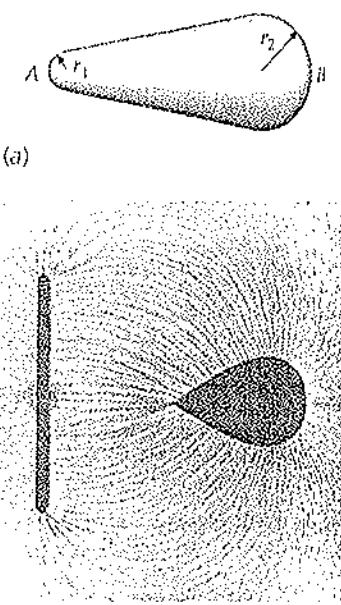
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$$

Explicitando-se  $\sigma$ , obtém-se

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R} \quad 23-26$$

Como ambas as esferas estão sujeitas ao mesmo potencial, a esfera com o menor raio deve possuir a maior densidade superficial de carga. E sendo  $E = \sigma/\epsilon_0$  nas proximidades da superfície de um condutor, o campo elétrico é máximo nos pontos do condutor onde o raio de curvatura é menor.

Para um condutor de forma arbitrária, o potencial para a condição de ocorrência de uma ruptura dielétrica depende do menor raio de curvatura de qualquer das partes do condutor. Se o condutor possui pontos agudos com raios de curvatura muito pequenos, a ruptura dielétrica ocorrerá a potenciais relativamente pequenos. No gerador de Van de Graaff (veja a Figura 23-23a), a carga é transportada em uma correia e transferida através de condutores com bordas pontiagudas nas proximidades do topo da correia. Os pára-raios no topo das altas edificações conseguem atrair as cargas elétricas presentes nas proximidades das nuvens antes que o potencial atinja altos valores e produza descargas elétricas de caráter destrutivo.



**FIGURA 23-25**

(a) Condutor não-esférico. Se esse tipo de condutor for carregado, ele produzirá um campo elétrico que será mais forte nas proximidades do ponto A, onde o raio de curvatura é menor, do que nas proximidades do ponto B, onde o raio de curvatura é maior. (b) Linhas de campo elétrico nas proximidades de um condutor não-esférico e de uma placa, com cargas iguais e opostas. As linhas podem ser visualizadas através de pequenos fragmentos de fibra suspensos em óleo. Note que o campo elétrico é mais forte nas proximidades dos pontos de menor raio de curvatura, como nas extremidades da placa e na ponta esquerda do condutor. As superfícies eqüipotenciais têm um espaçamento menor entre elas, onde a resistência do campo é maior.

# RESUMO

- O potencial elétrico, definido como a energia potencial eletrostática por unidade de carga, é um importante conceito físico que está relacionado ao campo elétrico.
- Sendo o potencial uma grandeza escalar, geralmente seu cálculo é mais fácil do que o do vetor campo elétrico. Uma vez conhecido o potencial  $V$ , o campo  $\vec{E}$  pode ser calculado a partir de  $V$ .

## Tópicos

### 1. Diferença de Potencial

## Equações e Observações Importantes

A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é definida como o negativo do trabalho por unidade de carga realizado pelo campo elétrico quando uma carga de prova se move de um ponto  $a$  para um ponto  $b$ :

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad 23-2b$$

Diferença de potencial para deslocamentos infinitesimais

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad 23-2a$$

### 2. Potencial Elétrico

Potencial devido a uma carga puntiforme

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}, \quad (V = 0 \text{ em } r = r_{ref}) \quad 23-7$$

Potencial de Coulomb

$$V = \frac{kq}{r}, \quad (V = 0 \text{ em } r = \infty) \quad 23-8$$

Potencial devido a um sistema de cargas puntiformes

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}, \quad (V = 0 \text{ em } r_i = \infty, i = 1, 2, \dots) \quad 23-10$$

Potencial devido a uma distribuição de carga contínua

$$V = \int \frac{k dq}{r}, \quad (V = 0 \text{ em } r = \infty) \quad 23-19$$

Essa expressão apenas pode ser utilizada se a distribuição de carga for confinada a um volume finito, de modo que o potencial possa ser admitido como nulo no infinito.

Potencial e linhas de campo elétrico

As linhas de campo elétrico são orientadas no sentido da diminuição do potencial elétrico.

Continuidade do potencial elétrico

A função potencial  $V$  é contínua em todas as posições do espaço.

### 3. Cálculo do Campo Elétrico a partir do Potencial

O campo elétrico é orientado no sentido do maior decréscimo no potencial.

$$E_t = - \frac{dV}{dr} \quad 23-13$$

Gradiente

Um vetor orientado no sentido da maior taxa de variação de uma função escalar e que possui uma intensidade igual à derivada daquela função em relação à distância naquela direção é chamado de gradiente da função. O campo  $\vec{E}$  é igual ao negativo do gradiente de  $V$ .

Potencial como função apenas de  $x$

$$E_x = - \frac{dV(x)}{dx} \quad 23-14$$

Potencial como função apenas de  $r$

$$E_r = - \frac{dV(r)}{dr} \quad 23-15$$

4. \*Relação Geral entre  $\vec{E}$  e  $V$ 

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \text{ ou}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

23-1

## 5. Unidades

 $V$  e  $\Delta V$ 

A unidade SI para potencial e diferença de potencial é o volt (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

23-2

Campo elétrico

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

23-3

Elétron-volt

O elétron-volt (eV) é a variação na energia potencial de uma partícula de carga  $e$  quando se move de  $a$  para  $b$ , onde  $\Delta V = V_b - V_a = 1$  volt:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

23-4

## 6. Energia Potencial de Duas Cargas Puntiformes

$$U = q_1 q_2 \frac{k q_1 q_2}{r}, \quad (U = 0 \text{ em } r = \infty)$$

23-5

## 7. Funções Potenciais

Sobre o eixo de um anel carregado uniformemente

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (V = 0 \text{ em } |x| = \infty)$$

23-6

Sobre o eixo de um disco carregado uniformemente

$$V = 2\pi k\sigma|x| \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right), \quad (V = 0 \text{ em } |x| = \infty)$$

23-7

Nas proximidades de um plano infinito carregado

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|, \quad (V = V_0 \text{ em } x = 0)$$

23-8

Para uma casca esférica carregada

$$V = \frac{kQ}{r}, \quad r \geq R \quad (V = 0 \text{ em } r = \infty)$$

23-9

$$V = \frac{kQ}{R}, \quad r \leq R \quad (V = 0 \text{ em } r = \infty)$$

23-10

Para um segmento de reta infinito carregado

$$V = 2k\lambda \ln \frac{R_{\text{ref}}}{R}, \quad V = 0 \text{ em } r = R_{\text{ref}}$$

23-11

## 8. Carga em um Condutor Não-Esférico

Sobre um condutor de forma arbitrária, a densidade superficial de carga é maior nos pontos onde o raio de curvatura for pequeno.

## 9. Ruptura Dielétrica

A carga que pode ser colocada em um condutor está limitada pelo fato de as moléculas do meio em sua vizinhança sofrerem uma ruptura dielétrica nos campos elétricos de alta intensidade, transformando o meio em um condutor.

Resistência dielétrica

A resistência dielétrica é igual à intensidade do campo elétrico em que ocorre a ruptura dielétrica. A resistência dielétrica do ar é

$$E_{\text{max}} \approx 3 \times 10^9 \text{ V/m} \approx 3 \text{ MV/m}$$

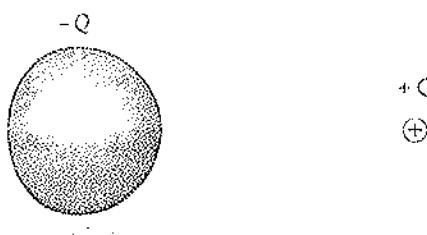
## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil
- Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- Problema desafiador
- Problema que pode ser resolvido com o auxílio de planilha

### Problemas Conceituais

1. • Uma carga positiva é abandonada a partir do repouso em um campo elétrico. Ela se moverá em direção à região de maior ou menor potencial elétrico?
2. •• Um núcleo de lítio e uma partícula  $\alpha$  estão em repouso. O núcleo de lítio tem carga de  $+3e$  e massa de  $7m_e$ ; a partícula  $\alpha$  apresenta carga de  $+2e$  e massa de  $4m_e$ . Qual das seguintes condições as aceleraria para a situação de mesma energia cinética? (a) Acelerá-los através da mesma diferença de potencial elétrico. (b) Acelerar a partícula  $\alpha$  através do potencial  $V_1$ , e o núcleo de lítio através do potencial  $(2/3)V_1$ . (c) Acelerar a partícula  $\alpha$  através do potencial  $V_1$ , e o núcleo de lítio através do potencial  $(7/4)V_1$ . (d) Acelerar a partícula  $\alpha$  através do potencial  $V_1$ , e o núcleo de lítio através do potencial  $(2 \times 7)/(3 \times 4)V_1$ . (e) Nenhuma das respostas está correta.
3. • Se o potencial elétrico é constante em uma determinada região do espaço, o que é possível afirmar sobre o campo elétrico naquela região?
4. • Se o campo elétrico  $E$  for conhecido em um ponto, o potencial elétrico  $V$  poderá ser obtido naquele ponto?
5. • Em que direção e sentido você pode se mover relativamente a um campo elétrico de modo que o potencial elétrico não varie?
6. •• No cálculo do potencial  $V$  em uma posição  $x$  sobre o eixo de um anel carregado, é importante saber se a carga  $Q$  é uniformemente distribuída ao longo do anel? O potencial  $V$  ou o campo  $E$ , seria alterado caso a carga não fosse uniformemente distribuída?
7. •• A Figura 23-26 mostra uma esfera metálica com carga  $-Q$  e carga puntiforme  $+Q$ . Faça um esquema mostrando as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais nas vizinhanças desse sistema de cargas.



**FIGURA 23-26**  
Problemas 7 e 8

8. •• Repita o Problema 7 com a carga na esfera carregada sendo igual a  $+Q$ .
9. •• Faça um esquema mostrando as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais, próximas e distantes do condutor mostrado na Figura 23-25a, admitindo que o condutor tenha uma carga  $Q$ .
10. •• Duas cargas iguais e positivas são separadas de uma pequena distância. Faça um esquema mostrando as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais para esse sistema.
11. • Duas cargas puntiformes positivas iguais  $a+Q$  estão sobre o eixo  $x$ , uma posicionada em  $x = -a$  e a outra em  $x = +a$ . Na origem, (a)  $E = 0$  e  $V = 0$ , (b)  $E = 0$  e  $V = 2kQ/a$ , (c)  $\vec{E} = (2kQ^2/a^2)\hat{i}$  e  $V = 0$ , (d)  $\vec{E} = (2kQ^2/a^2)\hat{i}$  e  $V = 2kQ/a$ , ou (e) nenhuma das respostas é correta.
12. • Um potencial eletrostático é medido e expresso por  $V(x, y, z) = 4|x| + V_0$ , em que  $V_0$  é uma constante. A distribuição de carga responsável por esse potencial é (a) um fio em espiral uniformemente carregado no plano  $xy$ , (b) uma carga puntiforme na origem, (c) uma placa uniformemente carregada no plano  $yz$  ou (d) uma esfera uniformemente carregada de raio  $1/\pi$  na origem.
13. • Duas cargas puntiformes de mesmo módulo, porém de sinais opostos, estão sobre o eixo  $x$ :  $+Q$  em  $x = -a$  e  $-Q$  em  $x = +a$ . Na origem, (a)  $E = 0$  e  $V = 0$ , (b)  $E = 0$  e  $V = 2kQ/a$ , (c)  $\vec{E} = (2kQ^2/a^2)\hat{i}$  e  $V = 0$ , (d)  $\vec{E} = (2kQ^2/a^2)\hat{i}$  e  $V = 2kQ/a$ , ou (e) nenhuma das respostas é correta.
14. • Verdadeiro ou falso:
  - (a) Se o campo elétrico é nulo em alguma região do espaço, o potencial elétrico também deve ser nulo naquela região.
  - (b) Se o potencial elétrico é nulo em alguma região do espaço, o campo elétrico também deve ser nulo naquela região.
  - (c) Se o potencial elétrico é nulo em um determinado ponto, o campo elétrico também deve ser nulo naquele ponto.
  - (d) As linhas de campo elétrico são sempre orientadas na direção de menor potencial.
  - (e) Por conveniência, o valor do potencial elétrico pode ser admitido como sendo nulo em qualquer ponto.
  - (f) Em eletrostática, a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial.
  - (g) A ruptura dielétrica ocorre no ar quando o potencial é de  $3 \times 10^6$  V.

15 •• (a) Considere que o potencial  $V$  seja constante na superfície de um condutor. Isso significa que  $\sigma$  é constante? (b) Se o campo elétrico  $E$  é constante na superfície de um condutor, isso significa que  $\sigma$  é também constante? Isso significa que  $V$  é constante?

16 • Duas esferas metálicas carregadas são conectadas por um fio. Considere que a esfera  $A$  seja maior que a esfera  $B$  (Figura 23-27). O módulo do potencial elétrico da esfera  $A$  é (a) maior que o da superfície da esfera  $B$ ; (b) menor do que o da superfície da esfera  $B$ ; (c) idêntico àquele na superfície da esfera  $B$ ; (d) maior ou menor que o da superfície da esfera  $B$ , dependendo dos raios das esferas; ou (e) maior ou menor que o da superfície da esfera  $B$ , dependendo da carga das esferas.



FIGURA 23-27 Problema 16

### Estimativas e Aproximações

17 • Estime a diferença de potencial entre uma nuvem carregada e a Terra, considerando que a ruptura elétrica do ar ocorre para campos de aproximadamente  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

18 • Estime a diferença de potencial entre os bornes de uma vela utilizada no motor de um automóvel típico. Devido à alta compressão da mistura na câmara de combustão, o campo elétrico no qual ocorre a explosão da mistura é de aproximadamente  $2 \times 10^9 \text{ V/m}$ .

19 •• Um próton pode ser considerado como uma esfera com raio de aproximadamente  $10^{-16} \text{ m}$ . Dois prótons colidem com quantidades de movimento iguais e opostas. (a) Estime a energia cinética mínima (em MeV) necessária a cada próton para que ambos superem a repulsão eletrostática e colidam. Faça essa estimativa sem utilizar a relatividade. (b) A energia de repouso do próton é de 938 MeV. Se o valor encontrado para a energia cinética for muito menor do que este, então o cálculo não-relativístico foi justificado. Qual é a fração da energia de repouso do próton correspondente à energia cinética calculada no item (a)?

20 •• Ao tocar um amigo após caminhar sobre um tapete em um dia seco, você produz uma centelha de cera de 2 mm. Estime a diferença de potencial entre você e seu amigo antes da centelha.

### Diferença de Potencial

21 • Um campo elétrico uniforme de  $2 \text{ kN/C}$  atua na direção  $x$ . Uma carga puntiforme positiva  $Q = 3 \mu\text{C}$  é abandonada do repouso na origem. (a) Qual é a diferença de potencial  $V(4 \text{ m}) - V(0)$ ? (b) Qual é a variação na energia potencial da carga desde  $x = 0$  até  $x = +4 \text{ m}$ ? (c) Qual é a energia cinética da carga quando ela é posicionada em  $x = +4 \text{ m}$ ? (d) Determine a função potencial  $V(x)$  considerando que seja nula em  $x = 0$ , (e) considerando que seja igual a  $4 \text{ kV}$  em  $x = 0$  e (f) considerando que seja nula em  $x = +1 \text{ m}$ .

22 • Duas grandes placas paralelas condutoras, separadas de  $10 \text{ cm}$ , apresentam densidades superficiais de carga iguais e opostas, de modo que o campo elétrico entre elas é uniforme. A diferença no potencial entre as placas é de  $500 \text{ V}$ . Um elétron é abandonado do repouso na posição da placa negativa. (g) Qual é o módulo do

campo elétrico entre as placas? A placa com potencial mais alto é positiva ou a negativa? (h) Determine o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre o elétron quando se move da placa negativa para a placa positiva. Expressse sua resposta em elétrons-volt e em joules. (i) Qual é a variação na energia potencial do elétron quando se move da placa negativa para a placa positiva? Qual é o valor de sua energia cinética quando atinge a placa positiva?

23 •• Uma carga positiva cujo módulo é  $2 \mu\text{C}$  é posicionada na origem. (a) Qual é o valor do potencial elétrico  $V$  em um ponto  $3 \text{ m}$  da origem considerando que  $V = 0$  no infinito? (b) Qual o valor do trabalho que deve ser realizado por um agente externo para trazer uma carga de  $3 \mu\text{C}$  do infinito até  $r = 4 \text{ m}$ , admitindo que a carga de  $2 \mu\text{C}$  seja mantida fixa na origem? (c) Qual o valor do trabalho que deve ser realizado por um agente externo para trazer a carga de  $2 \mu\text{C}$  do infinito até a origem, se a carga de  $3 \mu\text{C}$  for inicialmente colocada em  $r = 4 \text{ m}$  e mantida fixa?

24 •• A distância entre os íons  $\text{K}^+$  e  $\text{Cl}^-$  na substância  $\text{KCl}$  é  $2.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Calcule a energia necessária para separar os dois íons a uma distância de separação infinita, admitindo-os como cargas puntiformes inicialmente em repouso. Expressse a resposta em eV.

25 •• Os prótons de um acelerador de Van der Graaff são abandonados do repouso em um potencial elétrico de  $5 \text{ MV}$  e percorrem através do vácuo até uma região de potencial nulo. (a) Determine a velocidade final desses prótons de  $5 \text{ MeV}$ . (b) Determine o campo elétrico que aceleraria os prótons se o mesmo potencial variasse linearmente ao longo de uma distância de  $2,0 \text{ m}$ .

26 •• Um canhão de elétrons os dispara na tela de um tubo de imagem utilizado em televisores. Os elétrons partem do repouso e são acelerados por uma diferença de potencial de  $30.000 \text{ V}$ . Quais a energia dos elétrons quando atingem a tela (a) em elétrons-volt e (b) em joules? (c) Qual é a velocidade de impacto dos elétrons com a tela do tubo de imagem?

27 •• (a) Deduza uma expressão para a distância de maior aproximação entre uma partícula  $a$  de energia cinética  $E$  e um núcleo maciço de carga  $Ze$ . Admita que o núcleo seja fixo no espaço. (b) Determine essa distância para a aproximação de uma partícula com  $5,0 \text{ MeV}$  e outra de  $9,0 \text{ MeV}$  a um núcleo de ouro; a carga do núcleo é de  $79e$ . (Despreze o recuo do núcleo de ouro.)

### Potencial Devido a um Sistema de Cargas Puntiformes

28 • Quatro cargas puntiformes de  $2 \mu\text{C}$  são posicionadas nas quinas de um quadrado de  $4 \text{ m}$  de lado. Determine o potencial no centro do quadrado (relativamente a um potencial nulo no infinito) se (a) todas as cargas forem positivas, (b) três das cargas forem positivas e uma negativa e (c) duas forem positivas e duas forem negativas.

29 • Três cargas puntiformes são posicionadas sobre o eixo  $q_1$  na origem,  $q_2$  em  $x = 3 \text{ m}$  e  $q_3$  em  $x = 6 \text{ m}$ . Determine o potencial no ponto de coordenadas  $x = 0, y = 3 \text{ m}$  se (a)  $q_1 = q_2 = q_3 = 2 \mu\text{C}$ , (b)  $q_1 = q_2 = 2 \mu\text{C}$  e  $q_3 = -2 \mu\text{C}$  e (c)  $q_1 = q_3 = 2 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -2 \mu\text{C}$ .

30 • Os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  estão nos vértices de um triângulo equilátero com  $3 \text{ m}$  de lado. Cargas iguais e positivas de  $2 \mu\text{C}$  são colocadas em  $a$  e  $b$ . (a) Qual é o potencial no ponto  $c$ ? (b) Qual o trabalho necessário para trazer uma carga positiva de  $5 \mu\text{C}$  do infinito até o ponto  $c$  se as outras cargas forem mantidas fixas? (c) Responda aos itens (a) e (b) considerando que a carga em  $b$  seja substituída por uma outra de  $-2 \mu\text{C}$ .

31 • Uma esfera com  $60 \text{ cm}$  de raio tem seu centro na origem. Cargas idênticas de  $3 \mu\text{C}$  são colocadas a intervalos de  $60^\circ$  ao longo

alto é a  
de am-  
a para a  
joules.  
se ove  
ia ener-  
ne. na  
onto a 4  
o valor  
ia. tra-  
te a car-  
ra. dho  
az. de  
limento

Cl 2,80  
fops até  
as fun-  
V  
lo aban-  
co, em  
re. e a  
campo  
ss. mi-

tubo de  
sulso e  
De é a  
olte e (b)  
s. C. a  
or apro-  
n. leo  
ac. (b)  
sia a de  
ri. leo

de las  
cial no  
af. ato)  
m. vis-  
a nega-

e. ex:  
tercial  
mu. (b)  
C.  
ânculo  
mu. são  
il. ra-  
infinito  
sp...ida  
fd. por  
rigem.  
o. go

do plano equatorial da esfera. (a) Qual é o valor do potencial elétrico na origem? (b) Qual é o valor do potencial elétrico no polo norte?

32 • Duas cargas puntiformes  $q$  e  $q'$  são separadas de uma distância  $a$ . Em um ponto distante  $a/3$  da carga  $q$  e sobre a linha que une as duas cargas o potencial é nulo. Determine a relação  $q/q'$ .

33 • Duas cargas positivas  $+q$  são posicionadas sobre o eixo  $x$  em  $x = +a$  e  $x = -a$ . (a) Determine a função potencial  $V(x)$  em função de  $x$  para os pontos sobre o eixo  $x$ . (b) Faça um esquema da curva representativa da função  $V(x)$  versus  $x$ . (c) Qual é o significado do ponto de mínimo nessa curva?

34 • Uma carga puntiforme de  $+3e$  é posicionada na origem e uma segunda carga puntiforme de  $-2e$  é posicionada sobre o eixo  $x$  em  $x = a$ . (a) Faça um esquema da função potencial  $V(x)$  versus  $x$  para todo  $x$ . (b) Em que ponto ou pontos o potencial  $V(x)$  é nulo? (c) Qual é o valor do trabalho necessário para trazer uma terceira carga de  $+e$  para o ponto  $x = \frac{1}{2}a$  sobre o eixo  $x$ ?

### Cálculo do Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

35 • Um campo elétrico uniforme atua no sentido negativo da direção  $x$ . Os pontos  $a$  e  $b$  estão sobre o eixo  $x$ ,  $a$  em  $x = 2\text{ m}$  e  $b$  em  $x = 6\text{ m}$ . (a) A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é positiva ou negativa? (b) Se a intensidade de  $V_b - V_a$  for de  $10^6\text{ V}$ , qual será o valor da intensidade  $E$  do campo elétrico?

36 • O potencial devido a uma distribuição particular de carga é medida em vários pontos ao longo do eixo  $x$ , conforme mostrado na Figura 23-28. Para que valor(es) na faixa  $0 < x < 10\text{ m}$   $E_x = 0$ ?

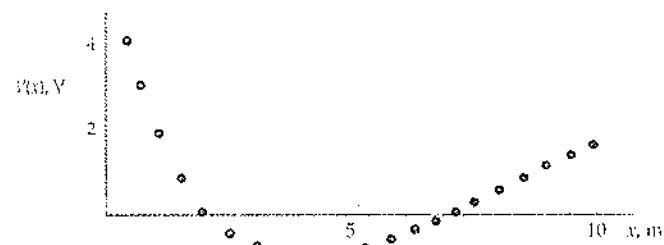


FIGURA 23-28 Problema 36

37 • Uma carga puntiforme  $q = 3,00\text{ }\mu\text{C}$  é posicionada na origem. (a) Determine o potencial  $V$  sobre o eixo  $x$  em  $x = 3,00\text{ m}$  e em  $x = 3,01\text{ m}$ . (b) O potencial aumenta ou diminui quando  $x$  aumenta? Calcule  $-\Delta V/\Delta x$ , onde  $\Delta V$  é a variação no potencial entre  $x = 3,00\text{ m}$  e  $x = 3,01\text{ m}$  e  $\Delta x = 0,01\text{ m}$ . (c) Determine o campo elétrico em  $x = 3,00\text{ m}$  e compare seu módulo com o valor de  $-\Delta V/\Delta x$  obtido no item (b). (d) Determine o potencial (com três algarismos significativos) no ponto  $x = 3,00\text{ m}$ ,  $y = 0,01\text{ m}$  e compare o resultado com o potencial sobre o eixo  $x$  em  $x = 3,00\text{ m}$ . Discuta a significância desse resultado.

38 • Uma carga de  $+3,00\text{ }\mu\text{C}$  é posicionada na origem e outra carga de  $-3,00\text{ }\mu\text{C}$  é colocada sobre o eixo  $x$  em  $x = 6,00\text{ m}$ . (a) Determine o potencial sobre o eixo  $x$  em  $x = 3,00\text{ m}$ . (b) Determine o campo elétrico sobre o eixo  $x$  em  $x = 3,00\text{ m}$ . (c) Determine o potencial sobre o eixo  $x$  em  $x = 3,01\text{ m}$  e calcule  $-\Delta V/\Delta x$ , onde  $\Delta V$  é a variação no potencial entre  $x = 3,00\text{ m}$  e  $x = 3,01\text{ m}$  e  $\Delta x = 0,01\text{ m}$ . Compare o resultado com a resposta do item (b).

39 • Um campo elétrico uniforme atua no sentido positivo da direção  $y$ . Os pontos  $a$  e  $b$  estão sobre o eixo  $y$ ,  $a$  em  $y = 2\text{ m}$  e  $b$  em  $y = 6\text{ m}$ . (a) A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é positiva ou negativa? (b) Se o módulo de  $V_b - V_a$  for de  $2 \times 10^4\text{ V}$ , qual será o módulo  $E$  do campo elétrico?

40 • Nas funções que se seguem, o potencial  $V$  é expresso em volts e  $x$  é expresso em metros. Determine  $E$ , quando (a)  $V(x) = 2000 + 3000x$ , (b)  $V(x) = 4000 + 3000x$ , (c)  $V(x) = 2000 - 3000x$  e (d)  $V(x) = -2000$ , independentemente de  $x$ .

41 • Uma carga  $q$  é posicionada em  $x = 0$  e uma carga  $-3q$  é posicionada em  $x = 1\text{ m}$ . (a) Determine  $V(x)$  para um ponto genérico sobre o eixo  $x$ . (b) Determine os pontos sobre o eixo  $x$  onde o potencial é nulo. (c) Qual é o valor do campo elétrico nesses pontos? (d) Faça um esquema mostrando a curva  $V(x)$  versus  $x$ .

42 • Um campo elétrico é expresso por  $E_y = 2,0x^3\text{ kN/C}$ . Determine a diferença de potencial entre os pontos  $x = 1\text{ m}$  e  $x = 2\text{ m}$  sobre o eixo  $x$ .

43 • Três cargas idênticas são colocadas sobre o plano  $xy$ . Duas estão sobre o eixo  $y$  em  $y = -a$  e  $y = +a$ , e a terceira está sobre o eixo  $x$  em  $x = a$ . (a) Qual é o potencial  $V(x)$  devido a essas cargas em um ponto qualquer sobre o eixo  $x$ ? (b) Determine  $E_x$  ao longo do eixo  $x$  a partir da função potencial  $V(x)$ . Analise suas respostas para os itens (a) e (b) na origem e em  $x \rightarrow \infty$  para verificar se elas fornecem os resultados esperados.

### Cálculo do Potencial Elétrico $V$ para Distribuições Contínuas de Carga

44 • Uma carga  $q = +10^{-8}\text{ C}$  é uniformemente distribuída sobre uma casca esférica com  $12\text{ cm}$  de raio. (a) Qual é a intensidade do campo elétrico nas posições imediatamente externa e interna à casca? (b) Qual é a intensidade do potencial elétrico nas posições imediatamente externa e interna à casca? (c) Qual é o potencial elétrico no centro da esfera? Qual é o campo elétrico nesse ponto?

45 • Um segmento de reta infinito carregado com densidade linear de carga  $\lambda = 1,5\text{ }\mu\text{C/m}$  apóia-se sobre o eixo  $z$ . Determine o potencial para as seguintes distâncias do segmento de reta carregado: (a)  $2,0\text{ m}$ , (b)  $4,0\text{ m}$  e (c)  $12\text{ m}$ . Admita que  $V = 0$  a uma distância de  $2,5\text{ m}$ .

46 • Deduza a Equação 23-21 integrando o campo elétrico  $E$ , ao longo do eixo do disco. (Veja a Equação 22-11.)

47 • Uma barra de comprimento  $L$  possui carga  $Q$  uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. A barra apóia-se no eixo  $y$  com seu centro na origem. (a) Determine o potencial elétrico em função da posição ao longo do eixo  $x$ . (b) Mostre que o resultado obtido no item (a) reduz-se a  $V = kQ/x$  para  $x \gg L$ .

48 • Um disco de raio  $R$  possui distribuição superficial de carga expressa por  $\sigma = \sigma_0 R/r$ . (a) Determine a carga total no disco. (b) Determine o potencial elétrico sobre o eixo do disco a uma distância  $x$  de seu centro.

49 • Repita o Problema 48 considerando que a densidade superficial de carga seja  $\sigma = \sigma_0 r^2/R^2$ .

50 • Uma barra de comprimento  $L$  possui carga  $Q$  uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. A barra apóia-se no eixo  $y$  com uma de suas extremidades na origem. Determine o potencial elétrico em função da posição ao longo do eixo  $x$ .

51 • Um disco de raio  $R$  tem densidade de carga  $+\sigma_0$  para  $r \leq a$  e densidade de carga igual e oposta  $-\sigma_0$  para  $a < r \leq R$ . A carga total do disco é igual a 0. (a) Determine o potencial elétrico a uma distância  $x$  ao longo do eixo  $x$  do disco. (b) Obtenha uma expressão aproximada para  $V(x)$  quando  $x \gg R$ .

52 • Utilize o resultado obtido no Problema 51a para calcular

o campo elétrico ao longo do eixo do disco. Em seguida, calcule o campo elétrico por integração direta utilizando a lei de Coulomb.

- 53 •• Uma barra de comprimento  $L$  tem carga  $Q$  uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. A barra apóia-se no eixo  $x$  com seu centro na origem. (a) Qual a expressão que define o potencial elétrico em função da posição ao longo do eixo  $x$  para  $x > L/2$ ? (b) Mostre que para  $x \gg L/2$ , seu resultado reduz-se àquele devido a uma carga puntiforme  $Q$ .

- 54 •• Uma casca esférica condutora de raio interno  $b$  e raio externo  $c$  é concêntrica com uma pequena esfera metálica de raio  $a < b$ . A esfera metálica apresenta carga positiva  $Q$ . A carga total na casca esférica condutora é  $-Q$ . (a) Qual é o potencial elétrico da casca esférica? (b) Qual é o potencial elétrico da esfera metálica?

- 55 •• Duas cascas cilíndricas coaxiais condutoras muito longas têm cargas iguais e opostas. A casca interna possui um raio  $a$  e carga  $+q$ ; a outra casca tem raio  $b$  e carga  $-q$ . O comprimento de cada casca cilíndrica é  $L$ . Obtenha a diferença de potencial elétrico entre as cascas.

- 56 •• Uma esfera uniformemente carregada tem um potencial elétrico de 450 V em sua superfície. A uma distância radial de 20 cm de sua superfície o potencial é de 150 V. Qual é o raio da esfera e qual é a carga da esfera?

- 57 •• Considere dois planos paralelos infinitos carregados, um no plano  $yz$  e outro a uma distância  $x = a$ . (a) Obtenha o potencial elétrico para uma posição qualquer do espaço, considerando  $V = 0$  em  $x = 0$  se os planos apresentam densidades de carga positiva iguais a  $+\sigma$ . (b) Repita o problema com densidades de carga iguais e opostas e a carga no plano  $yz$  positiva.

- 58 •• Mostre que para  $x \gg R$  o valor do potencial elétrico no eixo de um disco carregado tende a  $kQ/x$ , onde  $Q = \sigma\pi R^2$  é a carga total no disco. [Sugestão: escreva a expressão matemática  $(x^2 + R^2)^{1/2} = x(1 + R^2/x^2)^{1/2}$  e utilize a expressão binomial.]

- 59 •• No Exemplo 23-12, você deduziu a expressão

$$V(r) = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

para o potencial no interior de uma esfera maciça com densidade de carga constante, obtendo primeiro o campo elétrico. Nesse problema você deduz a mesma expressão por integração direta. Considere uma esfera de raio  $R$  com carga  $Q$  uniformemente distribuída. Você deseja obter o potencial elétrico  $V$  para uma posição arbitrária  $r < R$ . (a) Obtenha a carga  $q'$  no interior de uma esfera de raio  $r$  e o potencial  $V_1$  em  $r$  devido a essa parte da carga. (b) Obtenha o potencial  $dV_2$  em  $r$  devido à carga na casca de raio  $r'$  e espessura  $dr'$  em  $r' > r$ . (c) Integre a expressão obtida no item (b) de  $r' = r$  até  $r' = R$  para obter  $V_2$ . (d) Obtenha o potencial total  $V$  em  $r$  fazendo  $V = V_1 + V_2$ .

- 60 • Um plano infinito carregado mostra uma densidade superficial de carga de  $3,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Qual é a distância existente entre duas superfícies eqüipotenciais cujos potenciais diferem de 100 V?

- 61 • Uma carga puntiforme  $q = +\frac{1}{9} \times 10^{-8} \text{ C}$  é posicionada na origem. Considerando que o potencial seja nulo quando  $r \rightarrow \infty$ , localize as superfícies eqüipotenciais em intervalos de 20 V desde 20 até 100 V e esquematize-as em escala. Essas superfícies são igualmente espaçadas?

- 62 • (a) Determine a carga máxima resultante que pode ser colocada em um condutor esférico com 16 cm de raio antes de ocorrer a ruptura dielétrica do ar. (b) Qual é o potencial da esfera quando ela tem essa carga máxima?

- 63 • Determine a densidade superficial de carga máxima  $\sigma_s$  que pode existir em um condutor antes de ocorrer a ruptura dielétrica do ar.

- 64 •• Uma determinada carga é colocada em duas esferas condutoras bem afastadas uma da outra e conectadas através de um longo fio fino. Os raios das esferas são 5 cm e 12 cm. O campo elétrico na superfície da esfera maior é de 200 kV/m. Determine a densidade superficial de carga em cada esfera.

- 65 •• Duas cascas esféricas concêntricas têm cargas iguais e opostas. A casca interna possui um raio  $a$  e uma carga  $+q$ ; a casca externa tem raio  $b$  e carga  $-q$ . Determine a diferença de potencial,  $V_a - V_b$ , entre as cascas.

- 66 •• Calcule o potencial elétrico, em relação ao infinito, em um ponto a uma distância  $R/2$  do centro de uma casca esférica fina carregada uniformemente com raio  $R$  e carga  $Q$ .

- 67 •• Duas esferas metálicas idênticas descarregadas e conectadas por um fio são aproximadas de duas esferas condutoras similares com cargas iguais e opostas, conforme mostrado na Figura 23-29. (a) Esquematize as linhas de campo elétrico entre as esferas 1 e 3 e entre as esferas 2 e 4. (b) O que se pode afirmar sobre os potenciais  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  e  $V_4$  das esferas? (c) Se as esferas 3 e 4 forem também conectadas por um fio, mostre que a carga final em cada esfera deve ser nula.

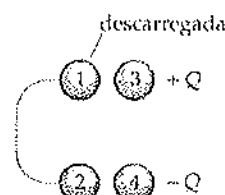


FIGURA 23-29 Problema 67

### Problemas Gerais

- 68 • Um dipolo elétrico tem carga positiva de  $4,8 \times 10^{-8} \text{ C}$  e  $6,4 \times 10^{-10} \text{ m}$  de uma carga negativa de mesma intensidade. Qual o potencial elétrico em um ponto distante  $9,2 \times 10^{-10} \text{ m}$  de cada uma das duas cargas? (a) 9,4 V. (b) Zero. (c) 4,2 V. (d)  $5,1 \times 10^9 \text{ V}$ . (e) 1,7 V

- 69 • Duas cargas positivas  $+q$  estão sobre o eixo  $y$  em  $y = -a$  e  $y = +a$ . (a) Determine o potencial  $V$  para um ponto arbitrário sobre o eixo  $x$ . (b) Utilize o resultado do item (a) para obter o campo elétrico em um ponto qualquer sobre o eixo  $x$ .

- 70 • Se uma esfera condutora deve ser carregada por um potencial de 10.000 V, qual é o menor raio possível da esfera de modo que o campo elétrico não exceda a resistividade dielétrica do ar?

- 71 •• Dois longos fios paralelos infinitos têm uma carga per unidade de comprimento uniforme  $\lambda$  e  $-\lambda$ , respectivamente. Os fios apóiam-se no plano  $xz$ , paralelos ao eixo  $z$ . O fio carregado positivamente intercepta o eixo  $x$  em  $x = -a$ , e o fio carregado negativamente intercepta o eixo  $x$  em  $x = +a$ . (a) Admita que a origem seja o ponto de referência onde o potencial é nulo e expresse o potencial para um ponto arbitrário  $(x, y)$  no plano  $xy$  em termos de  $x, y$ , e  $a$ . Utilize essa expressão para obter o potencial em qualquer ponto sobre o eixo  $y$ . (b) Utilize um programa de computador para geração de gráficos para representar a curva eqüipotencial no plano  $xy$  que passa pelo ponto  $x = a/4, y = 0$ . Considere  $a = 5 \text{ cm}$  e  $\lambda = 5 \text{nC/m}$ .

- 72 •• A curva eqüipotencial gerada no Problema 71 tem a forma de um círculo. (a) Mostre explicitamente que ela é de fato um

circulo. (b) O círculo eqüipotencial no plano  $xy$  é a interseção de uma superfície eqüipotencial tridimensional com o plano  $xy$ . Descreva a superfície tridimensional em uma frase ou duas.

73 •• O átomo de hidrogênio pode ser modelado como uma carga puntiforme positiva com intensidade  $+e$  (o próton), circundada por uma densidade de carga (o elétron) com a fórmula  $\rho = \rho_0 e^{-r/a}$  (deduzida da mecânica quântica), onde  $a = 0,523$  nm. (a) Calcule o valor de  $\rho_0$  necessário para que a carga total seja nula. (b) Calcule o potencial eletrostático (relativo ao infinito) a uma distância arbitrária  $r$  do próton.

74 • Uma esfera de alumínio isolada com 5,0 cm de raio está a um potencial de 400 V. Quantos elétrons foram removidos da esfera para levá-la a esse potencial?

75 • Uma carga puntiforme  $Q$  é posicionada na origem. Uma partícula de massa  $m = 0,002$  kg tem carga de  $4,0 \mu C$ . A partícula é abandonada a partir do repouso em  $x = 1,5$  m. Sua energia cinética quando passa por  $x = 1,0$  m é de 0,24 J. Determine a carga  $Q$ .

76 •• Um gerador de Van de Graaff tem uma diferença de potencial de 1,25 MV entre a correia e a casca externa. A carga é fornecida a uma taxa de  $200 \mu C/s$ . Qual é a potência mínima necessária para acionar a correia?

77 •• Uma carga puntiforme positiva  $+Q$  é posicionada em  $x = -a$ . (a) Qual é o trabalho necessário para trazer uma segunda carga puntiforme positiva  $+Q$  do infinito até  $x = +a$ ? (b) Com as cargas puntiformes positivas iguais em  $x = -a$  e  $x = +a$ , qual é o trabalho necessário para trazer uma terceira carga  $-Q$  do infinito até a origem? (c) Qual é o trabalho necessário para mover a carga  $-Q$  da origem até o ponto  $x = 2a$  segundo a trajetória semicircular mostrada na Figura 23-30?

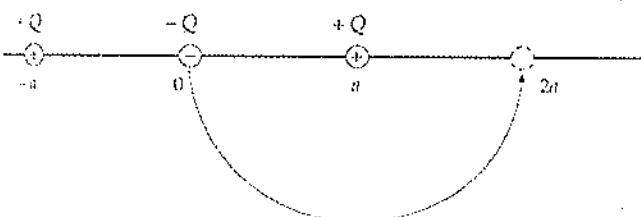


FIGURA 23-30 Problema 77

78 •• Uma carga de  $2 \text{ nC}$  é uniformemente distribuída ao longo de um anel com 10 cm de raio com centro na origem e eixo apoiado sobre o eixo  $x$ . Uma carga puntiforme de  $1 \text{ nC}$  é localizada em  $x = 50$  cm. Determine o trabalho necessário para mover a carga puntiforme até a origem. Forneça a resposta em joules e em elétrons-volt.

79 •• Os centros de duas esferas metálicas com raios de 10 cm são afastados de 50 cm e estão sobre o eixo  $x$ . As esferas estão inicialmente descarregadas, porém uma carga  $Q$  é transferida de uma das esferas para a outra, gerando uma diferença de potencial entre elas de 100 V. Um próton é abandonado a partir do repouso na superfície da esfera carregada positivamente e caminha em direção à esfera carregada negativamente. Com que velocidade ele atinge a esfera carregada negativamente?

80 •• (a) Utilizando um programa de geração automática de tabelas e gráficos, construa a curva  $V(x)$  versus  $x$ , expressa pela Equação 23-20, para um anel carregado uniformemente no plano  $yz$ . (b) Em que ponto o potencial  $V(x)$  é máximo? (c) Qual é o valor do campo elétrico  $E_x$  nesse ponto?

81 •• Um condutor esférico de raio  $R_1$  é carregado até 20 kV. Quando ele é conectado por um longo fio fino a uma segunda esfera condutora bem afastada, seu potencial cai para 12 kV. Qual é o raio da segunda esfera?

82 •• Uma esfera metálica centrada na origem apresenta uma carga em sua superfície cuja densidade é  $\sigma = 24,6 \text{ nC/m}^2$ . Em  $r = 2,0$  m, o potencial é de 500 V e a intensidade do campo elétrico é de 250 V/m. Determine o raio da esfera metálica.

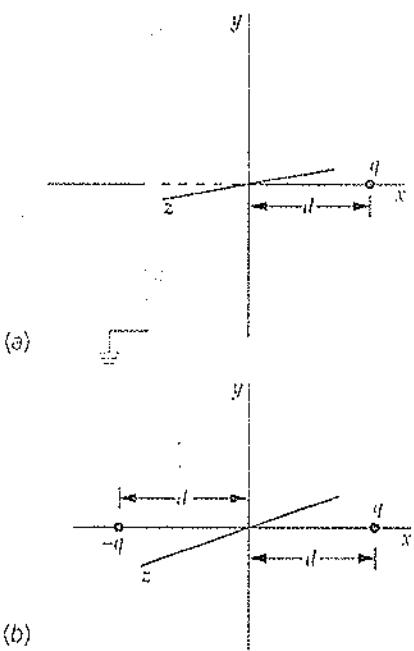
83 •• Ao longo do eixo de um disco carregado uniformemente, em um ponto a 0,6 m do centro do disco o potencial elétrico é de 80 V e a intensidade do campo elétrico é de 80 V/m; a uma distância de 1,5 m, o potencial é de 40 V e a intensidade do campo elétrico é de 23,5 V/m. Determine a carga total do disco.

84 •• Um núcleo radioativo de  $^{210}\text{Po}$  emite uma partícula  $\alpha$  com carga de  $+2e$  e energia de 5,30 MeV. Admita que imediatamente após a partícula  $\alpha$  ser formada e escapar do núcleo, ela fica a uma distância  $R$  do centro do núcleo descendente, o  $^{206}\text{Pb}$ , que possui carga de  $+82e$ . Calcule  $R$  fazendo a energia potencial eletrostática das duas partículas a essa distância de separação igual a 5,30 MeV. (Despreze as dimensões da partícula  $\alpha$ .)

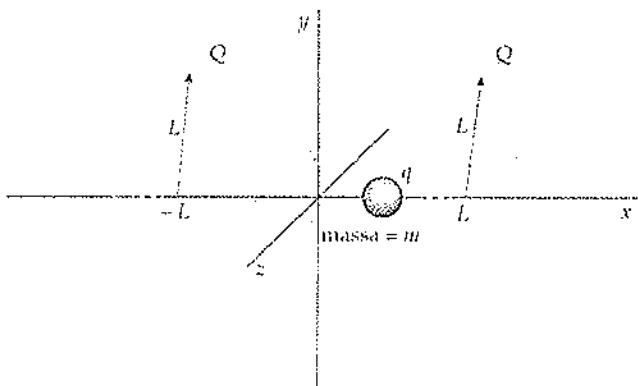
85 •• Dois grandes planos, paralelos e não-condutores, têm densidades de carga iguais e opostas com intensidade  $\sigma$ . Os planos têm área  $A$  e são separados de uma distância  $d$ . (a) Determine a diferença de potencial entre os planos. (b) Uma lâmina condutora de espessura  $a$  e área  $A$ , a mesma área dos planos, é inserida entre os dois planos originais. A lâmina não apresenta qualquer carga. Determine a diferença de potencial entre os dois planos originais e faça um esquema indicando as linhas de campo elétrico na região entre os dois planos originais.

86 ••• Uma carga puntiforme  $q_1$  é posicionada na origem e uma segunda carga puntiforme  $q_2$  é posicionada sobre o eixo  $x$  em  $x = a$ , conforme esquematizado no Exemplo 23-5. (a) Calcule o campo elétrico em um ponto arbitrário sobre o eixo  $x$  a partir da função potencial fornecida naquele exemplo. (b) Determine o potencial em um ponto qualquer sobre o eixo  $y$ . (c) Utilize o resultado obtido no item (b) para calcular a componente  $y$  do campo elétrico sobre o eixo  $y$ . Compare o resultado com o obtido diretamente através da lei de Coulomb.

87 ••• Uma carga puntiforme  $q$  é posicionada a uma distância  $d$  de um plano condutor aterrado de dimensões infinitas (Figura 23-31a). Para essa configuração o potencial  $V$  é nulo, tanto para todos os pontos infinitamente distantes da partícula em todas as direções quanto para todos os pontos do plano condutor. Considere um sistema de eixos coordenados com a partícula localizada sobre o eixo  $x$  em  $x = d$ . Uma segunda configuração (Figura 23-31b) tem o plano condutor substituído por uma partícula de carga  $-q$  localizada sobre o eixo  $x$  em  $x = -d$ . (a) Mostre que para a segunda configuração a função potencial é nula para todos os pontos infinitamente distantes da partícula em todas as direções e para todos os pontos sobre o plano  $yz$  — exatamente como foi o caso para a primeira configuração. (b) Um teorema, chamado teorema da unicidade, mostra que ao longo de metade do espaço  $x > 0$  a função potencial  $V = c$ , portanto, o campo elétrico  $E$  — para as duas configurações são idênticos. Utilizando esse resultado, obtenha o campo elétrico  $E$  em cada ponto do plano  $yz$  da segunda configuração. (O teorema da unicidade estabelece que, na primeira configuração, o campo elétrico em cada ponto do plano  $yz$  é idêntico ao da segunda configuração.) Utilize esse resultado para obter a densidade superficial de carga  $\sigma$  em cada ponto do plano condutor (na primeira configuração).



88 ••• Uma partícula de massa  $m$  contendo uma carga positiva  $q$  está restrita a mover-se ao longo do eixo  $x$ . Em  $x = -L$  e  $x = L$  são posicionados dois anéis carregados com raio  $L$  (Figura 23-32). Cada anel está centrado no eixo  $x$  e apóia-se em um plano perpendicular a ele. Cada um possui uma carga positiva  $Q$ . (a) Obtenha uma expressão para o potencial devido aos anéis carregados em função de  $x$ . (b) Mostre que a função potencial  $V(x)$  tem um mínimo em  $x = 0$ . (c) Mostre que para  $x \ll L$  o potencial tem a forma  $V(x) = V(0) + ax^2$ . (d) Deduza uma expressão para a frequência angular de oscilação da massa  $m$  quando ela é ligeiramente deslocada da origem e liberada.



89 ••• Três cascas esféricas concêntricas condutoras têm raios  $a$ ,  $b$  e  $c$ , de modo que  $a < b < c$ . Inicialmente, a casca mais interna está

descarregada, a casca intermediária possui uma carga positiva  $q$  e a casca mais externa possui uma carga negativa  $-Q$ . (a) Determine o potencial elétrico das três cascas. (b) Se as cascas mais interna e mais externa forem conectadas através de um fio que é isolado ao passo pela casca intermediária, qual será o valor do potencial elétrico de cada uma das três cascas, e qual será a carga final em cada casca?

90 ••• Considere duas cascas metálicas esféricas concêntricas com raios  $a$  e  $b$ , onde  $b > a$ . A casca externa possui uma carga  $Q$  e a casca interna é aterrada. Isso significa que a casca interna está sujeita a um potencial nulo e que algumas linhas de campo elétrico saem da casca externa em direção ao infinito, porém outras linhas de campo elétrico saem da casca externa e terminam na casca interna. Determine a carga na casca interna.

91 ••• Mostre que o trabalho total necessário para se estabelecer uma carga  $Q$  distribuída uniformemente em uma esfera de raio  $R$  pode ser calculado pela expressão  $W = U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ , onde  $U$  é a energia potencial eletrostática da esfera. Sugestão: seja  $p$  a densidade de carga da esfera com carga  $Q$  e raio  $R$ . Calcule o trabalho  $dW$  necessário para trazer uma carga  $dq$  do infinito até a superfície de uma esfera carregada uniformemente de raio  $r$  ( $r < R$ ) e densidade de carga  $p$ . (Não haverá necessidade de um trabalho adicional para distribuir a carga  $dq$  ao longo de uma casca esférica de raio  $r$ , espessura de densidade de carga  $p$ .)

92 •• Utilize o resultado do Problema 91 para calcular o raio  $R_{e}$  classico de um elétron, isto é, o raio de uma esfera uniforme com carga  $-e$  que tenha energia potencial eletrostática igual à energia de repouso do elétron ( $5,11 \times 10^{-10}$  eV). Faça um breve comentário sobre esse modelo para o elétron.

93 •• (a) Considere uma esfera carregada uniformemente de raio  $R$  e carga total  $Q$  composta de um fluido incompressível como, por exemplo, a água. Se a esfera se desintegra em duas metades de igual volume e cargas idênticas, e se essas metades se estabilizarem na forma de esferas, qual será o raio  $R'$  de cada uma delas? (b) Utilizando a expressão para a energia potencial mostrada no Problema 91, calcule a variação na energia potencial eletrostática total do fluido carregado. Admita que as esferas sejam separadas por uma grande distância.

94 ••• O Problema 93 pode ser modificado para ser utilizado como um modelo bastante simples para a fissão nuclear. Quando um núcleo de  $^{235}\text{U}$  absorve um neutrônio, ele pode se desintegrar em fragmentos de  $^{136}\text{Xe}$  e  $^{90}\text{Sr}$ , mais dois neutrões ejetados. O  $^{235}\text{U}$  tem 92 prótons, enquanto o  $^{136}\text{Xe}$  dispõe de 54 e o  $^{90}\text{Sr}$  tem 38. Estime a energia liberada por esse processo de fissão (em MeV), admitindo que a massa específica do núcleo seja constante e apresente o valor  $\rho \approx 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ .

95 ••• (a) Considere uma superfície esférica imaginária e uma carga uniforme  $q$  localizada externamente à superfície. Mostre, pelo processo de integração direta, que o potencial no centro da superfície esférica devido à presença de uma carga puntiforme é igual à média do potencial sobre a superfície da esfera. (b) Argumente, através do princípio da superposição, que esse resultado deve valer para qualquer superfície esférica e qualquer configuração de cargas externas à superfície.

## Energia Eletrostática e Capacitância

- 24-1 Energia Potencial Eletrostática
- 24-2 Capacitância
- 24-3 O Armazenamento da Energia Elétrica
- 24-4 Capacitores, Baterias e Circuitos
- 24-5 Dielétricos
- 24-6 Estrutura Molecular de um Dielétrico

A ENERGIA DO FLASH ELETRÔNICO DE UMA CÂMARA FOTOGRÁFICA É ARMAZENADA EM UM CAPACITOR NA UNIDADE DE AÇÃOAMENTO DO FLASH.



Como a energia é armazenada em um capacitor? (Veja o Exemplo 24-3.)

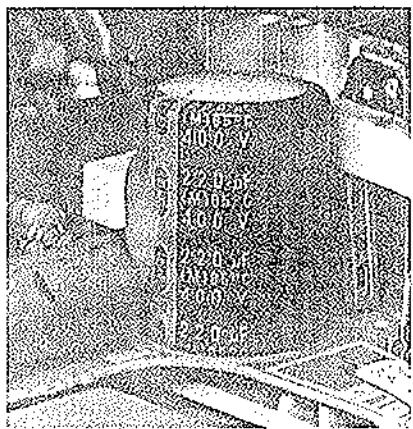
**Q**uando uma carga puntiforme  $q$  é movimentada de uma longa distância até uma região onde outras cargas estejam presentes, o trabalho a ser realizado pode ser calculado por  $qV$ , onde  $V$  é o potencial na posição final devido às demais cargas vizinhas. O trabalho realizado é armazenado na forma de energia potencial eletrostática. A energia potencial eletrostática do sistema de cargas é igual ao trabalho total necessário para o sistema atingir sua configuração final.

Quando uma carga positiva é colocada em um condutor isolado, o potencial do condutor aumenta. A relação entre a carga e o potencial é chamada de capacidade do condutor. Um dispositivo conveniente utilizado para armazenar a carga e a energia é o capacitor, que consiste em dois condutores espaçados, porém bem próximos e isolados um do outro. Quando ligado a uma fonte com uma determinada diferença de potencial, como, por exemplo, uma bateria, os condutores adquirem cargas iguais e opostas. A relação entre a intensidade da carga em qualquer dos condutores e a diferença de potencial entre eles é a capacidade do capacitor. Os capacitores são utilizados de diversas formas. O flash de uma câmara fotográfica utiliza um capacitor para armazenar a energia necessária para produzir o flash repentino de luz. Os capacitores também são utilizados na sintonia de circuitos de aparelhos como rádios, televisores e telefones celulares, permitindo que funcionem em frequências específicas.

Neste capítulo são apresentados os circuitos que possuem baterias e capacitores. Nos capítulos posteriores, essas técnicas e conceitos serão novamente empregados nos circuitos que contêm resistores, indutores e outros dispositivos.

O primeiro capacitor foi a garrafa de Leyden, um frasco de vidro revestido interna e externamente por folhas de ouro. Ele foi inventado na Universidade de Leyden, na Holanda, por experimentalistas do século XVII que, enquanto estudavam os efeitos das cargas elétricas em pessoas e animais, tiveram a idéia de tentar armazenar uma grande quantidade de carga em uma garrafa de água. Um experimentador segurava uma garrafa de água em uma das mãos enquanto a carga era conduzida para a água através de uma corrente ligada a um gerador eletrostático. Ao segurar a corrente com a mão livre, o experimentador recebeu um choque elétrico que o derrubou. Benjamin Franklin percebeu que o dispositivo de armazena-

mento de carga elétrica não precisava ter a forma de uma garrafa, e utilizou um vidro de janela com as faces recobertas por folhas metálicas, chamado de condensador de Franklin. Com diversos desses condensadores ligados em paralelo, Franklin armazenou uma carga relativamente grande, com a qual tentou matar um peru. Na realidade, ele apenas derrubou a si próprio. Posteriormente, ele escreveu: "Eu tentei matar um peru, mas quase consegui matar um pato."



### 24-1 Energia Potencial Eletrostática

Com uma carga puntiforme  $q_1$  em um ponto 1, o potencial  $V_1$  em um ponto 2 a uma distância  $r_{1,2}$  pode ser calculado como

$$V_2 = \frac{kq_1}{r_{1,2}}$$

Para trazer uma segunda carga puntiforme  $q_2$  em repouso no infinito para o repouso no ponto 2 é necessário realizar um trabalho expresso por

$$W_2 = q_2 V_2 = \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}}$$

O potencial no ponto 3, a uma distância  $r_{1,3}$  de  $q_1$  e a uma distância  $r_{2,3}$  de  $q_2$ , é dado por

$$V_3 = \frac{kq_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_2}{r_{2,3}}$$

Para trazer uma carga puntiforme adicional  $q_3$  do repouso no infinito para o repouso no ponto 3 um trabalho adicional será necessário:

$$W_3 = q_3 V_3 = \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}}$$

O trabalho total necessário para definir a configuração final das três cargas é a energia potencial eletrostática  $U$  do sistema de três cargas puntiformes:

$$U = \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}} \quad 24-1$$

Esse trabalho é independente da ordem com que as cargas foram trazidas do infinito para suas posições finais. Em geral,

A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas puntiformes é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas do infinito até suas posições finais.

#### ENERGIA POTENCIAL ELETROSTÁTICA DE UM SISTEMA

Os dois primeiros termos do lado direito da Equação 24-1 podem ser escritos como

$$\frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} = q_1 \left( \frac{kq_2}{r_{1,2}} + \frac{kq_3}{r_{1,3}} \right) = q_1 V_1$$

onde  $V_1$  é o potencial na localização de  $q_1$  devido às cargas  $q_2$  e  $q_3$ . Analogamente, o segundo e o terceiro termos representam a carga  $q_3$  multiplicada pelo potencial devido às cargas  $q_1$  e  $q_2$ , e o primeiro e o terceiro termos são iguais à carga  $q_2$

Os capacitores são utilizados em diversas aplicações comuns de dispositivos eletrônicos, como em componentes de televisores. Alguns capacitores são utilizados para armazenar energia, porém a grande maioria deles é utilizada para filtrar freqüências indesejadas de sinais elétricos.

multiplicada pelo potencial devido às cargas  $q_1$  e  $q_2$ . Pode-se, assim, reescrever a Equação 24-1 como

$$\begin{aligned} U &= \frac{kq_2q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3q_2}{r_{2,3}} = \frac{1}{2}(U + U) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3q_2}{r_{2,3}} + \frac{kq_2q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3q_2}{r_{2,3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{kq_2}{r_{1,2}} + \frac{kq_3}{r_{1,3}}\right) + q_2\left(\frac{kq_3}{r_{2,3}} + \frac{kq_1}{r_{1,2}}\right) + q_3\left(\frac{kq_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_2}{r_{2,3}}\right)\right] \end{aligned}$$

Portanto, a energia potencial eletrostática  $U$  de um sistema com  $n$  cargas puntiformes será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad 24-2$$

#### ENERGIA POTENCIAL ELETROSTÁTICA DE UM SISTEMA DE CARGAS PUNIFORMES

onde  $V_i$  é o potencial no local da  $i$ -ésima carga devido a todas as demais cargas.

A Equação 24-2 também descreve a energia potencial eletrostática de uma distribuição contínua de carga. Considere um condutor esférico de raio  $R$ . Quando esse condutor possui uma carga  $q$ , seu potencial em relação a  $V = 0$  no infinito é

$$V = \frac{kq}{R}$$

O trabalho a ser realizado para mover uma quantidade adicional de carga  $dq$  do infinito para o condutor é  $V dq$ . Esse trabalho é igual ao aumento na energia potencial do condutor:

$$dU = V dq = \frac{kq}{R} dq$$

A energia potencial total  $U$  é igual à integral de  $dU$  quando  $q$  aumenta de zero até seu valor final  $Q$ . Integrando, obtém-se

$$U = \frac{k}{R} \int_0^Q q dq = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2} QV \quad 24-3$$

onde  $V = kQ/R$  é o potencial na superfície da esfera totalmente carregada. Pode-se interpretar a Equação 24-3 como  $U = Q \times \frac{1}{2}V$ , onde  $\frac{1}{2}V$  é o potencial médio da esfera durante o processo de carregamento. Durante esse processo, mover o primeiro elemento de carga do infinito até a esfera descarregada não requer qualquer trabalho, uma vez que a esfera está inicialmente descarregada. Portanto, a carga em movimento não é repelida pela carga já presente na esfera. Quando a carga na esfera começa a se acumular, o movimento dos elementos adicionais de carga para a esfera requer cada vez mais trabalho a ser realizado; quando a esfera está quase totalmente carregada, o movimento do último elemento de carga contra a força repulsiva da carga da esfera requer um trabalho máximo. O potencial médio da esfera durante o processo de carregamento é igual à metade de seu potencial total  $V$ , de modo que o trabalho total necessário para mover toda a carga é igual a  $\frac{1}{2}QV$ . Embora a Equação 24-3 tenha sido deduzida para um condutor esférico, ela é também válida para qualquer outro condutor. O potencial de qualquer condutor é proporcional à sua carga  $q$ , logo pode-se escrever  $V = \alpha q$ , onde  $\alpha$  é uma constante. O trabalho necessário para mover uma carga adicional  $dq$  do infinito até o condutor é igual a  $V dq = \alpha q dq$ , e o trabalho total neces-



Em aproximadamente dois terços das pessoas que sofrem um ataque cardíaco, o coração entra em um estado chamado de fibrilação ventricular. Nesse estado o coração treme, apresentando espasmos caóticos, e não bombeia o sangue. Para desfibrilar o coração, uma corrente significativa é passada por ele, causando sua parada. Em seguida, as células marcapasso estabelecem novamente um batimento cardíaco regular. Um desfibrilador externo aplica uma grande tensão que cruza o peito do paciente.

sário para colocar uma carga  $Q$  em um condutor é  $\frac{1}{2}\alpha Q^2 = \frac{1}{2}QV$ . Para um conjunto de  $n$  condutores com o  $i$ -ésimo condutor a um potencial  $V_i$  e carga  $Q_i$ , a energia potencial eletrostática pode ser calculada como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad 24-4$$

### ENERGIA POTENCIAL ELETROSTÁTICA DE UM SISTEMA DE CONDUTORES



Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os vértices de um quadrado de lado  $a$ , conforme mostrado na Figura 24-1. Quatro cargas puntiformes positivas idênticas, cada uma de valor  $q$ , estão inicialmente em repouso no infinito. (a) Calcule o trabalho total necessário para colocar as cargas puntiformes em cada vértice do quadrado, determinando separadamente o trabalho necessário para mover cada carga até sua posição final. (b) Mostre que a Equação 24-2 fornece o trabalho total.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Nenhum trabalho será necessário para colocar a primeira carga no ponto  $A$ , uma vez que o potencial é nulo enquanto as três outras cargas estiverem no infinito. Quando cada uma das demais cargas é movida para sua posição, algum trabalho deverá ser realizado devido à presença das cargas anteriores.

(a) 1. Coloque a primeira carga no ponto  $A$ . Para completar essa etapa, ao trabalho  $W_A$  deve-se atribuir o valor nulo:

2. Mova a segunda carga do infinito para o ponto  $B$ . O trabalho necessário é  $W_B = qV_A$ , onde  $V_A$  é o potencial no ponto  $B$  devido à primeira carga no ponto  $A$  afastada de uma distância  $a$ :

3.  $W_C = qV_C$ , onde  $V_C$  é o potencial no ponto  $C$  devido à carga  $q$  no ponto  $A$  a uma distância  $\sqrt{2}a$  e à carga  $q$  no ponto  $B$  a uma distância  $a$ :

4. Considerações similares permitem calcular  $W_D$ , o trabalho necessário para mover a quarta carga do infinito para o ponto  $D$ :

5. A soma das contribuições individuais fornece o trabalho total necessário para definir a configuração das quatro cargas:

(b) 1. Calcule  $W_{\text{total}}$  utilizando a Equação 24-2. Utilize a expressão de  $V_D$  da etapa 4 do item (a) para o potencial no local de cada carga. Existem quatro termos idênticos, um para cada carga:

2. Pela etapa 4, o potencial no local de cada carga é  $V_D$ . Substitua  $V_i$  por  $V_D$  e determine  $W_{\text{total}}$ :

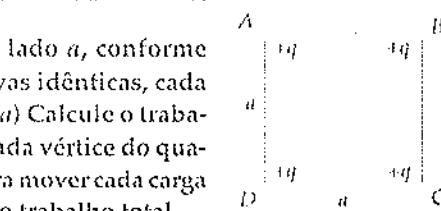


FIGURA 24-1

$$W_B = qV_A = q\left(\frac{kq}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}$$

$$W_C = qV_C = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$

$$\begin{aligned} W_D &= qV_D = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a} \end{aligned}$$

$$W_{\text{total}} = W_A + W_B + W_C + W_D = \boxed{\left(4 + \sqrt{2}\right)\frac{kq^2}{a}}$$

$$W_{\text{total}} = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i V_i$$

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left[ q_i \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{kq}{a} \right] = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{kq}{a} \sum_{i=1}^4 q_i$$

$$= \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{kq}{a} 4q = \boxed{\left(4 + \sqrt{2}\right)\frac{kq^2}{a}}$$

**NOTA** O trabalho total  $W_{\text{total}}$  é igual à energia eletrostática total da distribuição de carga.

**EXERCÍCIO** (a) Qual é o trabalho adicional necessário para mover uma quinta carga positiva  $q$  do infinito para o centro do quadrado? (b) Qual é o trabalho total necessário para definir a configuração do sistema de cinco cargas? [Resposta (a)  $4\sqrt{2}kq^2/a$  e (b)  $(4 + 5\sqrt{2})kq^2/a$ ]

### EXERCÍCIO Capacitância

O potencial  $V$  devido à carga  $Q$  de um único condutor isolado é proporcional a  $Q$  e depende das dimensões e da forma do condutor. Em geral, quanto maior a área da superfície de um condutor, mais carga ele pode reter para um dado potencial. Por exemplo, o potencial de um condutor esférico de raio  $R$  com uma carga  $Q$  é

$$V = \frac{kQ}{R}$$

A relação entre a carga  $Q$  e o potencial  $V$  de um condutor isolado é chamada de capacidade  $C$ :

$$C = \frac{Q}{V}$$

24-5

### DEFINIÇÃO DE CAPACITÂNCIA

A capacidade é a medida da capacidade de armazenar carga para uma dada diferença de potencial. Uma vez que o potencial é proporcional à carga, essa relação não depende nem de  $Q$  nem de  $V$ , mas apenas das dimensões e da forma do condutor. A capacidade de um condutor esférico é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \quad 24-6$$

A unidade do SI para a capacidade é o coulomb por volt, que é chamada de farad (F) em homenagem ao físico experimentalista inglês Michael Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} \quad 24-7$$

O farad é uma unidade muito grande, assim submúltiplos como o microfarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) e o picofarad ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ) são utilizados com freqüência. Uma vez que a capacidade é expressa em farads e  $R$  em metros, pode-se depreender da Equação 24-6 que a unidade SI para a permissividade do vácuo,  $\epsilon_0$ , também pode ser expressa como farad por metro:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m} \quad 24-8$$

**EXERCÍCIO** Determine o raio de um condutor esférico que possui uma capacidade de 1 F. (Resposta  $8,99 \times 10^9 \text{ m}$ , que é aproximadamente 1400 vezes o raio da Terra)

Parece-se pelo exercício anterior que o farad é de fato uma unidade muito grande.

**EXERCÍCIO** Uma esfera de capacidade  $C_1$  possui uma carga de  $20 \mu\text{C}$ . Se a carga for aumentada para  $60 \mu\text{C}$ , qual será a nova capacidade? (Resposta  $C_2 = C_1$ . A capacidade não depende da carga. Se a carga for triplicada, o potencial da esfera será também triplicado, e a relação  $Q/V$ , que depende apenas do raio da esfera, permanece inalterada.)

## Capacitores

Um dispositivo consistindo em dois condutores com cargas iguais e opostas é chamado de capacitor. Um capacitor é geralmente carregado pela transferência de uma carga  $Q$  de um condutor para o outro, que deixa um dos condutores com uma carga  $+Q$  e o outro com uma carga  $-Q$ . A capacitância do dispositivo é definida por  $Q/V$ , onde  $Q$  é a intensidade da carga em um dos condutores e  $V$  é a intensidade da diferença de potencial entre os condutores.<sup>1</sup> Para calcular a capacitância, colocam-se cargas iguais e opostas nos condutores e, em seguida, determina-se a diferença de potencial  $V$ , obtendo inicialmente o campo elétrico  $E$  devido às cargas.

## Capacitores de Placas Paralelas

Um capacitor muito empregado é o capacitor de placas paralelas, que utiliza duas placas condutoras dispostas em paralelo. Na prática, as placas são geralmente folhas metálicas delgadas, separadas e isoladas uma da outra por um filme plástico também delgado. Esse "sanduíche" é então enrolado, o que permite uma configuração de grande área de superfície em um espaço relativamente pequeno. Seja  $A$  a área da superfície (a área lateral de cada placa) e  $d$  a distância de separação, que é pequena comparativamente ao comprimento e à largura das placas. Carrega-se uma das placas com carga  $+Q$  e a outra com carga  $-Q$ . Essas cargas se atraem mutuamente e ficam uniformemente distribuídas sobre as superfícies internas das placas. Uma vez que as placas estão muito próximas uma da outra, o campo elétrico entre elas é aproximadamente o mesmo que ocorre entre dois planos infinitos com cargas iguais e opostas. Cada placa contribui com um campo uniforme cuja intensidade é  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ ; a Equação 24-24 fornece um campo total cuja resistência é  $E = \sigma/\epsilon_0$ , onde  $\sigma = Q/A$  é o módulo da carga por unidade de área para ambas as placas. Sendo o campo  $E$  uniforme entre as placas (Figura 24-2), a diferença de potencial entre elas é igual à resistência do campo  $E$  multiplicada pela distância de separação  $d$ :

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad 24-9$$

A capacitância do capacitor de placas paralelas será, portanto,

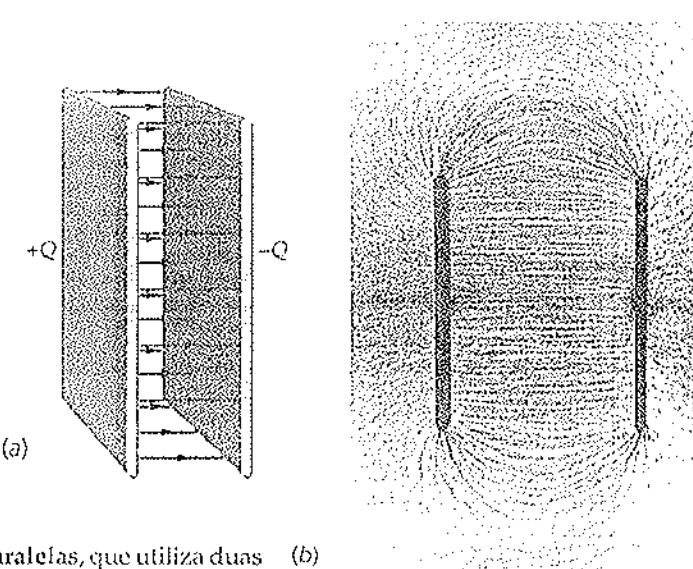
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad 24-10$$

### CAPACITÂNCIA DE UM CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

Note que, sendo  $V$  proporcional a  $Q$ , a capacitância não depende de  $Q$  ou de  $V$ . Para um capacitor de placas paralelas, a capacitância é proporcional à área das placas e inversamente proporcional ao valor da distância de separação. Em geral, a capacitância depende das dimensões, da forma e do arranjo geométrico dos condutores, e também das propriedades do meio isolante entre os condutores.

<sup>1</sup>Geralmente, quando um texto se refere à carga de um capacitor deve-se entender o módulo da carga dos condutores. O uso de  $V$  em vez de  $\Delta V$  para o módulo da diferença de potencial entre as placas é de uso comum e simplifica muitas das diversas equações relacionadas à capacitância.

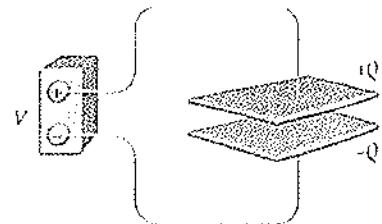
<sup>2</sup>As baterias serão analisadas com mais detalhes no Capítulo 25. Neste capítulo precisa-se saber apenas que uma bateria é um dispositivo que armazena energia, fornece energia elétrica e mantém uma diferença de potencial  $V$  constante entre seus terminais.



(b)

**FIGURA 24-2**

(a) Linhas de campo elétrico entre as placas planas de um capacitor de placas paralelas. As linhas são igualmente espaçadas na região entre as placas, indicando que o campo é uniforme.  
(b) Linhas de campo elétrico em um capacitor de placas paralelas evidenciadas por pequenos fragmentos de fibra suspensos em óleo.

**FIGURA 24-3**

Quando os condutores de um capacitor descarregado são conectados aos terminais de uma bateria, esta transfere carga de um condutor para outro até que a diferença de potencial entre os condutores seja igual àquela entre os terminais da bateria.<sup>2</sup> A quantidade de carga transferida pela bateria é  $Q = CV$ .

As placas de um capacitor de placas paralelas são quadradas, com 10 cm de lado e separadas de 1 mm. (a) Calcule a capacidade desse dispositivo elétrico. (b) Se esse capacitor for carregado com 12 V, qual será a carga transferida de uma das placas para a outra?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A capacidade  $C$  é determinada pela área e pela distância de separação entre as placas. Uma vez calculado o valor de  $C$ , a carga para uma dada tensão  $V$  é obtida a partir da definição de capacidade, isto é,  $C = Q/V$ .

1. Obtém-se a capacidade utilizando a Equação 24-10:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85 \text{ pF/m})(0,1 \text{ m})^2}{0,001 \text{ m}} = 88,5 \text{ pF}$$

2. A carga transferida é obtida a partir da definição de capacidade:  $Q = CV = (88,5 \text{ pF})(12 \text{ V}) = 1,06 \times 10^{-9} \text{ C}$

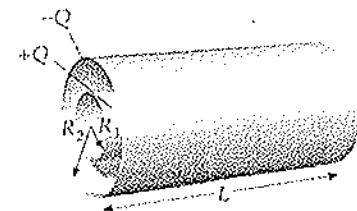
$$= 1,06 \text{ nC}$$

**NOTA**  $Q$  é a intensidade da carga em cada placa do capacitor. Nesse caso,  $Q$  corresponde a aproximadamente  $6,6 \times 10^9$  elétrons.

**EXERCÍCIO** Qual deve ser o valor da área da placa para uma capacidade de 1 F? (Resposta  $A = 1,13 \times 10^8 \text{ m}^2$ , o que corresponde a um quadrado com lado de 10,6 km)

### Capacitores Cilíndricos

Um capacitor cilíndrico consiste em um pequeno cilindro condutor ou fio de raio  $R_1$  e uma casca cilíndrica condutora concêntrica maior, de raio  $R_2$ . Um cabo coaxial, como o utilizado nos televisores, pode ser considerado um capacitor cilíndrico. A capacidade por unidade de comprimento de um cabo coaxial é importante para a determinação das características de transmissão do cabo.



Obtenha uma expressão para o cálculo da capacidade de um capacitor cilíndrico constituído por dois condutores, cada um de comprimento  $L$ . Um dos condutores é um cilindro de raio  $R_1$  e o outro é uma casca coaxial com raio interno  $R_2$ , de modo que  $R_1 < R_2 \ll L$ , conforme mostrado na Figura 24-4.

FIGURA 24-4

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Atribui-se uma carga  $+Q$  ao condutor interno e uma carga  $-Q$  ao condutor externo, e calcula-se a diferença de potencial  $V = V_L - V_a$  a partir do campo elétrico entre os condutores, que pode ser obtido a partir da lei de Gauss. Uma vez que o campo elétrico não é uniforme (ele depende de  $R$ ), deve-se recorrer a um processo de integração para obter a diferença de potencial.

1. A capacidade é definida através da relação  $Q/V$ :  $C = Q/V$
2. O potencial  $V$  está relacionado ao campo elétrico:  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

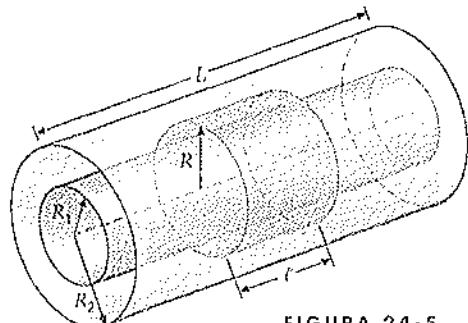


FIGURA 24-5

3. Para se obter  $E_R$ , define-se uma superfície gaussiana de forma cilíndrica com raio  $R$  e comprimento  $\ell$ , onde ( $R_1 < R < R_2$ ) e  $\ell \ll L$ . A superfície gaussiana é localizada longe das extremidades das cascas cilíndricas (Figura 24-5)

4. Longe das extremidades das cascas o campo  $\vec{E}$  é radial, de modo que não há fluxo de  $\vec{E}$  através das extremidades planas do cilindro. A área da região curva do cilindro é  $2\pi R\ell$ , de modo que a lei de Gauss fornece:

5. Admitindo que a carga por unidade de comprimento no interior da casca seja uniformemente distribuída, obtenha  $Q_{\text{int}}$ :

6. Utilize a expressão de  $Q_{\text{int}}$  e explice  $E_R$ :

7. Integre e obtenha  $V = |V_{R_2} - V_{R_1}|$ :

8. Substitua esse resultado na expressão de  $C$ :

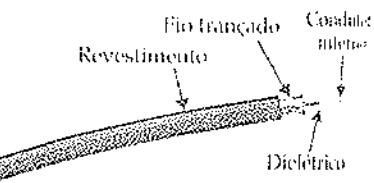
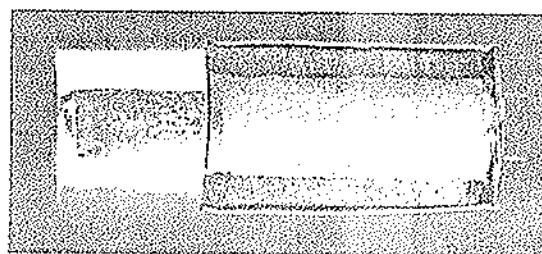
**NOTA** A capacitância de um capacitor cilíndrico é proporcional ao comprimento dos condutores.

**EXERCÍCIO** De que forma a capacitância é afetada se o potencial entre os condutores cilíndricos for aumentado de 20 V para 80 V? (Resposta A capacitância de qualquer capacitor não depende do potencial. Para aumentar  $V$ , deve-se aumentar a carga  $Q$ . A relação  $Q/V$  depende apenas da geometria do capacitor e da natureza dos isolantes.)

Pelo Exemplo 24-3 percebe-se que a capacitância de um capacitor cilíndrico pode ser expressa como

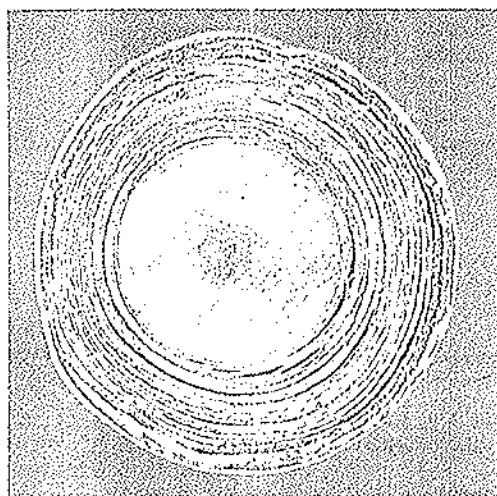
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \quad 24-11$$

#### CAPACITÂNCIA DE UM CAPACITOR CILÍNDRICO

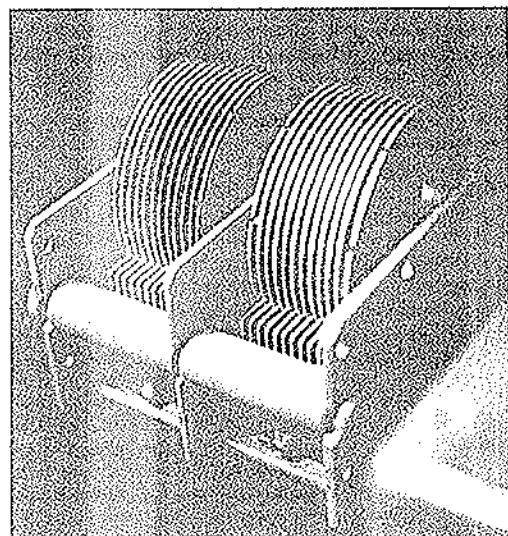


Um cabo coaxial é um capacitor longo cilíndrico com um fio maciço como condutor interno e uma blindagem de fios trançados como condutor externo. O revestimento de borracha externo foi parcialmente retirado para mostrar os condutores e o isolante plástico que separa os condutores.

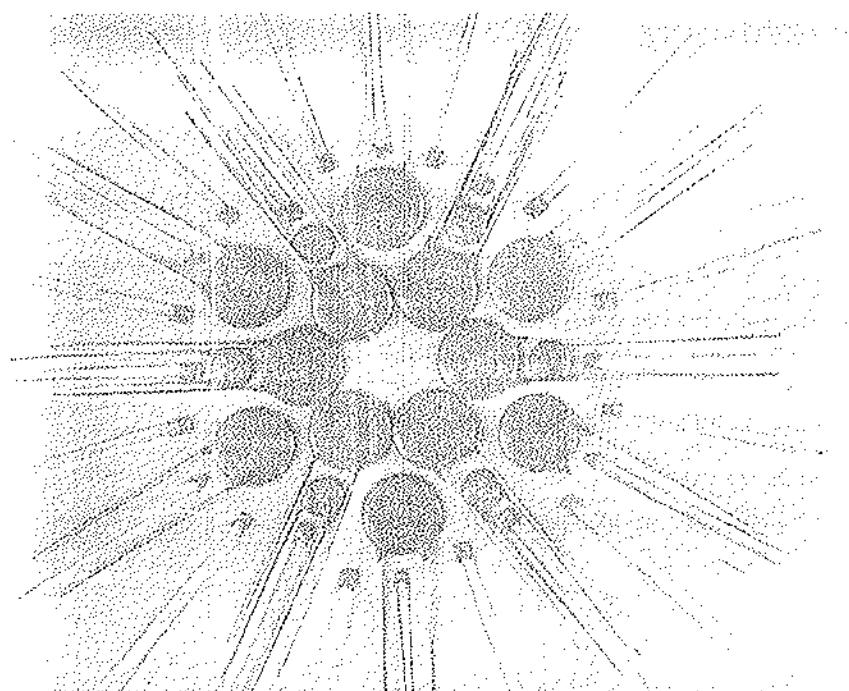
Corte de um capacitor de  $200 \mu\text{F}$  utilizado em circuitos de lâmpadas estroboscópicas.



Seção transversal de um capacitor de folhas metálicas enroladas.



Capacitor variável a ar, similar aos utilizados nos circuitos de sintonia dos rádios antigos. As placas semicirculares giram entrando entre as placas fixas, fazendo variar a área da superfície entre as placas e, consequentemente, a capacidade.



Capacitores cerâmicos utilizados em circuitos eletrônicos.

### 24.3 O Armazenamento da Energia Elétrica

Quando um capacitor está sendo eletricamente carregado, os elétrons são transferidos do condutor carregado positivamente para o condutor carregado negativamente. Essa operação deixa o condutor positivo com uma deficiência de elétrons e o condutor negativo com um excedente de elétrons. De forma alternativa, a transferência de cargas positivas do condutor negativo para o positivo também pode carregar os capacitores. Em ambos os casos, algum trabalho deve ser realizado para carregar um capacitor, e uma parte desse trabalho é armazenada como energia potencial eletrostática.

Seja  $q$  a carga positiva a ser transferida em um determinado instante do processo de carregamento. A diferença de potencial, nesse caso, será  $V = q/C$ . Se uma pequena quantidade adicional de carga positiva  $dq$  é agora transferida do

condutor negativo para o positivo através de um aumento de potencial  $V$  (Figura 24-6), a energia potencial da carga é, portanto, do capacitor é aumentada de

$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

O aumento total na energia potencial  $U$  é igual à integral de  $dU$  quando  $q$  aumenta de zero até seu valor final  $Q$  (Figura 24-7):

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Esta é a energia potencial armazenada no capacitor. Utilizando  $C = Q/V$ , pode-se expressar essa energia de várias formas:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad 24-12$$

#### ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAPACITOR

**EXERCÍCIO** Um capacitor de  $15 \mu F$  é carregado através de uma diferença de potencial de  $60 V$ . Qual é o valor da energia armazenada no capacitor? (Resposta  $0,027 J$ )

**EXERCÍCIO** Obtenha a expressão para a energia eletrostática armazenada em um capacitor (Equação 24-12) a partir da Equação 24-4, utilizando  $Q_1 = +Q$ ,  $Q_2 = -Q$ ,  $n = 2$  e  $V = V_1 - V_2$ .

Suponha que um capacitor seja carregado através de sua conexão a uma bateria. A diferença de potencial  $V$  quando o capacitor estiver totalmente carregado com uma carga  $Q$  é exatamente igual à diferença de potencial entre os terminais da bateria antes de eles serem conectados ao capacitor. O trabalho total realizado pela bateria para carregar o capacitor é  $QV$ , que é igual a duas vezes a energia armazenada no capacitor. O trabalho adicional realizado pela bateria é tanto dissipado na forma de energia térmica na bateria e nos cabos de conexão<sup>a</sup> quanto irradiada como energia eletromagnética através de ondas eletromagnéticas.<sup>b</sup>

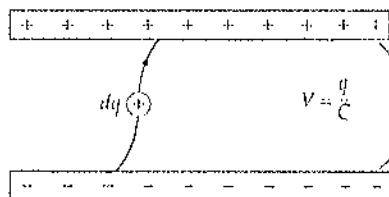


FIGURA 24-6

Quando uma pequena quantidade de carga positiva  $dq$  é deslocada do condutor negativo para o condutor positivo, sua energia potencial é aumentada de  $dU = V dq$ , onde  $V$  é a diferença de potencial entre os condutores.

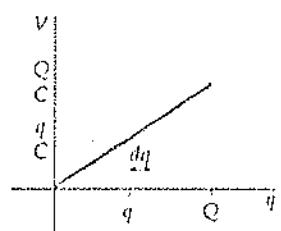


FIGURA 24-7

O trabalho necessário para carregar um capacitor é igual à integral de  $V dq$  desde a carga inicial,  $q = 0$ , até a carga final,  $q = Q$ . Esse trabalho é igual à área triangular sob a curva  $\frac{1}{2}(Q/C)Q$ .



Um capacitor de placas paralelas quadradas com  $14 \text{ cm}$  de lado e separadas por  $2,0 \text{ mm}$  é conectado a uma bateria e carregado em um potencial de  $12 \text{ V}$ . (a) Qual é a carga no capacitor? (b) Qual é a energia armazenada no capacitor? (c) Depois de carregado o capacitor, a bateria é desconectada e a distância de separação das placas é aumentada para  $3,5 \text{ mm}$ . De quanto se altera essa energia quando a distância de separação entre as placas é modificada?

<sup>a</sup>Na Seção 25-6 é mostrado que se o capacitor for conectado a uma bateria através de fios com resistência  $R$ , metade da energia fornecida pela bateria no carregamento do capacitor será dissipada pelos fios na forma de energia térmica.

<sup>b</sup>Mostra-se na Seção 30-3 que sob certas circunstâncias o circuito atuará como uma antena de radiodifusão, e uma parcela significativa do trabalho será difundida como radiação eletromagnética.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) A carga no capacitor pode ser calculada a partir da capacidade  $C_0$ , em seguida, utilizada para determinar a energia armazenada, solicitada no item (b). (c) Uma vez que o capacitor deixa de estar conectado à bateria, a carga permanece constante quando as placas são separadas. O aumento na energia é obtido utilizando a carga e o novo potencial para calcular a nova energia, da qual a energia original deve ser subtraída.

(a) 1. A carga  $Q$  no capacitor é igual ao produto de  $C_0$  por  $V_0$ , em que  $C_0$  é a capacidade e  $V_0 = 12 \text{ V}$  é a tensão da bateria:

$$2. \text{ Calcule a capacidade do capacitor de placas paralelas:} \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0}$$

$$3. \text{ Substitua esse resultado na expressão anterior para calcular } Q: \quad Q = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0} V_0$$

$$= \frac{(8,85 \text{ pF/m})(0,14 \text{ m})^2}{0,002 \text{ m}} (12 \text{ V}) = 1,04 \text{ nC}$$

(b) Calcule a energia armazenada:

$$U_0 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} (1,04 \text{ nC})(12 \text{ V}) = 6,24 \text{ nJ}$$

(c) 1. A bateria é desconectada. A diferença de potencial  $V$  entre as placas é igual à resistência do campo  $E$  multiplicada pela distância de separação  $d$ :

2. Na superfície do condutor, o campo  $E$  é proporcional à densidade superficial de carga  $\sigma = Q/A$ . Uma vez que  $Q$  é constante,  $\sigma$  é, portanto,  $E$  também serão:

3. Combinando-se as duas últimas etapas, tem-se que  $V$  é proporcional a  $d$ :

$$V = Ed$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A \epsilon_0}$$

$$V = Ed = \frac{Q}{A \epsilon_0} d$$

assim

$$\frac{V}{d} = \frac{V_0}{d_0}, \quad \text{ou} \quad \left( V = \frac{d}{d_0} V_0 \right)$$

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} Q \frac{d}{d_0} V_0 = \frac{d}{d_0} \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{d}{d_0} U_0$$

assim

$$\Delta U = U - U_0 = \frac{d}{d_0} U_0 - U_0 = \left( \frac{d}{d_0} - 1 \right) U_0$$

$$= \left( \frac{3,5 \text{ mm}}{2,0 \text{ mm}} - 1 \right) (6,24 \text{ nJ}) = 4,68 \text{ nJ}$$

**NOTA** A energia adicional calculada no item (c) é oriunda do trabalho realizado pelo agente responsável pelo aumento da separação entre as placas, que se atraem mutuamente. Uma aplicação da variação da capacidade com a distância de separação é mostrada na Figura 24-8.

**EXERCÍCIO** Determine a tensão final  $V$  entre as placas do capacitor. (Resposta 21,0 V)

**EXERCÍCIO** (a) Determine a capacidade inicial  $C_0$  nesse exemplo quando a separação das placas é de 2,0 mm. (b) Determine a capacidade final  $C$  quando a separação das placas é de 3,5 mm. (Resposta (a)  $C_0 = 86,7 \text{ pF}$  e (b)  $C = 49,6 \text{ pF}$ )

O item (c) do Exemplo 24-4 pode ser abordado de outra maneira. As placas com cargas opostas de um capacitor exercem forças atrativas uma sobre a outra. Para aumentar a distância de separação das placas deve-se realizar trabalho contra essas forças. Admita que a placa inferior seja mantida fixa e que a superior se move. A força atuante sobre a placa superior é igual à carga  $Q$  presente na placa multiplicada pelo campo elétrico  $E'$  devido à carga  $-Q$  presente na placa inferior. Esse campo é igual à metade do campo total  $E$  entre as placas (uma vez que as cargas nas placas superior e inferior contribuem igualmente para o campo). Quando a diferença de potencial for igual a 12 V e a separação for de 2 mm, a resistência total do campo entre as placas será

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 6 \text{ V/mm} = 6 \text{ kV/m}$$

A intensidade da força exercida sobre a placa superior pela placa inferior será, portanto,

$$F = QE' = Q(\frac{1}{2}E) = (1,04 \text{ nC})(3 \text{ kV/m}) = 3,12 \mu\text{N}$$

O trabalho a ser realizado para mover a placa superior de uma distância  $\Delta d = 1,5 \text{ mm}$  pode, assim, ser calculado como

$$W = F \Delta d = (3,12 \mu\text{N})(1,5 \text{ mm}) = 4,68 \text{ nJ}$$

Esta é a mesma quantidade de energia calculada no item (c) do Exemplo 24-4. Esse trabalho é igual ao aumento na energia armazenada.

### Energia do Campo Eletrostático

Durante o processo de carregamento de um capacitor, um campo elétrico é produzido entre as placas. O trabalho necessário para carregar o capacitor pode ser idealizado como o trabalho necessário para gerar esse campo elétrico. Isto é, pode-se imaginar a energia armazenada em um capacitor como a energia armazenada no campo elétrico, que é chamada de energia do campo eletrostático.

Considere um capacitor de placas paralelas. Pode-se relacionar a energia armazenada no capacitor à resistência  $E$  do campo elétrico entre as placas. A diferença de potencial entre as placas é relacionada ao campo elétrico pela equação  $V = Ed$ , onde  $d$  é a distância de separação das placas. A capacitância é expressa por  $C = \epsilon_0 A/d$  (Equação 24-10). A energia armazenada é

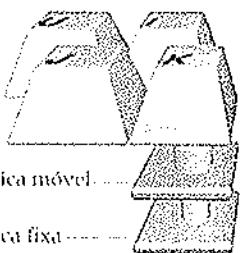
$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad)$$

A quantidade  $Ad$  é o volume do espaço entre as placas do capacitor onde o campo elétrico está presente. A energia por unidade de volume é chamada de densidade de energia (ou energia específica)  $u_e$ . Portanto, a densidade de energia em um campo elétrico com resistência  $E$  pode ser expressa por

$$u_e = \frac{\text{energia}}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad 24-13$$

### DENSIDADE DE ENERGIA DE UM CAMPO ELETROSTÁTICO

Assim, a energia por unidade de volume de um campo eletrostático é proporcional ao quadrado da resistência do campo elétrico. Embora a Equação 24-13 tenha sido obtida considerando o campo elétrico entre as placas de um capacitor de placas paralelas, esse resultado pode ser aplicado a qualquer campo elétrico. Assim, quando existe um campo elétrico no espaço a energia eletrostática por unidade de volume é expressa pela Equação 24-13.



**FIGURA 24-8**  
Chave capacitiva utilizada no teclado de computadores. Uma placa metálica fixa a cada chave atua como placa superior de capacitor. Pressionando-se a tecla diminui-se a separação entre as placas superior e inferior e aumenta-se a capacitância, que liga o circuito eletrônico do computador para registrar e processar o sinal.

**EXERCÍCIO** (a) Calcule a densidade de energia  $u_e$  para o Exemplo 24-4 quando a separação entre as placas for de 2,0 mm. (b) Mostre que o aumento na energia do Exemplo 24-4 é igual à densidade de energia  $u_e$  multiplicada pelo aumento no volume ( $\Delta \text{vol}$ ) entre as placas. (Respostas (a)  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = 159,3 \mu\text{J}/\text{m}^3$ , e (b)  $\Delta \text{vol} = A \Delta d = 2,94 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ ,  $u_e \Delta \text{vol} = 4,68 \text{ nJ}$ , o que está de acordo com os resultados apresentados no Exemplo 24-4)

Pode-se ilustrar a generalidade da Equação 24-13 calculando a energia do campo eletrostático de um condutor esférico de raio  $R$  que possui uma carga  $Q$ . A energia potencial eletrostática em função da carga  $Q$  e do potencial  $V$  é dada pela Equação 24-12:

$$U = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2} QV \quad 24-14$$

Obtém-se agora o mesmo resultado considerando a densidade de energia de um campo elétrico expressa pela Equação 24-13. Quando o condutor possui uma carga  $Q$ , o campo elétrico é radial e dado por

$$E_r = 0, \quad r < R \quad (\text{no interior do condutor})$$

$$E_r = \frac{kQ}{r^2}, \quad r > R \quad (\text{externo ao condutor})$$

Uma vez que o campo elétrico tem simetria esférica, escolhe-se uma casca esférica como elemento de volume. Se o raio da casca é  $r$  e sua espessura é  $dr$ , seu volume será  $dV = 4\pi r^2 dr$  (Figura 24-9). A energia  $dU$  nesse elemento de volume é

$$\begin{aligned} dU &= u_e dV = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{kQ}{r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{1}{2} (4\pi \epsilon_0 k^2) Q^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} kQ^2 r^{-2} dr \end{aligned}$$

onde se considerou  $4\pi \epsilon_0 = 1/k$ . Sendo o campo elétrico nulo para  $r < R$ , obtém-se a energia total do campo elétrico por integração desde  $r = R$  até  $r = \infty$ :

$$U = \int u_e dV = \frac{1}{2} kQ^2 \int_R^\infty r^{-2} dr = \frac{1}{2} k \frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2} Q \left( \frac{kQ}{R} \right) = \frac{1}{2} QV \quad 24-15$$

que é o mesmo resultado da Equação 24-12.

#### 24-4 Capacitores, Baterias e Circuitos

Analisa-se agora o que ocorre quando um capacitor inicialmente descarregado é conectado aos terminais de uma bateria. A diferença de potencial entre os dois terminais de uma bateria é chamada de tensão entre terminais. Tipicamente, um dos terminais de uma bateria é carregado positivamente e o outro é carregado negativamente; a separação dessas cargas é mantida por ação química no interior da bateria. Existe um campo elétrico no interior da bateria orientado para fora do terminal positivo e em direção ao terminal negativo.<sup>1</sup> Quando a placa de um capacitor descarregado é conectada ao terminal negativo da bateria, a carga negativa naquele terminal é distribuída sobre a placa. Essa distribuição fornece à placa uma pequena carga negativa e reduz momentaneamente a quantidade de carga negativa naquele terminal da bateria. Se a segunda placa do capacitor for

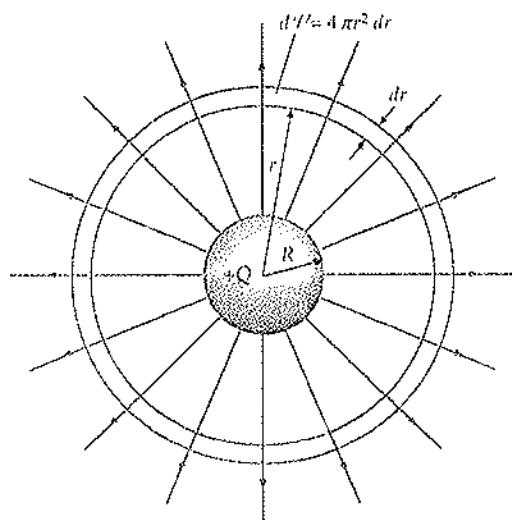


FIGURA 24-9

Geometria para o cálculo da energia eletrostática de um condutor esférico com carga  $Q$ . O volume do espaço entre  $r$  e  $r + dr$  é  $dV = 4\pi r^2 dr$ . A energia do campo eletrostático nesse elemento de volume é  $u_e dV$ , onde  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  é a densidade de energia.

<sup>1</sup>Esse campo elétrico orientado do terminal positivo para o negativo também existe fora da bateria.

então conectada ao terminal positivo da bateria, a carga nesse terminal será distribuída sobre ela — reduzindo momentaneamente a carga positiva daquele terminal da bateria. Essas reduções de carga nos terminais da bateria têm como consequência a diminuição na tensão entre os terminais. Essa redução ativa uma reação química no interior da bateria, que transfere a carga de um dos terminais para o outro no esforço de manter a tensão dos terminais em seu nível inicial, o que é chamado de tensão de circuito aberto entre os terminais. Essa reação química termina quando a bateria transferiu carga suficiente de uma placa do capacitor para a outra, elevando a diferença de potencial entre as placas para a tensão de circuito aberto entre os terminais da bateria.

É interessante imaginar uma bateria como sendo uma “bomba” de cargas elétricas. Quando as placas de um capacitor descarregado são conectadas aos terminais de uma bateria, a tensão entre os terminais cai, fazendo com que a bateria “bombeie” a carga de uma placa para outra até que a tensão de circuito aberto entre os terminais seja novamente estabelecida.

Nos diagramas utilizados para representar os circuitos elétricos, o símbolo que representa uma bateria é , onde a linha vertical mais fina e longa representa o terminal positivo e a linha vertical mais espessa e curta representa o terminal negativo. O símbolo que representa um capacitor é .

**EXERCÍCIO** Um capacitor de  $6 \mu\text{F}$ , inicialmente descarregado, é conectado aos terminais de uma bateria de 9 V. Qual é a carga total que flui através da bateria? (Resposta  $54 \mu\text{C}$ )

### Combinações de Capacitores

Um circuito consiste em um capacitor de  $6 \mu\text{F}$ , um capacitor de  $12 \mu\text{F}$ , uma bateria de 12 V e uma chave, conectados conforme mostrado na Figura 24-10. Inicialmente, a chave está aberta e os capacitores estão descarregados. A chave é então fechada e os capacitores são carregados. Quando os capacitores estão totalmente carregados e a tensão de circuito aberto entre os terminais é restabelecida, (a) qual é o potencial de cada condutor no circuito? (b) Qual é a carga total que passa pela bateria?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O potencial é o mesmo através de um condutor em equilíbrio eletrostático. Após as cargas pararem de se mover, todos os condutores conectados por um fio condutor estarão a um mesmo potencial. A carga em um capacitor (etapas 2 e 3) está relacionada à diferença de potencial entre os seus terminais através da relação  $Q = CV$ . As cargas nas placas de um único capacitor são iguais e de sinais opostos.

- Utilize um marcador vermelho (①) para indicar o terminal positivo (+) da bateria e todos os condutores a ele conectados (Figura 24-11), e utilize um marcador azul (②) para indicar o terminal negativo (-) da bateria e todos os condutores a ele conectados:
- Utilize  $Q = CV$  para obter a intensidade da carga nas placas. A placa capacitiva com potencial mais alto possui uma carga positiva:
- As placas ficam carregadas porque a bateria atua como uma “bomba” de cargas elétricas:

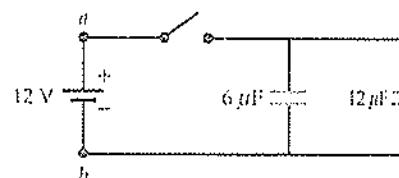


FIGURA 24-10

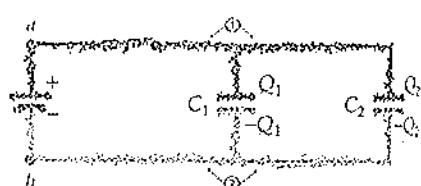


FIGURA 24-11

Todos os pontos marcados em vermelho (①) estão a um potencial  $V_a = 12 \text{ V}$

Todos os pontos marcados em azul (②) estão a um potencial  $V_b = 0$

$$Q_1 = C_1 V = (6 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 72 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V = (12 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 144 \mu\text{C}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 216 \mu\text{C}$$

**NOTA** A capacidade equivalente da combinação dos dois capacitores é  $Q/V$ , onde  $Q$  é a carga que passa pela bateria e  $V$  é a tensão de circuito aberto entre os terminais da bateria. Para esse exemplo,  $C_{eq} = (216 \mu\text{C})/(12 \text{ V}) = 18 \mu\text{F}$ .

Quando dois capacitores são ligados a um circuito, conforme mostrado na Figura 24-12, de modo que suas placas superiores sejam conectadas por um fio condutor e, portanto, a um potencial comum, e suas placas inferiores são também conectadas a um potencial comum, como os capacitores do Exemplo 24-5, os capacitores estarão na configuração em paralelo. Dispositivos conectados em paralelo ficam sujeitos a uma mesma diferença de potencial *devido exclusivamente à forma pela qual são conectados*.

Na Figura 24-12, admita que os pontos  $a$  e  $b$  sejam conectados a uma bateria ou qualquer outro dispositivo que forneça uma diferença de potencial  $V = V_a - V_b$  entre as placas de cada capacitor. Se as capacidades são  $C_1$  e  $C_2$ , as cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  armazenadas nas placas podem ser calculadas como

$$Q_1 = C_1 V$$

e

$$Q_2 = C_2 V$$

A carga total armazenada é

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

A combinação de capacitores em um circuito pode, algumas vezes, ser substituída por um único capacitor que seja operacionalmente equivalente à combinação. Ao capacitor substituto é atribuída a capacidade equivalente. Isto é, se uma combinação de capacitores inicialmente descarregados é conectada a uma bateria, a carga  $Q$  que flui através da bateria quando a combinação de capacitores fica carregada é a mesma que flui através da bateria quando um único capacitor descarregado com capacidade equivalente é carregado. Portanto, a capacidade equivalente de dois capacitores em paralelo é igual à relação entre a carga  $Q_1 + Q_2$  e a diferença de potencial:

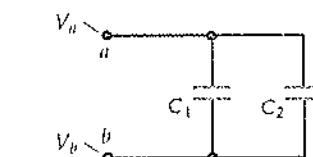
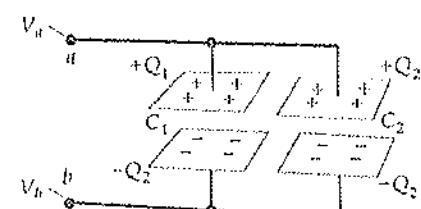
$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 \quad 24-16$$

Assim, para dois capacitores em paralelo,  $C_{eq}$  é igual à soma das capacidades individuais. Quando um segundo capacitor é conectado em paralelo, aumenta-se a capacidade da combinação. A área na qual a carga é distribuída é efetivamente aumentada, fazendo com que mais carga seja armazenada para a mesma diferença de potencial.

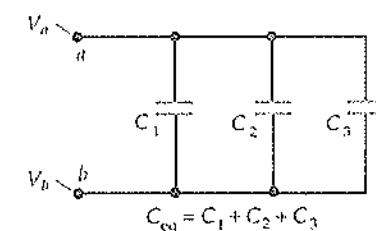
Utilizando a mesma justificativa, pode-se estender esse conceito a três ou mais capacitores conectados em paralelo, conforme mostrado na Figura 24-13:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad 24-17$$

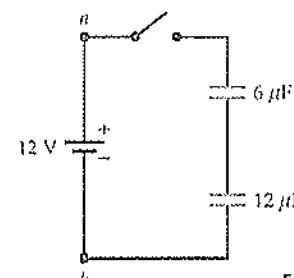
#### CAPACITÂNCIA EQUIVALENTE PARA CAPACITORES EM PARALELO



**FIGURA 24-12**  
Dois capacitores em paralelo. As placas superiores são conectadas entre si e, portanto, estão sujeitas a um mesmo potencial  $V_a$ ; as placas inferiores também estão conectadas entre si e, portanto, sujeitas a um potencial comum  $V_b$ .



**FIGURA 24-13**  
Três capacitores em paralelo. A inclusão de um capacitor em paralelo a um circuito aumenta sua capacidade equivalente.



Um circuito consiste em um capacitor de  $6 \mu\text{F}$ , um capacitor de  $12 \mu\text{F}$  e uma chave, conectados conforme mostrado na Figura 24-14. Inicialmente, a chave está aberta e os capacitores descarregados. A chave é então fechada e os capacitores são carregados. Quando os capacitores ficam totalmente carregados e a tensão entre os terminais do circuito aberto é restabelecida, (a) qual

**FIGURA 24-14**

é o potencial de cada condutor no circuito? (Admita que o ponto de referência com potencial nulo seja o terminal negativo da bateria.) Se o potencial de um condutor não é conhecido, represente-o simbolicamente. (b) Qual é a carga em cada placa dos capacitores? (c) Qual é a carga total que passa pela bateria?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) O potencial através de um condutor em equilíbrio eletrostático é único. Após as cargas cesarem seu movimento, todos os condutores conectados por um fio condutor estarão a um mesmo potencial. A carga em um capacitor, itens (b) e (c), está relacionada à diferença de potencial entre os terminais do capacitor por  $Q = CV$ . Em um capacitor, a carga não se move de uma placa para outra.

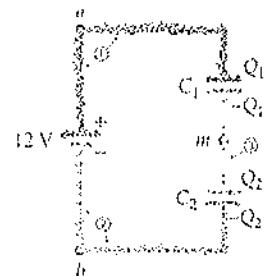


FIGURA 24-15

- (a) Utilize um marcador vermelho (1) para indicar o terminal positivo (+) da bateria e todos os condutores a ele conectados, utilize um marcador azul (2) para indicar o terminal negativo (-) da bateria e todos os condutores a ele conectados, e utilize um marcador verde (3) para indicar todos os demais condutores mutuamente conectados (Figura 24-15):
1. Expressse a diferença de potencial entre os terminais dos capacitores em função dos resultados do item (a):

$$\text{Todos os pontos marcados em vermelho (1) estão a um potencial } V_a = 12 \text{ V}$$

$$\text{Todos os pontos marcados em azul (2) estão a um potencial } V_b = 0$$

$$\text{Todos os pontos marcados em verde (3) estão a um potencial } V_m$$

2. Utilize a expressão  $Q = CV$  para relacionar a carga em cada capacitor à diferença de potencial:

3. Eliminando  $V_m$  tem-se:

4. Durante o carregamento, não há carga transferida para ou da região verde do circuito mostrado na Figura 24-15, logo sua carga resultante permanece nula:

5. Seja  $Q = Q_1 = Q_2$ . Substitua  $Q_1$  e  $Q_2$  por  $Q$  e resolva para  $Q$ :

$$V_1 = V_a - V_m$$

e

$$V_2 = V_m - V_b$$

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1(V_a - V_m)$$

e

$$Q_2 = C_2 V_2 = C_2(V_m - V_b)$$

$$\left. \begin{aligned} V_a - V_m &= \frac{Q_1}{C_1} \\ V_m - V_b &= \frac{Q_2}{C_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$(-Q_1) + Q_2 = 0$$

assim

$$Q_1 = Q_2$$

$$V_a - V_b = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

assim

$$Q = \frac{V_a - V_b}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{12 \text{ V} - 0}{\frac{1}{6 \mu\text{F}} + \frac{1}{12 \mu\text{F}}} = 48 \mu\text{C}$$

$$Q_1 = Q_2 = 48 \mu\text{C}$$

6. Toda carga que passa pela bateria termina na placa superior do capacitor  $C_1$ :

$$Q_1 = Q = 48 \mu\text{C}$$

**NOTA** A capacidade equivalente da combinação dos dois capacitores é  $Q/V$ , onde  $Q$  é a carga que passa pela bateria e  $V$  é a tensão de circuito aberto entre os terminais da bateria. Para esse exemplo,  $C_{eq} = (48 \mu\text{C})/(12 \text{ V}) = 4 \mu\text{F}$ .

**EXERCÍCIO** Determine a tensão  $V_m$  nos condutores marcados em verde na Figura 24-15. (Resposta 4,0 V)

Na Figura 24-16, dois capacitores são conectados de modo que a diferença de potencial do conjunto é igual à soma das diferenças de potencial entre os terminais dos capacitores individuais, exatamente como ocorreu no Exemplo 24-6. Dispositivos conectados dessa maneira representam uma conexão em série.

Os capacitores  $C_1$  e  $C_2$  da Figura 24-16 estão conectados em série e inicialmente estão descarregados. Se os pontos  $a$  e  $b$  forem conectados aos terminais de uma bateria, os elétrons serão “bombeados” da placa superior de  $C_1$  para a placa inferior de  $C_2$ . Essa transferência de elétrons deixa a placa superior de  $C_1$  com uma carga  $+Q$  e a placa inferior de  $C_2$  com uma carga  $-Q$ . Quando uma carga  $+Q$  aparece na placa superior de  $C_1$ , o campo elétrico produzido por essa carga induz uma carga negativa idêntica,  $-Q$ , na placa inferior de  $C_1$ . Essa carga é decorrente dos elétrons presentes na placa superior de  $C_2$ . Assim, haverá uma carga igual  $+Q$  na placa superior do segundo capacitor e uma correspondente carga  $-Q$  em sua placa inferior. A diferença de potencial entre os terminais do primeiro capacitor é

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

Analogamente, a diferença de potencial entre os terminais do segundo capacitor é

$$V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

A diferença de potencial entre os dois capacitores em série é igual à soma dessas diferenças de potencial:

$$V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad 24-18$$

A capacidade equivalente aos dois capacitores em série é definida como

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad 24-19$$

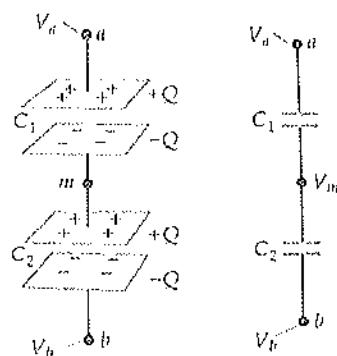
Substituindo  $V$  por  $Q/C_{eq}$  na Equação 24-18 e, em seguida, dividindo ambos os lados da equação por  $Q$ , tem-se

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad 24-20$$

Note que no exercício anterior a capacidade equivalente aos dois capacitores em série foi menor que a capacidade individual de cada capacitor. Ao introduzir-se um capacitor em série aumenta-se o valor de  $1/C_{eq}$ , o que significa que a capacidade equivalente  $C_{eq}$  diminui. Ao introduzir-se um segundo capacitor em série, diminui-se a capacidade do conjunto. A distância de separação entre as placas é, basicamente, aumentada, exigindo uma maior diferença de potencial para armazenar a mesma carga.

A Equação 24-20 pode ser generalizada para três ou mais capacitores conectados em série:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad 24-21$$



**FIGURA 24-16**  
A carga total nas duas placas interconectadas dos capacitores é nula. A diferença de potencial entre o conjunto de capacitores é igual à soma das diferenças de potenciais entre os terminais de cada capacitor. Os dois capacitores estão conectados em série.



Um banco de capacitores para armazenamento de energia é utilizado no laser pulsado Nova dos laboratórios Lawrence Livermore. O laser é utilizado nas pesquisas sobre fusão nuclear.

**Q** Essa expressão somente será válida se os capacitores estiverem em série e se a carga total em cada par de placas conectadas por um fio for nula.

**EXERCÍCIO** Dois capacitores possuem capacitâncias de  $20 \mu\text{F}$  e  $30 \mu\text{F}$ . Determine a capacitância equivalente se eles forem conectados (a) em paralelo e (b) em série. (Resposta (a)  $50 \mu\text{F}$ , (b)  $12 \mu\text{F}$ ).

Um capacitor de  $6 \mu\text{F}$  e outro de  $12 \mu\text{F}$ , ambos inicialmente descarregados, são conectados em série entre os terminais de uma bateria de  $12 \text{ V}$ . Utilizando a fórmula de equivalência para capacitores em série, determine a carga em cada capacitor e a diferença de potencial entre os terminais de cada um deles.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A Figura 24-17a mostra o circuito desse exemplo e a Figura 24-17b mostra um capacitor equivalente que possui a mesma carga  $Q = C_{\text{eq}}V$ . Após a determinação da carga, pode-se obter a queda de potencial entre os terminais de cada capacitor.

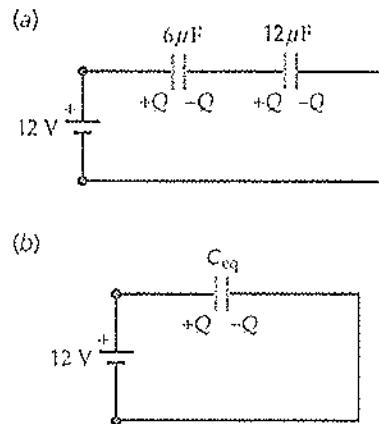


FIGURA 24-17

1. A carga em cada capacitor é igual à carga no capacitor equivalente:  $Q = C_{\text{eq}}V$

2. A capacitância equivalente da combinação em série dos capacitores é obtida pela equação:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6 \mu\text{F}} + \frac{1}{12 \mu\text{F}} = \frac{3}{12 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{eq}} = 4 \mu\text{F}$$

3. Utilize esse valor para determinar a carga  $Q$ . Essa é a carga que passou pela bateria. Ela será, portanto, a carga em cada capacitor:

$$Q = C_{\text{eq}}V = (4 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 48 \mu\text{C}$$

4. Utilize o resultado obtido para  $Q$  na determinação do potencial entre os terminais do capacitor de  $6 \mu\text{F}$ :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{48 \mu\text{C}}{6 \mu\text{F}} = 8 \text{ V}$$

5. Utilize o valor de  $Q$  novamente, para obter o potencial entre os terminais do capacitor de  $12 \mu\text{F}$ :

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{48 \mu\text{C}}{12 \mu\text{F}} = 4 \text{ V}$$

**VERIFICAÇÃO** A soma dessas diferenças de potenciais é igual a  $12 \text{ V}$ , conforme requerido.

**NOTA** Os resultados são idênticos aos obtidos no Exemplo 24-6.

### EXEMPLO 24-8

Os dois capacitores do Exemplo 24-7 são removidos da bateria e cuidadosamente desconectados um do outro, de modo que a carga em suas placas não seja modificada (Figura 24-18a). Eles são então conectados novamente a um circuito que contém duas chaves abertas, que podem conectar uma placa positiva a outra também positiva, e uma placa negativa a outra também negativa (Figura 24-18b). Determine a diferença de potencial entre os terminais dos

Tente resolver este exemplo sozinho

(a) D  
trado r  
desa  
seus

DESEN  
res d  
conc  
citan

capacitores e a carga em cada capacitor após as chaves serem fechadas e as cargas pararem de fluir.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Imediatamente após os dois capacitores serem desconectados da bateria, eles possuem cargas iguais de  $48 \mu\text{C}$ . Após as chaves  $S_1$  e  $S_2$  serem fechadas no novo circuito, os capacitores ficam em paralelo entre os pontos  $a$  e  $b$ . As diferenças de potencial entre os terminais dos capacitores são idênticas, e a capacidade equivalente do sistema é  $C_{eq} = C_1 + C_2$ . As duas placas positivas formam um único condutor com carga  $Q = 48 \mu\text{C}$ , e as placas negativas formam um condutor com carga  $-Q = -48 \mu\text{C}$ . Portanto, a diferença de potencial é  $V = Q/C_{eq}$ , e as cargas nos dois capacitores são  $Q_1 = C_1 V$  e  $Q_2 = C_2 V$ .

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

1. Os fios do circuito estão dispostos de modo que após as chaves serem fechadas as diferenças de potenciais entre os terminais dos capacitores são idênticas.
2. Para cada capacitor,  $V = Q/C$ . Substitua essa relação no resultado da primeira etapa. Considere que  $C_1$  seja o capacitor de  $6 \mu\text{F}$ .
3. A soma das cargas nas duas placas esquerdas dos capacitores continua sendo  $96 \mu\text{C}$ .
4. Resolva para a carga em cada capacitor.
5. Calcule a diferença de potencial.

#### Respostas

$$V = V_1 = V_2$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q_1 + Q_2 = 96 \mu\text{C}$$

$$Q_1 = \boxed{32 \mu\text{C}}, \quad Q_2 = \boxed{64 \mu\text{C}}$$

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \boxed{5,33 \text{ V}}$$

**VERIFICAÇÃO** Note que  $Q = Q_1 + Q_2 = 96 \mu\text{C}$ , e que  $Q_2/C_2 = 5,33 \text{ V}$ , conforme requerido.

**NOTA** Após as chaves serem fechadas, os dois capacitores ficam conectados em paralelo, com a diferença de potencial entre os pontos  $a$  e  $b$  sendo a diferença de potencial entre os terminais dos dois capacitores. Assim,  $C_{eq} = C_1 + C_2 = 18 \mu\text{F}$ ,  $Q = Q_1 + Q_2 = 96 \mu\text{C}$  e  $V = Q/C_{eq} = 5,33 \text{ V}$ .

**EXERCÍCIO** Determine a energia armazenada nos capacitores antes e após eles serem conectados. [Respostas  $U_i = q^2/(2C_1) + q^2/(2C_2)$ , onde  $q = 48 \mu\text{C}$ . Assim,  $U_i = 288 \mu\text{J}$ .  $U_f = Q_1^2/(2C_1) + Q_2^2/(2C_2) = 256 \mu\text{J}$ . Note que  $32 \mu\text{J}$  são perdidos como energia térmica nos fios ou na forma de energia irradiada.]

(a) Determine a capacidade equivalente do circuito com três capacitores mostrado na Figura 24-19. (b) Considerando que inicialmente os capacitores estão descarregados, determine a carga em cada um deles e a queda de tensão entre seus terminais após o circuito ser conectado a uma bateria de 6 V.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Os capacitores de  $2 \mu\text{F}$  e  $4 \mu\text{F}$  estão conectados em paralelo, e a combinação em paralelo está conectada em série com o capacitor de  $3 \mu\text{F}$ . Determina-se, inicialmente, a capacidade equivalente aos capacitores de  $2 \mu\text{F}$  e  $4 \mu\text{F}$  (Figura 24-20a), em seguida

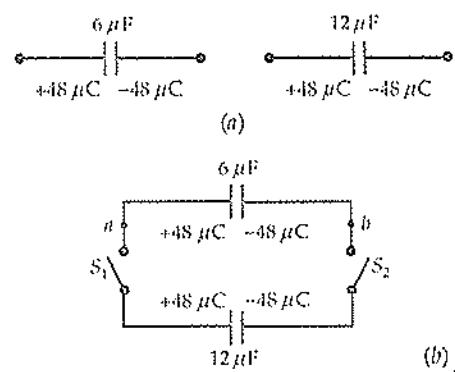


FIGURA 24-18

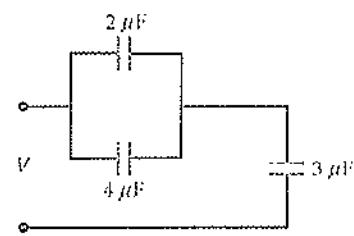


FIGURA 24-19

combina-se essa capacidade equivalente com o capacitor de  $3 \mu\text{F}$ , obtendo-se uma capacidade equivalente final (Figura 24-20b). (b) A carga no capacitor de  $3 \mu\text{F}$  é a que passa pela bateria  $Q = C_{eq}V$ , conforme mostrado na Figura 24-20a.

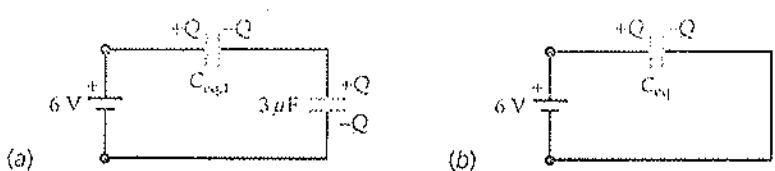


FIGURA 24-20

- (a) 1. A capacidade equivalente de dois capacitores em paralelo é igual à soma das capacidades:  
 $C_{eq,1} = C_1 + C_2 = 2 \mu\text{F} + 4 \mu\text{F} = 6 \mu\text{F}$
2. Determine a capacidade equivalente de um capacitor de  $6 \mu\text{F}$  em série com um capacitor de  $3 \mu\text{F}$ :  
 $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq,1}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6 \mu\text{F}} + \frac{1}{3 \mu\text{F}} = \frac{1}{2 \mu\text{F}}$   
 $C_{eq} = 2 \mu\text{F}$
- (b) 1. Calcule a carga  $Q$  fornecida pela bateria. Esta será, também, a carga no capacitor de  $3 \mu\text{F}$ :  
 $Q = C_{eq}V = (2 \mu\text{F})(6 \text{ V}) = 12 \mu\text{C}$
2. A queda de potencial entre os terminais do capacitor de  $3 \mu\text{F}$  é  $Q/C_3$ :  
 $V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{12 \mu\text{C}}{3 \mu\text{F}} = 4 \text{ V}$
3. A queda de potencial entre os terminais da combinação em paralelo  $V_{2,4}$  é  $Q/C_{eq,1}$ :  
 $V_{2,4} = \frac{Q}{C_{eq,1}} = \frac{12 \mu\text{C}}{6 \mu\text{F}} = 2 \text{ V}$
4. A carga em cada um dos capacitores em paralelo é obtida por  $Q_i = C_i V_{2,4}$ , onde  $V_{2,4} = 2 \text{ V}$ :  
 $Q_2 = C_2 V_{2,4} = (2 \mu\text{F})(2 \text{ V}) = 4 \mu\text{C}$   
 $Q_4 = C_4 V_{2,4} = (4 \mu\text{F})(2 \text{ V}) = 8 \mu\text{C}$

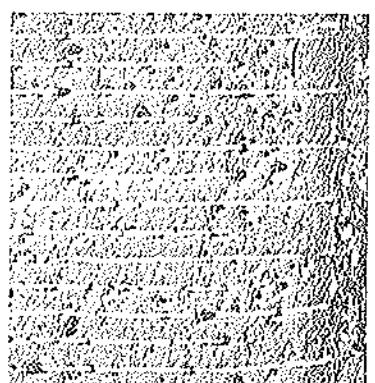
**VERIFICAÇÃO** A queda de tensão entre os terminais da combinação em paralelo ( $2 \text{ V}$ ), somada àquela entre os terminais do capacitor de  $3 \mu\text{F}$  ( $4 \text{ V}$ ), é igual à tensão nos terminais da bateria. A soma das cargas nos capacitores em paralelo ( $4 \mu\text{C} + 8 \mu\text{C}$ ) também é igual à carga total ( $12 \mu\text{C}$ ) no capacitor de  $3 \mu\text{F}$ .

**EXERCÍCIO** Determine a energia armazenada em cada capacitor. (Resposta  $U_2 = 4 \mu\text{J}$ ,  $U_3 = 24 \mu\text{J}$ ,  $U_4 = 16 \mu\text{J}$ . Note que  $U_2 + U_3 + U_4 = 36 \mu\text{J} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q^2/C_{eq} = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$ .)

### 24-21 Dielétricos

Um material não-condutor (como ar, vidro, papel ou madeira) é chamado de dielétrico. Quando o espaço entre dois condutores de um capacitor é ocupado por um dielétrico, a capacidade aumenta de um fator  $K$  que é uma característica do dielétrico. Esse fenômeno foi descoberto experimentalmente por Michael Faraday. A razão desse aumento é que o campo elétrico entre as placas de um capacitor é enfraquecido pelo dielétrico. Assim, para uma determinada carga nas placas, a diferença de potencial é reduzida e a capacidade ( $Q/V$ ) é aumentada.

Considere um capacitor carregado isolado sem um dielétrico entre suas placas. Em seguida, admita que um material dielétrico seja inserido entre as placas, preenchendo completamente o espaço entre elas. Se o campo elétrico



Seção em corte de um capacitor com múltiplas camadas e um dielétrico cerâmico. As linhas brancas são as bordas das placas condutoras.

o antes de o material dielétrico ser inserido é  $E_0$ , após sua inserção o campo será

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

24-22

#### CAMPO ELÉTRICO NO INTERIOR DE UM DIELÉTRICO

onde  $\kappa$  (letra grega capa) é chamada de **constante dielétrica**. Para um capacitor de placas paralelas com distância de separação  $d$ , a diferença de potencial  $V$  entre as placas é

$$V \approx Ed = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa}$$

onde  $V$  é a diferença de potencial com o dielétrico e  $V_0 = E_0 d$  é a diferença de potencial original sem o dielétrico. A nova capacitância vale

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q}{V_0}$$

ou

$$C = \kappa C_0$$

24-23

#### EFEITO DE UM DIELÉTRICO NA CAPACITÂNCIA

onde  $C_0 = Q/V_0$  é a capacitância sem o dielétrico. A capacitância de um capacitor de placas paralelas com um dielétrico de constante  $\kappa$  preenchendo o espaço entre as placas será, portanto,

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \quad 24-24$$

onde

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0$$

24-25

é a permissividade do dielétrico.

Nas discussões anteriores, o capacitor foi isolado de modo que se admitiu que a carga em suas placas não varia quando o dielétrico é inserido. Essa condição é verdadeira para o caso em que o capacitor é carregado e, em seguida, removido da fonte de carga (a bateria) antes da inserção do dielétrico. Se o dielétrico é inserido enquanto a bateria estiver conectada, esta fornecerá uma carga adicional para manter a diferença de potencial original. A carga total nas placas será, então,  $Q = \kappa Q_0$ . Nesse caso, a capacitância ( $Q/V$ ) é aumentada de um fator  $\kappa$ .

**EXERCÍCIO** O espaço entre as placas do capacitor de 88,5 pF do Exemplo 24-2 é preenchido com um dielétrico cuja constante  $\kappa = 2$ . (a) Determine a nova capacitância. (b) Determine a carga no capacitor com o dielétrico, considerando que ele seja conectado a uma bateria de 12 V. (Respostas (a) 177 pF, (b) 2,12 nC)

**EXERCÍCIO** O capacitor do exercício anterior é carregado pela bateria de 12 V sem o dielétrico e, em seguida, é desconectado da bateria. O dielétrico de constante  $\kappa = 2$  é então inserido. Determine os novos valores (a) da carga  $Q$ , (b) da tensão  $V$  e (c) da capacitância  $C$ . (Respostas (a)  $Q = 1,06 \text{ nC}$ , e fica inalterada; (b)  $V = 6 \text{ V}$ ; (c)  $C = 177 \text{ pF}$ )

Os dielétricos não apenas aumentam a capacitância de um capacitor, eles também propiciam o paralelismo das placas condutoras e aumentam a dife-

rença de potencial na qual ocorre a ruptura dielétrica.<sup>†</sup> Considere um capacitor de placas paralelas, constituído de duas folhas metálicas separadas por um material plástico delgado. O material plástico permite uma configuração em que as folhas metálicas fiquem bem próximas uma da outra sem entrar em contato elétrico, e sendo a resistência dielétrica do plástico maior que a do ar pode-se alcançar uma diferença de potencial maior antes de ocorrer a ruptura dielétrica. A Tabela 24-1 relaciona as constantes dielétricas e as resistências dielétricas de alguns dielétricos. Observe que para o ar,  $\kappa \approx 1$ ; logo, para muitas situações práticas não haverá necessidade de fazer a distinção entre o ar e o vácuo.

**TABELA 24-1**  
Constantes Dielétricas e Resistências Dielétricas de Diversos Materiais

Material	Constante Dielétrica $\kappa$	Resistência Dielétrica, kV/mm
Ar	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Vidro (Pirex)	5,6	14
Mica	5,4	10-100
Neoprene	6,9	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1-2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Óleo de transformador	2,24	12

As placas paralelas de um capacitor são quadradas, com 10 cm de lado e separadas de uma distância  $d = 4$  mm. Uma chapa dielétrica de constante  $\kappa = 2$  possui as dimensões de 10 cm  $\times$  10 cm  $\times$  4 mm. (a) Qual é o valor da capacitância sem o dielétrico? (b) Qual será o valor da capacitância se a chapa dielétrica preencher o espaço entre as placas? (c) Qual será o valor da capacitância se uma chapa dielétrica com dimensões de 10 cm  $\times$  10 cm  $\times$  3 mm for inserida no espaçamento de 4 mm?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A capacitância sem o dielétrico,  $C_0$ , é obtida a partir da área e da distância de separação entre as placas (Figura 24-21a). Quando o espaçamento entre as placas do capacitor é preenchido com um dielétrico de constante  $\kappa$  (Figura 24-21b), a capacitância será  $C = \kappa C_0$  (Equação 24-23). Quando o dielétrico ocupa apenas parte da distância de separação entre as placas (Figura 24-21c), a diferença de potencial  $V$  deve ser calculada para uma determinada carga  $Q$  e, em seguida, aplica-se a definição de capacitância,  $C = Q/V$ .

<sup>†</sup>No Capítulo 23 foi mostrado que para os campos elétricos maiores que  $3 \times 10^6$  V/m ocorre a ruptura dielétrica do ar; isto é, ele fica ionizado e começa a conduzir eletricidade.

VERIFICAR  
que  
do  
Em  
pab  
de  
4Cp  
na  
com  
igu

NOTA

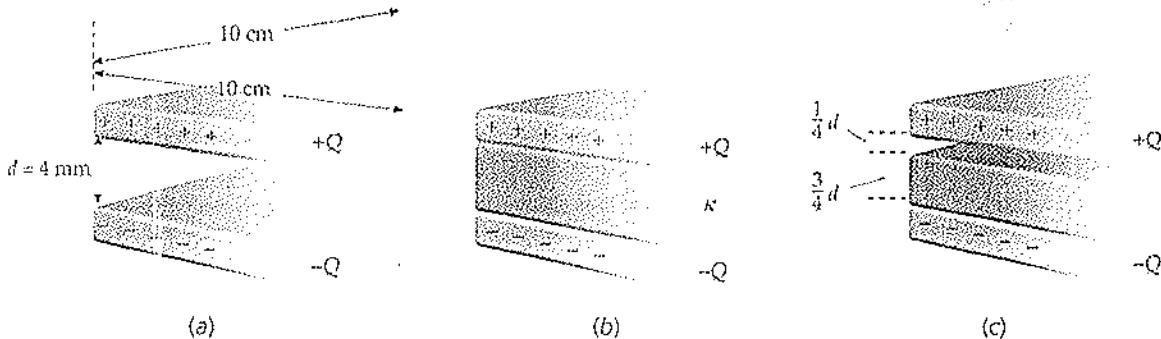


FIGURA 24-21

- (a) A capacidade sem o dielétrico,  $C_0$ , pode ser calculada pela Equação 24-10:

- (b) Quando o espaçamento entre as placas do capacitor é preenchido com um dielétrico de constante  $\kappa$ , a capacidade  $C$  é aumentada de um fator  $\kappa$ :

- (c)
1. A nova capacidade está relacionada à carga original  $Q$  e à nova diferença de potencial  $V$ :
  2. A diferença de potencial  $V$  entre as placas é igual à soma da diferença de potencial para o espaçamento vazio com a diferença de potencial na chapa dielétrica:
  3. O campo elétrico no espaçamento nas proximidades do condutor é o campo original  $E_0$ :
  4. O campo elétrico na chapa dielétrica é reduzido pelo fator  $\kappa$ :
  5. Combinando os dois resultados anteriores têm-se o potencial  $V$  em função de  $\kappa$ . Note que a diferença de potencial original é  $V_0 = E_0 d$ :
  6. Utilizando a equação  $C = Q/V$ , determina-se a nova capacidade em função da capacidade original  $C_0 = Q/V_0$ :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85 \text{ pF/m})(0,1 \text{ m})^2}{0,004 \text{ m}} = 22,1 \text{ pF}$$

$$C = \kappa C_0 = (2)(22,1 \text{ pF}) = 44,2 \text{ pF}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$V = V_{\text{esp}} + V_{\text{chapa}} = E_{\text{esp}}(\frac{1}{4}d) + E_{\text{chapa}}(\frac{3}{4}d)$$

$$E_{\text{esp}} = E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$E_{\text{chapa}} = \frac{E_0}{\kappa}$$

$$\begin{aligned} V &= E_0 \left( \frac{1}{4}d \right) + \frac{E_0}{\kappa} \left( \frac{3}{4}d \right) = E_0 d \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4\kappa} \right) \\ &= V_0 \left( \frac{\kappa + 3}{4\kappa} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0 \frac{\kappa + 3}{4\kappa}} = \frac{Q}{V_0} \left( \frac{4\kappa}{\kappa + 3} \right) = C_0 \left( \frac{4\kappa}{\kappa + 3} \right) \\ &= (22,1 \text{ pF}) \left( \frac{8}{5} \right) = 35,4 \text{ pF} \end{aligned}$$

**VERIFICAÇÃO** A ausência de um dielétrico corresponde a uma situação em que  $\kappa = 1$ . Nesse caso, o resultado para a última etapa do item (c) seria reduzido a  $C = C_0$ , conforme esperado. Suponha que a chapa dielétrica fosse condutora. Em um condutor,  $E = 0$ ; assim, de acordo com a Equação 24-22, o valor de  $\kappa$  para um condutor tende ao infinito. Quando  $\kappa$  tende ao infinito, a quantidade  $4\kappa/(\kappa + 3)$  tende a 4, logo o resultado para a última etapa do item (c) tenderia a  $4C_0$ . Uma chapa condutora simplesmente aumentaria a espessura da placa original do capacitor, assim a distância de separação entre as placas com o dielétrico condutor no local do espaçamento seria igual a  $d/4$ . Isso significa que  $C$  seria igual a  $4C_0$ , conforme previsto pela formulação para valores de  $\kappa$  muito grande.

**NOTA** Observe que os resultados desse exemplo são independentes da posição vertical da chapa dielétrica (ou condutora) no espaçamento entre as placas.

## Coloque-o no Contexto

Ao estudar os capacitores nas aulas de física, seu professor sugeriu que você construisse um capacitor de placas paralelas a partir de um papel encerado e lâminas de alumínio. Você decidiu atender à sua sugestão e construiu o capacitor utilizando um pedaço de papel de um caderno. Antes de testar a capacidade de armazenamento de carga do capacitor em seu companheiro de quarto, você decidiu calcular a quantidade de carga que o capacitor armazenará quando conectado a uma bateria de 9 V.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Se a capacitância for conhecida, a carga pode ser obtida a partir da definição  $C = Q/V$ . A capacitância é determinada pela fórmula do capacitor de placas paralelas  $C = \epsilon_0 A/d$ . Assim, é preciso medir ou estimar a espessura do papel encerado.

1. A carga em um capacitor está relacionada à tensão e à capacitância pela definição de capacitância:
2. A capacitância é obtida a partir da fórmula do capacitor de placas paralelas:
3. Substituindo essa expressão de  $C$  pode-se explicitar a carga  $Q$ :
4. Uma folha de papel de caderno possui as dimensões aproximadas de 8,5 in por 11 in:
5. Admite-se que uma folha de papel encerado tem a mesma espessura da folha do papel de seu livro de física. Meça a espessura de 300 folhas de seu livro (páginas 1 até 600):
6. Utilizando o resultado da terceira etapa, determine a carga. Admita que a constante dielétrica do papel encerado seja 2,3 (a mesma da parafina):

$$Q = CV$$

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$$

$$Q = CV = \frac{\kappa \epsilon_0 VA}{d}$$

$$A = 8,5 \text{ in} \times 11 \text{ in} = 93,5 \text{ in}^2 \approx 0,0603 \text{ m}^2$$

300 folhas de papel têm 2,0 cm (0,02 m) de espessura. Assim, a espessura de uma única folha de papel é  $0,020 \text{ m}/300 = 66,7 \mu\text{m}$

$$Q = \frac{\kappa \epsilon_0 AV}{d} = \frac{2,3(88,6 \text{ pF/m})(0,0603 \text{ m}^2)(9 \text{ V})}{66,7 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

$$= 1,66 \times 10^6 \text{ pC} = 1,66 \mu\text{C}$$

### Energia Armazenada no Capacitor com Dielétrico

A energia armazenada em um capacitor de placas paralelas com dielétrico é

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

Pode-se expressar a capacitância  $C$  em função da área e da distância de separação entre as placas, e a diferença de tensão  $V$  em função do campo elétrico e da separação entre as placas, assim,

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad)$$

O produto  $Ad$  é o volume entre as placas onde se encontra o campo elétrico. Logo, a energia por unidade de volume será

$$u_v = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2$$

24-26

Parte dessa energia está associada ao campo elétrico (Equação 24-13), e o restante está associado à polarização do dielétrico (fenômeno discutido na Seção 24-6).

Dois capacitores de placas paralelas, com capacidades idênticas  $C_1 = C_2 = 2 \mu F$ , são conectados em paralelo aos terminais de uma bateria de 12 V. (a) Determine a carga em cada capacitor. (b) Determine a energia total armazenada nos capacitores.

A combinação em paralelo é então desconectada da bateria e uma chapa dielétrica de constante  $\kappa = 2,5$  é inserida entre as placas do capacitor  $C_2$ , preenchendo completamente o espaço entre elas. Após o dielétrico ser inserido, determine (c) a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor, (d) a carga em cada capacitor e (e) a energia total armazenada nos capacitores.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) A carga  $Q$  e (b) a energia total  $U$  podem ser obtidas para cada capacitor a partir de sua capacidade  $C$  e da tensão  $V$  entre seus terminais. (c) Após os capacitores serem desconectados da bateria, a carga total de ambos permanecerá inalterada. Quando o dielétrico é inserido em um dos capacitores, sua capacidade  $C_2$  varia. O potencial entre os terminais da combinação em paralelo pode ser obtido a partir da carga total e da capacidade equivalente.

- (a) A carga em cada capacitor é determinada a partir de sua capacidade e da tensão entre seus terminais:

$$Q = CV = (2 \mu F)(12 V) = 24 \mu C$$

- (b) 1. A energia armazenada em cada capacitor é determinada a partir de sua carga e da tensão entre seus terminais:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2}(24 \mu C)(12 V) = 144 \mu J$$

2. O valor da energia total é o dobro da armazenada em cada capacitor:

$$U_{\text{total}} = 2U = 288 \mu J$$

- (c) 1. O potencial entre os terminais da combinação em paralelo está relacionado à carga total  $Q_{\text{total}}$  e à capacidade equivalente  $C_{\text{eq}}$ :

$$V = \frac{Q_{\text{total}}}{C_{\text{eq}}}$$

2. A capacidade  $C_2$  do capacitor com o dielétrico é aumentada de um fator  $\kappa$ . A capacidade equivalente é igual à soma das capacidades:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = C_1 + \kappa C_2 = (2 \mu F) + (2,5)(2 \mu F)$$

$$= 2 \mu F + 5 \mu F = 7 \mu F$$

3. A carga total permanece igual a  $48 \mu C$ . Com  $Q_{\text{total}}$  e  $C_{\text{eq}}$  pode-se calcular  $V$ :

$$V = \frac{Q_{\text{total}}}{C_{\text{eq}}} = \frac{48 \mu C}{7 \mu F} = 6,86 V$$

- (d) A carga em cada capacitor é novamente calculada a partir de sua capacidade e de sua tensão  $V$ :

$$Q_1 = C_1 V = (2 \mu F)(6,86 V) = 13,7 \mu C$$

- (e) A energia armazenada em cada capacitor é obtida a partir de sua nova carga e da nova tensão entre seus terminais:

$$Q_2 = C_2 V = (5 \mu F)(6,86 V) = 34,3 \mu C$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} Q_1 V + \frac{1}{2} Q_2 V = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)V$$

$$= \frac{1}{2}(13,7 \mu C + 34,3 \mu C)(6,86 V) = 165 \mu J$$

**VERIFICAÇÃO** Quando o dielétrico é inserido em um dos capacitores, o campo é enfraquecido e a diferença de potencial diminui. Uma vez que os dois capacitores estão conectados em paralelo, a carga deve fluir de um para o outro mantendo a diferença de potencial entre eles inalterada. Note que o capacitor com o dielétrico possui uma carga maior, e quando as cargas calculadas para cada capacitor no item (d) são somadas,  $Q_1 + Q_2 = 13,7 \mu C + 34,3 \mu C = 48 \mu C$ , o resultado é idêntico à soma original.

**NOTA** A energia total de  $165 \mu J$  é menor que a energia original de  $288 \mu J$ . Para o dielétrico ser inserido, um trabalho deve ser realizado para colocá-lo no lugar. Para remover o dielétrico, um trabalho  $W = 288 \mu J - 165 \mu J = 123 \mu J$  deve ser realizado, e esse trabalho será armazenado na forma de energia potencial eletrostática.

Tente resolver este exemplo sozinho

Determine (a) a carga em cada capacitor e (b) a energia total armazenada nos capacitores do Exemplo 24-12, considerando que o dielétrico seja inserido em um dos capacitores com a bateria conectada.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Uma vez que a bateria permanece conectada, a diferença de potencial entre os terminais dos capacitores é mantida em 12 V. Essa condição determina a carga e a energia armazenada em cada capacitor. Considere um subscrito 1 para o capacitor sem o dielétrico e um subscrito 2 para o capacitor com o dielétrico.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

(a) Calcule a carga em cada capacitor a partir da equação  $Q = CV$  utilizando os resultados  $C_1 = 2 \mu\text{C}$  e  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ , conforme determinado no Exemplo 24-12.

#### Respostas

$$Q_1 = C_1 V = 24 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V = 60 \mu\text{C}$$

(b) 1. Calcule a energia armazenada em cada capacitor pela equação  $U = \frac{1}{2}CV^2$ . Verifique seus resultados utilizando  $U = \frac{1}{2}QV$ .

$$U_1 = 144 \mu\text{J}, U_2 = 360 \mu\text{J}$$

2. Some seus resultados para  $U_1$  e  $U_2$  e obtenha a energia final.

$$U_{\text{total}} = 504 \mu\text{J}$$

**NOTA.** Observe que o valor de  $Q_2$  é igual a duas vezes e meia seu valor antes de o dielétrico ser inserido ( $\kappa = 2,5$ ). A bateria fornece essa carga adicional para manter uma mesma diferença de potencial. A energia total do sistema com o dielétrico ( $504 \mu\text{J}$ ) é maior que sem o dielétrico ( $288 \mu\text{J}$ ) devido ao trabalho realizado pela bateria para fornecer essa carga.

### 24-13 Estrutura Molecular de um Dielétrico

Um dielétrico enfraquece o campo elétrico entre as placas de um capacitor, pois as moléculas no dielétrico produzem um campo elétrico no sentido oposto ao campo gerado pelas cargas presentes nas placas. O campo elétrico produzido pelo dielétrico é decorrente dos momentos de dipolo elétrico das moléculas do dielétrico.

Embora os átomos e as moléculas sejam eletricamente neutros, eles são afetados pelos campos elétricos, pois contêm cargas positivas e negativas que podem responder à ação dos campos externos. Pode-se imaginar um átomo como sendo um núcleo muito pequeno carregado positivamente circundado por uma nuvem de elétrons carregada negativamente. Em alguns átomos e moléculas a nuvem de elétrons possui simetria esférica, assim seu "centro de cargas negativas" é localizado no centro do átomo ou da molécula, coincidindo com o centro das cargas positivas. Um átomo ou molécula nessa condição possui um momento de dipolo nulo e é chamada de não-polar. Todavia, na presença de um campo elétrico externo as cargas positivas e negativas ficam sujeitas às forças de sentidos opostos, assim as cargas positivas e negativas ficam separadas enquanto as forças atrativas exercidasumas sobre as outras equilibram as forças decorrentes do campo elétrico externo (Figura 24-22). As moléculas são, assim, polarizadas e se comportam como um dipolo elétrico.

Em algumas moléculas (como  $\text{HCl}$  e  $\text{H}_2\text{O}$ ) os centros das cargas positivas e negativas não coincidem, mesmo na ausência de um campo elétrico externo.

O centro da carga negativa coincide com o centro da carga positiva

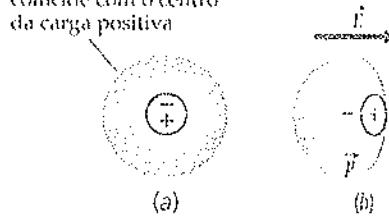
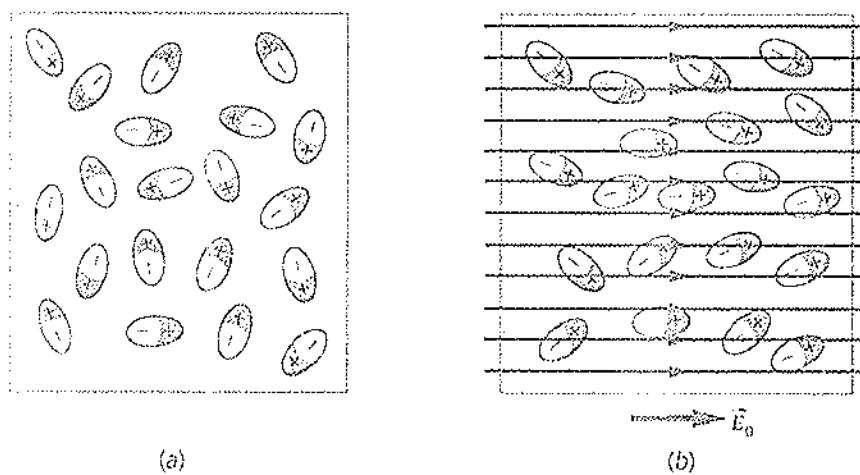


FIGURA 24-22

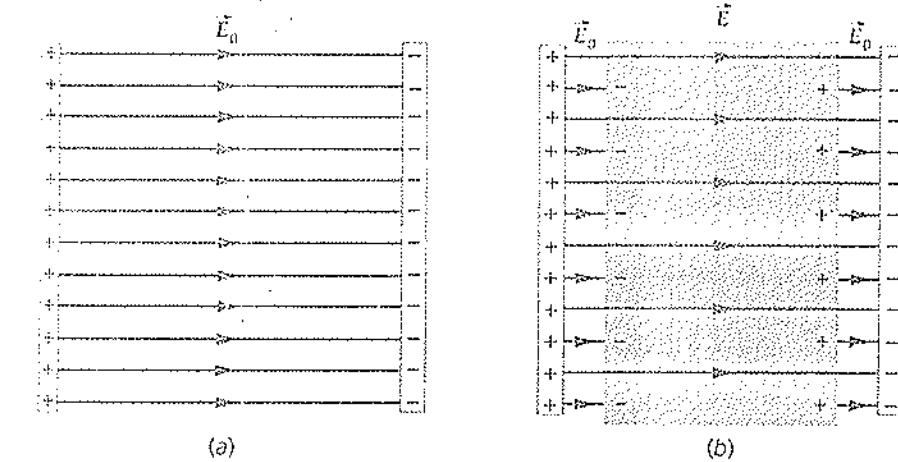
Diagramas esquemáticos das distribuições de carga em um átomo ou molécula não-polar. (a) Na ausência de um campo elétrico externo, o centro das cargas positivas coincide com o centro das cargas negativas. (b) Na presença de um campo elétrico externo, os centros das cargas positivas e negativas são deslocados, produzindo um momento de dipolo induzido no sentido do campo externo.

Conforme foi observado no Capítulo 21, essas moléculas polares apresentam um momento de dipolo elétrico permanente.

Quando um dielétrico é colocado no campo de um capacitor, suas moléculas são polarizadas de forma que existe um momento de dipolo resultante paralelo ao campo. Se as moléculas forem polares, seus momentos de dipolo, originalmente orientados de modo aleatório, tendem a ficar alinhados devido ao torque exercido pelo campo.<sup>1</sup> Se as moléculas forem não-polares, o campo induzirá momentos de dipolo paralelos ao campo. Em ambos os casos, as moléculas no dielétrico são polarizadas na direção do campo externo (Figura 24-23).



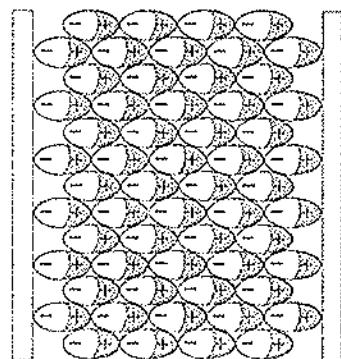
O efeito resultante da polarização de um dielétrico homogêneo em um capacitor de placas paralelas é o aparecimento de uma carga superficial nas faces do dielétrico próximas às placas, conforme mostrado na Figura 24-24. A carga superficial no dielétrico é chamada de carga ligada, porque é ligada às moléculas do dielétrico e não pode se mover como a carga livre nas placas condutoras de um capacitor. Essa carga ligada produz um campo elétrico de sentido oposto ao campo elétrico produzido pelas cargas livres presentes nos condutores. Assim, o campo elétrico resultante entre as placas é reduzido, conforme ilustrado na Figura 24-25.



<sup>1</sup>O grau de alinhamento depende do campo externo e da temperatura. Ele é aproximadamente proporcional a  $pE/kT$ , onde  $pE$  é a energia máxima de um dipolo em um campo  $E$  e  $kT$  é a energia térmica característica.

**FIGURA 24-23**

(a) Dipolos elétricos de um dielétrico polar orientados aleatoriamente na ausência de um campo elétrico externo. (b) Na presença de um campo elétrico externo, os dipolos são parcialmente alinhados de maneira paralela ao campo.



**FIGURA 24-24**

Quando o dielétrico é colocado entre as placas de um capacitor, o campo elétrico do capacitor polariza as moléculas do dielétrico. O resultado é uma carga ligada à superfície do dielétrico que produz seu próprio campo elétrico; esse campo é oposto ao campo externo. Assim, o campo das cargas ligadas à superfície enfraquece o campo elétrico no interior do dielétrico.

**FIGURA 24-25**

O campo elétrico entre as placas de um capacitor (a) sem dielétrico e (b) com dielétrico. A carga superficial no dielétrico enfraquece o campo original entre as placas.



Um átomo de hidrogênio consiste em um próton (no núcleo) de carga  $+e$  e um elétron de carga  $-e$ . A distribuição de carga do átomo possui simetria esférica e o átomo é não-polar. Considere um modelo em que o átomo de hidrogênio consiste em uma carga puntiforme positiva  $+e$  no centro de uma nuvem esférica carregada uniformemente cujo raio é  $R$  e a carga total é  $-e$ . Mostre que quando esse átomo é colocado em um campo elétrico externo uniforme  $E$ , o momento de dipolo induzido é proporcional a  $E$ ; isto é,  $p = \alpha E$ , onde  $\alpha$  é a polarizabilidade do átomo.

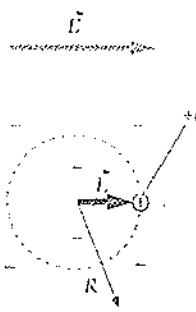


FIGURA 24-26

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** No campo externo, o centro da nuvem negativa uniforme é deslocado da carga positiva de uma quantidade  $L$  de modo que a força exercida pelo campo  $e\vec{E}$  é equilibrada pela força exercida pela nuvem negativa  $e\vec{E}'$ , onde  $\vec{E}'$  é o campo devido à nuvem (Figura 24-26). Utiliza-se a lei de Gauss para determinar  $E'$  e, em seguida, calcula-se o momento de dipolo induzido  $\vec{p} = e\vec{L}$ , onde  $\vec{L}$  é a posição da carga positiva em relação ao centro da nuvem.

1. Escreva o módulo do momento de dipolo induzido em função de  $e$  e  $L$ :  $p = eL$ .

2. Pode-se obter  $L$  calculando o campo  $E'_n$  devido à nuvem carregada negativamente a uma distância  $L$  do centro. Utiliza-se a lei de Gauss para calcular  $E'_n$ . Escolha uma superfície gaussiana especial com raio  $L$ , concêntrico com a nuvem. Então,  $E_n$  é constante nessa superfície:

$$\phi_{\text{ext}} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E'_n (4\pi L^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E'_n = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi \epsilon_0 L^2}$$

3. A carga no interior da esfera de raio  $L$  é igual à densidade de carga multiplicada pelo volume:

$$Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi L^3 = \frac{-e}{3\pi R^3} \frac{4}{3}\pi L^3 = -\frac{eL^3}{R^3}$$

4. Utilize esse valor de  $Q_{\text{int}}$  para calcular  $E'_n$ :

$$E'_n = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi \epsilon_0 L^2} = \frac{-eL^3/R^3}{4\pi \epsilon_0 L^2} = -\frac{e}{4\pi \epsilon_0 R^3} L$$

$$L = -\frac{4\pi \epsilon_0 R^3}{e} E'_n$$

5. Resolva para  $L$ :

$$E'_n = -E$$

assim

$$L = -\frac{4\pi \epsilon_0 R^3}{e} E$$

6. O campo  $E'_n$  é negativo porque é orientado entrando na superfície gaussiana. Na carga positiva, o campo  $E'_n$  é orientado para a esquerda, logo  $E'_n = -E$ :

$$p = eL = 4\pi \epsilon_0 R^3 E = \alpha E$$

assim

$$\boxed{\vec{p} = \alpha \vec{L}}$$

onde

$$\alpha = 4\pi \epsilon_0 R^3$$

**NOTA** A distribuição da carga negativa em um átomo de hidrogênio, obtida a partir da teoria quântica, possui simetria esférica, porém a densidade de carga diminui exponencialmente com a distância, em vez de ser uniforme. Além disso, os cálculos anteriores mostram que o momento de dipolo é proporcional ao

campo externo  $\vec{E}_0 = \alpha \vec{z}$ , e a polarizabilidade  $\alpha$  é da ordem de  $4\pi\epsilon_0 R^3$ , onde  $R$  é o raio de um átomo ou molécula. A constante dielétrica  $\kappa$  pode ser relacionada à polarizabilidade e ao número de moléculas por unidade de volume.

### Valor da Carga Ligada

A densidade da carga ligada  $\sigma_b$  nas superfícies de um dielétrico está relacionada à constante dielétrica  $\kappa$  e à densidade de carga livre  $\sigma_f$  nas placas. Considere um material dielétrico entre a placas paralelas de um capacitor, conforme mostrado na Figura 24-27. Se o dielétrico for uma chapa muito fina colocada entre as placas e estas estiverem muito próximasumas das outras, o campo elétrico na chapa dielétrica devido às densidades de carga livre,  $+\sigma_b$  à direita e  $-\sigma_b$  à esquerda, será igual ao campo devido às densidades de carga de dois planos infinitos. Assim, o módulo do campo  $E_b$  será

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

Esse campo é orientado para a esquerda e é subtraído do campo elétrico  $E_0$  em decorrência da densidade de carga livre nas placas do capacitor, cujo módulo vale

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

O módulo do campo resultante  $E = E_0 - E_b$  é igual à diferença entre esses módulos:

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\kappa}$$

ou

$$E_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)E_0$$

Considerando que  $E_b = \sigma_b/\epsilon_0$  e que  $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$ , pode-se escrever

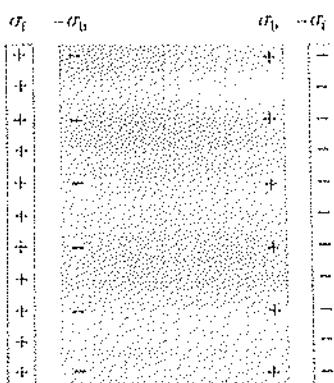
$$\sigma_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\sigma_f \quad 24-27$$

A densidade de carga ligada  $\sigma_b$  é sempre menor que a densidade de carga livre  $\sigma_f$  nas placas do capacitor, e será nula se  $\kappa = 1$ , que ocorre quando não há dielétrico. Para uma chapa condutora,  $\kappa \rightarrow \infty$  e  $\sigma_b = \sigma_f$ .

### O Efeito Piezelétrico

Quando em alguns cristais com moléculas polares (como, por exemplo, o quartzo, a turmalina e o topázio) é aplicada uma tensão mecânica, suas moléculas ficam polarizadas. Esse fenômeno é conhecido como efeito piezelétrico. A polarização do cristal tensionado produz uma diferença de potencial entre suas faces, que pode ser utilizada para produzir uma corrente elétrica. Os cristais piezelétricos são utilizados em transdutores (como, por exemplo, os microfones, os captadores fonográficos e os medidores de vibrações) para converter deformações mecânicas em sinais elétricos. O efeito piezelétrico invertido, no qual uma tensão aplicada a esse tipo de cristal provoca uma deformação mecânica, é utilizado nos fones de ouvido e em muitos outros dispositivos.

Uma vez que a frequência natural de vibração do quartzo está na faixa das radiofreqüências e como sua curva de ressonância é muito aguda,<sup>1</sup> esse cristal é



**FIGURA 24-27**

Capacitor de placas paralelas com um material dielétrico entre suas placas. Se as placas forem colocadas bem próximas, cada uma das superfícies carregadas pode ser considerada como um plano infinito carregado. O campo elétrico devido à carga livre nas placas é orientado para a direita e possui um módulo  $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$ . O campo decorrente da carga ligada é orientado para a esquerda e possui um módulo  $E_b = \sigma_b/\epsilon_0$ .

<sup>1</sup>A ressonância nos circuitos AC, que será discutida no Capítulo 29, é análoga à ressonância mecânica, que foi discutida no Capítulo 14.

muito utilizado para estabilizar os osciladores de radiofrequência e na fabricação de relógios com alto grau de acurácia.

## RESUMO

1. A capacidade é uma importante grandeza física que relaciona a carga à diferença de potencial.
2. Os dispositivos conectados em *paralelo* compartilham uma mesma diferença de potencial entre seus terminais *em virtude exclusivamente da forma como estão conectados*.

Tópicos	Equações e Observações Importantes	
1. Energia Potencial Eletrostática	A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas puntiformes é igual ao trabalho necessário para mover as cargas de uma distância de separação infinita para suas posições finais.	
De cargas puntiformes	$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$	24-1
De um condutor com carga $Q$ a um potencial $V$	$U = \frac{1}{2} QV$	24-2
De um sistema de condutores	$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$	24-3
Energia armazenada em um capacitor	$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$	24-4
Densidade de energia de um campo elétrico	$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	24-5
2. Capacitor	Um capacitor é um dispositivo para armazenamento de carga e energia. Ele consiste em dois condutores isolados entre si com cargas iguais e opostas.	
3. Capacitância	Definição de capacidade.	
	$C = \frac{Q}{V}$	24-6
Condutor isolado	$Q$ é a carga total do condutor e $V$ é o potencial do condutor em relação ao infinito.	
Capacitor:	$Q$ é o módulo da carga em ambos os condutores e $V$ é o módulo da diferença de potencial entre os condutores.	
De um condutor esférico isolado	$C = 4\pi \epsilon_0 R$	24-7
De um capacitor de placas planas e paralelas	$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	24-8
De um capacitor cilíndrico	$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$	24-9
4. Capacitância Equivalente		
Capacitores paralelos	Quando os dispositivos são conectados em paralelo, a queda de tensão é a mesma entre seus terminais.	
	$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$	24-10

## Capacitores em série

Quando os capacitores estão em série, as quedas de tensão entre seus terminais se somam. Se a carga resultante em cada par de placas conectadas é nula, então:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

24-21

## 5. Dielétricos

## Comportamento macroscópico

Um material não-condutor é chamado dielétrico. Quando um dielétrico é inserido entre as placas de um capacitor, o campo elétrico no dielétrico é enfraquecido e a capacidade fica aumentada de um fator  $\kappa$ , que é a constante dielétrica.

## Observação microscópica

O campo no dielétrico de um capacitor é enfraquecido porque os momentos de dipolo das moléculas (próximas ou induzidas) tendem a se alinhar com o campo e, portanto, produzem um campo elétrico no dielétrico que se opõe ao campo aplicado. O alinhamento do momento de dipolo do dielétrico é proporcional ao campo aplicado.

## Campo elétrico interno

$$E_i = \frac{F_0}{\kappa}$$

24-22

## Efeito na capacidade

$$C = \kappa C_0$$

24-23

Permissividade  $\epsilon$ 

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0$$

24-25

## Uso de um dielétrico

1. Aumenta a capacidade
2. Aumenta a resistência dielétrica
3. Proporciona a separação dos condutores

## 6. Efeito Piezelétrico

Alguns cristais possuem moléculas polares. Uma tensão mecânica polariza as moléculas, o que provoca uma diferença de tensão entre as faces do cristal. De forma inversa, uma tensão aplicada induz uma deformação mecânica no cristal.

## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil
- Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- Problema desafiador

## Problemas Conceituais

- 1 • Se a tensão entre os terminais de um capacitor de placas paralelas é dobrada, sua capacidade (a) dobra. (b) diminui à sua metade. (c) permanece inalterada.
- 2 • Se a carga de um condutor esférico isolado é dobrada, sua capacidade (a) dobra. (b) diminui à sua metade. (c) permanece inalterada.
- 3 • Verdadeiro ou falso: a energia eletrostática por unidade de volume em algum ponto é proporcional ao quadrado do campo elétrico nesse ponto.

- 4 • Se a diferença de potencial de um capacitor de placas paralelas é dobrada pela alteração da distância de separação entre as placas sem que a carga seja alterada, de que fator a energia elétrica nele armazenada é alterada?
- 5 • Um capacitor de placas planas paralelas com ar entre as placas é conectado a uma bateria de tensão constante. Se a distância de separação entre as placas do capacitor é duplicada enquanto o capacitor permanece conectado à bateria, a energia armazenada no capacitor (a) quadruplica. (b) duplica. (c) permanece inalterada. (d) cai à metade de seu valor inicial. (e) cai a um quarto de seu valor inicial.

6 •• Se o capacitor do Problema 5 é desconectado da bateria antes de a distância de separação entre as placas ser duplicada, a energia armazenada no capacitor após a separação das placas (a) quadruplica, (b) duplica, (c) permanece inalterada, (d) cai à metade de seu valor inicial, (e) cai a um quarto de seu valor inicial.

7 • Verdadeiro ou falso:

(a) A capacidade equivalente de dois capacitores em paralelo é igual à soma das capacidades individuais.

(b) A capacidade equivalente de dois capacitores em série é menor do que a capacidade de qualquer dos capacitores.

8 •• Dois capacitores inicialmente descarregados com capacidade  $C_0$  e  $2C_0$ , respectivamente, são conectados em série entre os terminais de uma bateria. Qual das seguintes afirmativas está correta?

(a) O capacitor de  $2C_0$  possui o dobro da carga do outro capacitor.

(b) As tensões entre os terminais dos capacitores são idênticas.

(c) As energias armazenadas nos capacitores são idênticas.

(d) Nenhuma das afirmativas anteriores é correta.

9 • Verdadeiro ou falso: um dielétrico colocado entre as placas de um capacitor aumenta sua capacidade.

10 •• A Figura 24-28 mostra dois capacitores com metade do espaço entre suas placas preenchido com um dielétrico. As áreas e as distâncias de separação dos capacitores são idênticas. Qual deles possui a maior capacidade, o mostrado na figura (a) ou o mostrado na figura (b)?

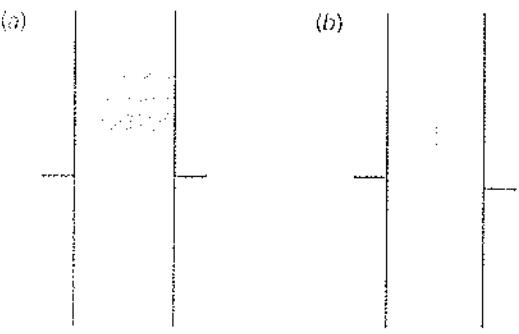


FIGURA 24-28 Problema 10

11 • Verdadeiro ou falso:

(a) A capacidade de um capacitor é definida como a quantidade total de carga que o capacitor pode acumular.

(b) A capacidade de um capacitor de placas paralelas depende da diferença de tensão entre as placas.

(c) A capacidade de um capacitor de placas paralelas é proporcional à carga em suas placas.

12 •• Dois capacitores idênticos são conectados em série a uma bateria de 100 V. Quando apenas um dos capacitores é conectado a essa bateria, a energia armazenada é  $U_0$ . Qual é a energia total armazenada nos dois capacitores quando uma combinação em série com esses capacitores é conectada à bateria? (a)  $4U_0$ , (b)  $2U_0$ , (c)  $U_0$ , (d)  $U_0/2$ , (e)  $U_0/4$ .

### Estimativas e Aproximações

13 •• Desconecte o cabo coaxial de um televisor, ou aparelho similar, e meça (ou estime) os diâmetros do condutor central e do condutor com fios trançados, mostrado na foto do capacitor após o Exemplo 24-3. Admita um valor razoável para a constante dielétrica do material de separação dos dois condutores (veja a Tabela 24-1) e estime a capacidade por unidade de comprimento do cabo.

14 •• Para criar as altas densidades de energia necessárias para operar um laser com pulsos de nitrogênio, é utilizada a descarga em um capacitor com alta capacidade. Tipicamente, a energia necessária por pulso (isto é, por descarga) é de 100 J. Estime a capacidade necessária se a descarga é aplicada através de um espaçamento a centelha de 1 cm de espessura. Admita que a ruptura dielétrica do nitrogênio ocorre em  $E \approx 3 \times 10^6$  V/m.

15 •• Medidas realizadas por especialistas revelam que o campo elétrico da Terra se estende até uma altura de 1000 m e tem intensidade média de 200 V/m. Estime a energia elétrica armazenada na atmosfera. (Sugestão: você pode tratar a atmosfera como uma placa com área igual à da superfície da Terra. Por quê?)

16 •• Estime a capacidade de um balão operado por ar quente típico.

### Energia Potencial Eletrostática

17 • Três cargas puntiformes são posicionadas sobre o eixo  $y$ :  $q_1$  na origem,  $q_2$  em  $x = 3$  m e  $q_3$  em  $x = 6$  m. Determine a energia potencial eletrostática para (a)  $q_1 = q_2 = q_3 = 2 \mu\text{C}$ ; (b)  $q_1 = q_2 = 2 \mu\text{C}$  e  $q_3 = -2 \mu\text{C}$ ; (c)  $q_1 = q_3 = 2 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -2 \mu\text{C}$ .

18 • Cargas puntiformes  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero com 2,5 m de lado. Determine a energia potencial eletrostática dessa distribuição de cargas se (a)  $q_1 = +2 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -4,2 \mu\text{C}$ ; (b)  $q_1 = q_2 = 4,2 \mu\text{C}$  e  $q_3 = -4,2 \mu\text{C}$ ; (c)  $q_1 = q_2 = -4,2 \mu\text{C}$  e  $q_3 = +4,2 \mu\text{C}$ .

19 • Qual o valor da energia potencial eletrostática de um condutor esférico isolado de 10 cm de raio carregado por uma fonte de 1 kV?

20 •• Quatro cargas puntiformes com módulo de  $2 \mu\text{C}$  são posicionadas nos vértices de um quadrado com 4 m de lado. Determine a energia potencial eletrostática se (a) todas as cargas forem positivas, (b) três das cargas forem positivas e uma for negativa e (c) todas as cargas forem positivas e duas negativas.

21 •• Quatro cargas são posicionadas nos vértices de um quadrado com centro geométrico na origem da seguinte forma: quatro de coordenadas  $(-a, +a)$ ;  $2q$  em  $(+a, +a)$ ,  $-3q$  em  $(+a, -a)$  e  $+q$  em  $(-a, -a)$ . Uma quinta carga  $+q$  é colocada na origem e abandonada a partir do repouso. Determine sua velocidade quando estiver a grande distância da origem.

### Capacitância

22 • Um condutor esférico isolado com 10 cm de raio é carregado por um potencial de 2 kV. (a) Qual é a carga no condutor? Qual é a capacidade da esfera? (c) De quanto será alterada a capacidade se a esfera for carregada por um potencial de 6 kV?

23 • Um capacitor possui uma carga de  $30 \mu\text{C}$ . A diferença de potencial entre os condutores é de 400 V. Qual é a capacidade do capacitor?

24 •• Duas esferas condutoras isoladas de raios idênticos possuem cargas  $+Q$  e  $-Q$ , respectivamente. Se elas forem separadas a uma grande distância comparativamente a seus raios, qual será a capacidade desse capacitor pouco usual?

### Armazenamento de Energia Elétrica

25 • (a) Um capacitor de  $3 \mu\text{F}$  é carregado por um potencial de 100 V. Qual a energia armazenada no capacitor? (b) Qual o valor da energia adicional necessária para carregar o capacitor de um potencial de 100 V para outro de 200 V?

26 • Um capacitor com capacidade  $Q = 4 \mu\text{F}$  é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

27 • Um capacitor com capacidade  $20 \mu\text{F}$  que é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

28 • Um capacitor com capacidade  $2 \mu\text{F}$  e carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

29 • Um capacitor com capacidade  $5 \mu\text{F}$  e carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

30 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

31 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

32 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

33 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

34 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

35 •• Um condutor esférico isolado de 10 cm de raio responde a uma tensão de 100 V.

### Combinações de Capacitores

36 •• Um capacitor com capacidade  $1 \mu\text{F}$  é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

37 •• Um capacitor com capacidade  $1 \mu\text{F}$  é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

38 •• Um capacitor com capacidade  $1 \mu\text{F}$  é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

39 •• Um capacitor com capacidade  $1 \mu\text{F}$  é carregado com um campo dielétrico de 100 V/m.

ss...ias para  
de arga de  
gja necessá-  
ria. Atenção  
ento de  
elétrica do  
o campo  
e tem uma  
a armazenada  
na placa  
que  
que  
entre o elixo e  
a energia  
de  $C = 2 \mu F$

elétricos  
de energia  
 $q_1 = q_2 =$   
 $= -4,2 \mu C$

de um com-  
a este de 3

$\mu F$  são po-  
os termini-  
os nega-  
os. (c) duas  
le em qua-  
no ponto  
-6g em  
abandonada  
liver a uma  
é carre-  
or? (b)  
a capaci-  
? (d) a en-  
a de  
cos pos-  
tas de  
qual será a  
real de  
o valor da  
poten-

20 • Um capacitor de  $10 \mu F$  é carregado, ficando com uma carga  $Q = 4 \mu C$ . (a) Qual é o valor da energia nele armazenada? (b) Se metade da carga for removida do capacitor, qual o valor da energia que ele permanecerá?

21 • (a) Determine a energia armazenada em um capacitor de  $5 \mu F$  quando ele é carregado com uma carga de  $5 \mu C$ . (b) Qual é o valor da energia adicional necessária para aumentar a carga de  $5 \mu C$  para  $10 \mu C$ ?

22 • Determine a energia por unidade de volume em um campo elétrico de  $3 \text{ MV/m}$ , que é igual à resistência dielétrica do ar.

23 • Em um capacitor de placas paralelas, a área das placas é  $2 \text{ m}^2$  e a distância de separação entre elas é de  $1,0 \text{ mm}$ . O capacitor é carregado por um potencial de  $100 \text{ V}$ . (a) Qual é o valor do campo elétrico entre as placas? (b) Qual é a energia por unidade de volume no espaço entre as placas? (c) Determine a energia total multiplicando a resposta do item (b) pelo volume total entre as placas. (d) Determine a capacitância  $C$ . (e) Calcule a energia total a partir da equação  $U = \frac{1}{2}CV^2$ , e compare a resposta com o resultado do item (c).

24 • • Duas esferas metálicas concêntricas possuem raios  $r_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 10,5 \text{ cm}$ , respectivamente. A esfera interna tem uma carga  $+5 \text{nC}$  distribuída uniformemente sobre sua superfície, e a esfera externa possui uma carga  $-Q$  sobre sua superfície. (a) Calcule a energia total armazenada no campo elétrico interno às esferas. Sugestão: as esferas podem ser tratadas como placas planas paralelas separadas de uma distância de  $0,5 \text{ cm}$  — por quê? (b) Determine a capacitância desse sistema de duas esferas e mostre que a energia total armazenada no campo é igual a  $U = \frac{1}{2}Q^2/C$ .

25 • • Um capacitor de placas paralelas com área de  $500 \text{ cm}^2$  é carregado por uma diferença de potencial  $V$  e, em seguida, desconectado da fonte de tensão. Quando as placas são movidas, fazendo-se de  $0,4 \text{ cm}$ , a tensão entre as placas aumenta de  $100 \text{ V}$ . (a) Qual é o valor da carga  $Q$  na placa positiva do capacitor? (b) Qual é o valor da energia armazenada no capacitor devido ao movimento das placas?

26 • • Uma esfera de raio  $R$  carregada possui uma densidade de carga uniforme  $\rho$  e uma carga total  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . (a) Determine a densidade de energia eletrostática a uma distância  $r$  do centro da esfera para  $r < R$ . (b) Determine a energia em uma casca esférica com volume igual a  $4\pi r^2 dr$  para  $r < R$  e para  $r > R$ . (c) Calcule a energia eletrostática total por integração das expressões obtidas no item (b) e mostre que o resultado pode ser escrito como  $U = kQ^2/R$ . Explique por que esse resultado é maior do que o obtido para um condutor esférico de raio  $R$  com uma carga total  $Q$ .

### Combinações de Capacitores

31 • (a) Quantos capacitores de  $1 \mu F$  conectados em paralelo são necessários para armazenar uma carga total de  $1 \text{ mC}$  com uma diferença de potencial de  $10 \text{ V}$  entre os terminais de cada capacitor? (b) Qual é a diferença de potencial entre os terminais dessa combinação? (c) Se os mesmos capacitores de  $1 \mu F$  obtidos no item (a) forem conectados em série e a diferença de potencial entre os terminais de cada um deles for de  $10 \text{ V}$ , determine a carga em cada capacitor e a diferença de potencial entre os terminais da combinação.

32 • Um capacitor de  $3 \mu F$  e outro de  $6 \mu F$  são conectados em série, e a combinação é conectada em paralelo com um capacitor de  $8 \mu F$ . Qual é a capacitância equivalente dessa combinação?

33 • Três capacitores são conectados conforme a configuração triangular mostrada na Figura 24-29. Determine a capacitância equivalente entre os pontos  $a$  e  $c$ .

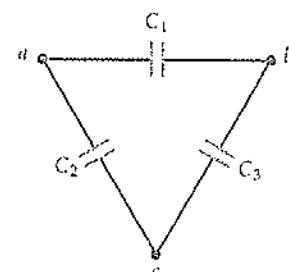


FIGURA 24-29  
Problema 35

36 • • Um capacitor de  $10 \mu F$  e outro de  $20 \mu F$  são conectados em paralelo entre os terminais de uma bateria de  $6 \text{ V}$ . (a) Qual é a capacitância equivalente desse arranjo? (b) Qual é a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor? (c) Determine a carga em cada capacitor.

37 • • Um capacitor de  $10 \mu F$  é conectado em série com outro de  $20 \mu F$  entre os terminais de uma bateria de  $6 \text{ V}$ . (a) Determine a carga em cada capacitor. (b) Determine a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor.

38 • • Três capacitores idênticos são conectados de modo que a capacitância equivalente máxima vale  $15 \mu F$ . Descreva como os capacitores estão combinados. (b) Existem três outras formas de combinar os três capacitores em um circuito. Quais são as capacitâncias equivalentes para cada arranjo?

39 • • Para o circuito mostrado na Figura 24-30, determine (a) a capacitância equivalente total entre os terminais, (b) a carga armazenada em cada capacitor e (c) a energia total armazenada.

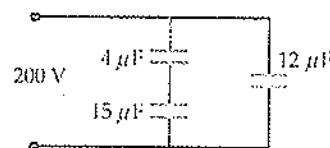


FIGURA 24-30  
Problema 39

40 • • (a) Mostre que a capacitância equivalente de dois capacitores em série pode ser escrita como

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(b) Utilize essa expressão para mostrar que  $C_{eq} < C_1$  e  $C_{eq} < C_2$ .

(c) Mostre que a expressão correta para a capacitância equivalente de três capacitores em série é

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}$$

41 • • Para o circuito mostrado na Figura 24-31, determine (a) a capacitância equivalente total entre os terminais, (b) a carga armazenada em cada capacitor e (c) a energia total armazenada.

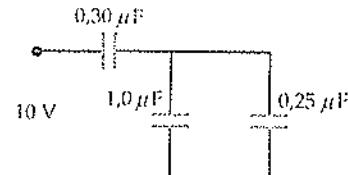


FIGURA 24-31  
Problema 41

42 • • Cinco capacitores idênticos, com capacitância  $C_0$ , são conectados em um circuito de ponte, conforme mostrado na Figura

- 24-32. (a) Qual é a capacidade equivalente entre os pontos *a* e *b*? (b) Determine a capacidade equivalente entre os pontos *a* e *b* se o capacitor do centro for substituído por outro com capacidade igual a  $10C_0$ .

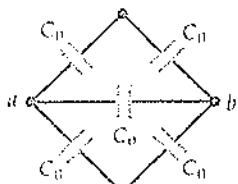
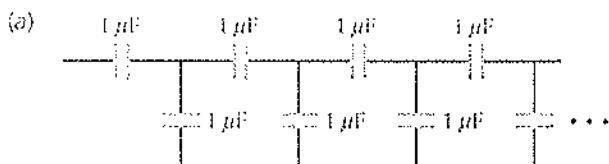


FIGURA 24-32 Problema 42

43. •• Projete um circuito de capacitores com capacidade de  $2\ \mu F$  e tensão de ruptura de  $400\ V$ , utilizando apenas capacitores de  $2\ \mu F$  que, individualmente, possuem tensões de ruptura de  $100\ V$ .

44. •• Determine todas as possíveis capacidades equivalentes que podem ser obtidas utilizando um capacitor de  $1\ \mu F$ , um de  $2\ \mu F$  e um de  $3\ \mu F$  em qualquer arranjo que inclua todos os três ou apenas dois dos capacitores.

45. •• (a) Qual é a capacidade de uma combinação com infinitos capacitores na configuração de escada mostrada na Figura 24-33a? (b) Se a configuração em escada for substituída por um único capacitor (conforme mostrado na Figura 24-33b), qual será o valor da capacidade *C* necessária de modo que a combinação tenha a mesma capacidade que a configuração com infinitos capacitores em escada?



(b)



FIGURA 24-33 Problema 45

### Capacitores de Placas Planas e Paralelas

46. • Um capacitor de placas paralelas possui capacidade de  $2\ \mu F$  e distância de separação entre as placas de  $1,6\ mm$ . (a) Qual é a diferença de potencial máxima entre as placas, de modo que não ocorra a ruptura dielétrica do ar entre as placas? (Utilize  $E_{max} = 3\ MV/m$ .) (b) Qual é a carga armazenada para essa diferença de potencial máxima?

47. • Entre as placas paralelas circulares de um capacitor há um campo elétrico de  $2 \times 10^5\ V/m$ . As placas possuem uma distância de separação de  $2\ mm$ . (a) Qual é a tensão entre os terminais do capacitor? (b) Qual é o raio das placas necessário para que uma carga de  $10\ \mu C$  seja armazenada?

48. •• Um capacitor de placas paralelas com ar entre elas possui capacidade de  $0,14\ \mu F$ . As placas estão afastadas de  $0,5\ mm$ . (a) Qual é a área de cada placa? (b) Qual é a diferença de potencial se o cap-

- itor possui uma carga de  $3,2\ \mu C$ ? (c) Qual é a energia armazenada? (d) Qual é o valor da carga que o capacitor pode armazenar antes de ocorrer a ruptura dielétrica do ar entre suas placas?

49. •• Projete um capacitor de placas paralelas de  $0,1\ \mu F$  com  $1\ mm$  entre suas placas, que possa ser carregado a uma diferença de potencial máxima de  $1000\ V$ . (a) Qual é a distância de separação máxima possível entre as placas? (b) Qual é a área mínima para as placas do capacitor?

### Capacitores Cilíndricos

50. •• Um tubo Geiger consiste em um fio de raio  $R = 0,2\ mm$  e comprimento  $L = 12\ cm$ , e uma casca condutora cilíndrica coaxial desse mesmo comprimento  $L = 12\ cm$  com raio de  $1,5\ cm$ . (a) Determine a capacidade do tubo, admitindo que o gás em seu interior possuir constante dielétrica  $\kappa = 1$ . (b) Determine a carga por unidade de comprimento no fio quando a diferença de potencial entre o fio e a casca é de  $1,2\ kV$ .

51. •• Um capacitor cilíndrico consiste em um fio longo com raio  $R_1$  e comprimento  $L$  com uma carga  $+Q$  e uma casca cilíndrica externa de raio  $R_2$  e comprimento  $L$  com uma carga  $-Q$ . (a) Determine o campo elétrico e a densidade de energia em um ponto qualquer no espaço. (b) Qual é a energia presente em uma casca cilíndrica de raio  $R$ , espessura  $dr$  e volume  $2\pi r l dr$ ? (c) Integre a expressão obtida no item (b) para obter a energia total armazenada no capacitor e compare o resultado com o obtido pela expressão  $U = \frac{1}{2}CV^2$ .

52. ••• Três cascas cilíndricas condutoras concêntricas possuem raios de  $0,2$ ,  $0,5$  e  $0,8\ cm$ . O espaço entre as cascas é preenchido com ar. Os tubos mais interno e mais externo são conectados em um fio entre suas extremidades a um fio condutor. Determine a capacidade desse sistema por unidade de comprimento desse sistema.

53. ••• Um goniômetro é um instrumento preciso para a medição de ângulos. A Figura 24-34a mostra um goniômetro capaz de girar. Cada placa do capacitor variável (Figura 24-34b) consiste em uma placa metálica plana semicircular com raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ . As placas podem girar em relação a um eixo de rotação comum e a distância de separação entre elas, preenchida com ar, é  $d$ . Calcule a capacidade em função do ângulo  $\theta$  e dos parâmetros fornecidos.

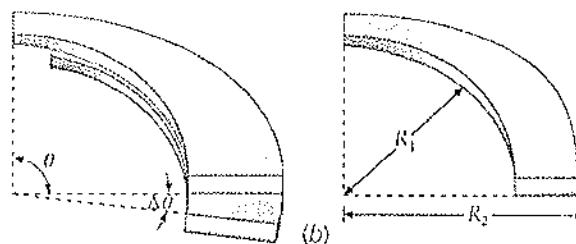


FIGURA 24-34 Problema 53

54. •• A Figura 24-35 mostra um medidor de pressão capilar. Duas placas de área  $A$  são separadas por um material com constante dielétrica  $\kappa$ , espessura  $d$  e módulo de Young  $Y$ . Se sobre as placas é aplicado um acréscimo de pressão  $\Delta P$ , qual é a variação em sua capacidade?

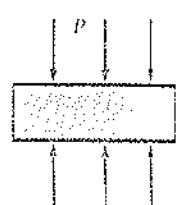


FIGURA 24-35 Problema 54

### Capacitores Esféricos

63 ••• Um capacitor esférico consiste em duas cascas esféricas concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ . (a) Mostre que a capacitância pode ser expressa por  $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ . (b) Mostre que quando os raios das cascas são aproximadamente iguais, a capacitância pode ser expressa, com boa aproximação, pela expressão da capacitância de um capacitor de placas paralelas,  $C = \epsilon_0 A/d$ , onde  $A$  é a área da esfera e  $d = R_2 - R_1$ .

64 ••• Um capacitor esférico é constituído de uma esfera interna de raio  $R_1$  com carga  $+Q$  e uma casca esférica externa concêntrica de raio  $R_2$  com carga  $-Q$ . (a) Determine o campo elétrico e a densidade de energia para um ponto qualquer no espaço. (b) Calcule a energia do campo eletrostático em uma casca esférica de raio  $r$ , espessura  $dr$  e volume  $4\pi r^2 dr$  entre os condutores. (c) Integre a expressão obtida no item (b) para obter a energia total armazenada no capacitor, e compare o resultado com o obtido utilizando a expressão  $U = \frac{1}{2}CV$ .

65 ••• Uma casca esférica de raio  $R$  possui uma carga  $Q$  distribuída uniformemente ao longo de sua superfície. Determine a distância, medida em relação ao centro da esfera, correspondente à metade da energia total do campo eletrostático do sistema.

### Capacitores Desconectados e Reconectados

66 ••• Um capacitor de  $2\text{ }\mu\text{F}$  é carregado por uma diferença de potencial de  $12\text{ V}$ . Os fios que conectam o capacitor à bateria são, então, desligados e conectados aos terminais de um segundo capacitor, inicialmente descarregado. Como consequência, a diferença de potencial entre os terminais do capacitor de  $2\text{ }\mu\text{F}$  cai para  $4\text{ V}$ . Qual é o valor da capacitância do segundo capacitor?

67 ••• Um capacitor de  $100\text{ pF}$  e outro de  $400\text{ pF}$  são carregados por um potencial de  $2\text{ kV}$ . Em seguida, são desconectados da fonte de tensão e conectados entre si, com a placa positiva de um na placa positiva do outro e com a placa negativa de um na placa negativa do outro. (a) Determine a diferença de potencial resultante entre os terminais de cada capacitor. (b) Determine a perda de energia quando as conexões são realizadas.

68 ••• Dois capacitores,  $C_1 = 4\text{ }\mu\text{F}$  e  $C_2 = 12\text{ }\mu\text{F}$ , são conectados em série entre os terminais de uma bateria de  $12\text{ V}$ . Eles são cuidadosamente desconectados de modo que não descarregam e são reconectados um ao outro, com a placa positiva de um na placa positiva do outro, o mesmo ocorrendo com as placas negativas. (a) Determine a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor após serem conectados. (b) Determine as energias inicial e final armazenadas nos capacitores.

69 ••• Um capacitor de  $1,2\text{ }\mu\text{F}$  é carregado através de um potencial de  $30\text{ V}$ . Após carregado, o capacitor é desconectado da fonte de tensão e conectado a um outro capacitor descarregado. A tensão final é de  $10\text{ V}$ . (a) Qual é o valor da capacitância do primeiro capacitor? (b) Qual é o valor da energia perdida quando a conexão foi realizada?

70 ••• Refaça o Problema 59, considerando que os capacitores sejam conectados com a placa positiva de um na placa negativa do outro, após terem sido carregados por uma fonte de  $2\text{ kV}$ .

71 ••• Refaça o Problema 60, considerando que os dois capacitores estejam inicialmente conectados em paralelo entre os terminais de uma bateria de  $12\text{ V}$  e, em seguida, são conectados entre si com a placa positiva de cada um ligada à placa negativa do outro.

72 ••• Um capacitor de  $20\text{ pF}$  é carregado por um potencial de  $3\text{ kV}$  e, em seguida, removido da bateria e conectado a um capacitor de  $50\text{ pF}$  descarregado. (a) Qual é a nova carga presente em cada

capacitor? (b) Determine a energia inicial armazenada no capacitor de  $20\text{ pF}$  e a energia armazenada nos dois capacitores. Pode-se afirmar que a energia potencial eletrostática é ganha ou perdida quando os dois capacitores são conectados?

73 ••• Uma combinação em paralelo de três capacitores,  $C_1 = 2\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4\text{ }\mu\text{F}$  e  $C_3 = 6\text{ }\mu\text{F}$ , é carregada com uma fonte de  $200\text{ V}$ . Os capacitores são então desconectados da fonte de tensão e um do outro, e reconectados com suas placas positivas ligadas às placas negativas, conforme mostrado na Figura 24-36. (a) Qual é a tensão entre os terminais de cada capacitor com as chaves  $S_1$  e  $S_2$  fechadas e a  $S_3$  aberta? (b) Após a chave  $S_3$  ser fechada, qual é a carga final em cada capacitor? (c) Calcule a tensão entre os terminais de cada capacitor após a chave  $S_3$  ser fechada.

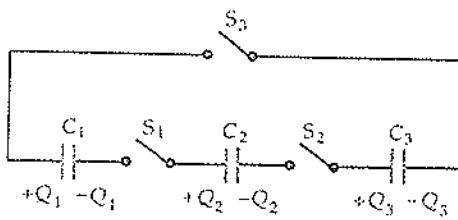


FIGURA 24-36 Problema 65

74 ••• Um capacitor de capacidade  $C$  possui carga  $Q$ . Um estudante conecta um dos terminais desse capacitor a um dos terminais de um capacitor idêntico descarregado. Quando os outros dois terminais são conectados, a carga flui até que o equilíbrio eletrostático seja restabelecido e ambos os capacitores fiquem com uma carga  $Q/2$ . Compare a energia total inicialmente armazenada em apenas um capacitor com a energia total armazenada nos dois após o segundo equilíbrio eletrostático. Para onde foi a energia perdida? Essa energia foi dissipada nos fios condutores pelo efeito Joule, que é discutido no Capítulo 25.

### Dielétricos

75 ••• Um capacitor de placas planas e paralelas é constituído de uma folha de polietileno ( $\kappa = 2,3$ ) colocada entre duas folhas de alumínio. A área de cada folha de alumínio é de  $400\text{ cm}^2$ , e a espessura do polietileno é de  $0,3\text{ mm}$ . Determine a capacitância.

76 ••• Imagine que o tubo Geiger do Problema 50 seja preenchido com um gás de constante dielétrica  $\kappa \approx 1,8$  e que a ruptura dielétrica do campo seja de  $2 \times 10^6\text{ V/m}$ . (a) Qual é a diferença de potencial máxima que pode ser mantida entre o fio condutor e a casca? (b) Qual é a carga por unidade de comprimento no fio?

77 ••• Repita o Problema 56 com o espaço entre as duas cascas esféricas preenchido com um dielétrico cuja constante seja  $\kappa$ .

78 ••• Um certo dielétrico, cuja constante é  $\kappa = 24$ , pode resistir a um campo elétrico de  $4 \times 10^7\text{ V/m}$ . Suponha que se deseja utilizar esse dielétrico para projetar um capacitor de  $0,1\text{ }\mu\text{F}$  que possa resistir a uma diferença de potencial de  $2000\text{ V}$ . (a) Qual é a distância de separação mínima das placas? (b) Qual deve ser a área das placas?

79 ••• Um capacitor de placas paralelas apresenta distância de separação entre as placas  $d$ . O espaço entre as placas é preenchido com dois dielétricos, um de espessura  $d/4$  e constante dielétrica  $\kappa_1$  e o outro com espessura  $3d/4$  e constante dielétrica  $\kappa_2$ . Determine a capacitância desse capacitor em função de  $C_0$ , a capacitância sem dielétricos.

80 ••• Dois capacitores possuem, cada um, as seguintes características: duas placas condutoras com área de superfície  $A$ , distância

de separação  $d$  e espaço entre as placas preenchido com ar. Eles são conectados em paralelo, conforme mostrado na Figura 24-37, e cada um possui carga  $Q$ . Uma chapa de espessura  $t$  e área  $A$  com constante dielétrica  $\kappa$  é inserida entre as placas de um dos capacitores. Calcule a nova carga  $Q'$  nesse capacitor.

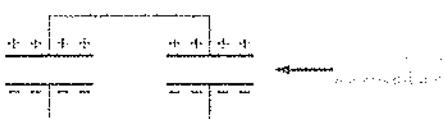


FIGURA 24-37 Problema 72

73 •• Um capacitor de placas paralelas sem dielétrico possui capacitância  $C_0$ . Se a distância de separação entre as placas é  $d$  e uma chapa com constante dielétrica  $\kappa$  e espessura  $t < d$  é colocada no capacitor, determine sua nova capacitância.

74 •• A membrana do axônio de uma célula nervosa pode ser representada por uma casca cilíndrica fina de raio  $R = 10^{-5}$  m, comprimento  $L = 0,1$  m e espessura  $d = 10^{-8}$  m. A membrana possui carga positiva em um de seus lados e carga negativa no outro, e atua como capacitor de placas paralelas de área  $A = 2\pi RL$ , e distância de separação  $d$ . A constante dielétrica da membrana é aproximadamente  $\kappa = 3$ . (a) Determine a capacitância da membrana. Se a diferença de potencial entre os terminais da membrana é de 70 mV, determine (b) a carga em cada lado da membrana e (c) o campo elétrico que a atravessa.

75 •• Qual é a constante dielétrica de um dielétrico no qual a densidade de carga ligada induzida seja (a) 80% da densidade de carga livre sobre as placas de um capacitor preenchido pelo dielétrico, (b) 20% da densidade de carga livre e (c) 98% da densidade de carga livre?

76 •• Duas placas paralelas possuem cargas  $Q$  e  $-Q$ . Quando o espaço entre elas é vazio (vácuo), o campo elétrico é de  $2,5 \times 10^5$  V/m. Quando o espaço é preenchido com um determinado dielétrico, o campo é reduzido para  $1,2 \times 10^5$  V/m. (a) Qual é a constante dielétrica do dielétrico? (b) Se  $Q = 10$  nC, qual é a área da placa? (c) Qual é a carga total induzida nas faces do dielétrico?

77 •• Determine a capacitância do capacitor de placas paralelas mostrado na Figura 24-38.

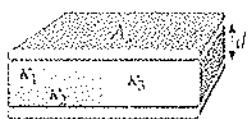


FIGURA 24-38 Problema 77

78 •• As placas paralelas de um capacitor possuem área de  $600\text{ cm}^2$  e a separação entre elas é de 4 mm. O capacitor é carregado através de um potencial de 100 V e, em seguida, desconectado da bateria. (a) Determine o campo elétrico  $E_0$  e a energia eletrostática  $U$ . Um dielétrico de constante  $\kappa = 4$  é então inserido, preenchendo completamente o espaço entre as placas. Determine (b) o novo campo elétrico  $E$ , (c) a diferença de potencial  $V$  e (d) a nova energia eletrostática.

79 •• Um capacitor de placas paralelas é construído utilizando-se um dielétrico cuja constante varia com a posição. As placas possuem área  $A$ . A placa inferior é posicionada em  $y = 0$  e a placa superior em  $y = y_0$ . A constante dielétrica é conhecida e varia com a coordenada  $y$  de acordo com a relação  $\kappa = 1 + (3/y_0)y$ . (a) Qual é o valor da capacitância desse capacitor? (b) Determine a relação  $\sigma_b/\sigma_i$  nas

superfícies do dielétrico. (c) Utilize a lei de Gauss para obter a densidade volumétrica de carga induzida  $p(y)$  desse dielétrico. (d) Integre a expressão para a densidade volumétrica de carga obtida no item (c) ao longo de todo o dielétrico e mostre que a carga ligada induzida, incluindo a das superfícies, é nula.

### Problemas Gerais

80 •• Você recebe 4 capacitores idênticos e uma bateria de 10 V. Quando apenas um capacitor é conectado a essa bateria, a energia armazenada é  $U_0$ . Você pode definir um arranjo para os quatro capacitores de modo que a energia total armazenada nos quatro seja igual a  $4U_0$ ?

81 • Três capacitores possuem capacitâncias de  $2\text{ }\mu\text{F}$ ,  $4\text{ }\mu\text{F}$  e  $8\text{ }\mu\text{F}$ . Determine a capacitância equivalente se (a) os capacitores forem conectados em paralelo e (b) se os capacitores forem conectados em série.

82 • Um capacitor de  $1\text{ }\mu\text{F}$  é conectado em paralelo a outro de  $2\text{ }\mu\text{F}$  e, esse arranjo é conectado em série a um capacitor de  $6\text{ }\mu\text{F}$ . Qual é a capacitância equivalente dessa configuração?

83 • A tensão entre os terminais de um capacitor de placas paralelas com separação entre as placas de 0,5 mm é de 1200 V. O capacitor é desconectado da fonte de tensão e a distância de separação entre as placas é aumentada até que a energia armazenada no capacitor seja duplicada. Determine a distância de separação final entre as placas.

84 •• Determine a capacitância de cada um dos circuitos mostrados na Figura 24-39.

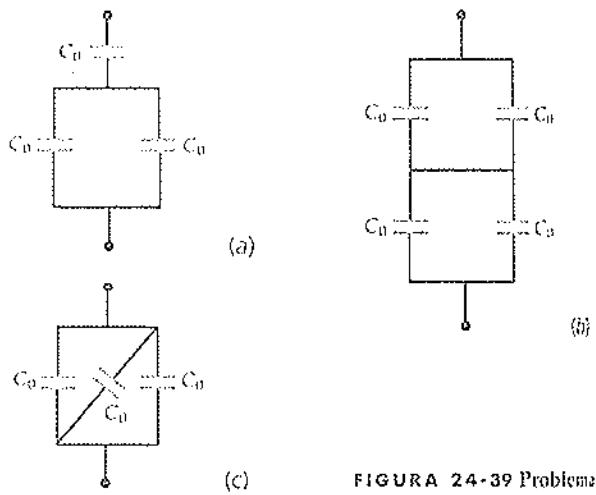


FIGURA 24-39 Problema 84

85 •• A Figura 24-40 mostra quatro capacitores conectados segundo um arranjo conhecido como ponte de capacitores. Os capacitores estão inicialmente descarregados. Qual deve ser a relação entre as quatro capacitâncias de modo que o potencial entre os pontos  $c$  e  $d$  seja nulo quando a tensão  $V$  é aplicada entre os terminais  $a$  e  $b$ ?

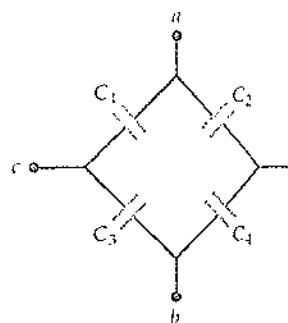


FIGURA 24-40 Problema 85

86 •• Duas esferas condutoras de raio  $R$  são separadas por uma grande distância relativamente às suas dimensões. Uma das esferas possui inicialmente uma carga  $Q$  e a outra está descarregada. Um fio fino é então conectado entre as esferas. Qual a fração da energia inicial que é dissipada?

87 •• Um capacitor de placas paralelas com área  $A$  e distância de separação  $d$  é carregado por uma diferença de potencial  $V$  e, em seguida, desconectado da fonte de carga. As placas são então afastadas até que a distância de separação seja  $2d$ . Determine, em função de  $A$ ,  $d$  e  $V$ , as expressões para (a) a nova capacitância, (b) a nova diferença de potencial e (c) a nova energia armazenada. (d) Qual foi o valor do trabalho necessário para alterar a distância de separação das placas de  $d$  para  $2d$ ?

88 •• Um capacitor de placas paralelas possui, na ausência de um dielétrico, capacitância  $C_0$ . O capacitor é então preenchido com um dielétrico cuja constante é  $\kappa$ . Quando um segundo capacitor de capacitância  $C'$  é conectado em série com o primeiro, a capacitância da combinação em série é  $C_s$ . Determine  $C'$ .

89 •• Uma garrafa de Leyden, um dos primeiros tipos de capacitor, é constituída de um jarro de vidro revestido interna e externamente por uma lâmina metálica. Considere que uma garrafa de Leyden seja constituída por um cilindro com 40 cm de altura, 2,0 cm de espessura de parede e diâmetro interno de 8 cm. Ignore qualquer efeito de borda. (a) Determine a capacitância dessa garrafa, considerando que a constante dielétrica do vidro é igual a 5. (b) Se a resistividade dielétrica do vidro é de 15 MV/m, qual é a carga máxima que a garrafa pode suportar sem que ocorra a ruptura dielétrica? (Sugestão: trate o capacitor como se fosse de placas planas paralelas.)

90 •• Um capacitor de placas paralelas é constituído de uma camada de dióxido de silício com espessura de  $5 \times 10^{-6}$  m colocada entre duas películas condutoras. A constante dielétrica do dióxido de silício é 3,8, e sua resistividade dielétrica é  $8 \times 10^6$  V/m. (a) Qual é a tensão que pode ser aplicada entre os terminais desse capacitor sem que ocorra a ruptura dielétrica? (b) Qual deve ser a área da superfície da camada de dióxido de silício para um capacitor de  $10\text{ pF}$ ? (c) Estime a quantidade de capacitores que pode ser colocada em um quadrado de 1 cm de lado.

91 •• Uma combinação em paralelo de dois capacitores de placas paralelas idênticos de  $2\text{ }\mu\text{F}$  é conectada a uma bateria de 100 V. A bateria é então removida e a separação entre as placas de um dos capacitores é duplicada. Determine a carga em cada um dos capacitores.

92 •• Um capacitor de placas paralelas possui capacitância  $C_0$  e separação  $d$  entre suas placas. Duas camadas de dielétricos com constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , espessuras iguais  $d/2$  e com áreas iguais são inseridas entre as placas, conforme mostrado na Figura 24-41. Quando a carga nas placas é  $Q$ , determine (a) o campo elétrico em cada dielétrico e (b) a diferença de potencial entre as placas. (c) Mostre que a nova capacitância é dada por  $C = 2\kappa_1\kappa_2/(\kappa_1 + \kappa_2)C_0$ . (d) Mostre que esse sistema pode ser considerado como sendo uma combinação em série de dois capacitores de espessura  $d/2$  preenchido com dielétricos de constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

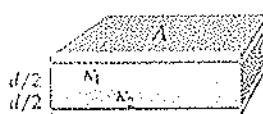


FIGURA 24-41  
Problema 92

93 •• As placas de um capacitor de placas paralelas possuem área  $A$ , e a distância de separação entre elas é  $d$ . Um material metálico de espessura  $t$  e área  $A$  é inserido entre as placas. (a) Mostre que a capacitância é dada por  $C = C_0A/(d - t)$ , independentemente da localização do material metálico. (b) Mostre que esse arranjo pode ser considerado como sendo um capacitor com distância de separação  $a$  em série com outro cuja distância de separação é  $b$ , onde  $a + b + t = d$ .

94 •• Um capacitor de placas paralelas é preenchido com dois dielétricos de dimensões idênticas, conforme mostrado na Figura 24-42. (a) Mostre que esse sistema pode ser considerado como sendo de dois capacitores com área igual a  $A/2$  conectados em paralelo. (b) Mostre que a capacitância é aumentada pelo fator  $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$ .

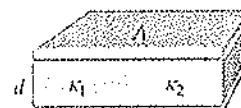


FIGURA 24-42  
Problema 94

95 •• Um capacitor de placas paralelas com área  $A$  e distância de separação  $x$  recebe uma carga  $Q$  e, em seguida, a fonte de carga é removida. (a) Determine a energia eletrostática armazenada em função de  $x$ . (b) Determine o aumento da energia  $dU$  decorrente de um aumento  $dx$  na distância de separação das placas utilizando  $dU = (dU/dx)dx$ . (c) Se  $F$  é a força exercida por uma das placas sobre a outra, o trabalho necessário para mover uma placa de uma distância  $dx$  é  $Fdx = dU$ . Mostre que  $F = Q/2\epsilon_0 A$ . (d) Mostre que a força citada no item (c) é igual a  $EQ/2$ , onde  $Q$  é a carga sobre uma das placas e  $E$  é o campo elétrico entre as placas. Discuta as razões do fator 1/2 nesse resultado.

96 •• Um capacitor de placas paralelas retangulares com comprimento  $a$  e largura  $b$  possui um dielétrico de largura  $b$  parcialmente inserido entre as placas (distância  $x$ ), conforme mostrado na Figura 24-43. (a) Determine a capacitância em função de  $x$ . Despreze os efeitos nas bordas. (b) Mostre que a resposta fornece os resultados esperados para  $x = 0$  e  $x = a$ .

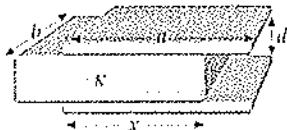


FIGURA 24-43  
Problema 96

97 •• Um capacitor isolado eletricamente com carga  $Q$  é parcialmente preenchido com uma substância dielétrica, conforme mostrado na Figura 24-43. O capacitor consiste em duas placas retangulares de comprimento  $a$ , largura  $b$  e distância de separação  $d$ . A distância na qual o dielétrico é inserido é  $x$ . (a) Qual é a energia armazenada no capacitor? (Sugestão: o capacitor pode ser imaginado como sendo dois capacitores conectados em paralelo.) (b) Uma vez que a energia do capacitor diminui quando  $x$  aumenta, o campo elétrico deve realizar um trabalho positivo sobre o dielétrico, o que significa que deve existir uma força elétrica puxando-o para dentro. Calcule a força examinando como a energia armazenada varia com  $x$ . (c) Expressse a força em função da capacitância e da tensão. (d) De onde vem essa força?

98 •• Dois capacitores de placas paralelas idênticos de  $4\text{ }\mu\text{F}$  são conectados em série entre os terminais de uma bateria de 24 V. (a) Qual é o valor da carga em cada capacitor? (b) Qual é a energia total armazenada nos capacitores? Um dielétrico que possui uma constante dielétrica de 4,2 é inserido entre as placas de um dos capacitores, enquanto a bateria ainda está conectada. (c) Após o dielétrico ser inserido, qual é a carga em cada capacitor? (d) Qual é a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor? (e) Qual é a energia total armazenada nos capacitores?

99 •• As placas de um capacitor de placas paralelas possuem uma área  $A$  de  $1 \text{ m}^2$  e uma distância de separação  $d$  de  $0,5 \text{ cm}$ . Preenchendo completamente o espaço entre as placas condutoras existe uma placa de vidro cuja constante dielétrica  $\kappa$  vale 5. O capacitor é carregado por uma diferença de potencial de  $12 \text{ V}$  e, em seguida, removido da fonte de carga. Qual é o trabalho necessário para retirar a placa de vidro do capacitor?

100 •• Um capacitor possui carga de  $15 \mu\text{C}$ , quando o potencial entre suas placas é  $V$ . Quando a carga do capacitor é aumentada para  $18 \mu\text{C}$ , o potencial entre as placas aumenta em  $6 \text{ V}$ . Determine a capacidade do capacitor e as tensões inicial e final.

101 •• A Figura 24-44 mostra uma balança capacitiva. De um lado da balança é colocado um peso, e do outro lado é colocado um capacitor de placas paralelas cuja distância de separação é variável. Quando o capacitor é carregado por uma tensão  $V$ , a força atrativa entre as placas equilibra o peso colocado na balança. (a) Essa balança é estável? Isto é, se a balança é equilibrada e, em seguida, a distância entre as placas do capacitor for levemente alterada, as placas rapidamente se aproximam ou se movem retornando ao ponto de equilíbrio? (b) Calcule a tensão necessária para equilibrar uma massa  $M$ , admitindo que as placas estejam separadas de uma distância  $d$  e possuem área  $A$ . A força entre as placas é obtida pela derivada da energia armazenada em relação à distância de separação das placas. Por que essa força é calculada dessa forma?



FIGURA 24-44 Problema 101

102 •• Deseja-se projetar um capacitor de placas paralelas para armazenar  $100 \text{ kJ}$  de energia, utilizando ar como dielétrico. (a) Qual é o volume mínimo necessário entre as placas desse capacitor? (b) Suponha que você desenvolveu um dielétrico que possa resistir a  $3 \times 10^8 \text{ V/m}$  e que possua uma constante dielétrica  $\kappa = 5$ . Qual o volume desse dielétrico, idêntico ao volume entre as placas do capacitor, necessário para ele ser capaz de armazenar os  $100 \text{ kJ}$  de energia?

103 •• Considere dois capacitores de placas paralelas,  $C_1$  e  $C_2$ , conectados em paralelo. Os capacitores são idênticos exceto pelo fato de  $C_2$  possuir um dielétrico inserido entre suas placas. Uma fonte de tensão de  $200 \text{ V}$  é conectada entre os capacitores para carregá-los e, em seguida, essa fonte de tensão é desconectada. (a) Qual é o valor da carga em cada capacitor? (b) Qual é a energia total armazenada nos capacitores? (c) O dielétrico é então removido de  $C_2$ . Qual é a energia total armazenada nos capacitores? (d) Qual é a tensão final entre os terminais dos dois capacitores?

104 •• Um capacitor é fabricado a partir de dois cilindros concêntricos cujos raios são  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ) e cujo comprimento é  $L \gg b$ . O cilindro interno possui carga  $+Q$  e o cilindro externo possui carga  $-Q$ . A região entre os dois cilindros é preenchida com um dielétrico cuja constante dielétrica é  $\kappa$ . (a) Determine a diferença de potencial entre os cilindros. (b) Determine a densidade de carga livre  $\sigma_l$  nos cilindros interno e externo. (c) Determine a densidade de carga ligada  $\sigma_b$  nas superfícies cilíndricas interna e externa do dielétrico. (d) Determine a energia eletrostática total armazenada. (e) Qual será o trabalho mecânico necessário para remover a casca cilíndrica dielétrica, considerando que não haja atrito?

105 •• Dois capacitores de placas paralelas possuem a mesma distância de separação e a mesma área das placas. Inicialmente, a

capacitância de ambos é de  $10 \mu\text{F}$ . Quando um dielétrico é inserido de modo que preenche totalmente o espaço entre as placas de todos os capacitores, a capacitância desse capacitor aumenta para  $35 \mu\text{F}$ . Os capacitores de  $35 \mu\text{F}$  e  $10 \mu\text{F}$  são conectados em paralelo e carregados por uma diferença de potencial de  $100 \text{ V}$ . A fonte de tensão é então desconectada. (a) Qual é a energia armazenada nesse sistema? (b) Quais são os valores das cargas nos dois capacitores? (c) O dielétrico é então removido do capacitor. Quais são as novas cargas nas placas dos capacitores? (d) Qual é a energia final armazenada no sistema?

106 •• Os dois capacitores mostrados na Figura 24-45 possuem capacidades  $C_1 = 0,4 \mu\text{F}$  e  $C_2 = 1,2 \mu\text{F}$ . As tensões entre os terminais dos dois capacitores são  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, e a energia total armazenada nos dois capacitores é de  $1,14 \text{ mJ}$ . Se os terminais  $b$  e  $c$  forem conectados, a diferença entre as tensões  $V_a - V_d = 80 \text{ V}$ ; se o terminal  $a$  for conectado ao terminal  $b$  e o terminal  $c$  for conectado ao terminal  $d$ , a diferença de tensões  $V_a - V_d = 20 \text{ V}$ . Determine as tensões iniciais  $V_1$  e  $V_2$ .

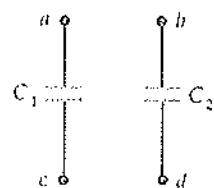


FIGURA 24-45  
Problema 106

107 •• Antes de a chave  $S$  do circuito mostrado na Figura 24-46 ser fechada, a tensão entre os terminais da chave é de  $120 \text{ V}$  e a tensão entre os terminais do capacitor de  $0,2 \mu\text{F}$  é de  $40 \text{ V}$ . A energia total armazenada nos dois capacitores é de  $1440 \mu\text{J}$ . Após o fechamento da chave, a tensão entre os terminais de cada capacitor é de  $80 \text{ V}$ , e a energia armazenada pelos dois capacitores cai para  $960 \mu\text{J}$ . Determine a capacidade de  $C_2$  e a carga naquele capacitor antes de a chave ser fechada.

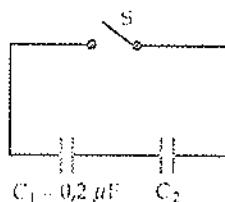


FIGURA 24-46  
Problema 107

108 •• Um capacitor de placas paralelas com área  $A$  e distância de separação  $d$  é carregado por uma diferença de potencial  $V_0$ , e, em seguida, desconectado da fonte de carga. Um material dielétrico de constante  $\kappa = 2$ , espessura  $d$  e área  $A/2$  é inserido entre as placas conforme mostrado na Figura 24-47. Seja  $\sigma_l$  a densidade de carga livre na superfície do condutor na interface com o dielétrico e  $\sigma_b$  a densidade de carga livre no condutor na interface com o ar. (a) Para que o campo elétrico deve ter o mesmo valor no material dielétrico no espaço livre entre as placas? (b) Mostre que  $\sigma_l = 2\sigma_b$ . (c) Mostre que a nova capacitância é  $3\epsilon_0 A/2d$  e que a nova diferença de potencial é  $2V_0/3$ .

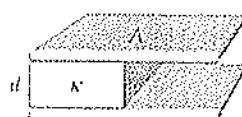


FIGURA 24-47 Problema 108

**109 •••** A dois capacitores idênticos de  $10 \mu\text{F}$  são fornecidas cargas iguais de  $100 \mu\text{C}$  e, em seguida, os capacitores são desconectados da fonte de carga. As placas positivas dos capacitores carregados não estão conectadas através de um fio, o mesmo ocorrendo com as placas negativas através de outro fio. (a) Qual é a energia armazenada no sistema? Um dielétrico com constante dielétrica  $\kappa = 3,2$  é inserido entre as placas de um dos capacitores, de modo que preenche totalmente a região entre as placas. (b) Qual é a carga final em cada capacitor? (c) Qual é a energia final armazenada no sistema?

**110 •••** Um capacitor possui placas retangulares de comprimento  $a$  e largura  $b$ . A placa superior é inclinada de um pequeno ângulo, conforme mostrado na Figura 24-48. A distância de separação entre as placas varia de  $d = y_0$  à esquerda até  $d = 2y_0$  à direita, onde  $y_0$  é muito menor do que  $a$  ou  $b$ . Calcule a capacidade utilizando elementos infinitesimais de largura  $dx$  e comprimento  $b$  para aproximar a capacidade dos capacitores de área  $b dx$  e distância de separação  $d + y_0 + (y_0/a)x$  que são conectados em paralelo.

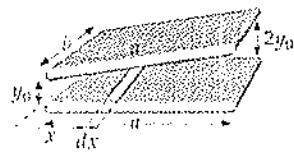


FIGURA 24-48 Problema 110

**111 •••** Nem todos os dielétricos que separam as placas de um capacitor são rígidos. Por exemplo, a membrana de um axônio nervoso é uma camada de lipídio que possui uma compressibilidade finita. Considere um capacitor de placas paralelas cuja separação entre as placas seja mantida por um dielétrico com constante  $\kappa = 3,0$  e cuja espessura seja  $d = 0,2 \text{ mm}$ , quando o potencial entre os terminais do capacitor é nulo. O dielétrico, que possui resistência dielétrica de  $40 \text{ kV/mm}$ , é altamente compressível, com um módulo de Young<sup>1</sup> para tensões compressivas de  $5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ . A capacidade do capacitor no limite para  $V \rightarrow 0$  é  $C_0$ . (a) Deduza uma expressão para a capacidade em função da tensão entre os terminais do capacitor. (b) Qual é a tensão máxima que pode ser aplicada ao capacitor? (Admita que  $\kappa$  não varia sob os efeitos de compressão.) (c) Qual a fração da energia total do capacitor que corresponde à energia do campo eletrostático e qual a fração correspondente à energia devida à tensão mecânica armazenada no dielétrico comprimido, quando a tensão entre os terminais do capacitor estiver imediatamente abaixo da tensão de ruptura?

**112 •••** Uma esfera condutora de raio  $R_1$  é carregada com carga  $Q$ . A esfera é circundada por uma camada dielétrica esférica concêntrica que tem raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ , e um dielétrico cuja constante é  $\kappa$ . O sistema é colocado bem distante de outros corpos. (a) Determine o campo elétrico em um ponto qualquer do espaço. (b) Qual é o potencial da esfera condutora relativamente a  $V = 0$  no infinito? (c) Determine a energia potencial eletrostática total do sistema.

<sup>1</sup>O módulo de Young é discutido na Seção 12-8.

# Corrente Elétrica e Circuitos de Corrente Contínua

- 25-1 A Corrente e o Movimento das Cargas
- 25-2 Resistência e Lei de Ohm
- 25-3 Energia nos Circuitos Elétricos
- 25-4 Combinações de Resistores
- 25-5 Regras de Kirchhoff
- 25-6 Circuitos RC

A COMPRENSÃO DOS CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA PODE AJUDAR NA REALIZAÇÃO DE TAREFAS POTENCIALMENTE PERIGOSAS, COMO A OPERAÇÃO DENOMINADA "CHUPETA" PARA A PARTIDA EM UM MOTOR DE COMBUSTÃO INTERNA.

 Ao dar a partida no motor de um carro fazendo uma "chupeta", como devem ser conectados os terminais? (Veja o Exemplo 25-15.)

 Se ligar o interruptor de uma lâmpada, o filamento metálico no interior do seu bulbo é conectado a uma diferença de potencial que provoca o fluxo de carga elétrica através do filamento, analogamente à forma com que a diferença de pressão em uma mangueira de jardim provoca o escoamento da água através da mangueira. O fluxo de carga elétrica constitui uma corrente elétrica. Geralmente se imaginam as correntes correndo em fios condutores, porém o feixe de elétrons em um monitor de vídeo e o feixe de íons carregados de um acelerador de partículas também representam correntes elétricas.

No Capítulo 25 serão analisados os circuitos de corrente contínua (cc), que são circuitos em que a orientação da corrente em seus elementos não varia. Esses circuitos podem ser produzidos por baterias conectadas a resistores e capacitores. No Capítulo 29 discutem-se os circuitos de corrente alternada (ca), nos quais a orientação da corrente se alterna.

Quando uma chave é acionada, ligando um circuito, uma quantidade muito pequena de carga se acumula ao longo das superfícies dos fios e outros elementos condutores do circuito, e essas cargas produzem um campo elétrico que, no interior do material dos condutores, provoca o movimento de cargas móveis através dos materiais condutores presentes no circuito. Diversos fenômenos complexos ocorrem durante a formação da corrente elétrica, e pequenas cargas se acumulam em vários pontos do circuito, porém rapidamente é estabelecida uma condição de equilíbrio ou regime permanente. O tempo necessário para que o regime permanente seja estabelecido depende das dimensões e da condutividade dos elementos presentes no circuito, porém em muitos casos esse tempo é praticamente nulo, quando comparado à capacidade de percepção do ser humano. No regime estacionário, a carga não mais continua a acumular-se em alguns pontos do circuito, e a corrente torna-se estacionária. (Para os circuitos que possuem capacitores e resistores, a corrente pode aumentar ou diminuir lentamente, porém variações significativas apenas ocorrem após um período de tempo muito maior que o tempo necessário para atingir o regime estacionário.)

## 25-1 A Corrente e o Movimento das Cargas

A corrente elétrica é definida como o fluxo de carga elétrica através da seção transversal de um condutor. A Figura 25-1 mostra o segmento de um fio condutor por

onde passa uma carga. Se  $\Delta Q$  é a carga que flui através da área de seção transversal  $A$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , a corrente será definida como

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

25-1

#### DEFINIÇÃO — CORRENTE ELÉTRICA

A unidade de corrente no sistema internacional de unidades (SI) é o ampère (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

25-2

Por convenção, a orientação da corrente é considerada como sendo a do fluxo da carga positiva. Essa convenção foi estabelecida antes de se saber que os elétrons livres são as partículas que na realidade se movem nos cabos metálicos carregados. Assim, os elétrons se movem no sentido oposto à orientação convencional para a corrente. (Em um acelerador que produz um feixe de prótons, as orientações da corrente e do movimento dos prótons positivamente carregados são idênticas.)

Em um fio metálico condutor, o movimento dos elétrons livres carregados negativamente é bastante complexo. Quando o fio não está sujeito a um campo elétrico, os elétrons livres se movem segundo direções aleatórias com velocidades relativamente altas, da ordem de  $10^6 \text{ m/s}$ .<sup>1</sup> Além disso, os elétrons colidem repetidamente com os íons da rede cristalina do metal. Uma vez que os vetores velocidade dos elétrons estão aleatoriamente orientados, a velocidade média é nula. Quando o condutor fica sujeito a um campo elétrico, este exerce uma força  $-e\vec{E}$  sobre cada um dos elétrons livres, produzindo uma variação da velocidade no sentido oposto ao campo. Entretanto, qualquer energia cinética adicional adquirida é rapidamente dissipada pelas colisões com os íons da rede cristalina do metal. No intervalo de tempo entre as colisões com os íons, os elétrons livres, na média, adquirem uma velocidade adicional no sentido oposto ao do campo. O resultado desse processo de aceleração e dissipação de energia é que os elétrons se movem no interior dos fios condutores com uma pequena velocidade média, orientada no sentido oposto ao do campo elétrico. Essa velocidade é a velocidade de migração.

O movimento dos elétrons livres em um metal é similar ao movimento das moléculas de um gás, como o ar. No ar calmo, as moléculas se movem com grandes velocidades instantâneas (devido à sua energia térmica), porém suas velocidades médias são nulas. Entretanto, durante uma brisa as moléculas de ar têm uma pequena velocidade média ou velocidade de migração no sentido da brisa superposta às suas velocidades instantâneas muito maiores. De forma análoga, quando não há um campo elétrico a nuvem de elétrons adquire uma pequena velocidade de migração.

Seja  $n$  o número de partículas com carga livre por unidade de volume em um fio condutor com área de seção transversal  $A$ . Esse número é a densidade numérica dos portadores de carga. Admita que cada partícula possua uma carga  $q$  e se move com uma velocidade de migração  $v_m$ . Em um intervalo de tempo

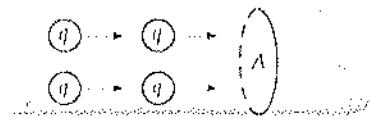


FIGURA 25-1

Segmento de um fio condutor conduzindo uma corrente. Se  $\Delta Q$  é a quantidade de carga que flui através da área da seção transversal  $A$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , a corrente que passa por  $A$  é  $I = \Delta Q/\Delta t$ .

<sup>1</sup> O ampère é definido operacionalmente (veja o Capítulo 26) em função da força magnética que os fios e cabos condutores exercem uns sobre os outros. O coulomb é, portanto, definido como o ampère-segundo.

<sup>2</sup> A energia média dos elétrons livres em um corpo metálico é bastante grande, mesmo nos ambientes com temperaturas muito baixas. Esses elétrons não apresentam a clássica distribuição de energia de Maxwell-Boltzmann, e não obedecem ao teorema da equilipartição. Uma discussão sobre a distribuição de energia desses elétrons e o cálculo de sua média serão mais bem apresentadas no Capítulo 38.

$\Delta t$ , todas as partículas no volume  $\Delta v_d \Delta t$ , mostrado na Figura 25-2 como uma região sombreada, passam pelo elemento de área. O número de partículas nesse volume é  $n\Delta v_d \Delta t$ , e a carga livre total é

$$\Delta Q = qn\Delta v_d \Delta t$$

Assim, a corrente será

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qn\Delta v_d \quad 25-3$$

### Relação entre Corrente e Velocidade de Migração

A Equação 25-3 pode ser utilizada na determinação da corrente devida ao fluxo de qualquer tipo de partícula carregada pela simples substituição da velocidade de migração  $v_d$  da partícula em particular pela velocidade média.

A densidade numérica dos portadores de carga em um condutor pode ser medida pelo efeito Hall, que será apresentado no Capítulo 26. O resultado é que, em muitos metais, existe pelo menos um elétron livre por átomo.

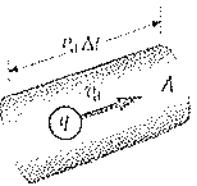


FIGURA 25-2

No intervalo de tempo  $\Delta t$ , todas as cargas livres no volume sombreado passam pela área  $A$ . Se existem  $n$  cargas conduzidas por unidade de volume, cada uma de valor  $q$ , a carga livre total nesse volume  $\Delta Q = qn\Delta v_d \Delta t$ , onde  $v_d$  é a velocidade de migração das cargas em movimento.

PROBLEMA 25-1 Um fio condutor típico utilizado em experimentos de laboratório é de cobre e tem um raio de 0,815 mm. Calcule a velocidade de migração dos elétrons nesse fio quando nele passa uma corrente de 1 A, admitindo um elétron livre por átomo.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A Equação 25-3 relaciona a velocidade de migração com a densidade numérica dos portadores de cargas, que é igual à densidade numérica de átomos de cobre  $n_a$ . Pode-se determinar  $n_a$  a partir da massa específica do cobre, de sua massa molecular e do número de Avogadro.

1. A velocidade de migração está relacionada à corrente e à densidade numérica dos portadores de carga:

2. Se existe um elétron livre por átomo, a densidade numérica dos elétrons livres é igual à densidade numérica dos átomos  $n_a$ :

3. A densidade numérica dos átomos  $n_a$  está relacionada à massa específica  $\rho_m$ , ao número de Avogadro  $N_A$  e à massa molar  $M$ . Para o cobre,  $\rho_m = 8,93 \text{ g/cm}^3$  e  $M = 63,5 \text{ g/mol}$ :

4. O módulo da carga é  $e$ , e a área está relacionada ao raio  $r$  do fio:

5. Substituindo-se os valores numéricos, obtém-se  $v_d$ :

$$I = nqv_d A$$

$$n = n_a$$

$$n_a = \frac{\rho_m N_A}{M}$$

$$= (8,93 \text{ g/cm}^3)(6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})$$

$$63,5 \text{ g/mol}$$

$$= 8,47 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 = 84,7 \text{ átomos/nm}^3$$

$$= 8,47 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

$$q = e$$

$$A = \pi r^2$$

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{I}{n_a e \pi r^2}$$

$$= \frac{1 \text{ C/s}}{(8,47 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})\pi(8,15 \times 10^{-4} \text{ m})^2}$$

$$= 3,54 \times 10^{-5} \text{ m/s} = \boxed{3,54 \times 10^{-2} \text{ mm/s}}$$

**NOTA** As velocidades de migração típicas são da ordem de alguns centésimos de milímetros por segundo, bastante pequenas para os padrões macroscópicos.

**EXERCÍCIO** Quanto tempo é gasto para um elétron migrar da bateria de seu carro para o motor de partida, uma distância de aproximadamente 1 m, se sua velocidade de migração é de  $3,5 \times 10^{-5}$  m/s? (Resposta 7,9 h)

Sendo a velocidade de migração dos elétrons em um fio muito pequena, por que uma lâmpada elétrica se acende quase que instantaneamente quando o interruptor é acionado? A analogia com o movimento da água no interior de uma mangueira pode ser bastante útil para essa compreensão. Se você abre uma torneira na qual está conectada uma mangueira vazia de 30 m, em geral são gastos alguns segundos para a água percorrer o comprimento da mangueira até o bocal. Entretanto, se a mangueira já estiver cheia de água quando a torneira for aberta, a água emergirá do bocal quase que instantaneamente. Devido à pressão da água na torneira, o segmento de água em suas proximidades empurra a água imediatamente seguinte que, por sua vez, empurra o segmento de água seguinte, e assim sucessivamente, até que o último segmento de água é empurrado para fora do bocal. Essa onda de pressão se move ao longo da mangueira com a velocidade do som na água, e esta atinge rapidamente uma condição de vazão uniforme.

Ao contrário do que pode ocorrer em uma mangueira, um fio metálico jamais está vazio. Isto é, existe sempre uma quantidade muito grande de elétrons condutores ao longo de um fio metálico. Assim, a carga começa a se mover ao longo de todo o comprimento do fio (incluindo o filamento no interior do bulbo da lâmpada) imediatamente após o interruptor ser ligado. O transporte de uma quantidade significativa de carga em um fio ocorre não pelo fato de poucas cargas se moverem rapidamente pelo fio, mas sim por uma quantidade significativa de cargas migrarem lentamente pelo fio. As cargas de superfície nos fios produzem um campo elétrico, e esse campo é o responsável pelo mecanismo de condução dos elétrons.

Em um determinado acelerador de partículas, uma corrente de 0,5 mA é devida ao movimento de um feixe de prótons de 5 MeV, cujo raio é de 1,5 mm. (a) Determine a densidade numérica de prótons no feixe. (b) Se o feixe atinge um alvo, quantos prótons colidirão com esse alvo em um intervalo de 1 s?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Para determinar a densidade numérica, utiliza-se a relação  $I = quAv$  (Equação 25-3), onde  $v$  é a velocidade de migração da carga movimentada. (A velocidade de migração é igual ao módulo da velocidade média.) Pode-se obter  $v$  a partir da energia. A carga  $Q$  que atinge o alvo no tempo  $\Delta t$  é  $I\Delta t$ , e o número  $N$  de prótons que atingem o alvo é igual à carga  $Q$  dividida pela carga por próton.

(a) 1. A densidade numérica está relacionada à corrente, à carga, à área da seção transversal e à velocidade:

2. Determina-se a velocidade dos prótons a partir de sua energia cinética:

$$I = quAv$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 5 \text{ MeV}$$

3. Utilize  $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  para a massa de um próton e resolva para a velocidade:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5 \times 10^6 \text{ eV})}{1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}}} \times \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}$$

$$= 3,10 \times 10^7 \text{ m/s}$$

4. Substitua esses valores e calcule  $n$ :

$$n = \frac{I}{qAv}$$

$$= \frac{0,5 \times 10^{-3} \text{ A}}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C/próton})\pi(1,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2(3,10 \times 10^7 \text{ m/s})}$$

$$= 1,43 \times 10^{13} \text{ prótons/m}^3$$

- (b) 1. O número  $N$  de prótons que atinge o alvo em 1 s está relacionado à carga total  $\Delta Q$  que colide em 1 s e à carga  $q$  do próton:

2. A carga  $\Delta Q$  que atinge o alvo no tempo  $\Delta t$  é igual à corrente multiplicada pelo tempo:

3. Assim, o número de prótons será:

$$\Delta Q = Nq$$

$$\Delta Q = I\Delta t$$

$$N = \frac{\Delta Q}{q} = \frac{I\Delta t}{q} = \frac{(0,5 \times 10^{-3} \text{ A})(1 \text{ s})}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C/próton}}$$

$$= 3,13 \times 10^{15} \text{ prótons}$$

**VERIFICAÇÃO** O número  $N$  de prótons que atinge o alvo no tempo  $\Delta t$  é igual ao número de prótons no volume  $A\Delta t$ . Assim,  $N = nAv\Delta t$ . Substituindo  $n = I/(qAv)$  tem-se  $N = nAv\Delta t = [I/(qAv)](Av)\Delta t = I\Delta t/q = \Delta Q/q$ , que é a relação utilizada no item (b).

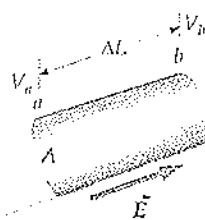
**NOTA** Na etapa 2, foi possível utilizar a expressão clássica para a energia cinética sem levar em conta a relatividade, porque a energia cinética de 5 MeV do próton é muito menor do que a energia de repouso do próton (cerca de 931 MeV). A velocidade obtida,  $3,1 \times 10^7 \text{ m/s}$ , é aproximadamente igual a um décimo da velocidade da luz.

**EXERCÍCIO** Utilizando a densidade numérica obtida no item (a), quantos são os prótons contidos em um volume de  $1 \text{ mm}^3$  do espaço ocupado pelo feixe? (Resposta 14.300)

### RESISTÊNCIA E LEI DE OHM

A corrente em um condutor é impelida por um campo elétrico  $\vec{E}$  em seu interior, que exerce uma força  $q\vec{E}$  sobre as cargas livres. (Na condição de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico deve ser nulo no interior de um condutor, porém, quando uma corrente o percorre este não estará em equilíbrio eletrostático, e as cargas migrarão pelo condutor impelidas pelo campo elétrico.) Uma vez que a orientação da força em uma carga positiva coincide com a do campo elétrico, o vetor  $\vec{E}$  apresenta a mesma orientação da corrente.

A Figura 25-3 mostra uma corrente  $I$  percorrendo um segmento de fio condutor com comprimento  $\Delta L$  e área de seção transversal  $A$ . Como o campo elétrico é orientado no sentido da diminuição do potencial elétrico, o potencial no ponto  $a$  é maior do que o potencial no ponto  $b$ . Imaginando-se a corrente como um fluxo de cargas positivas, essas cargas se movem no sentido da diminuição do potencial. Admitindo que o campo elétrico  $\vec{E}$  seja uniforme ao longo do seg-



**FIGURA 25-3**  
Segmento de fio conduzindo uma corrente  $I$ . A queda de potencial está relacionada ao campo elétrico pela equação  $V_a - V_b = E\Delta L$ .

mento, a diferença de potencial  $V$  entre os pontos  $a$  e  $b$  será

$$V = V_a - V_b = E \Delta L \quad 25-4$$

A relação entre a diferença de potencial e a corrente é chamada de resistência do segmento.

$$R = \frac{V}{I} \quad 25-5$$

#### DEFINIÇÃO — RESISTÊNCIA

A unidade de resistência elétrica no SI, volt por ampère, é denominada ohm ( $\Omega$ ):

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A} \quad 25-6$$

Para muitos materiais, a resistência não depende da queda de potencial ou da corrente. Os materiais com essa característica, dentre os quais muitos dos metais, são denominados materiais ôhmicos. Para os materiais ôhmicos, a queda de tensão entre as extremidades de um segmento de condutor é proporcional à corrente:

$$V = IR, \quad R \text{ constante} \quad 25-7$$

#### LEIS DE OHM

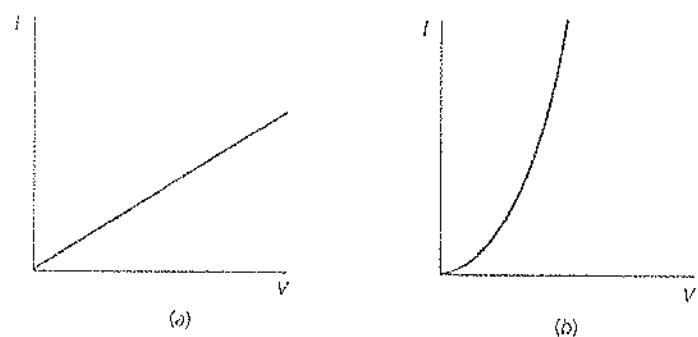
Para os materiais não-ôhmicos, a resistência depende da corrente  $I$ , logo a tensão  $V$  não é proporcional a  $I$ . A Figura 25-4 mostra a diferença de potencial  $V$  em função da corrente  $I$  para materiais ôhmicos e não-ôhmicos. No caso dos materiais ôhmicos (Figura 25-4a) a relação é linear, e para os materiais não-ôhmicos (Figura 25-4b) a relação é não-linear. A lei de Ohm não é uma lei fundamental da natureza, como a lei de Newton ou as leis da termodinâmica, mas representa a descrição empírica de uma propriedade pertinente a muitos materiais.

**EXERCÍCIO** Uma corrente de 1,5 A percorre um fio condutor cuja resistência elétrica é de  $3 \Omega$ . Qual é a queda de potencial entre as extremidades desse fio? (Resposta 4,5 V)

A resistência de um fio condutor é proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção transversal:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad 25-8$$

em que a constante de proporcionalidade  $\rho$  é denominada resistividade do material condutor.<sup>1</sup> A unidade da resistividade é ohm-metro ( $\Omega \cdot \text{m}$ ). Note que as Equações 25-7 e 25-8 da condução elétrica e da resistência elétrica, respectivamente, possuem a mesma forma das Equações 20-9 ( $\Delta T = I R$ ) e 20-10 [ $R = \Delta x / (kA)$ ] da condução térmica e da resistência térmica. Para as equações elétricas, a diferença de potencial  $V$  substitui a diferença de temperatura  $\Delta T$ , e  $1/\rho$



**FIGURA 25-4**  
Gráficos da corrente  $I$  em função da tensão  $V$  para materiais (a) ôhmicos e (b) não-ôhmicos. A resistência  $R = VI$  é independente de  $I$  para os materiais ôhmicos, conforme indicado pela inclinação constante da linha mostrada na Figura 25-4a.

<sup>1</sup>O símbolo  $\rho$ , aqui representando a resistividade, foi utilizado nos capítulos anteriores para a densidade volumétrica de carga. Deve-se ter cuidado na sua utilização, analisando-se o contexto em que a grandeza está inserida. Em geral não haverá dúvida quanto ao seu uso.

substitui a condutividade térmica  $k$ . (Na realidade,  $1/\rho$  é denominada condutividade elétrica.<sup>1</sup>) Ao formular sua lei, Ohm foi influenciado pela semelhança entre a condução da eletricidade e a condução do calor.

*Exercícios de aplicação de conceitos* Responda brevemente as seguintes perguntas:

Um fio de Nichrome ( $\rho = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ ) possui um raio de 0,65 mm. Que comprimento desse fio é preciso para que se obtenha uma resistência de  $2,0 \Omega$ ?

Determine  $L$  a partir da equação  $R = \rho L/A$  (Equação 25-8):

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{(2 \Omega) \pi (6,5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}{10^{-6} \Omega \cdot \text{m}} = \boxed{2,65 \text{ m}}$$

A resistividade de qualquer metal depende da temperatura. A Figura 25-5 mostra essa dependência para o cobre. A curva nesse gráfico é muito próxima de uma linha reta, o que significa que a resistividade varia de forma quase linear com a temperatura.<sup>2</sup> Nas tabelas apresentadas na literatura, a resistividade geralmente é fornecida para uma temperatura de  $20^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{20}$ , juntamente com o coeficiente de temperatura para resistividade,  $\alpha$ , que é definido como

$$\alpha = \frac{(\rho - \rho_{20}) / \rho_{20}}{t_C - 20^\circ\text{C}} \quad 25-9$$

A Tabela 25-1 fornece a resistividade  $\rho$  a  $20^\circ\text{C}$  e o coeficiente de temperatura  $\alpha$  a  $20^\circ\text{C}$  para diversos materiais. Observe a ampla faixa de valores de  $\rho$ .

TABELA 25-1

Resistividades e Coeficientes de Temperatura

Material	Resistividade $\rho$ a $20^\circ\text{C}$ , $\Omega \cdot \text{m}$	Coeficiente de Temperatura $\alpha$ a $20^\circ\text{C}$ , $\text{K}^{-1}$
Prata	$1,6 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Alumínio	$2,8 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Tungstênio	$5,5 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Ferro	$10 \times 10^{-8}$	$5,0 \times 10^{-3}$
Chumbo	$22 \times 10^{-8}$	$4,3 \times 10^{-3}$
Mercúrio	$96 \times 10^{-8}$	$0,9 \times 10^{-3}$
Nichrome	$100 \times 10^{-8}$	$0,4 \times 10^{-3}$
Carbono	$3500 \times 10^{-8}$	$-0,5 \times 10^{-3}$
Germânia	0,45	$-4,8 \times 10^{-3}$
Silício	640	$-7,5 \times 10^{-3}$
Madeira	$10^8 \sim 10^{14}$	
Vidro	$10^{10} \sim 10^{14}$	
Borracha endurecida	$10^{13} \sim 10^{16}$	
Âmbar	$5 \times 10^{14}$	
Eanofre	$1 \times 10^{15}$	

<sup>1</sup>A unidade de condutividade é o siemens (S), 1 siemens =  $1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

<sup>2</sup>Essa linearidade deixa de existir para todos os metais a temperaturas muito baixas. Esse efeito não é mostrado na Figura 25-5.

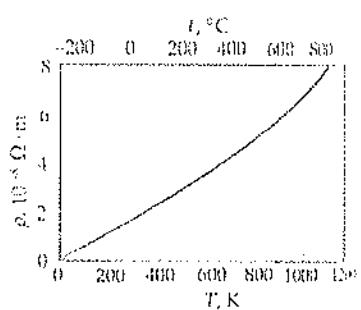


FIGURA 25-5

Gráfico da resistividade  $\rho$  em função da temperatura para o cobre. Como as temperaturas em graus Celsius e absolutas diferem apenas na escolha do zero, a curva da resistividade tem a mesma inclinação nos gráficos  $\rho \times t$  e  $\rho \times T$ .

TABELA 25-2

**Diâmetros e Áreas das Seções  
Transversais dos Fios de Cobre  
Comumente Utilizados**

Calibre	Diâmetro a 20°C, mm	Área, mm <sup>2</sup>
4	5,189	21,15
6	4,115	13,30
8	3,264	8,366
10	2,588	5,261
12	2,053	3,309
14	1,628	2,081
16	1,291	1,309
18	1,024	0,8235
20	0,8118	0,5176
22	0,6438	0,3255

Os fios elétricos são fabricados em dimensões padronizadas. O diâmetro da seção transversal circular de um fio é identificado por um número, o *calibre*, com os valores maiores correspondentes aos menores diâmetros, conforme pode ser observado na Tabela 25-2.

Calcule a resistência por unidade de comprimento de um fio de cobre calibre 14.

1. Peça Equação 25-8, e resistência por unidade de comprimento é igual à resistividade por unidade de área:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

assim

$$\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A}$$

2. Obtenha a resistividade do cobre utilizando a Tabela 25-1, e a área da seção transversal do fio pela Tabela 25-2:

$$\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$A = 2,08 \text{ mm}^2$$

3. Utilize esses valores para calcular  $R/L$ :

$$\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A} = \frac{1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m}{2,08 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 8,17 \times 10^{-3} \Omega / \text{m}$$

**NOTA** O fio de cobre calibre 14 é comumente utilizado nos circuitos de iluminação residencial. A resistência do filamento de uma lâmpada de 100 W a 120 V é de 144 Ω, e a resistência de um fio de 100 m é de 0,817 Ω, assim a resistência do fio é desprezível se comparada à resistência do filamento de uma lâmpada incandescente.

O carbono, que apresenta uma resistividade relativamente alta, é utilizado nos resistores encontrados em equipamentos eletrônicos. Os resistores são em geral vendidos comercialmente com faixas coloridas que indicam o valor de sua resistência. O código para interpretação dessas cores é fornecido na Tabela 25-3.

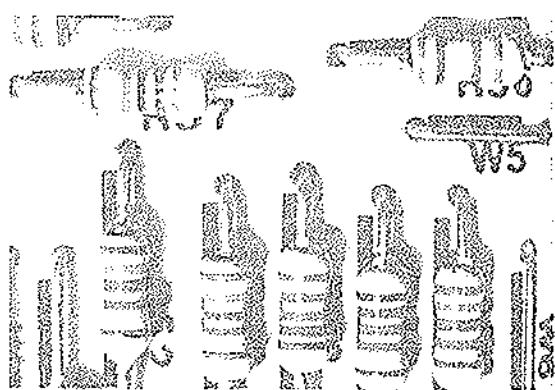
TABELA 25.3

Código de Cores para os Resistores e Outros Elementos (Veja encarte em cores.)



Cores Número	Tolerância
Preto = 0	Marrom = 1%
Marrom = 1	Vermelho = 2%
Vermelho = 2	Ouro = 5%
Laranja = 3	Prata = 10%
Amaralho = 4	Nenhuma = 20%
Verde = 5	
Azul = 6	
Violeta = 7	
Cinza = 8	
Branco = 9	

As faixas coloridas devem ser lidas partindo-se da mais próxima da extremidade do resistor. As primeiras duas faixas representam um número inteiro entre 1 e 99. A terceira faixa indica a quantidade de zeros a seguir. Para o resistor mostrado, as cores das primeiras três faixas são, respectivamente, laranja, preta e azul. Assim, o número é 30.000.000, indicando uma resistência de  $30 \text{ M}\Omega$ . A quarta faixa é da tolerância. Se a quarta faixa é cinza, conforme indicado nesse exemplo, a tolerância é de 10%. Dez por cento de  $30 = 3$ , logo a resistência desse resistor vale  $(30 \pm 3) \text{ M}\Omega$ .



Resistores de carbono codificados por cores em um circuito. (Veja encarte em cores.)

Determine o campo elétrico  $E$  no fio de cobre calibre 14 do Exemplo 25-4 quando nele há uma corrente de 1,3 A.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A intensidade de um campo elétrico é obtida a partir da queda de tensão associada a um determinado comprimento do fio,  $E = V/L$ . A queda de potencial é obtida utilizando a lei de Ohm,  $V = IR$ , e a resistência por unidade de comprimento foi calculada no Exemplo 25-4.

1. A intensidade do campo elétrico é igual à queda de potencial por unidade de comprimento:

$$E = \frac{V}{L}$$

2. Escreva a lei de Ohm para a queda de potencial:

$$V = IR$$

3. Substitua essa expressão na equação de  $E$ :

$$E = \frac{V}{L} = \frac{IR}{L} = I \frac{R}{L}$$

4. Substitua o valor de  $R/L$  obtido no Exemplo 25-4 para calcular o campo  $E$ :

$$E = I \frac{R}{L} = (1,3 \text{ A})(8,17 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}) = 1,06 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

**NOTA** Uma vez que  $R/L = \rho/A$  e  $E = I\rho/A$ , esse campo é idêntico ao longo do comprimento do fio. Assim,  $E$  representa um campo uniforme ao longo do comprimento do fio.

### 25-6 Energia no Circuito Elétrico

Quando um condutor fica sujeito à ação de um campo elétrico, a *nível de elétrons* ganha energia cinética em virtude do trabalho realizado sobre os elétrons livres. Entretanto, o regime estacionário é rapidamente atingido quando a energia cinética ganha é continuamente dissipada na forma de energia térmica do condutor pelas colisões entre os elétrons e os íons da rede do condutor. Esse mecanismo de aumento da energia térmica de um condutor é denominado efeito Joule.

Considere o segmento de fio de comprimento  $L$  e área de seção transversal  $A$  mostrado na Figura 25-6a. O fio possui uma corrente estacionária orientada para a direita. Considere a carga livre  $Q$  inicialmente no segmento. Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , essa carga livre é submetida a um pequeno deslocamento para a direita (Figura 25-6b). Esse deslocamento é equivalente a uma quantidade de carga  $\Delta Q$  (Figura 25-6c) movimentada da extremidade esquerda, onde ela possuía uma energia potencial  $\Delta Q V_a$ , para a extremidade direita, onde ela apresenta uma energia potencial  $\Delta Q V_b$ . A variação na energia potencial de  $Q$  será, portanto,

$$\Delta U = \Delta Q(V_b - V_a)$$

Uma vez que  $V_a > V_b$ , essa variação representa a perda de energia potencial de  $Q$ . A energia potencial perdida será, então,

$$-\Delta U = \Delta Q V$$

em que  $V = V_a - V_b$  é a queda de potencial entre as extremidades do segmento. A taxa de energia potencial perdida é

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}V = IV$$

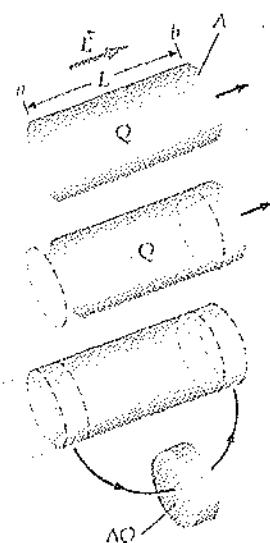
onde  $I = \Delta Q/\Delta t$  é a corrente. A energia potencial perdida por unidade de tempo é a potência  $P$  dissipada no segmento condutor:

$$P = IV$$

(a)

(b)

(c)

**FIGURA 25-6**

Durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , uma quantidade de carga  $\Delta Q$  passa pelo ponto  $a$ , onde o potencial é  $V_a$ . Durante o mesmo intervalo de tempo, uma igual quantidade de carga deixa o segmento, passando pelo ponto  $b$ , onde o potencial é  $V_b$ . O efeito resultante durante o tempo  $\Delta t$  é a carga  $Q$ , que estava inicialmente no segmento do condutor, tanto perdeu uma energia potencial igual a  $\Delta Q V_a$  quanto ganhou uma quantidade de energia igual a  $\Delta Q V_b$ . Isso corresponde a uma diminuição na energia potencial, uma vez que  $V_a > V_b$ .

25-10

#### Energia Potencial Perdida por Unidade de Tempo

Se o potencial  $V$  é expresso em volts e a corrente  $I$  em ampéres, a potência é medida em watts. A potência perdida é igual ao produto entre a diminuição na energia potencial por unidade de carga,  $V$ , e a carga que flui por unidade de tempo,  $I$ . A Equação 25-10 pode ser aplicada a qualquer elemento de um circuito. A taxa com a qual a energia potencial é liberada para o elemento é igual ao produto da queda de potencial entre seus terminais e a corrente que passa através dele. Em um condutor, a energia potencial é dissipada na forma de energia térmica no condutor. Utilizando  $V = IR$ , ou  $I = V/R$ , pode-se escrever a Equação 25-10 de outras formas

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad 25-11$$

#### Potência Dissipada em um Resistor

**EXEMPLO 25-6** Uma corrente de 3 A passa por um resistor de  $12\ \Omega$ . Determine a potência dissipada nesse resistor.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Sendo fornecidas a corrente e a resistência, e não a queda de potencial,  $P = IR$  é a equação mais conveniente a ser utilizada. De forma alternativa, a queda de potencial poderia ser obtida a partir de  $V = IR$  e, em seguida, utilizar-se  $P = IV$ .

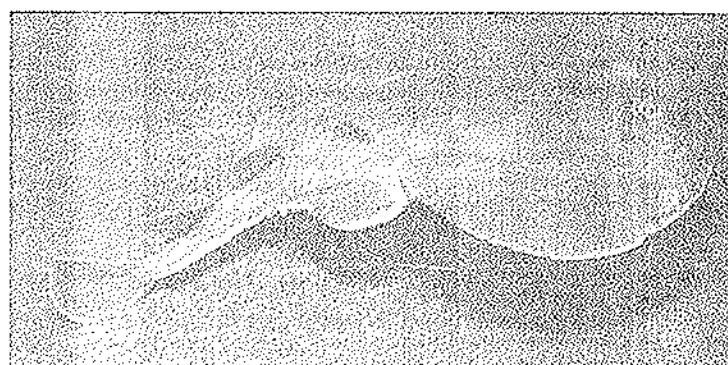
Calcule  $IR$ :

$$P = I^2R = (3\text{ A})^2(12\ \Omega) = 108\text{ W}$$

**VERIFICAÇÃO** A queda de potencial entre os terminais do resistor é  $V = IR = (3\text{ A})(12\ \Omega) = 36\text{ V}$ . Pode-se utilizar esse resultado para obter a potência a partir da equação  $P = IV = (3\text{ A})(36\text{ V}) = 108\text{ W}$ .

**EXERCÍCIO** Um fio condutor com resistência de  $5\ \Omega$  conduz uma corrente de 3 A durante 6 s.

- (a) Qual é a potência fornecida ao fio? (b) Qual é a energia térmica gerada? (Resposta (a) 45 W, (b) 270 J)

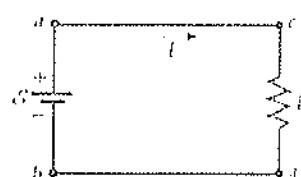


### FEM e Baterias

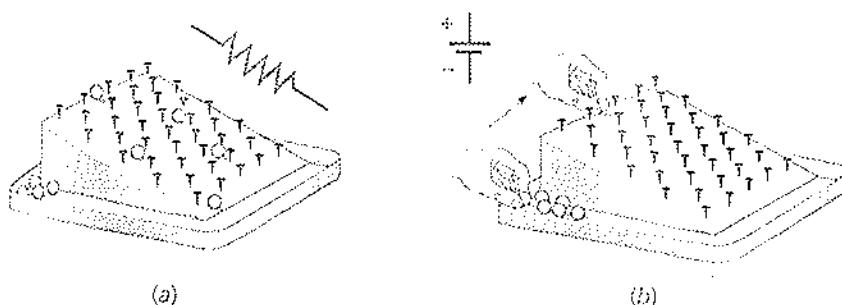
Para manter uma corrente estacionária em um condutor, é necessária uma fonte permanente de energia elétrica. Um dispositivo que fornece energia elétrica a um circuito é denominado fonte de fem. (As letras fem são as iniciais de *força electromotriz*, um termo raramente utilizado hoje em dia. Esse termo pode induzir a um erro, uma vez que definitivamente ele não representa uma força.) Exemplos de fontes de fem são as baterias, que transformam energia química em energia elétrica, e os geradores, que transformam energia mecânica em energia elétrica. Uma fonte de fem realiza trabalho sobre uma carga que passa através dela, aumentando a energia potencial da carga. O trabalho por unidade de carga é a fem da fonte. A unidade da diferença de potencial é o volt, a mesma unidade da diferença de potencial. Uma bateria ideal é uma fonte de fem que mantém uma diferença de potencial constante entre seus dois terminais, independentemente da corrente que passa pela bateria. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria ideal apresenta o mesmo módulo da fem da bateria.

A Figura 25-7 mostra um circuito que tem uma resistência  $R$  conectada a uma bateria ideal. A resistência é indicada pelo símbolo  $\text{VV}$ . As linhas retas indicam fios de ligação com resistência desprezível. A fonte de fem mantém uma diferença de potencial constante igual a  $\mathcal{E}$  entre os pontos  $a$  e  $b$ , com o ponto  $a$  sendo o de maior potencial. Existe uma diferença de potencial desprezível entre os pontos  $a$  e  $c$  e entre os pontos  $d$  e  $b$ , uma vez que a resistência dos fios de ligação é considerada desprezível. A queda de potencial entre os pontos  $c$  e  $d$  é, portanto, igual em módulo à fem  $\mathcal{E}$ , e a corrente que passa pelo resistor pode ser expressa por  $I = \mathcal{E}/R$ . O sentido da corrente nesse circuito é horário, conforme indicado na figura.

A raia elétrica tem dois grandes órgãos elétricos em cada um dos lados de sua cabeça, onde a corrente passa da superfície inferior para a superfície superior de seu corpo. Esses órgãos são compostos por colunas, cada uma consistindo em quatro mil a meio milhão de placas gelatinosas. Nos peixes de água salgada essas baterias são conectadas em paralelo, enquanto nos peixes de água doce as baterias são conectadas em série, transmitindo descargas de alta tensão. A água doce tem uma resistividade maior do que a água salgada, assim para ser mais efetiva uma tensão maior é necessária. É com uma dessas baterias que uma raia elétrica média pode electrocutar um peixe, descarregando 50 A a 50 V.



**FIGURA 25-7**  
Circuito simples consistindo em uma bateria ideal de fem  $\mathcal{E}$ , uma resistência e cabos conectores que são admitidos como tendo resistência desprezível.



Note que *internamente* à fonte de fem a carga flui de uma região de baixo potencial para uma região de alto potencial, assim ela ganha energia potencial.<sup>1</sup> Quando a carga  $\Delta Q$  flui através da fonte de fem  $\mathcal{E}$ , sua energia potencial é aumentada de uma quantidade  $\Delta Q\mathcal{E}$ . Em seguida, a carga passa pelo resistor, onde sua energia potencial é dissipada na forma de energia térmica. A taxa com a qual a energia é fornecida pela fonte de fem é igual à potência de saída:

$$\dot{P} = \frac{\Delta Q\mathcal{E}}{\Delta t} = I\mathcal{E} \quad 25-12$$

#### POTÊNCIA FORNECIDA POR UMA FONTE DE FEM

No circuito da Figura 25-7, a potência de saída da fonte de fem é igual à dissipada no resistor.

Uma fonte de fem pode ser idealizada como uma “bomba” que move as cargas de uma região de baixa energia potencial para uma região de energia potencial mais alta. A Figura 25-8 mostra um sistema mecânico análogo ao sistema elétrico discutido.

No caso de uma bateria real, a diferença de potencial entre seus terminais, denominada tensão da bateria, não é exatamente igual à fem da bateria. Considere o circuito constituído por uma bateria real e um resistor, conforme mostrado na Figura 25-9. Se a corrente for modificada pela variação da resistência  $R$  e a tensão da bateria for medida, poderá-se perceber que essa tensão diminui ligeiramente quando a corrente aumenta (Figura 25-10), exatamente como ocorria se houvesse uma pequena resistência no interior da bateria.

Assim, pode-se considerar que uma bateria real consiste em uma bateria ideal com fem  $\mathcal{E}$  em série com uma pequena resistência  $r$ , denominada resistência interna da bateria.

O esquema de um circuito com uma bateria real e um resistor é mostrado na Figura 25-11. Se a corrente no circuito é  $I$ , o potencial no ponto  $a$  está relacionado ao potencial em  $b$  por

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - Ir$$

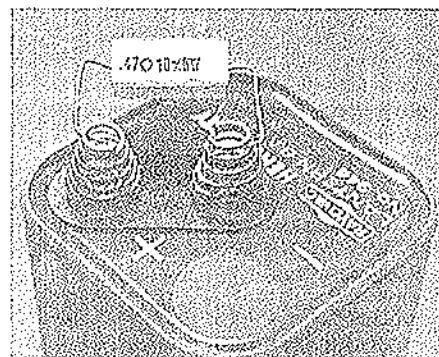
Assim, a tensão da bateria será

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir \quad 25-13$$

A tensão nos terminais da bateria diminui linearmente com a corrente, conforme foi observado na Figura 25-10. A queda de tensão entre os terminais do

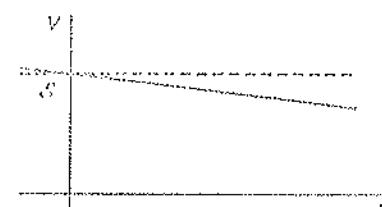
**FIGURA 25-8**

Analogia mecânica de um circuito simples consistindo em uma resistência e uma fonte de fem. (a) As bolas de gude partem de uma altura  $h$ , acima da parte inferior, e são aceleradas entre as colisões com os pregos pelo efeito do campo gravitacional. Os pregos são análogos às redes de íons no resistor. Durante as colisões, as bolas transferem a energia cinética obtida entre as colisões aos pregos. Devido às muitas colisões, as bolas têm apenas uma pequena e aproximadamente constante velocidade de migração em direção à parte inferior. (b) Quando as bolas atingem a parte inferior, uma criança as pega e as eleva até sua altura original  $h$ , e inicia o processo novamente. A criança, que realiza um trabalho  $mgh$  sobre cada bola, é análoga à fonte de fem. A fonte de energia nesse caso é a energia química interna da criança.



**FIGURA 25-9**

Um circuito simples consistindo em uma bateria real, um resistor e os fios de conexão.



**FIGURA 25-10**

Tensão terminal  $V$  versus  $I$  para uma bateria real. A linha tracejada mostra a velocidade terminal de uma bateria ideal, que tem o mesmo módulo  $\mathcal{E}$ .

<sup>1</sup>Quando uma bateria é carregada por um gerador ou por outra bateria, a carga flui de uma região de potencial mais alto para uma região de potencial mais baixo no interior da bateria que está sendo carregada, perdendo, assim, energia potencial eletrostática. A energia perdida é convertida em energia química e armazenada na bateria que está sendo carregada.

resistor  $R$  é  $IR$  e é igual à tensão da bateria:

$$IR = V_a - V_b \approx E - Ir$$

Resolvendo para a corrente  $I$ , tem-se

$$I = \frac{E}{R + r} \quad 25-14$$

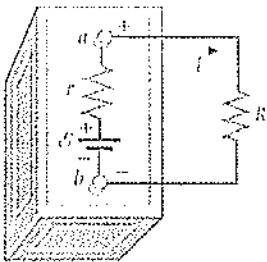
Se a bateria for conectada conforme mostrado na Figura 25-11, sua tensão, calculada pela Equação 25-13, será menor do que a fem da bateria, devido à queda de potencial entre os terminais da resistência interna da bateria. As baterias reais de boa qualidade, como as dos veículos de passeio, geralmente possuem uma resistência interna da ordem de centésimos de ohms, assim sua tensão é aproximadamente igual à fem, a menos que a corrente seja muito alta. O indicativo de uma bateria ruim é uma resistência interna alta, o que é incomum para uma bateria. Se você suspeita de que a bateria de seu carro está ruim, a verificação de sua tensão com um voltmetro, que opera com uma corrente muito pequena, não será suficiente. Você precisa verificar a tensão da bateria durante a passagem da corrente por ela, como ocorre ao tentar ligar o motor de partida. Nessa situação a tensão da bateria pode cair consideravelmente, indicando uma alta resistência interna e, portanto, uma bateria ruim.

As baterias são geralmente especificadas em ampére-hora ( $A \cdot h$ ), que é a carga total que elas podem fornecer:

$$1 A \cdot h = (1 C/s) (3600 s) = 3600 C$$

A energia total armazenada em uma bateria é igual ao produto da fem pela carga total que ela armazena:

$$W = QG \quad 25-15$$



**FIGURA 25-11**

Diagrama esquemático do circuito mostrado na Figura 25-9. Uma bateria real pode ser representada por uma bateria ideal de fem  $E$  e uma pequena resistência  $r$ .

- Um resistor de  $11 \Omega$  é conectado aos terminais de uma bateria com fem de  $6 V$  e resistência interna de  $1 \Omega$ . Determine (a) a corrente, (b) a tensão da bateria, (c) a potência fornecida pela fonte de fem, (d) a potência fornecida ao resistor externo e (e) a potência dissipada pela resistência interna da bateria. (f) Se a bateria for de  $150 A \cdot h$ , qual será a energia nela armazenada?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O esquema do circuito é idêntico ao mostrado na Figura 25-11. Determina-se a corrente com a Equação 25-14 e, em seguida, utiliza-se esse resultado para obter a tensão da bateria e a potência fornecida aos resistores.

1. A Equação 25-14 fornece a corrente:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{6 V}{11 \Omega + 1 \Omega} = 0,5 A$$

2. Utilize a corrente para calcular a tensão da bateria:

$$V_a \approx V_b = E - Ir = 6 V - (0,5 A)(1 \Omega) = 5,5 V$$

3. A potência fornecida pela fonte de fem é igual a  $GI$ :

$$P = GI = (6 V)(0,5 A) = 3 W$$

4. A potência fornecida e dissipada pela resistência externa é igual a  $I^2R$ :

$$I^2R = (0,5 A)^2(11 \Omega) = 2,75 W$$

5. A potência dissipada na resistência interna é  $I^2r$ :

$$I^2r = (0,5 A)^2(1 \Omega) = 0,25 W$$

6. A energia total armazenada é igual à fem multiplicada pela carga total que ela pode fornecer:

$$W = QG = 150 A \cdot h \times \frac{3600 C}{1 A \cdot h} \times 6 V = 3,24 \times 10^6 J$$

**NOTA** O valor da resistência interna nesse exemplo foi exagerado intencionalmente para simplificar os cálculos. Em outros exemplos será possível simplesmente ignorar a resistência interna. Dos 3 W de potência, fornecidos pela bateria, 2,75 W são dissipados no resistor e 0,25 W é dissipado pela resistência interna da bateria.

### EXEMPLO 25-11

### Resistência Externa

Para uma bateria com uma fem  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $r$ , qual é o valor da resistência externa  $R$  a ser conectada aos seus terminais para se obter a potência máxima dissipada pelo resistor?

Tente resolver este exemplo sozinho

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O esquema do circuito é idêntico ao mostrado na Figura 25-11. A potência fornecida ao resistor  $R$  é  $PR$ , onde  $I = \mathcal{E}/(R + r)$ . Para obter a potência máxima, calcula-se  $dP/dR$ , igualando-se o resultado a zero.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

- Utilize a Equação 25-14 para eliminar  $I$  da equação  $P = \mathcal{E}R$ , de modo que a potência  $P$  seja escrita como função apenas de  $R$  e das constantes  $\mathcal{E}$  e  $r$ .
- Calcule a derivada  $dP/dR$ . Utilize a regra da derivada do produto de funções.
- Faça  $dP/dR = 0$  e obtenha  $R$  em função de  $r$ .

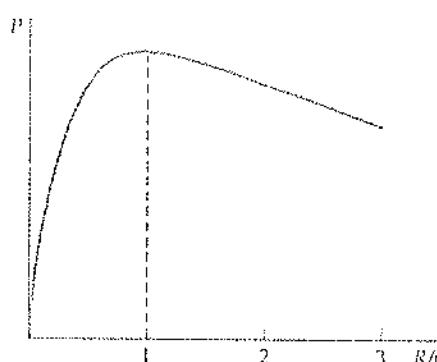
#### Respostas

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} = \mathcal{E}^2 R(R + r)^{-2}$$

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 (R + r)^{-3} = 2\mathcal{E}^2 R(R + r)^{-3}$$

$$R = r$$

**NOTA** O valor máximo de  $P$  ocorre quando  $R = r$ , isto é, quando a resistência externa é igual à resistência interna da bateria. Um resultado similar será válido para os circuitos de corrente alternada. A escolha de  $R = r$  para tornar máxima a transferência de potência para a resistência externa é conhecida como *casamento de impedância*. Um gráfico de  $P$  em função de  $R$  é mostrado na Figura 25-12.



**FIGURA 25-12**  
A potência fornecida ao resistor externo será máxima se  $R = r$ .

### EXEMPLO 25-12 Combinações de Resistores

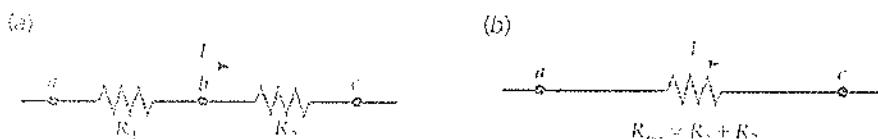
Geralmente, a análise de um circuito pode ser simplificada pela substituição de dois ou mais resistores por um único resistor equivalente através do qual passa a mesma corrente devida à mesma queda de potencial dos resistores originais. A substituição de um conjunto de resistores por um resistor equivalente é análoga à substituição de um conjunto de capacitores por um capacitor equivalente, conforme discutido no Capítulo 24.

#### Resistores em Série

Dois ou mais resistores estarão em uma combinação em série quando forem conectados como os resistores  $R_1$  e  $R_2$  mostrados na Figura 25-13, através dos quais passa a mesma corrente  $I$ . A queda de potencial entre os terminais de  $R_1$  é  $IR_1$ , e a queda de potencial entre os terminais de  $R_2$  é  $IR_2$ . A queda de potencial entre os dois resistores é igual à soma das quedas de potencial entre os resistores individualmente:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

25-16



A resistência equivalente  $R_{eq}$  que fornece a mesma queda de potencial  $V$  devida à mesma corrente  $I$  é obtida igualando-se  $V$  a  $IR_{eq}$  (Figura 25-13b). Assim,  $R_{eq}$  pode ser obtida como

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Quando existem mais de dois resistores em série, a resistência equivalente é

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad 25-17$$

#### RESISTÊNCIA EQUIVALENTE PARA RESISTORES EM SÉRIE

### Resistores em Paralelo

Dois resistores conectados como ilustrado na Figura 25-14a, isto é, sujeitos à mesma diferença de potencial entre seus terminais, caracterizam uma combinação em paralelo. Note que os resistores são conectados entre si pelas extremidades. Seja  $I$  a corrente que chega ao ponto  $a$ . Nesse ponto, o circuito se divide em dois ramos, e a corrente  $I$  é dividida em duas partes, com a corrente  $I_1$  no ramo superior, que contém  $R_1$ , e com a corrente  $I_2$  no ramo inferior, que contém  $R_2$ . A soma dessas duas correntes é, portanto, igual à corrente  $I$  que chega ao ponto  $a$ :

$$I = I_1 + I_2 \quad 25-18$$

No ponto  $b$  as correntes dos dois ramos se combinam novamente, de modo que a corrente no fio que se segue ao ponto  $b$  também é igual a  $I = I_1 + I_2$ . A queda de potencial entre qualquer dos resistores,  $V = V_a - V_b$ , está relacionada às correntes por

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad 25-19$$

A resistência equivalente para os resistores em paralelo é a resistência  $R_{eq}$ , para a qual a corrente total  $I$  requer a mesma queda de potencial  $V$  (Figura 25-14b);

$$R_{eq} = \frac{V}{I}$$

Resolvendo essa equação para  $I$  e impondo a condição  $I = I_1 + I_2$ , tem-se

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad 25-20$$

em que se utilizou a Equação 25-19 para  $I_1$  e  $I_2$ . A resistência equivalente para dois resistores em paralelo é, portanto, expressa por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

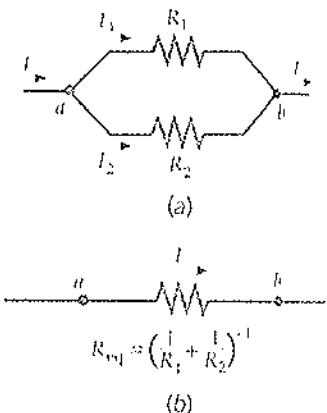
Esse resultado pode ser generalizado para combinações, como a mostrada na Figura 25-15, em que três ou mais resistores são conectados em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad 25-21$$

#### RESISTÊNCIA EQUIVALENTE PARA RESISTORES EM PARALELO

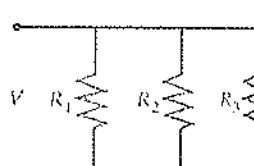
**FIGURA 25-13**

(a) A mesma corrente passa por dois resistores em série. (b) Os resistores mostrados na Figura 25-13a podem ser substituídos por uma única resistência equivalente  $R_{eq} = R_1 + R_2$  que fornece a mesma queda de potencial total ao conduzir a mesma corrente, conforme mostrado na Figura 25-13a.



**FIGURA 25-14**

(a) Dois resistores estarão em paralelo quando forem conectados pelas extremidades, apresentando a mesma queda de potencial entre seus terminais. (b) Os dois resistores mostrados na Figura 25-14a podem ser substituídos por uma resistência equivalente,  $R_{eq}$ , que está relacionada a  $R_1$  e a  $R_2$  pela expressão  $R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$ .



**FIGURA 25-15**  
Três resistores em paralelo.

**EXERCÍCIO** Dois resistores, um de  $2\ \Omega$  e outro de  $4\ \Omega$ , são conectados (a) em série e (b) em paralelo. Determine as resistências equivalentes para ambos os casos. (Resposta (a)  $6\ \Omega$ , (b)  $1,33\ \Omega$ )

Uma bateria fornece uma diferença de potencial de  $12\text{ V}$  aos terminais da combinação em paralelo dos resistores de  $4\ \Omega$  e  $6\ \Omega$  mostrados na Figura 25-16. Determine (a) a resistência equivalente, (b) a corrente total, (c) a corrente que passa por cada um dos resistores, (d) a potência dissipada em cada resistor e (e) a potência fornecida pela bateria.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Escolha os símbolos e as orientações para as correntes indicadas na Figura 25-17.

(a) Calcule a resistência equivalente:  $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}} = \frac{1}{\frac{3}{12\ \Omega} + \frac{2}{12\ \Omega}} = \frac{5}{12\ \Omega} = 2,4\ \Omega$

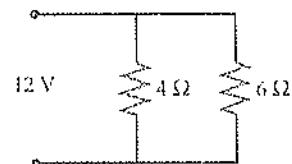


FIGURA 25-16

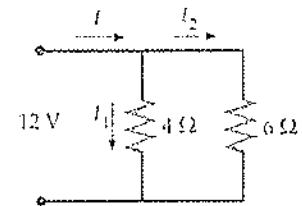


FIGURA 25-17

(b) A corrente total é igual à queda de potencial dividida pela resistência equivalente:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12\text{ V}}{2,4\ \Omega} = 5\text{ A}$$

(c) Obtém-se a corrente que passa por cada resistor utilizando a Equação 25-19 e o fato de que a queda de potencial entre os terminais da combinação em paralelo é de  $12\text{ V}$ :

$$V = IR$$

$$I_1 = \frac{12\text{ V}}{4\ \Omega} = 3\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{12\text{ V}}{6\ \Omega} = 2\text{ A}$$

(d) Utilize essas correntes para obter a potência dissipada em cada resistor:

$$P_1 = I_1^2 R = (3\text{ A})^2 (4\ \Omega) = 36\text{ W}$$

(e) Utilize  $P = VI$  para obter a potência fornecida pela bateria:

$$P = VI = (12\text{ V})(5\text{ A}) = 60\text{ W}$$

**VERIFICAÇÃO** A potência fornecida pela bateria é igual à potência dissipada nos dois resistores  $P = 60\text{ W} = 36\text{ W} + 24\text{ W}$ . No item (d) a potência dissipada em cada resistor poderia ter sido calculada como  $P_1 = VI_1 = (12\text{ V})(3\text{ A}) = 36\text{ W}$  e  $P_2 = VI_2 = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$ .

Tente resolver este exemplo sozinho

Dois resistores, um de  $4\ \Omega$  e outro de  $6\ \Omega$ , são conectados em série a uma bateria com resistência interna desprezível cuja fem é de  $12\text{ V}$ . Determine (a) a resistência equivalente aos dois resistores, (b) a corrente que passa pelo circuito, (c) a queda de potencial entre os terminais de cada resistor, (d) a potência dissipada em cada resistor e (e) a potência total dissipada.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

## Etapas

## Respostas

- (a) 1. Desenhe um diagrama esquemático do circuito (Figura 25-18).

2. Calcule  $R_{eq}$  para os dois resistores em série.

$$R_{eq} = 10 \Omega$$

- (b) Utilize a equação  $V = IR_{eq}$  para obter a corrente que passa pela bateria.

$$I = 1,2 \text{ A}$$

- (c) Utilize a lei de Ohm para obter a queda de potencial entre os terminais de cada resistor.

$$V_1 = 4,8 \text{ V}, \quad V_2 = 7,2 \text{ V}$$

- (d) Determine a potência dissipada em cada resistor utilizando  $P = IR$ . Verifique seu resultado utilizando  $P = IV$  para cada resistor.

$$P_1 = 3,76 \text{ W}, \quad P_2 = 8,64 \text{ W}$$

- (e) Some os resultados do item (d) para obter a potência total. Verifique seu resultado, utilizando  $P = IV$  e  $P = PR_{eq}$ .

$$P = 12,4 \text{ W}$$

**NOTA** Observe que o circuito em série dissipava muito menos potência em relação ao correspondente circuito em paralelo do Exemplo 25-9.

Note, pelo Exemplo 25-9, que a resistência equivalente do circuito em paralelo é menor do que a resistência de qualquer dos resistores isoladamente. Esse é um resultado geral. Suponha uma situação em que por um único resistor  $R_1$  passe uma corrente  $I_1$  com uma queda de potencial  $V = I_1 R_1$ . Ao incluir-se nesse circuito um segundo resistor em paralelo, uma corrente adicional  $I_2$  passará por ele sem alterar  $I_1$ . A resistência equivalente é  $V/(I_1 + I_2)$ , que é menor do que  $R_1 = V/I_1$ . Note também, pelo Exemplo 25-9, que a relação entre as correntes referentes aos dois resistores em paralelo é igual à relação inversa das resistências. Esse resultado geral é uma consequência da Equação 25-19:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= I_2 R_2 \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{resistores paralelos}) \end{aligned} \quad 25-22$$

Considere o circuito mostrado na Figura 25-19. Para a condição em que a chave  $S_1$  está aberta e a chave  $S_2$  está fechada, determine (a) a resistência equivalente do circuito, (b) a corrente total na fonte de fem, (c) a queda de potencial entre os terminais de cada resistor e (d) a corrente que passa por cada resistor. (e) Se a chave  $S_1$  for agora fechada, determine a corrente no resistor de  $2 \Omega$ . (f) Se a chave  $S_2$  for agora aberta (mantendo-se a chave  $S_1$  fechada), determine a queda de potencial entre os terminais do resistor de  $6 \Omega$  e entre os terminais da chave  $S_2$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Para obter a resistência equivalente do circuito, substitua, inicialmente, os dois resistores em paralelo por sua resistência equivalente. A lei de Ohm pode então ser utilizada

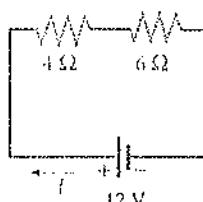


FIGURA 25-18

Tente resolver este exemplo sozinho

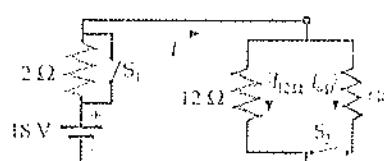


FIGURA 25-19

para obter a corrente e a queda de potencial. Para os itens (b) e (c), utilize a lei de Ohm.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

### Etapas

### Respostas

- Determine a resistência equivalente da combinação em paralelo dos resistores de  $6\ \Omega$  e  $12\ \Omega$ .  $R_{eq} = 4\ \Omega$
- Combine o resultado da etapa 1 com o resistor de  $2\ \Omega$  segundo uma configuração em série para obter a resistência equivalente do circuito.  $R'_{eq} = 6\ \Omega$
- Determine a corrente total utilizando a lei de Ohm. Essa é a corrente que passa tanto pela bateria quanto pelo resistor de  $2\ \Omega$ .  $I = 3\ A$
- Determine a queda de potencial entre os terminais do resistor de  $2\ \Omega$  com a equação  $V_2 = IR$ .  $V_{2\Omega} = 6\ V$
  - Determine a queda de potencial entre os terminais de cada resistor da combinação em paralelo utilizando  $V_p = IR_{eq}$ .  $V_{6\Omega} = V_{12\Omega} = 12\ V$
- Obtenha a corrente nos resistores de  $6\ \Omega$  e  $12\ \Omega$  utilizando  $I = V_p/R$ .  $I_{6\Omega} = 2\ A$ ,  $I_{12\Omega} = 1\ A$
- Com a chave  $S_1$  fechada, a queda de potencial referente ao resistor de  $2\ \Omega$  é nula. Utilizando a lei de Ohm, calcule a corrente que passa por esse resistor.  $I_{2\Omega} = 0$
- Com a chave  $S_2$  aberta, a corrente que passa pelo resistor de  $6\ \Omega$  é nula. Utilizando a lei de Ohm, calcule a queda de potencial referente a esse resistor. Essa queda de potencial somada àquela que ocorre entre os terminais da chave  $S_2$  é igual à queda de potencial referente ao resistor de  $12\ \Omega$ .  $V_{6\Omega} = 0$ ,  $V_{S_2} = 18\ V$

**VERIFICAÇÃO** A corrente no resistor de  $6\ \Omega$  é o dobro daquela referente ao resistor de  $12\ \Omega$ , conforme esperado. A soma das duas correntes também é igual à, a corrente total no circuito. Finalmente, note que a soma das quedas de potencial para o resistor de  $2\ \Omega$  e para a combinação em paralelo é igual à fém da bateria, isto é,  $V_2 + V_p = 6\ V + 12\ V = 18\ V$ .

**EXERCÍCIO** Repita os itens (a) até (d) desse exemplo com o resistor de  $6\ \Omega$  substituído por um fio condutor de resistência desprezível. (Resposta (a)  $R'_{eq} = 2\ \Omega$ ; (b)  $I = 9\ A$ ; (c)  $V_2 = 18\ V$ ,  $V_6 = 0$ ,  $V_{12} = 0$ ; (d)  $I_2 = 9\ A$ ,  $I_6 = 9\ A$ ,  $I_{12} = 0$ )

Tente resolver este exemplo sozinho

Determine a resistência equivalente da combinação de resistores mostrada na Figura 25-20.

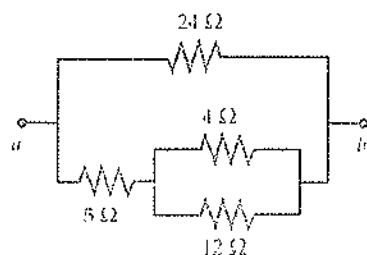


FIGURA 25-20

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Você pode analisar essa combinação complexa passo a passo. Inicialmente, determine a resistência equivalente  $R_{eq}$  da combinação em paralelo dos resistores de  $4\ \Omega$  e  $12\ \Omega$ ; em seguida, obtenha a resistência equivalente  $R'_{eq}$  da combinação em série do resistor de  $5\ \Omega$  com a resistência equivalente  $R_{eq}$ ; finalmente, determine a resistência equivalente  $R''_{eq}$  da combinação em paralelo do resistor de  $24\ \Omega$  com a resistência  $R'_{eq}$ .

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

Etapas	Respostas
1. Determine a resistência equivalente $R_{eq}$ dos resistores de $4\ \Omega$ e $12\ \Omega$ em paralelo.	$R_{eq} = 3\ \Omega$
2. Determine a resistência $R'_{eq}$ de $R_{eq}$ em série com o resistor de $5\ \Omega$ .	$R'_{eq} = 8\ \Omega$
3. Determine a resistência equivalente de $R'_{eq}$ em paralelo com o resistor de $24\ \Omega$ .	$R''_{eq} = \boxed{6\ \Omega}$

### Coloque-o no Contexto

Você está preparando um lanche para alguns amigos que o ajudarão a se preparar para uma noite completa de estudos. Você decide que café, torradas e pipocas seria um bom começo. Assim, você liga a torradeira e coloca a pipoca no microondas. Como seu apartamento está localizado em um prédio antigo, você sabe que existem problemas com o fusível quando muitos aparelhos são ligados ao mesmo tempo. Você poderia ligar também a cafeteira? Consultando as características dos aparelhos, você verifica que a torradeira tem uma potência de  $900\ W$ , o microondas de  $1200\ W$  e a cafeteira de  $600\ W$ . Em outra ocasião você observou que sua casa possui fusíveis de  $20\ A$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Admite-se que os circuitos da casa estejam em paralelo, fazendo com que a ligação de um dos aparelhos não afete os demais presentes no circuito. Considere que a tensão na cidade em que você mora seja de  $120\ V$ . (Pode-se desprezar o fato de que ela não é contínua.) Determinando as correntes que passam pelos aparelhos, pode-se somá-las e obter a corrente total no circuito, que deve ser comparada com a corrente do fusível.

- A potência fornecida a um aparelho é igual à corrente multiplicada pela queda de potencial. Isto é,  $P = IV$ . Resolva para a corrente associada a cada aparelho:

$$I_{\text{torradeira}} = \frac{P_{\text{torradeira}}}{V} = \frac{900\ W}{120\ V} = 7,5\ A$$

$$I_{\text{microondas}} = \frac{P_{\text{microondas}}}{V} = \frac{1200\ W}{120\ V} = 10\ A$$

$$I_{\text{cafeteira}} = \frac{P_{\text{cafeteira}}}{V} = \frac{600\ W}{120\ V} = 5\ A$$

- A corrente que passa pelo fusível é igual à soma dessas correntes:

$$I_{\text{fusível}} = 22,5\ A$$

- Esse resultado está acima dos  $20\ A$  do fusível?

Seus convidados terão que aguardar pelo café.

**NOTA** Admitiu-se que o apartamento tem apenas um circuito e, portanto, apenas um fusível. Em geral, existem diversos circuitos, cada um com seu próprio fusível. A cafeteira pode ser ligada a uma tomada que esteja em um circuito distinto da tomada da torradeira e do microondas, evitando, assim, a queima do fusível.

### 25-25 Regras de Kirchhoff

Existem muitos circuitos simples, como o mostrado na Figura 25-21, que não podem ser analisados apenas sob a ótica da substituição de um conjunto de resistores por uma resistência equivalente. Os dois resistores,  $R_1$  e  $R_2$ , nesse circuito parecem estar em paralelo, mas não estão. A queda de potencial não é a mesma entre os terminais de ambos os resistores devido à presença da fonte de tensão  $E_2$  em série com  $R_2$ . Os resistores  $R_1$  e  $R_2$  também não estão em série, porque por eles não passa a mesma corrente.

Duas regras, denominadas regras de Kirchhoff, são aplicadas a este e a qualquer outro circuito.

1. Ao se percorrer uma malha fechada em um circuito, a soma algébrica das variações de potencial deve ser igual a zero.
2. Em qualquer nó do circuito (pontos em que chegam vários fios condutores) onde a corrente se divide, a soma das correntes que fluem para o nó deve ser igual à soma das correntes que saem do nó.

#### REGRAS DE KIRCHHOFF

A primeira regra de Kirchhoff, denominada regra das malhas, é uma consequência direta da presença de um campo conservativo  $\vec{E}$ . Um campo é conservativo quando

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad 25-23$$

em que a integral é calculada ao longo de qualquer curva fechada  $C$ . As variações no potencial  $\Delta V$  e  $\vec{E}$  estão relacionadas pela expressão  $\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$ . Assim, pela Equação 25-23 pode-se concluir que a soma das variações no potencial (a soma dos  $\Delta V$ s) ao longo de qualquer trajetória fechada é nula.

A segunda regra de Kirchhoff, denominada regra dos nós, é uma consequência da conservação da carga. A Figura 25-22 mostra um nó com três fios condutores por onde passam as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Como a carga não é gerada nem acumulada nesse nó, sua conservação implica a regra dos nós, que para esse caso fornece

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad 25-24$$

### Circuitos com uma Única Malha

Como exemplo de aplicação da regra de Kirchhoff das malhas, considere o circuito mostrado na Figura 25-23, que contém duas baterias com resistências in-

Existe também um campo elétrico não-conservativo, que será discutido no Capítulo 28. O campo elétrico resultante é igual à superposição do campo elétrico conservativo com o campo elétrico não-conservativo.

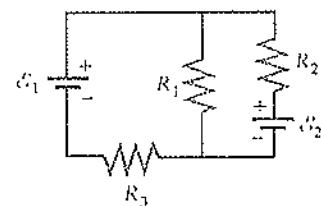


FIGURA 25-21

Exemplo de um circuito simples que não pode ser analisado pela substituição de uma combinação de resistores em série ou paralelo com suas resistências equivalentes. As quedas de potencial entre os terminais de  $R_1$  e  $R_2$  não são iguais por causa da fonte de tensão  $E_2$ , logo esses resistores não estão em paralelo. (Resistores em paralelo podem ser conectados em ambas as extremidades.) Pelos resistores não passa a mesma corrente, logo eles não estão em série.

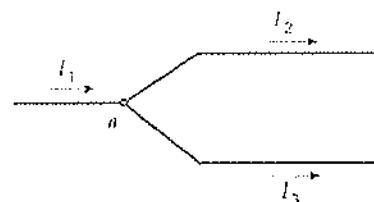


FIGURA 25-22

Ilustração da regra de Kirchhoff dos nós. A corrente  $I_1$  que chega ao ponto  $a$  é igual à soma  $I_2 + I_3$  das correntes que saem do ponto  $a$ .

termas  $r_1$  e  $r_2$  e três resistores externos. Deseja-se determinar a corrente em função das fms e das resistências.

Adota-se o sentido horário como positivo, conforme indicado na Figura 25-23. Aplica-se então a regra de Kirchhoff das malhas percorrendo-se o circuito no sentido positivo, começando pelo ponto  $a$ . Observe que uma queda de potencial é encontrada ao se atravessar a fonte de fem entre os pontos  $c$  e  $d$ , achando-se um aumento de potencial quando se atravessa a fonte de fem entre os pontos  $c$  e  $a$ . Admitindo que a corrente  $I$  seja positiva, há uma queda de potencial ao se atravessar cada resistor. Iniciando no ponto  $a$ , obtém-se pela lei de Kirchhoff das malhas

$$-IR_1 - IR_2 + \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR_3 + \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 0$$

Resolvendo para a corrente  $I$ , tem-se

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} \quad 25-25$$

Se  $\mathcal{E}_2$  for maior do que  $\mathcal{E}_1$ , o resultado para a corrente será negativo, indicando que esta é contrária ao inicialmente convencionado como sentido positivo (isto é, seu sentido é, na realidade, anti-horário).

Para esse exemplo, admita que  $\mathcal{E}_1$  seja a maior fem. Na bateria 2, a carga flui do potencial mais alto para o potencial mais baixo. Portanto, uma carga  $\Delta Q$  que se move através da bateria 2 do ponto  $c$  para o ponto  $d$  perde uma energia potencial de  $\Delta Q \mathcal{E}_2$  (mais qualquer energia dissipada no interior da bateria pelo efeito Joule). Se a bateria 2 for recarregável, uma boa parte dessa energia potencial é armazenada na bateria na forma de energia química, o que significa que essa bateria está sendo carregada.

A análise de um circuito geralmente é simplificada escolhendo-se um ponto como tendo potencial nulo e, em seguida, determinando-se os potenciais dos demais pontos relativamente a este. Como apenas as diferenças de potenciais são importantes, qualquer ponto do circuito pode ser escolhido como ponto de potencial nulo. No exemplo a seguir, adota-se o ponto  $c$  do circuito mostrado na figura como estando a um potencial nulo. Essa condição é indicada pelo símbolo terra  $\perp$  no ponto  $c$ .<sup>1</sup>

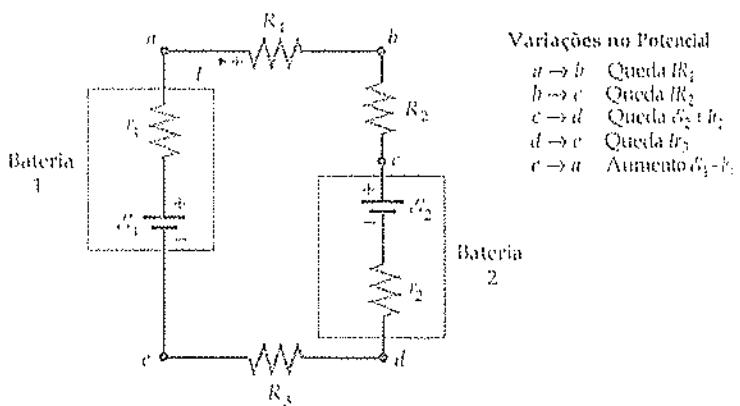


FIGURA 25-23  
Círculo contendo duas baterias e três resistores externos.

Suponha que os elementos do circuito mostrado na Figura 25-23 tenham os seguintes valores:  $\mathcal{E}_1 = 12\text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4\text{ V}$ ,  $r_1 = r_2 = 1\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 5\Omega$  e  $R_3 = 4\Omega$ , conforme mostrado na Figura 25-24. (a) Determine os potenciais nos pontos  $a$  até  $d$  indicados na figura, admitindo que o potencial no ponto  $c$  seja nulo. (b) Determine as potências de entrada e de saída no circuito.

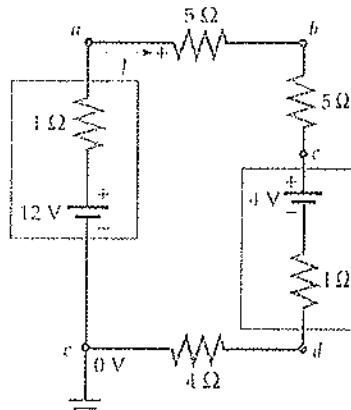


FIGURA 25-24

<sup>1</sup>Conforme foi mostrado na Seção 21-2, a Terra pode ser considerada como um condutor de grandes dimensões com uma fonte de carga ilimitada em suas proximidades, o que significa que o potencial da Terra basicamente permanece constante. Geralmente os circuitos elétricos são aterrados pela conexão de um de seus pontos à Terra. Como exemplo, pode-se citar a carcaça metálica de uma máquina de lavar roupas, que geralmente é aterrada pela ligação de um fio a uma tubulação de água, também metálica, em contato com a Terra. Como todos os corpos aterrados estão a um mesmo potencial, é conveniente designar o potencial nulo a esse ponto onde é realizado o aterramento.

*tee tal*  
 $I = \frac{V}{R}$   
 $I = \frac{V}{R_1 + R_2}$   
 $I = \frac{V}{R_1 + R_2}$   
 $I = \frac{V}{R_1 + R_2}$

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Para obter as diferenças de potenciais, necessita-se, inicialmente, determinar a corrente  $I$  no circuito. A queda de potencial entre os terminais de cada resistor será, então, igual a  $IR$ . Para discutir o balanço de energia, calcula-se a potência de entrada ou de saída de cada elemento utilizando as Equações 25-11 e 25-12.

- (a) 1. A corrente  $I$  no circuito pode ser obtida através da Equação 25-25:
- $$I = \frac{12 \text{ V} - 4 \text{ V}}{5 \Omega + 5 \Omega + 4 \Omega + 1 \Omega + 1 \Omega} = \frac{8 \text{ V}}{16 \Omega} = 0,5 \text{ A}$$
2. Determina-se agora o potencial em cada ponto assinalado no circuito:
- $$V_a = V_c + \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 0 + 12 \text{ V} - (0,5 \text{ A})(1 \Omega) = 11,5 \text{ V}$$
- $$V_b = V_a - IR_1 = 11,5 \text{ V} - (0,5 \text{ A})(5 \Omega) = 9 \text{ V}$$
- $$V_c = V_b - IR_2 = 9 \text{ V} - (0,5 \text{ A})(5 \Omega) = 6,5 \text{ V}$$
- $$V_d = V_c - \mathcal{E}_2 - Ir_2 = 6,5 \text{ V} - 4 \text{ V} - (0,5 \text{ A})(1 \Omega) = 2,0 \text{ V}$$
- $$V_e = V_d - IR_3 = 2,0 \text{ V} - (0,5 \text{ A})(4 \Omega) = 0$$
- (b) 1. Calcule, inicialmente, a potência fornecida pela fonte de fem  $\mathcal{E}_1$ :
- $$P_{\mathcal{E}_1} = \mathcal{E}_1 I = (12 \text{ V})(0,5 \text{ A}) = 6 \text{ W}$$
2. Parte dessa potência é dissipada nos resistores, tanto internos quanto externos:
- $$P_R = I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 + I^2 r_1 + I^2 r_2$$
- $$= (0,5 \text{ A})^2(5 \Omega + 5 \Omega + 4 \Omega + 1 \Omega + 1 \Omega) = 4,0 \text{ W}$$
3. Os 2 W de potência remanescentes carregam a bateria 2:
- $$P_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E}_2 I = (4 \text{ V})(0,5 \text{ A}) = 2 \text{ W}$$
4. A taxa com a qual a energia potencial é perdida, saindo do circuito, é:
- $$P = P_R + P_{\mathcal{E}_1} = 6 \text{ W}$$

Observe que a tensão nos terminais da bateria que está sendo carregada no Exemplo 25-14 é  $V_c - V_d = 4,5 \text{ V}$ , que é maior do que a fem da bateria. Se a mesma bateria de 4 V fosse fornecer 0,5 A a um circuito externo, a tensão entre seus terminais deveria ser de 3,5 V (admitindo novamente que sua resistência interna seja de 1 Ω). Se a resistência interna for muito pequena, a tensão entre os terminais de uma bateria será aproximadamente igual à sua fem, caso a bateria forneça energia a um circuito externo ou esteja sendo carregada. Algumas baterias reais, como as utilizadas nos veículos de passeio, são praticamente reversíveis e podem ser facilmente recarregadas. Outros tipos de baterias não são reversíveis. Se você tentar recarregar uma dessas baterias fornecendo corrente de seu terminal positivo para seu terminal negativo, boa parte da energia, se não toda, será dissipada na forma de energia térmica, e não transformada em energia química.

A bateria de um veículo, totalmente carregada<sup>a</sup>, deve ser conectada através de cabos ("chupeta") à bateria descarregada de outro veículo, de modo a carregá-la. (a) Em que terminal da bateria descarregada o terminal positivo da bateria

<sup>a</sup>Baterias não armazenam carga. Uma bateria *totalmente carregada* é aquela com uma quantidade máxima de energia química armazenada.

carregada deve ser conectado? (b) Admita que a bateria carregada disponha de uma fem  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$  e que a bateria descarregada tenha uma fem  $\mathcal{E}_2 = 11 \text{ V}$ , que as resistências internas das baterias são  $r_1 = r_2 = 0,02 \Omega$  e que a resistência dos cabos de conexão seja  $R = 0,01 \Omega$ . Qual será a corrente durante o carregamento? (c) Qual será a corrente se as baterias forem conectadas incorretamente?

#### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Para carregar a bateria descarregada conecta-se o terminal positivo no terminal positivo e o negativo no negativo, de modo que a corrente passe pela bateria descarregada do terminal positivo para o terminal negativo (Figura 25-25):
- Utilize a regra de Kirchhoff das malhas para obter a corrente durante o carregamento:

$$\mathcal{E}_1 - Ir_1 - Ir_2 - \mathcal{E}_2 - IR = 0$$

assim

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12 \text{ V} - 11 \text{ V}}{0,05 \Omega} = 20 \text{ A}$$

- Quando as baterias são conectadas incorretamente, os terminais positivos nos negativos, as fems se somam:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12 \text{ V} + 11 \text{ V}}{0,05 \Omega} = 460 \text{ A}$$

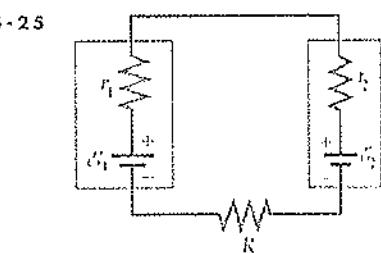


FIGURA 25-25

**NOTA** Se as baterias fossem conectadas incorretamente, conforme mostrado na Figura 25-26, a resistência total do circuito seria da ordem de centésimos de ohms, a corrente seria muito grande e as baterias poderiam explodir, espalhando ácido quente por todos os lados.

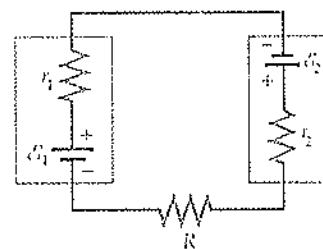
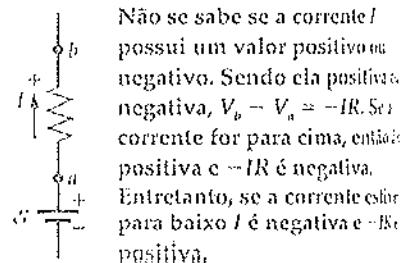
#### Circuitos com Múltiplas Malhas

Em geral, as orientações das correntes nos diferentes ramos de um circuito com múltiplas malhas são desconhecidas. Felizmente, as regras de Kirchhoff não exigem o conhecimento prévio das direções das correntes. Na realidade, a aplicação correta dessas regras conduz à determinação das direções das correntes. Para isso, um sentido positivo para a corrente deve ser arbitrado para cada ramo do circuito, e indica-se esse sentido com a colocação de uma correspondente seta no diagrama esquemático do circuito (Figura 25-27). Se a corrente real em um determinado ramo estiver no sentido positivo, ao resolver-se o problema ela terá um valor positivo, e se a corrente real for oposta ao sentido arbitrado como positivo a solução para essa corrente apresentará um valor negativo. A corrente que passa por um resistor se move de um potencial mais alto para um potencial mais baixo. Portanto, sempre que se passa por um resistor no sentido da corrente a variação no potencial é negativa, e vice-versa. Assim, pode-se afirmar que

Para cada ramo de um circuito, deve-se representar uma seta para indicar a orientação positiva da corrente. Em seguida, se um resistor for atravessado no sentido da seta, a variação de seu potencial  $\Delta V$  será igual a  $-IR$  (e se o resistor for atravessado no sentido oposto,  $\Delta V$  será igual a  $+IR$ ).

#### CONVENÇÃO DE SINAIS PARA A VARIAÇÃO DO POTENCIAL ENTRE OS TERMINAIS DE UM RESISTOR

Ao se atravessar um resistor no sentido positivo, se a corrente  $I$  for positiva então  $-IR$  será negativo. Essa condição já era esperada, uma vez que a corrente está

FIGURA 25-26  
Duas baterias conectadas incorretamente — perigo!FIGURA 25-27  
Não se sabe se a corrente  $I$  possui um valor positivo ou negativo. Sendo ela positiva, negativa,  $V_b - V_a = -IR$ . Se a corrente for para cima, então  $I$  é positiva e  $-IR$  é negativa. Entretanto, se a corrente estiver para baixo  $I$  é negativa e  $-IR$  é positiva.

sempre no sentido da diminuição do potencial. Se um resistor for atravessado no sentido positivo e se a corrente  $I$  for negativa, então  $-IR$  será positivo. Analogamente, se um resistor for atravessado no sentido negativo e se a corrente  $I$  for positiva, então  $+IR$  será positivo, e se um resistor for atravessado no sentido negativo e se a corrente  $I$  for negativa, então  $+IR$  será negativo.

A análise de circuitos que têm mais de uma malha requer a utilização de ambas as regras de Kirchhoff, com a regra de Kirchhoff dos nós aplicada aos nós onde a corrente se divide em duas ou mais componentes.

- (a) Determine a corrente em cada ramo do circuito mostrado na Figura 25-28.  
 (b) Determine também a energia dissipada no resistor de  $4\ \Omega$  em 3 s.

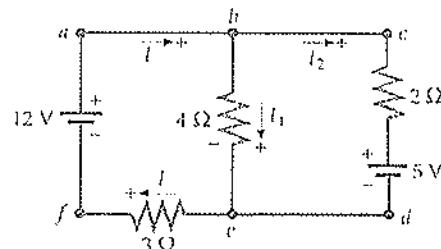


FIGURA 25-28

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Existem no circuito três ramos e, consequentemente, três correntes a serem determinadas,  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , assim são necessárias três relações entre essas correntes. Uma das relações é obtida pela aplicação da regra dos nós ao ponto  $b$  do circuito. (Pode-se também aplicar a regra dos nós ao ponto  $e$ , o único outro nó no circuito, porém as informações serão exatamente as mesmas.) As outras duas relações são obtidas aplicando-se a regra das malhas. Existem três malhas no circuito: as duas malhas interiores,  $abefab$  e  $abdefa$ , e a malha exterior,  $abdefa$ . Pode-se utilizar quaisquer duas dessas três malhas — a terceira fornecerá informações redundantes. Para cada ramo do circuito da Figura 25-28 há uma seta com a orientação arbitrária para a corrente. As orientações dessas setas indicam o sentido positivo para a corrente daquele ramo. Caso os resultados da análise indiquem um valor negativo para a corrente em um dos ramos, deve-se concluir que essa corrente está no sentido oposto ao indicado.

- (a)
1. Aplique a regra dos nós ao ponto  $b$ :  

$$I = I_1 + I_2$$
  2. Aplique a regra das malhas à malha externa,  $abdefa$ :  

$$12\text{ V} - (2\ \Omega)I_2 - 5\text{ V} - (3\ \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$
  3. Divida a equação anterior por  $1\ \Omega$ , lembrando que  $(1\text{ V})/(1\ \Omega) = 1\text{ A}$ , e, em seguida, arrume o resultado:  

$$7\text{ A} - 3I_1 - 5I_2 = 0$$
  4. Para obter a terceira relação, aplique a regra das malhas à malha da direita,  $bcdebc$ :  

$$-(2\ \Omega)I_2 - 5\text{ V} + (4\ \Omega)I_1 = 0$$
  5. Os resultados das etapas 3 e 4 podem ser combinados para a determinação de  $I_1$  e  $I_2$ . Para isso, multiplique-se inicialmente o resultado da etapa 3 por 2 e o resultado da etapa 4 por -5:  

$$-5A + 4I_1 - 2I_2 = 0$$
  6. Some as equações da etapa 5 para eliminar  $I_2$  e determine  $I_1$ :  

$$14\text{ A} - 6I_1 - 10I_2 = 0$$
  7. Substitua  $I_1$  nos resultados das etapas 3 ou 4 para determinar  $I_2$ :  

$$25\text{ A} - 20I_1 + 10I_2 = 0$$
  8. Finalmente, utilizando os valores de  $I_1$  e  $I_2$ , determine  $I$  utilizando a equação da primeira etapa:  

$$I = I_1 + I_2 = 1,5\text{ A} + 0,5\text{ A} = 2,0\text{ A}$$
  - (b)
    1. A potência dissipada no resistor de  $4\ \Omega$  é obtida pela equação  $P = I^2R$ :  

$$P = I_1^2R = (1,5\text{ A})^2(4\ \Omega) = 9\text{ W}$$

2. A energia total dissipada em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é  $W = P\Delta t$ .  $W = P\Delta t = (9 \text{ W})(3 \text{ s}) = \boxed{27 \text{ J}}$   
Nesse caso,  $t = 3 \text{ s}$ .

**VERIFICAÇÃO** No circuito mostrado da Figura 25-29, o potencial no ponto  $f$  foi escolhido como nulo, e as correntes e os potenciais foram designados para os demais pontos. Note que  $V_b - V_c = 6 \text{ V}$  e  $V_c - V_f = 6 \text{ V}$ .

**NOTA** Aplicando-se a regra das malhas à malha da esquerda, *abef*, tem-se  $12 \text{ V} - (4 \Omega)I_1 - (3 \Omega)(I_1 + I_2) = 0$ , ou  $12 \text{ A} - 7I_1 - 3I_2 = 0$ . Observe que esse é exatamente o resultado da etapa 3 subtraído do resultado da etapa 4, e, portanto, não contém novas informações, conforme esperado.

**EXERCÍCIO** Determine a corrente  $I_1$  para o caso em que o resistor de  $3 \Omega$  tem de (a) a uma resistência nula e (b) a uma resistência infinita. [Resposta (a) A queda de potencial entre os terminais do resistor de  $4 \Omega$  é de  $12 \text{ V}$ ; assim  $I_1 = 3 \text{ A}$ . (b) Nesse caso, a malha da esquerda é um circuito aberto, logo  $I = 0$  e  $I_2 = -I_1$ . Assim,  $I_1 = (5 \text{ V})/(2 \Omega + 4 \Omega) = 0,833 \text{ A}$ .]

O Exemplo 25-16 ilustra os procedimentos gerais de análise dos circuitos com múltiplas malhas:

1. Desenhe um esquema do circuito.
2. Substitua qualquer combinação de resistores em série ou em paralelo por sua capacidade equivalente.
3. Escolha a orientação positiva para a corrente de cada ramo do circuito e indique esse sentido por uma seta. Dê um nome para a corrente que passa por cada ramo. Acrescente um sinal positivo ou negativo para indicar o terminal de mais alto potencial e o terminal de mais baixo potencial de cada fonte de tensão.
4. Aplique a regra dos nós a todos os pontos onde há divisão de corrente.
5. Aplique a regra das malhas a cada malha até que a quantidade de equações independentes seja igual ao número de incógnitas. Ao passar por um resistor no sentido positivo, a variação no potencial é igual a  $-IR$ . Ao passar por uma bateria do terminal negativo para o positivo, a variação no potencial será  $\beta - IR$ .
6. Resolva as equações para obter os valores desejados.
7. Verifique seus resultados designando um potencial nulo para um determinado ponto do circuito e utilize os valores das correntes calculadas para obter os potenciais em outros pontos do circuito.

#### PROCEDIMENTO GERAL PARA A ANÁLISE DE CIRCUITOS COM MÚLTIPAS MALHAS

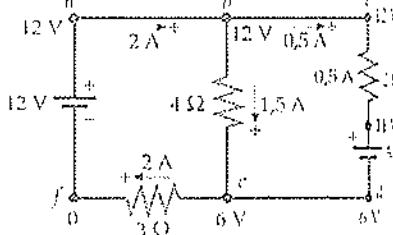


FIGURA 25-29

Tente resolver este exemplo sozinho

- (a) Determine a corrente em cada ramo do circuito mostrado na Figura 25-30. Faça um esquema do circuito com o módulo e a orientação correta da corrente em cada ramo. (b) Considere que o potencial seja nulo no ponto  $c$  e, em seguida, defina o potencial nos demais pontos desde  $a$  até  $f$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Substitua, inicialmente, os dois resistores em paralelo por uma resistência equivalente. Seja  $i$  a corrente que passa pela bateria de  $18 \text{ V}$  e  $I_1$  a corrente ori-

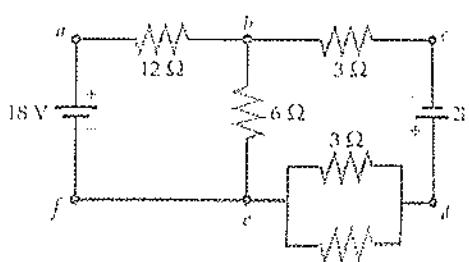


FIGURA 25-30

entada do ponto *b* para o ponto *c*. As correntes podem, assim, ser obtidas pela aplicação da regra dos nós aos ramos associados aos pontos *b* e *c* e pela aplicação da regra das malhas a cada malha.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

### Etapas

- (a) 1. Determine a resistência equivalente dos resistores de  $3\ \Omega$  e  $6\ \Omega$  em paralelo.

$$R_{eq} = 2\ \Omega$$

2. Aplique a regra dos nós aos pontos *b* e *c*, e refaça o diagrama do circuito com a indicação das orientações positivas das correntes nos ramos (Figura 25-31).

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{ou} \quad (I_1 = I - I_2)$$

3. Aplique a regra das malhas de Kirchhoff à malha aberta para obter uma equação envolvendo  $I$  e  $I_2$ .

$$18\ \text{V} - (12\ \Omega)I - (6\ \Omega)(I - I_2) = 0$$

4. Simplifique a equação da etapa 3.

$$3A + 3I + I_2 = 0$$

5. Aplique a regra de Kirchhoff das malhas à malha *bcdcb* para obter uma equação envolvendo  $I$  e  $I_2$ .

6. Simplifique a equação da etapa 5.

7. Resolva simultaneamente as equações das etapas 4 e 6 para  $I$  e  $I_2$ . Essa solução pode ser obtida pela multiplicação da equação resultante da etapa 4 por 11, seguida da soma das equações, eliminando-se assim  $I_2$ .

8. Determine a corrente que passa pelo resistor de  $6\ \Omega$ .

9. Utilize  $V = I_R_{eq}$  para obter a queda de potencial entre os terminais dos resistores de  $3\ \Omega$  e  $6\ \Omega$  em paralelo.

10. Utilize o resultado da etapa 9 para obter a corrente em cada um dos resistores em paralelo.

- (b) Refaça a Figura 25-31 mostrando a corrente que passa por cada ramo do circuito (Figura 25-32). Comece com  $V = 0$  no ponto *c* e calcule o potencial nos pontos *d*, *e*, *f*, *a* e *b*.

### Respostas

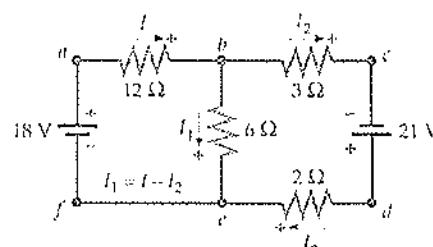


FIGURA 25-31

$$-(3\ \Omega)I_1 + 21\ \text{V} - (2\ \Omega)I_2 + (6\ \Omega)(I - I_2) = 0$$

$$21\ \text{A} + 6I - 14I_2 = 0$$

$$I_1 = \boxed{2\ \text{A}}, \quad I_2 = \boxed{3\ \text{A}}$$

$$I_1 = I - I_2 = \boxed{-1\ \text{A}}$$

$$V = 6\ \text{V}$$

$$I_{30} = \boxed{2\ \text{A}}, \quad I_{60} = \boxed{1\ \text{A}}$$

$$V_d = V_c + 21\ \text{V} = 0 + 21\ \text{V} = \boxed{21\ \text{V}}$$

$$V_e = V_d - (3\ \text{A})(2\ \Omega) = 21\ \text{V} - 6\ \text{V} = \boxed{15\ \text{V}}$$

$$V_f = V_e = \boxed{15\ \text{V}}$$

$$V_a = V_f + 18\ \text{V} = 15\ \text{V} + 18\ \text{V} = \boxed{33\ \text{V}}$$

$$V_b = V_a - (2\ \text{A})(12\ \Omega) = 33\ \text{V} - 24\ \text{V} = \boxed{9\ \text{V}}$$

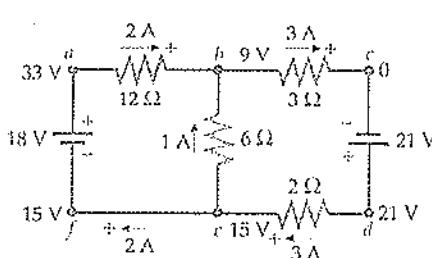


FIGURA 25-32

**VERIFICAÇÃO** Do ponto *b* até o ponto *c* o potencial elétrico diminui de  $(3 \text{ A})(3 \Omega) = 9 \text{ V}$ , o que fornece  $V_c = 0$ , conforme estabelecido no enunciado. Do ponto *c* ao ponto *b*, a queda do potencial é de  $(1 \text{ A})(6 \Omega) = 6 \text{ V}$ , logo,  $V_b = V_c - 6 \text{ V} = 15 \text{ V} - 6 \text{ V} = 9 \text{ V}$ .

### Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros

Os equipamentos que medem corrente, diferença de potencial e resistência são denominados, respectivamente, amperímetros, voltímetros e ohmímetros. Geralmente esses três medidores são reunidos em um único aparelho denominado *multímetro*, que tem uma chave com a qual a função desejada é selecionada. Você pode utilizar um voltímetro para medir a tensão entre os terminais da bateria de seu carro e um ohmímetro para medir a resistência de um aparelho elétrico em sua residência (como, por exemplo, uma torradeira ou uma lâmpada), ao suspeitar de um curto-círcuito ou do rompimento de um fio.

Para medir a corrente que passa pelo resistor de um circuito, coloca-se um amperímetro em série com o resistor, conforme mostrado na Figura 25-33, de modo que a mesma corrente que passa pelo resistor passe também pelo amperímetro. Como o amperímetro tem uma resistência muito baixa (porém finita), a diminuição da corrente no circuito é quase imperceptível com a inserção desse aparelho. O melhor amperímetro será aquele que tiver uma resistência muito pequena, de modo que a corrente a ser medida seja afetada de forma desprezível.

A diferença de potencial entre os terminais de um resistor é medida colocando-se um voltímetro entre os terminais do resistor (em paralelo com ele), conforme mostrado na Figura 24-34, de modo que a queda de potencial entre os terminais do voltímetro seja idêntica àquela do resistor. O voltímetro reduz a resistência entre os pontos *a* e *b*, aumentando, assim, a corrente total no circuito e variando a queda de potencial entre os terminais do resistor. O melhor voltímetro é aquele que apresenta a maior resistência possível, de modo que seu efeito na corrente do circuito seja desprezível.

O principal componente de muitos amperímetros e voltímetros de uso comum é o galvanômetro, um instrumento sensível às pequenas correntes que passam por ele. O galvanômetro é projetado de forma que sua escala de leitura seja proporcional à corrente que por ele passa. Um galvanômetro típico, utilizado em muitos laboratórios acadêmicos, consiste em uma bobina de fio condutor na presença do campo magnético de um ímã permanente. Quando uma corrente passa pela bobina o campo magnético exerce um torque sobre ela, fazendo-a girar. Um ponteiro fixado à bobina indica a leitura na escala. A bobina contribui com uma pequena resistência quando o galvanômetro é colocado em um circuito.

Para construir um amperímetro a partir de um galvanômetro, coloca-se um pequeno resistor, denominado resistor de derivação, em paralelo com o galvanômetro. A resistência desse resistor é geralmente muito menor do que a do galvanômetro, de modo que boa parte da corrente passa por essa derivação. A resistência equivalente do amperímetro é, assim, aproximadamente igual à resistência do resistor de derivação, que é muito menor do que a resistência interna do galvanômetro isolado. Para construir um voltímetro, coloca-se um resistor de grande resistência em série com o galvanômetro, de modo que a resistência equivalente do voltímetro seja muito maior do que a do galvanômetro isolado. A Figura 25-35 ilustra a construção de um amperímetro e de um voltímetro a partir de um galvanômetro. A resistência do galvanômetro,  $R_g$ , é mostrada separadamente nes-

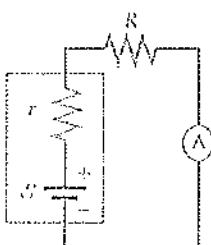


FIGURA 25-33

Para medir a corrente em um resistor  $R$ , um amperímetro  $A$  (circundado) é instalado em série com o resistor, de modo que a mesma corrente passe por ele e pelo resistor.

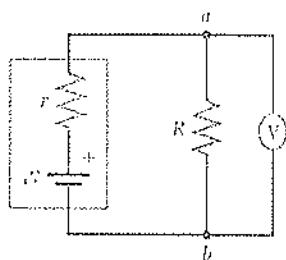
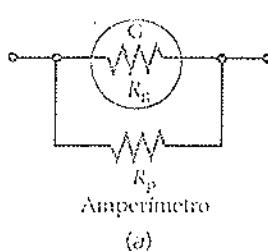
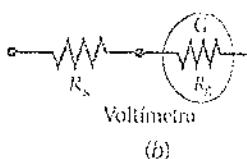


FIGURA 25-34

Para medir a queda de potencial entre os terminais de um resistor, um voltímetro  $V$  (circundado) é instalado em paralelo com o resistor, de modo que as quedas de potencial entre os terminais do voltímetro e do resistor sejam idênticas.



(a)



(b)

FIGURA 25-35

(a) Um amperímetro consiste em um galvanômetro  $G$  (circundado) cuja resistência é  $R_g$  e uma pequena resistência em paralelo,  $R_p$ . (b) Um voltímetro consiste em um galvanômetro  $G$  (circundado) e uma grande resistência em série  $R_v$ .

ses desenhos esquemáticos, mas na realidade ela é parte integrante do galvanômetro.

Um ohmímetro simples consiste em uma bateria conectada em série com um galvanômetro e um resistor, conforme mostrado na Figura 25-36a. A resistência  $R_s$  é selecionada, de modo que quando os terminais  $a$  e  $b$  estão em curto (isto é, colocados em contato elétrico, com resistência desprezível entre eles) a corrente que passa pelo galvanômetro fornece o deslocamento de fundo de escala. Assim, um deslocamento de fundo de escala indica que a resistência entre os terminais  $a$  e  $b$  é nula. Um deslocamento nulo indica uma resistência infinita entre os terminais. Quando os terminais são conectados aos terminais de uma resistência  $R$  desconhecida, a corrente que passa pelo galvanômetro torna-se dependente de  $R$ , logo a escala pode ser calibrada de modo a fornecer uma leitura direta de  $R$ , conforme mostrado na Figura 25-36b. Como um ohmímetro provoca a passagem de uma corrente pela resistência a ser medida, sua utilização deve ser cuidadosa. Por exemplo, você não deve tentar medir a resistência de um galvanômetro sensível com um ohmímetro, pois provavelmente a corrente fornecida pela bateria deste danificaria o circuito daquele.

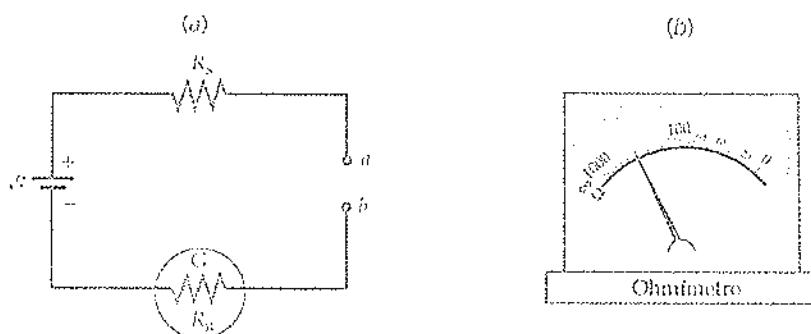


FIGURA 25-36

(a) Um ohmímetro consiste em uma bateria conectada em série com um galvanômetro e um resistor  $R_s$ , que é escolhido de modo que o galvanômetro forneça um deslocamento de fundo de escala quando os pontos  $a$  e  $b$  estão em curto. (b) Quando um resistor  $R$  é colocado entre os pontos  $a$  e  $b$ , o ponteiro do galvanômetro se desloca de uma quantidade que depende do valor de  $R$ . A escala do galvanômetro é calibrada para fornecer uma leitura em ohms.

### Circuitos RC

Um circuito constituído por um resistor e um capacitor é denominado circuito *RC*. A corrente em um circuito *RC* flui em um único sentido, como em todos os circuitos de corrente contínua, porém o módulo da corrente varia com o tempo. Um exemplo prático de circuito *RC* é o *flash* de uma câmera fotográfica. Antes de a fotografia ser batida, uma bateria carrega o capacitor através de um resistor. Depois de carregado o capacitor, o *flash* fica pronto para ser utilizado. Ao tirar a fotografia, a carga acumulada no capacitor é descarregada através da lâmpada. A bateria então recarrega o capacitor e, após um curto intervalo de tempo, o *flash* estará pronto para uma nova fotografia. Utilizando as regras de Kirchhoff, as equações para a carga  $Q$  e para a corrente  $I$  podem ser obtidas em função do tempo tanto para carregar quanto para descarregar o capacitor através do resistor.

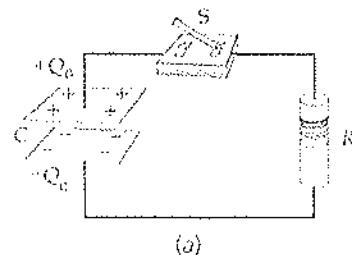
### Descarregando um Capacitor

A Figura 25-37 mostra um capacitor com cargas iniciais  $+Q_0$  em sua placa superior e  $-Q_0$  em sua placa inferior. O capacitor é conectado a um resistor  $R$  e a uma chave  $S$  inicialmente aberta. A diferença de potencial entre os terminais do capacitor é, inicialmente,  $V_0 = Q_0/C$ , em que  $C$  é a capacidade.

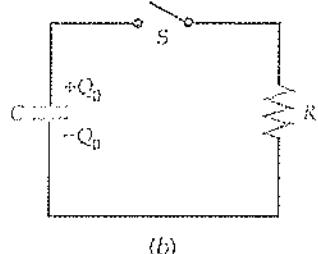
Põe-se, então, a chave no tempo  $t = 0$ . Como existe agora uma diferença de potencial entre os terminais do resistor, por ele passará uma corrente. A corrente inicial é

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad 25-26$$

A corrente é devida ao fluxo de carga da placa positiva do capacitor para a placa negativa, passando pelo resistor. Após um determinado tempo a carga no capacitor é reduzida. Escolhendo-se como positivo o sentido horário, a corrente será igual à taxa de diminuição dessa carga. Se  $Q$  é a carga na placa superior do capacitor no tempo  $t$ , a corrente nesse tempo será



(a)



(b)

FIGURA 25-37

(a) Um capacitor de placas paralelas em série com uma chave  $S$  e um resistor  $R$ . (b) Esquema do circuito mostrado na Figura 25-37a.

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad 25-27$$

(O sinal negativo é necessário, pois enquanto a carga  $Q$  diminui, a variação  $dQ/dt$  é negativa.) Percorrendo o circuito no sentido horário, encontra-se uma queda de potencial  $IR$  entre os terminais do resistor e um aumento de potencial  $Q/C$  entre os terminais do capacitor. Assim, a regra de Kirchhoff das malhas fornece

$$\frac{Q}{C} + IR = 0 \quad 25-28$$

onde  $Q$  e  $I$ , ambas funções do tempo, estão relacionadas pela Equação 25-27. Substituindo  $I$  por  $-dQ/dt$  na Equação 25-28, tem-se

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q \quad 25-29$$

Para resolver essa equação, as variáveis  $Q$  e  $t$  são inicialmente separadas multiplicando-se ambos os lados por  $dt/Q$  e, em seguida, integrando-se. Multiplicando ambos os lados por  $dt/Q$ , obtém-se

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt \quad 25-30$$

As variáveis  $Q$  e  $t$  estão agora em termos separados. A integração desde  $Q_0$  em  $t = 0$  até  $Q'$  no tempo  $t'$  fornece

$$\int_{Q_0}^{Q'} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_0^{t'} dt$$

ou

$$\ln \frac{Q'}{Q_0} = -\frac{t'}{RC}$$

Como o tempo  $t'$  é arbitrário, pode-se substituí-lo por  $t$  e considerar  $Q' = Q(t)$ . Explicitando para  $Q(t)$ , tem-se

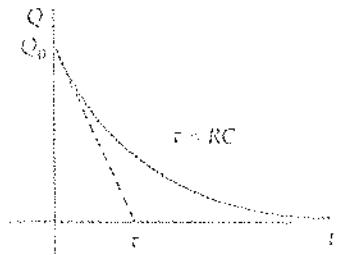
$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau} \quad 25-31$$

onde  $\tau$ , denominada constante de tempo, é o tempo necessário para a carga diminuir de um fator igual a  $e^{-1}$ :

$$\tau = RC \quad 25-32$$

#### Descarga: Carga em função do tempo

A Figura 25-38 mostra o comportamento da carga no capacitor do circuito mostrado na Figura 25-37 em função do tempo. Após um tempo  $t = \tau$ , a carga vale  $Q = e^{-1}Q_0 = 0,37Q_0$ ; após o tempo  $t = 2\tau$ , a carga vale  $Q = e^{-2}Q_0 = 0,135Q_0$  e assim por diante. Após um tempo igual a muitas constantes de tempo, a carga  $Q$  torna-se desprezível. Esse tipo de decaimento, denominado decaimento ex-



**FIGURA 25-38**  
Gráfico do comportamento da carga em um capacitor em função do tempo para o circuito mostrado na Figura 25-37, quando a chave é fechada no tempo  $t = 0$ . A constante de tempo  $\tau = RC$  corresponde ao tempo necessário para a carga diminuir de um fator  $e^{-1}$ . (A constante de tempo também é o tempo que o capacitor precisa para descarregar totalmente se sua taxa de descarga permanecer constante, conforme indicado pela linha tracejada.)

\*Se o sentido positivo fosse escolhido como sendo anti-horário, o sinal na Equação 25-27 seria positivo.

ponencial, é muito comum na natureza. Isto ocorre sempre que a taxa com a qual uma grandeza diminui é proporcional à própria quantidade.<sup>1</sup>

A diminuição na carga de um capacitor pode ser comparada ao decréscimo na quantidade de água em um vaso cujos lados são verticais e que possua um pequeno furo em sua base. A taxa com a qual a água flui, saindo do vaso, é proporcional à pressão da água, que, por sua vez, é proporcional à quantidade de água que permanece no vaso.

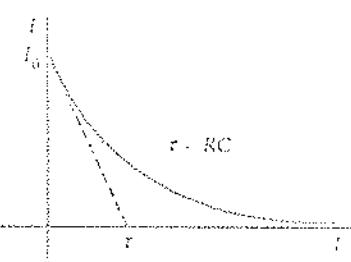
A corrente é obtida pela derivação da Equação 25-31, isto é,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Utilizando a Equação 25-26 e a definição da Equação 25-32, obtém-se

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad (25-33)$$

onde  $I_0 = V_0/R = Q_0/(RC)$  é a corrente inicial. A corrente em função do tempo é mostrada na Figura 25-39. Da mesma forma que ocorreu com a carga, a corrente apresenta um decaimento exponencial com constante de tempo  $\tau = RC$ .



**FIGURA 25-39**  
Gráfico da corrente em função do tempo para o circuito mostrado na Figura 25-37. A curva possui a mesma forma da mostrada na Figura 25-38. Se a taxa de decréscimo da corrente permanece constante, a corrente será nula após uma constante de tempo, conforme indicado pela linha tracejada.

Um capacitor de  $4\ \mu F$  é carregado por uma fonte de  $24\ V$  e, em seguida, conectado entre os terminais de um resistor de  $200\ \Omega$ . Determine (a) a carga inicial no capacitor, (b) a corrente inicial que passa pelo resistor de  $200\ \Omega$ , (c) a constante de tempo do circuito e (d) a carga no capacitor após  $4\ ms$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O diagrama esquemático do circuito é o mesmo do circuito mostrado na Figura 25-37.

(a) A carga inicial está relacionada à capacidade e à tensão da fonte:  $Q_0 = CV_0 = (4\ \mu F)(24\ V) = [96\ \mu C]$

(b) A corrente inicial é igual à tensão inicial dividida pela resistência:  $I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{24\ V}{200\ \Omega} = [0,12\ A]$

(c) A constante de tempo vale  $RC$ :

$$\tau = RC = (200\ \Omega)(4\ \mu F) = 800\ \mu s = [0,8\ ms]$$

(d) Substitua  $t = 4\ ms$  na Equação 25-31 para obter a carga no capacitor nesse tempo:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96\ \mu C)e^{-(4\ ms)/(0,8\ ms)}$$

$$= (96\ \mu C)e^{-5} = [0,647\ \mu C]$$

**NOTA** Após cinco constantes de tempo, a carga  $Q$  fica menor que 1% de seu valor inicial.

**EXERCÍCIO** Determine a corrente que passa pelo resistor de  $200\ \Omega$  em  $t = 4\ ms$ . (Resposta  $0,809\ mA$ )

### Carregando um Capacitor

A Figura 25-40a mostra um circuito que carrega um capacitor. Inicialmente o capacitor está descarregado. A chave  $S$ , originalmente aberta, é fechada no tempo  $t = 0$ , fazendo com que a carga comece imediatamente a fluir, passando pela bateria (Figura 25-40b). Se no tempo  $t$  a carga na placa mais à direita do capacitor

<sup>1</sup>Odecaimento exponencial foi analisado no Capítulo 14, quando o oscilador amortecido foi estudado.

é  $Q$  e a corrente  $I$  no circuito flui no sentido horário, a lei de Kirchhoff das malhas verifica:

$$I = IR = \frac{Q}{C} \Rightarrow 0 \quad 25-34$$

Observando essa equação, pode-se verificar que no tempo  $t = 0$  a carga no capacitor é nula e a corrente é  $I_0 = V/R$ . A carga então aumenta e a corrente diminui. A carga atinge o valor máximo  $Q_f = CV$  quando a corrente  $I$  se torna nula, conforme pode também ser verificado pela Equação 25-34.

Adotou-se, nesse circuito, o sentido positivo, de modo que se a corrente  $I$  for positiva a carga  $Q$  aumenta. Assim,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

A substituição de  $I$  por  $dQ/dt$  na Equação 25-34 fornece

$$I = R \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} \Rightarrow 0 \quad 25-35$$

A Equação 25-35 pode ser resolvida da mesma forma que a Equação 25-29. Os detalhes são deixados na forma de um problema (Problema 119). O resultado é

$$Q = CV(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad 25-36$$

em que  $Q_f = CV$  é a carga final. A corrente é obtida a partir de  $I = dQ/dt$ :

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\dot{Q} \left( -\frac{1}{RC} e^{-t/RC} \right) = \frac{C}{R} e^{-t/RC}$$

ou

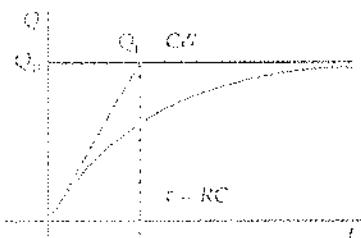
$$I = \frac{C}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \quad 25-37$$

onde a corrente inicial, nesse caso, é  $I_0 = V/R$ .

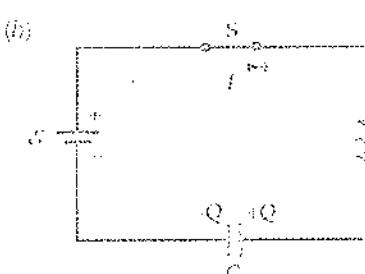
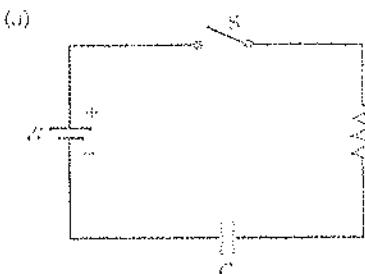
As Figuras 25-41 e 25-42 mostram o comportamento da carga e da corrente em função do tempo.

**Exercício** Mostre que a Equação 25-36 de fato satisfaz a Equação 25-35 substituindo  $Q(t)$  e  $dQ/dt$  na Equação 25-35.

**Exercício** Qual é a fração da carga máxima existente no capacitor após um tempo  $t = 2\tau$ ? (Resposta 0,86)

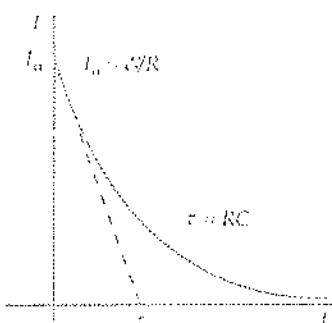


**FIGURA 25-41**  
Gráfico da carga armazenada no capacitor em função do tempo para o circuito de carregamento mostrado na Figura 25-40, após a chave ser fechada (em  $t = 0$ ). Depois de um tempo  $t = \tau = RC$ , a carga no capacitor é de 0,63  $CV$ , onde  $CV$  é sua carga final. Se o carregamento ocorresse a uma taxa constante, o capacitor estaria totalmente carregado após um tempo  $t = \tau$ .



**FIGURA 25-40**

(a) Circuito de carregamento de um capacitor por uma diferença de potencial  $V$ . (b) Após a chave ser fechada, a corrente fluirá e será estabelecida uma queda de potencial entre os terminais do resistor. Haverá, também, um armazenamento de carga e uma queda de potencial entre os terminais do capacitor.



**FIGURA 25-42**  
Gráfico da corrente em função do tempo para o carregamento do circuito da Figura 25-40. A corrente é inicialmente  $V/R$ , e diminui exponencialmente com o tempo.

**EXERCÍCIO 25-10**

Uma bateria de 6 V, com resistência interna desprezível, é utilizada para carregar um capacitor de  $2 \mu\text{F}$  através de um resistor de  $100 \Omega$ . Determine (a) a corrente inicial, (b) a carga final no capacitor, (c) o tempo necessário para a carga atingir 90% de seu valor final e (d) a carga quando o valor da corrente for igual à metade da sua corrente inicial.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA**

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

Etapas

(a) Determine a corrente final pela expressão  $I_0 = \mathcal{E}/R$

Respostas

$$I_0 = 0,06 \text{ A}$$

(b) Determine a carga final pela expressão  $Q = C\mathcal{E}$ .

$$Q = 12 \mu\text{C}$$

(c) Faça  $Q = 0,90 Q_f$  na Equação 25-36 e determine o valor do tempo  $t$ . (Resolve inicialmente para  $e^{rt}$ , em seguida, obtenha o logaritmo natural de ambos os lados da equação para determinar  $t$ .)

$$t = 2,3 \tau = 460 \mu\text{s}$$

(d) 1. Aplique a regra de Kirchhoff para as malhas ao circuito utilizando a Figura 25-40b.

$$\mathcal{E} - IR = \frac{Q}{C} = 0$$

2. Faça  $I = I_0/2$  e obtenha  $Q$ .

$$Q = \frac{Q_0}{2} = 6 \mu\text{C}$$

**NOTA** A resposta ao item (d) pode ser obtida determinando-se, inicialmente, o valor de  $t$  através da Equação 25-37 e, em seguida, utilizando esse valor na Equação 25-36 para resolver a carga  $Q$ . Entretanto, o uso da regra das malhas é, certamente, um procedimento mais direto.

O capacitor de  $6 \mu\text{F}$  do circuito mostrado na Figura 25-43 está inicialmente descarregado. Determine as correntes que passam pelos resistores de  $4 \Omega$  e de  $8 \Omega$  (a) imediatamente após a chave ser fechada e (b) um longo tempo após a chave ser fechada. (c) Determine a carga no capacitor um longo tempo após a chave ser fechada.

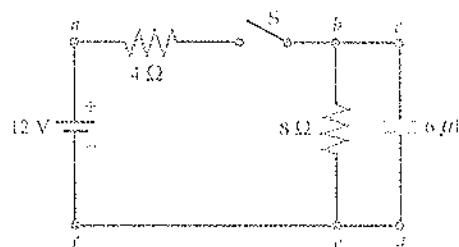


FIGURA 25-43

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Como o capacitor está inicialmente descarregado e uma vez que o resistor de  $4 \Omega$  limita a corrente que passa pela bateria, a diferença de potencial inicial entre os terminais do capacitor é nula. O capacitor e o resistor de  $8 \Omega$  estão conectados em paralelo, e a diferença de potencial entre os terminais de cada um deles é a mesma. Assim, a diferença de potencial inicial entre os terminais do resistor de  $8 \Omega$  é também nula.

(a) Aplique a regra das malhas à malha externa e resolva para a corrente que passa pelo resistor de  $4 \Omega$ . As diferenças de potencial entre os terminais do resistor de  $8 \Omega$  e do capacitor são iguais. Considere que a carga inicial no capacitor seja nula e resolva para a corrente que passa pelo resistor de  $8 \Omega$ :

$$12 \text{ V} = (4 \Omega)I_{4\text{m},0} + 0 \Rightarrow 0, I_{4\text{m},0} = 3 \text{ A}$$

$$I_{8\text{m},0}(8 \Omega) = \frac{Q_0}{C}, I_{8\text{m},0} = 0$$

Tente resolver este exemplo sozinho

- (b) Após um longo tempo, o capacitor estará totalmente carregado (nenhuma carga fluirá para suas placas) e as correntes através de ambos os resistores serão idênticas. Aplique a regra das malhas à malha esquerda e resolva para a corrente:
- (c) As diferenças de potencial entre os terminais do resistor de  $8\ \Omega$  e do capacitor são idênticas. Utilize essa condição para determinar a carga  $Q_f$ :

$$12\text{ V} = (4\ \Omega)I_f + (8\ \Omega)I_f = 0$$

$$I_f = 1\text{ A}$$

$$I_f(8\ \Omega) = \frac{Q_f}{C}$$

$$Q_f = (1\text{ A})(8\ \Omega)(6\ \mu\text{F}) = 48\ \mu\text{C}$$

**NOTA** A análise desse circuito para valores extremos do tempo, quando o capacitor ainda está descarregado ou já está totalmente carregado, é simples. Quando o capacitor está descarregado ele atua como se houvesse um curto-círcuito entre os pontos *c* e *d*; isto é, o circuito é idêntico ao mostrado na Figura 25-44*a*, onde o capacitor foi substituído por um fio cuja resistência é nula. Quando o capacitor está totalmente carregado ele atua como um circuito aberto, conforme mostrado na Figura 25-44*b*.

### Conservação da Energia no Carregamento de um Capacitor

Durante o processo de carregamento, uma carga total  $Q_f = \mathcal{C}\mathcal{E}$  flui através da bateria. A bateria, portanto, realiza o trabalho

$$W = Q_f\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

Metade desse trabalho é computada como energia armazenada no capacitor (veja a Equação 24-12):

$$U = \frac{1}{2}Q_f\mathcal{E}$$

Mostra-se agora que a outra metade do trabalho realizado pela bateria é dissipada na forma de energia térmica pela resistência do circuito. A taxa com a qual a energia é dissipada pela resistência  $R$  é

$$\frac{dW_R}{dt} = I^2R$$

Utilizando a Equação 25-37 para a corrente, tem-se

$$\frac{dW_R}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}\right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-2t/RC}$$

Determina-se a energia total dissipada integrando-se de  $t = 0$  até  $t = \infty$ :

$$W_R = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-2t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-at} dt$$

onde  $a = 2/RC$ . Assim,

$$W_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{e^{-at}}{-a} \Big|_0^\infty = -\frac{\mathcal{E}^2}{Ra}(0 - 1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{1}{a} = \frac{\mathcal{E}^2 RC}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{2}$$

O calor devido ao efeito Joule será, portanto,

$$W_R = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C = \frac{1}{2}Q_f\mathcal{E}$$

em que  $Q_f = \mathcal{C}\mathcal{E}$ . Esse resultado é independente da resistência  $R$ . Assim, quando o capacitor é carregado através de um resistor por uma fonte de fem constante metade da energia fornecida pela fonte de fem é armazenada no capacitor e metade é transformada em energia térmica. Essa energia térmica inclui a energia dissipada pela resistência interna da fonte de fem.

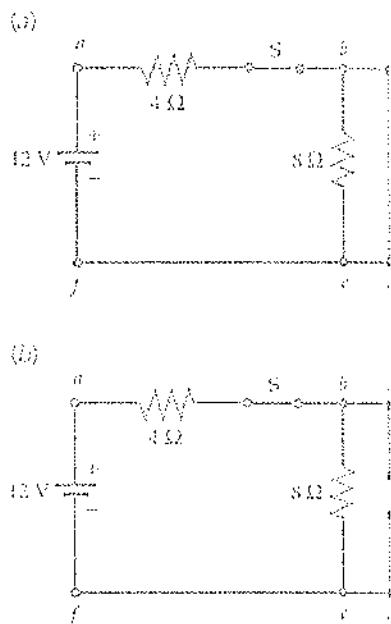
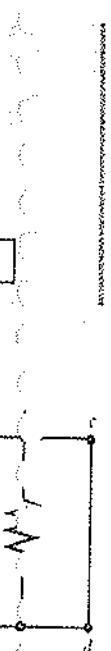


FIGURA 25-44

## RESUMO

	<b>Tópicos</b>		
	<b>1. Corrente Elétrica</b>	<b>Equações e Observações Importantes</b>	
	Velocidade de migração	A corrente elétrica representa o fluxo de carga elétrica que passa por uma determinada área de seção transversal.	
		$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	25-1
	Definição de resistência	Em um fio condutor, a corrente elétrica é o resultado da migração lenta de elétrons livres que são acelerados por um campo elétrico no fio e, em seguida, colidem com os fons da rede cristalina do material condutor. As velocidades de migração típicas dos elétrons em fios condutores são da ordem de alguns milímetros por segundo.	
		$J = qnAv_d$	25-3
	Resistividade, $\rho$	$R = \frac{V}{I}$	25-5
	Côeficiente de temperatura para a resistividade, $\alpha$	$\alpha = \frac{(\rho - \rho_{20})/\rho_{20}}{t_c - 20^\circ C}$	25-9
	<b>3. Lei de Ohm</b>	Para materiais ôhmicos, a resistividade não depende nem da corrente nem da queda de potencial:	
		$V = IR, \quad R \text{ constante}$	25-7
	<b>4. Potência</b>		
	Fornecida a um elemento de um circuito	$P = IV$	25-10
	Dissipada em um resistor	$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$	25-11
	<b>5. FEM</b>		
	Fonte de fem	Um dispositivo que fornece energia elétrica a um circuito	
	Potência fornecida por uma fonte de fem	$P = EI$	25-12
	<b>6. Bateria</b>		
	Ideal	Uma bateria ideal é uma fonte de fem que mantém uma diferença de potencial constante entre seus dois terminais, independentemente da corrente que a atravessa.	
	Real	Uma bateria real pode ser considerada uma bateria ideal em série com uma pequena resistividade, a resistividade interna da bateria.	
	Tensão entre terminais	$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$	25-13
	Energia total armazenada	$W = QC$	25-15

**7. Resistência Equivalente**

Resistores em série

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Resistores em paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

**8. Regras de Kirchhoff**

1. Ao se percorrer qualquer malha fechada de um circuito, a soma algébrica das variações de potencial deve ser igual a zero.
2. Em qualquer nó de um circuito onde a corrente pode se dividir, a soma das correntes que entram no nó deve ser igual à soma das correntes que saem desse nó.

**9. Aparelhos de Medição**

Amperímetro

Um amperímetro é um aparelho com resistência muito pequena, colocado em série com o elemento de um circuito para medir a corrente que o atravessa.

Voltímetro

Um voltímetro é um aparelho de alta resistência, colocado em paralelo com um elemento de um circuito, utilizado para medir a diferença de potencial entre seus terminais.

Ohmímetro

Um ohmímetro é um aparelho que contém uma bateria conectada em série com galvanômetro e uma resistor, utilizado para medir a resistência de um elemento de circuito colocado entre seus terminais.

**10. Descarregando um Capacitor**

Carga no capacitor

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Corrente no circuito

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Constante de tempo

$$\tau = RC$$

**11. Carregando um Capacitor**

Carga no capacitor

$$Q = C_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Corrente no circuito

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{C_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**PROBLEMAS**

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário. Em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, e relativamente fácil
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador
- • • • Problema que pode ser resolvido com auxílio de planilha

**Problemas Conceituais**

- 1 • • No estudo da eletrostática, conclui-se que não existe campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático. Como então os campos eletrostáticos no interior de um condutor podem ser discutidos?

- 2 • • A Figura 25-8 ilustra o análogo mecânico de um circuito elétrico simples. Idealize uma outra analogia mecânica, na qual a tensão seja representada por um fluxo de água ao invés de bolhas de gude.

- 3 • • Dois fios de mesmo material e de comprimentos idê-

25-17

as possuem diferentes diâmetros. O diâmetro do fio A é igual ao dobro do diâmetro do fio B. Se a resistência do fio B é  $R$ , qual é a resistência do fio A? (a)  $R$  (b)  $2R$  (c)  $R/2$  (d)  $4R$  (e)  $R/4$

25-21

4 •• Discuta a diferença entre uma fém e uma diferença de potencial.

5 •• Uma barra metálica deve ser utilizada como um resistor. Suas dimensões são 2 por 4 por 10 unidades de comprimento. Para que ela apresente a menor resistência, deve-se considerar como terminais os lados opostos cujas dimensões são

- (a) 2 por 4 unidades.
- (b) 2 por 10 unidades.
- (c) 4 por 10 unidades.
- (d) Todas as formas de conexão fornecerão a mesma resistência.
- (e) Nenhuma das afirmativas acima está correta.

6 •• Dois fios cilíndricos de cobre possuem a mesma massa. O fio A tem o dobro do comprimento do fio B. Suas resistências estão relacionadas por (a)  $R_A = 8R_B$ , (b)  $R_A = 4R_B$ , (c)  $R_A = 2R_B$ , (d)  $R_A = R_B$ .

7 •• Uma corrente  $I$  passa através de um resistor. A potência dissipada no resistor é  $P$ . Qual seria a potência dissipada se pelo mesmo resistor passasse uma corrente  $3I$ ? (Admita que não haja variação na resistência.) (a)  $P$  (b)  $3P$  (c)  $P/3$  (d)  $9P$  (e)  $P/9$

8 •• A potência dissipada em um resistor é  $P$  quando a queda de potencial entre seus terminais é  $V$ . Se a queda de tensão é aumentada para 2 V (sem qualquer variação na resistência) qual é a potência dissipada? (a)  $P$  (b)  $2P$  (c)  $4P$  (d)  $P/2$  (e)  $P/4$ .

9 •• Um aquecedor consiste em uma resistência variável conectada aos terminais de uma fonte de tensão constante. Para aumentar o calor de saída você deve diminuir ou aumentar a resistência?

10 •• Dois resistores com resistências  $R_1$  e  $R_2$  são conectados em paralelo. Se  $R_1 \gg R_2$ , a resistência equivalente da combinação é aproximadamente igual a (a)  $R_1$ , (b)  $R_2$ , (c) 0, (d) infinita.

11 •• Responda o Problema 10 considerando que os resistores  $R_1$  e  $R_2$  sejam conectados em série.

12 •• Dois resistores são conectados em paralelo a uma certa diferença de potencial. A resistência do resistor A é igual ao dobro da resistência do resistor B. Se a corrente que passa pelo resistor A é  $I$ , qual é a corrente que passa pelo resistor B? (a)  $I$  (b)  $2I$  (c)  $1/2I$  (d)  $4I$  (e)  $1/4I$ .

13 •• Dois resistores são conectados em série a uma certa diferença de potencial. O resistor A tem o dobro da resistência do resistor B. Se a corrente que passa pelo resistor A é  $I$ , qual é a corrente que passa pelo resistor B? (a)  $I$  (b)  $2I$  (c)  $1/2I$  (d)  $4I$  (e)  $1/4I$ .

14 •• Quando dois resistores idênticos são conectados em série aos terminais de uma bateria, a potência por ela fornecida é de 20 W. Se esses resistores forem conectados em paralelo aos terminais da mesma bateria, qual será a potência fornecida? (a) 5 W (b) 10 W (c) 20 W (d) 40 W (e) 80 W

15 •• A regra de Kirchhoff das malhas é uma consequência (a) da conservação da carga (b) da conservação da energia, (c) das leis de Newton, (d) da lei de Coulomb, (e) da quantização da carga.

16 •• Um voltímetro deveria ter uma resistência interna

- (a) infinita
- (b) nula

17 •• Um amperímetro deveria dispor de uma resistência interna

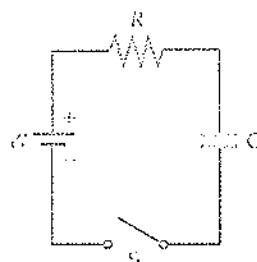
- (a) infinita
- (b) nula

18 •• Uma fonte de tensão ideal deveria apresentar uma resistência interna \_\_\_\_\_.

- (a) infinita
- (b) nula

19 •• O capacitor C mostrado no circuito da Figura 25-45 está inicialmente descarregado. Immediatamente após a chave S ser fechada, (a) a tensão entre os terminais de C é igual a  $E$ , (b) a tensão entre os terminais de R é igual a  $E$ , (c) a corrente no circuito é nula, (d) as afirmativas (a) e (c) estão corretas.

20 •• Durante o tempo gasto para carregar totalmente o capacitor da Figura 25-45, (a) a energia fornecida pela bateria é  $\frac{1}{2}C/E^2$ , (b) a energia dissipada no resistor é  $\frac{1}{2}C/E^2$ , (c) a energia no resistor é dissipada a uma taxa constante, (d) a carga total que flui através do resistor é  $\frac{1}{2}C/E$ .



**FIGURA 25-45**  
Problemas 19 e 20

21 •• Uma bateria é conectada a uma combinação em série de uma chave, um resistor e um capacitor inicialmente descarregado. A chave é fechada em  $t = 0$ . Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

- (a) Quando a carga no capacitor aumenta, a corrente aumenta.
- (b) Quando a carga no capacitor aumenta, a queda de tensão entre os terminais do resistor aumenta.
- (c) Quando a carga no capacitor aumenta, a corrente permanece constante.
- (d) Quando a carga no capacitor aumenta, a queda de tensão entre os terminais do capacitor diminui.
- (e) Quando a carga no capacitor aumenta, a queda de tensão entre os terminais do resistor diminui.

22 •• Um capacitor é descarregado através de um resistor. Se for necessário um tempo  $T$  para a carga no capacitor cair à metade de seu valor inicial, qual será o tempo necessário para que sua energia diminua até à metade de seu valor inicial?

23 •• Qual resistência produzirá mais energia térmica quando conectada aos terminais de uma bateria ideal, uma pequena resistência ou uma grande resistência?

24 •• Todas as fontes de tensão apresentam alguma resistência interna, geralmente da ordem de  $100\Omega$  ou menos. A partir dessa informação, explique a afirmativa a seguir, que aparece em alguns livros de eletrônica: "Uma fonte de tensão gosta de ver uma grande resistência."

25 •• As regras de Kirchhoff são aplicáveis aos circuitos que contenham capacitores?

26 •• Na Figura 25-46, os três resistores são idênticos. A potência dissipada (a) em  $R_1$  é idêntica à dissipada na combinação em paralelo de  $R_2$  e  $R_3$ , (b) em  $R_1$  é idêntica à dissipada em  $R_3$ , (c) maior em  $R_1$ , (d) menor em  $R_1$ .

### Estimativas e Aproximações

27 •• Um fio de cobre calibre 16, isolado com borracha, pode conduzir com segurança uma corrente máxima de 6 A. (a) Qual é a

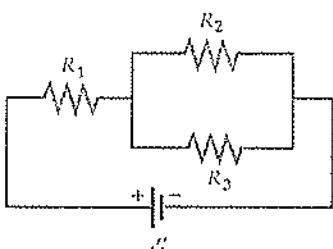


FIGURA 25-46

Problema 26

maior diferença de potencial que pode ser aplicada entre as extremidades de 40 m desse fio? (b) Determine o campo elétrico no fio ao conduzir uma corrente de 6 A. (c) Determine a potência dissipada no fio ao conduzir uma corrente de 6 A.

28 •• Um cabo de conexão para automóveis ("chupeta") com 3 m de comprimento é fabricado a partir de fios de cobre trançados, formando um único fio com área de seção transversal equivalente de  $10 \text{ mm}^2$ . (a) Qual é a resistividade do cabo de conexão? (b) Quando o cabo é utilizado para acionar o motor de partida de um carro, ele conduz uma corrente de 90 A. Qual é a queda de potencial entre os terminais do cabo? (c) Qual é a potência dissipada no cabo de conexão?

29 •• Uma bobina formada por fios de Nichrome deve ser utilizada como elemento de aquecimento de um aquecedor de água que deve gerar 8 g de vapor por segundo. O fio tem um diâmetro de 1,80 mm e é conectado a uma fonte de potência de 120 V. Determine o comprimento necessário para o cabo.

30 •• Nos EUA, as lâmpadas fluorescentes compactas custam US\$ 6 cada e têm uma expectativa de vida de 8000 h. Essas lâmpadas consomem 20 W de potência, porém produzem a iluminação equivalente a uma lâmpada incandescente de 75 W. As lâmpadas incandescentes custam aproximadamente US\$ 1,50 cada e têm uma expectativa de vida de 1200 h. Se uma residência mediana tem, em média, seis lâmpadas incandescentes de 75 W e se a energia custa 11,5 centavos de dólar por quilowatt-hora, qual é a economia anual de um consumidor ao utilizar as lâmpadas fluorescentes de maior eficiência?

31 •• Os fios de uma casa devem ter um calibre suficiente, de modo a não se aquecerem a ponto de provocar um incêndio. Suponha que um certo tipo de fio conduza uma corrente de 20 A e que se determine que o efeito Joule do fio não deva exceder 2 W/m. Qual deve ser o diâmetro de um fio de cobre seguro para essa corrente?

32 •• Um diodo a laser, utilizado na fabricação de uma ponteira a laser, é um elemento de circuito altamente não-linear. Para uma queda de tensão entre seus terminais menor do que aproximadamente 2,3 V, ele se comporta como se tivesse uma resistividade interna infinita, e para tensões maiores do que essa ele tem uma resistividade interna muito baixa — efetivamente nula. (a) Uma ponteira a laser é projetada utilizando duas baterias de relógio de 1,55 V em série entre os terminais do diodo a laser. Se cada uma das baterias tem uma resistividade interna entre  $100 \Omega$  e  $150 \Omega$ , estime a corrente no diodo a laser. (b) Cerca de metade da potência liberada pelo diodo a laser é transformada em energia radiante. Baseado nessa informação, estime a potência do diodo a laser e compare o valor obtido com os valores típicos encontrados comercialmente, de cerca de 3 mW. (c) Considerando que cada bateria tenha a capacidade de 20 mA·hora (isto é, se elas fornecessem uma corrente constante de 20 mA por um período de aproximadamente uma hora antes de descarregar), estime o tempo de operação contínua de uma ponteira a laser antes de necessitar uma troca de baterias.

### A Corrente e o Movimento das Cargas

33 • Uma corrente de 20 A passa por um fio de cobre calibre 10. Admitindo que cada átomo de cobre tenha um elétron livre, cuje a velocidade de migração dos elétrons.

34 • Em um tubo fluorescente com 3 cm de diâmetro,  $2 \times 10^{20}$  elétrons e  $0,5 \times 10^{18}$  íons positivos (com uma carga igual) fluem através da área de sua seção transversal a cada segundo. Qual é a corrente no tubo?

35 • Em um certo feixe de elétrons existem  $5,0 \times 10^{10}$  elétrons por centímetro cúbico. Suponha que a energia cinética de cada elétron seja de 10 keV e que o feixe seja cilíndrico, com um diâmetro de 1 mm. (a) Qual é a velocidade de um elétron no feixe? (b) Determine a corrente do feixe.

36 •• Um anel de raio  $a$  com densidade linear de carga  $\rho$  gira em torno de seu eixo com velocidade angular  $\omega$ . Determine a expressão para a corrente.

37 •• Dois fios de cobre, um de calibre 10 e o outro de calibre 14, são unidos através da solda de suas extremidades. Pelos fios fluem uma corrente de 15 A. Se existe um elétron livre por átomo de cobre em cada um dos fios, determine a velocidade de migração dos elétrons em cada fio.

38 •• Em um determinado acelerador de partículas, pacotes de prótons com diâmetro de 2 mm constituem uma corrente de 1 mA. A energia cinética de cada próton é de 20 MeV. O feixe colide com um alvo metálico que o absorve. (a) Qual é o número  $n$  de prótons por unidade de volume no feixe? (b) Quantos prótons atingem aço a cada minuto? (c) Se o alvo está inicialmente descarregado, expresse sua carga em função do tempo.

39 •• Em um supercolisor de prótons, os prótons de um feixe de 5 mA se movem com uma velocidade próxima à da luz. (a) Quais são os prótons por cada metro do feixe? (b) Se a área da seção transversal do feixe é de  $10^{-6} \text{ m}^2$ , qual é a densidade numérica de prótons?

### Resistividade e Lei do Ohm

40 • Uma corrente de 5 A passa por um fio com 10 m de comprimento e resistividade de  $0,2 \Omega$ . (a) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades do fio? (b) Qual é o módulo do campo elétrico no fio?

41 • Uma diferença de potencial de 100 V produz uma corrente de 3 A em um certo resistor. (a) Qual é a resistividade do resistor? Qual é a corrente quando a diferença de potencial é de 25 V?

42 • Um bloco de carbono tem um comprimento de 35 cm, uma área de seção transversal quadrada com lado de 0,5 cm. A diferença de potencial de 8,4 V é mantida entre suas extremidades. (a) Qual é a resistividade do bloco? (b) Qual é a corrente nesse bloco?

43 • Uma barra de carbono com raio de 0,1 mm é utilizada na fabricação de um resistor. A resistividade desse material é de  $10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$ . Qual é o comprimento necessário à barra para que sua resistividade seja de  $10 \Omega$ ?

44 • O terceiro trilho das vias do metrô (trilho condutor de corrente) é feito de aço e possui uma área cuja seção transversal é aproximadamente  $55 \text{ cm}^2$ . A resistividade do aço é de  $10^{-7} \Omega$ . Qual é a resistividade correspondente a um trecho de 10 km desse trilho?

45 • Qual é a diferença de potencial entre as extremidades de um fio de cobre calibre 16 com 30 m de extensão que conduz uma corrente de 5 A?

**54** • Qual é o comprimento de um fio de cobre calibre 14 que possui uma resistividade de  $2 \Omega$ ?

**55** • Um cilindro de vidro com 1 cm de comprimento tem resistividade de  $10^{12} \Omega \cdot \text{m}$ . Qual deve ser o comprimento de um fio de cobre com a mesma área de seção transversal que tenha a mesma resistividade do cilindro de vidro?

**56** • Um fio de cobre de 80 m e diâmetro de 1 mm é unido à extremidade de um fio de ferro de 49 m com o mesmo diâmetro. A corrente em cada fio é de 2 A. (a) Determine o campo elétrico em cada fio. (b) Determine a queda de potencial entre as extremidades de cada fio.

**57** • Um fio de cobre e outro de ferro, com comprimentos e diâmetros idênticos, conduzem a mesma corrente  $I$ . (a) Determine a razão entre as quedas de potencial desses dois fios. (b) Em qual dos dois o campo elétrico é maior?

**58** • Um tubo de borracha com 1 m de comprimento e diâmetro interno de 4 mm é preenchido com uma solução salina cuja resistividade é de  $10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$ . Conectores metálicos formam eletrôdes nas extremidades do tubo. (a) Qual é a resistividade do tubo com a solução salina? (b) Qual é a resistividade do tubo com a solução, se é estendido uniformemente até um comprimento de 2 m?

**59** • Um fio com 1 m de comprimento tem uma resistividade de  $30 \Omega$ . Ele é estendido uniformemente até um comprimento de 2 m. Qual será a sua nova resistividade?

**60** • Correntes até 30 A podem ser conduzidas por fios de cobre calibre 10. (a) Qual é a resistividade de um fio de cobre calibre 10 com 100 m? (b) Qual é o campo elétrico nesse fio quando a corrente é de 30 A? (c) Qual o tempo necessário para um elétron percorrer 100 m nesse fio quando a corrente é de 30 A?

**61** • A aresta de um cubo de cobre tem 2 cm. Se ele é estirado, formando um fio calibre 14, qual será sua resistividade?

**62** • Um diodo é um elemento cuja curva  $I$  versus  $V$  é altamente não-linear. Em um determinado diodo,  $I = I_0(e^{V/(2kT)} - 1)$ , onde  $I_0 = 2 \times 10^{-9} \text{ A}$ . Utilizando um programa gerador de tabelas e gráficos, obtenha a curva de  $I$  versus  $V$  para um diodo típico com polarização em ambos os sentidos, isto é, para  $V > 0$  e para  $V < 0$ . Mostre que o gráfico de  $\ln(I)$  versus  $V$  para  $V > 0,3 \text{ V}$  é aproximadamente uma linha reta. Qual é a inclinação dessa linha?

**63** • (a) Utilizando os resultados do Problema 54, mostre que o diodo se comporta basicamente como um resistor com resistência infinita se a tensão  $V$  aplicada entre seus terminais for menor do que aproximadamente 0,6 V, e se comporta como um resistor com resistência nula se  $V > 0,6 \text{ V}$ . (b) Estime a corrente que flui através do diodo com  $V > 0$  no circuito mostrado na Figura 25-47.

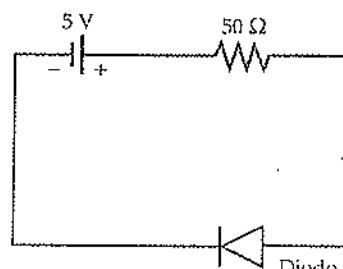


FIGURA 25-47  
Problema 55

**64** • Determine a resistividade entre as extremidades do anel mostrado na Figura 25-48. A resistividade do material do anel é  $\rho$ .

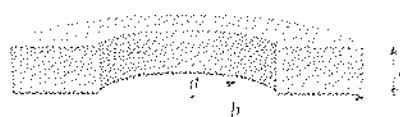


FIGURA 25-48  
Problema 56

**65** • O raio de um fio de comprimento  $L$  aumenta linearmente com seu comprimento, obedecendo à relação  $r = a + [(b - a)/L]x$ , onde  $x$  é a distância da extremidade de menor raio, cujo valor é  $a$ . Qual é a resistividade desse fio em função de sua resistividade  $\rho$ , de seu comprimento  $L$  e dos raios  $a$  e  $b$ ?

**66** • O espaço entre duas cascas condutoras concêntricas é preenchido com um material que apresenta uma resistividade de  $10^7 \Omega \cdot \text{m}$ . Se os raios das cascas interna e externa são de 1,5 cm e 5 cm, respectivamente, qual é a resistividade entre os condutores? (Sugestão: determine a resistividade de um elemento de casca esférica de material com área igual a  $4\pi r^2$  e comprimento  $dr$  e integre para obter a resistividade total do conjunto de cascas em série.)

**67** • O espaço entre dois cilindros metálicos coaxiais de comprimento  $L$  e raios  $a$  e  $b$  é completamente preenchido com um material cuja resistividade é  $\rho$ . (a) Qual é a resistividade entre os dois cilindros? (Veja a sugestão no Problema 58.) (b) Determine a corrente entre os dois cilindros se  $\rho = 30 \Omega \cdot \text{m}$ ,  $a = 1,5 \text{ cm}$ ,  $b = 2,5 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$  e uma diferença de potencial de 10 V é mantida entre os dois cilindros.

### Resistividade Dependente da Temperatura

**68** • Uma barra de tungstênio apresenta um comprimento de 50 cm e uma área de seção transversal quadrada cujas arestas valem 1 mm. (a) Qual é o valor de sua resistividade a  $20^\circ\text{C}$ ? (b) Qual é o valor de sua resistividade a  $40^\circ\text{C}$ ?

**69** • Em que temperatura a resistividade de um fio de cobre será 10% maior do que a resistividade a  $20^\circ\text{C}$ ?

**70** • O elemento que aquece uma torradeira é de Nichrome e tem uma resistividade de  $80 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Inicialmente passa por ele uma corrente de 1,5 A. Quando esse elemento atinge sua temperatura final, a corrente é de 1,3 A. Qual é a temperatura final do elemento?

**71** • Um aquecedor elétrico tem um elemento de aquecimento de Nichrome cuja resistividade é de  $8 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Quando ele fica sujeito a um diferencial de tensão de 120 V, a corrente elétrica aquece o fio de Nichrome até  $1000^\circ\text{C}$ . (a) Qual é a corrente que inicialmente passa pelo elemento frio? (b) Qual é a resistividade do elemento de aquecimento na temperatura de  $1000^\circ\text{C}$ ? (c) Qual é a potência de operação em watts desse aquecedor?

**72** • Um resistor de Nichrome com resistividade de  $10 \Omega$  é ligado a um circuito eletrônico que utiliza fios de cobre com diâmetro de 0,6 mm, com um comprimento total de 50 cm. (a) Qual é a resistividade adicional no circuito devido aos fios de cobre? (b) Qual é o percentual de erro no valor da resistividade total quando as resistividades dos fios de cobre são desprezadas? (c) Qual é a variação na temperatura que produzirá uma variação na resistividade do fio de Nichrome igual à resistividade dos fios de cobre?

**73** • Um fio com área de seção transversal  $A$ , comprimento  $L_1$ , resistividade  $\rho_1$  e coeficiente de temperatura  $\alpha_1$ , é conectado à extremidade de um segundo fio com a mesma área de seção transversal, comprimento  $L_2$ , resistividade  $\rho_2$  e coeficiente de temperatura  $\alpha_2$ , de modo que os fios conduzem a mesma corrente. (a) Mostre que se  $\rho_1 L_1 \alpha_1 + \rho_2 L_2 \alpha_2 = 0$ , a resistividade total  $R$  é independente da temperatura para pequenas variações desta. (b) Se um fio é fabricado de car-

bono e outro é de cobre, determine a relação entre seus comprimentos para a qual  $R$  é aproximadamente independente da temperatura.

66 ••• A resistividade do tungstênio aumenta de forma aproximadamente linear desde  $56 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$  a  $293 \text{ K}$  até  $1,1 \mu\Omega \cdot \text{m}$  a  $3500 \text{ K}$ . Estime (a) a resistência e (b) o diâmetro de um filamento de tungstênio utilizado em uma lâmpada de  $40 \text{ W}$ , admitindo que a temperatura do filamento é de aproximadamente  $2500 \text{ K}$  e que uma fonte de  $120 \text{ V}$  é utilizada para alimentar o circuito da lâmpada. Admita que o comprimento do filamento é constante e igual a  $0,5 \text{ cm}$ .

67 ••• Uma pequena lâmpada utilizada em uma aula de eletrônica tem um filamento de carbono cilíndrico com  $3 \text{ cm}$  de comprimento e diâmetro  $d = 40 \mu\text{m}$ . Para temperaturas entre  $500 \text{ K}$  e  $700 \text{ K}$ , a resistividade do carbono utilizado na fabricação desses pequenos filamentos é de aproximadamente  $3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . (a) Admitindo que o bulbo da lâmpada seja um radiador perfeito (corpo negro), calcule a temperatura do filamento quando sujeito a uma diferença de tensão  $V = 5 \text{ V}$  entre suas extremidades. (b) Um dos problemas das lâmpadas com filamento de carbono, ao contrário das lâmpadas com filamento de tungstênio, é que a resistividade do carbono diminui com o aumento da temperatura. Explique por que isso é um problema.

### Energia nos Circuitos Elétricos

68 • Determine a potência dissipada em um resistor sujeito a uma diferença de potencial constante de  $120 \text{ V}$  se sua resistência é de (a)  $5 \Omega$  e (b)  $10 \Omega$ .

69 • Um resistor de carbono com  $10.000 \Omega$ , utilizado em circuitos eletrônicos, pode operar a uma potência máxima de  $0,25 \text{ W}$ . (a) Qual é a máxima corrente que pode passar por esse resistor? (b) Qual é a diferença de tensão máxima que pode ser imposta aos terminais desse resistor?

70 • Um calefator de  $1 \text{ kW}$  é projetado para operar a  $240 \text{ V}$ . (a) Qual é a resistência do calefator e qual é a corrente que ele pode suportar? (b) Qual é a potência dissipada nesse resistor se ele opera a  $120 \text{ V}$ ? Admita que sua resistência seja constante.

71 • Uma bateria tem uma fem de  $12 \text{ V}$ . Qual o valor do trabalho realizado durante  $5 \text{ s}$  ao fornecer uma corrente de  $3 \text{ A}$  a um circuito?

72 • Uma bateria cuja fem é de  $12 \text{ V}$  fica com uma tensão de  $11,4 \text{ V}$  entre seus terminais quando fornece uma corrente de  $20 \text{ A}$  ao motor de partida de um carro. Qual é a resistência interna  $r$  da bateria?

73 • (a) Qual é o valor da potência fornecida pela fem da bateria do Problema 72 quando fornece uma corrente de  $20 \text{ A}$ ? (b) Qual a parcela dessa potência que é fornecida ao motor de partida? (c) De quanto a energia química da bateria diminui quando ela fornece uma corrente de  $20 \text{ A}$  ao motor de partida durante  $3 \text{ min}$ ? (d) Qual é a quantidade de calor desenvolvida na bateria quando ela fornece uma corrente de  $20 \text{ A}$  por um período de  $3 \text{ min}$ ?

74 • Uma bateria com fem de  $6 \text{ V}$  e resistência interna de  $0,3 \Omega$  é conectada a uma resistência variável  $R$ . Determine a corrente e a potência liberada pela bateria quando  $R$  é (a)  $0$ , (b)  $5 \Omega$ , (c)  $10 \Omega$  e (d) infinita.

75 •• Uma bateria de  $12 \text{ V}$  de automóvel possui resistência interna desprezível e pode fornecer uma carga total de  $160 \text{ A} \cdot \text{h}$ . (a) Qual é a energia total armazenada na bateria? (b) Durante quanto tempo essa bateria pode fornecer  $150 \text{ W}$  a um par de faróis?

76 •• O aquecedor de uma residência antiga consome uma corrente de  $12,5 \text{ A}$ . Através de um par de dois fios de cobre calibre 12

passa a corrente desde a caixa de fusíveis até a tomada na parede uma distância de  $30 \text{ m}$ . A tensão na caixa de fusíveis é de exatamente  $120 \text{ V}$ . (a) Qual é a tensão fornecida ao aquecedor? (b) Se possível, passa uma corrente de  $20 \text{ A}$ , quantas lâmpadas de  $60 \text{ W}$  podem ser alimentadas por essa linha quando o aquecedor estiver ligado? (Admita que os cabos da tomada até o aquecedor e a lâmpada tenham resistência desprezível.)

77 •• Um carro elétrico leve é acionado por dez baterias de  $12 \text{ V}$ . A uma velocidade de  $80 \text{ km/h}$ , a força média de atrito é  $1200 \text{ N}$ . (a) Qual deve ser a potência do motor elétrico se o carro deve se mover a uma velocidade de  $80 \text{ km/h}$ ? (b) Se cada bateria pode fornecer uma carga total de  $160 \text{ A} \cdot \text{h}$  antes de ser recarregada, qual é a carga total em coulombs que pode ser fornecida pelas baterias antes da recarga? (c) Qual é a energia elétrica fornecida pelas dez baterias antes de serem recarregadas? (d) Qual é a distância percorrida pelo carro a  $80 \text{ km/h}$  antes de as baterias precisarem ser recarregadas? (e) Qual é o custo por quilômetro? (f) Custo de recarga das baterias é de  $9$  centavos de dólar por watt-hora?

78 •• Um aquecedor de  $100 \text{ W}$  é projetado para operar com tensão de alimentação de  $120 \text{ V}$ . (a) Determine a resistência do aquecedor e a corrente por ele consumida. (b) Mostre que se a diferença de potencial  $V$  de alimentação do aquecedor for alterada de uma pequena quantidade  $\Delta V$ , a potência  $P$  irá variar de uma pequena quantidade  $\Delta P$ , onde  $\Delta P/P \approx 2\Delta V/V$ . (Sugestão: Considere as variações como diferenciais e admita que a resistência seja constante.) (c) Determine aproximadamente a potência dissipada no aquecedor se a diferença de potencial for diminuída para  $115 \text{ V}$ .

### Combinações de Resistores

79 • (a) Determine a resistência equivalente entre os pontos  $a$  e  $b$  do circuito mostrado na Figura 25-49. (b) Determine a queda de potencial entre os pontos  $a$  e  $b$  se  $12 \text{ V}$ .

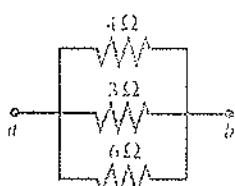


FIGURA 25-49  
Problema 79

80 • Repita o Problema 79 para a malha de resistores mostrada na Figura 25-50.

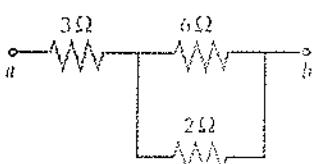
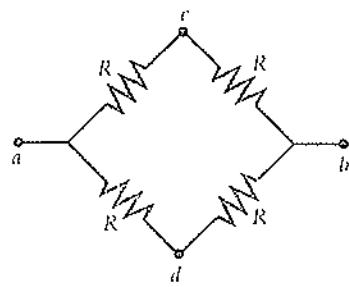
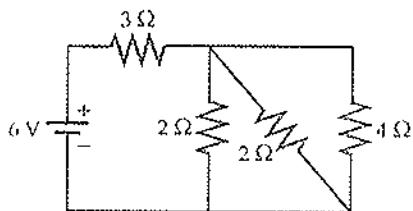


FIGURA 25-50  
Problema 80

81 • (a) Mostre que a resistência equivalente entre os pontos  $c$  e  $d$  do circuito mostrado na Figura 25-51 é  $R$ . (b) Qual seria o efeito adição de uma resistência  $R$  entre os pontos  $c$  e  $d$ ?

FIGURA 25-51  
Problema 81

81 •• A resistência interna da bateria do circuito mostrado na Figura 25-52 é desprezível. Determine (a) a corrente em cada resistor e (b) a potência fornecida pela bateria.

FIGURA 25-52  
Problema 82

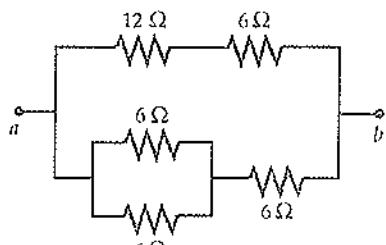
82 •• Uma fonte com potência de 5 V tem uma resistência interna de  $50\Omega$ . Qual é o menor resistor que pode ser colocado em série com essa fonte, de modo que a queda de tensão entre os terminais do resistor seja maior do que 4,5 V?

83 •• Uma bateria possui uma fem  $\mathcal{E}$  e uma resistência interna  $r$ . Quando um resistor de  $5\Omega$  é conectado entre seus terminais, a corrente é de  $0,5\text{ A}$ . Quando esse resistor é substituído por outro de  $11\Omega$ , a corrente passa a ser de  $0,25\text{ A}$ . Determine (a) a fem  $\mathcal{E}$  e (b) a resistência interna  $r$ .

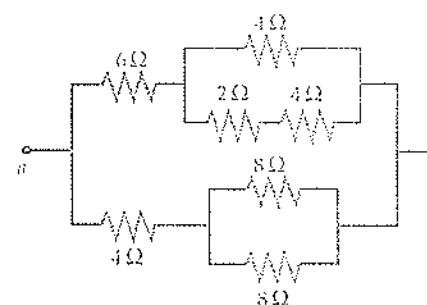
84 •• Considere a resistência equivalente de dois resistores  $R_1$  e  $R_2$ , conectados em paralelo, como função de  $R_1$  e  $x$ , onde  $x$  é a relação  $R_2/R_1$ . (a) Mostre que  $R_{eq} = R_1x/(1+x)$ . (b) Faça um gráfico de  $R_{eq}/R_1$  em função de  $x$ .

85 •• Uma fonte de corrente ideal fornece uma corrente constante independentemente da carga que a ela é conectada. Uma fonte de corrente quase ideal pode ser obtida ligando-se um resistor de alta resistência em série com uma fonte de tensão ideal. (a) Qual é a resistência necessária para tornar uma fonte de tensão ideal de  $5\text{ V}$  em uma fonte de corrente de  $10\text{ mA}$  quase ideal? (b) Desejando-se que a corrente caia de menos de 10% quando a carga é ligada a essa fonte de corrente, qual deve ser a maior resistência a ser colocada em série com essa fonte de corrente?

86 •• Repita o Problema 79 para a malha de resistores mostrada na Figura 25-53.

FIGURA 25-53  
Problema 87

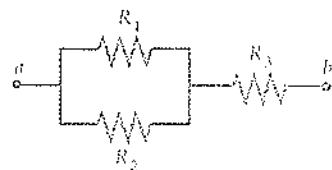
87 •• Repita o Problema 79 para a malha de resistores mostrada na Figura 25-54.

FIGURA 25-54  
Problema 88

88 •• Um fio de determinado comprimento apresenta uma resistência de  $120\Omega$ . O fio é cortado em  $N$  pedaços idênticos, que são então conectados em paralelo. A resistência do arranjo em paralelo é de  $1,875\Omega$ . Determine  $N$ .

89 •• Uma combinação em paralelo de um resistor de  $8\Omega$  com um resistor  $R$  desconhecido é conectada em série com um resistor de  $16\Omega$  e uma bateria. Esse circuito é então desfeito, e os três resistores são conectados em série, com a mesma bateria alimentando o circuito. Em ambos os arranjos, a corrente que passa pelo resistor de  $8\Omega$  é a mesma. Qual é o valor da resistência  $R$  desconhecida?

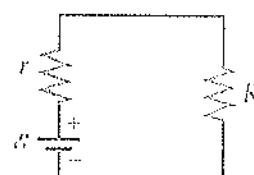
90 •• Dada a malha resistiva mostrada na Figura 25-55, determine (a) a resistência  $R_{ab}$  de modo que  $R_{ab} = R_1$ , (b) a resistência  $R_{bc}$  de modo que  $R_{bc} = R_2$ , e (c) a resistência  $R_{ac}$  de modo que  $R_{ac} = R_3$ .

FIGURA 25-55  
Problemas 91 e 92

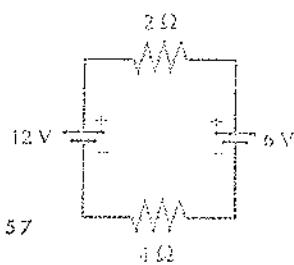
91 •• Verifique seus resultados para o Problema 91 utilizando (a)  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ; (b)  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ; e (c)  $R_2 = 6\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ .

### Regras de Kirchhoff

93 •• A fem e a resistência  $R$  do circuito mostrado na Figura 25-56 são de  $6\text{ V}$  e  $0,5\Omega$ , respectivamente. A taxa de dissipação de calor por efeito Joule em  $R$  é de  $8\text{ W}$ . (a) Qual é a corrente que passa pelo circuito? (b) Qual é a diferença de potencial entre os terminais de  $R$ ? (c) Qual é o valor de  $r$ ?

FIGURA 25-56  
Problema 93

94 •• Dado o circuito mostrado na Figura 25-57, determine (a) a corrente, (b) a potência fornecida ou absorvida em cada fonte de fem e (c) a taxa de calor dissipado por efeito Joule em cada resistor. (Admita que as baterias possuem resistências internas desprezíveis.)

FIGURA 25-57  
Problema 94

95 •• Uma bateria de carro, em mau estado, com fem de 11,4 V e resistência interna de  $0,01\ \Omega$ , é conectada a uma carga de  $2\ \Omega$ . Para auxiliar a bateria danificada, uma outra com fem de 12,6 V e resistência interna de  $0,01\ \Omega$  é conectada através de cabos aos terminais da primeira bateria. (a) Faça um diagrama esquemático desse circuito. (b) Determine a corrente em cada parte do circuito (c) Determine a potência fornecida pela segunda bateria e discuta para onde vai essa potência, admitindo que as fems e as resistências internas de ambas as baterias permaneçam constantes.

96 •• A leitura do amperímetro colocado no circuito mostrado na Figura 25-58 não se altera, estando as duas chaves abertas ou fechadas. Determine a resistência  $R$ .

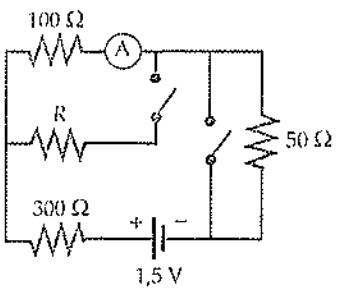


FIGURA 25-58  
Problema 96

97 •• As baterias do circuito mostrado na Figura 25-59 têm resistências internas desprezíveis. Determine (a) a corrente que passa por cada resistor, (b) a diferença de potencial entre os pontos *a* e *b* e (c) a potência fornecida por cada uma das baterias.

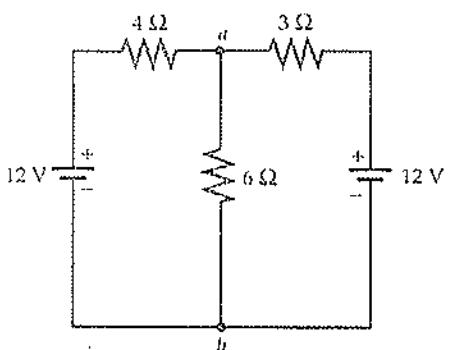


FIGURA 25-59  
Problema 97

98 •• Repita o Problema 97 considerando o circuito mostrado na Figura 25-60.

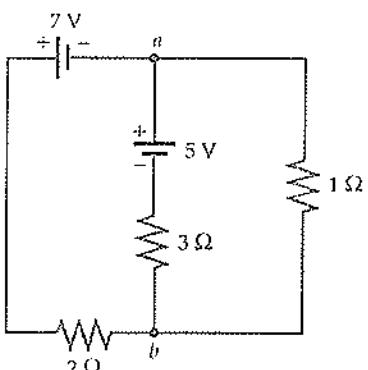


FIGURA 25-60  
Problema 98

99 •• Duas baterias idênticas, cada uma com fem  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $r$ , podem ser conectadas aos terminais de um resistor tanto em uma configuração em série como em paralelo. A potência fornecida a  $R$  será maior quando  $R < r$  ou quando  $R > r$ ?

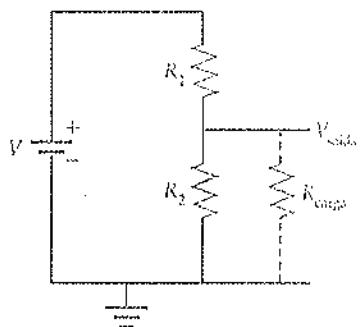


FIGURA 25-61  
Problema 100

100 •• A Figura 25-61 mostra o trecho de um circuito denominado divisor de tensão. (a) Considerando que a resistência  $R_{load}$  esteja conectada, mostre que  $V_{saida} = VR_2/(R_1 + R_2)$ . (b) Se  $R_1 = R_2 = 10\ k\Omega$ , qual será o menor valor de  $R_{load}$  que pode ser conectado de modo que a tensão  $V_{saida}$  seja reduzida de menos de 10% de seu valor com o circuito descarregado? (A tensão  $V_{saida}$  é medida em relação à Terra.)

101 •• O teorema de Thevenin estabelece que o circuito divisor de tensão do Problema 100 pode ser substituído por uma fonte de tensão constante com a tensão  $V'$  em série com uma resistência Thévenin  $R'$  em série com o resistor carga  $R_{load}$ .  $V'$  e  $R'$  dependem apenas de  $V$ ,  $R_1$  e  $R_2$ . Nesse arranjo, a queda de tensão entre os terminais de  $R_{load}$  será a mesma que seria se esse resistor fosse conectado em paralelo com  $R_2$  no divisor de tensão do Problema 100.

$$(a) \text{ Mostre que } R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$(b) \text{ Mostre que } V' = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

102 •• Dado o circuito mostrado na Figura 25-62, determine (a) a corrente que passa por cada resistor, (b) a potência fornecida por cada fonte de fem e (c) a potência dissipada em cada um dos resistores.

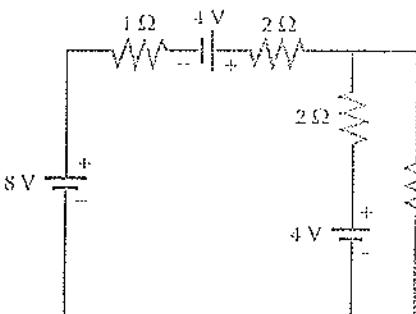


FIGURA 25-62  
Problema 102

103 •• Dado o circuito mostrado na Figura 25-63, determine a diferença de potencial entre os pontos *a* e *b*.

é resistência resistor  $R$  de potência

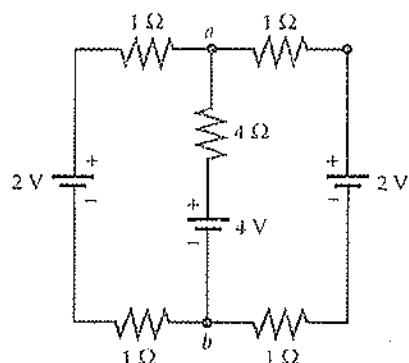


FIGURA 25-63  
Problema 103

- 103 •• Você tem duas baterias, uma com  $\beta = 9\text{ V}$  e  $r = 0,8\text{ }\Omega$  e outra com  $\beta = 3\text{ V}$  e  $r = 0,4\text{ }\Omega$ . (a) Mostre como você conectaría as baterias de modo a fornecer a maior corrente que passa por um resistor  $R$ . Determine a corrente para (b)  $R = 0,2\text{ }\Omega$ , (c)  $R = 0,6\text{ }\Omega$ , (d)  $R = 1,0\text{ }\Omega$  e (e)  $R = 1,5\text{ }\Omega$ .

### Amperímetros e Voltímetros

- 105 •• Um voltímetro digital pode ser modelado como um voltímetro ideal com resistência interna infinita em paralelo com um resistor de  $10\text{ M}\cdot\Omega$ . Calcule a tensão medida pelo voltímetro no circuito mostrado na Figura 25-64 quando (a)  $R = 1\text{ k}\Omega$ , (b)  $R = 10\text{ k}\Omega$ , (c)  $R = 1\text{ M}\Omega$ , (d)  $R = 10\text{ M}\Omega$  e (e)  $R = 100\text{ M}\Omega$ . (f) Qual é o maior valor possível de  $R$  de modo que a tensão medida apresente uma variação de 10% da tensão verdadeira (isto é, a queda de tensão sem voltímetro)?

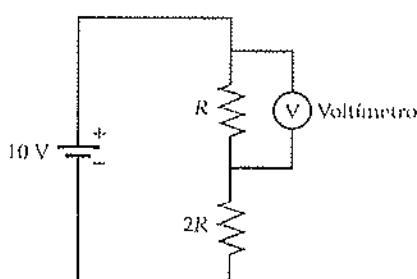


FIGURA 25-64  
Problema 105

- 106 •• Você consegue deslocar o ponteiro de um galvanômetro de fundo da escala quando através dele passa uma corrente de  $50\text{ }\mu\text{A}$ . A essa corrente corresponde uma queda de tensão de  $0,25\text{ V}$  entre seus terminais. Qual é a resistência interna desse aparelho?

- 107 •• Você deseja que o galvanômetro do Problema 106 opere como um amperímetro que possa medir correntes de até  $100\text{ mA}$ . Mostre que isso é possível colocando-se um resistor em paralelo com o aparelho e determine o valor de sua resistância.

- 108 •• (a) Se o amperímetro do Problema 107 for utilizado para medir a corrente que passa por um resistor de  $100\text{ }\Omega$ , alimentado por uma fonte de potência de  $10\text{ V}$ , qual será a corrente lida no aparelho? (A questão não é tão simples quanto parece.) (b) O que acontece se o amperímetro for utilizado para medir a corrente que passa por um resistor de  $10\text{ }\Omega$ , alimentado por uma fonte de potência de  $10\text{ V}$ ?

- 109 •• Mostre que o galvanômetro do Problema 106 pode ser convertido em um voltímetro colocando-se uma grande resistência em série com o aparelho e determine a resistência necessária para que a indicação de fundo de escala corresponda uma tensão de  $10\text{ V}$  imposta a seus terminais.

- 110 •• Se o voltímetro descrito no Problema 109 for utilizado para medir a queda de tensão entre os terminais do resistor  $R_1$  do circuito mostrado na Figura 25-65, qual será a tensão lida no voltímetro?

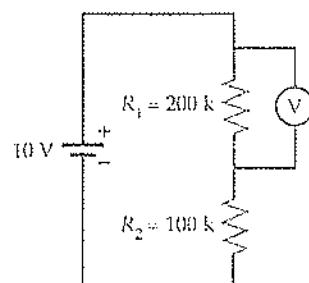


FIGURA 25-65  
Problema 110

### Circuitos RC

- 111 • Um capacitor de  $6\text{ }\mu\text{F}$  é carregado por uma fonte de  $100\text{ V}$  e, em seguida, conectado aos terminais de um resistor de  $500\text{ }\Omega$ . (a) Qual é a carga inicial no capacitor? (b) Qual é a corrente inicial imediatamente após o capacitor ser conectado ao resistor? (c) Qual é a constante de tempo desse circuito? (d) Qual é o valor da carga no capacitor após  $6\text{ ms}$ ?

- 112 • (a) Determine a energia inicial armazenada no capacitor do Problema 111. (b) Mostre que a energia armazenada no capacitor pode ser expressa por  $U = U_0 e^{-t/\tau}$ , onde  $U_0$  é a energia inicial e  $\tau = RC$  é a constante de tempo. (c) Faça um gráfico da energia  $U$  no capacitor em função do tempo  $t$ .

- 113 •• Considere que para o circuito mostrado anteriormente na Figura 25-40 a fonte  $\beta = 50\text{ V}$ , a capacitância  $C = 2,0\text{ }\mu\text{F}$  e que o capacitor está inicialmente descarregado. Quatro segundos após a chave S ser fechada a queda de tensão entre os terminais do resistor é de  $20\text{ V}$ . Determine a resistência do resistor.

- 114 •• A um capacitor de  $0,12\text{ }\mu\text{F}$  é fornecida uma carga  $Q_0$ . Após  $4\text{ s}$ , a carga no capacitor é  $Q_0/2$ . Qual é a resistência efetiva entre os terminais desse capacitor?

- 115 •• Um capacitor de  $1,6\text{ }\mu\text{F}$ , inicialmente descarregado, é conectado em série a um resistor de  $10\text{ k}\Omega$  e a uma bateria de  $5\text{ V}$  cuja resistência interna é desprezível. (a) Qual é a carga no capacitor após um tempo muito longo? (b) Quantos segundos serão necessários para o capacitor atingir 99% de sua carga final?

- 116 •• Considere o circuito mostrado na Figura 25-66. Utilizando seus conhecimentos de como os capacitores se comportam nos circuitos, determine (a) a corrente inicial que passa pela bateria imediatamente após a chave ser fechada, (b) a corrente estacionária que passa pela bateria quando a chave ficar fechada por um longo tempo e (c) a tensão máxima entre os terminais do capacitor.

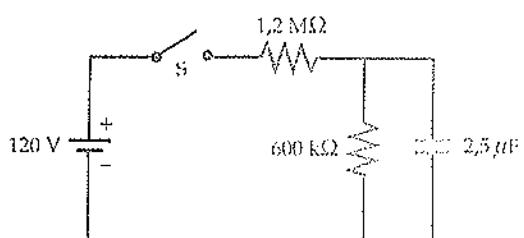


FIGURA 25-66  
Problema 116

117 •• Um resistor de  $2\text{ M}\Omega$  é conectado em série a um capacitor de  $1,5\text{ }\mu\text{F}$  e a uma bateria de  $6,0\text{ V}$ , cuja resistência interna é desprezível. O capacitor está inicialmente descarregado. Após um tempo  $t = \tau = RC$ , determine (a) a carga no capacitor, (b) a taxa com a qual a carga está aumentando, (c) a corrente, (d) a potência fornecida pela bateria, (e) a potência dissipada no resistor e (f) a taxa com a qual a energia armazenada no capacitor está aumentando.

118 •• No regime estacionário, a carga no capacitor de  $5\text{ }\mu\text{F}$  do circuito mostrado na Figura 25-67 é de  $1000\text{ }\mu\text{C}$ . (a) Determine a corrente na bateria. (b) Determine as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ .

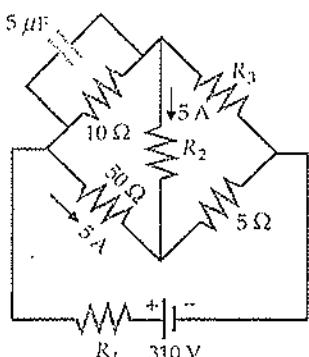


FIGURA 25-67  
Problema 118

119 •• Mostre que a Equação 25-35 pode ser escrita como

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC}$$

Integre essa equação para deduzir a solução dada pela Equação 25-36.

120 ••• O flash da máquina fotográfica de um jornalista utiliza uma bateria de  $9\text{ V}$  para carregar um capacitor de  $0,15\text{ }\mu\text{F}$ . O capacitor é então descarregado através da lâmpada do flash, cuja resistência é de  $10,5\text{ }\Omega$ , quando a chave é fechada. A tensão mínima necessária para a descarga do flash é de  $7\text{ V}$ . O capacitor é carregado através de um resistor de  $18\text{ k}\Omega$ . (a) Qual é o tempo necessário para carregar o capacitor até os necessários  $7\text{ V}$ ? (b) Qual é a energia liberada quando a lâmpada acende? (c) Qual é a energia fornecida pela bateria durante o ciclo e qual é a fração dissipada dessa energia no resistor?

121 ••• Dado o circuito mostrado na Figura 25-68, (a) qual é a corrente inicial na bateria imediatamente após a chave S ser fechada? (b) Qual é a corrente na bateria bem depois da chave S ser fechada? (c) Qual é a corrente no resistor de  $600\text{ }\Omega$  em função do tempo?

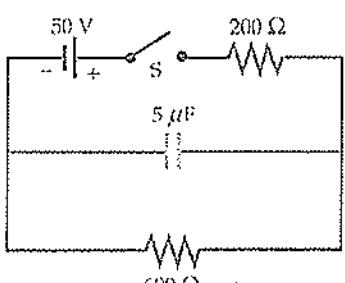


FIGURA 25-68  
Problema 121

122 ••• Dado o circuito mostrado na Figura 25-69, (a) qual é a corrente inicial na bateria imediatamente após a chave S ser fechada? (b) Qual é a corrente na bateria bem depois da chave S ser fechada?

(c) Se a chave ficar fechada por um longo tempo e, em seguida, aberta, determine a corrente através do resistor de  $600\text{ k}\Omega$  em função do tempo.

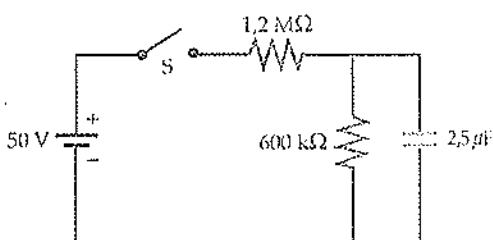


FIGURA 25-69 Problema 122

123 ••• No circuito mostrado na Figura 25-70 o capacitor possui uma capacidade de  $2,5\text{ }\mu\text{F}$  e o resistor uma resistência de  $0,5\text{ M}\Omega$ . Antes de a chave ser fechada, a queda de potencial entre os terminais do capacitor é de  $12\text{ V}$ , conforme mostrado. A chave S é fechada em  $t = 0$ . (a) Qual é a corrente no resistor R imediatamente após a chave S ser fechada? (b) Para que valor do tempo  $t$  a diferença de tensão entre os terminais do capacitor será de  $24\text{ V}$ ?

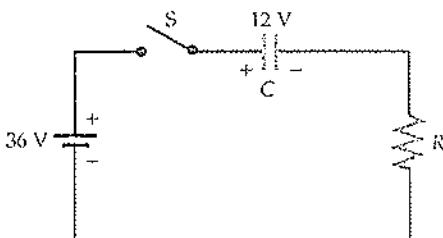


FIGURA 25-70 Problemas 123 e 124

124 ••• Repita o Problema 123 considerando que o capacitor é conectado com a polaridade invertida.

### Problemas Gerais

125 •• No circuito mostrado na Figura 25-71,  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$  e  $R_3 = 12\Omega$ . Designando as correntes que passam pelos resistores por  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , pode-se afirmar que (a)  $I_1 > I_2 > I_3$ , (b)  $I_2 > I_3$ , (c)  $I_3 > I_2$ , (d) nenhuma dessas alternativas está correta.

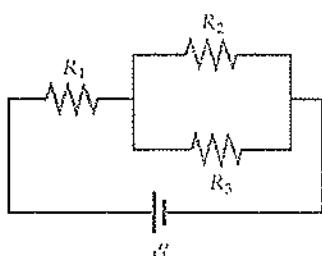


FIGURA 25-71  
Problemas 125 e 127

126 •• Uma lâmpada de  $25\text{ W}$  é conectada em série com uma de  $100\text{ W}$ , e uma fonte de tensão  $V$  é colocada entre os terminais da combinação. Qual das lâmpadas apresentará maior brilho? Explique.

127 • Se a fem da bateria do circuito mostrado na Figura 25-72 é de  $24\text{ V}$  e  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$  e  $R_3 = 12\Omega$ , então (a)  $I_1 = 4\text{ A}$ , (b)  $I_2 = 2\text{ A}$ , (c)  $I_3 = 1\text{ A}$ , (d) nenhuma dessas alternativas está correta.

em seguida,  $I_1$ , em função de  $R_x$ .

132 •• Um resistor de  $10\ \Omega$  tem a capacidade de dissipar  $5\ W$  de potência na forma de calor. (a) Qual é a corrente máxima tolerada por esse resistor? (b) Qual é a tensão entre os terminais desse resistor que proporcionará a corrente máxima?

133 •• A bateria de  $12\ V$  de um carro possui uma resistência interna de  $0,4\ \Omega$ . (a) Qual será a corrente se a bateria for ligada momentaneamente em curto? (b) Qual é a tensão terminal quando a bateria alimenta o motor de partida do carro a uma corrente de  $20\ A$ ?

134 •• Quando um resistor de  $7\ \Omega$  é conectado aos terminais de uma bateria, sua corrente de alimentação é de  $1,80\ A$ . Se um segundo resistor de  $12\ \Omega$  for conectado em paralelo com o resistor de  $7\ \Omega$ , a bateria fornecerá uma corrente de  $2,20\ A$ . Determine a fém e a resistência interna da bateria.

135 •• Uma caixa fechada tem dois terminais metálicos,  $a$  e  $b$ . No interior da caixa existe uma fém desconhecida  $\beta$  em série com uma resistência  $R$ . Quando uma diferença de potencial de  $21\ V$  é mantida entre os terminais  $a$  e  $b$ , uma corrente de  $1\ A$  estará passando entre esses terminais. Se essa diferença de potencial for invertida, será observada uma corrente de  $2\ A$  no sentido oposto. Determine  $\beta$  e  $R$ .

136 •• Os capacitores do circuito mostrado na Figura 25-72 estão inicialmente descarregados. (a) Qual é o valor inicial da corrente na bateria quando a chave  $S$  estiver fechada? (b) Qual será a corrente na bateria após um longo tempo? (c) Quais são as cargas finais nos capacitores?

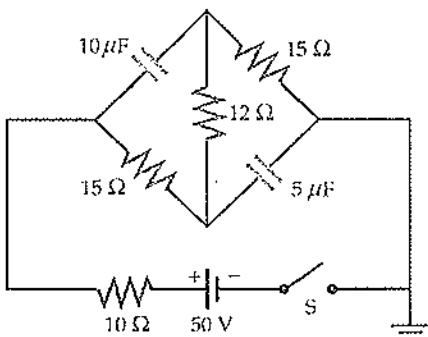


FIGURA 25-72  
Problema 132

133 •• O circuito mostrado na Figura 25-73 é o de uma ponte de Wheatstone com resistores variáveis. Essa ponte é utilizada na determinação de uma resistência desconhecida,  $R_x$ , em função das resistências conhecidas  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_0$ . As resistências  $R_1$  e  $R_2$  são constituídas por um fio metálico com  $1\ m$  de comprimento. O ponto  $a$  é um contato deslizante que se move ao longo do fio, variando essas resistências. A resistência  $R_1$  é proporcional à distância desde a extremidade esquerda do fio (indicada por  $0\ cm$ ) até o ponto  $a$ , e a resistência  $R_2$  é proporcional à distância desde o ponto  $a$  até a extremidade direita do fio (indicada por  $100\ cm$ ). A soma de  $R_1$  com  $R_2$  permanece constante. Quando os pontos  $a$  e  $b$  estão a um mesmo potencial, não haverá qualquer corrente no galvanômetro e a ponte estará balanceada. (Como nesse caso o galvanômetro é utilizado para detectar a ausência de uma corrente, ele opera um *detector de zero*.) Se a resistência fixa  $R_0 = 200\ \Omega$ , determine a resistência desconhecida  $R_x$  se (a) a ponte fica balanceada na marca de  $18\ cm$ , (b) a ponte fica balanceada na marca de  $60\ cm$  e (c) a ponte fica balanceada na marca de  $95\ cm$ .

134 •• Considere que a ponte de Wheatstone apresentada no Problema 133 fique balanceada na marca de  $98\ cm$  quando  $R_x = 200\ \Omega$ . (a) Qual é o valor da resistência desconhecida? (b) Que efeito um

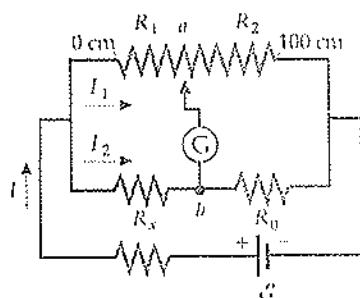


FIGURA 25-73  
Problemas 133 e 134

erro de  $2\ mm$  na localização do contato deslizante produziria no valor medido da resistência desconhecida? (c) De quanto a resistência  $R_0$  deve ser alterada de modo que o ponto de equilíbrio para esse resistor desconhecido fique tão próximo quanto possível da marca de  $50\ cm$ ?

135 •• Um ciclotrôn produz um feixe de prótons de  $3,50\ \mu\text{A}$  com energia de  $60\ MeV$ . Os prótons colidem e são absorvidos por um alvo de cobre de  $50\ g$  no interior de uma câmara de vácuo. (a) Determine o número de prótons que atingem o alvo por segundo. (b) Determine a energia depositada no alvo por segundo. (c) Qual é o tempo necessário para a temperatura do alvo atingir  $300^\circ C$ ? (Despreze o resfriamento por radiação.)

136 •• A densidade superficial de carga da correia de um gerador de Van de Graaff é de  $5\ mC/m^2$ . A correia tem uma largura de  $0,5\ m$  e se move a  $20\ m/s$ . (a) Qual é a corrente por ela transportada? (b) Se essa carga for elevada a um potencial de  $100\ kV$ , qual será a potência mínima necessária ao motor para acionar a correia?

137 •• Os eletroimãs convencionais de grande porte utilizam resfriamento a água para evitar o aquecimento excessivo das bobinas magnéticas. Um grande eletroimã de laboratório opera com uma corrente de  $100\ A$  quando a tensão de  $240\ V$  é aplicada aos terminais das bobinas energizadas. Para resfriar as bobinas, a água, a uma temperatura inicial de  $15^\circ C$ , circula através das bobinas. Quantos litros por segundo devem passar pelas bobinas de modo que sua temperatura não seja superior a  $50^\circ C$ ?

138 •• Um capacitor de placas paralelas é constituído de placas de área  $A$  separadas de uma distância  $d$ . O espaçamento entre as placas é preenchido com um dielétrico cuja constante é  $\kappa$  e cuja resistividade é  $\rho$ . Mostre que o produto da resistência  $R$  desse dielétrico com a capacitância do capacitor é  $RC = \epsilon_0 \rho \kappa$ .

139 •• Mostre que o resultado do Problema 138 é verdadeiro para um capacitor e um resistor cilíndricos. Esse resultado seria também válido para um capacitor e um resistor com quaisquer formas?

140 •• (a) Mostre que um capacitor de fuga (aquele em que a resistência do dielétrico é finita) pode ser modelado como um capacitor com resistência infinita em paralelo com um resistor. (b) Mostre que a constante de tempo para a descarga desse capacitor é  $\tau = \epsilon_0 \rho \kappa$ . (c) A mica possui uma constante dielétrica  $\kappa = 5$  e uma resistividade  $\rho = 9 \times 10^{13}\ \Omega \cdot m$ . Calcule o tempo necessário para a carga de um capacitor preenchido com mica diminuir seu valor inicial em  $10\%$ .

141 •• A Figura 25-74 mostra o circuito de varredura utilizado em um osciloscópio. A chave  $S$  é eletrônica e fecha quando o potencial entre os terminais da chave atinge um valor  $V_s$ ; a chave  $S$  abre quando o potencial apresenta uma queda de  $0,2\ V$ . A fém  $\beta$ , que é muito maior do que  $V_s$ , carrega o capacitor  $C$  através do resistor  $R_1$ . O resistor  $R_2$  representa uma resistência pequena, porém finita, da chave eletrônica. Em um circuito típico,  $\beta = 800\ V$ ,  $V_s = 4,2\ V$ ,  $R_2 = 0,001\ \Omega$ ,  $R_1 = 0,5\ M\Omega$  e  $C = 0,02\ \mu\text{F}$ . (a) Qual é a constante de tempo

durante o processo de carregamento do capacitor  $C$ ? (b) Mostre que no intervalo de tempo necessário para levar o potencial entre os terminais da chave  $S$  até o potencial crítico  $V_c = 4,2$  V a tensão entre os terminais do capacitor aumenta quase que linearmente com o tempo. (Sugestão: utilize a expansão da exponencial para pequenos valores do expoente.) (c) Qual deve ser o valor de  $R_i$  de modo que o potencial no capacitor  $C$  passe de 0,2 V até 4,2 V em 0,1 s? (d) Qual o intervalo de tempo durante o qual o capacitor  $C$  descarrega através da chave  $S$ ? (e) Com que taxa a energia é dissipada no resistor  $R_i$  e na resistência da chave?

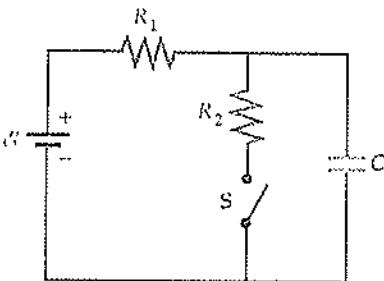


FIGURA 25-74  
Problema 141

- 142 ••• No circuito mostrado na Figura 25-75,  $R_1 = 2 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ M}\Omega$  e  $C = 1 \mu\text{F}$ . Em  $t = 0$ , a chave  $S$  está fechada e em  $t = 2,0$  s a chave  $S$  é aberta. (a) Faça um gráfico da tensão entre os terminais do capacitor  $C$  e da corrente através de  $R_2$  entre os tempos  $t = 0$  e  $t = 10$  s. (b) Determine a tensão entre os terminais do capacitor em  $t = 2$  s e em  $t = 8$  s.

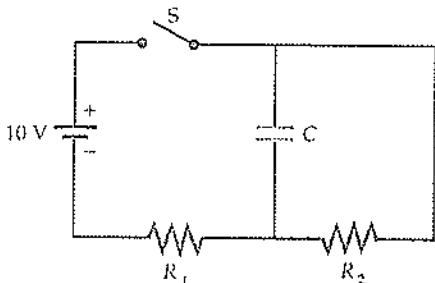


FIGURA 25-75 Problema 142

- 143 ••• Duas baterias com fôrmas  $C_1$  e  $C_2$  e resistências internas  $r_1$  e  $r_2$  são conectadas em paralelo. Prove que se um resistor for conectado em paralelo com essa combinação a carga resistiva ótima (a resistência que propicia o maior consumo de potência) será  $R = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$ .

- 144 ••• Dois capacitores,  $C_1$  e  $C_2$ , são conectados em paralelo através de um resistor e duas chaves, conforme mostrado na Figura 25-76. Inicialmente, o capacitor  $C_1$  é carregado por uma tensão  $V_0$ , e o capacitor  $C_2$  está descarregado. As chaves  $S_1$  e  $S_2$  são então fechadas. (a) Quais são as cargas finais nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ ? (b) Compare as energias inicial e final armazenadas no sistema. (c) O que causa a diminuição da energia armazenada nos capacitores?

- 145 ••• (a) No Problema 144, determine a corrente que passa por  $R$  em função do tempo após as chaves  $S_1$  e  $S_2$  serem fechadas. (b) Determine a energia dissipada no resistor em função do tempo. (c) Determine a energia dissipada total no resistor e compare-a com a perda de energia armazenada obtida no item (b) do Problema 144.

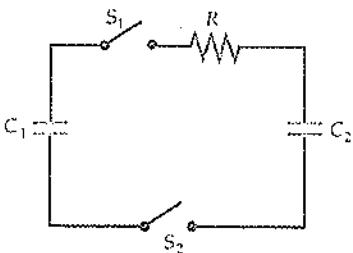


FIGURA 25-76 Problemas 144 e 145

- 146 ••• Os capacitores do circuito mostrado na Figura 25-77 estão inicialmente descarregados. A chave  $S_2$  é fechada e, em seguida, a chave  $S_1$  é fechada. (a) Qual é a corrente na bateria imediatamente após  $S_1$  ser fechada? (b) Qual é o comportamento da corrente na bateria em função do tempo, após ambas as chaves serem fechadas? (c) Qual é a tensão final entre os terminais de  $C_1$ ? (d) Qual é a tensão final entre os terminais de  $C_2$ ? (e) A chave  $S_2$  é novamente aberta, após um longo tempo. Determine a corrente no resistor de  $150 \Omega$  em função do tempo.

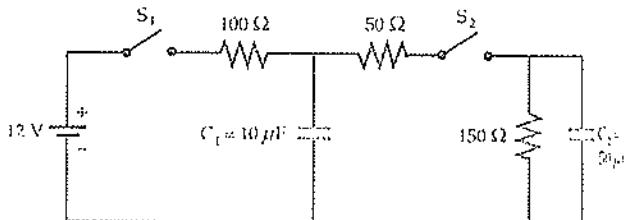


FIGURA 25-77 Problema 146

- 147 ••• A resistência diferencial<sup>1</sup> do elemento não-ôhmico de um circuito é definida como  $R_d = dV/dI$ , em que  $V$  é a tensão entre os terminais do elemento e  $I$  é a corrente através do elemento. Mostre que para  $V > 0,6$  V, a resistência diferencial de um diodo (Problema 54) é aproximadamente  $R_d = (25 \text{ mV})/I$ , e para  $V < 0$   $R_d$  aumenta exponencialmente com  $|V|$ . Utilize esse resultado para justificar a aproximação utilizada no Problema 55.

- 148 ••• A Figura 25-78 mostra um gráfico da tensão em função da corrente para um diodo Esaki. Construa o gráfico da resistência diferencial desse diodo em função da tensão. (Veja o Problema 17 para uma definição da resistência diferencial.) Para que valor de tensão a resistência diferencial fica negativa?

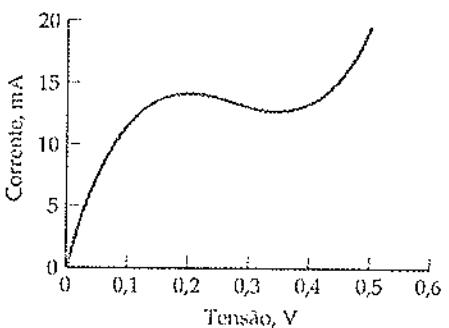


FIGURA 25-78 Problema 148

<sup>1</sup>A resistência diferencial ( $dV/dI$ ) é também conhecida como resistência dinâmica ou impedância dinâmica.

139 ••• Um acelerador linear produz um feixe pulsante de elétrons. A corrente é de  $1,6 \text{ A}$  para a duração de  $0,1 \mu\text{s}$  de cada pulso. (a) Quantos elétrons estão presentes em cada pulso? (b) Qual é a velocidade média do feixe, considerando que ocorrem 1000 pulsos por segundo? (c) Se cada elétron adquire uma energia de  $400 \text{ MeV}$ , qual é a potência média de saída do acelerador? (d) Qual é o pico da potência de saída? (e) Qual é a fração do tempo de operação do acelerador que efetivamente acelera os elétrons? (Essa fração representa o "fator de operação" do acelerador.)

140 ••• Calcule a resistência equivalente entre os pontos *a* e *b* para a "escada" infinita de resistores mostrada na Figura 25-79, onde  $R_1$  e  $R_2$  podem assumir qualquer valor.

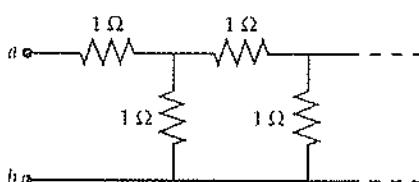


FIGURA 25-79  
Problema 150

151 ••• Calcule a resistência equivalente entre os pontos *a* e *b* para a "escada" infinita de resistores, mostrada na Figura 25-79, onde  $R_1$  e  $R_2$  podem assumir qualquer valor.

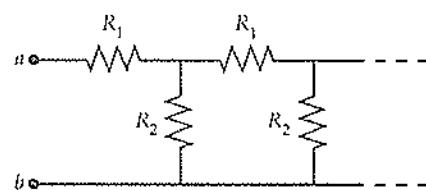


FIGURA 25-80 Problema 151

## ○ Campo Magnético

- 26-1 A Força Exercida por um Campo Magnético
- 26-2 Movimento de uma Carga Pontual em um Campo Magnético
- 26-3 Torques sobre Espiras com Corrente e Ímãs
- 26-4 O Efeito Hall

A AURORA BOREAL APARECE QUANDO O "VENTO SOLAR", PARTÍCULAS CARREGADAS PRODUZIDAS POR REAÇÕES DE FUSÃO NUCLEAR NO SOL, É APRISIONADO NO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA.



Como o campo magnético da Terra atua sobre as partículas subatômicas?  
(Veja o Exemplo 26-1.)

Mais de 2000 anos, os gregos sabiam que um certo tipo de pedra (agora chamada de magnetita) atraía peças de ferro, e existem referências escritas relatando o seu uso para navegação datando do século XII.

Em 1269, Pierre de Maricourt descobriu que uma agulha liberada em várias posições sobre um ímã natural esférico orientava-se sozinha ao longo de linhas que passavam através de pontos nas extremidades diametralmente opostas da esfera. Ele chamou esses pontos de pólos do ímã. Em seguida, vários experimentos verificaram que todos os ímãs de qualquer forma possuíam dois pólos, chamados de pólos norte e sul, em que a força exercida pelo ímã é mais forte. Foi observado também que pólos iguais de dois ímãs se repeliam e pólos diferentes se atraíam mutuamente.

Em 1600, William Gilbert descobriu que a Terra era um ímã natural com pólos magnéticos próximos aos pólos norte e sul geográficos. Uma vez que o pólo norte de uma agulha imantada de uma bússola aponta na direção do pólo sul de um ímã, o que é denominado pólo norte da Terra é, na realidade, um pólo sul magnético, como ilustrado na Figura 26-1.

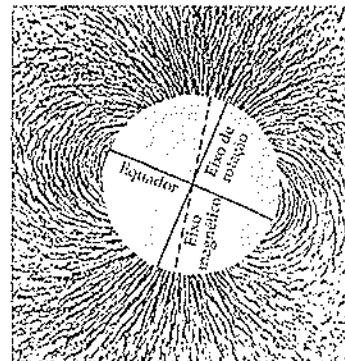
Embora as cargas elétricas e os pólos magnéticos sejam similares em vários aspectos, existe uma importante diferença: os pólos magnéticos sempre ocorrem em pares. Quando um ímã é dividido ao meio, pólos iguais e opostos aparecem em cada lado do ponto de quebra. Isso resulta em dois ímãs, cada um com um pólo norte e um pólo sul. Há muito tempo se especula a respeito da existência de um pólo magnético isolado, e nos últimos anos consideráveis esforços experimentais têm sido feitos para encontrar uma resposta para tal questão. Até hoje, entretanto, não existe uma evidência conclusiva que comprove a existência de um pólo magnético isolado.

Neste capítulo, consideram-se os efeitos de um determinado campo magnético sobre cargas móveis e sobre fios por onde passa corrente. As fontes de campos magnéticos serão discutidas no próximo capítulo.

### 26-1 A Força Exercida por um Campo Magnético

A existência de um campo magnético  $\vec{B}$  em um ponto no espaço pode ser demonstrada com uma agulha de bússola. Se existe um campo magnético, a agulha se alinhará sozinha no sentido do campo.

Experimentalmente é observado que quando uma carga  $q$  possui uma velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético, existe uma força sobre o campo magnético que



**FIGURA 26-1**  
Linhas de campo magnético da Terra descritas por filetes de ferro em torno de uma esfera uniformemente magnetizada. As linhas de campo saem do pólo norte magnético, que está próximo ao pólo sul geográfico, e entram no pólo sul magnético, que está próximo do pólo norte geográfico.

é proporcional a  $q$  e  $v$  e ao seno de ângulo entre as direções de  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ . Surpreendentemente, a força é perpendicular tanto à velocidade quanto ao campo. Esses resultados experimentais podem ser sintetizados como se segue: quando uma carga  $q$  se move com velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , a força magnética  $\vec{F}$  sobre a carga é

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad 26-1$$

#### FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UMA CARGA EM MOVIMENTO

Desde que  $\vec{F}$  é perpendicular tanto a  $\vec{v}$  quanto a  $\vec{B}$ ,  $\vec{F}$  é perpendicular ao plano definido por estes dois vetores. A direção de  $\vec{v} \times \vec{B}$  é dada pela regra da mão direita, como se  $\vec{v}$  girasse para  $\vec{B}$ , como ilustrado na Figura 26-2. Se  $q$  é positiva, então  $\vec{F}$  está no mesmo sentido de  $\vec{v} \times \vec{B}$ .

Exemplos da direção das forças exercidas sobre cargas móveis quando o vetor campo magnético  $\vec{B}$  está na direção vertical são mostrados na Figura 26-3. Note que a direção de qualquer campo magnético particular  $\vec{B}$  pode ser encontrada experimentalmente pela medida de  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  para diversas velocidades em diferentes direções e, então, aplicando a Equação 26-1.

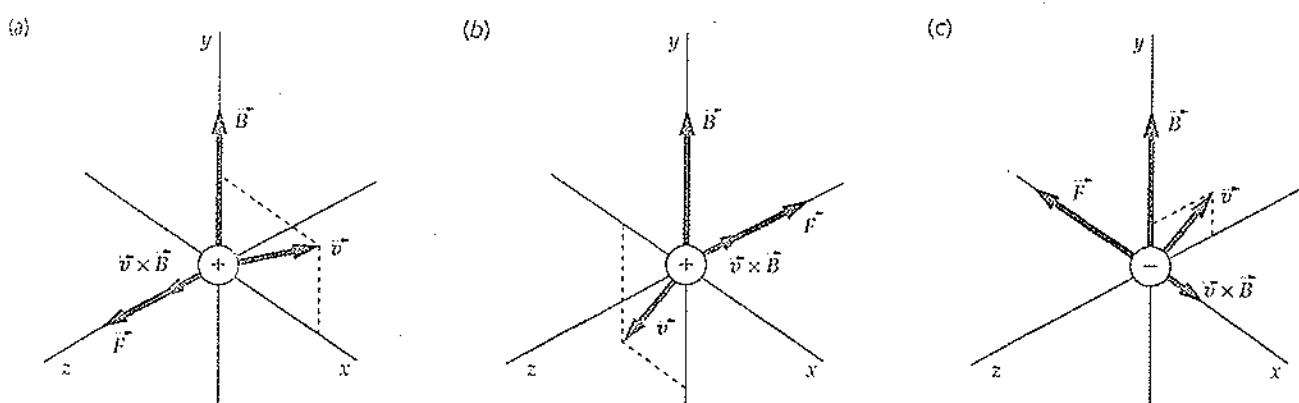
A Equação 26-1 define o campo magnético  $\vec{B}$  em termos da força exercida sobre uma carga móvel. A unidade SI de campo magnético é o tesla (T). Uma carga de um coulomb se movendo com uma velocidade de um metro por segundo, perpendicular a um campo magnético de um tesla, experimenta uma força de um newton:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Cm/s}} = 1 \text{ N/(A}\cdot\text{m}) \quad 26-2$$

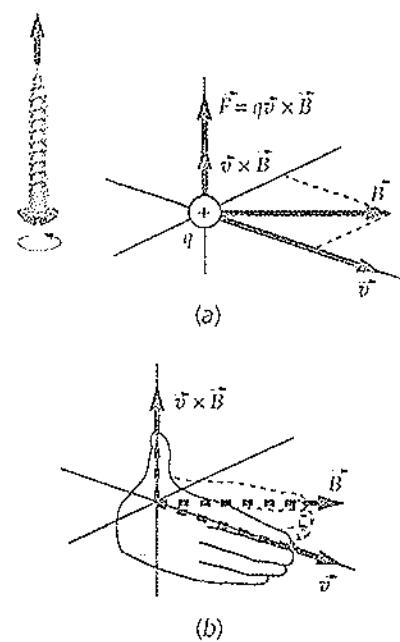
Essa unidade é muito grande. O campo magnético da Terra possui módulo menor que  $10^{-4}$  T sobre a superfície da Terra. O campo magnético perto de potentes ímãs permanentes está em torno de 0,1 a 0,5 T, e potentes eletroímãs de indústrias e laboratórios produzem campos de 1 T a 2 T. Campos maiores que 10 T são difíceis de se produzir porque as forças magnéticas resultantes irão desgastar ou destruir os ímãs. Uma unidade comumente usada, derivada do sistema csg, é o gauss (G), que é relacionado com o tesla como se segue

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \quad 26-3$$

#### Definição — Gauss

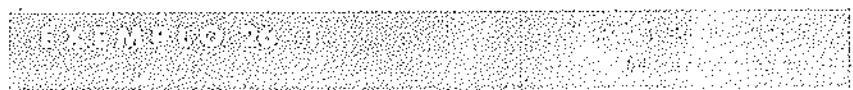


**FIGURA 26-3**  
Direção da força magnética sobre uma partícula carregada se movendo com velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ .



**FIGURA 26-2**  
Regra da mão direita para determinar a direção e o sentido da força exercida sobre uma carga se movendo em um campo magnético. Se  $q$  é positiva, então  $\vec{F}$  está na mesma direção que  $\vec{v} \times \vec{B}$ . (a) O produto vetorial  $\vec{v} \times \vec{B}$  é perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  e está no sentido do avanço da rosca do parafuso se for girado para fazer  $\vec{v}$  coincidir com  $\vec{B}$ . (b) Se os dedos da mão direita estão no sentido de  $\vec{v}$ , então quando eles são deslocados em direção a  $\vec{B}$  o dedo polegar aponta na direção de  $\vec{v} \times \vec{B}$ .

Uma vez que campos magnéticos são normalmente dados em gauss, que não é uma unidade SI, lembre-se de converter gauss para teslas quando realizar cálculos.



O campo magnético da Terra medido em um ponto sobre a superfície tem módulo 0,6 G e está direcionado para baixo e, no hemisfério norte, no sentido norte, forma um ângulo de aproximadamente  $70^\circ$  com a horizontal, como mostrado na Figura 26-4. (O campo magnético da Terra varia de local para local. Esses dados estão aproximadamente corretos para o centro dos Estados Unidos.) Um próton ( $q = +e$ ) está se movendo horizontalmente na direção norte com velocidade  $v = 10 \text{ Mm/s} = 10^7 \text{ m/s}$ . Calcule a força magnética sobre o próton (a) usando  $F = qvB \sin\theta$  e (b) expressando  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ , e calculando  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Sejam  $x$  e  $y$  as direções leste e norte, respectivamente, e  $z$  a direção para cima (Figura 26-5). O vetor velocidade está então na direção  $y$ .

- (a) Calcule  $F = qvB \sin\theta$  usando  $\theta = 70^\circ$ . A partir da Figura 26-4, nota-se que a direção da força é para oeste:

$$\begin{aligned} F &= qvB \sin 70^\circ \\ &\approx (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s})(0,6 \times 10^{-4} \text{ T})(0,94) \\ &= 9,02 \times 10^{-17} \text{ N} \end{aligned}$$

- (b) 1. A força magnética é o produto vetorial de  $q\vec{v}$  e  $\vec{B}$ :  
2. Expresse  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  em termos de suas componentes:  
3. Escreva  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  em termos dessas componentes:  
4. Determine  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} &= v_y \hat{j} \\ \vec{B} &= B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \\ \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_y \hat{j}) \times (B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= qv_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + qv_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) = 0 + qv_y B_z \hat{i} \\ \vec{F} &= qv (-B \sin\theta) \hat{i} \\ &= -(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s})(0,6 \times 10^{-4} \text{ T}) \sin 70^\circ \hat{i} \\ &= -9,02 \times 10^{-17} \text{ N} \hat{i} \end{aligned}$$

**NOTAS** Observe que a direção de  $\hat{i}$  é para leste, então a força está direcionada para oeste, como mostrado na Figura 26-5.

**EXERCÍCIO** Encontre a força sobre um próton se movendo com uma velocidade  $\vec{v} = 4 \times 10^6 \text{ m/s} \hat{i}$  em um campo magnético  $\vec{B} = 2,0 \text{ T} \hat{k}$ . (Resposta  $-1,28 \times 10^{-12} \text{ N} \hat{i}$ )

Quando um fio transporta uma corrente em um campo magnético existe uma força sobre o fio que é igual à soma das forças magnéticas sobre as partículas carregadas cujo movimento produz a corrente. A Figura 26-6 mostra um pequeno segmento de fio de área de seção reta  $A$  e comprimento  $L$  transportando uma

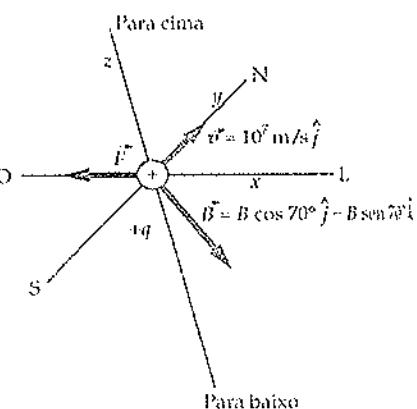
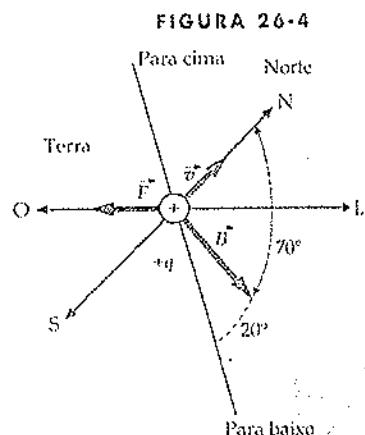


FIGURA 26-5

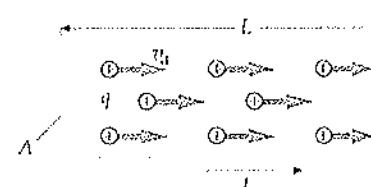


FIGURA 26-6

Segmento de fio de comprimento  $L$  através do qual passa uma corrente  $I$ . Se o fio está em um campo magnético, existe uma força sobre cada carga que se desloca resultando em uma força sobre o fio.

corrente  $I$ . Se o fio está em um campo magnético  $\vec{B}$ , a força magnética sobre cada carga é  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ , onde  $\vec{v}_d$  é a velocidade de migração dos portadores de carga (a velocidade de migração é igual à velocidade média). O número de cargas no segmento de fio é o número  $n$  por unidade de volume vezes o volume  $AL$ . Assim, a força total sobre o segmento de fio é

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL$$

A partir da Equação 25-3, a corrente no fio é

$$I = nqv_d A$$

Desse modo, a força pode ser escrita como

$$\vec{F} = IL \times \vec{B}$$

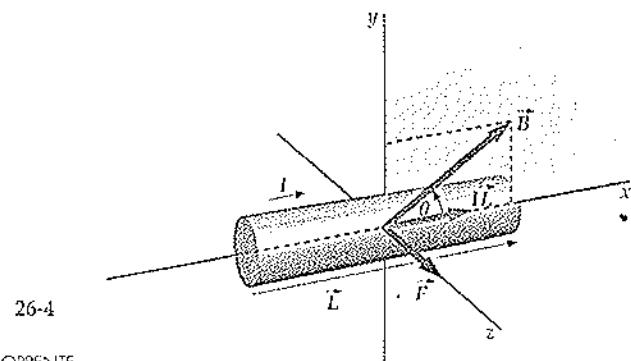


FIGURA 26-7

Força magnética sobre a corrente transportada no segmento de fio em um campo magnético. A corrente está na direção  $x$ , o campo magnético está no plano  $xy$  e faz um ângulo  $\theta$  com a direção  $+x$ . A força  $\vec{F}$  está na direção  $+z$ , perpendicular a  $\vec{B}$  e  $\vec{L}$ , e tem módulo  $ILB \sin \theta$ .

onde  $\vec{L}$  é um vetor cujo módulo é o comprimento do fio e cuja direção é paralela à da corrente. Para uma corrente no sentido positivo de  $x$  (Figura 26-7) e o vetor campo magnético no segmento no plano  $xy$ , a força sobre o fio é direcionada ao longo do eixo  $z$ .

Na Equação 26-4 assume-se que o segmento de fio é reto e que o campo magnético não varia ao longo de seu comprimento. A equação pode ser generalizada para um fio de forma arbitrária em qualquer campo magnético. Se por escolhido um segmento de fio muito pequeno  $d\vec{l}$  e a força sobre esse segmento definida como  $d\vec{F}$ , tem-se

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

26-5

## CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UM ELEMENTO COM CORRENTE

onde  $\vec{B}$  é o vetor campo magnético no segmento. A grandeza  $Id\vec{l}$  é chamada de elemento de corrente. Encontra-se a força total sobre um fio portador de carga pela soma (integração) das forças devidas a todos os elementos de corrente no fio. A Equação 26-5 é a Equação 26-1 com o elemento de corrente  $Id\vec{l}$  substituindo  $q\vec{v}$ .

Assim como o campo elétrico  $\vec{E}$  pode ser representado por linhas de campo elétrico, o campo magnético  $\vec{B}$  pode ser representado por linhas de campo magnético. Em ambos os casos a direção do campo é indicada pela direção das linhas de campo e o módulo do campo é indicado pela sua densidade. Existem, entretanto, duas importantes diferenças entre as linhas de campo elétrico e as linhas de campo magnético:

1. As linhas de campo elétrico estão na direção da força elétrica sobre uma carga positiva; mas as linhas de campo magnético são perpendiculares à força magnética sobre uma carga móvel.
2. As linhas de campo elétrico iniciam em cargas positivas e terminam nas cargas negativas; as linhas de campo magnético nem iniciam nem terminam.

A Figura 26-8 mostra as linhas de campo magnético nos lados interno e externo de uma barra imantada.

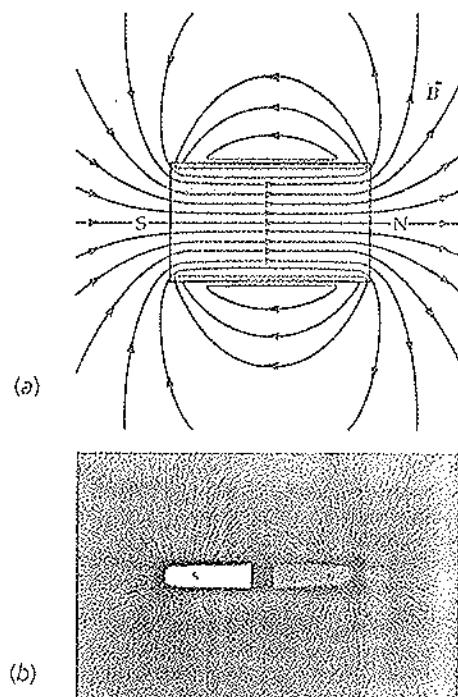


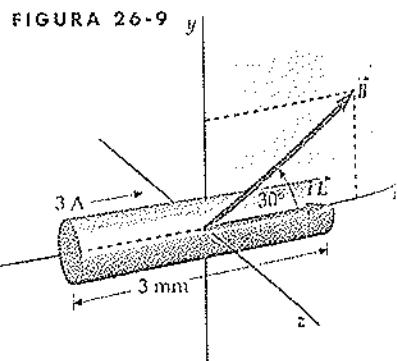
FIGURA 26-8

(a) Linhas de campo magnético internas e externas em uma barra de ímã. As linhas emergem do polo norte e entram no polo sul, mas elas não têm início ou final. Em vez disso, elas formam espiras fechadas. (b) Linhas de campo magnético externas a uma barra imantada indicadas por filetes de ferro. (Veja encarte em cores.)

Em um segmento de fio com 3 mm de comprimento passa uma corrente de 3 A no sentido  $+x$ . O fio se encontra em repouso em um campo magnético de módulo 0,02 T, que está no plano  $xy$  e faz um ângulo de  $30^\circ$  com a direção  $+x$ , como mostrado na Figura 26-9. Qual é a força magnética exercida sobre o segmento de fio?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A força magnética está na direção de  $\vec{L} \times \vec{B}$ , que, como se pode ver na Figura 26-9, está no sentido positivo de  $z$ .

$$\begin{aligned} \text{A força magnética é dada pela Equação 26-4: } \vec{F} &= I\vec{L} \times \vec{B} = ILB \sin 30^\circ \hat{k} \\ &= (3 \text{ A})(0,003 \text{ m})(0,02 \text{ T}) (\sin 30^\circ) \hat{k} \\ &= 9 \times 10^{-5} \text{ N} \hat{k} \end{aligned}$$



Um fio curvo na forma de uma espira semicircular de raio  $R$  está em repouso no plano  $xy$ . Por ele passa uma corrente  $I$  de um ponto  $a$  até um ponto  $b$ , como mostrado na Figura 26-10. Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{k}$  perpendicular ao plano da espira. Encontre a força que atua sobre a parte do fio na forma de espira semicircular.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A força  $d\vec{F}$  exercida sobre um segmento de um fio semicircular está no plano  $xy$ , como mostrado na Figura 26-11. Para encontrar a força total deve-se expressar as componentes  $x$  e  $y$  de  $d\vec{F}$  em termos de  $\theta$  e integrá-las separadamente desde  $\theta = 0$  até  $\theta = \pi$ .

1. Escreva a força  $d\vec{F}$ :  $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$  sobre o elemento de corrente  $d\vec{l}$ .
2. Expresse  $d\vec{l}$  em  $d\vec{l} = -d\ell \sin \theta \hat{i} + d\ell \cos \theta \hat{j}$  termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ :
3. Calcule  $Id\vec{l}$  usando  $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$  do  $d\ell = R d\theta$  e  $\vec{B} = B\hat{k}$ :
$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I(-R \sin \theta d\theta \hat{i} + R \cos \theta d\theta \hat{j}) \times B\hat{k} \\ &= IRB \sin \theta d\theta \hat{j} + IRB \cos \theta d\theta \hat{i} \end{aligned}$$
4. Integre cada componente de  $d\vec{F}$  desde  $\theta = 0$  até  $\theta = \pi$ :
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} = IRB \hat{i} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + IRB \hat{j} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= IRB \hat{i}(0) + IRB \hat{j}(2) = [2IRB \hat{j}] \end{aligned}$$

FIGURA 26-10

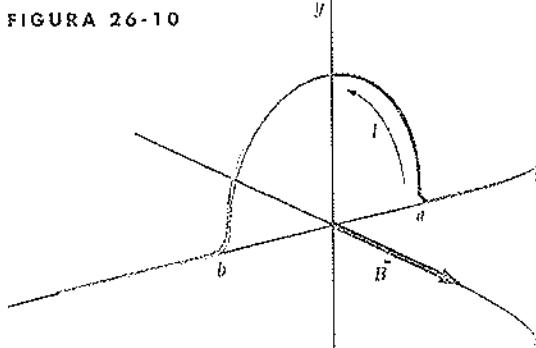
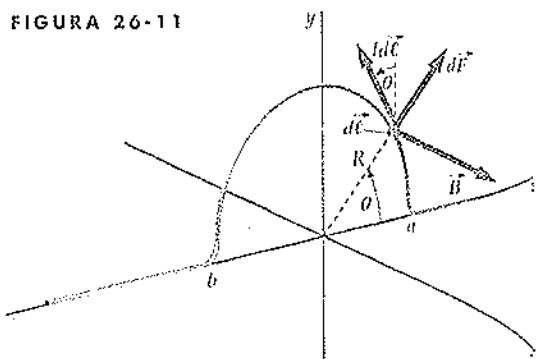


FIGURA 26-11



**VERIFICAÇÃO** O resultado de que a componente  $x$  de  $\vec{F}$  é nula pode ser verificado a partir da simetria. Para a metade direita da espira,  $d\vec{F}$  aponta para a direita; para a metade esquerda da espira,  $d\vec{F}$  aponta para a esquerda.

**NOTAS** A força líquida sobre o fio semicircular é a mesma se o semicírculo fosse substituído por um segmento reto de comprimento  $2R$  conectando os pontos  $a$  e  $b$ . (Este é um resultado geral, como mostrado no Problema 30.)

## 26-2 Movimento de uma Carga Pontual em um Campo Magnético

A força magnética sobre uma partícula carregada se movendo através de um campo magnético é sempre perpendicular à velocidade da partícula. Desse modo, a força magnética varia a direção da velocidade, mas não o módulo da velocidade. Assim, os campos magnéticos não realizam trabalho sobre as partículas e não variam as suas energias cinéticas.

No caso especial em que a velocidade de uma partícula é perpendicular a um campo magnético uniforme, como mostrado na Figura 26-12, a partícula se move em uma órbita circular. A força magnética fornece a força centrípeta necessária para a aceleração centípeta  $v^2/r$  em um movimento circular. Pode-se usar a segunda lei de Newton para relacionar o raio do círculo com o campo magnético e a velocidade da partícula. Se a velocidade é  $\vec{v}$ , o módulo da força líquida é  $qvB$ , uma vez que  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares. A segunda lei de Newton fornece

$$\vec{F} = ma$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

ou

$$r = \frac{mv}{qB} \quad 26-6$$

O período do movimento circular é o tempo que a partícula leva para se

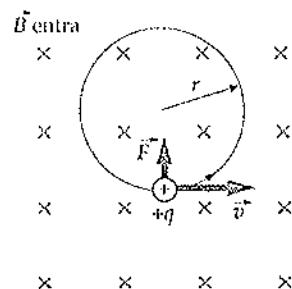
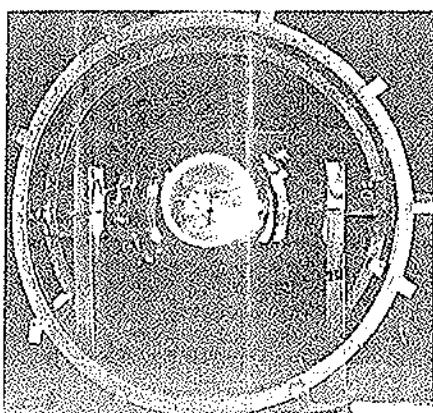


FIGURA 26-12

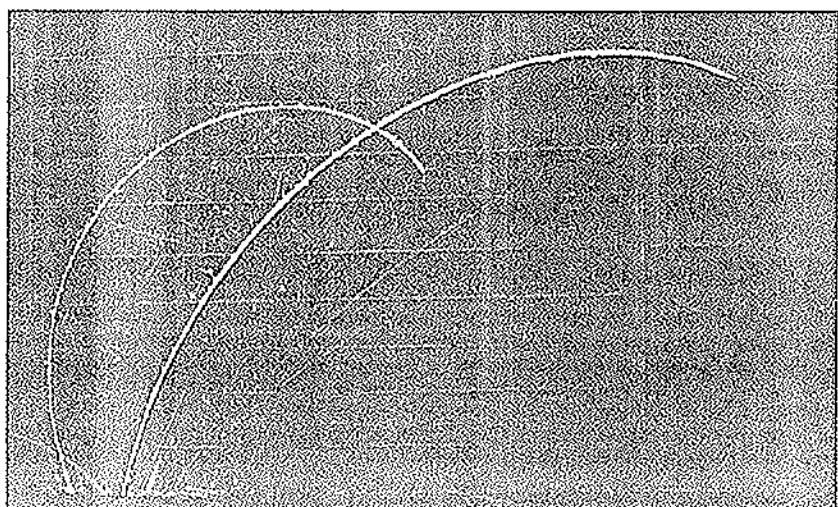
Partícula carregada se movendo em um plano perpendicular a um campo magnético uniforme. O campo magnético está para dentro da página, como indicado pelas cruzes. (Cada cruz representa a extremidade final de uma seta. O campo saindo do plano da página será indicado por pontos, cada ponto representando a ponta de uma seta.) A força magnética é perpendicular à velocidade da partícula, fazendo com que ela se mova em uma órbita circular.

(a) Trajetória circular dos elétrons se movendo em um campo magnético produzido por dois grandes enrolamentos. Os elétrons ionizam o gás no tubo, fazendo com que ele se torne incandescente e assim indique a trajetória do feixe. (b) Uma fotografia com falso colorido mostrando o percurso de um próton de 1,6 MeV (vermelho) e uma partícula  $\alpha$  de 7 MeV (amarelo) em uma câmara escura. O raio de curvatura é proporcional à quantidade de movimento e inversamente proporcional à carga da partícula. Para essas energias, a quantidade de movimento da partícula  $\alpha$ , que tem duas vezes a carga do próton, é cerca de quatro vezes maior que aquela do próton, e então seu raio de curvatura é maior. (Veja encarte em cores.)

(a)



(b)



deslocar uma vez em torno do perímetro do círculo. O período está relacionado com a velocidade por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Substituindo  $r = mv/(qB)$  da Equação 26-6, obtém-se o período do movimento circular da partícula, chamado de **período do ciclotrôn**:

$$T = \frac{2\pi(mv/qB)}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad 26-7$$

#### Período do Ciclotrôn

A freqüência do movimento circular, chamada de **freqüência do ciclotrôn**, é o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \text{então} \quad \omega = 2\pi f = \frac{q}{m} B \quad 26-8$$

#### Freqüência do Ciclotrôn

Note que o período e a freqüência dados pelas Equações 26-7 e 26-8 dependem da razão massa-carga  $q/m$ , mas o período e a freqüência são independentes da velocidade  $v$  e do raio  $r$ . Duas importantes aplicações do movimento circular de partículas carregadas em um campo magnético uniforme, o espetrômetro de massa e o ciclotrôn, serão discutidos mais adiante, nesta seção.

Um próton de massa  $m = 1,67 \times 10^{-27}$  kg e carga  $q = 1,6 \times 10^{-19}$  C se move em um círculo de raio  $r = 21$  cm perpendicular a um campo magnético  $B = 4000$  G. Encontre (a) o período do movimento e (b) a velocidade do próton.

1. Calcule o período a partir da Equação 26-7 com  $B = 4000$  G e  $G = 0,4$  T:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,4 \text{ T})}$$

$$= 1,64 \times 10^{-7} \text{ s} = 164 \text{ ns}$$

2. Calcule a velocidade  $v$  a partir da Equação 26-6:

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0,21 \text{ m})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,4 \text{ T})}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$= 8,05 \times 10^6 \text{ m/s} = 8,05 \text{ m}/\mu\text{s}$$

**NOTAS** O raio do movimento circular é proporcional à velocidade, mas o período é independente tanto da velocidade quanto do raio.

**VERIFICAÇÃO** Note que o produto da velocidade  $v$  e do período  $T$  é igual ao perímetro do círculo  $2\pi r$ , como esperado:

•  $vT = (8,05 \times 10^6 \text{ m/s})(1,64 \times 10^{-7} \text{ s}) = 1,32 \text{ m}; 2\pi r = 2\pi(0,21 \text{ m}) = 1,32 \text{ m.}$

Suponha que uma partícula carregada entra em um campo magnético uniforme com uma velocidade que não é perpendicular a  $\vec{B}$ . Não existe componente de força, e, portanto, não há componente de aceleração paralela a  $\vec{B}$ , en-

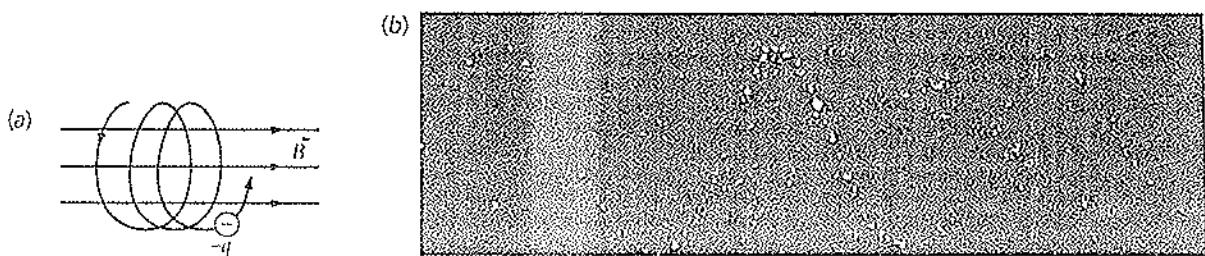


FIGURA 26-13

(a) Quando uma partícula tem uma componente de velocidade paralela ao campo magnético, assim como uma componente velocidade perpendicular ao campo magnético, essa partícula se move em uma trajetória helicoidal ao redor das linhas de campo. (b) Fotografia em câmara escura da trajetória helicoidal de um elétron se movendo em um campo magnético. A trajetória do elétron se torna visível pela condensação de gotas d'água na câmara escura.

lão a componente da velocidade paralela a  $\vec{B}$  permanece constante. A força magnética sobre a partícula é perpendicular a  $\vec{B}$ , então a variação no movimento da partícula devida a essa força é a mesma discutida antes. A trajetória da partícula é então uma helicóide, como mostrado na Figura 26-13.

O movimento de partículas carregadas em um campo magnético não-uniforme pode ser bastante complexo. A Figura 26-14 mostra uma garrafa magnética, uma interessante configuração de campo magnético na qual o campo é fraco no centro e forte em ambas as extremidades. Uma análise detalhada do movimento de uma partícula carregada em tal campo mostra que ela apresenta uma trajetória em espiral em torno das linhas de campo e fica aprisionada, oscilando para trás e para a frente entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , na figura. Tais configurações de campos magnéticos são usadas para confinar densos feixes de partículas carregadas, chamados de *plasmas*, na pesquisa em fusão nuclear. Um fenômeno similar é a oscilação de íons para trás e para a frente entre os pólos magnéticos da Terra nos cinturões de Van Allen (Figura 26-15).

### O Seletor de Velocidade

A força magnética sobre uma partícula carregada se movendo em um campo magnético uniforme pode ser equilibrada por uma força elétrica se os módulos e as direções dos campos magnéticos e elétricos foram adequadamente escolhidos. Uma vez que a força elétrica é na direção do campo elétrico (para partículas positivas) e a força magnética é perpendicular ao campo magnético, os campos elétrico e magnético na região através da qual a partícula está se movendo devem ser perpendiculares um ao outro se as forças devem se equilibrar. Tal região é dita como tendo campos cruzados.

A Figura 26-16 mostra uma região do espaço entre as placas de um capacitor onde existe um campo elétrico e um campo magnético perpendicular (produzido por um imã com pólos acima e abaixo do papel). Considere uma partícula de carga  $q$  entrando nesse espaço pela esquerda. A força líquida sobre a partícula é

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

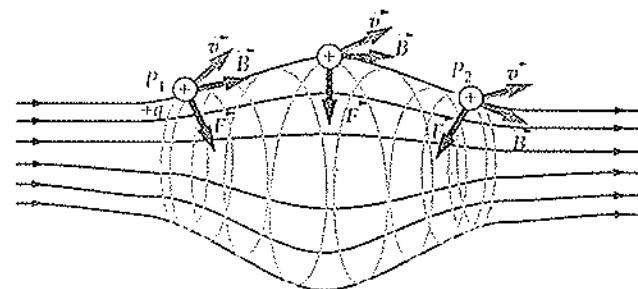


FIGURA 26-14

Garrafa magnética. Quando uma partícula carregada se move em um campo, que é forte em ambas as extremidades e fraco no meio, a partícula fica aprisionada e se desloca para a frente e para trás em uma trajetória de forma elíptica em torno das linhas de campo.

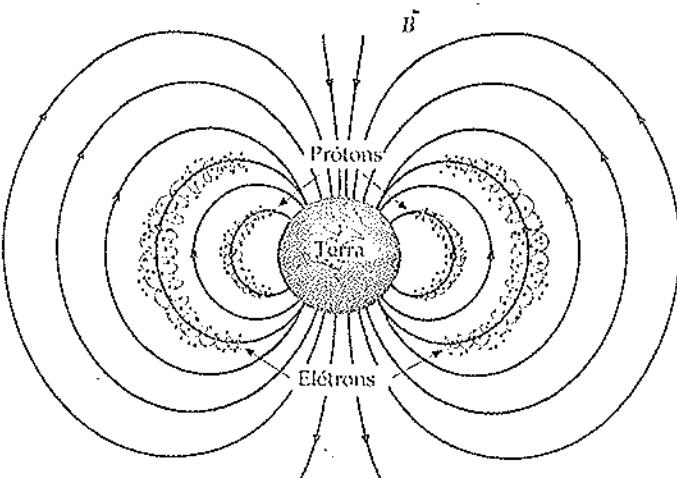


FIGURA 26-15

Cinturões de Van Allen. Prótons (cinturões internos) e elétrons (cinturões externos) ficam aprisionados no campo magnético da Terra e se movem em uma trajetória de forma elíptica em torno das linhas de campo entre os pólos norte e sul.

Se  $q$  é positiva, a força elétrica de módulo  $qE$  é para baixo e a força magnética de módulo  $qvB$  é para cima. Se a carga é negativa, cada uma dessas forças é invertida. As duas forças se equilibram se  $qE = qvB$  ou

$$v = \frac{E}{B} \quad 26-9$$

Para dados módulos dos campos elétrico e magnético, as forças se equilibram apenas para partículas com a velocidade dada pela Equação 26-9. Qualquer partícula com essa velocidade, independentemente da sua massa ou carga, irá atravessar o espaço sem desflexão. Uma partícula com uma velocidade maior será defletida na direção da força magnética, e uma partícula com velocidade menor será defletida na direção da força elétrica. Esse arranjo de campos é normalmente usado como um seletor de velocidade, que é um dispositivo que permite passar apenas partículas com a velocidade dada pela Equação 26-9.

**EXERCÍCIO** Um próton está se movendo na direção  $x$  em uma região de campos cruzados onde  $\vec{E} = 2 \times 10^5 \text{ N/C} \hat{i}$  e  $\vec{B} = -3000 \text{ G} \hat{j}$ . (a) Qual é a velocidade do próton se ele não é defletido? (b) Se o próton se move com o dobro dessa velocidade, em qual direção ele será defletido? (Resposta (a) 667 km/s (b) na direção  $z$  negativa)

#### \*A Medida de Thomson para $q/m$ dos Elétrons

Um exemplo do uso de campos elétrico e magnético cruzados é o famoso experimento realizado por J.J. Thomson em 1897, quando ele mostrou que os raios de um tubo de raios catódicos podem ser defletidos por campos elétricos e magnéticos, indicando que eles devem consistir em partículas carregadas. Através da medida da deflexão dessas partículas Thomson mostrou que todas as partículas possuem uma mesma razão carga-massa  $q/m$ . Ele mostrou também que partículas com essa razão carga-massa podem ser obtidas usando-se qualquer material como fonte, o que significa que essas partículas, agora chamadas de elétrons, são componentes fundamentais de todos os materiais.

A Figura 26-17 mostra um diagrama esquemático do tubo de raios catódicos usado por Thomson. Elétrons são emitidos do catodo C, que está com um potencial negativo em relação às fendas A e B. Um campo elétrico na direção de A para C acelera os elétrons, e os elétrons passam através das fendas A e B para uma região livre de campos. Os elétrons entram então no campo elétrico entre as placas do capacitor D e F, que é perpendicular à velocidade dos elétrons. Esse campo acelera os elétrons verticalmente durante o curto período em que eles estão entre as placas. Os elétrons são defletidos e colidem com a tela fosforescente S no lado direito do tubo com alguma deflexão  $\Delta y$ , a partir do ponto no qual eles colidiram se não houvesse campo entre as placas. A tela incandesce onde os elétrons a atingem, indicando a localização do feixe. A velocidade inicial dos elétrons,  $v_0$ , é determinada pela introdução de um campo magnético  $B$  entre as placas na direção que é perpendicular tanto ao campo elétrico quanto à velocidade inicial dos elétrons. O módulo de  $B$  é ajustado até que o feixe não seja defletido. A velocidade é então encontrada a partir da Equação 26-9.

Com o campo magnético desligado, o feixe é defletido por uma quantidade  $\Delta y$ , que consiste em duas partes: a deflexão  $\Delta y_1$ , que ocorre enquanto os elétrons estão entre as placas, e a deflexão  $\Delta y_2$ , que ocorre após os elétrons deixarem a região entre as placas (Figura 26-18).

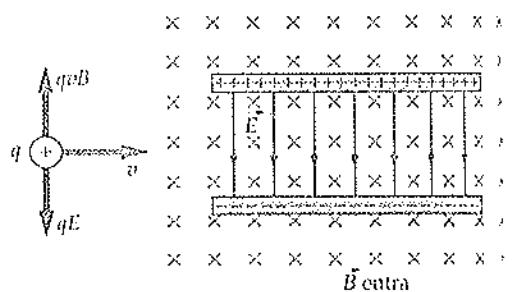


FIGURA 26-16

Campos elétrico e magnético cruzados. Quando uma partícula positiva se move para a direita ela está sujeita a uma força elétrica para baixo e uma força magnética para cima. Essas forças se equilibram se a velocidade da partícula está relacionada com a intensidade dos campos por  $vB = E$ .

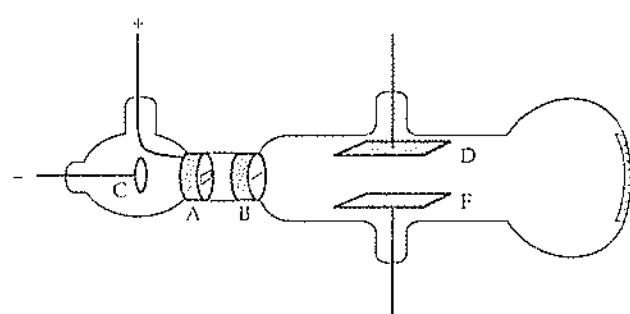


FIGURA 26-17

Tubo de Thomson para medida de  $q/m$  para as partículas de raios catódicos (elétrons). Elétrons a partir do catodo C passam através das fendas A e B e colidem com uma tela fotofosforescente S. O feixe pode ser defletido por um campo elétrico entre as placas D e F ou por um campo magnético (não mostrado).

Seja  $x_1$  a distância horizontal ao longo das placas defletoras D e F. Se o elétron está se movendo horizontalmente com velocidade  $v_0$  quando ele entra na região entre as placas, o tempo gasto entre as placas é  $t_1 = x_1/v_0$ , e a velocidade vertical quando ele deixa as placas é

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

onde  $E_y$  é a componente para cima do campo elétrico entre as placas. A deflexão nessa região é

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left( \frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

Os elétrons então se deslocam em uma distância horizontal adicional  $x_2$  em uma região livre de campo desde as placas defletoras até a tela. Uma vez que a velocidade do elétron é constante nessa região, o tempo para atingir a tela é  $t_2 = x_2/v_0$  e a deflexão vertical adicional é

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

A deflexão total na tela é, portanto,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1 x_2 \quad 26-10$$

A deflexão medida  $\Delta y$  pode ser usada para determinar a razão carga-massa,  $q/m$ , a partir da Equação 26-10.

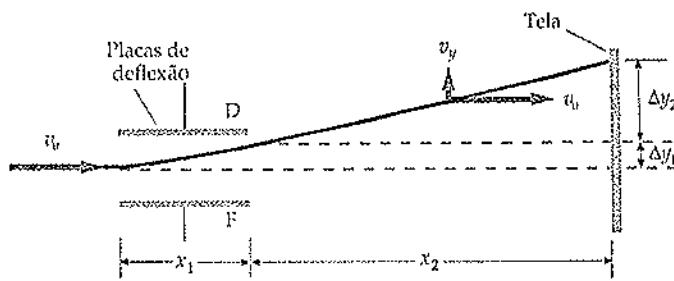


FIGURA 26-18

A deflexão total do feixe nos experimentos de J.J. Thomson consiste na deflexão  $\Delta y_1$ , enquanto os elétrons estão entre as placas, mais a deflexão  $\Delta y_2$  que ocorre na região livre de campo entre as placas e a tela.

**EXEMPLO 26-1** Os elétrons passam sem deflexão através das placas do dispositivo de Thomson quando o campo elétrico é 3000 V/m e quando existe um campo magnético cruzado de 1,40 G. Se as placas têm 4 cm de comprimento e as extremidades das placas estão a 30 cm da tela, encontre a deflexão sobre a tela quando o campo magnético é desligado.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A massa e a carga do elétron são conhecidas:  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg e  $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$  C. A velocidade do elétron pode ser encontrada a partir da razão entre os campos magnético e elétrico.

1. A deflexão total do elétron é dada pela Equação 26-10:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1 x_2$$

2. A velocidade  $v_0 = E/B$ :

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000 \text{ V/m}}{1,40 \times 10^{-4} \text{ T}} = 2,14 \times 10^7 \text{ m/s}$$

3. Substitua esse valor para  $v_0$ , o valor dado de  $E$  e os valores conhecidos de  $m$  e  $q$  para encontrar  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{2} \frac{(-1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(-3000 \text{ V/m})}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2,14 \times 10^7 \text{ m/s})^2} (0,04 \text{ m})^2 \\ &= 9,20 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Delta y_2 = \frac{(-1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(-3000 \text{ V/m})}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2,14 \times 10^7 \text{ m/s})^2} (0,04 \text{ m})(0,30 \text{ m}) \\ = 1,38 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ = 9,20 \times 10^{-4} \text{ m} + 1,38 \times 10^{-2} \text{ m} \\ = 0,92 \text{ mm} + 13,8 \text{ mm} = \boxed{14,7 \text{ mm}}$$

### \*O Espectrômetro de Massa

O espectrômetro de massa, inicialmente projetado por Francis William Aston em 1919, foi desenvolvido como um meio de medir as massas de isótopos. Tais medidas são importantes para determinar tanto a presença de isótopos quanto a sua abundância na natureza. Por exemplo, verificou-se que o magnésio natural consiste em 78,7% de  $^{24}\text{Mg}$ , 10,1% de  $^{25}\text{Mg}$  e 11,2% de  $^{26}\text{Mg}$ . Esses isótopos possuem suas massas na razão aproximada de 24:25:26.

A Figura 26-19 mostra um desenho esquemático simples de um espectrômetro de massa. Íons positivos são formados pelo bombardeamento de átomos neutros com raios X ou um feixe de elétrons. (Elétrons são deslocados para fora dos átomos pelos raios X ou pelo bombardeamento de elétrons.) Esses íons são acelerados por um campo elétrico e entram em um campo magnético uniforme. Se os íons positivos iniciam a partir do repouso e se movem através de uma diferença de potencial  $\Delta V$ , a energia cinética dos íons quando eles entram no campo magnético é igual a sua perda de energia potencial,  $q|\Delta V|$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V| \quad 26-11$$

Os íons se movem em um semicírculo de raio  $r$  dado pela Equação 26-6,  $r = mv/qB$ , e atingem uma placa fotográfica no ponto  $P_2$ , a uma distância  $2r$  a partir do ponto  $P_1$ , onde os íons entram no campo magnético.

A velocidade  $v$  pode ser eliminada das Equações 26-6 e 26-11 para encontrar  $m/q$  em termos das grandezas conhecidas  $\Delta V$ ,  $B$  e  $r$ . Inicialmente resolvendo a Equação 26-6 para  $v$  e elevando ao quadrado cada termo, tem-se

$$v^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2}$$

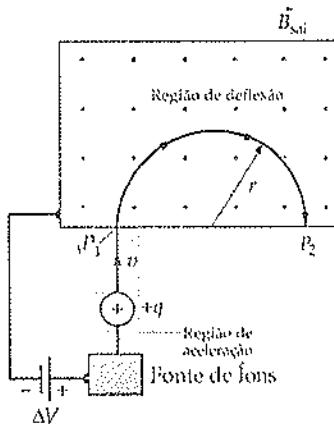
Substituindo essa expressão para  $v^2$  na Equação 26-11, obtém-se

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2 q^2 B^2}{m^2}\right) = q|\Delta V|$$

Simplificando essa equação e resolvendo  $m/q$ , tem-se

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2|\Delta V|} \quad 26-12$$

No espectrômetro de massa original de Aston as diferenças de massa podiam ser medidas com uma precisão de cerca de 1 parte em 10.000. A precisão foi melhorada pela introdução de um seletor de velocidade entre a fonte de íons e o imã, o que aumentava o grau de acurácia com o qual as velocidades dos íons que entravam podiam ser determinadas.



**FIGURA 26-19**  
Desenho esquemático de um espectrômetro de massa. Íons positivos, partindo de uma fonte de íons são acelerados através de uma diferença de potencial  $\Delta V$  e entram em um campo magnético uniforme. O campo magnético está para fora do plano da página, como indicado pelos pontos. Os íons são curvados em um arco circular e saem em  $P_2$ . O raio do círculo varia com a massa do íon.

a) (J, 30 m)

Um íon de  $^{58}\text{Ni}$  de carga  $+e$  e massa  $9,62 \times 10^{-26} \text{ kg}$  é acelerado através de uma queda de potencial de 3 kV e defletido em um campo magnético de 0,12 T. (a) Encontre o raio de curvatura da órbita do íon. (b) Encontre a diferença entre os raios de curvatura dos íons  $^{58}\text{Ni}$  e dos íons  $^{60}\text{Ni}$ . (Presuma que a razão de massa é 58:60.)

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O raio de curvatura  $r$  pode ser obtido usando a Equação 26-12. Usando a dependência da massa com  $r$ , pode-se encontrar o raio para os íons de  $^{60}\text{Ni}$  a partir do raio para os íons de  $^{58}\text{Ni}$  e depois determinar a diferença.

(a) Resolva a Equação 26-12 para  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{2m|\Delta V|}{qB^2}} = \left[ \frac{2(9,62 \times 10^{-26} \text{ kg})(3000 \text{ V})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,12 \text{ T})^2} \right]^{1/2}$$

$$= 0,501 \text{ m}$$

(b) 1. Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os raios para as órbitas dos íons de  $^{58}\text{Ni}$  e  $^{60}\text{Ni}$ , respectivamente. Use o resultado da Parte (a) para encontrar a razão de  $r_2$  para  $r_1$ :

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

2. Use o resultado da etapa anterior para calcular  $r_2$  para o  $^{60}\text{Ni}$ :

$$r_2 = 1,017 r_1 = (1,017)(0,501 \text{ m}) = 0,510 \text{ m}$$

3. A diferença no raio orbital é  $r_2 - r_1$ :

$$r_2 - r_1 = 0,510 \text{ m} - 0,501 \text{ m} = 9 \text{ mm}$$

## O Ciclotron

O ciclotron foi inventado por E.O. Lawrence e M.S. Livingston em 1934 para acelerar partículas, tais como prótons e déuterons, até elevadas energias cinéticas.<sup>5</sup> As partículas de alta energia são usadas para bombardear núcleos atômicos, causando reações nucleares que são então analisadas para obter informações sobre os núcleos. Prótons e déuterons de alta energia são também usados para produzir materiais radioativos e para propósitos medicinais.

A Figura 26-20 é um desenho esquemático de um ciclotron. As partículas se movem em dois recipientes semicirculares de metal chamados de D, devido ao seu formato parecido com o da letra D. Os D estão alojados em uma câmara de vácuo que está em um campo magnético uniforme fornecido por um eletroímã. A região na qual as partículas se movem deve ser evacuada de tal modo que as partículas não sejam retardadas por colisões com as moléculas de ar e percam energia. A diferença de potencial  $\Delta V$ , que se alterna no tempo com um período  $T$ , é mantida entre os D. O período é escolhido como o período do ciclotron  $T = 2\pi m/(qB)$  (Equação 26-7). A diferença de potencial cria um campo elétrico no espaço entre os D. Ao mesmo tempo, não existe campo elétrico dentro de cada D porque como eles são de metal, este atua como uma blindagem.

Partículas positivamente carregadas são inicialmente injetadas no  $D_1$  com uma pequena velocidade a partir de uma fonte de íons S perto do centro dos D. Elas se movem em um semicírculo no  $D_1$  e saem no espaço vazio entre os  $D_1$  e  $D_2$  após um intervalo  $\frac{1}{2}T$ . Os potenciais são ajustados de tal modo que o  $D_1$  esteja com um potencial maior que o  $D_2$ , quando as partículas chegam no espaço vazio entre eles. Desse modo, cada partícula é acelerada através do espaço vazio por um campo magnético e ganha energia cinética igual a  $q\Delta V$ .

<sup>5</sup>O déuteron é o núcleo do hidrogênio pesado,  $^2\text{H}$ , que consiste em um próton e um neutrônio fortemente ligados.

Como a partícula agora possui mais energia cinética, ela se move em um semicírculo de raio maior no  $D_2$ . Ela sai no espaço vazio novamente após um intervalo  $\frac{1}{2}T$ , uma vez que o período é independente da velocidade da partícula. Nesse instante, o potencial entre os D foi invertido e o  $D_2$  é agora o de maior potencial. Uma vez mais a partícula é acelerada no espaço vazio e ganha uma energia cinética adicional igual a  $q\Delta V$ . Cada vez que a partícula chega ao espaço vazio ela é acelerada e ganha energia cinética igual a  $q\Delta V$ . Assim, a partícula se move em órbitas semicirculares maiores e maiores até que, eventualmente, ela deixa o campo magnético. Em um típico ciclotron, cada partícula pode dar 50 a 100 voltas e sair com energias acima de várias centenas de megaelétron-volts.

A energia cinética de uma partícula que deixa um ciclotron pode ser determinada pelo ajuste de  $r$  na Equação 26-6 igual ao máximo raio dos D e resolvendo a equação para  $v$ :

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad v = \frac{qBr}{m}$$

Então

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2 \quad 26-13$$

Um ciclotron para acelerar prótons possui um campo magnético de 1,5 T e um raio máximo de 0,5 m. (a) Qual é a freqüência do ciclotron? (b) Qual é a energia cinética dos prótons quando eles emergem?

- (a) A freqüência do ciclotron é dada pela Equação 26-8:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1,5 \text{ T})}{2\pi(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2,29 \times 10^7 \text{ Hz}$$

$$= 22,9 \text{ MHz}$$

- (b) 1. A energia cinética dos prótons emergentes é dada pela Equação 26-13:

$$K = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (1,5 \text{ T})^2}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right] (0,5 \text{ m})^2$$

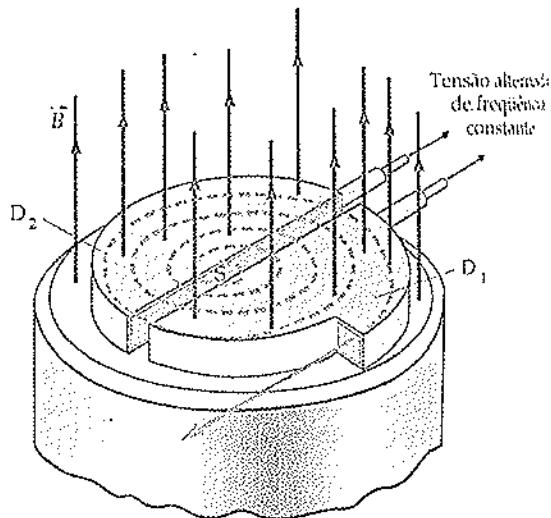
$$= 4,31 \times 10^{-12} \text{ J}$$

2. As energias dos prótons e outras partículas elementares é normalmente expressa em elétron-volts. Use  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$  na conversão para eV:

$$K = 4,31 \times 10^{-12} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 26,9 \text{ MeV}$$

### 26-3 Torques sobre Espiralas com Corrente e Ímãs

Uma espira transportando corrente não possui força líquida em um campo magnético uniforme, mas tem um torque que tende a girá-la. A orientação da espira pode ser descrita convenientemente por um vetor unitário  $\hat{n}$  que é per-



**FIGURA 26-20**

Desenho esquemático de um ciclotron. A face do polo superior do ímã foi omitida. Partículas carregadas, tais como prótons, são aceleradas a partir de uma fonte no centro por uma diferença de potencial através do espaço vazio entre os D. Quando a partícula carregada atinge novamente o espaço vazio a diferença de potencial troca de sinal e, então, ela é mais uma vez acelerada através do espaço vazio e se move em um círculo maior. A diferença de potencial através do espaço vazio se alterna com a freqüência do ciclotron da partícula, que é independente do raio do círculo.

pendicular ao plano da espira, como ilustrado na Figura 26-21. Se os dedos da mão direita giram em torno da espira no sentido da corrente, o dedo polegar aponta na direção de  $\hat{n}$ .

A Figura 26-22 mostra as forças exercidas por um campo magnético uniforme sobre uma espira retangular cujo vetor unitário normal  $\hat{n}$  faz um ângulo  $\theta$  com o campo magnético  $\vec{B}$ . A força líquida sobre a espira é nula. As forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  possuem o módulo

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = Iab\vec{B}$$

Essas forças formam um binário, de tal modo que o torque é o mesmo em torno de qualquer ponto. O ponto  $P$  na Figura 26-22 é um ponto conveniente em torno do qual pode-se calcular o torque. O módulo do torque é

$$\tau = F_2 b \sin \theta = Iab b \sin \theta = IA B \sin \theta$$

onde  $A = ab$  é a área da espira. Para uma espira com  $N$  voltas, o torque possui módulo

$$\tau = NIAB \sin \theta$$

Esse torque tende a girar a espira de modo que  $\hat{n}$  esteja na mesma direção de  $\vec{B}$  (isto é, de tal modo que seu plano seja perpendicular a  $\vec{B}$ ).

O torque pode ser escrito convenientemente em termos do momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  (também referido simplesmente como momento magnético) de uma espira com corrente, que é definido como

$$\vec{\mu} = NIa\hat{n}$$
26-14

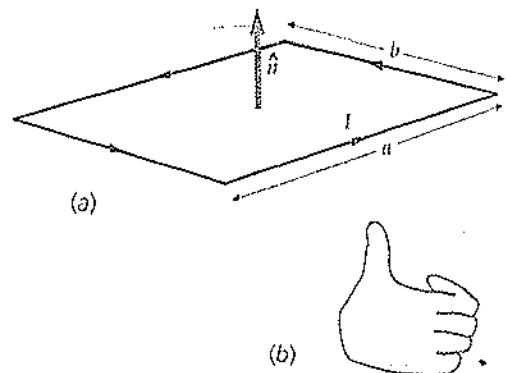
#### MOMENTO DE DIPOLÔ MAGNÉTICO DE UMA EPIRA COM CORRENTE

A unidade SI de momento magnético é o ampére-metro<sup>2</sup> ( $A \cdot m^2$ ). Em termos do momento de dipolo magnético, o torque sobre uma espira com corrente é dado por

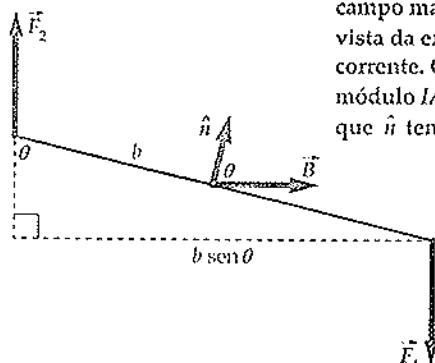
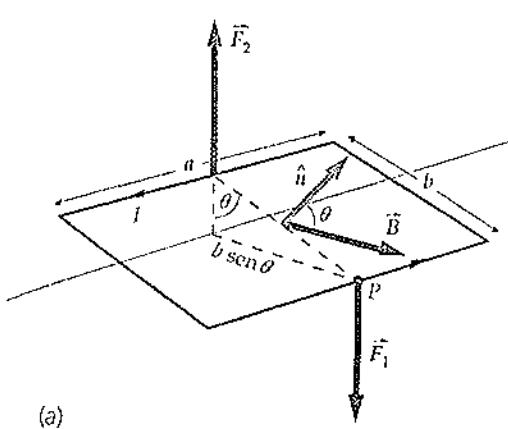
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$
26-15

#### TORQUE SOBRE UMA EPIRA COM CORRENTE

A Equação 26-15, que foi desenvolvida para uma espira retangular, ocorre para o caso geral de uma espira de qualquer forma que esteja em um único plano. O torque sobre qualquer espira é o produto vetorial do momento magnéti-



**FIGURA 26-21**  
(a) A orientação de uma espira com corrente é descrita pelo vetor unitário  $\hat{n}$  perpendicular ao plano da espira. (b) A regra da mão direita determina a direção e o sentido de  $\hat{n}$ . Se os dedos da mão direita giram em torno da espira no sentido da corrente, o dedo polegar aponta na direção de  $\hat{n}$ .



**FIGURA 26-22**  
(a) Espira com corrente retangular cuja normal unitária  $\hat{n}$  faz um ângulo  $\theta$  com o campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . (b) Uma vista da extremidade de uma espira com corrente. O torque sobre a espira tem módulo  $IAB \sin \theta$  e está no sentido tal que  $\hat{n}$  tende a girar para coincidir com  $\vec{B}$ .

co  $\vec{\mu}$  da espira pelo campo magnético  $\vec{B}$ , onde o momento magnético é definido como um vetor que é perpendicular ao plano da espira (Figura 26-23), possui módulo igual a  $NIA$  e tem a mesma direção de  $\hat{n}$ . Comparando a Equação 26-15 com a Equação 21-11 ( $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ ) para o torque sobre um dipolo elétrico, nota-se que a expressão para o torque sobre uma espira com corrente em um campo magnético tem a mesma forma que a do torque sobre um dipolo elétrico em um campo elétrico.

**EXEMPLO 26-1** Uma espira circular com raio de 2 cm possui 10 voltas de fio, e por ela passa uma corrente de 3 A. O eixo da espira faz um ângulo de  $30^\circ$  com um campo magnético de 8000 G. Encontre o módulo do torque sobre a espira.

O módulo do torque é dado pela Equação 26-15:

$$\begin{aligned}\tau &= |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin \theta = NIAB \sin \theta \\ &= (10)(3 \text{ A})\pi(0,02 \text{ m})^2(0,8 \text{ T}) \sin 30^\circ \\ &= 1,51 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}^2\end{aligned}$$

FIGURA 26-23

Uma espira com corrente plana de forma arbitrária é descrita por seu momento magnético  $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$ . Em um campo magnético  $\vec{B}$ , a espira experimenta um torque  $\vec{\mu} \times \vec{B}$ .

### Tente resolver este exemplo sozinho

Uma espira circular de raio  $R$ , massa  $m$  e corrente  $I$  repousa sobre uma superfície horizontal (Figura 26-24). Existe um campo magnético horizontal  $\vec{B}$ . Qual a máxima corrente  $I$  antes de uma das extremidades ser elevada da superfície?



FIGURA 26-24

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A espira (Figura 26-25) irá começar a girar quando o módulo do torque líquido sobre a espira não for nulo. Para eliminar o torque devido à força normal, calculam-se os torques em torno dos pontos de contato entre a superfície e a espira. O torque magnético é dado por  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ . O torque magnético é o mesmo em relação a qualquer ponto, uma vez que o torque magnético consiste em binários. O braço de alavanca para o torque gravitacional é o raio da espira.

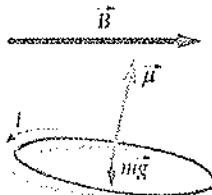


FIGURA 26-25

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

1. Encontre o módulo do torque magnético atuando sobre a espira.

#### Respostas

$$\tau_m = \mu B = I\pi R^2 B$$

2. Encontre o módulo do torque gravitacional exercido sobre a espira.

$$\tau_g = mgR$$

3. Iguale os módulos dos torques e resolva para a corrente  $I$ .

$$I = \frac{mg}{\pi RB}$$

**NOTAS** Os torques são iguais e opostos.

### Energia Potencial de um Dipolo Magnético em um Campo Magnético

Quando um torque é exercido através de um ângulo, um trabalho é realizado. Quando um dipolo é girado de um ângulo  $d\theta$ , o trabalho realizado é

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta$$

O sinal menos surge porque o torque tende a diminuir  $\theta$ . Fazendo esse trabalho igual à diminuição na energia potencial, tem-se

$$dU = -dW = +\mu B \sin \theta d\theta$$

Integrando, obtém-se

$$U = -\mu B \cos \theta + U_0$$

Faz-se a energia potencial ser nula quando  $\theta = 90^\circ$ . Então,  $U_0 = 0$  e a energia potencial do dipolo é

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad 26-16$$

### ENERGIA POTENCIAL DE UM DIPOLO MAGNÉTICO

A Equação 26-16 fornece a energia potencial de um dipolo magnético em um ângulo  $\theta$  com relação à direção do campo magnético.

Em um enrolamento quadrado de 12 voltas, com comprimento total de 49 cm, passa uma corrente de 3 A. Ele repousa no plano  $xy$ , como mostrado em um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 0,3 \text{ T } \hat{i} + 0,4 \text{ T } \hat{k}$ . Encontre (a) o momento magnético sobre o enrolamento e (b) o torque exercido sobre o enrolamento. (c) Encontre a energia potencial sobre o enrolamento.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A partir da Figura 26-26, nota-se que o momento magnético da espira está no sentido positivo de  $z$ .

(a) Calcule o momento magnético da espira:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= NIA \hat{k} = (12)(3 \text{ A})(0,40 \text{ m})^2 \hat{k} \\ &= 5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \hat{k} \end{aligned}$$

(b) O torque sobre a espira com corrente é dado pela Equação 26-15:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\mu} \times \vec{B} \\ &= (5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \hat{k}) \times (0,3 \text{ T } \hat{i} + 0,4 \text{ T } \hat{k}) \\ &= 1,73 \text{ N} \cdot \text{m} \hat{j} \end{aligned}$$

(c) A energia potencial é o produto escalar negativo de  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} U &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= -(5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \hat{k}) \cdot (0,3 \text{ T } \hat{i} + 0,4 \text{ T } \hat{k}) \\ &= -2,30 \text{ J} \end{aligned}$$

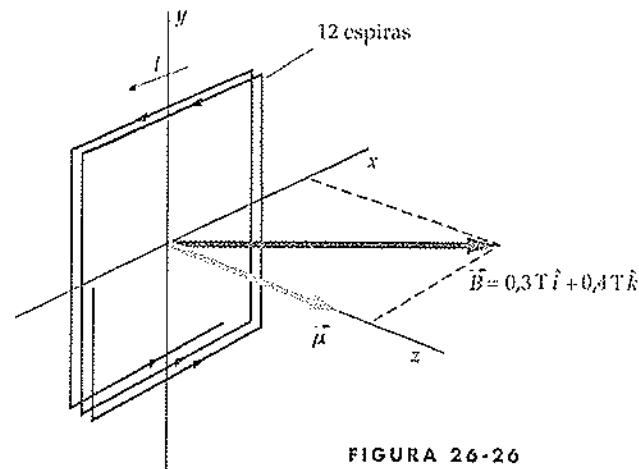


FIGURA 26-26

**NOTAS** Foi usado  $\hat{k} \times \hat{k} = 0$  e  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ,  $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$  e  $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ . O torque está na direção  $y$ .

**EXERCÍCIO** Calcule  $U$  se  $\vec{B}$  e o momento magnético  $\vec{\mu}$  estão no mesmo sentido. (Resposta  $U = -\mu B = -(5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2)(0,5 \text{ T}) = -2,88 \text{ J}$ . Note que essa energia potencial é menor que a encontrada no exemplo. A energia potencial é menor quando  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$  estão no mesmo sentido.)

Quando um pequeno ímã permanente, como a agulha de uma bússola, é colocado em um campo magnético  $\vec{B}$  o campo exerce um torque sobre o ímã que tende a girá-lo de modo a alinhá-lo com o campo. Esse efeito também ocorre com foletes de ferro não inicialmente magnetizados, que se tornam magnetizados na presença de um campo  $\vec{B}$ . A barra imantada é caracterizada por um momento magnético  $\vec{\mu}$ , um vetor que aponta na mesma direção de uma seta desenhada do polo norte para o polo sul. Uma pequena barra imantada desse modo se comporta como uma espira com corrente. Isso não é uma coincidência. A origem do momento magnético de uma barra imantada consiste, de fato, em microscópicas espiras com corrente que resultam do movimento dos elétrons nos átomos do ímã.

PROBLEMA 26-10

Um disco fino não-condutor de massa  $m$  e raio  $R$  tem uma carga superficial uniforme por unidade de área  $\sigma$  e gira com velocidade  $\omega$  em torno de seu eixo. Encontre o momento magnético do disco girante.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Determina-se o momento magnético de um elemento circular de raio  $r$  e largura  $dr$  e integra-se (Figura 26-27). A carga sobre o elemento é  $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ . Se a carga é positiva, o momento magnético está na direção de  $\vec{\omega}$ , e é necessário calcular apenas seu módulo.

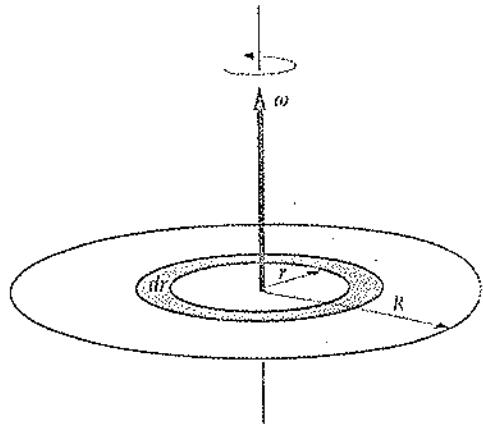


FIGURA 26-27

- O momento magnético na fatia mostrada é a corrente vezes a área da espira:

- A corrente na fatia é a carga total sobre a fatia dividida pelo tempo que essa carga leva para passar em um dado ponto. Esse tempo é o período que é o inverso da freqüência de rotação  $f = \omega/(2\pi)$ :

$$d\mu = (dl)A = (dl)\pi r^2$$

$$dl = \frac{dq}{T} = (dq)f = (\sigma dA) \frac{\omega}{2\pi} \\ = (\sigma 2\pi r dr) \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr$$

- Substitua para obter o momento magnético sobre a fatia  $d\mu$  em termos de  $r$  e  $dr$ :

- Integre desde  $r = 0$  até  $r = R$ :

$$d\mu = (dl)\pi r^2 = (\sigma \omega r dr)\pi r^2 = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

$$\mu = \int d\mu = \int_0^R \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega R^4$$

- Use o fato de que  $\vec{\mu}$  é paralelo a  $\vec{\omega}$  se  $\sigma$  for positivo para escrever o momento magnético como um vetor:

$$\vec{\mu} = \boxed{\frac{1}{4} \pi \sigma R^4 \vec{\omega}}$$

**NOTAS** Em termos da carga total  $Q = \sigma \pi R^2$ , o momento magnético é  $\vec{\mu} = \frac{1}{4} QR^2 \vec{\omega}$ . A quantidade de movimento angular do disco é  $\vec{L} = (\frac{1}{2} m R^2) \vec{\omega}$ , então o momento magnético pode ser escrito como  $\vec{\mu} = [Q/(2m)] \vec{L}$ , que é um resultado mais geral. (Veja o Problema 63.)

## 26-4 O Efeito Hall

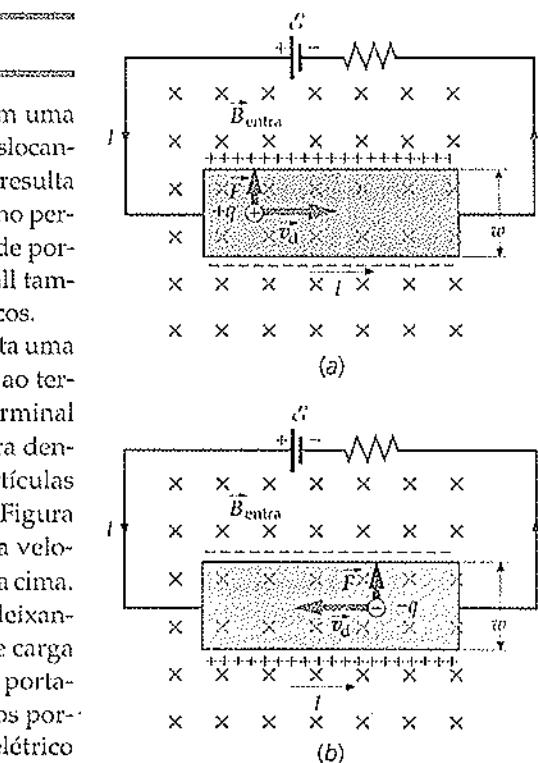
Como já foi visto, cargas móveis em um campo magnético experimentam uma força perpendicular ao seu movimento. Quando essas cargas estão se deslocando em um fio condutor elas serão levadas para um dos lados do fio. Isso resulta em uma separação de cargas no fio chamada de efeito Hall. Esse fenômeno permite determinar o sinal da carga sobre os portadores de carga e número de portadores de carga por unidade de volume  $n$  em um condutor. O efeito Hall também fornece um método conveniente para a medida de campos magnéticos.

A Figura 26-28 mostra duas fitas condutoras; cada uma delas transporta uma corrente  $I$  para a direita, porque seus lados esquerdos estão conectados ao terminal positivo de uma bateria e os lados direitos estão conectados ao terminal negativo. As fitas estão em um campo magnético que é direcionado para dentro do papel. Admita inicialmente que a corrente na fita consiste em partículas positivamente carregadas se movendo para a direita, como mostrado na Figura 26-28a. A força magnética sobre essas partículas é  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$  (onde  $\vec{v}_d$  é a velocidade de migração dos portadores de carga). Essa força é direcionada para cima. As partículas positivas se movem, então, para a parte superior da fita, deixando a parte inferior com um excesso de carga negativa. Essa separação de carga produz um campo elétrico na fita que se opõe à força magnética sobre os portadores de carga. Quando as forças elétricas e magnéticas se equilibram, os portadores de carga não se movem mais para cima. Uma vez que o campo elétrico aponta no sentido do potencial decrescente, a parte superior da fita está em um potencial mais elevado que o da parte inferior da fita. Essa diferença de potencial pode ser medida usando um voltímetro sensível. Por outro lado, se a corrente consiste em partículas móveis negativamente carregadas, como mostrado na Figura 26-28b, os portadores de carga na fita devem se mover para a esquerda (uma vez que a corrente ainda é para a direita). A força magnética  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$  é novamente para cima, porque os sinais de  $q$  e  $\vec{v}_d$  foram invertidos. Novamente os portadores de carga são forçados para a parte superior da fita, mas a parte superior da fita agora possui uma carga negativa (porque os portadores de carga são negativos), e a parte inferior da fita tem carga positiva.

Uma medida do sinal da diferença de potencial entre as partes superior e inferior da fita indica o sinal dos portadores de carga. Em semicondutores, os portadores de carga podem ser elétrons negativos ou buracos positivos. Uma medida do sinal da diferença de potencial indica o que é dominante para um semicondutor em particular. Para um condutor metálico normal, encontra-se que a parte superior da fita na Figura 26-28b está com um potencial mais baixo que a parte inferior — o que significa que a parte superior deve transportar uma carga negativa. Assim, a Figura 26-28b é a ilustração correta para a corrente em um condutor metálico normal. Esse tipo de experimento permitiu descobrir que os portadores de carga em condutores metálicos são negativos.

A diferença de potencial entre as partes superior e inferior da fita é chamada de tensão de Hall. Pode-se calcular o módulo da tensão de Hall em termos da velocidade de migração. O módulo da força magnética sobre os portadores de carga na fita é  $qv_d B$ . Essa força magnética é equilibrada pela força eletrostática de módulo  $qE_H$ , onde  $E_H$  é o campo elétrico devido à separação de cargas. Assim, tem-se  $E_H = v_d B$ . Se a largura de fita é  $w$ , a diferença de potencial é  $E_H w$ . A tensão de Hall é, assim,

$$V_H = E_H w = v_d B w$$



**FIGURA 26-28**  
O efeito Hall. O campo magnético é direcionado para dentro do plano da página, como indicado pelas cruzes. A força magnética sobre uma partícula carregada é para cima, para uma corrente para a direita, enquanto a corrente é devida a (a) partículas positivas se movendo para a direita ou (b) partículas negativas se movendo para a esquerda.

**EXERCÍCIO** Uma fita condutora de largura  $w = 2,0$  cm é colocada em um campo magnético de  $0,8$  T. A tensão de Hall é medida como  $0,64 \mu\text{V}$ . Calcule a velocidade de migração dos elétrons. (Resposta  $4,0 \times 10^5 \text{ m/s}$ )

Uma vez que a velocidade de migração para correntes normais é muito pequena, pode-se ver a partir da Equação 26-17 que a tensão de Hall é pequena para fitas de tamanho normal e campos magnéticos normais. A partir das medidas da tensão de Hall para uma fita de um dado tamanho pode-se determinar o número de portadores de carga por unidade de volume na fita. A corrente é dada pela Equação 25-3:

$$I = nqv_d A$$

onde  $A$  é a área de seção reta da fita. Para uma fita de largura  $w$  e espessura  $t$ , a área de seção reta é  $A = wt$ . Uma vez que os portadores de carga são elétrons, a grandeza  $q$  é a carga sobre um elétron  $e$ . O número de densidade dos portadores de carga  $n$  é, então, dado por

$$n = \frac{I}{Aqv_d} = \frac{I}{wtev_d} \quad 26-18$$

Substituindo  $V_H/B$  por  $v_d w$  (Equação 26-17), tem-se

$$n = \frac{IB}{teV_H} \quad 26-19$$

Por uma placa de prata com espessura de 1 mm e comprimento de 1,5 cm passa uma corrente de 2,5 A em uma região na qual existe um campo magnético de módulo 1,25 T perpendicular à placa. A tensão de Hall é medida como 0,334  $\mu\text{V}$ . (a) Calcule o número de densidade dos portadores de corrente. (b) Compare sua resposta na etapa 1 com o número de densidade dos átomos na prata, que possui uma massa específica  $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$  e massa molar  $M = 107,9 \text{ g/mol}$ .

- Substitua os valores numéricos na Equação 26-19 para encontrar  $n$ :  

$$n = \frac{IB}{teV_H} = \frac{(2,5 \text{ A})(1,25 \text{ T})}{(0,001 \text{ m})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3,34 \times 10^{-7} \text{ V})}$$

$$= 5,85 \times 10^{28} \text{ elétrons/m}^3$$
- O número de átomos por unidade de volume é  

$$n_A = \rho \frac{N_A}{M} = (10,5 \text{ g/cm}^3) \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{107,9 \text{ g/mol}}$$

$$= 5,86 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 = 5,86 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

**NOTAS** Esses resultados indicam que o número de portadores de carga na prata é muito próximo de um por átomo.

A tensão de Hall fornece um método conveniente para a medida dos campos magnéticos. Se a Equação 26-19 for rearranjada, pode-se escrever para a tensão de Hall

$$V_H = \frac{I}{nte} B \quad 26-20$$

Uma dada fita pode ser calibrada pela medida da tensão de Hall para uma dada corrente em um campo magnético conhecido. A fita pode então ser usada para medir um campo magnético  $B$  desconhecido através da medida da tensão de Hall para uma dada corrente.

### O Efeito Hall Quântico

De acordo com a Equação 26-20, a tensão de Hall deve aumentar linearmente com o campo magnético  $B$  para uma dada corrente em um certo condutor. Em 1980, enquanto estudava o efeito Hall em semicondutores em temperaturas muito baixas e campos magnéticos muito elevados, o físico alemão Klaus von Klitzing descobriu que um gráfico de  $V_H$  versus  $B$  resultava em uma série de patamares, como mostrado na Figura 26-29, em vez de uma linha reta contínua. Isto é, a tensão de Hall é quantizada. Pela descoberta do efeito Hall quântico von Klitzing recebeu o Prêmio Nobel de física em 1985.

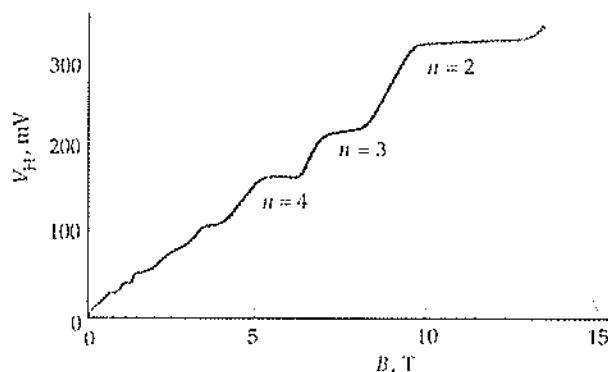


FIGURA 26-29

Uma representação gráfica da tensão de Hall versus o campo magnético aplicado mostra patamares, indicando que a tensão de Hall é quantizada. Esses dados foram obtidos em uma temperatura de 1,39 K, com uma corrente  $I$  mantida fixa em 25,52  $\mu\text{A}$ .

Na teoria do efeito Hall quântico, a resistência de Hall, definida como  $R_{\text{H}} = V_H/I$ , pode ser determinada apenas nos valores

$$R_{\text{H}} = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 26-21$$

onde  $n$  é um inteiro e  $R_K$ , chamada de constante de von Klitzing, está relacionada com a carga eletrônica fundamental  $e$  e a constante de Planck  $\hbar$  por

$$R_K = \frac{\hbar}{e^2} \quad 26-22$$

Como a constante de von Klitzing pode ser medida com uma acurácia de poucas partes por bilhão, o efeito Hall quântico é agora usado para definir o padrão de resistência. Desde janeiro de 1990, o ohm é definido em termos do valor convencional<sup>t</sup> da constante de von Klitzing  $R_{K-90}$ , que tem o valor

$$R_{K-90} = 25.812,807 \Omega \text{ (exato)} \quad 26-23$$

Em 1982 foi observado que sob certas condições especiais a resistência de Hall é dada pela Equação 26-22, mas com o inteiro  $n$  substituído por uma série de frações racionais, o que é chamado de efeito Hall quântico fracional. Pela descoberta e pela explicação do efeito Hall quântico fracional, os professores americanos Laughlin, Stormer e Tsui receberam o Prêmio Nobel de física em 1998.

<sup>t</sup>O valor de  $R_{K-90}$  difere muito pouco do valor de  $R_K$ . O valor normalmente usado da constante de von Klitzing é  $R_K = (25812,807572 \pm 0,000095) \Omega$

## RESUMO

- O campo magnético descreve a condição no espaço na qual cargas móveis experimentam uma força perpendicular às suas velocidades.
- A força magnética é parte da força eletromagnética, uma das quatro forças fundamentais da natureza.
- O módulo e a direção de um campo magnético  $\vec{B}$  são definidos pela força  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  exercida sobre cargas móveis.

Tópicos	Equações e Observações Importantes	
1. Força Magnética		
Sobre uma carga móvel	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	26.1
Sobre um elemento de corrente	$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$	26.2
Unidade de campo magnético	A unidade de campo magnético é o tesla (T). Uma unidade comumente usada é o gauss (G), que é relacionado com o tesla por $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$	26.3
2. Movimento de Cargas Pontuais	Uma partícula de massa $m$ e carga $q$ se movendo com velocidade $v$ em um campo magnético uniforme perpendicular a um campo magnético uniforme se desloca em uma órbita circular. O período e a frequência desse movimento circular são independentes do raio da órbita e da velocidade da partícula.	26.4
Segunda lei de Newton	$qvB = m\frac{v^2}{r}$	26.5
Período do ciclotrôn	$T = \frac{2\pi m}{qB}$	26.6
Frequência do ciclotrôn	$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$	26.7
*Seletor de velocidade	Um seletor de velocidade consiste em campos elétrico e magnético cruzados de tal modo que as forças elétrica e magnética estejam equilibradas para uma partícula se movendo com velocidade $v$ .	26.8
*Medidas de Thomson para $q/m$	A deflexão de uma partícula carregada em um campo elétrico depende da velocidade da partícula e é proporcional à razão carga-massa $q/m$ da partícula. J.J. Thomson usou campos elétrico e magnético cruzados para medir a velocidade de raios catódicos e, então, mediu $q/m$ para essas partículas através de sua deflexão em um campo elétrico. Ele mostrou que todos os raios catódicos consistem em partículas, todas apresentando a mesma razão carga-massa. Essas partículas agora são chamadas de elétrons.	26.9
*Espectrômetro de massa	A razão carga-massa de um fôton de velocidade conhecida pode ser determinada pela medida do raio da trajetória circular feita pelo fôton em um campo magnético conhecido.	26.10
3. Espiras com Corrente		
Momento magnético dipolar	$\vec{\mu} = NI\vec{A}\hat{n}$	26.11
Torque	$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$	26.12

Energia potencial de um dipolo magnético	$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$	26-16
Força líquida	A força líquida sobre uma espira com corrente em um campo magnético uniforme é nula.	
O Efeito Hall	Quando uma fita condutora transportando uma corrente é colocada em um campo magnético, a força magnética sobre as cargas transportadas causa uma separação de carga chamada de efeito Hall. Isso resulta em uma tensão $V_H$ , chamada de tensão de Hall. O sinal das cargas transportadas pode ser determinado a partir da medida da tensão de Hall, e o número de portadores de carga por unidade de volume pode ser determinado a partir do módulo de $V_H$ .	
Tensão de Hall	$V_H = E_H w = v_d B w = \frac{I}{n t e} B$	26-17, 26-20
Efeito Hall quântico	Medidas em temperaturas muito baixas em campos magnéticos muito grandes indicam que a resistência de Hall, $R_H = V_H/I$ , é quantizada e pode ser determinada apenas para valores dados por	
Constante de von Klitzing convencional (definição de ohm)	$R_{K-90} = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	26-21
	$R_{K-90} = 25.812.807 \Omega$ (exato)	26-23

## PROBLEMAS

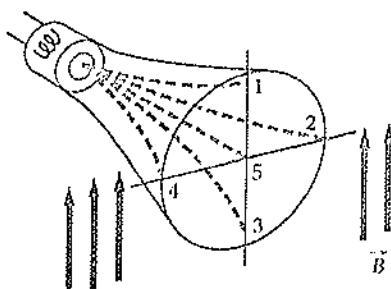
Em alguns problemas, são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil
- Problemas de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- Problema desafiador
- Problema que pode ser resolvido com auxílio de planilha

### Problemas Conceituais

- 1 • Quando um tubo de raio catódico é colocado horizontalmente em um campo magnético que está direcionado verticalmente para cima, os elétrons emitidos para o catodo seguem uma das trajetórias tracejadas para a face do tubo na Figura 26-30. A trajetória correta é (a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.
- 2 • Por que não se define  $\vec{B}$  na mesma direção de  $\vec{F}_q$  como é feito para  $\vec{E}$ ?
- 3 • Falso ou verdadeiro: a força magnética não acelera uma partícula carregada porque a força magnética é perpendicular à velocidade da partícula.
- 4 • Um feixe de partículas positivamente carregadas passa

FIGURA 26-30  
Problema 1



através de um seletor de velocidade no qual o campo magnético está para cima sem ser defletido quando se desloca desde a esquerda até a direita. O feixe é então invertido de modo a se deslocar da direita

para a esquerda. Agora o feixe será desviado no seletor de velocidade? Caso positivo, em qual direção?

5 • Uma lâmpada possui um filamento longo e fino. Quando ela é ligada e um ímã é colocado próximo da lâmpada, o filamento oscila rapidamente para a frente e para trás. Por que o filamento oscila, e qual é a sua frequência da oscilação?

6 • Qual sentido da corrente em uma espira relativamente ao sentido do campo magnético fornece o máximo torque?

7 • Falso ou verdadeiro:

- A força magnética sobre uma partícula carregada móvel é sempre perpendicular à velocidade da partícula.
- O torque sobre um ímã exercido por um campo magnético tende a alinhar o momento magnético do ímã com a direção do campo magnético.
- A corrente em uma espira em um campo magnético uniforme responde a um campo da mesma maneira que um pequeno ímã permanente.
- O período de uma partícula se movendo em um círculo em um campo magnético é proporcional ao raio do círculo.
- A velocidade de migração dos elétrons em um fio pode ser determinada a partir do efeito Hall.

8 • O indicador de polo norte da agulha de uma bússola localizado no equador magnético é a extremidade da agulha que aponta em direção ao norte, e a direção de qualquer campo magnético  $\vec{B}$  é especificada com a direção que o indicador de polo norte da agulha da bússola aponta quando a agulha é alinhada com o campo. Suponha que, em vez disso, a direção do campo magnético  $\vec{B}$  seja especificada como a direção do indicador de polo sul da agulha de uma bússola alinhada com o campo. A regra da mão direita mostrada na Figura 26-2 poderia, nesse caso, fornecer a direção da força magnética sobre uma carga positiva móvel, ou a regra da mão esquerda seria necessária? Explique.

9 • Se o campo magnético é direcionado para o norte e uma partícula positivamente carregada está se movendo para leste, qual é a direção da força magnética sobre a partícula?

10 • Uma partícula positivamente carregada está se movendo para o norte em um campo magnético. A força magnética sobre a partícula está na direção nordeste. Qual é a direção do campo magnético? (a) Para Cima (b) Oeste (c) Sul (d) Para baixo (e) A força não pode estar direcionada para nordeste.

11 • Um núcleo de  $^{7}\text{Li}$  com carga de  $+3e$  e massa de 7 u ( $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ) e um próton com uma carga  $+e$  e massa 1 u estão ambos se movendo em um plano perpendicular a um campo magnético  $\vec{B}$ . Os módulos das quantidades de movimento das duas partículas são iguais. A razão dos raios de curvatura da trajetória do próton,  $R_p$ , em relação àquela do núcleo de  $^{7}\text{Li}$ ,  $R_{\text{Li}}$  é (a)  $R_p/R_{\text{Li}} = 3$ . (b)  $R_p/R_{\text{Li}} = 1/3$ . (c)  $R_p/R_{\text{Li}} = 1/7$ . (d)  $R_p/R_{\text{Li}} = 3/7$ . (e) Nenhuma das respostas anteriores.

12 • Um elétron se movendo com velocidade  $v$  para a direita entra em uma região de campo magnético uniforme direcionado para fora do papel. Quando o elétron entra nessa região, ele será (a) desviado para fora do plano do papel. (b) desviado para dentro do plano do papel. (c) desviado para cima. (d) desviado para baixo. (e) não será desviado de sua direção.

13 • • A teoria da relatividade diz que nenhuma das leis da física pode depender da velocidade absoluta de um objeto, que é na verdade impossível de definir. Em vez disso, o comportamento de objetos físicos pode depender apenas da velocidade relativa entre os objetos. O desenvolvimento de novos conceitos de física pode

partir dessa idéia. Por exemplo, na Figura 26-31 um ímã se move com alta velocidade passa por um elétron que está em repouso em relação a um observador no laboratório. Explique por que a tem certeza de que uma força deve estar agindo sobre ele. Em qual direção a força deverá apontar quando o polo norte do ímã passa diretamente abaixo do elétron? Explique.

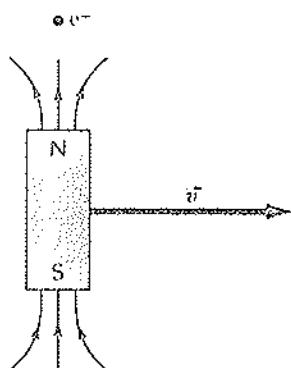


FIGURA 26-31 Problema 13

14 • Como as linhas de campo magnético são similares às linhas de campo elétrico? Como elas são diferentes?

15 • Se uma corrente  $I$  que passa em um fio e um campo magnético  $\vec{B}$  são conhecidos, a força  $\vec{F}$  sobre a corrente é dada univocamente. Mostre que conhecendo  $\vec{F}$  e  $I$  não se consegue conhecer completamente  $\vec{B}$ .

### Estimativas e Aproximações

16 • • Os CRT usados em monitores e televisões normalmente empregam desflexão magnética para direcionar os feixes de elétrons. Um diagrama esquemático é mostrado na Figura 26-32. O feixe de elétrons é inicialmente acelerado através de uma diferença de potencial e depois é acelerado pelo campo magnético que o desvia, como mostrado na figura. Dados os seguintes parâmetros, estime o módulo do campo magnético necessário para a máxima deflexão: tensão de aceleração,  $V = 15 \text{ kV}$ ; distância ao longo da qual o campo magnético sobre o elétron,  $d = 5 \text{ cm}$ ; comprimento do lado diagonal da CRT,  $r = 19 \text{ polegadas}$ .

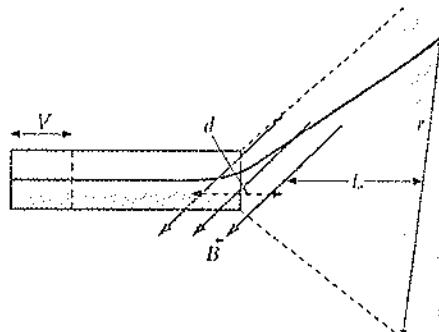


FIGURA 26-32 Problema 16

17 • • (a) Estime a razão carga/massa de um micrometeorito necessário para que ele "orbite" a Terra com uma órbita baixa (1 km acima da superfície da Terra) sob a influência apenas do campo magnético da Terra. Considere o campo magnético da Terra

ndo de  $5 \times 10^{-5}$  T e considere-o perpendicular à velocidade do meteorito. Suponha que a velocidade de meteorito está em torno da mesma velocidade orbital da Terra, de aproximadamente 30 km/s. Se a massa do micrometeorito é  $3 \times 10^{-10}$  kg, qual é a sua carga?

### A Força Exercida por um Campo Magnético

18 • Encontre a força magnética sobre um próton se movendo com uma velocidade 4,46 Mm/s no sentido positivo de  $x$  em um campo magnético de 1,75 T no sentido positivo de  $z$ .

19 • Uma carga  $q = -3,64 \text{ nC}$  se move com uma velocidade de  $1,75 \times 10^6 \text{ m/s} \hat{i}$ . Encontre a força sobre a carga se o campo magnético é (a)  $\vec{B} = 0,38 \text{ T} \hat{j}$ , (b)  $\vec{B} = 0,75 \text{ T} \hat{i} + 0,75 \text{ T} \hat{j}$ , (c)  $\vec{B} = 0,65 \text{ T} \hat{i}$  e (d)  $\vec{B} = 0,75 \text{ T} \hat{i} + 0,75 \text{ T} \hat{k}$ .

20 • Um campo magnético uniforme de módulo 1,48 T está no sentido positivo de  $z$ . Encontre a força exercida pelo campo sobre um próton se a velocidade do próton é (a)  $v = 2,7 \text{ Mm/s} \hat{i}$ , (b)  $\hat{v} = 3 \text{ Mm/s} \hat{j}$ , (c)  $\hat{v} = 6,8 \text{ Mm/s} \hat{k}$  e (d)  $\hat{v} = 4,0 \text{ Mm/s} \hat{i} + 3,0 \text{ Mm/s} \hat{j}$ .

21 • Um segmento de fio reto de 2 m de comprimento faz um ângulo de  $30^\circ$  com um campo magnético uniforme de 0,37 T. Encontre o módulo da força sobre o fio se por ele passa uma corrente de 2 A.

22 • Um segmento de fio reto com  $IL = (2,7 \text{ A})(3 \text{ cm} \hat{i} + 4 \text{ cm} \hat{j})$  está em um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 1,3 \text{ T} \hat{i}$ . Encontre a força sobre o fio.

23 • Qual é a força (módulo e direção) sobre um elétron com velocidade  $v = (2\hat{i} - 3\hat{j} \times 10^6) \text{ m/s}$  em um campo magnético  $\vec{B} = 0,8\hat{i} + 0,6\hat{j} - 0,4\hat{k}$  T?

24 • No segmento de fio mostrado na Figura 26-33 passa uma corrente de 1,8 A desde  $a$  até  $b$ . Existe um campo magnético  $\vec{B} = 1,2 \text{ T} \hat{k}$ . Encontre a força total sobre o fio e mostre que a força total é a mesma que ocorreria sobre o fio se ele fosse um segmento reto de  $a$  até  $b$ .

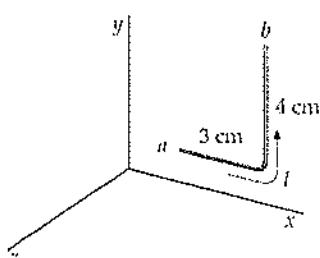


FIGURA 26-33  
Problema 24

25 • Um fio horizontal com comprimento de 25 cm e 50 g, reto horizontal, está ligado a uma fonte de tensão por conectores leves e flexíveis. Um campo magnético de 1,33 T horizontal é perpendicular ao fio. Encontre a corrente necessária para fazer o fio flutuar; isto é, determine a corrente necessária para que a força magnética equilibre o peso do fio.

26 • Um aparelho para medida de campos magnéticos horizontais consiste em um fio rígido de 50 cm, instalado na vertical a partir de um conector condutor, de tal modo que sua extremidade livre faz contato com mercúrio contido em um recipiente. O mercúrio fornece contato elétrico sem restringir o movimento do fio. O fio possui massa de 5 g e conduz a corrente no sentido vertical para baixo. (a) Qual é o deslocamento angular de equilíbrio a partir da vertical se o campo magnético horizontal é de 0,04 T e a corrente é

de 0,20 A? (b) Se a corrente é de 20 A e um deslocamento a partir da vertical de 0,5 mm pode ser detectado para a extremidade livre, qual é a sensibilidade a campos magnéticos horizontais desse aparelho?

27 • • Um fio por onde passa corrente é curvado em uma espira semicircular de raio  $R$ , que repousa no plano  $xy$ . Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{k}$  perpendicular ao plano da espira (Figura 26-34). Verifique que a força atuando sobre a espira é nula.

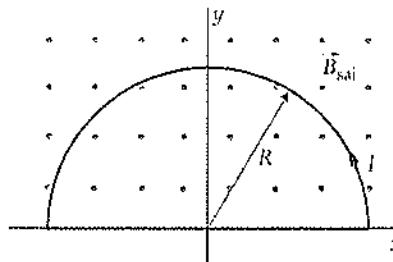


FIGURA 26-34 Problema 27

28 • • Em um fio de 10 cm de comprimento passa uma corrente de 4,0 A no sentido positivo de  $z$ . A força sobre esse fio, devida a um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , é  $\vec{F} = (-0,2\hat{i} + 0,2\hat{j}) \text{ N}$ . Se esse fio é girado de tal modo que a corrente passe a estar no sentido  $x$  positivo, a força sobre o fio é  $\vec{F} = 0,2\hat{k} \text{ N}$ . Encontre o campo magnético  $\vec{B}$ .

29 • • Em um fio de 10 cm de comprimento passa uma corrente de 2,0 A no sentido positivo de  $x$ . A força sobre esse fio, devida à presença de um campo magnético  $\vec{B}$ , é  $\vec{F} = (3,0\hat{j} + 2,0\hat{k}) \text{ N}$ . Se esse fio é agora girado de tal modo que a corrente passe a estar no sentido  $y$  positivo, a força sobre o fio é  $\vec{F} = (-3,0\hat{i} - 2,0\hat{j}) \text{ N}$ . Determine o campo magnético  $\vec{B}$ .

30 • • Por um fio curvado de alguma forma arbitrária passa uma corrente  $I$  em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Mostre explicitamente que a força total sobre a parte do fio de um ponto  $a$  até algum ponto  $b$  é  $\vec{F} = IL \times \vec{B}$ , onde  $L$  é o vetor desde o ponto  $a$  até o ponto  $b$ .

### Movimento de uma Carga Pontual em um Campo Magnético

31 • Um próton se move em uma órbita circular com raio de 65 cm perpendicular a um campo magnético uniforme de módulo 0,75 T. (a) Qual é o período desse movimento? (b) Encontre a velocidade do próton. (c) Encontre a energia cinética do próton.

32 • Um elétron com energia cinética de 45 keV se move em uma órbita circular perpendicular a um campo magnético de 0,325 T. (a) Encontre o raio da órbita. (b) Encontre a frequência e o período do movimento.

33 • Um elétron parte do Sol, e com uma velocidade de  $1 \times 10^7 \text{ m/s}$  entra no campo magnético da Terra acima do equador, onde sua intensidade é de  $4 \times 10^{-5} \text{ T}$ . O elétron descreve uma órbita quase circular, exceto por um pequeno desvio ao longo da direção do campo magnético da Terra, que irá levar o elétron direto para o polo norte. (a) Qual é o raio do movimento circular? (b) Qual é o raio do movimento circular próximo do polo norte, onde o campo magnético é de  $2 \times 10^{-5} \text{ T}$ ?

34 • • Prótons e déuterons (cada um com carga  $+e$ ) e partículas alfa (com carga  $+2e$ ) com a mesma energia cinética entram em um

campo magnético uniforme  $\vec{B}$  que é perpendicular a suas velocidades. Sejam  $R_p$ ,  $R_d$  e  $R_\alpha$  os raios de suas órbitas circulares. Encontre as razões  $R_d/R_p$  e  $R_\alpha/R_p$ . Admita que  $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$ .

35 •• Um próton e uma partícula alfa se movem em um campo magnético uniforme em círculos de mesmo raio. Compare (a) suas velocidades, (b) suas energias cinéticas e (c) suas quantidades de movimento angular. (Veja o Problema 34.)

36 •• Uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  tem quantidade de movimento  $p = mv$  e energia cinética  $K = p^2/2m$ . Se a partícula se move em uma órbita circular de raio  $R$  perpendicular a um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , mostre que (a)  $p = BqR$  e (b)  $K = \frac{1}{2}B^2q^2R^2/m$ .

37 •• Um feixe de partículas com velocidade  $\vec{v}$  entra em uma região com um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  que faz um pequeno ângulo  $\theta$  com  $\vec{v}$ . Mostre que após a partícula se mover uma distância  $2\pi(m/qB)v \cos \theta$ , medida ao longo da direção de  $\vec{B}$ , a velocidade da partícula está na mesma direção em que estava quando ela entrou no campo magnético.

38 •• Um próton com velocidade  $v = 10^7$  m/s entra em uma região de um campo magnético uniforme  $B = 0,8$  T, que está para dentro do papel, como mostrado na Figura 26-35. O ângulo  $\theta = 60^\circ$ . Encontre o ângulo  $\phi$  e a distância  $d$ .

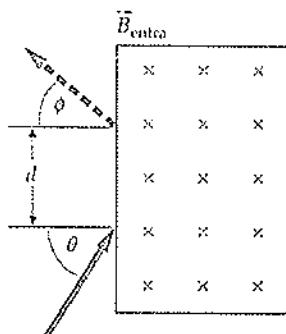


FIGURA 26-35 Problemas 38 e 39

39 •• Suponha que na Figura 26-35  $B = 0,6$  T, a distância  $d = 0,4$  m e  $\theta = 24^\circ$ . Encontre a velocidade  $v$  e o ângulo  $\phi$  se as partículas são (a) prótons e (b) déuterons.

40 •• O campo magnético galático em alguma região do espaço interestelar possui módulo de  $10^{-9}$  T. Uma partícula de poeira interestelar possui massa de  $10 \mu\text{g}$  e uma carga total de  $0,3 \text{nC}$ . Quantos anos ela levará para completar uma órbita circular no campo magnético?

### O Seletor de Velocidade

41 • Um seletor de velocidade tem um campo magnético de módulo  $0,28$  T perpendicular a um campo elétrico de módulo  $0,46$  MV/m. (a) Qual deve ser a velocidade de uma partícula para que ela passe sem ser desfletida? Quanta energia devem ter (b) os prótons e (c) os elétrons para passar sem serem desfletidos?

42 • Um feixe de prótons se move ao longo do sentido positivo do eixo  $x$  com uma velocidade de  $12,4$  km/s através de uma região com campos cruzados balanceados para deflexão nula. (a) Se existe um campo magnético de módulo  $0,85$  T no sentido positivo do eixo  $y$ , encontre o módulo e a direção do campo elétrico. (b) Os elétrons com mesma velocidade seriam desfletidos por esses campos? Caso positivo, em qual direção?

### Medidas de Thomson de $q/m$ para os Elétrons e o Espectrômetro de Massa

43 •• As placas de um dispositivo de Thomson para medida de  $q/m$  têm  $6,0$  cm de comprimento e estão separadas por  $1,2$  cm. A extremidade das placas está a  $30,0$  cm da tela do tubo. A energia cinética dos elétrons é  $2,8$  keV. (a) Se um potencial de  $25$  V é aplicado entre as placas defletoras, de quanto o feixe será desfletido? (b) Encontre o módulo do campo magnético cruzado que irá permitir que o feixe passe entre as placas sem ser desfletido.

44 •• O cloro possui dois isótopos estáveis,  $^{35}\text{Cl}$  e  $^{37}\text{Cl}$ , cuja abundância natural é de cerca de  $76\%$  e  $24\%$ , respectivamente. O gás de cloro monoionizado pode ser separado nesses componentes isótopos usando um espectrômetro de massa. O campo magnético em um espectrômetro é  $1,2$  T. Qual é o valor mínimo do potencial através do qual esses íons devem ser acelerados de tal modo que a separação entre eles seja de  $1,4$  cm?

45 •• Um gás monoionizado de  $^{24}\text{Mg}$  (massa  $3,983 \times 10^{-25}$  kg) é acelerado por uma diferença de potencial de  $2,5$  kV e desfletido em um campo magnético de  $557$  G em um espectrômetro de massa. (a) Encontre o raio de curvatura da órbita para o íon. (b) Qual é a diferença do raio para íons de  $^{26}\text{Mg}$  e para íons de  $^{24}\text{Mg}$ ? (Admita que a razão de suas massas seja 26:24.)

46 •• Um feixe de íons de  $^{6}\text{Li}$  e  $^{7}\text{Li}$  passa através de um seletor de velocidade e entra em um espectrômetro magnético. Se o diâmetro da órbita dos íons de  $^{6}\text{Li}$  é  $15$  cm, qual é o diâmetro da órbita para os íons de  $^{7}\text{Li}$ ?

### O Ciclotron

47 •• No Exemplo 26-6, determine o tempo necessário para um íon de  $^{58}\text{Ni}$  e um íon de  $^{60}\text{Ni}$  completarem a trajetória semicircular.

48 •• Antes de entrarem em um espectrômetro de massa, íons passam através de um seletor de velocidade que consiste em placas paralelas separadas de  $2,0$  mm e tendo uma diferença de potencial de  $160$  V. O campo magnético entre as placas é de  $0,42$  T. O campo no espectrômetro de massa é  $1,2$  T. Encontre (a) a velocidade dos íons entrando no espectrômetro de massa e (b) a diferença entre os diâmetros das órbitas de  $^{238}\text{U}$  e  $^{235}\text{U}$  monoionizados. (A massa de um íon de  $^{235}\text{U}$  é  $3,903 \times 10^{-25}$  kg.)

49 •• Um ciclotron para acelerar prótons tem um campo magnético de  $1,4$  T e um raio de  $0,7$  m. (a) Qual é a freqüência do ciclotron? (b) Encontre a máxima energia dos prótons quando eles emergem. (c) Como suas respostas serão alteradas se déuterons, que possuem a mesma carga mas o dobro de massa, fossem usados em vez de prótons?

50 •• Um certo ciclotron com um campo magnético de  $18$  T é projetado para acelerar prótons até  $25$  MeV. (a) Qual é a freqüência do ciclotron? (b) Qual deve ser o raio mínimo do ímã para alcançar uma energia na saída de  $25$  MeV? (c) Se o potencial alternado aplicado aos D tem um valor máximo de  $50$  kV, quantas rotações os prótons devem fazer antes de emergir com uma energia de  $25$  keV?

51 •• Mostre que para um certo ciclotron as freqüências de ciclotron dos déuterons e das partículas alfa são as mesmas e têm valor igual à metade daquela dos prótons no mesmo campo magnético. (Veja o Problema 34.)

52 •• Mostre que o raio da órbita de uma partícula carregada em um ciclotron é proporcional à raiz quadrada do número de órbitas completadas.

### Torques sobre Espiras com Corrente e Ímãs

53 • Um pequeno enrolamento circular com 20 voltas de fio repousa em um campo magnético uniforme de 0,5 T, de tal modo que a normal ao plano do enrolamento faz um ângulo de 60° com a direção de  $\vec{B}$ . O raio do enrolamento é de 4 cm, e por ele passa uma corrente de 3 A. (a) Qual é o módulo do momento magnético do enrolamento? (b) Qual é o módulo do torque exercido sobre o enrolamento?

54 • Qual é o torque máximo sobre um enrolamento circular de 400 voltas e raio de 0,75 cm, por onde passa uma corrente de 1,6 mA e encontra-se um campo magnético uniforme de 0,25 T?

55 • Um fio por onde passa uma corrente é curvado na forma de um quadrado de lado  $L = 6$  cm e é colocado no plano  $xy$ . Por ele passa uma corrente  $I = 2,5$  A. Qual é o módulo do torque sobre o fio se existe um campo magnético uniforme de 0,3 T (a) na direção  $z$  e (b) na direção  $x$ ?

56 • Repita o Problema 55 se o fio é curvado na forma de um triângulo equilátero com lado de 8 cm.

57 • Uma corrente  $I$  passa por uma espira circular rígida de raio  $R$  e massa  $m$  em repouso no plano  $xy$  sobre uma mesa plana e rugosa. Existe um campo magnético horizontal de módulo  $B$ . Qual é o valor mínimo de  $B$  para que uma das extremidades da espira se eleve da mesa?

58 • Em um enrolamento retangular com 50 voltas e lados com 6 cm e 8 cm passa uma corrente  $I$  de 1,75 A. Ele está orientado e é articulado em torno do eixo  $z$ , como mostrado na Figura 26-36. (a) Se o fio no plano  $xy$  faz um ângulo  $\theta = 37^\circ$  com o eixo  $y$  como mostrado, que ângulo a normal unitária  $\hat{n}$  faz com o eixo  $x$ ? (b) Escreva uma expressão para  $\hat{n}$  em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . (c) Qual é o momento magnético sobre o enrolamento? (d) Encontre o torque sobre o enrolamento quando existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 1,5$  T  $\hat{j}$ . (e) Encontre a energia potencial do enrolamento nesse campo.

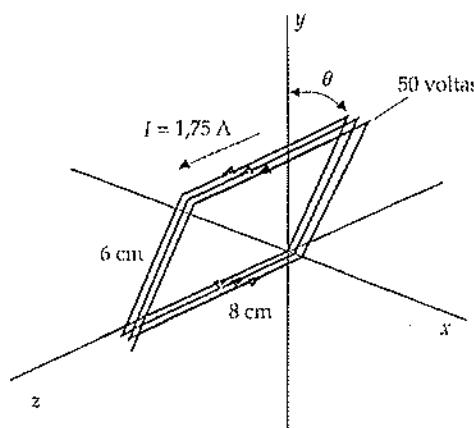


FIGURA 26-36 Problemas 58 e 59

59 • O enrolamento no Problema 58 é articulado em torno do eixo  $z$  e é mantido em diversas posições em um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 2,0$  T  $\hat{j}$ . Faça um esboço da posição do enrolamento e encontre o torque exercido quando a normal unitária é (a)  $\hat{n} = \hat{i}$ , (b)  $\hat{n} = \hat{j}$ , (c)  $\hat{n} = -\hat{j}$  e (d)  $\hat{n} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ .

### Momentos Magnéticos

60 • • Um pequeno ímã com comprimento de 6,8 cm é posicionado com um ângulo de 60° em relação à direção de um campo magnético uniforme de módulo 0,04 T. O torque observado possui um módulo de 0,10 N · m. Encontre o momento magnético do ímã.

61 • • Uma espira de um fio consiste em dois semicírculos conectados por segmentos retos (Figura 26-37). Os raios interno e externo são de 0,3 e 0,5 m, respectivamente. Uma corrente  $I$  de 1,5 A passa nessa espira com sentido horário no semicírculo externo. Qual é o momento magnético dessa espira com corrente?

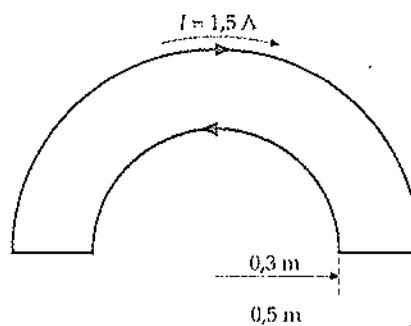


FIGURA 26-37 Problema 61

62 • • Um fio com comprimento  $L$  é enrolado na forma de uma espira circular com  $N$  voltas. Mostre que quando uma corrente  $I$  passa por esse enrolamento seu momento magnético tem módulo  $IL^2/4\pi N$ .

63 • • Uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  se move em um círculo de raio  $R$  e com uma velocidade angular  $\omega$ . (a) Mostre que a corrente média é  $I = q\omega/(2\pi)$  e que o momento magnético apresenta módulo  $\mu = \frac{1}{2}q\omega R^2$ . (b) Mostre que a quantidade de movimento angular dessa partícula tem módulo  $L = mr^2\omega$  e que os vetores momento magnético e quantidade de movimento angular estão relacionados por  $\vec{\mu} = (\frac{1}{2}q/m)\vec{L}$ .

64 • • Um cilindro vazado tem comprimento  $L$  e raios interno  $R_i$  e externo  $R_o$ , respectivamente (Figura 26-38). O cilindro tem carga uniforme de densidade  $\rho$ . Desenvolva uma expressão para o momento magnético como uma função de  $\omega$ , a velocidade angular de rotação do cilindro em torno de seu eixo.



FIGURA 26-38  
Problema 64

65 • • • Uma haste não-condutora de massa  $m$  e comprimento  $L$  tem uma carga uniforme por unidade de comprimento  $\lambda$  e gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo que passa por uma das suas extremidades e é perpendicular à haste. (a) Considere um pequeno segmento da haste de comprimento  $dx$  e carga  $dq = \lambda dx$  a uma distância  $x$  a partir da articulação (Figura 26-39). Mostre que o momento magnético desse segmento é  $\frac{1}{2}\lambda\omega x^2 dx$ . (b) Integre o resultado para mostrar que o momento magnético da haste é  $\mu = \lambda\omega L^3/6$ . (c) Mostre que o momento magnético  $\vec{\mu}$  e a quantidade de movi-

mento angular  $\vec{L}$  são relacionadas por  $\vec{\mu} = (\frac{1}{2}Q/m)\vec{L}$ , em que  $Q$  é a carga total da haste.

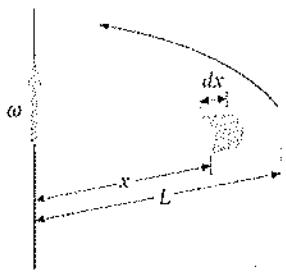


FIGURA 26-39  
Problema 65

66 ••• Um disco não-condutor e não-uniforme de massa  $m$ , raio  $R$  e carga total  $Q$  tem densidade de carga superficial  $\sigma = \sigma_0 R / L$  e massa por unidade de área  $\sigma_m = (m/Q)\sigma$ . O disco gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de seu eixo. (a) Mostre que o momento magnético do disco tem módulo  $\mu = \pi\omega\sigma_0 R^4 / 5 = 3Q\omega R^2 / 10$ . (b) Mostre que o momento magnético  $\vec{\mu}$  e a quantidade de movimento angular  $\vec{L}$  estão relacionados por  $\vec{\mu} = (\frac{1}{2}Q/m)\vec{L}$ .

67 ••• Uma casca esférica de raio  $R$  tem densidade de carga superficial  $\sigma$ . A esfera gira em torno do seu diâmetro com velocidade angular  $\omega$ . Encontre o momento magnético da esfera girante.

68 ••• Uma esfera sólida de raio  $R$  tem uma densidade de carga volumétrica  $\sigma$  uniforme. A esfera gira em torno do seu diâmetro com velocidade angular  $\omega$ . Encontre o momento magnético dessa esfera girante.

69 ••• Um disco uniforme de massa  $m$ , raio  $R$  e carga superficial  $\sigma$  gira em torno do seu centro com velocidade angular  $\omega$ , como mostrado na Figura 26-40. Um campo magnético uniforme de módulo  $\vec{B}$  atravessa o disco, fazendo um ângulo  $\theta$  com relação ao eixo de rotação do disco. Calcule (a) o torque líquido atuando sobre o disco e (b) a freqüência de precessão do disco no campo magnético. (Veja a Seção 10-2, do Capítulo 10 para uma discussão sobre precessão.)

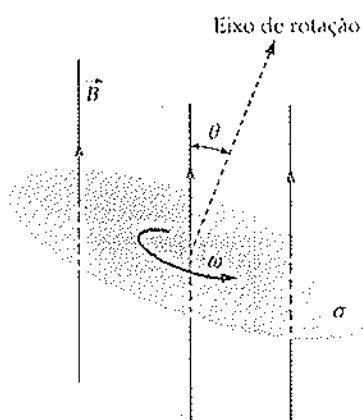


FIGURA 26-40  
Problema 69

### O Efeito Hall

70 • Por uma fita de metal de 2 cm de largura e 0,1 cm de espessura passa uma corrente de 20 A em um campo magnético uniforme de 2 T, como mostrado na Figura 26-41. A tensão de Hall é medida como  $4,27 \mu\text{V}$ . (a) Calcule a velocidade de migração dos elétrons na fita. (b) Encontre o número de densidade dos portadores de carga na fita. (c) Qual o ponto de maior potencial,  $a$  ou  $b$ ?

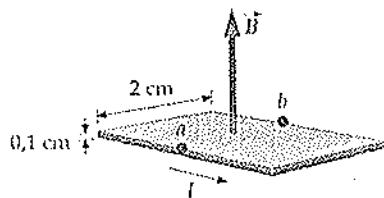


FIGURA 26-41 Problemas 70 e 71

71 •• O número de densidade dos elétrons livres no cobre é  $8,47 \times 10^{22}$  elétrons por centímetro cúbico. Se a fita metálica é de cobre e a corrente é de 10 A, encontre (a) a velocidade de migração  $v_0$  e (b) a tensão de Hall. (Admita que o campo magnético é de 2,0 T.)

72 •• Uma fita de cobre ( $n = 8,47 \times 10^{22}$  elétrons por centímetro cúbico) com largura de 2 cm e espessura de 0,1 cm é usada para medir os módulos de campos magnéticos desconhecidos que são perpendiculares à fita. Encontre o módulo de  $B$  quando  $I = 20$  A e a tensão de Hall é (a)  $2,00 \mu\text{V}$ , (b)  $5,25 \mu\text{V}$  e (c)  $8,00 \mu\text{V}$ .

73 •• Devido ao fato de o sangue conter íons carregados, seu escoamento desenvolve uma tensão de Hall através do diâmetro de uma artéria. Uma grande artéria com diâmetro de 0,85 cm apresenta uma velocidade de fluxo de 0,6 m/s. Se uma seção dessa artéria está em um campo magnético de 0,2 T, qual é a máxima diferença de potencial possível através do seu diâmetro?

74 •• O coeficiente de Hall  $R$  é definido como  $R = E_y/(J_z B_z)$ , onde  $J_z$  é a corrente por unidade de área na direção  $x$  do corpo de teste,  $B_z$  é o campo magnético na direção  $z$  e  $E_y$  é o campo de Hall resultante na direção  $y$ . Mostre que o coeficiente de Hall é  $1/(q\mu)$ , no qual  $q$  é a carga dos portadores de carga,  $-1,6 \times 10^{-19}$  C se eles são elétrons. (Os coeficientes de Hall para metais monovalentes, tais como cobre, prata e sódio são, portanto, negativos.)

75 •• O alumínio tem uma massa específica de  $2,7 \times 10^4$  kg/m<sup>3</sup> e uma massa molar de 27 g/mol. O coeficiente de Hall do alumínio é  $R = -0,3 \times 10^{-10}$  m<sup>3</sup>/C. (Veja o Problema 74 para a definição de  $R$ .) Encontre o número de elétrons condutores por átomo de alumínio.

### Problemas Gerais

76 • Por um fio longo paralelo ao eixo  $x$  passa uma corrente de 6,5 A no sentido positivo do eixo  $x$ . Existe um campo uniforme  $\vec{B} = 1,35 \text{ T } \hat{j}$ . Encontre a força por unidade de área sobre o fio.

77 • Uma partícula alfa (carga +2e) se desloca em uma trajetória circular com raio de 0,5 m em um campo magnético de 1 T. Encontre (a) o período, (b) a velocidade e (c) a energia cinética (em electron-volts) da partícula alfa. Use  $m = 6,65 \times 10^{-27}$  kg para a massa da partícula alfa.

78 •• A intensidade de pólo magnético  $q_{\text{m}}$  de uma barra imantada é definida por  $q_{\text{m}} = |\vec{\mu}|/L$ , em que  $L$  é o comprimento da barra. Mostre que o torque exercido sobre a barra imantada em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  é o mesmo se uma força  $+q_{\text{m}}\vec{B}$  for exercida sobre o pólo norte e uma força  $-q_{\text{m}}\vec{B}$  for exercida sobre o pólo sul.

79 •• Uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  ao longo do eixo  $x$ . A velocidade inicial da partícula é  $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ , e então a partícula passa a se mover em uma helicóide. (a) Mostre que o raio da helicóide é  $r = mv_{0y}/qB$ . (b) Mostre que a partícula leva um tempo  $t = 2\pi r/qB$  para realizar uma órbita em torno da helicóide.

80 ••• Uma barra de metal de massa  $m$  se desloca sobre um par de guias condutores longos e horizontais separados por uma distância  $L$  e conectados a um dispositivo que fornece uma corrente  $I$  constante para o circuito, como mostrado na Figura 26-42. Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , como indicado. (a) Se não há atrito e a barra inicia do repouso em  $t = 0$ , mostre que no instante  $t$  a barra tem uma velocidade  $v = (BIL/m)t$ . (b) Em qual sentido a barra vai se mover? (c) Se o coeficiente de atrito estático é  $\mu_s$ , encontre o mínimo campo  $B$  necessário para iniciar o movimento da barra.

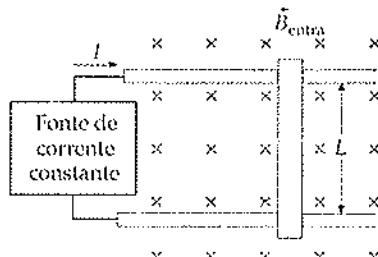


FIGURA 26-42 Problemas 80 e 81

81 ••• Suponha que os guias na Figura 26-42 não têm atrito, mas estão inclinados para cima e fazem um ângulo  $\theta$  com a horizontal. (a) Qual campo magnético vertical  $\vec{B}$  é necessário para evitar que a barra deslize para baixo? (b) Qual é a aceleração da barra se  $B$  for o dobro do valor encontrado na Parte (a)?

82 ••• Uma barra de ímã fino e longa, que apresenta um momento magnético  $\vec{\mu}$  paralelo ao seu eixo mais longo, é suspensa no seu centro como uma agulha de bússola sem atrito. Quando colocada em um campo magnético horizontal  $\vec{B}$ , a agulha se alinha com o campo. Se a agulha é deslocada de um pequeno ângulo  $\theta$ , ela irá oscilar em torno da sua posição de equilíbrio com freqüência  $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu B/I}$ , em que  $I$  é o momento de inércia em torno do ponto de suspensão.

83 ••• Um fio condutor é paralelo ao eixo  $y$ . Ele se move no sentido positivo do eixo  $x$  com uma velocidade de 20 m/s em um campo magnético  $\vec{B} = 0,5$  T  $\hat{k}$ . (a) Quais são o módulo e a direção da força magnética sobre um elétron no condutor? (b) Por causa dessa força magnética os elétrons se movem para uma das extremidades do fio, deixando a outra extremidade positivamente carregada até que o campo elétrico, devido a essa separação de carga, exerça uma força sobre os elétrons que equilibre a força magnética. Encontre o módulo e a direção desse campo elétrico em regime permanente. (c) Suponha que o fio móvel tem 2 m de comprimento. Qual é a diferença de potencial entre as duas extremidades por causa desse campo elétrico?

84 ••• A estrutura retangular mostrada na Figura 26-43 é livre para girar em torno do eixo A-A sobre o eixo horizontal. A estrutura tem comprimento de 10 cm e largura de 6 cm, e as hastas que sustentam a estrutura têm uma massa por unidade de comprimento de 20 g/cm. Um campo magnético uniforme  $B = 0,2$  T está direcionado, como mostrado. Uma corrente pode ser enviada através da estrutura por meio dos fios conectados na sua parte superior. (a) Se não passa corrente através da estrutura, que é o período desse pêndulo físico para pequenas oscilações? (b) Se uma corrente de 8 A passa através da estrutura no sentido indicado pela seta, qual é o período desse pêndulo físico? (c) Suponha que o sentido da corrente é oposto ao mostrado. A estrutura é deslocada a partir da horizontal

de um ângulo  $\theta$  qualquer. Qual deve ser o módulo da corrente, de modo que o pêndulo permaneça em equilíbrio?

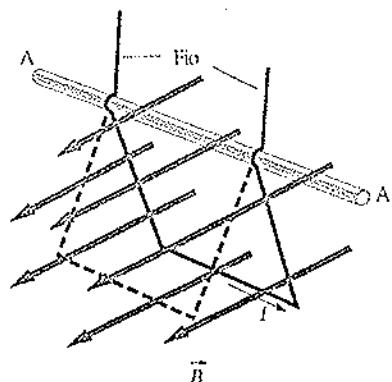


FIGURA 26-43 Problema 84

85 ••• Um fio rígido, reto e horizontal com 25 cm de comprimento e 20 g é suportado por contatos elétricos nas suas extremidades, entretanto é livre para se mover verticalmente para cima. O fio está em um campo magnético uniforme horizontal de módulo 0,4 T perpendicular ao fio. Uma chave conectando o fio a uma bateria é fechada e o fio levita para cima, atingindo uma altura máxima  $h$ . A bateria libera uma carga total de 2 C durante o curto intervalo de tempo em que está em contato com o fio. Encontre a altura  $h$ .

86 ••• Por uma espira circular de um fio com massa  $m$  passa uma corrente  $I$  em um campo magnético uniforme. Ela está inicialmente em equilíbrio, com seu vetor momento magnético alinhado com o campo magnético. É dado um pequeno deslocamento na espira ao longo de um diâmetro  $e$ , então, ela é liberada. Qual é o período do movimento? (Admita que o único torque exercido sobre a espira se deve ao campo magnético.)

87 ••• Uma pequena barra imantada tem um momento magnético  $\vec{\mu}$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  e se encontra em um campo magnético não-uniforme dado por  $\vec{B} = B_x(x)\hat{i} + B_y(y)\hat{j}$ . Use  $F_x = -dU/dx$  e  $F_y = -dU/dy$  para mostrar que existe uma força líquida sobre o ímã que é dada por

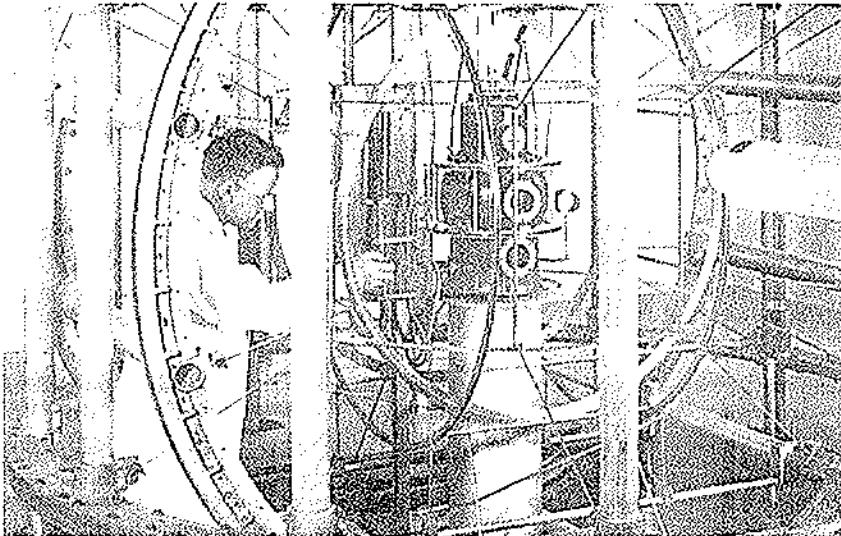
$$\vec{F} = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{i} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{j}$$

88 ••• A teoria da relatividade diz que a massa de uma partícula depende de sua velocidade, de acordo com a expressão

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)m_0$$

onde  $m_0$  é a massa da partícula em repouso e  $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . (a) Levando em consideração a teoria da relatividade, quais são o raio e o período da órbita da partícula se ela tem uma velocidade  $v$  e está se movendo em um campo magnético com módulo  $B$  que é perpendicular à direção de sua velocidade? Presuma que a força sobre a partícula é dada por  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ . A partícula tem uma massa em repouso  $m_0$  e carga  $q$ . (b) Usando um programa de computador, faça gráficos do raio e do período da órbita de um elétron em um campo magnético de 10 T versus  $\gamma(v)$  para velocidades entre  $v = 0,1c$  e  $v = 0,999c$ . Use uma escala logarítmica para representar  $\gamma(v)$ .

## Fontes do Campo Magnético



AS BOBINAS DO LABORATÓRIO DE MAGNETISMO DE KETTERING, NA UNIVERSIDADE DE OAKLAND, SÃO CHAMADAS DE BOBINAS DE HELMOLTZ. ELS SÃO USADAS PARA CANCELAR O CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA E FORNECER UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EM UMA PEQUENA REGIÃO DO ESPAÇO PARA ESTUDO DAS PROPRIEDADES MAGNÉTICAS DOS MATERIAIS.



**QUESTION** Você tem alguma idéia de como é o campo magnético de uma espira por onde passa corrente? Existe uma ilustração do campo magnético em uma espira na Seção 27-2.

- 27-1 O Campo Magnético de Cargas Móveis Pontuais
- 27-2 O Campo Magnético de Correntes: A Lei de Biot-Savart
- 27-3 Lei de Gauss para o Magnetismo
- 27-4 Lei de Ampère
- 27-5 Magnetismo nos Materiais

**A**s primeiras fontes conhecidas de magnetismo foram os ímãs permanentes. Um mês após Oersted ter anunciado sua descoberta de que uma agulha de bússola era defletida por uma corrente elétrica, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart anunciaram os resultados de suas medidas de torque sobre um ímã próximo a um fio longo transportando corrente e suas análises a respeito desses resultados em termos do campo magnético produzido por cada elemento de corrente. André-Marie Ampère estendeu esses experimentos e mostrou que os elementos da corrente também sofrem a ação de uma força na presença de um campo magnético, e que dois elementos de corrente exercem forças um sobre o outro.

» Neste capítulo, inicia-se considerando o campo magnético produzido por uma única carga móvel e por cargas móveis em um elemento de corrente. Calculam-se então os campos magnéticos produzidos por algumas configurações comuns, tais como um segmento de fio reto; um fio longo reto; uma espira com corrente; e um solenóide. Em seguida discute-se a lei de Ampère, que relaciona a integral de linha de um campo magnético em torno de uma espira fechada à corrente total que passa através da espira. Finalmente, consideram-se as propriedades magnéticas dos materiais.

## 27-1 O Campo Magnético de Cargas Móveis Pontuais

Quando uma carga pontual  $q$  se move com velocidade  $\vec{v}$ , a carga pontual móvel produz um campo magnético  $\vec{B}$  no espaço, dado por<sup>1</sup>

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad 27-1$$

CAMPO MAGNÉTICO DE UMA CARGA MÓVEL PONTUAL

onde  $\hat{r}$  é um vetor unitário (veja a Figura 27-1) que aponta para o ponto do campo  $P$  desde a carga móvel  $q$  com velocidade  $\vec{v}$ , e  $\mu_0$  é uma constante de proporcionalidade chamada de permeabilidade do espaço livre,<sup>2</sup> que possui um valor exato

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad 27-2$$

As unidades de  $\mu_0$  são tais que  $B$  é em teslas quando  $q$  está em coulombs,  $v$  está em metros por segundo e  $r$  em metros. A unidade  $N/A^2$  vem do fato de que  $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ . A constante  $1/(4\pi)$  é arbitrariamente incluída na Equação 27-1, de tal modo que o fator  $4\pi$  não apareça na lei de Ampère (Equação 27-15), que será estudada na Seção 27-4.

### EXEMPLO 27-1

Uma partícula pontual com carga  $q = 4,5 \text{ nC}$  está se movendo com velocidade  $\vec{v} = 3 \times 10^3 \text{ m/s} \hat{i}$  paralelamente ao eixo  $x$  ao longo da linha  $y = 3 \text{ m}$ . Encontre o campo magnético na origem produzido por essa carga quando ela está no ponto  $x = -4 \text{ m}$ ,  $y = 3 \text{ m}$ , como mostrado na Figura 27-2.

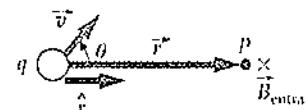


FIGURA 27-1

Uma carga pontual positiva  $q$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  produz um campo magnético  $\vec{B}$  em um ponto do campo  $P$  que está na direção  $\vec{v} \times \hat{r}$ , onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário apontando da carga para o ponto no campo. O campo varia inversamente com o quadrado da distância da carga até o ponto no campo e é proporcional ao seno do ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\hat{r}$ . (A cruz no ponto do campo indica que a direção do campo é para dentro da página.)

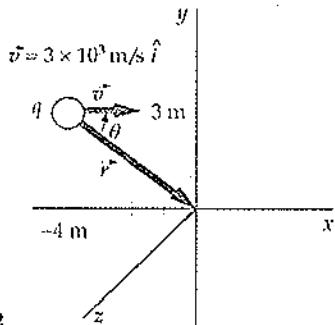


FIGURA 27-2

1. O campo magnético é dado pela Equação 27-1:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2}, \text{ com } \vec{v} = v \hat{i}$$

2. Encontre  $\vec{r}$  e  $r$  a partir da Figura 27-2 e escreva  $\hat{r}$  em termos de  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ :

$$\vec{r} = 4 \text{ m} \hat{i} + 3 \text{ m} \hat{j}$$

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{4 \text{ m} \hat{i} + 3 \text{ m} \hat{j}}{5 \text{ m}} = 0,8 \hat{i} + 0,6 \hat{j}$$

3. Substitua esses resultados na Equação 27-1 para obter:

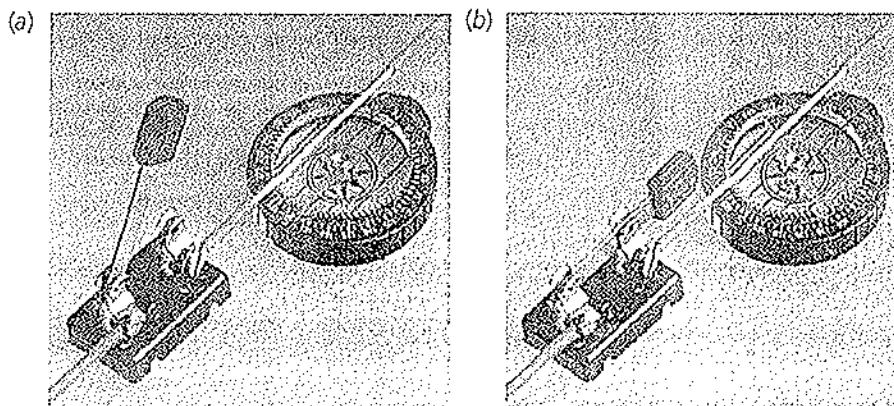
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q (v \hat{i}) \times (0,8 \hat{i} + 0,6 \hat{j})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q (-0,6 v \hat{k})}{4\pi r^2} \\ &= -(10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(4,5 \times 10^{-9} \text{ C})(0,6)(3 \times 10^3 \text{ m/s})}{(5 \text{ m})^2} \hat{k} \\ &= \boxed{-3,24 \times 10^{-16} \text{ T} \hat{k}} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Essa expressão é usada para velocidades muito menores que a velocidade da luz.

<sup>2</sup>Algum cuidado deve ser tomado para não confundir a constante  $\mu_0$  com o módulo do vetor momento magnético  $\vec{\mu}$ .

**NOTAS** É possível também obter  $\vec{B}$  sem encontrar uma expressão explícita para o vetor unitário  $\hat{r}$ . A partir da Figura 27-2 nota-se que  $\vec{v} \times \vec{r}$  está na direção  $z$  negativa. Além disso, o módulo de  $\vec{v} \times \vec{r}$  é  $v \sin \theta$ , onde  $\sin \theta = (3 \text{ m})/(5 \text{ m}) = 0,6$ . Combinando esses resultados, tem-se  $\vec{v} \times \vec{r} = v \sin \theta (-\hat{k}) = -v(0,6)\hat{k}$ , de acordo com o resultado encontrado na linha 1 do passo 3. Finalmente, esse exemplo mostra que o campo magnético devido a uma carga móvel é muito pequeno. Para comparação, o campo magnético da Terra próximo à sua superfície tem um módulo de aproximadamente  $10^{-4} \text{ T}$ .

**EXERCÍCIO** No mesmo instante, encontre o campo magnético sobre o eixo  $y$  em  $y = 3 \text{ m}$  e em  $y = 6 \text{ m}$ . (Resposta  $B = 0$ ,  $B = 3,24 \times 10^{-14} \text{ Tk}$ )



Experimento de Oersted. (a) Sem corrente no fio, a agulha da bússola aponta para norte. (b) Quando passa corrente no fio, a agulha da bússola é desviada na direção do campo magnético resultante. A corrente no fio é direcionada para cima, da esquerda para a direita. O isolamento foi retirado do fio para aumentar o contraste da fotografia.

## 27-2 O Campo Magnético de Correntes: A Lei de Biot-Savart

No capítulo anterior foi estendida a discussão sobre as forças sobre cargas móveis para forças sobre elementos de corrente através da substituição de  $q\vec{v}$  pelo elemento de corrente  $I d\vec{l}$ . Será feito o mesmo para o campo magnético produzido por um elemento de corrente. O campo magnético  $d\vec{B}$  produzido por um elemento de corrente  $I d\vec{l}$  é dado pela Equação 27-1, com  $q\vec{v}$  substituído por  $I d\vec{l}$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad 27-3$$

LEI DE BIOT-SAVART

A Equação 27-3, conhecida como lei de Biot-Savart, foi também deduzida por Ampère. A lei de Biot-Savart e a Equação 27-1 são análogas à lei de Coulomb para o campo elétrico de uma carga pontual. A fonte de campo magnético é uma carga móvel  $q\vec{v}$  ou um elemento de corrente  $I d\vec{l}$ , assim como a carga  $q$  é a fonte de campo eletrostático. O campo magnético diminui com o quadrado da distância à carga móvel ou ao elemento de corrente, assim como o campo elétrico diminui com o quadrado da distância à carga pontual. Entretanto, os aspectos direcionais dos campos elétrico e magnético são bastante diferentes. Enquanto o campo elétrico aponta da direção radial de  $\hat{r}$  desde a carga pontual até o ponto do campo (para uma carga positiva), o campo magnético é perpendicular tanto a  $\hat{r}$  quanto a  $\vec{v}$ , no caso de uma carga pontual, ou a  $d\vec{l}$  no caso de um elemento de corrente. Em um ponto ao longo da linha de um elemento de corrente, tal

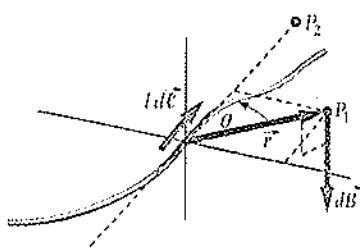


FIGURA 27-3  
O elemento de corrente  $I d\vec{l}$  produz um campo magnético no ponto  $P_1$  que é perpendicular a ambos,  $d\vec{l}$  e  $\hat{r}$ . O elemento de corrente não produz campo magnético no ponto  $P_2$ , que está ao longo da linha de  $d\vec{l}$ .

como o ponto  $P_2$  na Figura 27-3, o campo magnético devido a esse elemento é nulo. (A Equação 27-3 fornece  $d\vec{B} = 0$  se  $d\vec{\ell}$  e  $\hat{r}$  são paralelos ou antiparalelos.)

O campo magnético devido à corrente total em um circuito pode ser calculado usando a lei de Biot-Savart para encontrar o campo devido a cada elemento de corrente, e então somando (integrando) ao longo de todos os elementos de corrente do circuito. Esse cálculo é difícil para todas as geometrias de circuitos, mesmo as mais simples.

### B Devido a uma Espira com Corrente

A Figura 27-4 mostra um elemento de corrente  $I d\vec{\ell}$  de uma espira com corrente de raio  $R$  e o vetor unitário  $\hat{r}$  que é direcionado do elemento para o centro da espira. O campo magnético no centro da espira devido a esse elemento é direcionado ao longo do eixo da espira, e seu módulo é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin \theta}{R^2}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $d\vec{\ell}$  e  $\hat{r}$ , que é  $90^\circ$  para cada elemento de corrente, de tal modo que  $\sin \theta = 1$ . O campo magnético devido a toda a corrente é encontrado pela integração ao longo de todos os elementos de corrente na espira. Uma vez que  $R$  é o mesmo para todos os elementos, obtém-se

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \int d\ell$$

A integral de  $d\vec{\ell}$  em torno de toda a espira fornece o comprimento total  $2\pi R$ , a circunferência da espira. O campo magnético devido a toda a espira é, assim,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{I}{2\pi R} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad 27-4$$

B NO CENTRO DE UMA ESPIRA COM CORRENTE

**EXERCÍCIO** Encontre a corrente em uma espira circular com raio de 8 cm que irá fornecer um campo magnético de 2 G no centro da espira. (Resposta 25,5 A)

A Figura 27-5 mostra a geometria para calcular o campo magnético em um ponto sobre o eixo de uma espira com corrente circular a uma distância  $x$  do centro da espira circular. Considera-se inicialmente o elemento de corrente no topo da espira. Aqui, como em qualquer lugar sobre a espira,  $I d\vec{\ell}$  é tangente à espira e perpendicular ao vetor  $\hat{r}$  a partir do elemento de corrente ao ponto do campo  $P$ . O campo magnético  $d\vec{B}$  devido a esse elemento está na direção mostrada na figura, perpendicular a  $\hat{r}$  e também perpendicular a  $I d\vec{\ell}$ . O módulo de  $d\vec{B}$  é

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I d\vec{\ell} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I d\ell|}{(x^2 + R^2)}$$

onde foi usado o fato de que  $r^2 = x^2 + R^2$  e que  $d\vec{\ell}$  e  $\hat{r}$  são perpendiculares, então  $|d\vec{\ell} \times \hat{r}| = d\ell$ .

Quando se soma em torno de todos os elementos de corrente na espira, as componentes de  $d\vec{B}$  perpendiculares ao eixo da espira, tais como  $d\vec{B}_y$  na Figura 27-5, somam zero, o que deixa apenas as componentes  $d\vec{B}_x$ , que são paralelas ao eixo. Pode-se então calcular apenas as componentes  $x$  do campo. A partir da Equação 27-5, tem-se

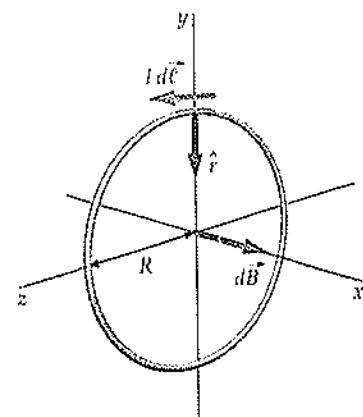


FIGURA 27-4

Um elemento de corrente para calcular o campo magnético no centro de uma espira circular com corrente. Cada elemento produz um campo magnético que está direcionado ao longo do eixo da espira.

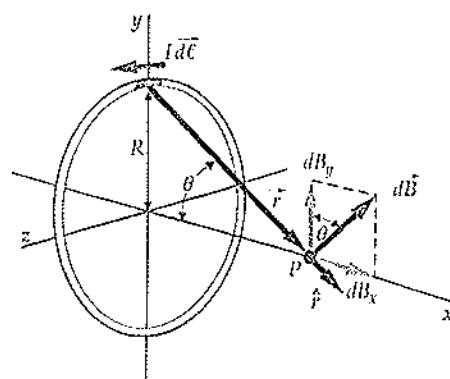


FIGURA 27-5

Geometria para calcular o campo magnético em um ponto sobre o eixo de uma espira circular com corrente.

$$dB_x = dB \sin \theta = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{x^2 + R^2} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\ell}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Para encontrar o campo devido a toda a espira com corrente, integra-se  $dB_x$  em torno da espira

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} d\ell$$

Uma vez que nem  $r$  nem  $R$  variam quando se soma ao longo dos elementos na espira, pode-se remover essas grandezas da integral. Então,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell$$

A integral de  $d\ell$  em torno da espira fornece  $2\pi R$ . Assim,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 27-5$$

B EM UM EIXO DE UMA ESPIRA COM CORRENTE

**EXERCÍCIO** Mostre que a Equação 27-5 reduz-se a  $B_x = \mu_0 I / 2R$  (Equação 27-4) no centro da espira.

Em grandes distâncias da espira,  $|x|$  é muito maior que  $R$ , então  $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = |x|^3$ . Então

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{|x|^3}$$

ou

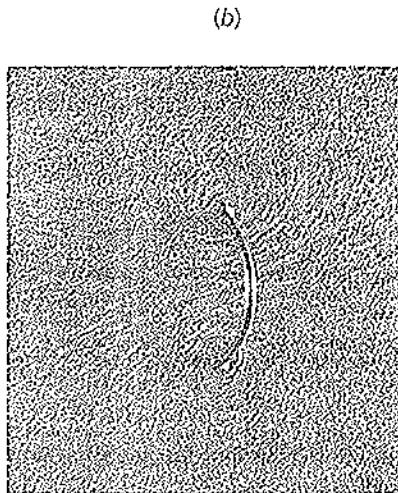
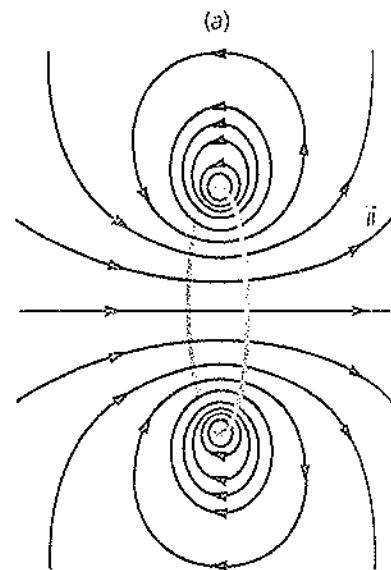
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} \quad 27-6$$

CAMPO MAGNÉTICO DIPOLAR SOBRE O EIXO DE UM DIPÓLO

onde  $\mu = I\pi R^2$  é o módulo do momento magnético da espira. Note a semelhança dessa expressão e a do campo magnético sobre o eixo de um dipolo elétrico de momento  $\rho$  (Equação 21-10):

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\rho}{|x|^3}$$

Embora isso não seja demonstrado, o resultado mostrando que a espira com corrente produz um campo magnético dipolar distante ocorre em geral para qualquer ponto sobre o eixo da espira ou fora dele. Assim, a espira com corrente comporta-se como um dipolo magnético porque ela experimenta um torque  $\vec{\mu} \times \vec{B}$  quando colocada em um campo magnético externo (como mostrado no Capítulo 26), e ela também produz um campo magnético dipolar a grandes distâncias da espira de corrente. A Figura 27-6 mostra as linhas de campo magnético para uma espira com corrente.



**FIGURA 27-6**  
(a) Linhas de campo magnético de uma espira circular com corrente. (b) Linhas de campo magnético de uma espira circular com corrente indicadas por limalhas de ferro. (Veja encarte em cores.)

Um enrolamento circular com raio de 5,0 cm possui 12 voltas, encontra-se em repouso no plano  $x$  e está centrado na origem. Ele transporta uma corrente de 4 A, de tal modo que a direção do momento magnético do enrolamento está ao longo do eixo  $x$ . Usando a Equação 27-5, encontre o campo magnético sobre o eixo  $x$  em (a)  $x = 0$ , (b)  $x = 15$  cm e (c)  $x = 3$  m. (d) Usando a Equação 27-6, encontre o campo magnético sobre o eixo  $x$  em  $x = 3$  m.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo magnético devido à espira com  $N$  voltas é  $N$  vezes aquele devido a uma única volta. (a) em  $x = 0$  (centro das espiras)  $B = \mu_0 N/(2R)$  (a partir da Equação 27-4). A Equação 27-5 fornece o campo magnético sobre o eixo devido à corrente em uma única volta. Longe da espira, como na Parte (c), o campo pode ser encontrado usando-se a Equação 27-6. Nesse caso, uma vez que são  $N$  voltas, o momento magnético é  $\mu = NI\pi R^2$ .

(a)  $B_x$  no centro é  $N$  vezes aquele fornecido pela Equação 27-4 para uma única volta:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2R}$$

$$= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{(12)(4 \text{ A})}{2(0,05 \text{ m})} = 6,03 \times 10^{-4} \text{ T}$$

(b)  $B_x$  sobre o eixo é  $N$  vezes aquele dado pela Equação 27-5:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 N I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{2\pi(0,05 \text{ m})^2(12)(4 \text{ A})}{[(0,15 \text{ m})^2 + (0,05 \text{ m})^2]^{3/2}} \\ = 1,91 \times 10^{-5} \text{ T}$$

(c) Use a Equação 27-5 novamente:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 N I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{2\pi(0,05 \text{ m})^2(12)(4 \text{ A})}{[(3 \text{ m})^2 + (0,05 \text{ m})^2]^{3/2}} \\ = 2,791 \times 10^{-9} \text{ T}$$

(d) 1. Uma vez que 3 m é muito maior que o raio  $R = 0,05$  m, pode-se usar a Equação 27-6 para o campo magnético longe da espira:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3}$$

2. O módulo do momento magnético da espira é  $N/A$ :

$$\mu = NI\pi R^2 = (12)(4 \text{ A})\pi(0,05 \text{ m})^2 = 0,377 \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

3. Substituindo  $\mu$  e  $x = 3$  m em  $B_x$  no passo 1:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} = (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{2(0,377 \text{ A}\cdot\text{m}^2)}{(3 \text{ m})^3} \\ = 2,793 \times 10^{-9} \text{ T}$$

**NOTAS** Na parte (d)  $x = 60R$ , pode-se então usar uma aproximação que é válida para  $x \gg R$ . O resultado difere do valor exato, calculado na Parte (c), menos que 1/10 de 1%.

No enrolamento descrito no Exemplo 27-2 a corrente é 4 A. Admitindo que a velocidade de migração é  $1,4 \times 10^{-4}$  m/s, encontre o número de coulombs da carga móvel no fio. (A velocidade de migração para um fio que transporta uma corrente de 1 A foi descrita como de  $3,4 \times 10^{-5}$  m/s no Exemplo 25-1.)

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A quantidade de carga móvel  $Q$  no fio é o produto da taxa na qual a carga entra em uma das extremidades do fio vezes o tempo que ela leva para atravessar o comprimento do fio. A taxa na qual a carga entra em uma das extremidades do fio é a corrente  $I$ , e o tempo para a carga atravessar o comprimento  $L$  do fio é  $L/v_d$ , que é a velocidade de migração.

1. A quantidade de carga móvel é o produto da corrente e do tempo para a carga transportada atravessar o comprimento do fio:

$$2. \text{ A velocidade de migração é o comprimento do fio dividido pelo tempo:} \quad v_d = \frac{L}{\Delta t}$$

$$3. \text{ O comprimento } L \text{ é o número de voltas vezes o comprimento de uma volta. Resolve-se também o passo 2 para o tempo:} \quad L = N2\pi R = (12)2\pi(0,05 \text{ m}) = 3,77 \text{ m}$$

e

$$\Delta t = \frac{L}{v_d} = \frac{3,77 \text{ m}}{1,4 \times 10^{-4} \text{ m/s}} = 2,69 \times 10^4 \text{ s}$$

4. Resolvendo-se o passo 1 resulta a quantidade de carga móvel no fio:

$$Q = I \Delta t = (4 \text{ A})(2,69 \times 10^4 \text{ s})$$

$$= 1,08 \times 10^5 \text{ C}$$

**NOTAS** A corrente consiste em mais de  $10^5$  C de carga móvel. Essa é uma quantidade enorme de carga, em comparação com a carga armazenada em um simples capacitor.

### EXEMPLO 27-4 TORQUE SOBRE UM ÍMÃ IMANTADO

Tente resolver este exemplo sozinho

Uma pequena barra imantada de momento magnético  $\vec{\mu} = 0,03 \text{ A} \cdot \text{m}^2$  está colocada no centro da espira do Exemplo 27-2, de tal modo que seu vetor momento magnético encontra-se no plano  $xy$  e faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ . Desprezando qualquer variação em  $B$  nas proximidades do ímã, encontre o torque sobre o ímã.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O torque sobre um momento magnético é dado por  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ . Uma vez que  $\vec{B}$  está na direção  $x$  positiva, pode-se ver da Figura 27-7 que  $\vec{\mu} \times \vec{B}$  está na direção  $z$  negativa.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

Etapas

1. Calcule o módulo do torque a partir de  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ .
2. Indique a direção com um vetor unitário.

Respostas

$$\tau = 9,04 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\tau} = -(9,04 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$$

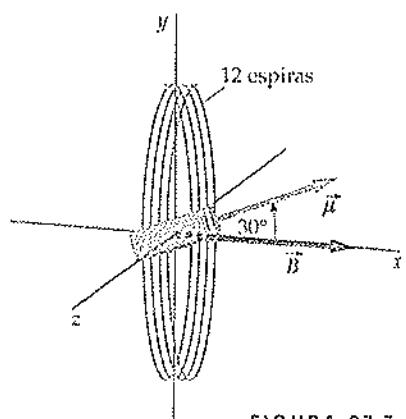
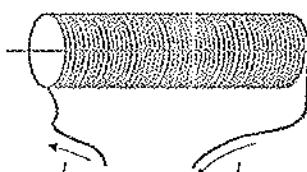


FIGURA 27-7

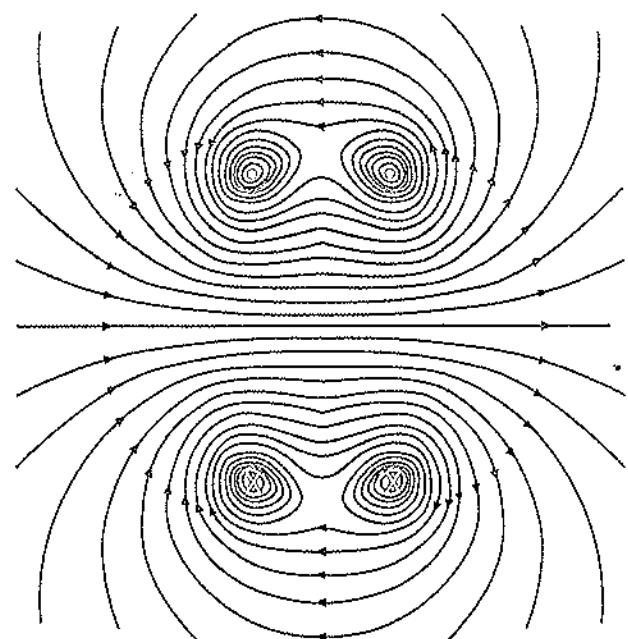


**FIGURA 27-8**  
Um solenóide pode ser considerado como um conjunto de espiras circulares com corrente colocadas lado a lado e que transportam a mesma corrente. O solenóide produz um campo magnético uniforme dentro das espiras.

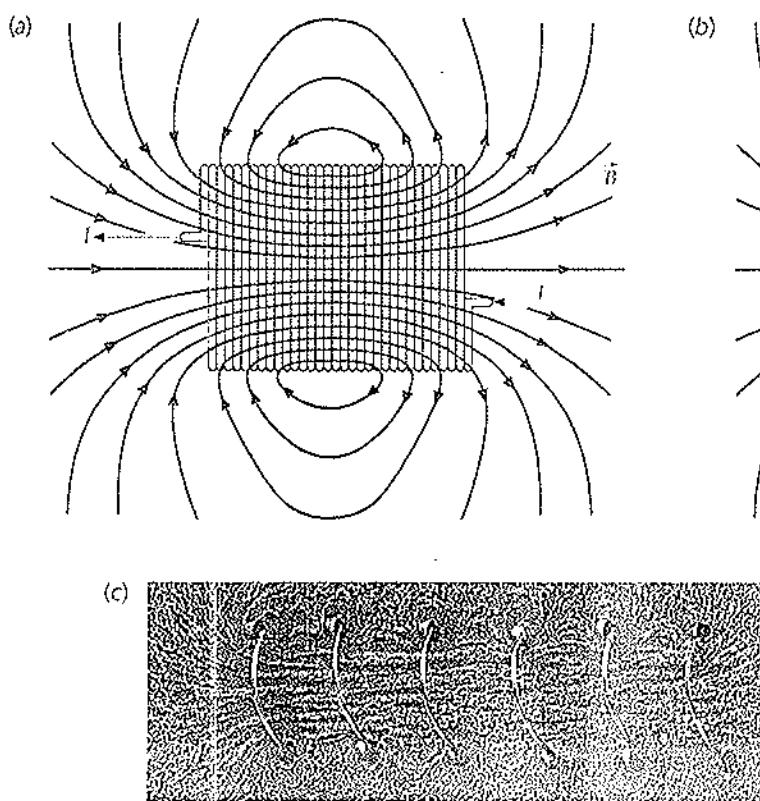
### B Devido à Corrente em um Solenóide

Um solenóide é um fio enrolado em uma helicóide com voltas de espaçamento muito próximo, como ilustrado na Figura 27-8. Um solenóide é usado para produzir um campo magnético forte e uniforme na região envolvida por suas espiras. A função do solenóide no magnetismo é análoga àquela dos capacitores de placas paralelas, que produzem um campo elétrico forte e uniforme entre suas placas. O campo magnético de um solenóide é essencialmente o mesmo de um conjunto de  $N$  espiras com corrente colocadas lado a lado. A Figura 27-9 mostra as linhas do campo magnético para duas dessas espiras.

A Figura 27-10 mostra as linhas de campo magnético para um solenóide longo. Dentro do solenóide, as linhas de campo são aproximadamente paralelas ao eixo e são próximas e uniformemente espaçadas, indicando um campo magnético forte e uniforme. Fora do solenóide, as linhas são muito menos densas. As linhas de campo divergem em uma extremidade e convergem na outra. Comparando essa figura com a Figura 27-8, nota-se que as linhas de campo de um solenóide, tanto no inter-



**FIGURA 27-9**  
Linhas de campo magnético devidas a duas espiras coaxiais transportando a mesma corrente. Os pontos onde as espiras interceptam o plano da página são marcados por um x onde a corrente entra e por um ponto onde a corrente emerge. Na região entre as espiras próximo ao eixo os campos magnéticos de cada espira individual se superpõem, de tal modo que o campo magnético resultante é forte e surpreendentemente uniforme. Nas regiões fora das espiras o campo resultante é relativamente fraco.



**FIGURA 27-10**  
(a) Linhas de campo magnético de um solenóide. As linhas são idênticas às aquelas de uma barra imantada, como na Figura 27-10 (b). (c) Linhas de campo magnético de um solenóide mostradas por limalhas de ferro.

rior quanto no exterior do solenóide, são idênticas àquelas de uma barra imantada da mesma forma que a do solenóide.

Considere um solenóide de comprimento  $L$ , que consiste em  $N$  voltas de fio transportando uma corrente  $I$ . Escolhe-se o eixo do solenóide como sendo o eixo  $x$ , com a extremidade esquerda em  $x = x_1$  e a extremidade direita em  $x = x_2$ , como mostrado na Figura 27-11. Será calculado o campo magnético na origem. A figura mostra um elemento do solenóide de comprimento  $dx$  a uma distância  $x$  da origem. Se  $n = N/L$  é o número de voltas por unidade de comprimento, existem  $n dx$  voltas de fio nesse elemento, com cada volta transportando uma corrente  $I$ . O elemento é assim equivalente a uma única espira transportando uma corrente  $di = nI dx$ . O campo magnético em um ponto sobre o eixo  $x$  devido à espira na origem transportando uma corrente  $nI dx$  é dado pela Equação 27-5, com  $I$  substituído por  $di = nI dx$ :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 nI dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Essa expressão também fornece o campo magnético na origem devido à espira com corrente em  $x$ . Encontra-se o campo magnético na origem devido ao solenóide inteiro através da integração dessa expressão desde  $x = x_1$  até  $x = x_2$ :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 nI \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 27-7$$

A integral na Equação 27-7 pode ser avaliada usando-se uma substituição trigonométrica com  $x = R \operatorname{tg}\theta$ . Também a integral pode ser obtida a partir de tabelas-padrão para integrações. O valor da integral é

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

Substituindo essa expressão na Equação 27-7, obtém-se

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 nI \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right) \quad 27-8$$

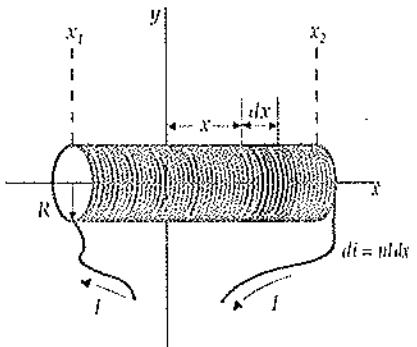
### $B_x$ SOBRE O EIXO DE UM SOLENÓIDE EM $X = 0$

Um solenóide é chamado de solenóide longo se seu comprimento  $L$  é muito maior que seu raio  $R$ . Dentro e longe das extremidades de um solenóide longo, o termo da esquerda nos parênteses tende para 1 e o termo da direita tende para -1. Na região que satisfaz essas condições, o campo magnético é

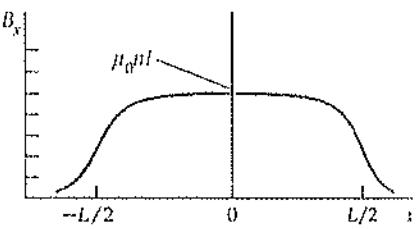
$$B_x = \mu_0 nI \quad 27-9$$

### $B_x$ DENTRO DE UM SOLENÓIDE LONGO

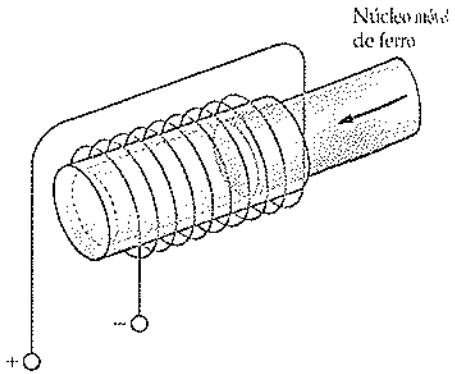
Se a origem está na extremidade esquerda do solenóide,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L$ . Então, se  $L \gg R$ , o termo da direita nos parênteses da Equação 27-8 é zero e o termo da esquerda se aproxima de 1, então  $B \approx \frac{1}{2} \mu_0 nI$ . Assim, o módulo de  $\vec{B}$  em cada extremidade de um solenóide longo é metade do módulo nos pontos internos do solenóide que estão distantes das extremidades. A Figura 27-12 fornece um gráfico do campo magnético sobre o eixo de um solenóide versus a posição  $x$  sobre o eixo (com a origem no centro do solenóide). A aproximação de que o campo é uniforme (independentemente da posição) ao longo do eixo é boa, exceto próximo das extremidades.



**FIGURA 27-11**  
Geometria para calcular o campo magnético no interior de um solenóide sobre o seu eixo. O número de voltas no elemento  $dx$  é  $n dx$ , onde  $n = N/L$  é o número de voltas por unidade de comprimento. O elemento  $dx$  é tratado como uma espira com corrente transportando uma corrente  $di = nI dx$ .



**FIGURA 27-12**  
Gráfico do campo magnético sobre o eixo no interior de um solenóide versus a posição  $x$  ao longo do eixo. O campo dentro do solenóide é quase constante, exceto nas proximidades das extremidades. O comprimento  $L$  do solenóide é dez vezes maior que o seu raio.



**FIGURA 27-13**  
Uma bobina de partida de um automóvel. Quando o solenóide é energizado, seu campo magnético puxa o núcleo de ferro. Isso aciona o mecanismo que conecta o motor de arranque ao volante do motor do veículo. Quando a corrente no solenóide é interrompida, uma mola libera o mecanismo e empurra o núcleo de ferro para a direita.

Encontre o campo magnético no centro de um solenóide com comprimento de 20 cm, raio de 1,4 cm e 600 voltas que transporta uma corrente de 4 A.

#### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. O campo será calculado exatamente usando-se a Equação 27-8:

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

2. Para o ponto no centro do solenóide,  $x_1 = -10 \text{ cm}$  e  $x_2 = +10 \text{ cm}$ . Assim, os termos entre parênteses na Equação 27-8 possuem os valores de:

$$\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{(10 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2}} = 0,990$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} = \frac{-10 \text{ cm}}{\sqrt{(-10 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2}} = -0,990$$

3. Substitua esses resultados em  $B_x$  no passo 1:

$$B_x = \frac{1}{2} (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) [(600 \text{ voltas}) / (0,2 \text{ m})] (4 \text{ A}) (0,990 + 0,990)$$

$$= 1,50 \times 10^{-2} \text{ T}$$

**NOTAS** Observe que a aproximação obtida usando a Equação 27-9 leva a substituir 0,99 por 1,00, que diferem de apenas 1%. Note também que o módulo do campo magnético no interior desse solenóide é extremamente elevado — cerca de 250 vezes o campo magnético da Terra.

**EXERCÍCIO** Calcule  $B_y$  usando a aproximação de solenóide longo. (Resposta  $1,51 \times 10^{-2} \text{ T}$ )

#### B Devido à Corrente em um Fio Reto

A Figura 27-14 mostra a geometria para calcular o campo magnético  $\vec{B}$  em um ponto  $P$  devido à corrente no segmento de fio reto mostrado. Escolhe-se  $R$  como sendo a distância perpendicular desde o fio até o ponto  $P$ , e o eixo  $x$  como sendo ao longo do fio com  $x = 0$  na projeção de  $P$  sobre o eixo  $x$ .

Um elemento de corrente típico  $I d\hat{l}$  a uma distância  $x$  a partir da origem é mostrado. O vetor  $\hat{r}$  aponta do elemento para o ponto do campo  $P$ . A direção do campo magnético em  $P$  devido a esse elemento é a direção de  $I d\hat{l} \times \hat{r}$ , que é para fora do papel. Note que os campos magnéticos devidos a todos os elementos de corrente do fio estão nessa mesma direção. Assim, necessita-se calcular apenas o módulo do campo. O campo devido ao elemento de corrente mostrado possui módulo (Equação 27-3)

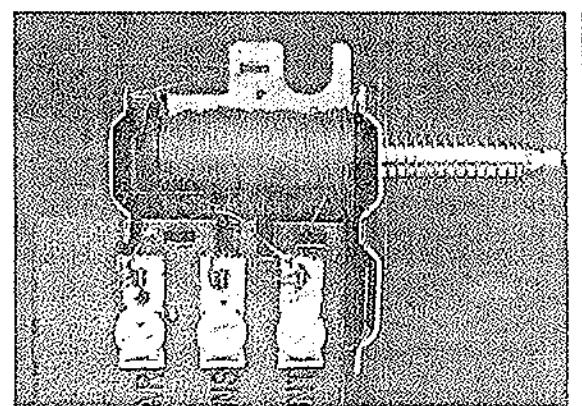
$$dB = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r^2} \sin \phi$$

É mais conveniente escrever essa expressão em termos de  $\theta$  em vez de  $\phi$ :

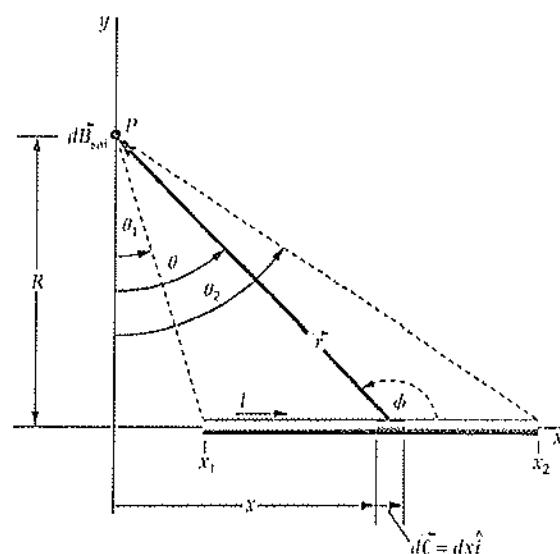
$$dB = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r^2} \cos \theta \quad 27-10$$

FIGURA 27-14

Geometria para cálculo do campo magnético no ponto  $P$  devido a um segmento reto com corrente. Cada elemento do segmento contribui para o campo magnético total no ponto  $P$ , que está direcionado para fora do papel. O resultado é expresso em termos dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .



Vista em corte de uma campainha de porta. Quando o solenóide é energizado, seu campo magnético puxa o pino, fazendo com que ele atinja o sino (não mostrado). A mola faz o pino retornar a sua posição normal.



Para somar ao longo de todos os elementos de corrente, é preciso relacionar as variáveis  $\theta$ ,  $r$  e  $x$ . Isso é obtido mais facilmente expressando  $x$  e  $r$  em termos de  $\theta$ . Tem-se, assim,

$$x = R \operatorname{tg} \theta$$

Então, tomando a diferencial de cada lado com  $R$  como uma constante, tem-se

$$dx = R \sec^2 \theta d\theta = R \frac{r^2}{R^2} d\theta = \frac{r^2}{R} d\theta$$

onde foi usado  $\sec \theta = r/R$ . Substituindo essa expressão para  $dx$  na Equação 27-10, obtém-se

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{r^2 d\theta}{R} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \theta d\theta$$

Somando todos esses elementos pela integração desde  $\theta = \theta_1$  até  $\theta = \theta_2$ , onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são mostrados na Figura 27-14. Isso fornece

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

Avaliando a integral, obtém-se

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad 27-11$$

**B** DEVIDO A UM SEGMENTO DE FIO RETO

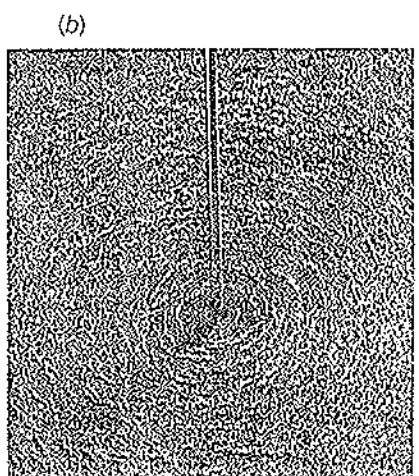
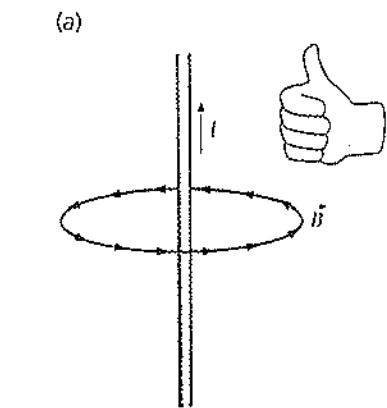
Esse resultado fornece o campo magnético devido a qualquer segmento de fio em termos da distância perpendicular  $R$ , e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos subtendidos no ponto do campo pelas extremidades do fio. Se o comprimento do fio se aproxima de infinito em ambos os sentidos,  $\theta_2$  se aproxima de  $+90^\circ$  e  $\theta_1$  se aproxima de  $-90^\circ$ . O resultado para tal fio muito longo é obtido pela Equação 27-11, fazendo  $\theta_1 = -90^\circ$  e  $\theta_2 = +90^\circ$ :

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R} \quad 27-12$$

**B** DEVIDO A UM FIO RETO, INFINITAMENTE LONGO

Em qualquer ponto do espaço, as linhas de campo magnético para um fio longo reto transportando corrente são tangentes a um círculo de raio  $R$  em torno do fio, onde  $R$  é a distância perpendicular desde o fio até o ponto do campo. A direção de  $\vec{B}$  pode ser determinada pela aplicação da regra da mão direita, como mostrado na Figura 27-15a. As linhas de campo magnético então envolvem o fio, como mostrado na Figura 27-15b.

O resultado expresso pela Equação 27-12 foi encontrado experimentalmente por Biot e Savart em 1820. A partir de suas análises, Biot e Savart foram capazes de descobrir a expressão dada na Equação 27-3 para um campo magnético devido a um elemento de corrente.



**FIGURA 27-15**  
(a) Regra da mão direita para determinar a direção e o sentido do campo magnético devido a um fio reto longo transportando corrente. As linhas de campo magnético circulam o fio na direção dos dedos da mão direita enquanto o polegar aponta na direção da corrente. (b) Linhas de campo magnético devidas a um fio longo, que está indicado por linhas de ferro.

Encontre o campo magnético no centro de uma espira quadrada com comprimento de lado  $L = 50 \text{ cm}$ , que transporta uma corrente de  $1,5 \text{ A}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo magnético no centro da espira é a soma das contribuições de cada um dos quatro lados da espira. A partir da Figura 27-16, pode-se ver que cada lado da espira produz um campo de igual módulo apontando para fora da página. Assim, usando a Equação 27-11 para um dado lado, multiplica-se o resultado por 4 para obter o campo total.

- O campo total é 4 vezes o campo  $B_s$  devido a um lado:  $B = 4B_s$
- Calcule o campo magnético  $B_s$  devido a um dado lado da espira. Note a partir da figura que  $R = \frac{1}{2}L$  e  $\theta_1 = -45^\circ$  e  $\theta_2 = +45^\circ$ :  

$$B_s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{1}{2}L} [\sin(+45^\circ) - \sin(-45^\circ)]$$

$$= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{1,5 \text{ A}}{0,25 \text{ m}} 2 \sin 45^\circ = 8,49 \times 10^{-7} \text{ T}$$
- Multiplique este valor por 4 para encontrar o campo total:  

$$B = 4B_s = 4(8,49 \times 10^{-7} \text{ T}) = 3,39 \times 10^{-6} \text{ T}$$

**EXERCÍCIO** Compare o campo magnético no centro de uma espira circular com corrente de raio  $R$  com o campo magnético no centro de uma espira quadrada com corrente de lado  $L = 2R$  transportando a mesma corrente. Qual é a maior?

(Resposta  $B$  no centro é maior para o círculo, cerca de 10%)

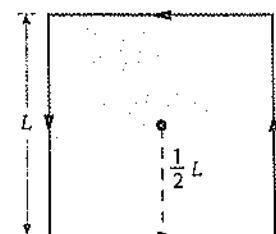
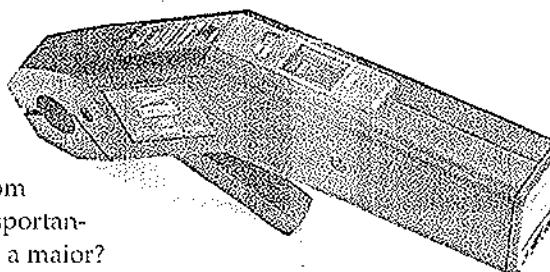


FIGURA 27-16

Uma pistola usada para medir corrente. As garras da pistola envolvem o fio por onde passa corrente sem tocá-lo. O campo magnético produzido pelo fio é medido com um dispositivo com efeito Hall montado na pistola. O dispositivo gera como saída uma tensão proporcional ao campo magnético que, por sua vez, é proporcional à corrente no fio.

**EXERCÍCIO** Encontre a distância até um fio longo reto transportando uma corrente de  $12 \text{ A}$ , na qual o campo magnético devido à corrente no fio é igual em módulo a  $0,6 \text{ G}$  (o módulo do campo magnético da Terra). (Resposta  $R = 4,00 \text{ cm}$ )

Um fio longo reto transportando uma corrente de  $1,7 \text{ A}$  na direção  $z$  positiva encontra-se ao longo da linha  $x = -3 \text{ cm}$ ,  $y = 0$ . Um segundo fio transportando uma corrente de  $1,7 \text{ A}$  na direção  $z$  positiva encontra-se ao longo da linha  $x = +3 \text{ cm}$ ,  $y = 0$ , como mostrado na Figura 27-17. Encontre o campo magnético em um ponto  $P$  sobre o eixo  $y$  em  $y = 6 \text{ cm}$ .

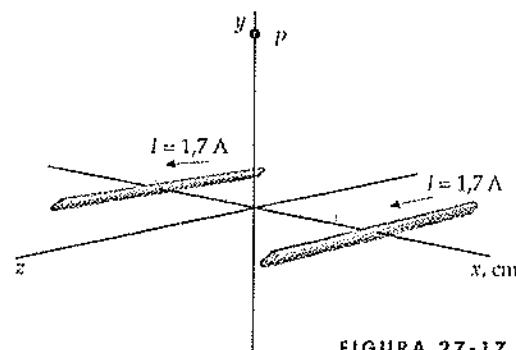


FIGURA 27-17

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo magnético no ponto  $P$  é o vetor soma do campo  $\vec{B}_E$  devido ao fio na esquerda na Figura 27-18, e do campo  $\vec{B}_D$  devido ao fio na direita. Uma vez que cada fio transporta a mesma corrente e que cada um deles está à mesma distância do ponto  $P$ , os módulos  $B_E$  e  $B_D$  são iguais.  $\vec{B}_E$  é perpendicular ao raio do fio da esquerda ao ponto  $P$ , e  $\vec{B}_D$  é perpendicular ao raio do fio da direita ao ponto  $P$ .

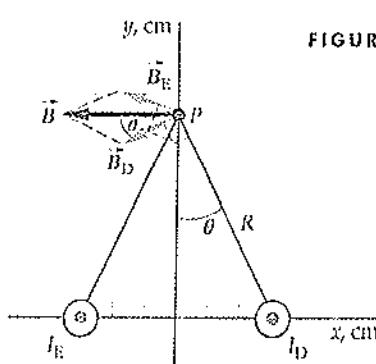


FIGURA 27-18

- O campo em  $P$  é a soma vetorial dos campos  $\vec{B}_E$  e  $\vec{B}_D$ :  $\vec{B} = \vec{B}_E + \vec{B}_D$
- A partir da Figura 27-18, nota-se que o campo magnético resultante está na direção  $x$  negativa e possui módulo  $2B_E \cos \theta$ :  $\vec{B} = -2B_E \cos \theta \hat{i}$
- Os módulos de  $\vec{B}_E$  e  $\vec{B}_D$  são dados pela Equação 27-12:  $B_E = B_D = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$
- $R$  é a distância de cada fio ao ponto  $P$ . Encontra-se  $R$  a partir da figura e substituindo  $R$  na expressão para  $B_E$  e  $B_D$ :  $R = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2} = 6,71\text{ cm}$   
então
- Obtém-se  $\cos \theta$  a partir da figura:  $\cos \theta = \frac{6\text{ cm}}{R} = \frac{6\text{ cm}}{6,71\text{ cm}} = 0,894$
- Substituem-se os valores de  $\cos \theta$  e  $B_E$  na equação no passo 2 para  $\vec{B}$ :  $\vec{B} = -2(5,07 \times 10^{-6}\text{ T})(0,894)\hat{i} = -9,07 \times 10^{-6}\text{ T} \hat{i}$

**EXERCÍCIO** Encontre  $\vec{B}$  na origem. (Resposta 0)

**EXERCÍCIO** Encontre  $\vec{B}$  na origem assumindo que  $I_D$  vai para dentro da página. (Resposta  $\vec{B} = 2,27 \times 10^{-5}\text{ T} \hat{j}$ )

### Força Magnética entre Fios Paralelos

Pode-se usar a Equação 27-12 para o campo magnético devido a um fio longo reto transportando corrente e  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  (Equação 26-5) para a força exercida pelo campo magnético sobre um segmento de fio transportando corrente para encontrar a força exercida por um fio longo reto com corrente sobre outro. A Figura 27-19 mostra dois fios longos retos paralelos transportando correntes no mesmo sentido. Considera-se a força sobre um segmento  $d\vec{l}_2$  transportando a corrente  $I_2$ , como mostrado. O campo magnético  $\vec{B}_1$  nesse segmento devido à corrente  $I_1$  é perpendicular ao segmento  $I_2 d\vec{l}_2$ , como mostrado. Isso é verdade para todos os elementos de corrente ao longo do fio. A força magnética  $d\vec{F}_2$  sobre o segmento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$  é direcionada para a corrente  $I_1$ , uma vez que  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$ . Similarmente, um segmento de corrente  $I_2 d\vec{l}_1$  irá experimentar uma força magnética direcionada para a corrente  $I_2$  devida ao campo magnético que surge da corrente  $I_1$ . Assim, duas correntes paralelas atraem-se uma à outra. Se uma das correntes é invertida a força será invertida, então duas correntes antiparalelas irão se repelir uma à outra. A atração ou a repulsão de correntes paralelas ou antiparalelas foi descoberta experimentalmente por Ampère uma semana após ele ter ouvido a respeito da descoberta de Oersted relativa ao efeito de uma corrente sobre a agulha de uma bússola.

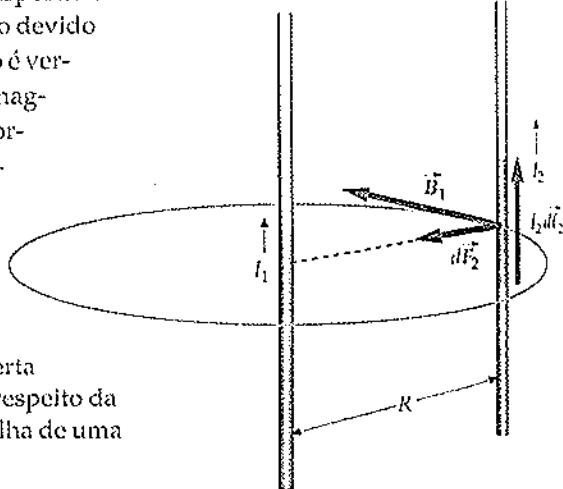
O módulo da força magnética sobre o segmento  $I_2 d\vec{l}_2$  é

$$dF_2 = |I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1|$$

Uma vez que o campo magnético no segmento  $I_2 d\vec{l}_2$  é perpendicular ao elemento de corrente, tem-se

$$dF_2 = I_2 d\vec{l}_2 B_1$$

Se a distância  $R$  entre os fios é muito menor que seus comprimentos, o campo em  $I_2 d\vec{l}_2$  devido à corrente  $I_1$  irá se aproximar do campo devido a um fio infinito



**FIGURA 27-19**  
Dois fios longos retos paralelos transportando corrente. O campo magnético  $\vec{B}_1$  devido à corrente  $I_1$  é perpendicular à corrente  $I_2$ . A força sobre a corrente  $I_2$  é no sentido da corrente  $I_1$ . Existe uma força igual e oposta exercida pela corrente  $I_2$  sobre  $I_1$ . As correntes transportadas pelos fios atraem um para o outro.

tamente longo transportando corrente, que é dado pela Equação 27-12. O módulo da força sobre o segmento  $I_2 d\vec{\ell}_2$  é, portanto,

$$dF_2 = I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

A força por unidade de comprimento é

$$\frac{dF_2}{d\ell_2} = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \quad 27-13$$

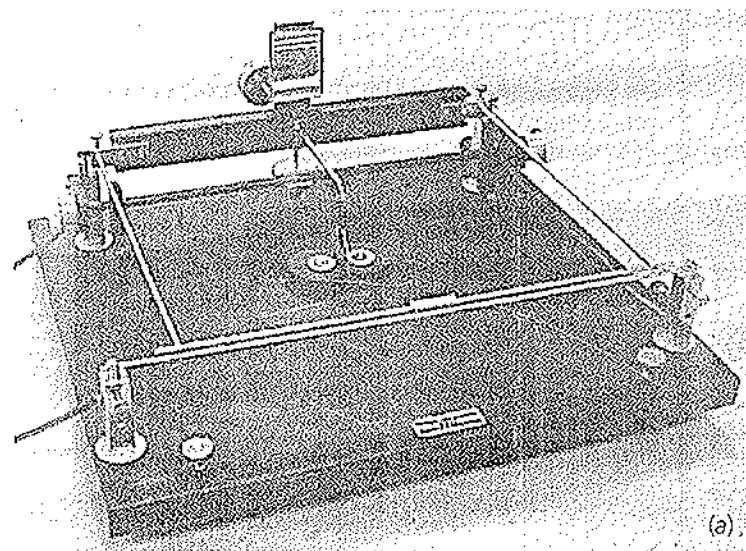
No Capítulo 21, o coulomb foi definido em termos do ampère, mas a definição do ampère não foi apresentada. O ampère é definido como se segue:

O ampère é a corrente elétrica constante que, quando mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito e de seção reta circular desprezível colocados a um metro distantes no vácuo, consegue produzir uma força entre os condutores igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por unidade de comprimento.

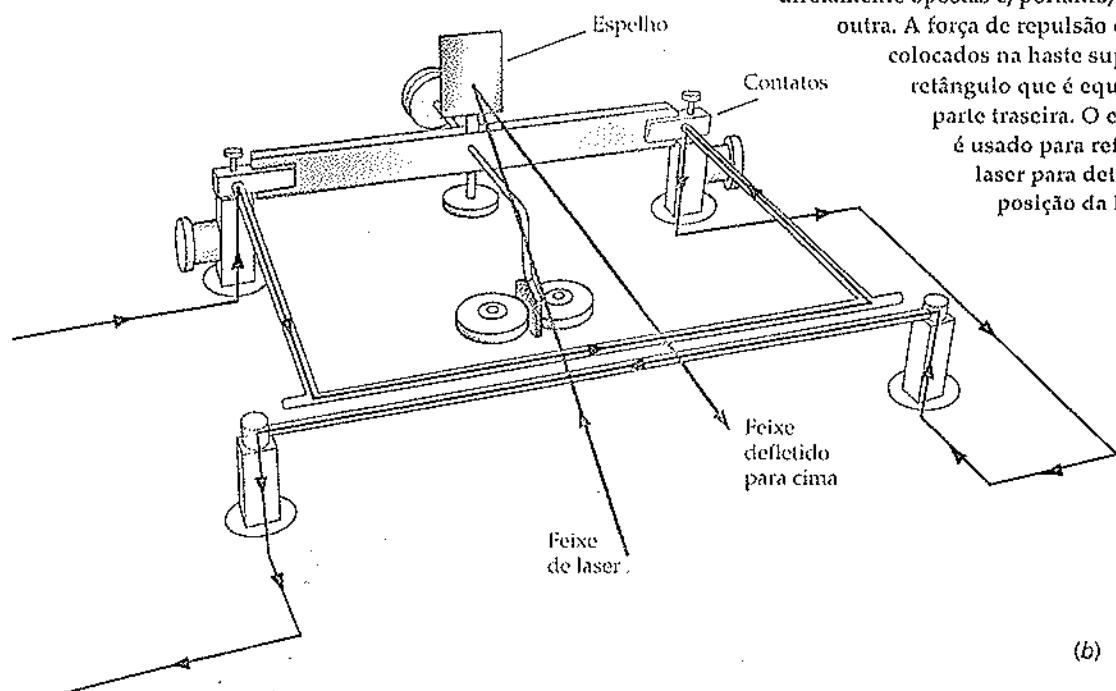
#### DEFINIÇÃO — AMPÈRE

Essa definição de ampère faz com que a permeabilidade do espaço livre  $\mu_0$  seja exatamente igual a  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . Isso também permite que a unidade de corrente (e, portanto, a unidade de carga elétrica) seja determinada por uma medida mecânica. Na prática, correntes muito mais próximas que 1 m são usadas para que a força possa ser medida acuradamente com fios longos mas finitos.

A Figura 27-20 mostra uma balança de corrente, que é um aparato que pode ser usado para calibrar



**FIGURA 27-20**  
 (a) Fotografia de uma balança de corrente usada em laboratórios de física. (b) Diagrama esquemático de uma balança de corrente. As duas hastes paralelas na parte frontal transportam correntes iguais, mas diretamente opostas e, portanto, que se repelem uma à outra. A força de repulsão é equilibrada por pesos colocados na haste superior, que é parte de um retângulo que é equilibrado nos contatos na parte traseira. O espelho na parte superior é usado para refletir um feixe de luz a laser para determinar acuradamente a posição da haste superior.



um amperímetro a partir da definição de ampère. O condutor superior, diretamente acima do condutor inferior, está livre para girar em torno dos contatos e é equilibrado de tal modo que os fios (ou hastes condutoras) estão a uma pequena distância entre eles. Os condutores estão conectados em série para transportar a mesma corrente, mas em sentidos opostos, de maneira que as correntes irão repelir uma à outra. Pesos são colocados sobre o condutor superior até equilibrar novamente a separação inicial. A força de repulsão é assim determinada pela medida do peso total necessário para equilibrar o condutor superior.

**EXEMPLO 27-3**
**Equilíbrio magnético**

Tente resolver este exemplo sozinho

Duas hastes retas de 50 cm de comprimento com eixos afastados de 1,5 mm em uma balança de corrente transportam correntes de 15 A cada uma em sentidos opostos. Qual massa deve ser colocada sobre a haste superior para equilibrar a força de repulsão magnética?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A Equação 27-13 fornece o módulo da força magnética por unidade de comprimento exercida pela haste inferior sobre a haste superior. Encontre essa força para a haste de comprimento  $L$  e iguale ao peso  $mg$ .

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

**Etapas**
**Respostas**

1. Faça o peso  $mg$  igual à força magnética de repulsão das hastes.  $mg = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R} L$
2. Resolva para a massa  $m$ .  $m = 1,53 \times 10^{-3} \text{ kg} = 1,53 \text{ g}$

**NOTAS** Uma vez que se precisa apenas de 1,53 g para equilibrar o sistema, verifica-se que a força magnética entre dois fios retos transportando corrente é relativamente pequena, mesmo para correntes elevadas como 15 A separadas por apenas 1,5 mm.

---

**27-3 Lei de Gauss para o Magnetismo**


---

As linhas de campo magnético mostradas nas Figuras 27-6, 27-9 e 27-10 diferem das linhas de campo elétrico porque as linhas de  $\vec{B}$  formam curvas fechadas, enquanto as linhas de  $\vec{E}$  iniciam e terminam sobre as cargas elétricas. O imã equivalente de uma carga elétrica é um pólo magnético, tal como aparece nas extremidades de uma barra imantada. As linhas de campo magnético parecem divergir a partir da extremidade pólo norte de uma barra imantada (Figura 27-10b) e parecem convergir para a extremidade pólo sul. Entretanto, dentro do imã as linhas de campo magnético não divergem a partir de um ponto próximo à extremidade pólo norte nem convergem para um ponto próximo à extremidade pólo sul. Em vez disso, as linhas de campo magnético passam através da barra imantada desde a extremidade pólo sul até a extremidade pólo norte, como mostrado na Figura 27-10b. Se uma superfície gaussiana envolve uma extremidade de uma barra magnética, o número de linhas de campo magnético que deixam a superfície é exatamente igual ao número de linhas de campo magnético que entram através da superfície. Isto é, o fluxo

líquido  $\phi_{m, \text{ líquido}}$  do campo magnético através de qualquer superfície fechada  $S$  é sempre igual a zero.<sup>†</sup>

$$\phi_{m, \text{ líquido}} = \oint_S B_n dA = 0 \quad 27-14$$

#### LEI DE GAUSS PARA O MAGNETISMO

onde  $B_n$  é a componente de  $\vec{B}$  normal à superfície  $S$  em um elemento de área  $dA$ . A definição de fluxo magnético  $\phi_m$  é exatamente análoga à de fluxo elétrico, substituindo  $\vec{B}$  por  $\vec{E}$ . Esse resultado é chamado de lei de Gauss para o magnetismo. É a comprovação matemática de que não existem pontos do espaço a partir dos quais as linhas de campo magnético divergem ou para os quais as linhas de campo magnético convergem. Isto é, pólos magnéticos isolados não existem.<sup>‡</sup> A unidade fundamental de magnetismo é o dipolo magnético. A Figura 27-21 compara as linhas de campo de  $\vec{B}$  para um dipolo magnético com as linhas de campo de  $\vec{E}$  para um dipolo elétrico. Note que longe dos dipolos as linhas são idênticas. Mas dentro do dipolo as linhas de campo de  $\vec{E}$  estão direcionadas no sentido oposto daquele das linhas de campo de  $\vec{B}$ . As linhas de campo de  $\vec{E}$  divergem da carga positiva e convergem para a carga negativa, enquanto as linhas de campo de  $\vec{B}$  são contínuas.

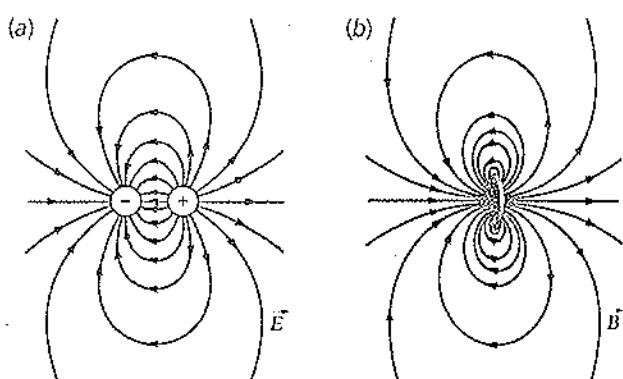


FIGURA 27-21

(a) Linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico. (b) Linhas de campo magnético de um dipolo magnético. Longe dos dipolos, as linhas de campo são idênticas. Na região entre as cargas na Figura 27-21(a) as linhas de campo elétrico são opostas ao sentido do momento dipolar, enquanto dentro da espira na Figura 27-21(b) as linhas do campo magnético são paralelas à direção do momento dipolar.

#### 27-4 Lei de Ampère

No Capítulo 22 foi visto que para distribuições de carga com elevado nível de simetria podia-se calcular o campo elétrico mais facilmente usando a lei de Gauss do que a lei de Coulomb. Uma situação semelhante existe no magnetismo. A lei de Ampère relaciona a componente tangencial  $B_t$  do campo magnético somada (integrada) em torno de uma curva fechada  $C$  com a corrente  $I_C$  que passa através de qualquer superfície limitada por  $C$ . Ela pode ser usada para obter uma expressão para o campo magnético nas situações que apresentem um elevado nível de simetria. Na forma matemática, a lei de Ampère é

$$\oint_C B_t d\ell = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C, \quad C \text{ é qualquer curva fechada} \quad 27-15$$

#### LEI DE AMPÈRE

onde  $I_C$  é a corrente líquida que penetra em qualquer superfície  $S$  limitada pela curva  $C$ . A direção tangente positiva para a integral de linha está relacionada com a escolha para a direção positiva da corrente  $I_C$  através de  $S$  pela regra da mão direita mostrada na Figura 27-22. A lei de Ampère é válida para qualquer curva  $C$ , desde que as correntes sejam permanentes e contínuas. Isso significa que a corrente não varia no tempo e que a carga não está sendo acumulada em nenhum lugar. A lei de Ampère é útil no cálculo do campo magnético  $\vec{B}$  em situações que possuem um elevado nível de simetria, de tal modo que a inte-

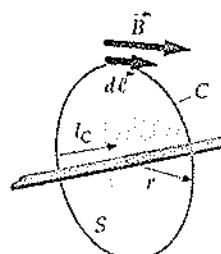


FIGURA 27-22

O sentido positivo da integral de linha para a lei de Ampère é relacionado com o sentido positivo para a corrente passando através da superfície pela regra da mão direita.

<sup>†</sup>Lembre-se de que o fluxo líquido de um campo elétrico é uma medida de número líquido de linhas de campo que deixam uma superfície fechada e é igual a  $Q_{\text{dentro}}/\epsilon_0$ .

<sup>‡</sup>A existência de monopólos magnéticos é tema de grande debate, e a procura por esses monopólos permanece ativa. Até hoje, entretanto, nada foi descoberto.

gral  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  pode ser escrita como  $B \oint_C d\ell$  (o produto de  $B$  e alguma distância). A integral  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  é chamada de integral de circulação. Mais especificamente,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  é chamada de circulação de  $\vec{B}$  em torno da curva  $C$ . As leis de Ampère e Gauss são de considerável importância teórica, e ambas as leis são válidas existindo simetria ou não. Se não existe simetria, nenhuma das leis é muito útil no cálculo de campos elétricos ou magnéticos.

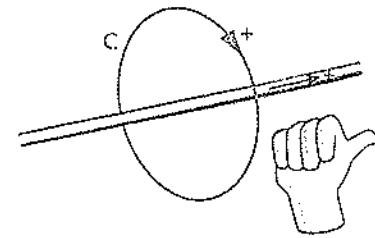
A aplicação mais simples da lei de Ampère é encontrar o campo magnético de um fio reto infinitamente longo transportando corrente. A Figura 27-23 mostra uma curva circular em torno de um fio longo com seu centro no fio. Sabe-se que a direção do campo magnético devido a cada elemento de corrente é tangente a esse círculo pela lei de Biot-Savart. Assumindo que o campo magnético é tangente a esse círculo, que os campos magnéticos estão na mesma direção de  $d\vec{\ell}$  e que o campo magnético tem o mesmo módulo  $B$  em qualquer ponto sobre o círculo, a lei de Ampère ( $\oint_C B_i d\ell = \mu_0 I_c$ ) então fornece

$$B \oint_C d\ell = \mu_0 I_c$$

onde  $B = B_i$ . Pode-se tirar  $B$  para fora da integral porque ele possui o mesmo valor em qualquer lugar sobre o círculo. A integral de  $d\ell$  em torno do círculo é igual a  $2\pi R$  (a circunferência do círculo). A corrente  $I_c$  é a corrente  $I$  no fio. Obtém-se assim  $B2\pi R = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

que é a Equação 27-12.

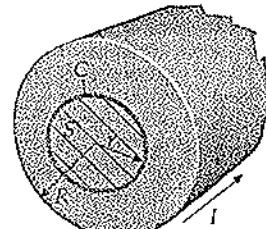


**FIGURA 27-23**  
Geometria para cálculo do campo magnético de um fio reto longo transportando uma corrente usando a lei de Ampère. Sobre um círculo em torno do fio o campo magnético é constante e tangente ao círculo.



Um fio reto e longo de raio  $R$  transporta uma corrente  $I$  que é uniformemente distribuída em sua seção reta circular. Encontre o campo magnético tanto no exterior como no interior do fio.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pode-se usar a lei de Ampère para calcular  $\vec{B}$  por causa do alto grau de simetria. A uma distância  $r$  (Figura 27-24), sabe-se que  $\vec{B}$  é tangente ao círculo de raio  $r$  em torno do fio e  $\vec{B}$  é constante em módulo em qualquer posição sobre o círculo. A corrente que atravessa a superfície  $S$  limitada por  $C$  depende de  $r$  ser menor ou maior que o raio do fio  $R$ .



**FIGURA 27-24**

1. A lei de Ampère é usada para relacionar a circulação de  $\vec{B}$  em torno da curva  $C$  à corrente passando através da superfície  $S$  limitada por  $C$ :
2. Determine a circulação de  $\vec{B}$  em torno de um círculo de raio  $r$  que é coaxial com o fio:
3. Substitua na lei de Ampère e resolva para  $B$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint_C d\ell = B2\pi r$$

$$B2\pi r = \mu_0 I_c$$

então

$$B = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$$

4. Na parte externa do fio,  $r > R$ , e a corrente total passa através da superfície limitada por  $C$ :

$$I_C = I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

5. Na parte interna do fio,  $r < R$ . Assuma que a corrente é uniformemente distribuída para resolver para  $I_C$ . Resolva para  $B$ :

$$\frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$

ou

$$\left( I_C = \frac{r^2}{R^2} I \right)$$

então

$$B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (r^2/R^2)I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2 r} \quad r \leq R$$

**NOTAS** Na parte interna do fio, o campo aumenta com a distância a partir do centro do fio. A Figura 27-25 mostra o gráfico de  $B$  versus  $r$  para esse exemplo.

Nota-se do Exemplo 27-9 que o campo magnético devido a uma corrente uniformemente distribuída em um fio de raio  $R$  é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (r \leq R)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

27-16

Para a próxima aplicação da lei de Ampère, calcula-se o campo magnético de um toróide, que consiste em espiras de fios enroladas em torno de uma forma geométrica similar à de uma "rosquinha" ou pneu de automóvel, como mostrado na Figura 27-26. Existem  $N$  voltas do fio, cada um transportando uma corrente  $I$ . Para calcular  $B$ , avalia-se a integral de linha  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$  em torno de um círculo de raio  $r$  centrado no meio do toróide. Por simetria,  $\vec{B}$  é tangente a esse círculo e constante em módulo em cada ponto sobre o círculo. Então,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

Sejam  $a$  e  $b$  os raízes interno e externo do toróide, respectivamente. A corrente total através da superfície  $S$  limitada por um círculo de raio  $r$  para  $a < r < b$  é  $NI$ . A lei de Ampère fornece então

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad \text{ou} \quad (B2\pi r = \mu_0 NI)$$

ou

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

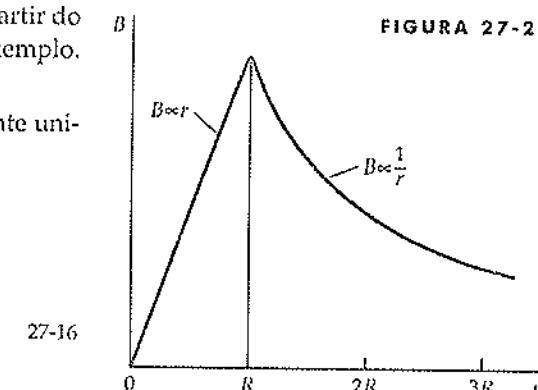


FIGURA 27-25

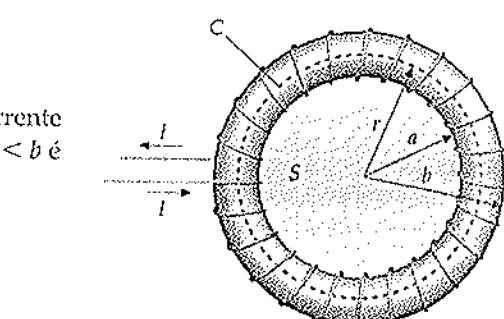


FIGURA 27-26

Um toróide consiste em espiras de fios em torno de uma forma geométrica similar à de um pneu de um carro ou de uma rosquinha. O campo magnético em qualquer distância  $r$  pode ser encontrado aplicando a lei de Ampère a um círculo de raio  $r$ . A superfície  $S$  é limitada pela curva  $C$ . O fio entra em  $S$  uma vez a cada volta.

Se  $r$  é menor que  $a$ , não existe corrente através da superfície  $S$ . Se  $r$  é maior que  $b$ , a corrente total através de  $S$  é nula porque para cada volta do fio a cor-

### B DENTRO DE UM TORÓIDE

rente penetra a superfície duas vezes (Figura 27-27), uma vez indo para dentro da página e outra vindo para fora da página. Assim, o campo magnético é zero para  $r < a$  e  $r > b$ :

$$B = 0, \quad r < a \quad \text{ou} \quad r > b$$

A intensidade do campo magnético dentro do toróide não é uniforme, mas diminui com o aumento de  $r$ . Entretanto, se o raio das espiras do enrolamento,  $(b-a)/2$ , é muito menor que o raio  $(b+a)/2$  do centro das espiras, a variação de  $r$  desde  $r = a$  até  $r = b$  é menor e  $B$  é aproximadamente uniforme, assim como em um solenóide.

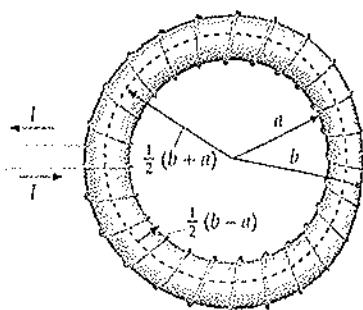
### Limitações da Lei de Ampère

A lei de Ampère é útil para calcular o campo magnético apenas quando existe uma corrente permanente e um elevado nível de simetria. Considere a espira com corrente mostrada na Figura 27-28. De acordo com a lei de Ampère, a integral de linha  $\oint_C \vec{B}_t \cdot d\ell = \oint_C B_t d\ell$  em torno de uma curva, tal como a curva C na figura, é igual a  $\mu_0$  vezes a corrente I na espira. Apesar de a lei de Ampère ser válida para essa curva, a componente tangencial do campo magnético  $B_t$  não é constante ao longo de qualquer curva envolvendo a corrente. Assim, não existe simetria suficiente nessa situação que permita avaliar a integral  $\oint_C B_t d\ell$  e resolver para  $B_t$ .

A Figura 27-29 mostra um elemento de corrente finito de comprimento  $\ell$ . Deseja-se encontrar o campo magnético no ponto P, que é equidistante das extremidades do segmento e a uma distância  $r$  do centro do segmento. A aplicação direta da lei de Ampère fornece

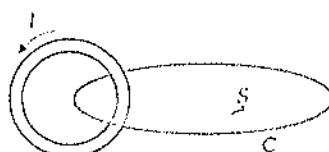
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Esse resultado é o mesmo encontrado para um fio infinitamente longo, uma vez que os mesmos argumentos de simetria se aplicam. Isso não concorda com o resultado obtido da lei Biot-Savart, que depende do comprimento do segmento



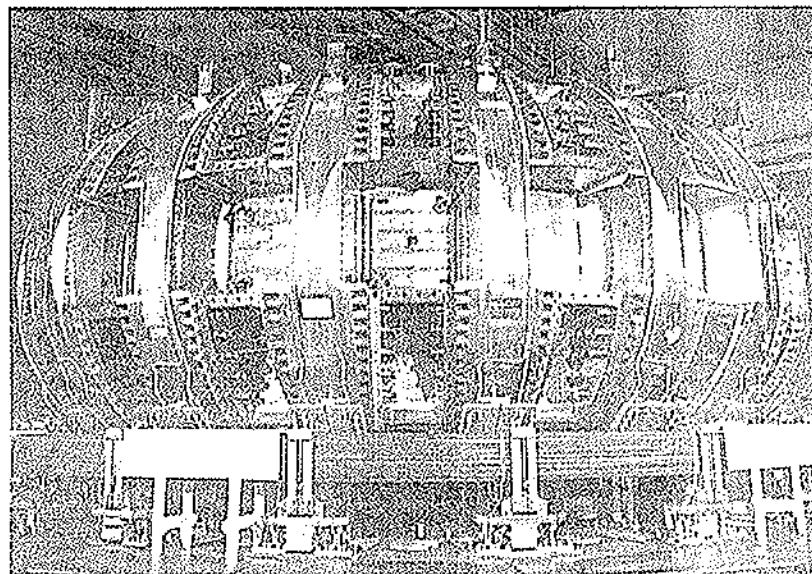
**FIGURA 27-27**

O toróide possui raio médio  $r = (b+a)/2$ , onde  $a$  e  $b$  são os raios interno e externo do toróide. Cada volta do fio é um círculo de raio  $(b-a)/2$ .



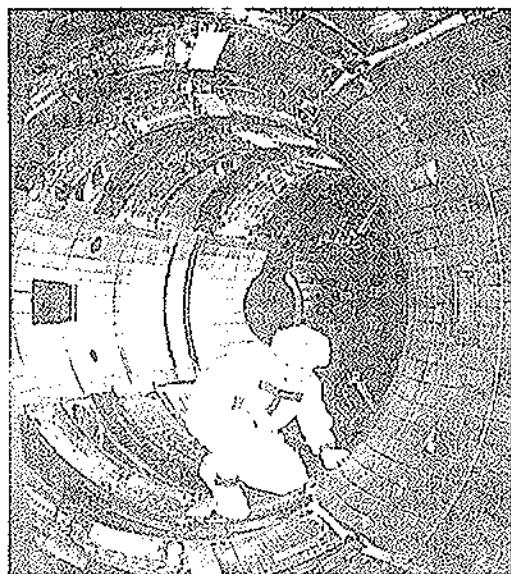
**FIGURA 27-28**

A lei de Ampère é válida para a curva C envolvendo a corrente em uma espira circular, mas não é útil para encontrar  $B_t$ , porque  $B_t$  não pode ser determinada pela integral de linha.



(a)

(a) O reator de fusão-teste de Tokamak é um grande toróide que produz um campo magnético para confinar partículas carregadas. Enrolamentos contendo mais de 10 km de fios de cobre refrigerados a água transportam uma corrente pulsada, que tem um valor de pico de 73.000 A e produz um campo de 5,2 T por cerca de 3 s. (b) Inspeção do aparato do reator de Tokamak visto de dentro do toróide.



(b)

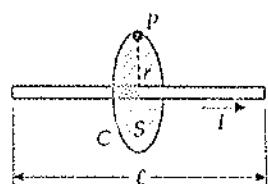
de corrente e que concorda com os experimentos. Se o segmento de corrente é apenas uma parte de um circuito contínuo transportando uma corrente, como mostrado na Figura 27-30, a lei de Ampère para a curva C é válida mas ela não pode ser usada para encontrar o campo magnético em um ponto P porque não existe simetria suficiente.

Na Figura 27-31, a corrente no segmento surge de um pequeno condutor esférico com carga inicial  $+Q$  na esquerda do segmento e de um outro pequeno condutor esférico na direita com carga  $-Q$ . Quando eles são conectados, existe uma corrente  $I = -dQ/dt$  no segmento por um curto instante, até que as esferas estejam descarregadas. Para esse caso, tem-se a simetria necessária para admitir que  $\vec{B}$  é tangencial à curva e  $\vec{B}$  é constante em módulo ao longo da curva. Para uma situação como essa, na qual a corrente não é contínua no espaço, a lei de Ampère não é válida. No Capítulo 30 será visto como Maxwell foi capaz de modificar a lei de Ampère de tal modo que ela ocorra para todas as condições de corrente. Quando a forma generalizada de Maxwell da lei de Ampère é usada para calcular o campo magnético de um segmento de corrente, tal como o segmento de corrente mostrado na Figura 27-31, o resultado concorda com aqueles encontrados pela lei de Biot-Savart.

### 27-5 Magnetismo nos Materiais

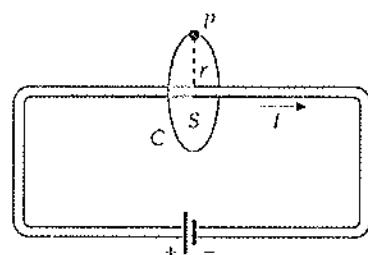
Os átomos possuem momento magnético dipolar devido ao movimento de seus elétrons e ao momento magnético dipolar intrínseco associado à rotação dos elétrons. Ao contrário do que ocorre com os dipolos elétricos, o alinhamento dos dipolos magnéticos paralelos a um campo magnético externo tende a *aumentar* o campo. Pode-se ver essa diferença comparando as linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico com as linhas de campo magnético de um dipolo magnético, como aquelas de uma pequena espira, mostradas na Figura 27-21. Longe dos dipolos, as linhas de campo são idênticas. Entretanto, entre as cargas do dipolo elétrico as linhas de campo elétrico estão em sentidos opostos ao do momento dipolar, enquanto dentro da espira com corrente as linhas de campo magnético são paralelas ao momento magnético dipolar. Assim, dentro de um material magneticamente polarizado os dipolos magnéticos criam um campo magnético que é paralelo aos vetores momento magnético dipolares.

Os materiais podem ser de três categorias — paramagnéticos, diamagnéticos e ferromagnéticos —, de acordo com o comportamento de seus momentos magnéticos em um campo magnético externo. O paramagnetismo surge de um alinhamento parcial das rotações dos elétrons (em metais) ou dos momentos magnéticos atômicos ou moleculares através de um campo magnético aplicado na direção do campo. Em materiais paramagnéticos, os dipolos magnéticos não interagem fortemente com os outros e estão normalmente orientados aleatoriamente. Na presença de um campo magnético aplicado, os dipolos são parcialmente alinhados na direção do campo, aumentando dessa forma o campo. Entretanto, em campos magnéticos externos de grandeza média e em temperaturas não muito elevadas apenas uma fração muito pequena das moléculas é alinhada, porque os movimentos térmicos tendem a tornar suas orientações aleatórias. O aumento no campo magnético total é, portanto, muito pequeno. O ferromagnetismo é muito mais complicado. Por causa de uma forte interação entre os dipolos magnéticos vizinhos, um alto grau de alinhamento ocorre mesmo em campos magnéticos fracos, o que causa um aumento muito elevado no campo total. Mesmo quando não há um campo magnético externo um material ferromagnético pode ter seus dipolos magnéticos alinhados, assim como em um imã permanente. O diamagnetismo surge do movimento orbital dos momentos magnéticos dipolares induzidos por um campo magnético aplicado. Esses



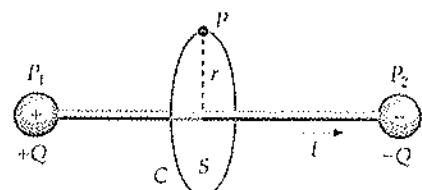
**FIGURA 27-29**

A aplicação da lei de Ampère para encontrar o campo magnético sobre o plano bissetor de um segmento finito com corrente fornece um resultado incorreto.



**FIGURA 27-30**

Se o segmento finito com corrente na Figura 27-29 é parte de um circuito completo, a lei de Ampère para a curva C é válida, mas não existe simetria suficiente para usar a lei de Ampère e encontrar o campo magnético no ponto P.



**FIGURA 27-31**

Se o segmento com corrente da Figura 27-29 é devido a um fluxo de carga momentâneo de um pequeno condutor na esquerda para um pequeno condutor na direita, existe simetria suficiente para usar a lei de Ampère e calcular o campo magnético em P, mas a lei de Ampère não é válida porque a corrente não é contínua no espaço.

momentos magnéticos estão em sentido oposto ao do campo magnético aplicado e, portanto, diminuindo o campo. Esse efeito realmente ocorre em todos os materiais; entretanto, como os campos magnéticos induzidos são muito pequenos, comparados com os momentos magnéticos permanentes, o diamagnetismo é normalmente mascarado pelos efeitos paramagnéticos ou ferromagnéticos. O diamagnetismo só é observado em materiais cujas moléculas não tenham momentos magnéticos permanentes.

### Magnetização e Suscetibilidade Magnética

Quando alguns materiais são colocados em um forte campo magnético, como o de um solenóide, o campo magnético do solenóide tende a alinhar os momentos magnéticos dipolares (tanto induzidos como permanentes) dentro do material, e o material é dito magnetizado. Descreve-se um material magnetizado por sua magnetização  $\vec{M}$ , que é definida como o momento magnético dipolar líquido por unidade de volume do material:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \quad 27-18$$

Muito antes de se ter qualquer compreensão sobre a estrutura atômica ou molecular, Ampère propôs um modelo de magnetismo no qual a magnetização dos materiais era devida a espiras com corrente microscópicas dentro do material magnetizado. Agora sabe-se que essas espiras com corrente são um modelo clássico para o movimento orbital e a rotação dos elétrons nos átomos. Considere um cilindro de um material magnetizado. A Figura 27-32 mostra as espiras atômicas com corrente no cilindro alinhadas com seus momentos magnéticos ao longo do eixo do cilindro. Por causa do cancelamento das espiras com corrente vizinhas, a corrente líquida em qualquer ponto interno do material é nula, deixando apenas uma corrente líquida sobre a superfície do material (Figura 27-33). Essa corrente superficial, chamada de corrente amperiana, é similar à corrente real nos enrolamentos de um solenóide.

A Figura 27-34 mostra um pequeno disco de área de seção reta  $A$ , comprimento  $d\ell$  e volume  $dV = A d\ell$ . Seja  $di$  a corrente amperiana sobre a superfície do disco. O módulo do momento magnético dipolar do disco é o mesmo de uma espira com corrente de área  $A$  transportando uma corrente  $di$ :

$$d\mu = A di$$

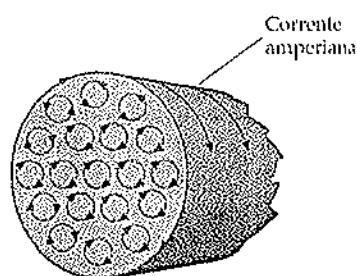
O módulo da magnetização do disco é o momento magnético por unidade de volume:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A di}{A d\ell} = \frac{di}{d\ell} \quad 27-19$$

Assim, o módulo do vetor magnetização é a corrente amperiana por unidade de comprimento ao longo da superfície do material magnetizado. Nota-se a partir desse resultado que a unidade de  $M$  é o ampère por metro.

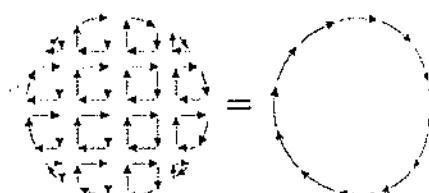
Considere um cilindro que possui uma magnetização uniforme  $\vec{M}$  paralela a seu eixo. O efeito da magnetização é o mesmo que ocorreria se o cilindro transportasse uma corrente superficial por unidade de comprimento de módulo  $M$ . Essa corrente é similar à corrente transportada por um solenóide. Para o solenóide, a corrente por unidade de comprimento é  $nI$ , onde  $n$  é o número de voltas por unidade de comprimento e  $I$  é a corrente em cada volta. O módulo do campo magnético  $B_m$  dentro do cilindro e longe de suas extremidades é dado então pela Equação 27-9 para um solenóide com  $nI$  substituído por  $M$ :

$$B_m = \mu_0 M \quad 27-20$$



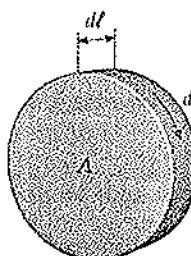
**FIGURA 27-32**

Um modelo para espiras de corrente atômicas nas quais todos os dipolos magnéticos são paralelos ao eixo do cilindro. A corrente líquida em qualquer ponto interno do material é nula devido ao cancelamento das átomos da vizinhança. O resultado é uma corrente superficial similar à de um solenóide.



**FIGURA 27-33**

As correntes nas adjacências das espiras de corrente no interior de um material uniformemente magnetizado cancelam-se, deixando apenas uma corrente superficial. O cancelamento ocorre em todos os pontos internos, independentemente da forma das espiras.



**FIGURA 27-34**

Um elemento de disco para relacionar a magnetização  $M$  com a corrente superficial por unidade de comprimento.

Suponha que um cilindro de material magnético é colocado dentro de um solenóide longo com  $n$  voltas por unidade de comprimento que transporta uma corrente  $I$ . O campo aplicado do solenóide  $\vec{B}_{ap}$  ( $B_{ap} = \mu_0 n I$ ) magnetiza o material de tal modo que ele passa a ter uma magnetização  $\vec{M}$ . O campo magnético resultante em um ponto dentro do solenóide e longe de suas extremidades, devido à corrente no solenóide mais o material magnetizado, é

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \vec{M} \quad 27-21$$

Para materiais paramagnéticos e ferromagnéticos,  $\vec{M}$  está na mesma direção de  $\vec{B}_{ap}$ ; para materiais diamagnéticos,  $\vec{M}$  é contrário a  $\vec{B}_{ap}$ . Para materiais paramagnéticos e diamagnéticos, a magnetização é proporcional ao campo magnético aplicado que produz o alinhamento dos dipolos magnéticos no material. Pode-se, assim, escrever

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_{ap}}{\mu_0} \quad 27-22$$

onde  $\chi_m$  é um número adimensional chamado de suscetibilidade magnética. A Equação 27-21 é, então,

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_{ap}(1 + \chi_m) = K_m \vec{B}_{ap} \quad 27-23$$

onde

$$K_m = 1 + \chi_m \quad 27-24$$

é chamada de permeabilidade relativa do material. Para os materiais paramagnéticos,  $\chi_m$  é um pequeno número positivo que depende da temperatura. Para materiais diamagnéticos (além dos supercondutores), ele é uma pequena constante negativa independente da temperatura. A Tabela 27-1 lista a suscetibilidade magnética para vários materiais paramagnéticos e diamagnéticos. Nota-se que a suscetibilidade magnética para os sólidos listados é da ordem de  $10^{-5}$ , e  $K_m \approx 1$ .

A magnetização de materiais ferromagnéticos, que foi brevemente discutida, é muito mais complicada. A permeabilidade relativa  $K_m$  definida como a razão  $B/B_{ap}$  não é constante e possui valores máximos entre 5000 e 100.000. No caso de ímãs permanentes,  $K_m$  não é nem definido, uma vez que tais materiais possuem magnetização mesmo na ausência de um campo aplicado.

### Momentos Magnéticos Atômicos

A magnetização de um material paramagnético ou ferromagnético pode ser relacionada com os momentos magnéticos permanentes dos átomos individuais ou dos elétrons do material. O momento magnético orbital de um elétron atômico pode ser determinado semiclassicamente, apesar de a sua origem ser a mecânica quântica. Considere uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  se movendo com velocidade  $v$  em um círculo de raio  $r$ , como mostrado na Figura 27-35. O módulo do momento angular da partícula é

$$L = mv r \quad 27-25$$

O módulo do momento magnético é o produto da corrente e da área do círculo

$$\mu = IA = I\pi r^2$$

Se  $T$  é o tempo para a carga completar uma volta, a corrente (carga passando em um ponto por unidade de tempo) é  $q/T$ . Uma vez que o período  $T$  é a distância  $2\pi r$  dividida pela velocidade  $v$ , a corrente é

TABELA 27-1

### Suscetibilidade Magnética de Vários Materiais a 20°C

Material	$\chi_m$
Alumínio	$2,3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$
Ouro	$-3,6 \times 10^{-5}$
Magnésio	$1,2 \times 10^{-5}$
Mercúrio	$-3,2 \times 10^{-5}$
Prata	$-2,6 \times 10^{-5}$
Sódio	$-0,24 \times 10^{-5}$
Titânio	$7,06 \times 10^{-5}$
Tungstênio	$6,8 \times 10^{-5}$
Hidrogênio (1 átomo)	$-9,9 \times 10^{-9}$
Dióxido de carbono (1 átomo)	$-2,3 \times 10^{-9}$
Nitrogênio (1 átomo)	$-5,0 \times 10^{-9}$
Oxigênio (1 átomo)	$2090 \times 10^{-9}$

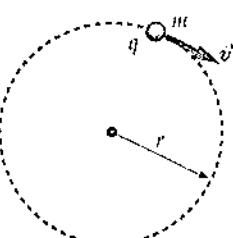


FIGURA 27-35

Uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  se movendo com velocidade  $v$  em um círculo de raio  $r$ . O momento angular é para dentro do papel e tem módulo  $mv r$ , e o momento magnético é para dentro do papel (se  $q$  é positivo) e tem módulo  $qvr/2$ .

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

O momento magnético é, então,

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr \quad 27-26$$

Usando  $vr = L/m$  a partir da Equação 27-25, tem-se para o momento magnético

$$\mu = \frac{q}{2m} L$$

Se a carga  $q$  é positiva, o momento angular e o momento magnético estão no mesmo sentido. Pode-se, desse modo, escrever

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad 27-27$$

#### Relação Clássica entre o Momento Magnético e o Momento Angular

A Equação 27-27 é a relação clássica geral entre o momento magnético e o momento angular. Ela também ocorre na teoria quântica do átomo para o momento angular orbital, mas a equação não é válida para o momento angular devido à rotação intrínseca do elétron. Para a rotação do elétron, o momento magnético é o dobro daquele predito por essa equação.<sup>4</sup> O fator extra de 2 é um resultado da teoria quântica que não possui analogia na mecânica clássica.

Uma vez que o momento angular é quantizado, o momento magnético de um átomo é também quantizado. O quantum de momento angular é  $\hbar = h/(2\pi)$ , onde  $h$  é a constante de Planck, e então se expressa o momento magnético em termos de  $\vec{L}/\hbar$

$$\vec{\mu} = \frac{qh}{2m} \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Para um elétron,  $m = m_e$  e  $q = -e$ , então o momento magnético do elétron devido ao seu movimento orbital é

$$\vec{\mu}_e = -\frac{eh}{2m_e \hbar} \vec{L} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad 27-28$$

#### Momento Magnético Devido ao Movimento Orbital de um Elétron

onde

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{eh}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \\ &= 5,79 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \end{aligned} \quad 27-29$$

#### MAGNÉTON DE BOHR

<sup>4</sup>Este resultado, e o fenômeno de rotação do elétron propriamente dito, foi previsto em 1927 por Paul Dirac, que combinou a relatividade e a mecânica quântica em uma equação de onda relativística chamada de equação de Dirac. Medidas precisas indicaram que o momento magnético do elétron devido à sua rotação é 2,00232 vezes aquela prevista pela Equação 27-27. O fato de que o momento magnético intrínseco de um elétron é aproximadamente o dobro daquele esperado torna claro que o simples modelo do elétron como uma bola que gira em torno do seu próprio eixo não deve ser adotado literalmente.

é a unidade quântica de momento magnético chamada de magnéton de Bohr. O momento magnético de um elétron devido ao momento angular de sua rotação intrínseca  $S$  é

$$\vec{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{S}}{\hbar} = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad 27-30$$

#### MOMENTO MAGNÉTICO DEVIDO À ROTAÇÃO DO ELÉTRON

Apesar de o cálculo do momento magnético de qualquer átomo ser um problema complicado na teoria quântica, o resultado para todos os elétrons, de acordo com a teoria e com experimentos, é que o momento magnético está na ordem de grandeza de alguns magnétons de Bohr. Para átomos com momento angular líquido nulo, o momento magnético líquido é zero. (A estrutura de casca dos átomos é discutida no Capítulo 36.)

Se todos os átomos ou moléculas em algum material possuem seus momentos magnéticos alinhados, o momento magnético por unidade de volume do material é o produto do número de moléculas por unidade de volume  $n$  e do momento magnético  $\mu$  de cada molécula. Para esse caso extremo, a magnetização de saturação  $M_s$  é

$$M_s = n\mu \quad 27-31$$

O número de moléculas por unidade de volume pode ser encontrado a partir da massa molecular  $M$ , da massa específica  $\rho$  do material e do número de Avogadro  $N_A$ :

$$n = \frac{N_A \text{ (átomos/mol)}}{M \text{ (kg/mol)}} \rho \text{ (kg/m}^3) \quad 27-32$$

**Encontre a magnetização de saturação e o campo magnético que ela produz para o ferro, presumindo que cada átomo do ferro possui um momento magnético de 1 magnéton de Bohr.**

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Encontra-se o número de moléculas por unidade de volume a partir da massa específica do ferro,  $\rho = 7,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , e sua massa molecular,  $M = 55,8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

1. A magnetização de saturação é o produto do número de moléculas por unidade de volume e do momento magnético de cada molécula:
2. Calcule o número de moléculas por unidade de volume a partir do número de Avogadro, da massa molecular e da massa específica:
3. Substitua esse resultado e  $\mu = 1$  magnéton de Bohr para calcular a magnetização de saturação:

$$M_s = n\mu$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_A}{M}\rho = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{55,8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} (7,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \\ &= 8,52 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_s &= n\mu \\ &= (8,52 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3)(9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2) \\ &= \boxed{7,90 \times 10^5 \text{ A/m}} \end{aligned}$$

4. O campo magnético sobre o eixo dentro de um longo cilindro de ferro resultante de sua máxima magnetização é dado por  $B = \mu_0 M_s$ :

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 M_s \\ &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{A})(7,90 \times 10^5 \text{ A/m}) \\ &= 0,993 \text{ T} \approx 1 \text{ T} \end{aligned}$$

**NOTAS** A saturação do campo magnético medida para o ferro recozido está em torno de 2,16 T, indicando que o momento magnético de um átomo de ferro é um pouco maior que 2 magnétons de Bohr. Esse momento magnético é devido principalmente à rotação de dois elétrons desemparelhados no átomo de ferro.

### \*Paramagnetismo

O paramagnetismo ocorre em materiais cujos átomos têm momentos magnéticos permanentes que interagem entre eles apenas fracamente, resultando em uma suscetibilidade magnética  $\chi_m$  positiva muito pequena. Quando não existe um campo magnético externo, esses momentos magnéticos estão aleatoriamente orientados. Na presença de um campo magnético externo, os momentos magnéticos tendem a se alinhar paralelamente ao campo, mas isso sofre a resistência da tendência de os momentos magnéticos se orientarem aleatoriamente devido ao movimento térmico. O grau de alinhamento dos momentos com o campo depende da intensidade do campo e da temperatura. Esse grau de alinhamento usualmente é pequeno, porque a energia do momento magnético em um campo magnético externo é tipicamente muito menor que a energia de um átomo do material, que é da ordem de  $kT$ , onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta.

A energia potencial de um dipolo magnético de momento  $\vec{\mu}$  em um campo magnético externo  $\vec{B}$  é dada pela Equação 26-16:

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

A energia potencial quando o momento é paralelo com o campo ( $\theta = 0$ ) é menor que quando o momento é antiparalelo ( $\theta = 180^\circ$ ) por uma quantidade  $2\mu B$ . Para um momento magnético atômico típico de 1 magnéton de Bohr e um campo magnético forte típico de 1 T, a diferença em energia potencial é

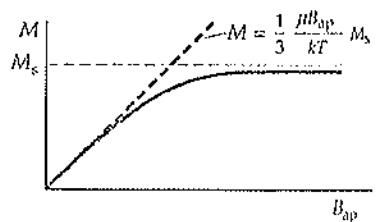
$$\Delta U = 2\mu_n B = 2(5,79 \times 10^{-5} \text{ eV/T})(1 \text{ T}) = 1,16 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

Na temperatura normal de  $T = 300 \text{ K}$ , a energia térmica típica  $kT$  é

$$kT = (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) \approx 2,59 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

que é mais de 200 vezes maior que  $2\mu_n B$ . Assim, mesmo em um campo magnético muito forte de 1 T a maioria dos momentos magnéticos estará aleatoriamente orientada por causa dos movimentos térmicos (a menos que a temperatura seja muito baixa).

A Figura 27-36 mostra um gráfico da magnetização  $M$  versus um campo magnético externo aplicado  $B_{ap}$  em uma dada temperatura. Em campos muito fortes, quase todos os momentos magnéticos estão alinhados com o campo, e  $M \approx M_s$ . (Para campos magnéticos obtidos em laboratórios, isso pode ocorrer apenas para temperaturas muito baixas.) Quando  $B_{ap} = 0$ ,  $M = 0$ , indicando que a orientação dos momentos é completamente aleatória. Em campos fracos, a magnetização é aproximadamente proporcional ao campo aplicado, como indicado pela linha tracejada grossa na figura. Nessa região, a magnetização é dada por



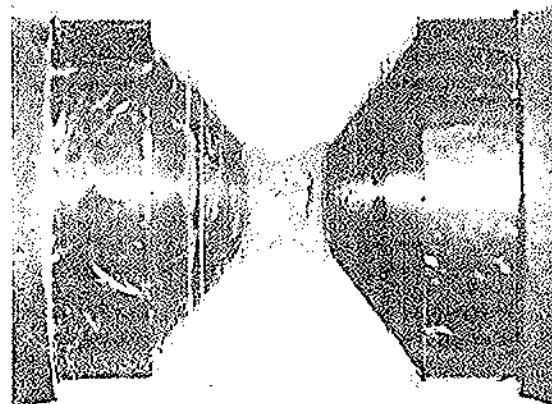
**FIGURA 27-36**  
Representação gráfica da magnetização  $M$  versus um campo magnético aplicado  $B_{ap}$ . Em campos muito intensos, a magnetização se aproxima do valor de saturação  $M_s$ . Isso pode ser atingido apenas em temperaturas muito baixas. Em campos fracos, a magnetização é aproximadamente proporcional a  $B_{ap}$ , um resultado conhecido como lei de Curie.

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s$$

27-33

## Lei de Curie

Note que  $\mu B_{ap}/(kT)$  é a razão da máxima energia de um dipolo em um campo magnético para a energia térmica característica. O resultado de que a magnetização varia inversamente com a temperatura absoluta foi descoberto experimentalmente por Pierre Curie, e é conhecido como lei de Curie.



**Se  $\mu = \mu_B$ , em qual temperatura a magnetização será 1% da magnetização de saturação em um campo magnético aplicado de 1 T?**

## DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. A lei de Curie relaciona  $M$ ,  $T$ ,  $M_s$  e  $B_{ap}$ :
2. Resolva para  $T$  usando  $\mu = \mu_B$  e  $M/M_s = 0,01$ :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s \\ T &= \frac{\mu_B B_{ap}}{3k} \frac{M_s}{M} = \frac{(5,79 \times 10^{-5} \text{ eV/T})(1 \text{ T})}{3(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} \cdot 100 \\ &= \boxed{22,4 \text{ K}} \end{aligned}$$

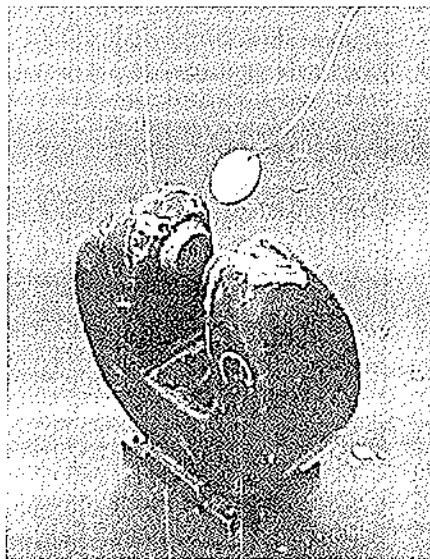
**NOTAS** A partir desse exemplo, nota-se que mesmo em um campo magnético aplicado elevado de 1 T a magnetização é menor que 1% da magnetização de saturação em temperaturas acima de 22,4 K.

**EXERCÍCIO** Se  $\mu = \mu_B$ , qual a razão entre  $M$  e a magnetização de saturação em 300 K para um campo magnético externo de 1,5 T? (Resposta  $M/M_s = 1,12 \times 10^{-3}$ )

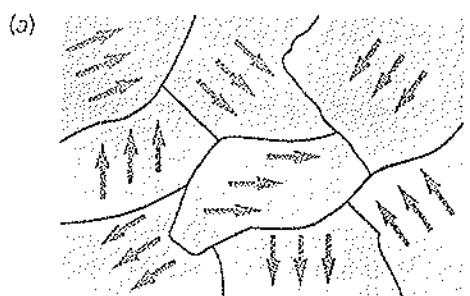
## \*Ferromagnetismo

O ferromagnetismo ocorre em ferro puro, no cobalto e no níquel, assim como em ligas desses metais com qualquer outro. Também ocorre no gadolinio, no disprósio e em uns poucos compostos. O ferromagnetismo surge da forte interação entre os elétrons em uma camada incompleta de um metal ou entre elétrons localizados que formam momentos magnéticos, ou na vizinhança de átomos ou moléculas. Essa interação, chamada de interação de câmbio, diminui a energia de um par de elétrons com rotações paralelas.

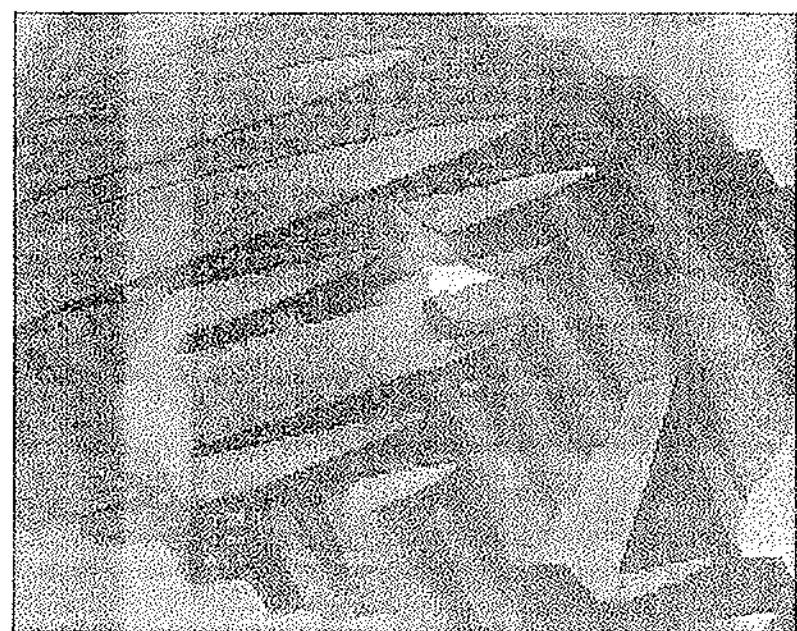
Os materiais ferromagnéticos têm valores de suscetibilidade magnética positivos muito elevados  $\chi_m$  (quando medidos nas condições descritas, que se seguem). Nessas substâncias, um pequeno campo magnético externo pode produzir um grau muito elevado de alinhamento dos momentos magnéticos dipolares atômicos. Em alguns casos, o alinhamento pode persistir mesmo quando o campo magnetizador externo é removido. Esse alinhamento persiste porque os momentos magnéticos dipolares exercem forças elevadas sobre seus vizinhos, de tal modo que em uma região do espaço os momentos são alinhados um com o outro mesmo que não exista campo externo. A região do espaço na qual os momentos magnéticos dipolares estão alinhados é chamada de domínio magnético. O tamanho de um domínio é usualmente microscópico. Dentro



Uma pequena moeda é atraída por um ímã. A moeda normalmente contém significativas quantidades de níquel, que é ferromagnético.



(a)



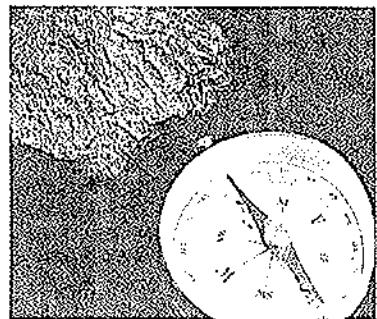
(b)

**FIGURA 27-37**

(a) Ilustração esquemática de um domínio ferromagnético. Dentro de um domínio, os dipólos magnéticos estão alinhados, mas a direção de alinhamento varia de domínio para domínio de tal modo que o momento magnético líquido é nulo. Um pequeno campo magnético externo pode causar um aumento daqueles domínios que estão alinhados paralelamente ao campo, ou pode causar uma rotação no alinhamento interno de um domínio. Em qualquer caso, o resultado é um momento magnético líquido paralelo ao campo. (b) Domínios magnéticos sobre a superfície de um cristal de Fe com 3% de Si observados usando um microscópio eletrônico de varredura com análise de polarização. Os diferentes tons de cinza indicam quatro possíveis orientações dos domínios. (Veja encarte em cores.)

do domínio, todos os momentos magnéticos atômicos permanentes estão alinhados, mas a direção do alinhamento varia de domínio para domínio de tal modo que o momento magnético líquido de um pedaço macroscópico de material ferromagnético é nulo no estado normal. A Figura 27-37 ilustra essa situação. As forças dipolares que produzem esse alinhamento são preditas pela teoria quântica, mas não podem ser explicadas pela física clássica. Em temperaturas acima da crítica, chamada de temperatura de Curie, a agitação térmica é grande o suficiente para quebrar esse alinhamento, e os materiais ferromagnéticos tornam-se paramagnéticos.

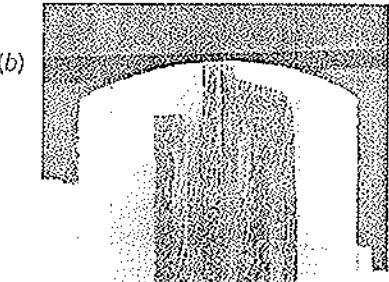
Quando um campo magnético externo é aplicado, os limites dos domínios podem se deslocar ou a direção de alinhamento dentro de um domínio pode variar de tal modo que existe um momento magnético macroscópico líquido na direção do campo aplicado. Uma vez que o grau de alinhamento é alto mesmo



Um pedaço de magnetita atrai a agulha de uma bússola.



(a)



(a) As linhas de campo magnético sobre uma fita de gravação magnética de cobalto. As setas sólidas indicam os bits gravados na fita. (b) Seção reta da cabeça de gravação de uma fita magnética. A corrente de um amplificador de áudio é enviada para os fios em torno do núcleo magnético na cabeça de gravação, onde produz um campo magnético. Quando a fita passa através de um espaço vazio no núcleo da cabeça de gravação, é magnetizada pelo campo e as informações ficam armazenadas na forma de diferentes sentidos de magnetização, como mostrado em (a).



para um pequeno campo externo, o campo magnético produzido no material pelos dipolos é normalmente muito maior que o campo externo.

Considere-se agora o que acontece quando se magnetiza uma haste longa de ferro colocando-a dentro de um solenóide, gradualmente aumentando a corrente nos enrolamentos desse solenóide. Admita-se que a haste e o solenóide são longos o suficiente para permitir desprezar os efeitos de extremidade. Uma vez que os momentos magnéticos induzidos estão na mesma direção que o campo aplicado,  $\vec{B}_{ap}$  e  $\vec{M}$  estão na mesma direção. Então,

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = \mu_0 n I + \mu_0 M \quad 27-34$$

Em materiais ferromagnéticos, o campo magnético  $\mu_0 M$  devido aos momentos magnéticos é normalmente maior que o campo de magnetização  $B_{ap}$  por um fator de vários milhares.

A Figura 27-38 mostra um gráfico de  $B$  versus o campo magnetizador  $B_{ap}$ . Conforme a corrente gradualmente aumenta desde zero,  $B$  aumenta de zero ao longo da parte da curva da origem  $O$  até o ponto  $P_1$ . O patamar dessa curva próximo ao ponto  $P_1$  indica que a magnetização  $M$  está se aproximando de seu valor de saturação  $M_s$ , no qual todos os momentos magnéticos atômicos estão alinhados. Acima da saturação,  $B$  aumenta apenas porque o campo magnetizador  $B_{ap} = \mu_0 n I$  aumenta. Quando  $B_{ap}$  é gradualmente diminuído desde o ponto  $P_1$ , não existe uma correspondente diminuição na magnetização. O deslocamento dos domínios em um material ferromagnético não é completamente reversível, e alguma magnetização permanece mesmo quando  $B_{ap}$  é reduzida para zero, como indicado na figura. Esse efeito é chamado de histerese, a partir da palavra grega *hysteros*, significando *posterior* ou *atrás*, e a curva na Figura 27-38 é chamada de curva de histerese. O valor do campo magnético em um ponto  $P_4$ , quando  $B_{ap}$  é zero, é chamado de campo remanescente  $B_{rem}$ . Nesse ponto, a haste de ferro é um ímã permanente. Se a corrente no solenóide é agora invertida, de modo que  $B_{ap}$  está no sentido oposto, o campo magnético  $B$  é gradualmente levado a zero no ponto  $c$ . A parte restante da curva de histerese é obtida aumentando gradativamente a corrente no sentido oposto até que o ponto  $P_2$  seja atingido, o que corresponde à saturação no sentido oposto, e então diminui-se a corrente até zero no ponto  $P_3$  e aumenta-se novamente no seu sentido original.

Uma vez que a magnetização  $M$  depende da história prévia do material e que se pode ter um valor elevado mesmo quando o campo aplicado é zero, não é simples relacioná-la ao campo aplicado  $B_{ap}$ . Entretanto, se a análise for restrita à parte da curva de magnetização desde a origem até o ponto  $P_1$  na Figura 27-38,  $\vec{B}_{ap}$  e  $\vec{M}$  são paralelos e  $M$  é zero quando  $B_{ap}$  é zero. Pode-se, então, definir a suscetibilidade magnética como na Equação 27-22,

$$M = \chi_m \frac{B_{ap}}{\mu_0}$$

TABELA 27-2

**Valores Máximos de  $\mu_0 M$  e  $K_m$  para Alguns Materiais Ferromagnéticos**

Material	$\mu_0 M_s$ , T	$K_m$
Ferro (recozido)	2,16	5.500
Ferro-silício (96% Fe, 4% Si)	1,95	7.000
Permalloy (55% Fe, 45% Ni)	1,60	25.000
Mu-metal (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0,65	100.000

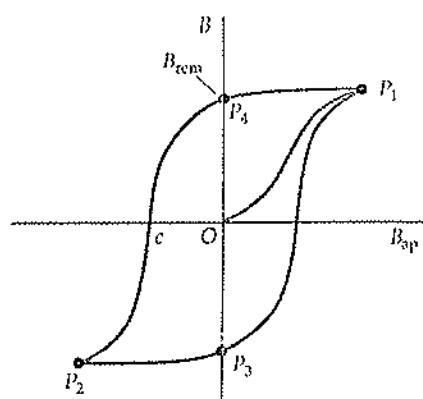


FIGURA 27-38  
Representação gráfica de  $B$  versus o campo magnetizador aplicado  $B_{ap}$ . A curva externa é chamada de curva de histerese. O campo  $B_{rem}$  é chamado de campo remanescente. Ele permanece quando o campo aplicado retorna a zero.

c

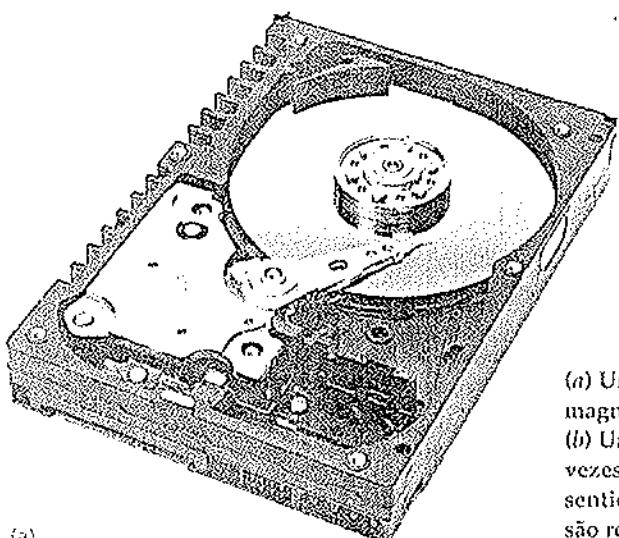
$$B = B_{ap} + \mu_0 M = B_{ap}(1 + \chi_m) = K_m \mu_0 n l = \mu n l \quad 27-35$$

onde

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 = K_m \mu_0 \quad 27-36$$

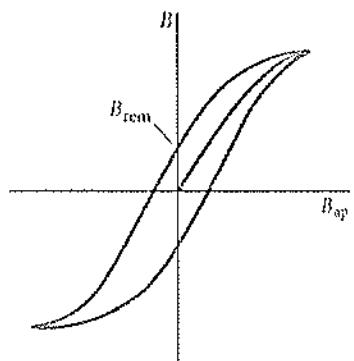
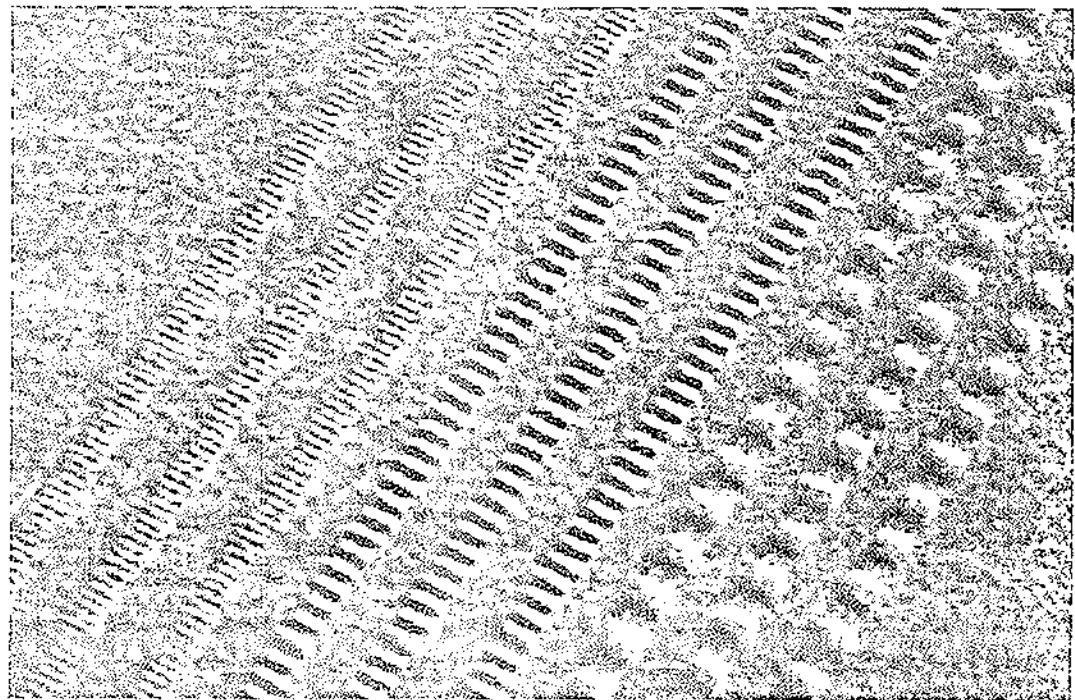
é chamada de permeabilidade do material. (Para materiais paramagnéticos e diamagnéticos  $\chi_m$  é muito menor que 1, e então a permeabilidade  $\mu$  e a permeabilidade do espaço livre  $\mu_0$  são muito próximas.)

Uma vez que  $B$  não varia linearmente com  $B_{ap}$ , como pode ser visto na Figura 27-38, a permeabilidade relativa não é constante. O valor máximo de  $K_m$  ocorre para uma magnetização que é consideravelmente menor que a magnetização de saturação. A Tabela 27-2 lista o campo magnético de saturação  $\mu_0 M_s$  e os valores máximos de  $K_m$  para alguns materiais ferromagnéticos. Note que os valores máximos de  $K_m$  são muito maiores que 1.



(a)

(a) Um disco rígido de elevada capacidade, para armazenamento magnético de informações, capaz de armazenar mais de 250 gigabytes.  
 (b) Um teste de estrutura magnética sobre o disco rígido, ampliado 2400 vezes. As regiões claras e escuras correspondem a campos magnéticos de sentidos opostos. As regiões uniformes na parte externa das estruturas são regiões do disco que foram apagadas e não estão magnetizadas.

**FIGURA 27-39**

Curva de histerese para um material magneticamente macio. O campo remanescente é muito pequeno, comparado com o campo remanescente para um material magneticamente duro, como aquele mostrado na Figura 27-38.

A área envolvida pela curva de histerese é proporcional à energia dissipada como calor no processo irreversível de magnetização e desmagnetização. Se o efeito de histerese é pequeno, então a área dentro da curva é pequena, indicando uma pequena perda de energia, e o material é chamado de magnéticamente macio. Ferro macio é um exemplo. A curva de histerese para um material magnéticamente macio é mostrada na Figura 27-39. Aqui o campo remanescente  $B_{rem}$  é próximo de zero e a perda de energia por ciclo é pequena. Materiais magnéticamente macios são usados em núcleos de transformadores para permitir que o campo magnético varie sem que ocorram grandes perdas de energia conforme o campo se alterna. Por outro lado, um campo remanescente elevado é desejável em um ímã permanente. Materiais magnéticamente duros, tais como o aço carbono e a liga Alnico 5, são usados para ímãs permanentes.

### Problema 27-1

Um longo solenóide com 12 voltas por centímetro tem um núcleo de ferro reforçado. Quando a corrente é de 0,50 A, o campo magnético no interior do núcleo de ferro é de 1,36 T. Encontre (a) o campo aplicado  $B_{ap}$ , (b) a permeabilidade relativa  $K_m$  e (c) a magnetização  $M$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo aplicado é aquele para um solenóide longo dado por  $B_{ap} = \mu_0 nI$ . Uma vez que o campo magnético total é dado, pode-se encontrar a permeabilidade relativa a partir de sua definição ( $K_m = B/B_{ap}$ ), e pode-se encontrar  $M$  a partir de  $B = B_{ap} + \mu_0 M$ .

- O campo magnético aplicado é dado pela Equação 27-9: 
$$\begin{aligned} B_{ap} &= \mu_0 nI \\ &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A})(1200 \text{ voltas/m})(0,5 \text{ A}) \\ &= 7,54 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

- A permeabilidade relativa é dada pela razão de  $B$  por  $B_{ap}$ : 
$$K_m = \frac{B}{B_{ap}} = \frac{1,36 \text{ T}}{7,54 \times 10^{-4} \text{ T}} = 1,80 \times 10^3$$

- A magnetização  $M$  é encontrada a partir da Equação 27-34: 
$$\begin{aligned} \mu_0 M &= B - B_{ap} \\ &= 1,36 \text{ T} - 7,54 \times 10^{-4} \text{ T} \approx B = 1,36 \text{ T} \end{aligned}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,36 \text{ T}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}} = \boxed{1,08 \times 10^6 \text{ A/m}}$$

**NOTAS** O campo magnético aplicado de  $7,54 \times 10^{-4}$  T é uma fração desprezível do campo magnético total de 1,36 T. Note que o valor para  $K_m$  de 1800 é consideravelmente menor que o valor máximo de 5500 na Tabela 27-2. Note também a suscetibilidade  $\chi_m = K_m - 1 \approx K_m$  com a acurácia de três dígitos com a qual foi calculado  $K_m$ .

### \*Diamagnetismo

Materiais diamagnéticos são aqueles que possuem valores negativos muito pequenos de suscetibilidade magnética  $\chi_m$ . O diamagnetismo foi descoberto por Michael Faraday em 1845, quando ele verificou que um pedaço de bismuto era repelido por ambos os pólos de um ímã, indicando que o campo externo do ímã induz um momento magnético no bismuto no sentido oposto ao do campo.

Pode-se entender esse efeito qualitativamente a partir da Figura 27-40, que mostra duas cargas positivas se movendo em órbitas circulares com a mesma velocidade, mas em sentidos opostos. Os seus momentos magnéticos estão em

sentidos opostos e, portanto, se cancelam.<sup>1</sup> Na presença de um campo magnético externo  $\vec{B}$  direcionado para dentro do papel, as cargas experimentam uma força extra  $q\vec{v} \times \vec{B}$  que está na direção radial. Para a carga da esquerda, essa força extra é para dentro, aumentando a força centrípeta. Se a carga deve permanecer na mesma órbita circular, ela deve aumentar sua velocidade de tal modo que  $mv^2/r$  se iguale à força centrípeta total.<sup>2</sup> Seu momento magnético, que é para fora, é assim aumentado. Para a carga da direita a força adicional é para fora, então a partícula deve diminuir sua velocidade para manter sua órbita circular. Seu momento magnético, que está para dentro, é diminuído. Em cada caso, a variação no momento magnético das cargas está na direção para fora da página, oposta àquela do campo magnético externo. Uma vez que os momentos magnéticos permanentes das duas cargas são iguais e opostamente direcionados, eles somam zero, deixando apenas os momentos magnéticos induzidos, que são ambos opostos à direção do campo magnético aplicado.

Um material será diamagnético se seus átomos tiverem momento angular líquido nulo e, portanto, sem momento magnético permanente. (O momento angular líquido de um átomo depende da estrutura eletrônica do átomo, que é um tema a ser estudado no Capítulo 35.) Os momentos magnéticos induzidos que causam diamagnetismo possuem módulos da ordem de  $10^{-5}$  magnétons de Bohr. Uma vez que isso é muito menor que os momentos magnéticos permanentes dos átomos de materiais paramagnéticos ou ferromagnéticos, o efeito diamagnético desses átomos é mascarado pelo alinhamento dos seus momentos magnéticos permanentes. Entretanto, uma vez que esse alinhamento diminui com a temperatura, todos os materiais são teoricamente diamagnéticos em temperaturas suficientemente altas.

Quando um supercondutor é colocado em um campo magnético externo, correntes são induzidas sobre a superfície do supercondutor de tal modo que o campo magnético líquido no supercondutor é nulo. Considere uma haste

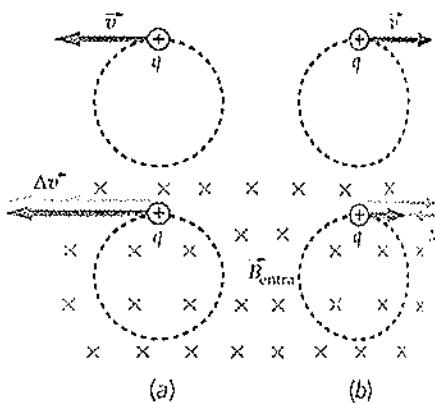
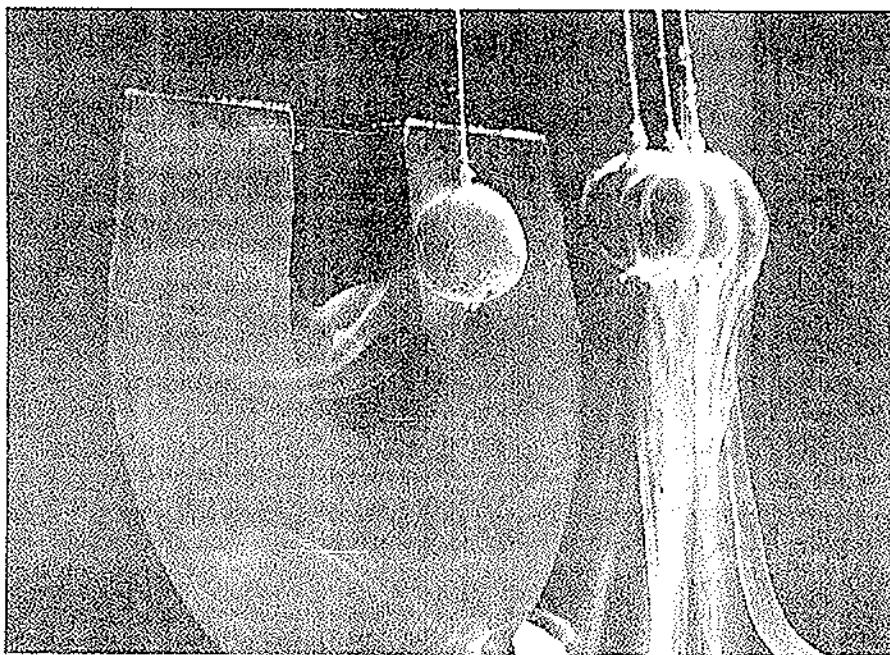


FIGURA 27-40

(a) Uma carga positiva se movendo no sentido anti-horário em um círculo tem seu momento magnético direcionado para fora da página. Quando um campo magnético externo, direcionado para dentro da página, é ligado, a força magnética aumenta a força centrípeta de tal modo que a velocidade da partícula deve aumentar. A variação no momento magnético é para fora da página. (b) Uma carga positiva se movendo no sentido horário em um círculo possui seu momento magnético direcionado para dentro da página. Quando um campo magnético externo, direcionado para dentro da página é ligado, a força magnética diminui a força centrípeta de tal modo que a velocidade da partícula deve diminuir. Como em (a), a variação do momento magnético é direcionada para fora da página.



Um supercondutor é um diamagneto perfeito. O pêndulo com uma esfera supercondutora é repelido pelo imã permanente.

<sup>1</sup>É mais simples considerar cargas positivas, apesar de serem os elétrons negativamente carregados que fornecem momentos magnéticos nos materiais.

<sup>2</sup>A velocidade do elétron aumenta por causa do campo elétrico induzido pelo campo magnético variante, um efeito chamado de indução, que será discutido no Capítulo 28.

supercondutora dentro de um solenóide de  $n$  voltas por unidade de comprimento. Quando o solenóide é conectado a uma fonte de fem para transportar uma corrente  $I$ , o campo magnético devido ao solenóide é  $\mu_0 n I$ . Uma corrente superficial de  $-nI$  por unidade de comprimento é induzida sobre a haste supercondutora, que cancela o campo devido ao solenóide de tal modo que o campo líquido dentro do supercondutor é zero. A partir da Equação 27-23,

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ap}}(1 + \chi_m) = 0$$

então

$$\chi_m = -1$$

Um supercondutor é, portanto, um diamagnético perfeito com suscetibilidade magnética de  $-1$ .

## RESUMO

1. Campos magnéticos surgem de cargas móveis, portanto a partir de correntes.
2. A lei de Biot-Savart descreve o campo magnético produzido por um elemento de corrente.
3. A lei de Ampère relaciona a integral de linha do campo magnético ao longo de alguma curva fechada à corrente que passa através de qualquer superfície limitada pela curva.
4. O vetor magnetização  $\vec{M}$  descreve o momento magnético por unidade de volume de matéria.
5. A relação clássica  $\vec{\mu} = [q/(2m)] \vec{L}$  é derivada a partir das definições do momento angular do momento magnético.
6. O magnéton de Bohr é uma unidade conveniente para os momentos magnéticos atômico e nuclear.

Tópicos	Equações e Observações Importantes
1. Campo Magnético $\vec{B}$	
Devido a uma carga pontual móvel	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad 27-1$ onde $\hat{r}$ é um vetor unitário que aponta para o ponto do campo $P$ a partir da carga $q$ se movendo com velocidade $\vec{v}$ , e $\mu_0$ é uma constante de proporcionalidade chamada de permeabilidade do espaço livre: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad 27-2$
Devido a um elemento de corrente (lei de Biot-Savart)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad 27-3$
Sobre o eixo de uma espira com corrente	$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 27-5$
Sobre o eixo de uma espira com corrente, a uma grande distância da espira	$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{ x ^3} \quad 27-6$ onde $\mu$ é o módulo do momento magnético da espira.

Dentro de um solenóide, longe das suas extremidades	$B_x = \mu_0 n I$	
	onde $n$ é o número de voltas por unidade de comprimento.	27-9
Devido a um segmento de fio reto	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$	27-11
	onde $R$ é a distância perpendicular ao fio e $\theta_1$ e $\theta_2$ são os ângulos subtendidos no ponto do campo pelas extremidades do fio.	
Devido a um fio longo e reto	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$	27-12
	A direção de $\vec{B}$ é tal que as linhas de campo magnético de $\vec{B}$ circulam o fio na direção dos dedos da mão direita, se o polegar apontar na direção da corrente.	
Dentro de um toróide	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad a < r < b$	27-17
2. Linhas de Campo Magnético	O campo magnético é indicado em qualquer ponto por linhas paralelas a $\vec{B}$ cuja densidade é proporcional ao módulo de $\vec{B}$ . As linhas magnéticas não iniciam nem terminam em qualquer ponto do espaço. Em vez disso, elas formam espiras contínuas.	
3. Lei de Gauss para o Magnetismo	$\oint_{\text{m, líquido}} B_n dA = 0$	27-14
4. Pólos Magnéticos	Pólos magnéticos sempre ocorrem em pares. Pólos magnéticos isolados não são encontrados.	
5. Lei de Ampère	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$	27-15
	onde C é qualquer curva fechada.	
Validade da lei de Ampère	A lei de Ampère é válida apenas se as correntes forem permanentes e contínuas. Ela pode ser usada para desenvolver expressões para o campo magnético para situações com um elevado grau de simetria, tal como um fio longo reto transportando corrente ou um longo solenóide.	
6. Magnetismo nos Materiais	Os materiais podem ser classificados como paramagnéticos, ferromagnéticos ou diamagnéticos.	
Magnetização	Um material magnetizado é descrito por seu vetor magnetização $\vec{M}$ , que é definido como o momento líquido do dipolo magnético por unidade de volume de material:	
	$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV}$	27-16
	O campo magnético devido a um cilindro uniformemente magnetizado é o mesmo que haveria se o cilindro transportasse uma corrente por unidade de comprimento de módulo $M$ sobre sua superfície. Essa corrente, que é devida ao movimento intrínseco das cargas atômicas no cilindro, é chamada de corrente amperiana.	
7. $\vec{B}$ em Materiais Magnéticos	$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \vec{M}$	27-21
Susceptibilidade magnética $\chi_m$	$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_{ap}}{\mu_0}$	27-22
	Para materiais paramagnéticos, $\chi_m$ é um número positivo pequeno, que depende da temperatura. Para materiais diamagnéticos (além dos semicondutores), é uma pequena constante negativa independente da temperatura. Para supercondutores, $\chi_m = -1$ . Para materiais ferromagnéticos, a magnetização de-	

pende não apenas da corrente magnetizadora, mas também da história passada do material.

#### Permeabilidade relativa

$$\vec{B} = K_m \vec{B}_{ap}$$

27-23

onde

$$K_m = 1 + \chi_m$$

27-24

#### §. Momentos Magnéticos Atômicos

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

27-27

onde  $\vec{L}$  é o momento angular orbital da partícula.

#### Devido ao movimento orbital de um elétron

$$\vec{\mu}_l = \frac{e\hbar}{2m_e} \vec{L} = -\mu_0 \vec{L}$$

27-28

#### Devido à rotação do elétron

$$\vec{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e} \vec{S} = -2\mu_0 \vec{S}$$

27-30

#### Magneton de Bohr

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$= 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T} = 5,79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

27-29

onde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

e  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  é a constante de Planck.

#### \*9. Paramagnetismo

Materiais paramagnéticos apresentam momentos magnéticos atômicos permanentes que têm direções aleatórias na ausência de um campo magnético aplicado. Com um campo magnético aplicado esses dipolos são alinhados com o campo em algum grau, produzindo uma pequena contribuição para o campo total que é adicionada ao campo aplicado. O grau de alinhamento é pequeno, exceto em campos muito fortes e em temperaturas muito baixas. Em temperaturas normais, o movimento térmico tende a manter as direções aleatórias dos momentos magnéticos.

#### Lei de Curie

Em campos fracos, a magnetização é aproximadamente proporcional ao campo aplicado e inversamente proporcional à temperatura absoluta.

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s$$

27-33

#### \*10. Ferromagnetismo

Os materiais ferromagnéticos possuem pequenas regiões do espaço chamadas de domínios magnéticos, nas quais os momentos magnéticos atômicos permanentes são alinhados. Quando o material é desmagnetizado, a direção de alinhamento em um domínio é independente daquela do outro domínio, de tal modo que nenhum momento magnético líquido é produzido. Quando o material é magnetizado, os domínios de um material ferromagnético são alinhados, produzindo uma contribuição muito forte para o campo magnético. Esse alinhamento pode persistir mesmo quando o campo externo é removido, deixando desse modo o material permanentemente magnetizado.

#### \*11. Diamagnetismo

Os materiais diamagnéticos são aqueles nos quais os momentos magnéticos de todos os elétrons em cada átomo se cancelam, deixando cada átomo com um momento magnético nulo na ausência de um campo externo. Em um campo externo, um momento magnético muito pequeno é induzido, tendendo a enfraquecer o campo. Esse efeito é independente da temperatura. Supercondutores são diamagnéticos com uma suscetibilidade magnética igual a -1.

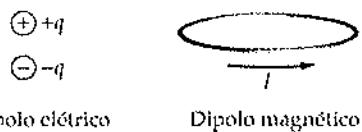
## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil.
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador
- ◀ Problema que pode ser resolvido com auxílio de planilha

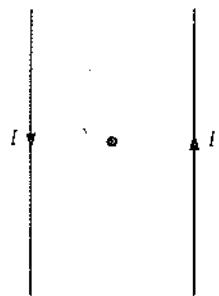
### Problemas Conceituais

- 1 • Compare as direções das forças elétricas e magnéticas entre duas cargas positivas que se movem ao longo de trajetórias paralelas (a) no mesmo sentido e (b) em sentidos opostos.
- 2 •  $\vec{B}$  é uniforme em algum lugar em uma espira com corrente? Explique.
- 3 • Esboce as linhas de campo para o dipolo elétrico e para o dipolo magnético mostrados na Figura 27-41. Como eles diferem em aparência próximo do centro de cada dipolo?



**FIGURA 27-41**  
Problema 3

- 4 • Dois fios encontram-se no plano do papel e transportam correntes iguais em sentidos opostos, como mostrado na Figura 27-42. Em um ponto no meio dos dois fios o campo magnético é (a) zero. (b) para dentro da página. (c) para fora da página. (d) para cima ou para baixo da página. (e) para um dos dois fios.



**FIGURA 27-42**  
Problema 4

- 5 • Dois fios paralelos transportam correntes  $I_1$  e  $I_2 = 2I_1$  no mesmo sentido. As forças  $F_1$  e  $F_2$  sobre os fios são relacionadas por (a)  $F_1 = F_2$ . (b)  $F_1 = 2F_2$ . (c)  $2F_1 = F_2$ . (d)  $F_1 = 4F_2$ . (e)  $4F_1 = F_2$ .

- 6 • Um fio transporta uma corrente elétrica. Qual é a direção do campo magnético devido ao fio a uma distância de 2 m ao norte do fio? (a) Norte. (b) Leste. (c) Oeste. (d) Sul. (e) Para cima.

- 7 • Dois fios transportando corrente são perpendiculares

entre si. A corrente de um fio flui verticalmente para cima e a corrente no outro fio flui horizontalmente para o leste. O fio horizontal está a 1 m ao sul do fio vertical. Qual é a direção da força magnética sobre o fio horizontal? (a) Norte (b) Leste (c) Oeste (d) Sul (e) Não existe força magnética líquida sobre o fio horizontal.

- 8 • Faça um esboço das linhas de campo do campo magnético devido às correntes no par de enrolamentos coaxiais (Figura 27-43). As correntes nos enrolamentos têm o mesmo módulo e estão no mesmo sentido em cada enrolamento.



**FIGURA 27-43**  
Problemas 8 e 9

- 9 • Faça um esboço das linhas de campo do campo magnético devido às correntes no par de enrolamentos coaxiais (Figura 27-43). As correntes nos enrolamentos têm o mesmo módulo, mas estão em sentidos opostos em cada enrolamento.

- 10 • A lei de Ampère é válida (a) quando existe um alto grau de simetria. (b) quando não existe simetria. (c) quando a corrente é constante. (d) quando o campo magnético é constante. (e) em todas essas situações, se a corrente é contínua.

- 11 • Verdadeiro ou falso:

- (a) Diamagnetismo é o resultado de momentos magnéticos dipolares induzidos.
- (b) Paramagnetismo é o resultado do alinhamento parcial dos momentos magnéticos dipolares permanentes.

- 12 • Se a susceptibilidade magnética é positiva, (a) os efeitos paramagnéticos ou os efeitos ferromagnéticos devem ser maiores que os efeitos diamagnéticos. (b) os efeitos diamagnéticos devem ser maiores que os efeitos paramagnéticos. (c) os efeitos diamagnéticos devem ser maiores que os efeitos ferromagnéticos. (d) os efeitos ferromagnéticos devem ser maiores que os efeitos paramagnéticos. (e) os efeitos paramagnéticos devem ser maiores que os efeitos ferromagnéticos.

- 13 • Verdadeiro ou falso:

- (a) O campo magnético devido a um elemento de corrente é paralelo ao elemento de corrente.

- (b) O campo magnético devido a um elemento de corrente varia inversamente com o quadrado da distância ao elemento.  
 (c) O campo magnético devido a um fio longo varia inversamente com o quadrado da distância ao fio.  
 (d) A lei de Ampère é válida apenas se existe um alto grau de simetria.  
 (e) A lei de Ampère é válida apenas para correntes contínuas.
- 14 • Pode uma partícula apresentar um momento angular e não ter um momento magnético?
- 15 • Pode uma partícula ter um momento magnético e não ter momento angular?
- 16 • Uma espira circular de fios transporta uma corrente  $I$ . Existe momento angular associado ao momento magnético da espira? Se positivo, por que isso não é observado?
- 17 • Um tubo vazado transporta uma corrente  $I$ . Dentro do tubo  $\vec{B} = 0$ . Por que isso ocorre, se  $\vec{B}$  é forte no interior do solenóide?
- 18 • Quando uma corrente passa através do fio na Figura 27-44, o fio tende a se dobrar ou formar um círculo?

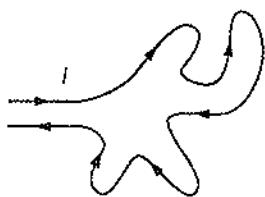


FIGURA 27-44  
Problema 18

- 19 • Quais dos quatro gases listados na Tabela 27-1 são diamagnéticos e quais dos quatro gases são paramagnéticos?

### Estimativas e Aproximações

- 20 • • O momento magnético da Terra está em torno de  $9 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . (a) Se a magnetização do núcleo da Terra fosse de  $1,5 \times 10^9 \text{ A/m}$ , qual seria o volume do núcleo? (b) Qual seria o raio desse núcleo se ele fosse esférico e centrado na Terra?
- 21 • • Estime o campo magnético transiente 100 m afastado de um relâmpago se uma carga de cerca de  $30 \text{ C}$  é transferida por uma nuvem para o solo e a velocidade média das cargas é de  $10^6 \text{ m/s}$ .
- 22 • • O disco giratório do Problema 125 pode ser usado como um modelo para o campo magnético devido a uma mancha solar. Se o raio da mancha solar é de aproximadamente  $10^7 \text{ m}$ , girando a uma velocidade angular de cerca de  $10^{-2} \text{ rad/s}$ , calcule a carga total  $Q$  sobre a mancha solar necessária para criar um campo magnético da ordem de  $0,1 \text{ T}$  no seu centro. Qual é o módulo do campo elétrico logo acima do centro da mancha solar devido a essa carga?

### O Campo Magnético de Cargas Móveis Pontuais

- 23 • No instante  $t = 0$ , uma partícula com carga  $q = 12 \mu\text{C}$  está localizada no ponto  $x = 0, y = 2 \text{ m}$ ; a velocidade da partícula nesse instante é  $\vec{v} = 30 \text{ m/s } \hat{i} + 2 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{j}$ . Encontre o campo magnético em (a) na origem; (b)  $x = 0, y = 1 \text{ m}$ ; (c)  $x = 0, y = 3 \text{ m}$ ; e (d)  $x = 0, y = 4 \text{ m}$ .
- 24 • Para a partícula no Problema 23, encontre o campo magnético em (a)  $x = 1 \text{ m}, y = 3 \text{ m}$ ; (b)  $x = 2 \text{ m}, y = 2 \text{ m}$ ; e (c)  $x = 2 \text{ m}, y = 3 \text{ m}$ .
- 25 • Um próton (carga  $+e$ ) se deslocando com uma velocidade de  $\vec{v} = 1 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{i} + 2 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{j}$  está localizado em  $x = 3 \text{ m}, y = 4 \text{ m}$  em algum instante  $t$ . Encontre o campo magnético em (a)  $x = 2 \text{ m}, y = 2 \text{ m}$ ; (b)  $x = 6 \text{ m}, y = 4 \text{ m}$ ; e (c)  $x = 3 \text{ m}, y = 6 \text{ m}$ .

- 26 • • Um elétron orbita um próton em um raio de  $5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Qual é o campo magnético no próton devido ao movimento orbital do elétron?

- 27 • • Duas cargas iguais  $q$ , localizadas em  $(0,0,0)$  e em  $(0,b,0)$  no instante de tempo zero, estão se movendo com velocidade  $v$  no sentido positivo  $x$  ( $v \ll c$ ). Encontre a razão dos módulos das forças magnética e eletrostática sobre cada carga.

### O Campo Magnético de Correntes: A Lei de Biot-Savart

- 28 • • Um pequeno elemento de corrente  $I \, d\vec{l}$  com  $d\vec{l} = 2 \text{ mm} \hat{k}$  e  $I = 2 \text{ A}$  está centrado na origem. Encontre o campo magnético  $d\vec{B}$  nos seguintes pontos: (a) sobre o eixo  $x$  em  $x = 3 \text{ m}$ , (b) sobre o eixo  $x$  em  $x = -6 \text{ m}$ , (c) sobre o eixo  $z$  em  $z = 3 \text{ m}$  e (d) sobre o eixo  $y$  em  $y = 3 \text{ m}$ .
- 29 • • Para o elemento de corrente no Problema 28, encontre o módulo e a direção de  $d\vec{B}$  em  $x = 0, y = 3 \text{ m}, z = 4 \text{ m}$ .
- 30 • • Para o elemento de corrente no Problema 28, encontre o módulo de  $d\vec{B}$  e indique sua direção sobre um diagrama em (a)  $x = 2 \text{ m}, y = 4 \text{ m}, z = 0$  e (b)  $x = 2 \text{ m}, y = 0, z = 4 \text{ m}$ .

### B Devido a uma Espira com Corrente

- 31 • • Uma espira única de um fio com raio de  $3 \text{ cm}$  transporta uma corrente de  $2,6 \text{ A}$ . Qual é o módulo de  $B$  sobre o eixo da espira em (a) no centro da espira, (b)  $1 \text{ cm}$  a partir do centro (c)  $2 \text{ cm}$  a partir do centro, e (d)  $35 \text{ cm}$  a partir do centro?
- 32 • • Uma espira circular de uma única volta com raio de  $10,0 \text{ cm}$  deve produzir um campo no seu centro que deverá apenas cancelar o campo magnético da Terra no equador, que é de  $0,7 \text{ G}$ , direcionado para norte. Encontre a corrente na espira e faça um esboço que mostre a orientação da espira e da corrente.
- 33 • • Para a espira de fio do Problema 32, em qual ponto ao longo do eixo da espira o campo magnético é (b)  $10\%$  do campo no centro, (b)  $1\%$  do campo no centro e (c)  $0,1\%$  do campo no centro?
- 34 • • Uma espira circular com uma única volta com raio de  $8,5 \text{ cm}$  deve produzir um campo em seu centro que deverá apenas cancelar o campo magnético da Terra de módulo  $0,7 \text{ G}$  direcionado em  $70^\circ$  para baixo da horizontal na direção norte. Encontre a corrente na espira e faça um esboço que mostre a orientação da espira e da corrente na espira.

- 35 • • Uma espira circular, com corrente de raio  $R$ , transporta uma corrente  $I = 10 \text{ A}$  e está centrada na origem com seu eixo ao longo do eixo  $x$ . Sua corrente é tal que ela produz um campo magnético na direção  $x$  positiva. (a) Usando um programa de computador ou uma calculadora gráfica, construa um gráfico de  $B_x$  versus  $x/R$  para os pontos sobre o eixo  $x/R$  entre  $-5 < x/R < +5$ . Compare esse gráfico com aquele para  $E_x$  devido a um anel carregado de mesmo tamanho. (b) Uma outra espira com corrente idêntica, transportando uma corrente igual no mesmo sentido, está em um plano paralelo ao plano  $yz$  com seu centro em  $x = R$ . Faça gráficos separados de  $B_x$  sobre o eixo  $x$  devido a cada espira e também o gráfico do campo resultante devido às duas espiras. Mostre a partir do seu esboço que  $dB_x/dx$  é nulo no ponto médio entre as duas espiras.

- 36 • • Um par de enrolamentos idênticos, cada um de raio  $r$ , está separado por uma distância  $r$ . Chamados de *enrolamentos de Helmholtz*, os enrolamentos são coaxiais e transportam correntes iguais, de tal modo que seus campos coaxiais se somam. Uma das

características dos enrolamentos de Helmholtz é que o campo magnético resultante na região entre os dois enrolamentos é bastante uniforme. Faça  $r = 30 \text{ cm}$ ,  $I = 15 \text{ A}$  e  $N = 250$  voltas para cada enrolamento. Usando um programa de computador, calcule e trace um gráfico do campo magnético como função de  $x$ , a distância desde o centro dos enrolamentos ao longo do eixo comum, para  $-r < x < r$ . Em que faixa de  $x$  o campo magnético varia menos que 20%?

**37** ••• Dois enrolamentos de Helmholtz com raio  $R$  têm seus eixos ao longo do eixo  $x$  (veja o Problema 36). Um enrolamento está no plano  $xy$  e o outro está em um plano paralelo com  $x = R$ . Mostre que no ponto médio dos enrolamentos  $dB_x/dx = 0$ ,  $d^2B_x/dx^2 = 0$ , e  $d^3B_x/dx^3 = 0$ . (Nota: isso mostra que o campo magnético em pontos próximos ao centro é aproximadamente igual àquele do ponto médio.)

**38** ••• Enrolamentos *anti-Helmholtz* são usados em várias aplicações físicas, tais como sistemas com laser, onde um campo espacialmente não-homogêneo com gradiente uniforme é desejado. Esses enrolamentos têm a mesma construção que os enrolamentos de Helmholtz, exceto pelo fato de as correntes fluírem em sentidos opostos, de tal modo que os campos axiais se subtraem e a separação dos enrolamentos é  $r\sqrt{3}$  cm vez de  $r$ . Faça um gráfico do campo magnético com uma função de  $x$ , a distância axial desde o centro dos enrolamentos, para um enrolamento anti-Helmholtz usando os mesmos parâmetros que no Problema 36.

**39** •• Duas espiras condutoras circulares concêntricas coplanares possuem raios  $r_1 = 10 \text{ cm}$  e  $r_2 > r_1$  e estão em um plano horizontal. Uma corrente  $I = 1 \text{ A}$  flui em cada enrolamento, mas em sentidos opostos, com a corrente no enrolamento interno fluindo no sentido anti-horário quando vista de cima. Usando um programa de computador, calcule e trace um gráfico do campo magnético como uma função da altura  $x$  acima do centro dos enrolamentos para  $r_2 =$  (a) 10,1 cm, (b) 11 cm, (c) 15 cm e (d) 20 cm.

**40** ••• Duas espiras concêntricas de fios circulares estão em um mesmo plano e possuem raios  $r_1 = 10 \text{ cm}$  e  $r_2 > r_1$ . Uma corrente  $I = 1 \text{ A}$  flui em cada espira, mas em sentidos opostos. Usando um programa de computador, calcule e trace um gráfico da componente  $B_x$  do campo magnético sobre o eixo das espiras como uma função da distância  $x$  a partir do centro dos enrolamentos. Construa curvas separadas para  $r_2 =$  (a) 10,1 cm, (b) 11 cm, (c) 15 cm e (d) 20 cm.

**41** ••• Para os enrolamentos considerados no Problema 40, mostre que se  $r_2 = r_1 + \Delta r$ , onde  $\Delta r \ll r_1$ , então

$$B(x) \approx \left( \frac{\mu_0 I \Delta r}{2} \right) \left( \frac{2rx^2 - r^3}{(x^2 + r^2)^{5/2}} \right).$$

### Segmentos Retos com Corrente

**42** •• Para os enrolamentos considerados no Problema 41, mostre que se  $x \gg r$ , então

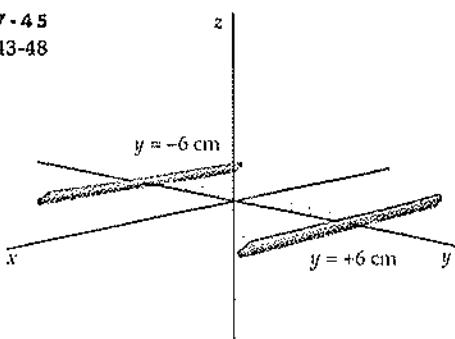
$$B(x) \approx -\left( \frac{\mu_0 I \Delta r}{2} \right) \left( \frac{2r_1}{x^3} \right).$$

Compare esses resultados com os do Problema 39(a).

Os Problemas 43 até 48 referem-se à Figura 27-45, que mostra dois fios longos retos no plano  $xy$  e paralelos ao eixo  $x$ . Um fio está em  $y = -6 \text{ cm}$  e o outro fio está em  $y = +6 \text{ cm}$ . A corrente em cada fio é de 20 A.

**43** • Se as correntes na Figura 27-45 estão na direção negativa de  $x$ , encontre  $\vec{B}$  nos pontos sobre o eixo  $y$  em (a)  $y = -3 \text{ cm}$ , (b)  $y = 0 \text{ cm}$ , (c)  $y = +3 \text{ cm}$  e (d)  $y = +9 \text{ cm}$ .

**FIGURA 27-45**  
Problemas 43-48



**44** •• Usando um programa de computador ou uma calculadora gráfica, faça um gráfico de  $B_z$  versus  $y$  para os pontos sobre o eixo  $y$  quando ambas as correntes estão na direção  $x$  negativa.

**45** • Encontre  $\vec{B}$  nos pontos sobre o eixo  $y$ , como no Problema 43, quando a corrente no fio em  $y = -6 \text{ cm}$  está na direção  $x$  positiva.

**46** •• Usando um programa de computador ou uma calculadora gráfica, faça um gráfico de  $B_z$  versus  $y$  para pontos sobre o eixo  $y$  quando os sentidos das correntes são opostos àqueles do Problema 45.

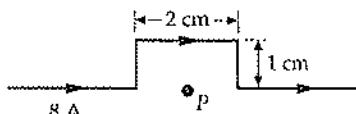
**47** • Encontre  $\vec{B}$  sobre o eixo  $z$  em  $z = +8 \text{ cm}$  se (a) as correntes são paralelas, assim como no Problema 43, e (b) as correntes são antiparalelas, como no Problema 45.

**48** •• Encontre o módulo da força por unidade de comprimento exercida por um fio sobre o outro.

**49** •• Dois fios longos retos paralelos distando 8,6 cm transportam correntes de mesmo módulo  $I$ . Os fios paralelos repelem-se mutuamente com uma força por unidade de comprimento de 3,6 nN/m. (a) As correntes são paralelas ou antiparalelas? (b) Encontre  $I$ .

**50** •• A corrente no fio mostrado na Figura 27-46 é de 8 A. Encontre  $B$  no ponto  $P$  devido a cada segmento de fio e some-os para encontrar o  $B$  resultante.

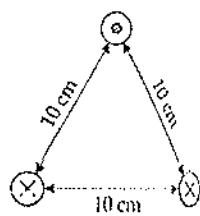
**FIGURA 27-46**  
Problema 50



**51** •• Um fio com comprimento de 16 cm é suspenso por elementos flexíveis acima de um fio longo reto. Correntes iguais mas opostas são estabelecidas nos fios, de tal modo que o fio de 16 cm flutua a 1,5 mm acima do fio longo sem tração nos elementos de suspensão. Se a massa do fio de 16 cm é 14 g, qual é a corrente?

**52** •• Três fios longos retos paralelos passam através dos cantos de um triângulo equilátero com lados de 10 cm, como mostrado na Figura 27-47, onde o ponto significa que a corrente é para fora do papel e a cruz significa que a corrente é para dentro do papel. Se cada corrente é de 15 A, encontre (a) a força por unidade de comprimento sobre o fio superior e (b) o campo magnético  $B$  no fio superior devido aos dois fios inferiores.

**FIGURA 27-47**  
Problemas 52 e 53



53 •• Refaça o Problema 52, com a corrente no fio do canto inferior direito da Figura 27-47 invertida.

54 •• Um fio infinitamente longo e isolado está ao longo do eixo  $x$  e transporta uma corrente  $I$  na direção  $x$  positiva. Um outro fio infinitamente longo e isolado está ao longo do eixo  $y$  e transporta uma corrente  $I$  na direção  $y$  positiva. Onde no plano  $xy$  o campo magnético resultante é nulo?

55 •• Um fio infinitamente longo está ao longo do eixo  $z$  e transporta uma corrente de  $20\text{ A}$  na direção  $z$  positiva. Um outro fio infinitamente longo é paralelo ao eixo  $z$  em  $x = 10\text{ cm}$ . (a) Encontre a corrente no segundo fio se o campo magnético em  $x = 2\text{ cm}$  é zero. (b) Qual é o campo magnético em  $x = 5\text{ cm}$ ?

56 •• Três fios paralelos muito longos estão nos cantos de um quadrado, como mostrado na Figura 27-48. Cada um dos fios transporta uma corrente de módulo  $I$ . Encontre o campo magnético  $B$  no canto não ocupado do quadrado quando (a) todas as correntes estão para dentro do papel, (b)  $I_1$  e  $I_3$  estão para dentro do papel e  $I_2$  está para fora, e (c)  $I_1$  e  $I_2$  estão para dentro do papel e  $I_3$  está para fora.

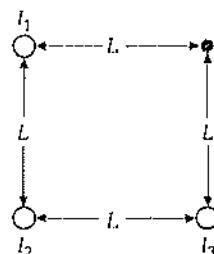


FIGURA 27-48 Problema 56

57 •• Considere quatro fios longos retos paralelos, cada um transportando uma corrente  $I$ . Em um plano perpendicular ao dos fios, os fios estão nos cantos de um quadrado de lado  $a$ . Encontre a força por unidade de comprimento sobre um dos fios se (a) todas as correntes estão no mesmo sentido e (b) as correntes nos fios em cantos adjacentes estão em sentidos opostos.

58 •• Um cilindro não condutor infinitamente longo de raio  $R$  está ao longo do eixo  $z$ . Cinco fios condutores longos são paralelos ao cilindro e espaçados igualmente sobre a metade superior da superfície do cilindro. Cada fio transporta uma corrente  $I$  na direção  $z$  positiva. Encontre o campo magnético sobre o eixo  $z$ .

### $\mathbf{B}$ Devido à Corrente em um Solenóide

59 • Um solenóide com comprimento de  $30\text{ cm}$ , raio  $1,2\text{ cm}$  e  $300$  voltas transporta uma corrente de  $2,6\text{ A}$ . Encontre  $B$  sobre o eixo do solenóide (a) no centro, (b) dentro do solenóide a um ponto  $10\text{ cm}$  de uma extremidade e (c) em uma extremidade.

60 • Um solenóide com o comprimento de  $2,7\text{ m}$  possui um raio de  $0,85\text{ cm}$  e  $600$  voltas. Ele transporta uma corrente  $I$  de  $2,5\text{ A}$ . Qual é o campo magnético  $B$  aproximado sobre o eixo do solenóide?

61 ••• Um solenóide tem  $n$  voltas por unidade de comprimento, raio  $R$  e transporta uma corrente  $I$ . Seu eixo está ao longo do eixo  $x$ , com uma das extremidades em  $x = -\frac{1}{2}\ell$  e a outra extremidade em  $x = +\frac{1}{2}\ell$ , onde  $\ell$  é o comprimento total do solenóide. Mostre que o campo magnético  $B$  em um ponto sobre o eixo externo do solenóide é dado por

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\text{onde } \cos \theta_1 = \frac{x + \frac{1}{2}\ell}{[R^2 + (x + \frac{1}{2}\ell)^2]^{1/2}}$$

$$\text{e } \cos \theta_2 = \frac{x - \frac{1}{2}\ell}{[R^2 + (x - \frac{1}{2}\ell)^2]^{1/2}}$$

62 ••• No Problema 61, uma expressão para o campo magnético ao longo do eixo de um solenóide é dada. Para  $x \gg \ell$  e  $\ell \gg R$ , os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são muito pequenos, então a aproximação de pequenos ângulos  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  é válida. (a) Desenhe um diagrama e mostre que

$$\theta_1 \approx \frac{R}{x + \frac{1}{2}\ell}$$

e

$$\theta_2 \approx \frac{R}{x - \frac{1}{2}\ell}$$

(b) Mostre que o campo magnético em um ponto longe de ambas as extremidades do solenóide pode ser escrito como

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{q_{in}}{r_1^2} - \frac{q_{in}}{r_2^2} \right)$$

onde  $r_1 = x - \frac{1}{2}\ell$  é a distância à extremidade do solenóide mais próxima e  $r_2 = x + \frac{1}{2}\ell$  é a distância à extremidade mais afastada, e  $q_{in} = nI\pi R^2 = \mu/\ell$ , onde  $\mu = NI\pi R^2$  é o momento magnético do solenóide.

### Lei de Ampère

63 • Uma casca cilíndrica longa, reta, de paredes finas de raio  $R$  transporta uma corrente  $I$ . Encontre  $B$  no interior e no exterior do cilindro.

64 • Na Figura 27-49, uma corrente é  $8\text{ A}$  para dentro do papel, a outra corrente é  $8\text{ A}$  para fora do papel e cada curva é uma trajetória circular. (a) Encontre  $\oint_C B \cdot d\ell$  para cada trajetória indicada, onde cada integral é tomada com  $d\ell$  no sentido anti-horário.

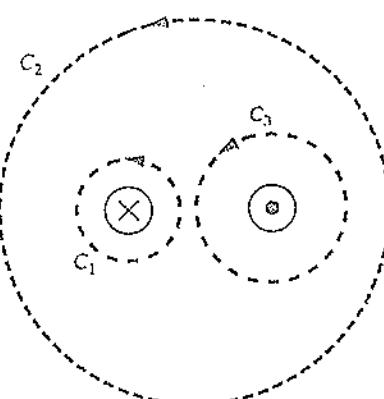


FIGURA 27-49  
Problema 64

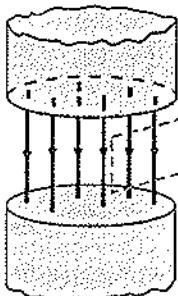
(b) Qual trajetória pode ser usada para encontrar  $B$  em algum ponto devido a essas correntes?

65 •• Um cabo coaxial muito longo consiste em um fio interno e uma casca cilíndrica externa condutora concêntrica de raio  $R$ . Em uma extremidade, o fio está conectado à casca. Na outra extremida-

de, o fio e a casca são conectados a terminais opostos de uma bateria, portanto existe uma corrente indo pelo fio e retornando pela casca. Admita que o cabo é reto. Encontre  $B$  (a) em pontos entre o fio e a casca longe das extremidades e (b) fora do cabo.

66 •• Um fio com raio de 0,5 cm transporta uma corrente de 100 A que está uniformemente distribuída em sua área de seção reta. Encontre  $B$  (a) a 0,1 cm do centro do fio, (b) na superfície do fio e (c) em um ponto externo ao fio a 0,2 cm da sua superfície. (d) Esboce um gráfico de  $B$  versus a distância ao centro do fio.

67 •• Mostre que um campo magnético uniforme sem efeito de borda, tal como aquele mostrado na Figura 27-50, é impossível, pois viola a lei de Ampère. Faça isso aplicando a lei de Ampère à curva retangular mostrada pelas linhas tracejadas.

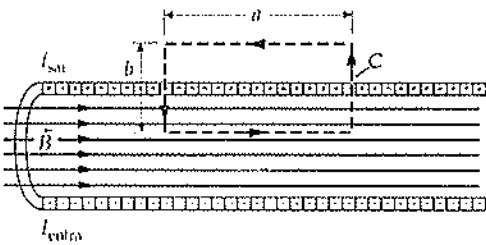


**FIGURA 27-50**  
Problema 67

68 •• Um cabo coaxial consiste em um cilindro condutor sólido interno com raio de 1,00 mm e uma casca condutora cilíndrica externa com raio interno de 2,00 mm e raio externo de 3,00 mm. Existe uma corrente de 15 A para o fio interno, e uma corrente igual retorna no fio externo. As correntes são uniformes na seção reta de cada condutor. Usando um programa de computador ou uma calculadora gráfica, faça um gráfico do módulo do campo magnético  $B$  como uma função da distância  $r$  ao eixo do cabo para  $0 \text{ mm} < r < 3,00 \text{ mm}$ . Qual é o campo no lado externo do cabo?

69 •• Uma casca cilíndrica fina infinitamente longa, com raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , transporta uma corrente  $I$  uniformemente distribuída em uma seção reta da casca. Encontre o campo magnético para (a)  $r < a$ , (b)  $a < r < b$  e (c)  $r > b$ .

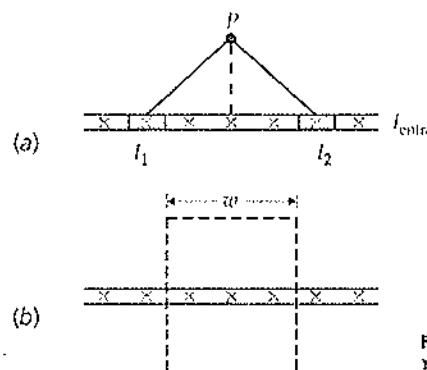
70 •• A Figura 27-51 mostra um solenóide com  $n$  voltas por unidade de comprimento transportando uma corrente  $I$ . Aplice a lei de Ampère para a curva retangular mostrada na figura para desenvolver uma expressão para  $B$ , supondo que  $B$  é uniforme dentro do solenóide e que  $B$  é nulo externamente ao solenóide.



**FIGURA 27-51** Problema 70

71 •• Um toróide com raio interno de 1 cm e raio externo de 2 cm tem 1000 voltas de fio e transporta uma corrente de 1,5 A. (a) Qual é o campo magnético a uma distância de 1,1 cm do centro? (b) Qual é o campo magnético a uma distância de 1,5 cm do centro?

72 •• O plano  $xz$  contém uma folha infinita de corrente na direção  $z$  positiva. A corrente por unidade de comprimento (ao longo da direção  $x$ ) é  $\lambda$ . A Figura 27-52a mostra um ponto  $P$  acima da folha ( $y > 0$ ) e duas porções da folha de corrente indicadas por  $I_1$  e  $I_2$ . (a) Qual é a direção do campo magnético  $\vec{B}$  no ponto  $P$  devido às duas porções de corrente mostradas? (b) Qual é a direção do campo magnético  $\vec{B}$  no ponto  $P$  devido à folha toda? (c) Qual é a direção de  $\vec{B}$  em um ponto embaixo da folha ( $y < 0$ )? (d) Aplique a lei de Ampère para a curva retangular mostrada na Figura 27-52b para provar que o campo magnético em qualquer ponto acima da folha é dado por  $B = -\frac{1}{2} \mu_0 \lambda i$ .



**FIGURA 27-52**  
Problema 72

### Magnetização e Suscetibilidade Magnética

73 • Um solenóide com comprimento de 20 cm possui 400 voltas e transporta uma corrente de 4 A, de tal modo que seu campo axial está na direção  $z$ . Desprezando os efeitos de extremidade, encontre  $B$  e  $B_{ap}$  no centro quando (a) não existe núcleo no solenóide e (b) existe um núcleo de ferro com uma magnetização  $M = 1,2 \times 10^6 \text{ A/m}$ .

74 • Se o solenóide do Problema 73 possui um núcleo de alumínio, encontre  $B_{ap}$ ,  $M$  e  $B$  no centro, desprezando os efeitos de extremidade.

75 • Repita o Problema 74 para um núcleo de tungstênio.

76 • Um solenóide longo está enrolado em torno de um núcleo de tungstênio e transporta uma corrente. (a) Se o núcleo é removido enquanto a corrente é mantida constante, o campo magnético no interior do solenóide diminui ou aumenta? (b) Qual a porcentagem de diminuição ou aumento do campo magnético no interior do solenóide?

77 • Quando uma amostra de líquido é inserida dentro de um solenóide transportando uma corrente constante, o campo magnético dentro do solenóide diminui 0,004%. Qual é a suscetibilidade magnética do líquido?

78 • Um solenóide longo transportando uma corrente de 10 A possui 50 voltas/cm. Qual é o campo magnético no interior do solenóide quando o interior é (a) um vácuo, (b) preenchido com alumínio e (c) preenchido com prata?

79 •• Um cilindro de material magnético é colocado em um solenóide longo de  $n$  voltas por unidade de comprimento e corrente  $I$ . Os valores para o campo magnético  $B$  no interior do material versus  $nI$  são dados a seguir. Use esses valores para representar graficamente  $B$  versus  $B_{ap}$  e  $K_m$  versus  $nI$ .

$nI, \text{A/m}$	0	50	100	150	200	500	1000	10.000
$B, \text{T}$	0	0,04	0,67	1,00	1,2	1,4	1,6	1,7

80 •• Uma pequena amostra de material magnético está na forma de um disco que tem raio de 1,4 cm, espessura de 0,3 cm e magnetização uniforme ao longo do seu eixo e através do seu volume. O momento magnético da amostra é  $1,5 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . (a) Qual é a magnetização  $M$  da amostra? (b) Se essa magnetização é devida ao alinhamento de  $N$  elétrons, cada um com momento de  $1 \mu_B$ , qual é  $N$ ? (c) Se a magnetização é ao longo do eixo do disco, qual é o módulo da corrente amperiana superficial?

81 •• Uma casca cilíndrica na forma de uma arruela plana possui raio interno  $r$ , raio externo  $R$  e espessura (comprimento)  $t$ , onde  $t \ll R$ . O material da casca tem uma magnetização uniforme de módulo  $M$  paralelo ao seu eixo. Mostre que o campo magnético devido ao cilindro pode ser modelado usando o modelo de espiras concêntricas condutoras do Problema 39. Qual é a corrente amperiana  $I$  que deve ser usada para modelar esse campo?

### Momentos Magnéticos Atómicos

82 •• O níquel tem massa específica de  $8,7 \text{ g/cm}^3$  e massa molecular de  $58,7 \text{ g/mol}$ . A magnetização de saturação do níquel é dada por  $\mu_0 M_s = 0,61 \text{ T}$ . Calcule o momento magnético de um átomo de níquel em magnétons de Bohr.

83 •• Repita o Problema 82 para o cobalto, que apresenta massa específica de  $8,9 \text{ g/cm}^3$ , massa molecular de  $58,9 \text{ g/mol}$  e saturação de magnetização dada por  $\mu_0 M_s = 1,79 \text{ T}$ .

### Paramagnetismo

84 • Mostre que a lei de Curie prediz que a suscetibilidade magnética de uma substância paramagnética é  $\chi_m = \mu_0 M_s / 3kT$ .

85 •• Em um modelo simples de paramagnetismo, pode-se considerar que alguma fração  $f$  das moléculas tem seus momentos magnéticos alinhados com um campo magnético externo e que o resto das moléculas está aleatoriamente alinhado e, portanto, não contribui para o campo magnético. (a) Use esse modelo e a lei de Curie para mostrar que na temperatura  $T$  e com um campo magnético externo  $B$  a fração das moléculas alinhadas  $f = \mu B / 3kT$ . (b) Calcule essa fração para  $T = 300 \text{ K}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ , presumindo  $\mu$  como sendo 1 magnéton de Bohr.

86 •• Admita que o momento magnético de um átomo de alumínio é de 1 magnéton de Bohr. A massa específica do alumínio é de  $2,7 \text{ g/cm}^3$ , e sua massa molecular é  $27 \text{ g/mol}$ . (a) Calcule  $M_s$  e  $\mu_0 M_s$  para o alumínio. (b) Use os resultados do Problema 84 para calcular  $\chi_m$  em  $T = 300 \text{ K}$ . (c) Explique por que o resultado da Parte (b) é maior que o valor listado na Tabela 27-1.

87 •• Um toróide com  $N$  voltas, transportando uma corrente  $I$ , tem um raio médio  $R$  e um raio de seção reta  $r$ , com  $r \ll R$  (Figura 27-53). Quando o toróide é preenchido com material, ele é chamado de *anel de Rowland*. Encontre  $B_{ap}$  e  $B$  nesse anel, admitindo uma magnetização  $M$  em todas as posições paralelas a  $\vec{B}_{ap}$ .

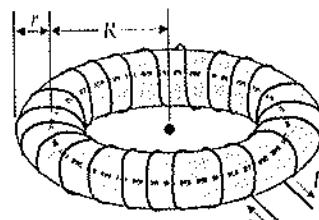


FIGURA 27-53 Problema 87

88 •• Um toróide é preenchido com oxigênio líquido, que possui uma suscetibilidade de  $4 \times 10^{-3}$ . O toróide tem 2000 voltas e transporta uma corrente de 15 A. Seu raio médio é de 20 cm, e o raio em sua seção reta é de 0,8 cm. (a) Qual é a magnetização  $M$ ? (b) Qual é o campo magnético  $B$ ? (c) Qual é o percentual de aumento de  $B$  produzido pelo oxigênio líquido?

89 •• Um toróide tem um raio médio de 14 cm e uma área de seção reta de  $3 \text{ cm}^2$ . Ele está enrolado com um fio fino, com 60 voltas/cm medidas ao longo de sua circunferência média, e o fio transporta uma corrente de 4 A. O núcleo é preenchido com um material paramagnético de suscetibilidade magnética  $2,9 \times 10^{-4}$ . (a) Qual é o módulo do campo magnético dentro da substância? (b) Qual é o módulo da magnetização? (c) Qual deveria ser o módulo do campo magnético se não existisse o núcleo paramagnético?

### \*Ferromagnetismo

90 • Para o ferro recozido, a permeabilidade relativa  $K_m$  possui seu máximo valor de aproximadamente 5500 em  $B_{ap} = 1,57 \times 10^{-4} \text{ T}$ . Encontre  $M$  e  $B$  quando  $K_m$  é máximo.

91 •• A magnetização de saturação para o ferro recozido ocorre quando  $B_{ap} = 0,201 \text{ T}$ . Encontre a permeabilidade  $\mu$  e a permeabilidade relativa  $K_m$  para o ferro recozido na saturação. (Veja a Tabela 27-2.)

92 •• A força coerciva é definida como sendo o campo magnético aplicado necessário para levar  $B$  de volta para zero ao longo da curva de histerese (que é o ponto  $c$  na Figura 27-38). Para uma barra de ímã permanente, a força coerciva  $B_{ap} = 5,53 \times 10^{-2} \text{ T}$ . A barra imantada deve ser desmagnetizada colocando-a dentro de um solenóide com comprimento de 15 cm com 600 voltas. Qual é a mínima corrente necessária no solenóide para desmagnetizar o ímã?

93 •• Um solenóide longo, com 50 voltas/cm, transporta uma corrente de 2 A. O solenóide é preenchido com ferro e  $B$  é medido como sendo  $1,72 \text{ T}$ . (a) Desprezando os efeitos de extremidade, qual é  $B_{ap}$ ? (b) Qual é  $M$ ? (c) Qual é a permeabilidade relativa  $K_m$ ?

94 •• Quando a corrente no Problema 93 é de 0,2 A, o campo magnético é medido como  $1,58 \text{ T}$ . (a) Desprezando os efeitos de extremidade, qual é  $B_{ap}$ ? (b) Qual é  $M$ ? (c) Qual é a permeabilidade relativa  $K_m$ ?

95 •• Um solenóide longo, com núcleo de ferro e 2000 voltas/cm, transporta uma corrente de 20 mA. Nessa corrente, a permeabilidade relativa do núcleo de ferro é de 1200. (a) Qual é o campo magnético no interior do solenóide? (b) Com o núcleo de ferro removido, qual corrente irá produzir o mesmo campo no interior do solenóide?

96 •• Dois fios longos retos distando 4 cm um do outro estão envolvidos por um material uniforme isolante que tem uma permeabilidade relativa de  $K_m = 120$ . Os fios transportam 40 A em sentidos opostos. (a) Qual é o campo magnético no ponto médio do plano dos fios? (b) Qual é a força por unidade de comprimento sobre os fios?

97 •• O toróide do Problema 88 tem seu núcleo preenchido com ferro. Quando a corrente é 10 A, o campo magnético no toróide é de  $1,8 \text{ T}$ . (a) Qual é a magnetização  $M$ ? (b) Encontre os valores de  $K_m$ ,  $\mu$  e  $\chi_m$  para a amostra de ferro.

98 •• Encontre o campo magnético no toróide do Problema 89 se a corrente no fio é de 0,2 A e o ferro macio, que tem permeabilidade relativa de 500, é substituído pelo núcleo de ferro magnético.

99 •• Um fio longo e reto com raio de 1,0 mm é coberto com um isolante de material ferromagnético que tem espessura de 3,0 mm

e permeabilidade magnética relativa de  $K_m = 400$ . O fio coberto está no ar, e o fio propriamente dito é não-magnético. O fio transporta uma corrente de 40 A. (a) Encontre o campo magnético dentro do fio como uma função do raio  $R$ . (b) Encontre o campo magnético dentro do material ferromagnético como uma função do raio  $R$ . (c) Encontre o campo magnético fora do material ferromagnético com uma função de  $R$ . (d) Quais devem ser os módulos e as direções das correntes amperianas sobre as superfícies do material ferromagnético levando em consideração os campos magnéticos observados?

### Problemas Gerais

- 100 • Encontre o campo magnético no ponto  $P$  na Figura 27-54.

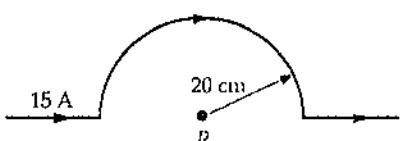


FIGURA 27-54  
Problema 100

- 101 • Na Figura 27-55, encontre o campo magnético no ponto  $P$ , que é o centro comum dos dois arcos semicirculares.

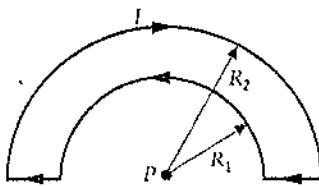


FIGURA 27-55  
Problema 101

- 102 • • Um fio com comprimento  $\ell$  é enrolado em uma bobina circular de  $N$  espiras e transporta uma corrente  $I$ . Mostre que o campo magnético no centro do enrolamento é dado por  $B = \mu_0 \pi N^2 I / \ell$ .

- 103 • • Um fio muito longo, transportando uma corrente  $I$ , é dobrado na forma mostrada na Figura 27-56. Encontre o campo magnético no ponto  $P$ .

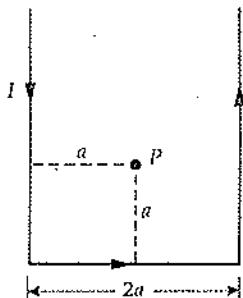


FIGURA 27-56  
Problema 103

- 104 • • Um cabo de potência transportando 50 A está a 2 m abaixo da superfície da Terra, mas a direção do cabo e sua posição precisam ser desconhecidas. Mostre como você poderia localizar o cabo usando uma bússola. Admita que você está no equador, onde o campo magnético da Terra é de 0,7 G norte.

- 105 • • Um fio longo e reto transporta uma corrente de 20 A, como mostrado na Figura 27-57. Um enrolamento retangular com dois lados paralelos ao fio reto tem lados de 5 cm e 10 cm, com o lado mais próximo a uma distância de 2 cm do fio. O enrolamento transporta uma corrente de 5 A. (a) Encontre a força sobre cada elemento do enrolamento retangular devido à corrente no fio longo reto. (b) Qual é a força resultante exercida sobre o enrolamento?

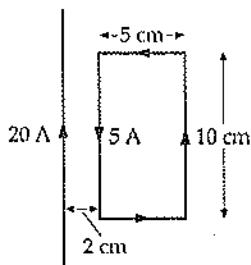


FIGURA 27-57  
Problema 105

- 106 • • A espira fechada mostrada na Figura 27-58 transporta uma corrente de 8 A no sentido anti-horário. O raio do arco externo é de 60 cm, e o do arco interno é de 40 cm. Encontre o campo magnético no ponto  $P$ .

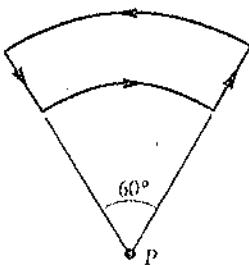


FIGURA 27-58  
Problema 106

- 107 • • Um circuito fechado consiste em dois semicírculos com raios de 40 cm e 20 cm que estão conectados por segmentos retilíneos, como mostrado na Figura 27-59. Uma corrente de 3 A flui ao longo desse circuito no sentido horário. Encontre o campo magnético no ponto  $P$ .

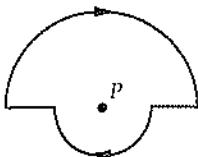


FIGURA 27-59  
Problema 107

- 108 • • Um fio reto muito longo transporta uma corrente de 20 A. Um elétron a 1 cm do centro do fio está se movendo com uma velocidade de  $5,0 \times 10^6$  m/s. Encontre a força sobre o elétron quando ele se move (a) diretamente para longe do fio, (b) paralelamente ao fio no sentido da corrente e (c) perpendicularmente ao fio e tangente a um círculo em torno do fio.

- 109 • • Uma corrente  $I$  de 5 A está uniformemente distribuída na seção reta de um fio longo reto com raio  $r_0 = 2,55$  mm. Usando um programa de computador, trace um gráfico do módulo do campo magnético como uma função do raio  $r$  e da distância ao centro do fio para  $0 \leq r \leq 10r_0$ .

- 110 • • Um grande enrolamento circular com 50 voltas e raio de 10 cm transporta uma corrente de 4 A. No centro do grande enrolamento existe um pequeno enrolamento com 20 voltas e raio de 0,5 cm transportando uma corrente de 1 A. Os planos dos dois enrolamentos são perpendiculares. Encontre o torque exercido pelo grande enrolamento sobre o pequeno enrolamento. (Despreze qualquer variação em  $B$  devida ao grande enrolamento na região ocupada pelo pequeno enrolamento.)

- 111 • • A Figura 27-60 mostra uma barra imantada suspensa por um fio fino que fornece um torque restaurador  $-k\theta$ . O ímã tem comprimento de 16 cm, massa de 0,8 kg, um dipolo magnético de  $\mu =$

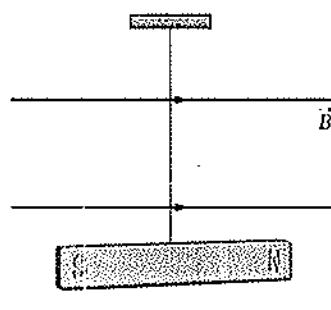


FIGURA 27-60 Problema 111

0,12 A · m<sup>2</sup> e está localizado em uma região onde um campo magnético uniforme  $B$  pode ser estabelecido. Quando o campo magnético externo é de 0,2 T e é dado ao ímã um pequeno deslocamento angular  $\Delta\theta$ , a barra imantada oscila em torno da sua posição de equilíbrio com um período de 0,500 s. Determine a constante  $k$  e o período desse pêndulo torsional quando  $B = 0$ .

112 •• Uma longa e estreita barra imantada que tem momento magnético  $\mu$  paralelo ao seu longo eixo é suspensa no seu centro como uma agulha sem atrito de uma bússola. Quando colocada em um campo magnético  $\vec{B}$ , a agulha se alinha com o campo. Se ela é deslocada de um pequeno ângulo  $\theta$ , mostre que a agulha irá oscilar em torno da sua posição de equilíbrio com uma freqüência  $f = (\frac{1}{2})\pi\sqrt{\mu B/I}$ , onde  $I$  é o momento de inércia em torno do ponto de suspensão.

113 •• Uma pequena barra imantada com massa de 0,1 kg, comprimento 1 cm e momento magnético  $\mu = 0,04$  A · m<sup>2</sup> está localizada no centro de uma espira de 100 voltas e 0,2 m de diâmetro. A espira transporta uma corrente de 5,0 A. No equilíbrio, a barra imantada está alinhada com a espira com corrente. É dado à barra um deslocamento ao longo do eixo da espira, e então ela é liberada. Mostre que se o deslocamento é pequeno a barra imantada executa um movimento harmônico simples, e encontre o período desse movimento.

114 •• Suponha que a agulha no Problema 112 é uma haste de ferro uniformemente magnetizada com comprimento de 8 cm e área de seção reta de 3 mm<sup>2</sup>. Presuma que o momento magnético dipolar para cada átomo de ferro é  $2,2 \mu_B$  e que todos os átomos do ferro têm dipólos magnéticos alinhados. Calcule a freqüência das pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio quando o campo magnético é de 0,5 G.

115 •• A agulha de uma bússola magnética tem comprimento de 3 cm, raio de 0,85 mm e massa específica de  $7,96 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. A agulha está livre para girar no plano horizontal, onde a componente horizontal do campo magnético da Terra é 0,6 G. Quando levemente perturbada, a bússola executa um movimento harmônico simples em torno do seu ponto médio com freqüência de 1,4 Hz. (a) Qual é o momento magnético dipolar da agulha? (b) Qual é a magnetização  $M$ ? (c) Qual é a corrente amperiana sobre a superfície da agulha? (Veja o Problema 112.)

116 •• Uma barra de ferro com comprimento de 1,4 m tem diâmetro de 2 cm e magnetização uniforme de  $1,72 \times 10^6$  A/m direcionada ao longo do comprimento da barra. A barra está estacionária no espaço e é subitamente desmagnetizada, de tal modo que sua magnetização desaparece. Qual é a velocidade de rotação angular da barra se seu momento angular é conservado? (Admita que a Equação 27-27 ocorre onde  $m$  é a massa de um elétron e  $q = -e$ .)

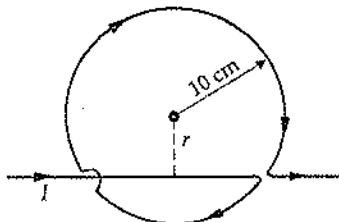
117 •• O momento magnético dipolar de um átomo de ferro é

$2,219 \mu_B$ . (a) Se todos os átomos de uma barra de ferro com comprimento de 20 cm e área de seção reta de 2 cm<sup>2</sup> têm seus momentos dipolares alinhados, qual é o momento dipolar da barra? (b) Qual torque deve ser fornecido para manter a barra de ferro perpendicular a um campo magnético de 0,25 T?

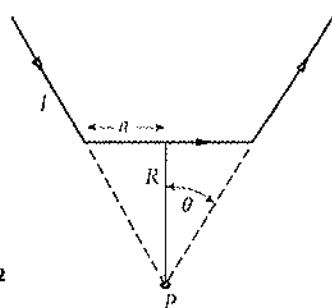
118 •• Um amperímetro de relativo baixo custo, chamado de galvanômetro tangente, pode ser feito usando o campo magnético da Terra. Um enrolamento plano circular de  $N$  voltas e raio  $R$  é orientado de tal modo que o campo  $B_C$  que ele produz no centro do enrolamento esteja para leste ou para oeste. Uma bússola é colocada no centro do enrolamento. Quando não existe corrente no enrolamento, a agulha da bússola aponta para norte. Quando existe uma corrente  $I$ , a agulha da bússola aponta na direção do campo magnético resultante  $\vec{B}$  em um ângulo  $\theta$  em relação ao norte. Mostre que a corrente  $I$  está relacionada a  $\theta$  e à componente horizontal do campo da Terra  $B_T$  por

$$I = \frac{2RB_T}{\mu_0 N} \operatorname{tg} \theta$$

119 •• Um fio reto infinitamente longo é dobrado como mostrado na Figura 27-61. A porção circular tem um raio de 10 cm, com seu centro a uma distância  $r$  da parte reta. Encontre  $r$  de tal modo que o campo magnético no centro da porção circular seja nulo.

FIGURA 27-61  
Problema 119

120 •• (a) Encontre o campo magnético no ponto  $P$  para o fio transportando corrente  $I$ , como mostrado na Figura 27-62. (b) Use o resultado da Parte (a) para encontrar o campo no centro do polígono de  $N$  lados. Mostre que quando  $N$  é muito grande, o resultado se aproxima daquele para o campo magnético no centro de um círculo.

FIGURA 27-62  
Problema 120

121 •• A corrente em um condutor cilíndrico longo com raio  $R = 10$  cm varia com a distância a partir do eixo do cilindro de acordo com a relação  $I(r) = (50 \text{ A/m})r$ . Encontre o campo magnético em (a)  $r = 5$  cm, (b)  $r = 10$  cm e (c)  $r = 20$  cm.

122 •• A Figura 27-63 mostra uma espira quadrada, de 20 cm de lado, no plano  $xy$  com seu centro na origem. A espira transporta uma corrente de 5 A. Acima dela, em  $y = 0$ ,  $z = 10$  cm, está um fio infinitamente longo paralelo ao eixo  $x$  transportando uma corrente de 10 A. (a) Encontre o torque sobre a espira. (b) Encontre a força líquida sobre a espira.

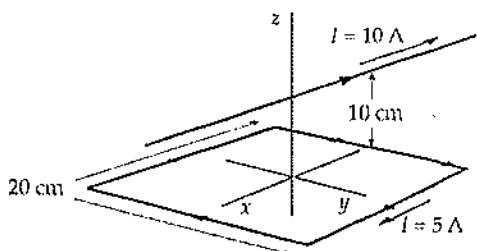


FIGURA 27-63 Problema 122

**123 ••** Uma balança de corrente é construída da seguinte maneira: um fio longo com seção de 10 cm é colocado sobre o topo do prato de uma balança eletrônica usada em laboratórios de química. Suas extremidades são fixadas a uma fonte de potência e a um segmento de fio suspenso diretamente sobre ele, paralelo a ele. (Veja a figura abaixo.) A distância entre os dois fios é de  $L = 2,0$  cm. A fonte de potência fornece uma corrente  $I$  fluindo através dos fios. Quando a fonte de potência é ligada, a leitura da balança aumenta de 5,0 mg ( $1 \text{ mg} \approx 10^{-6} \text{ kg}$ ). Qual é a corrente fluindo através do fio?

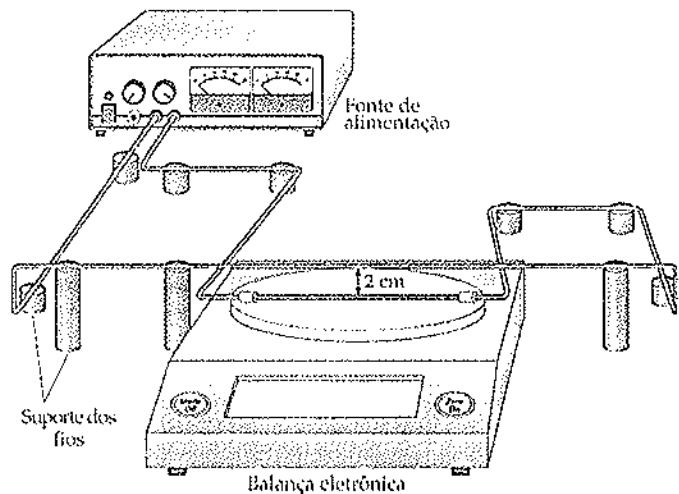


FIGURA 27-64 Problema 123

**124 ••** Considere a balança de corrente do Problema 123. Se a sensibilidade da balança é de 0,1 mg, qual é a mínima corrente detectável usando essa balança de corrente? Discuta qualquer vantagem ou desvantagem desse tipo de balança de corrente *versus* a balança de corrente "padrão", tratada neste capítulo.

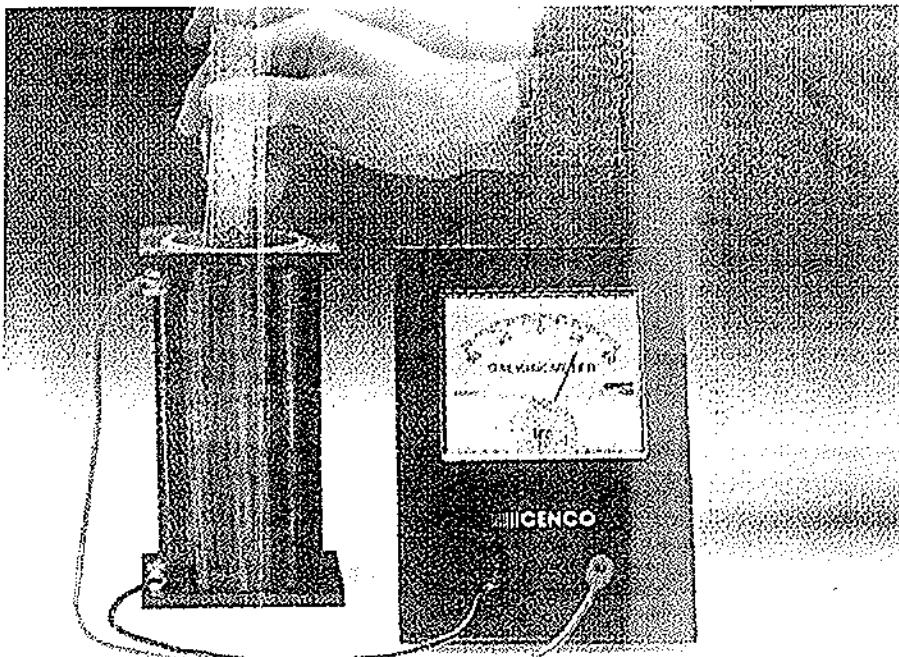
**125 •••** Um disco com raio  $R$  transporta uma densidade de carga fixa  $\sigma$  e gira com velocidade angular  $\omega$ . (a) Considere um anel circular de raio  $r$  e largura  $dr$  com carga  $dq$ . Mostre que a corrente produzida por esse anel  $dI = (\omega/2\pi)dq = \omega r dr$ . (b) Use o resultado da Parte (a) para mostrar que o campo magnético no centro do disco é  $B = \frac{1}{2}\mu_0 r\omega R$ . (c) Use o resultado da Parte (a) para encontrar o campo magnético em um ponto sobre o eixo do disco a uma distância  $x$  do centro.

**126 •••** Uma espira quadrada de lado  $\ell$  encontra-se no plano  $yz$  com seu centro na origem. Ela transporta uma corrente  $I$ . Encontre o campo magnético  $B$  em qualquer ponto sobre o eixo  $x$  e mostre-a partir da expressão obtida que para  $x$  muito maior que  $\ell$ ,

$$B \approx \frac{\mu_0 2\mu}{4\pi x^3}$$

onde  $\mu = I\ell^2$  é o momento magnético da espira.

## Indução Magnética



DEMONSTRAÇÃO DA FEM INDUZIDA. QUANDO UM ÍMÃ ESTÁ SE MOVENDO PARA DENTRO OU PARA FORA DE UM ENROLAMENTO, UMA FEM É INDUZIDA NO ENROLAMENTO, COMO MOSTRADO PELA DEFLEXÃO NO GALVANÔMETRO. NÃO SE OBSERVA DEFLEXÃO QUANDO O ÍMÃ ESTÁ PARADO.



O que causa a corrente quando um ímã se move? Isso é discutido na Seção 28-2.

- 28-1 Fluxo Magnético
- 28-2 FEM Induzida e Lei de Faraday
- 28-3 Lei de Lenz
- 28-4 FEM Induzida por Movimento
- 28-5 Correntes Parasitas
- 28-6 Indutância
- 28-7 Energia Magnética
- \*28-8 Circuitos  $RL$
- \*28-9 Propriedades Magnéticas dos Supercondutores

**N**o início dos anos 1830, Michael Faraday, na Inglaterra, e Joseph Henry, nos Estados Unidos, descobriram independentemente que em um campo magnético variável um fluxo magnético variável através de uma superfície limitada por uma espira de fio fechada estacionária induz uma corrente no fio. As fem (forças eletromotrices, ou tensões) e as correntes causadas por tais fluxos magnéticos variáveis são chamadas de **fem induzidas** e **correntes induzidas**. O processo propriamente dito é chamado de **indução**. Faraday e Henry também descobriram que em um campo magnético estático, um fluxo magnético variável através de uma superfície limitada por uma espira de fio móvel induz uma fem no fio. Uma

fem causada pelo movimento de um condutor em uma região com um campo magnético é chamada de fem induzida por movimento.

Quando a tomada de um fio elétrico é puxada do soquete, se nota algumas vezes uma pequena centelha. Antes de o fio ser desconectado, ele transporta uma corrente que produz um campo magnético em torno da corrente. Quando o fio é desconectado a corrente é interrompida repentinamente e o campo magnético em volta do fio colapsa. Esse campo magnético variável induz uma fem que tende a manter a corrente original, resultando na centelha no ponto em que há a ruptura. Uma vez que o campo magnético colapsa para zero, ele não varia mais e a fem induzida se anula.

Campos magnéticos variáveis podem resultar de correntes variáveis ou do movimento de ímãs. A foto de abertura do capítulo ilustra uma demonstração simples de classe de aula para a fem induzida por um campo magnético variável. As extremidades de uma bobina estão conectadas a um galvanômetro, e um forte ímã está-se movendo para dentro ou para fora da bobina. A deflexão momentânea mostrada pelo galvanômetro durante o movimento indica que existe uma corrente elétrica induzida no circuito bobina-galvanômetro. Uma corrente também seria induzida se a bobina estivesse se movendo para dentro e para fora em relação ao ímã estacionário, ou se a bobina fosse girada em uma região com um campo magnético estático. Um enrolamento girante em um campo magnético estático é o elemento básico de um gerador, que converte energia mecânica em energia elétrica.

Este capítulo irá explorar os vários métodos de indução magnética, todos podendo ser resumidos por uma única relação, conhecida como lei de Faraday. A lei de Faraday relaciona a fem induzida em um circuito com a taxa de variação do fluxo magnético através do circuito. (O fluxo magnético através do circuito se refere ao fluxo do campo magnético através de qualquer superfície limitada pelo circuito.)

## 28-1 Fluxo Magnético

O fluxo de qualquer campo vetorial através de uma superfície é calculado da mesma maneira que o fluxo de um campo elétrico através de uma superfície (Seção 22-2). Seja  $dA$  um elemento de área sobre a superfície  $S$ , e seja  $\hat{n}$  a normal unitária, um vetor unitário normal ao elemento de área (Figura 28-1). Existem dois sentidos para a normal a qualquer elemento de área, e é uma questão de escolha determinar qual dos dois será selecionado para a direção de  $\hat{n}$ . Entretanto, o sinal do fluxo irá depender dessa escolha. O fluxo magnético  $\phi_m$  através de  $S$  é

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA \quad 28-1$$

FLUXO MAGNÉTICO

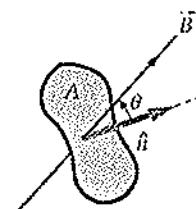


FIGURA 28-1

Quando  $\vec{B}$  faz um ângulo  $\theta$  com a normal à área de uma espira, o fluxo através dessa espira é  $\vec{B} \cdot \hat{n} A = BA \cos\theta$ .

A unidade de fluxo magnético é aquela de intensidade do campo magnético vezes a área, tesla vezes metro ao quadrado, que é chamada de weber (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad 28-2$$

Uma vez que  $B$  é proporcional ao número de linhas de campo por unidade de área, o fluxo magnético é proporcional ao número de linhas através de um elemento de área.

**EXERCÍCIO** Mostre que um weber por segundo é um volt.

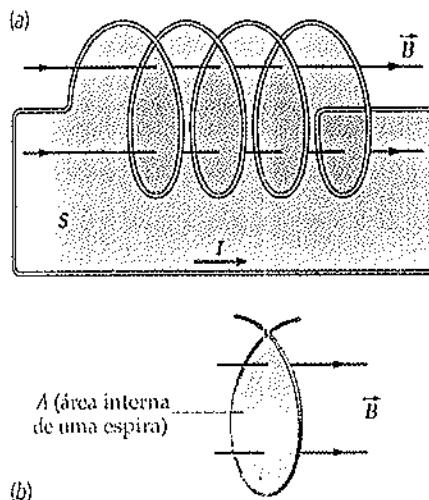


FIGURA 28-2

(a) O fluxo através de uma superfície  $S$  limitada por uma espira com  $N$  voltas é proporcional ao número de linhas de campo penetrando a superfície. A espira mostrada possui quatro voltas. Para as duas linhas de campo mostradas, cada linha penetra a superfície quatro vezes, uma para cada volta, e então o fluxo através de  $S$  é quatro vezes maior que o fluxo através da superfície "limitada" por uma única volta da espira. A espira mostrada não está enrolada de modo muito justo, de modo que a superfície  $S$  possa ser bem observada. (b) A área  $A$  de superfície plana que é (quase) limitada por uma espira única.

Se a superfície é plana com área  $A$ , e se  $\vec{B}$  é uniforme (possui o mesmo módulo e direção) sobre a superfície, o fluxo magnético através da superfície é

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n}A = BA \cos \theta = B_n A$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção de  $\vec{B}$  e a direção normal positiva. Normalmente se está interessado no fluxo através de uma superfície limitada por uma espira que contém várias voltas de fio. Se a espira contém  $N$  voltas, o fluxo através da superfície é  $N$  vezes o fluxo através de cada volta (Figura 28-2). Isto é,

$$\phi_m = NBA \cos \theta \quad 28-3$$

onde  $A$  é a área da superfície plana limitada por uma única volta. (Nota: Apesar de uma curva fechada pode realmente limitar uma superfície.) Uma única volta de uma espira multivoltas não é fechada, então uma única volta não pode realmente limitar uma superfície. Entretanto, se uma espira é enrolada com voltas muito próximas uma das outras, uma única volta é quase fechada, e  $A$  é a área da superfície que é (quase) limitada.

### EXEMPLO 28-1

Encontre o fluxo magnético através de um solenóide que tem comprimento de 40 cm, raio de 2,5 cm, possui 600 voltas e transporta uma corrente de 7,5 A.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo magnético  $\vec{B}$  dentro do solenóide é uniforme e paralelo ao eixo do solenóide. Ele é, portanto, perpendicular ao plano de cada espira. Assim, necessita-se encontrar  $B$  dentro do solenóide e então multiplicar  $B$  por  $NA$ .

- O fluxo magnético é o produto do número de voltas, da intensidade do campo magnético e da área limitada por uma espira:
- O campo magnético dentro da espira é dado por  $B = \mu_0 nI$ , onde  $n = N/\ell$  é um número de voltas por unidade de comprimento:
- Expressando a área  $A$  em termos do seu raio:

$$\phi_m = NBA$$

$$\phi_m = N\mu_0 nIA = N\mu_0 \frac{N}{\ell} IA = \frac{\mu_0 N^2 IA}{\ell}$$

$$A = \pi r^2$$

4. Substituindo os valores dados para calcular o fluxo:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \frac{\mu_0 N^2 I \pi r^2}{l} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A})(600 \text{ voltas})^2(7,5 \text{ A})\pi(0,025 \text{ m})^2}{0,40 \text{ m}} \\ &= 1,66 \times 10^{-2} \text{ Wb}\end{aligned}$$

**NOTAS** Observe que uma vez que  $\phi_m = NBA$  e  $B$  é proporcional ao número de voltas  $N$ ,  $\phi_m$  é proporcional a  $N^2$ .

## 28-2 FEM Induzida e Lei de Faraday

Experimentos realizados por Faraday, Henry e outros mostraram que se o fluxo magnético através de uma superfície limitada por um circuito está variando por qualquer meio, uma fem igual em módulo à taxa de variação do fluxo é induzida no circuito. Usualmente detecta-se a fem através de observação da corrente no circuito, mas a fem está presente mesmo que o circuito seja inexistente ou incompleto (não fechado) e não exista corrente. Inicialmente consideram-se fem que estejam localizadas em uma parte específica do circuito, tal como entre os terminais de uma bateria. Entretanto, fem induzidas podem estar distribuídas ao longo de todo o circuito.

O fluxo magnético através de uma superfície limitada por um circuito pode ser variado de diversas maneiras. A corrente produzindo o campo magnético pode ser aumentada ou diminuída, ímãs permanentes podem ser movidos para dentro ou para fora da superfície, o circuito propriamente dito pode ser girado em uma região com um campo magnético estático ou transladado em uma região com um campo magnético estático não-uniforme  $\vec{B}$ , a orientação do circuito pode ser alterada ou a área da superfície em uma região com um campo magnético uniforme estático pode ser aumentada ou diminuída. Em cada caso, uma fem  $\mathcal{E}$  é induzida no circuito que é igual em módulo à taxa de variação do fluxo magnético através do (de uma superfície limitada pelo) circuito. Isto é,

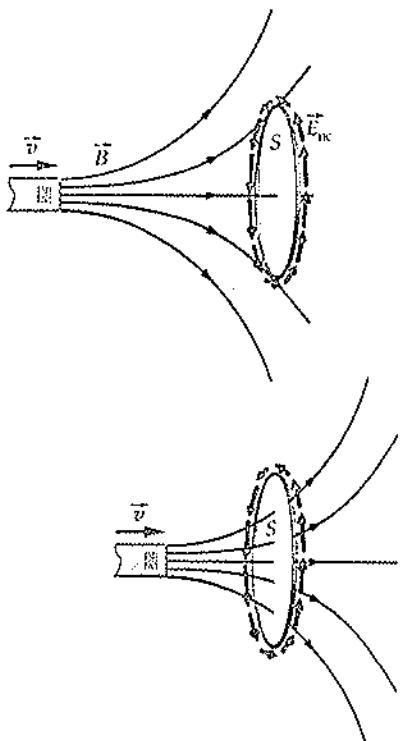
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad 28-4$$

LEI DE FARADAY

Esse resultado é conhecido como lei de Faraday. O sinal negativo na lei de Faraday tem a ver com a direção da fem, que será explicada oportunamente.

A Figura 28-3 mostra uma única espira de fio estacionária em um campo magnético. O fluxo através da espira está variando porque a intensidade do campo magnético está aumentando, então uma fem é induzida na espira. Uma vez que a fem é o trabalho realizado por unidade de carga, sabe-se que devem existir forças exercidas sobre as cargas móveis realizando trabalho sobre elas. Forças magnéticas não podem realizar trabalho, desse modo não se pode associar a fem ao trabalho realizado pelas forças magnéticas. Existem forças elétricas associadas a um campo elétrico não-conservativo  $\vec{E}_{nc}$  realizando trabalho sobre as cargas móveis. A integral de linha desse campo elétrico em torno do circuito completo é igual ao trabalho realizado por unidade de carga, que é a fem induzida no circuito.

Os campos elétricos que foram estudados nos capítulos anteriores resultam de cargas elétricas estáticas. Tais campos elétricos são conservativos, significando que a sua circulação em torno de qualquer curva  $C$  é zero. (A circulação de um



**FIGURA 28-3**  
Se o fluxo magnético através de uma espira estacionária de fio está variando, uma fem é induzida na espira. A fem é distribuída na espira, que é devida a um campo elétrico não-conservativo  $\vec{E}_{nc}$  tangente ao fio.

campo vetorial  $A$  em torno de uma curva fechada  $C$  é definida como  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ . Entretanto, o campo elétrico associado a um campo magnético variável é não-conservativo. Sua circulação em torno de  $C$  é uma fem induzida, igual ao valor negativo da taxa de variação do fluxo magnético através de qualquer superfície  $S$  limitada por  $C$ :

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad 28-5$$

#### FEM INDUZIDA EM UM CIRCUITO ESTACIONÁRIO EM UM CAMPO MAGNÉTICO VARIÁVEL

EXEMPLO 28-3 Um campo magnético uniforme faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo de um enrolamento circular de 30 voltas e raio de 4 cm. O módulo de campo magnético aumenta a uma taxa de  $85 \text{ T/s}$ , enquanto sua direção permanece fixa. Encontre o módulo da fem induzida no enrolamento.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A fem induzida é igual a  $N$  vezes a taxa de variação do fluxo através de uma única espira. Uma vez que  $\vec{B}$  é uniforme, o fluxo através de cada espira é simplesmente  $\phi_m = BA \cos \theta$ , onde  $A = \pi r^2$  é a área da espira.

1. O módulo da fem induzida é dado pela lei de Faraday:  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$

2. Para um campo uniforme, o fluxo é:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A} = NBA \cos \theta$$

3. Substituindo essa expressão para  $\phi_m$  e calculando  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBA \cos \theta) = -N\pi r^2 \cos \theta \frac{dB}{dt} \\ &= -(300)\pi(0,04 \text{ m})^2 \cos 30^\circ(85 \text{ T/s}) = -111 \text{ V} \end{aligned}$$

$$|\mathcal{E}| = 111 \text{ V}$$

**EXERCÍCIO** Se a resistência da espira é  $200 \Omega$ , qual é a corrente induzida? (Resposta 0,555 A)

#### EXEMPLO 28-3

#### FEM INDUZIDA EM UMA ESPIRA CIRCULAR

Tente resolver este exemplo sozinho

Uma espira com 80 voltas de raio 5 cm e resistência de  $30 \Omega$  encontra-se em uma região com um campo magnético uniforme normal ao plano da espira. Qual deve ser a taxa de variação do módulo do campo magnético para produzir uma corrente de 4 A na espira?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A taxa de variação do campo magnético está relacionada à taxa de variação do fluxo, que é relacionada com a fem induzida pela lei de Faraday. A fem na espira é igual à  $IR$ .

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

1. Escreva o fluxo magnético em termos de  $B$ ,  $N$  e o raio  $r$ , e resolva para  $B$ .  $\phi_m = NBA = NB\pi r^2$

#### Respostas

2. Obtenha a derivada no tempo de  $B$ .

$$B = \frac{\phi_m}{N\pi r^2}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{N\pi r^2} \frac{d\phi_m}{dt}$$

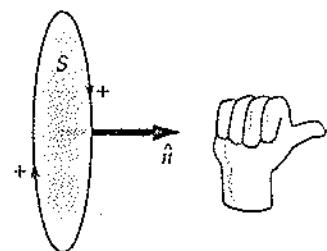
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$|\mathcal{E}| = IR = 120 \text{ V}$$

3. Use a lei de Faraday para relacionar a taxa de variação do fluxo à fem.
4. Calcule o módulo da fem na espira a partir da corrente e da resistência da espira.
5. Substitua os valores numéricos de  $E$ ,  $N$  e  $r$  para calcular  $dB/dt$ .

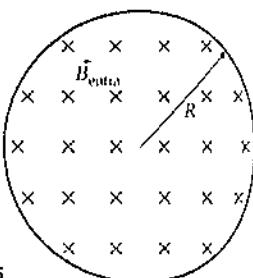
$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{1}{N\pi r^2} |\mathcal{E}| = 191 \text{ T/s}$$

Uma convenção de sinais permite usar a Equação 28-5 para encontrar a direção tanto do campo elétrico induzido quanto da fem induzida. De acordo com essa convenção, a direção positiva tangencial ao longo do caminho de integração  $C$  está relacionada com a direção da normal unitária  $\hat{n}$  sobre a superfície  $S$  limitada por  $C$  pela regra da mão direita (Figura 28-4). Colocando o dedo polegar direito na direção de  $\hat{n}$ , os dedos da mão irão girar na direção tangencial positiva sobre  $C$ . Se  $d\phi_m/dt$  é positivo, então de acordo com a lei de Faraday (Equação 28-5) ambos,  $\vec{E}_{nc}$  e  $\mathcal{E}$ , estão na direção tangencial negativa. (A direção de  $\vec{E}_{nc}$  e  $\mathcal{E}$  pode ser determinada via lei de Lenz, que será discutida na Seção 28-3.)



**FIGURA 28-4**

Colocando o dedo polegar na direção de  $\hat{n}$  sobre a superfície  $S$ , os dedos da mão giram no sentido positivo tangencial sobre  $C$ .



**FIGURA 28-5**



**FIGURA 28-6**

Um campo magnético  $\vec{B}$  é perpendicular ao plano da página.  $\vec{B}$  é uniforme através de uma região circular de raio  $R$ , como mostrado na Figura 28-5. Externamente a essa região,  $\vec{B}$  é igual a zero. A direção de  $\vec{B}$  permanece fixa, e a taxa de variação de  $B$  é  $dB/dt$ . Quais são o módulo e a direção do campo elétrico induzido no plano da página (a) a uma distância  $r < R$  a partir do centro da região circular e (b) a uma distância  $r > R$  a partir do centro, onde  $B = 0$ ?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O campo magnético  $\vec{B}$  está para dentro da página e cobre uniformemente a região circular de raio  $R$ , como mostrado na Figura 28-6. Conforme  $B$  aumenta ou diminui, o fluxo magnético através de uma superfície limitada por uma curva fechada  $C$  também varia, e uma fem  $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$  é induzida em torno de  $C$ . O campo elétrico induzido é encontrado pela aplicação de  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\phi_m/dt$  (Equação 28-5). Para usar a vantagem da simetria do sistema, escolhe-se  $C$  como sendo uma curva circular de raio  $r$  e então avalia-se a integral de linha. Pela simetria,  $\vec{E}$  é tangente ao círculo  $C$  e possui o mesmo módulo em qualquer ponto do círculo. Atribui-se a direção de  $\hat{n}$  para dentro da página. A convenção de sinais então diz que a direção tangente positiva está no sentido horário. Calcula-se então o fluxo magnético  $\phi_m$  a partir da sua derivada no tempo, e resolve-se para  $E_r$ .

(a) 1. Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão relacionados pela Equação 28-5:  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$   
onde

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

2.  $E_t$  (a componente tangencial de  $\vec{E}$ ) é encontrada a partir da integral de linha para um círculo de raio  $r < R$ .  $\vec{E}$  é tangente ao círculo e possui um módulo constante:

3. Para  $r < R$ ,  $\vec{B}$  é uniforme sobre a superfície plana  $S$  limitada pelo círculo  $C$ . Escolheu-se  $\hat{n}$  na direção para dentro da página. Como  $\vec{B}$  está também para dentro da página, o fluxo através de  $S$  é simplesmente  $BA$ :

4. Calcula-se a derivada no tempo de  $\phi_m$ :

5. Substituem-se os resultados do passo 3 e do passo 4 no resultado do passo 1, e resolve-se para  $E_t$ . A direção tangencial positiva é no sentido horário.

6. Para a escolha da direção de  $\hat{n}$  no passo 3, a direção tangencial positiva é no sentido horário:

(b) 1. Para o círculo de raio  $r > R$  (a região onde o campo magnético é nulo), a integral de linha é a mesma que antes:

2. Uma vez que  $B = 0$  para  $r > R$ , o módulo do fluxo através de  $S$  é  $B\pi R^2$ :

3. Aplica-se a lei de Faraday para encontrar  $E_t$ :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C E_t dl = E_t \oint_C dl = E_t 2\pi r$$

$$\begin{aligned}\phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA = B_n \int_S dA \\ &= BA = B\pi r^2\end{aligned}$$

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \frac{dB}{dt}\pi r^2$$

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

então

$$E_t = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}, \quad r < R$$

$E_t$  é negativa, então  $\vec{E}$  está no sentido anti-horário.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t 2\pi r$$

$$\phi_m = B\pi R^2$$

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi R^2$$

$$E_t = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}, \quad r > R$$

$E_t$  é negativa, então  $\vec{E}$  está no sentido anti-horário.

**NOTAS** A direção tangencial positiva está no sentido horário. Quando  $d\phi_m/dt$  é positiva,  $E_t$  é negativa e o sentido do campo elétrico é anti-horário, como mostrado na Figura 28-7. Note que o campo elétrico nesse exemplo é produzido por uma variação do campo magnético, em vez de variações elétricas. Note também que  $\vec{E}$ , e desse modo a fem, existe ao longo de qualquer curva fechada limitando a área através da qual o campo magnético está variando, existindo ou não um fio ou um circuito ao longo da curva.

### 28-3 Lei de Lenz

O sinal negativo na lei de Faraday tem a ver com a direção da fem induzida. Isso pode ser determinado pela convenção de sinais descrita na seção anterior ou por um princípio físico geral, conhecido como lei de Lenz:

A fem induzida está em uma direção que se opõe, ou tende a se opor, à variação que a produz.

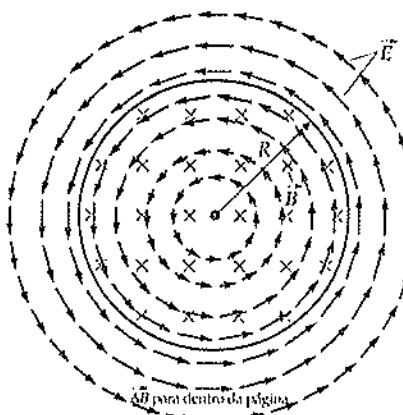


FIGURA 28-7

O campo magnético está para dentro da página e está crescendo em módulo. O campo elétrico induzido está no sentido anti-horário.

LEI DE LENZ

Note que a lei de Lenz não especifica exatamente qual tipo de variação causa a fem e a corrente induzidas. A afirmativa da lei de Lenz é propositadamente deixada vaga, para cobrir uma variedade de condições que serão agora ilustradas.

A Figura 28-8 mostra uma barra imantada se movendo em direção a uma espira que possui uma resistência  $R$ . É o movimento da barra imantada para a direita que induz uma fem e uma corrente na espira. A lei de Lenz diz que a fem e a corrente induzidas devem ser em uma direção que se opõe ao movimento da barra imantada. Isto é, a corrente induzida na espira produz um campo magnético nela mesma, e esse campo magnético deve exercer uma força para a esquerda sobre a barra imantada se aproximando. A Figura 28-9 mostra o momento magnético induzido da espira com corrente quando o ímã está se movendo em direção a ela. A espira atua como um pequeno ímã, com seu polo norte para a esquerda e seu polo sul para a direita. Uma vez que tais pólos se repelem, o momento magnético da espira repele a barra imantada; isto é, ela se opõe ao seu movimento em direção à espira. Isso significa que a direção da corrente induzida na espira deve ser a mostrada na Figura 28-9.

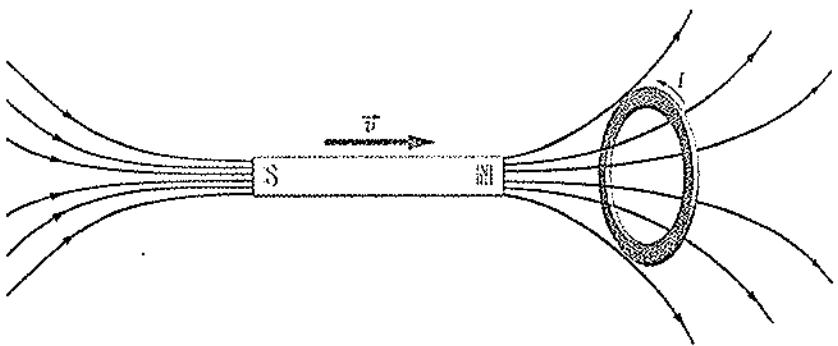
Suponha que a corrente induzida na espira mostrada na Figura 28-9 fosse invertida em relação à direção mostrada. Então deveria existir uma força magnética para a direita sobre a barra imantada que se aproxima, fazendo com que ela aumentasse sua velocidade. Esse ganho em velocidade deveria causar um aumento na corrente induzida, que, por sua vez, deveria fazer com que a força sobre a barra imantada aumentasse, e assim por diante. Isso é muito bom para ser verdade. A qualquer momento que se liberasse uma barra imantada em direção a uma espira condutora ela deveria se mover para a espira com uma velocidade aumentando sempre e com nenhum esforço significativo envolvido. Se isso ocorresse, seria uma violação da conservação da energia. Entretanto, a realidade é que a energia é conservada, e a afirmativa chamada de lei de Lenz é consistente com essa realidade.

Uma forma alternativa da lei de Lenz, em termos do fluxo magnético, é freqüentemente empregada. Essa afirmativa é:

Quando um fluxo magnético através de uma superfície varia, o campo magnético devido a qualquer corrente induzida produz um fluxo sobre ela mesma — através da mesma superfície e em oposição à variação.

#### FORMA ALTERNATIVA DA LEI DE LENZ

Para um exemplo de como essa forma alternativa é aplicada, veja o Exemplo 28-5.



**FIGURA 28-8**

Quando uma barra imantada está se movendo para a direita, no sentido da espira, a fem induzida na espira produz uma corrente induzida na direção mostrada. O campo magnético devido a essa corrente induzida na espira produz um campo magnético que exerce uma força sobre a barra imantada em oposição ao seu movimento para a direita.



**FIGURA 28-9**

O momento magnético da espira  $\mu$  (mostrado em destaque como se houvesse uma barra imantada) devido à corrente induzida é tal que se opõe ao movimento da barra imantada. A barra imantada está se movendo no sentido da espira, então o momento magnético induzido repele a barra imantada.

USANDO A FORMA ALTERNATIVA DA LEI DE LENZ Usando a forma alternativa da lei de Lenz, encontre a direção da corrente induzida na espira mostrada na Figura 28-8.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Use a forma alternativa da lei de Lenz para determinar a direção do campo magnético induzido na espira. Então use a lei da mão direita para determinar a direção da corrente induzida.

1. Desenhe um esboço da espira limitando a superfície plana  $S$  (Figura 28-10). Sobre a superfície  $S$ , desenhe o vetor  $\Delta\vec{B}_1$ , que é a variação no campo magnético  $\vec{B}_1$  da barra imantada que se aproxima:

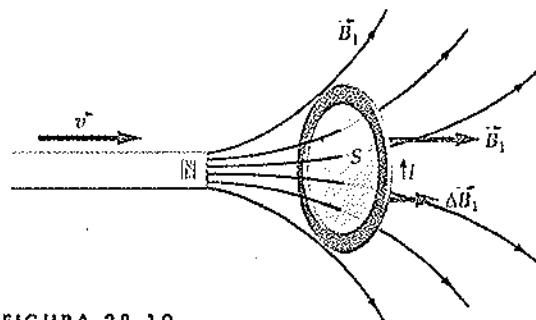


FIGURA 28-10

2. Sobre o esboço desenhe o vetor  $\vec{B}_2$ , que é o campo magnético da corrente induzida na espira (Figura 28-11). Use a forma alternativa de lei de Lenz para determinar a direção de  $\vec{B}_2$ :

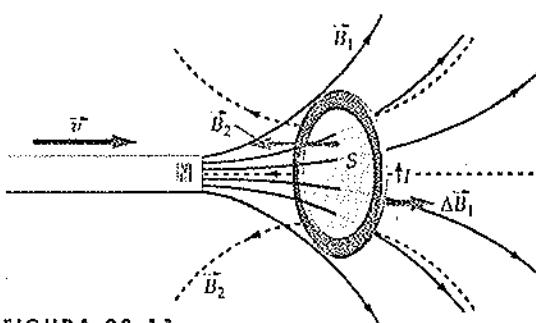


FIGURA 28-11

3. Usando a regra da mão direita e a direção de  $\vec{B}_2$ , determine a direção da corrente induzida na espira (Figura 28-12):

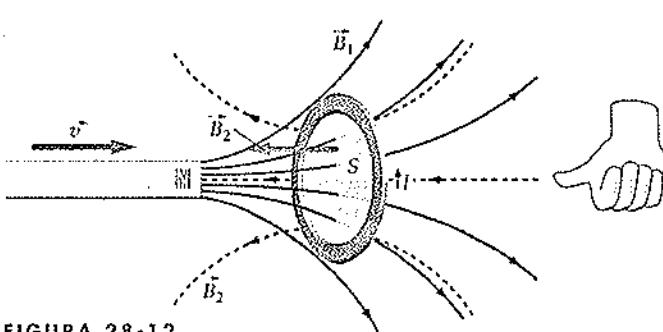


FIGURA 28-12

**EXERCÍCIO** Usando a forma alternativa da lei de Lenz, encontre a direção da corrente induzida na espira mostrada na Figura 28-8 se o ímã está-se movendo para a esquerda (para longe da espira). (Resposta Na direção oposta à mostrada na Figura 28-12)

Na Figura 28-13, a barra imantada está em repouso e a espira está-se movendo para longe do ímã. A corrente induzida e o momento magnético são mostrados na figura. Nesse caso, a barra imantada atrai a espira, assim se opondo ao movimento da espira como requerido pela lei de Lenz.

Na Figura 28-14, quando a corrente no circuito 1 está variando, existe um fluxo variável através do circuito 2. Suponha que a chave  $S$  no circuito 1 está inicialmente aberta, de tal modo que não exista corrente no circuito (Figura 28-14a). Quando a chave é fechada (Fi-

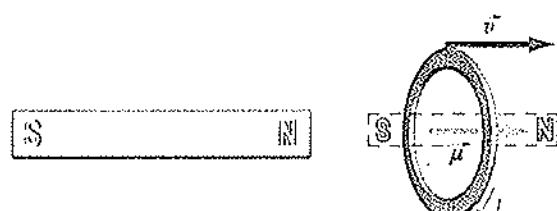
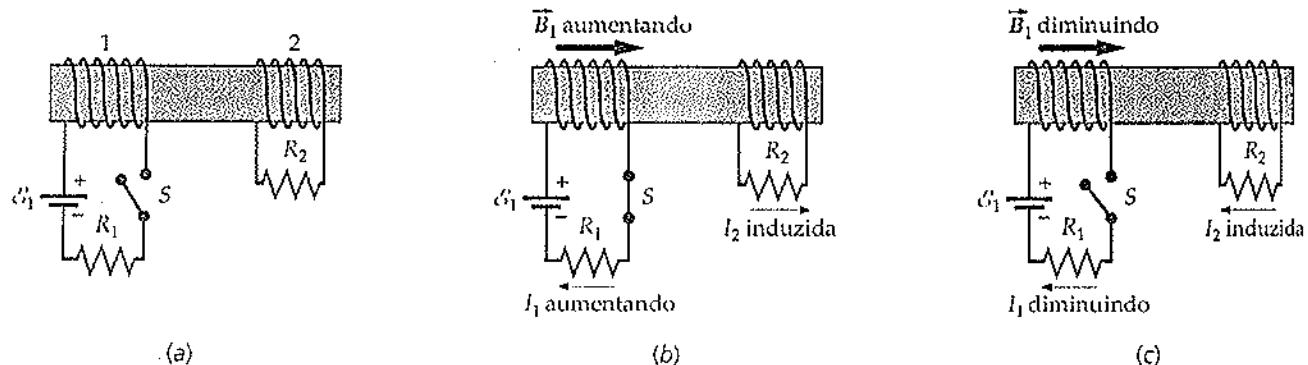


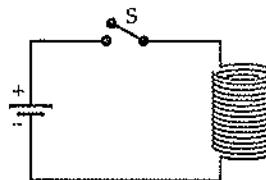
FIGURA 28-13  
Quando a espira está-se movendo para longe de uma barra imantada estacionária, a barra imantada atrai o momento magnético da espira novamente no sentido oposto ao do movimento relativo.



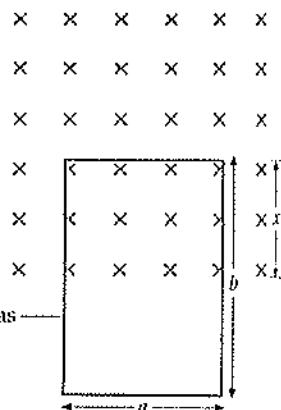
gura 28-14b), a corrente no circuito 1 não deve atingir seu valor em regime permanente  $\mathcal{E}_1/R$  instantaneamente, mas levar algum tempo para variar desde zero até esse valor. Durante o intervalo de tempo em que a corrente está aumentando, o fluxo através do circuito 2 está variando e uma corrente é induzida no circuito 2 na direção mostrada. Quando a corrente no circuito 1 atinge seu valor estacionário, o fluxo através do circuito 2 não mais irá variar, e então não existirá mais uma corrente induzida no circuito 2. Uma corrente induzida no circuito 2 aparecerá momentaneamente na direção oposta quando a chave no circuito 1 é aberta (Figura 28-14c) e a corrente no circuito 1 diminui até zero. É importante entender que existe uma corrente induzida *apenas enquanto o fluxo está variando*. A fem não depende do módulo do fluxo, mas apenas da sua taxa de variação. Se existe um grande fluxo estacionário através do circuito, não existirá fem induzida.

Como próximo exemplo, considere-se o circuito único isolado mostrado na Figura 28-15. Se existe uma corrente no circuito, existe um fluxo magnético através da bobina devido à sua própria corrente. Se a corrente está variando, o fluxo na espira está variando e existe uma fem induzida no circuito enquanto o fluxo está variando. Esta *fem auto-induzida* se opõe à variação na corrente. Por isso ela é chamada de *contra-fem*. Por causa dessa fem auto-induzida, a corrente em um circuito não pode variar instantaneamente de zero para algum valor finito ou de algum valor finito para zero. Henry foi quem primeiro observou esse efeito quando estava experimentando um circuito que consistia em várias voltas de um fio como aquele na Figura 28-15. Esse arranjo fornece um grande fluxo através do circuito, mesmo para pequenas correntes. Joseph Henry observou uma centelha através da chave quando tentava desligar o circuito. Tal centelha é devida à elevada fem induzida que ocorre quando a corrente varia rapidamente, como durante a operação de uma chave. Nesse caso, a fem induzida tenta manter a corrente original. A elevada fem induzida produz uma grande diferença de potencial na chave quando é aberta. O campo elétrico entre os contatos da chave é grande o suficiente para produzir a quebra dielétrica no ar das vizinhanças. Quando a quebra dielétrica ocorre, o ar conduz corrente elétrica na forma de uma centelha.

**FIGURA 28-14**  
(a) Dois circuitos adjacentes. (b) Logo após a chave ter sido fechada,  $I_1$  está aumentando na direção mostrada. O fluxo variável através do circuito 2 induz a corrente  $I_2$ . O fluxo através do circuito 2 devido a  $I_2$  se opõe à variação no fluxo devido a  $I_1$ . (c) Quando a chave é aberta,  $I_1$  diminui e o fluxo através do circuito 2 varia. A corrente induzida  $I_2$  tende então a manter o fluxo através do circuito 2.



**FIGURA 28-15**  
Uma bobina com várias voltas de fio fornece um grande fluxo para uma dada corrente no circuito. Assim, quando a corrente varia existe uma grande fem induzida na bobina em oposição a essa variação.



Uma espira retangular de  $N$  voltas, cada uma com largura  $a$  e comprimento  $b$ , em que  $N = 80$ ,  $a = 20$  cm, e  $b = 30$  cm, está localizada em um campo magnético de módulo  $B = 0,8$  T, direcionado para dentro da página (Figura 28-16), com apenas metade da espira na região do campo magnético. A resistência  $R$  da espira é  $30 \Omega$ . Encontre o módulo e a direção da corrente induzida, se a espira é deslocada com velocidade de  $2$  m/s (a) para a direita, (b) para cima e (c) para baixo.

**FIGURA 28-16**

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A corrente induzida é igual à fem induzida dividida pela resistência. Calcula-se a fem induzida no circuito conforme a espira se move a partir da determinação da taxa de variação do fluxo através da espira. O fluxo é proporcional à distância  $x$ . A direção da corrente induzida é encontrada a partir da lei de Lenz.

- (a) 1. A corrente induzida é igual à fem dividida pela resistência:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

2. A fem induzida e o fluxo magnético estão relacionados pela lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

3. O fluxo através da espira é  $N$  vezes o fluxo através da cada volta da espira. Escolhe-se a direção  $\hat{n}$  para dentro da página. O fluxo através da superfície  $S$  limitada por uma única espira é  $Bax$ :

$$\phi_m = \vec{N}\vec{B} \cdot \hat{n}\vec{A} = NBax$$

4. Quando a espira está-se movendo para a direita (ou para a esquerda), o fluxo não varia (até que a espira deixe a região do campo magnético). A corrente é, portanto, zero:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = 0$$

então

$$I = \boxed{0}$$

- (b) 1. Calcule a taxa de variação do fluxo quando a espira está-se movendo para cima. Nesse caso,  $x$  está aumentando de tal modo que  $dx/dt$  é positivo:

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(NBax) = NBa \frac{dx}{dt}$$

2. Calcule o módulo da corrente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBa(dx/dt)}{R}$$

$$= \frac{(80)(0,8\text{ T})(0,20\text{ m})(2\text{ m/s})}{30\Omega} = 0,853\text{ A}$$

$$I = 0,853\text{ A, anti-horário}$$

3. Conforme a espira se move para cima, o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S$  está aumentando. A corrente induzida deve produzir um campo magnético cujo fluxo através de  $S$  diminua conforme  $x$  aumenta. Este seria um campo magnético cujo produto escalar com  $\hat{n}$  seria negativo. Tal campo magnético é direcionado para fora da página sobre  $S$ . Para produzir um campo magnético nessa direção, a corrente induzida deve estar no sentido anti-horário:

- (c) Conforme a espira se move para baixo, o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S$  está diminuindo. A corrente induzida deve produzir um campo magnético cujo fluxo através de  $S$  aumente conforme  $x$  diminui. Este seria um campo magnético cujo produto escalar com  $\hat{n}$  seria positivo. Tal campo magnético é direcionado para dentro da página em  $S$ . Para produzir um campo magnético nessa direção, a corrente induzida deve estar no sentido horário:

$$I = 0,853\text{ A, horário}$$

**NOTAS** Nesse exemplo o campo magnético é estático, então não existe campo elétrico não-conservativo. Assim, a fem não é o trabalho realizado por um campo elétrico não-conservativo. Esse fato é analisado na próxima seção.

## 28-4 FEM Induzida por Movimento

A fem induzida em um condutor se movendo através de um campo magnético é chamada de **fem induzida por movimento**. De forma mais geral,

A fem induzida por movimento é qualquer fem induzida devido ao movimento de um condutor em um campo magnético.

### DEFINIÇÃO DE FEM INDUZIDA POR MOVIMENTO

Uma pequena espira de  $N$  voltas possui seu plano perpendicular a um campo magnético uniforme estático  $\vec{B}$ , como mostrado na Figura 28-17. A espira está conectada a um integrador de corrente (I.C.), que é um aparato usado para medir a carga total que passa através da espira. Encontre a carga passando através da espira se ela gira  $180^\circ$  em torno do eixo mostrado.

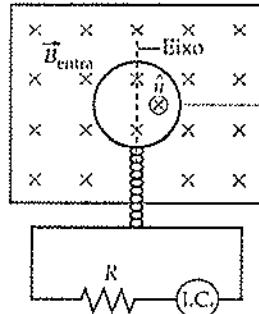


FIGURA 28-17

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Quando a espira na Figura 28-17 é girada, o fluxo magnético através da espira varia, causando uma fem induzida  $\mathcal{E}$ . A fem, por sua vez, causa uma corrente  $I = \mathcal{E}/R$ , onde  $R$  é a resistência total do circuito. Uma vez que  $I = dq/dt$ , pode-se encontrar a carga  $Q$  que passa através do integrador pela integração de  $I$ , que é  $Q = \int dq = \int I dt$ .

1. O incremento de carga  $dq$  é igual à corrente  $I$  vezes o incremento de tempo  $dt$ :

2. A fem  $\mathcal{E}$  está relacionada à  $I$  pela lei de Ohm:

$$\mathcal{E} = RI$$

então

$$\mathcal{E} dt = RI dt$$

3. A fem  $\mathcal{E}$  está relacionada ao fluxo  $\phi_m$  pela lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

ou

$$\mathcal{E} dt = -d\phi_m$$

4. Substituindo  $-d\phi_m$  por  $\mathcal{E} dt$  e  $dq$  por  $I dt$  no resultado do passo 2 e resolvendo para  $dq$

$$-d\phi_m = R dq$$



Antes da rotação Depois da rotação

FIGURA 28-18

$$dq = -\frac{1}{R} d\phi_m$$

$$Q = \int_0^Q dq = -\frac{1}{R} \int_{\phi_{m,i}}^{\phi_{m,f}} d\phi_m = -\frac{1}{R} (\phi_{m,f} - \phi_{m,i}) = -\frac{\Delta\phi_m}{R}$$

5. Integra-se para encontrar a carga total  $Q$ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_m &= \phi_{m,f} - \phi_{m,i} = \vec{N}\vec{B} \cdot \hat{n}_f A - \vec{N}\vec{B} \cdot \hat{n}_i A \\ &= NA(\vec{B} \cdot \hat{n}_f - \vec{B} \cdot \hat{n}_i) = NA[(-B) - (+B)] = -2NBA \end{aligned}$$

6. O fluxo através da espira é  $\phi_m = \vec{N}\vec{B} \cdot \hat{n}A$ , onde  $\hat{n}$  é a normal à superfície plana limitada pela corrente (Figura 28-18). Inicialmente, a normal está direcionada para dentro da página. Quando a espira gira, também giram a superfície e sua normal. Encontra-se a variação em  $\phi_m$  quando a espira gira de  $180^\circ$ :

7. A combinação dos dois resultados anteriores fornece  $Q$ :

$$Q = \boxed{\frac{2NBA}{R}}$$

**NOTAS** Observe que a carga  $Q$  não depende de a espira girar rápida ou lentamente — tudo o que interessa é a variação do fluxo magnético através da espira. A espira usada desse modo é chamada de *espira giratória*. Isso é usado para medir campos magnéticos. Por exemplo, se o integrador de corrente (I.C.) mede uma carga total  $Q$  passando através da espira quando ela é girada, a intensidade do campo magnético pode ser encontrada a partir de  $B = RQ/(2NA)$ .

**EXERCÍCIO** Uma espira giratória de 40 voltas tem um raio de 3 cm, uma resistência de  $16 \Omega$  e o plano da espira está inicialmente perpendicular a um campo magnético estático uniforme de 0,50 T. Se a espira é girada de  $90^\circ$ , quanta carga passa através dela? (Resposta 3,53 mC)

A Figura 28-19 mostra uma fina haste condutora deslizando para a direita ao longo de trilhos condutores que estão conectados por um resistor. Um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  está direcionado para dentro da página.

Considere o fluxo magnético através da superfície plana  $S$  limitada pelo circuito. Seja  $\hat{n}$  a normal à superfície para dentro da página. Conforme a haste se move para a direita a superfície  $S$  aumenta, assim como o fluxo magnético através da superfície  $S$ . Desse modo, uma fem é induzida no circuito. Seja  $\ell$  a separação dos trilhos e  $x$  a distância a partir da extremidade esquerda dos trilhos até a haste. A área da superfície  $S$  é então  $\ell x$ , o fluxo magnético através de  $S$  é

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n}A = B_n A = B\ell x$$

Quando  $x$  aumenta de  $dx$ , a área da superfície  $S$  aumenta de  $dA = \ell dx$  e o fluxo  $\phi_m$  aumenta de  $d\phi_m = B\ell dx$ . A taxa de variação do fluxo é

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

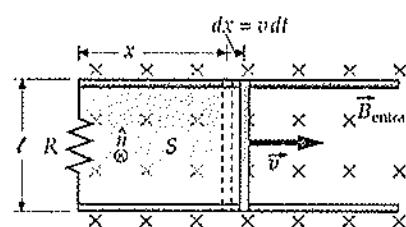
onde  $v = dx/dt$  é a velocidade da haste. A fem induzida nesse circuito é, desse modo,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\ell v$$

onde o sinal negativo diz que a fem está na direção tangencial negativa. Coloque o dedo polegar direito na direção de  $\hat{n}$  (para dentro da página) e os quatros dedos da mão direita irão girar na direção tangencial positiva (sentido horário). Assim, a fem induzida será no sentido anti-horário.

Pode-se verificar esse resultado (a direção da fem induzida) usando a lei de Lenz. É o movimento da haste para a direita que produz a corrente induzida, então a força magnética sobre a haste devida à corrente induzida deve ser para a esquerda. A força magnética sobre um condutor transportando corrente é dada por  $I\vec{L} \times \vec{B}$  (Equação 26-4), onde  $\vec{L}$  é a direção da corrente. Se  $\vec{L}$  é para cima, a força é para a esquerda, o que confirma o resultado anterior (que a fem induzida está no sentido anti-horário.) Se é dada à haste alguma velocidade inicial  $\vec{v}$  para a direita e então ela é liberada, a força devida à corrente induzida diminui a velocidade da haste até fazê-la parar. Para manter o movimento da haste, uma força externa empurrando a haste para a direita deve ser mantida.

Uma segunda verificação sobre a direção da fem e da corrente induzidas pode ser feita considerando a direção da força magnética sobre os portadores de carga se movendo para a direita com a haste. Os portadores de carga se movem para a direita com a mesma velocidade  $\vec{v}$  da haste, então os portadores de carga experimentam um força magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Se  $q$  é positiva, essa força é para cima, significando que a fem induzida é no sentido anti-horário.



**FIGURA 28-19**  
Uma haste condutora deslizando sobre trilhos condutores em um campo magnético. Conforme a haste se move para a direita, a área da superfície  $S$  aumenta, então o fluxo magnético através de  $S$  para dentro do papel aumenta. Uma fem de módulo  $B\ell v$  é induzida no circuito, induzindo uma corrente no sentido anti-horário que produz um fluxo através da superfície  $S$  direcionado para fora do papel em oposição à variação do fluxo devido ao movimento da haste.

A fem é o trabalho por unidade de carga sobre os portadores de carga, mas qual é a força que está realizando esse trabalho no circuito mostrado na Figura 28-19? Torna-se claro que esse trabalho é realizado pela superposição de uma força magnética e de uma força elétrica (Figura 28-20). Para verificar como isso ocorre, considere que a corrente na haste é para cima, então a velocidade de migração  $\vec{v}_d$  dos portadores de carga positivos assumidos é para cima. Assim, uma força magnética ( $\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B}$ ) para a esquerda atua sobre os portadores de carga e, como resultado, a haste se torna polarizada — seu lado esquerdo positivamente carregado e seu lado direito negativamente carregado. Essas cargas superficiais produzem um campo elétrico  $\vec{E}_1$  dentro da haste para a direita, e esse campo exerce uma força elétrica ( $\vec{F}_D = q\vec{E}_1$ ) para a direita sobre os portadores de carga. A soma  $\vec{F}_B + q\vec{E}_1 = 0$ , uma vez que a força líquida horizontal sobre os portadores de carga é nula. Além disso, uma força magnética para cima  $\vec{F}_C = q\vec{v} \times \vec{B}$ , onde  $\vec{v}$  é a velocidade tanto dos portadores de carga quanto da haste para a direita. O trabalho total realizado por todas essas três forças sobre os portadores de carga atravessando a haste é apenas o trabalho realizado por  $\vec{F}_C$ , e esse trabalho é  $F_C\ell = qvB\ell$ . Assim, o trabalho por unidade de carga é  $vB\ell$ , que é obtido dividindo o trabalho total pela carga  $q$ . O módulo da fem é igual a esse trabalho.

$$\mathcal{E} = vB\ell$$

28-6

#### MÓDULO DA FEM PARA UMA HASTE SE MOVENDO PERPENDICULARMENTE TANTO EM RELAÇÃO À HASTE QUANTO A $\vec{B}$

O módulo da fem é o trabalho total por unidade de carga realizado por todas as três forças  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_D$  e  $\vec{F}_C$ . Tomadas juntas,  $\vec{F}_B$  e  $\vec{F}_C$  constituem a força magnética total. A força magnética total, entretanto, é perpendicular à velocidade dos portadores de carga e, assim, não realiza trabalho. Logo, o trabalho total realizado por todas as três forças é feito somente pela força elétrica  $\vec{F}_D$ .

A Figura 28-21 mostra um portador de carga positivo em uma haste condutora que está se movendo com velocidade constante através de um campo magnético uniforme direcionado para dentro do papel. Como o portador de carga está se movendo horizontalmente com a haste, existe uma força magnética para cima sobre o portador de carga de módulo  $qvB$ . Respondendo a essa força, os portadores de carga na haste se movem para cima, produzindo uma carga líquida positiva no topo da haste e deixando uma carga líquida negativa na parte de baixo da haste. Os portadores de carga continuam a se mover para cima até que o campo elétrico  $\vec{E}_1$  produzido pela separação de cargas exerça uma força para baixo de módulo  $qE_1$  sobre as cargas separadas, que equilibra a força magnética para cima  $qvB$ . No equilíbrio, o módulo desse campo elétrico na haste é

$$E_1 = vB$$

A direção desse campo elétrico é paralela à haste, indo para baixo. A diferença de potencial associada ao comprimento  $\ell$  da haste é

$$\Delta V = E_1\ell = vB\ell$$

com o potencial sendo mais alto na parte superior. Isto é, quando não existe corrente através da haste a diferença de potencial na haste é igual a  $vB\ell$  (a fem

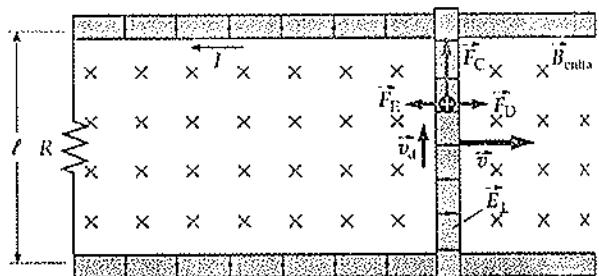


FIGURA 28-20

Quando um portador de carga positivo se move ao longo de uma haste móvel, forças elétricas e magnéticas atuam sobre o portador de carga. A força eletromagnética líquida sobre o portador de carga é direcionada para cima, na direção da velocidade de migração. O trabalho por unidade de carga realizado por essa força sobre o portador de carga, conforme ele atravessa a haste, é a fem induzida por movimento.

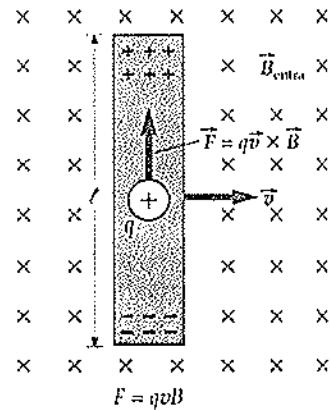


FIGURA 28-21

Um portador de carga positivo em uma haste condutora que está se movendo através de um campo magnético apresenta uma força magnética que apresenta uma componente para cima. Alguns desses portadores de carga se movem para o topo da haste, deixando sua parte inferior negativa. A separação de carga produz um campo elétrico para baixo de módulo  $E_1 = vB$  sobre a haste. Assim, o potencial no topo da haste é maior que o potencial na parte inferior por uma diferença de  $E_1\ell = vB\ell$ .

induzida por movimento). Quando existe uma corrente  $I$  através da haste, a diferença de potencial é

$$\Delta V = vB\ell - Ir \quad 28-7$$

### DIFERENÇA DE POTENCIAL ATRAVÉS DE UMA HASTE MÓVEL

onde  $r$  é a resistência da haste.

**EXERCÍCIO** Uma haste com 40 cm de comprimento está-se movendo com 12 m/s no plano perpendicular ao campo magnético de 0,30 T. A velocidade da haste é perpendicular ao seu comprimento. Encontre a fem induzida na haste. (Resposta 1,44 V)

### EXEMPLO 28-8

### UM CONDUTOR EM FORMA DE U: UMA HASTE DESLIZANTE

Tente resolver este exemplo sozinho

Usando a Figura 28-19, faça  $B = 0,6$  T,  $v = 8$  m/s,  $\ell = 15$  cm e  $R = 25 \Omega$ ; admita que as resistências da haste e dos trilhos são desprezíveis. Encontre (a) a fem induzida no circuito, (b) a corrente no circuito, (c) a força necessária para mover a haste com velocidade constante e (d) a potência dissipada no resistor.

### DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

#### Etapas

- Calcule a fem induzida a partir da Equação 28-6.
- Encontre a corrente a partir da lei de Ohm.
- A força necessária para mover a haste com velocidade constante é igual e oposta à força exercida pelo campo magnético sobre a haste, que possui módulo  $I\ell b$  (Equação 26-4). Calcule o módulo dessa força.
- Encontre a potência dissipada no resistor.

#### Respostas

$$\mathcal{E} = Bv\ell = 0,720 \text{ V}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 28,8 \text{ mA}$$

$$F = IB\ell = 2,59 \text{ mN}$$

$$P = I^2R = 20,7 \text{ mW}$$

**VERIFICAÇÃO** Usando  $P = Fv$ , confirma-se que a potência é de 20,7 mW.

**NOTAS** O potencial no topo da haste é maior que o potencial na parte inferior da haste de uma quantidade igual à fem.

### EXEMPLO 28-9

Uma haste de massa  $m$  desliza sobre trilhos condutores sem atrito em uma região de campo magnético uniforme estático  $\vec{B}$  direcionado para dentro da página (Figura 28-22). Um agente externo está empurrando a haste, mantendo seu movimento para a direita com velocidade constante  $v_0$ . No instante  $t = 0$ , o agente abruptamente pára de empurrar e a haste segue em frente, tendo sua velocidade reduzida pela força magnética. Encontre a velocidade  $v$  da haste como função do tempo.

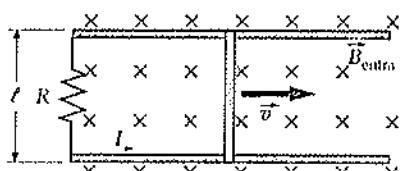


FIGURA 28-22

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A velocidade da haste varia porque uma força magnética atua sobre a corrente induzida. O movimento da haste em um campo magnético induz uma fem  $\mathcal{E} = B\ell v$  e, portanto, uma corrente na haste,  $I = \mathcal{E}/R$ . Isso provoca uma força magnética agindo sobre a haste,  $F = IB\ell$ . Com a força conhecida, aplica-se a segunda lei de Newton para encontrar a velocidade como função do tempo. Toma-se a direção  $x$  positiva como sendo para a direita.

- Aplica-se a segunda lei de Newton na haste:

$$F_x = ma_x = m \frac{dv}{dt}$$

- A força exercida sobre a haste é a força magnética, que é proporcional à corrente e no sentido negativo de  $x$ , como mostrado na Figura 28-22:

$$F_x = -IB\ell$$

- A corrente é igual à fem induzida pelo movimento dividida pela resistência da haste:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

- Combinando esses resultados, encontra-se o módulo da força magnética exercida sobre a haste:

$$F_x = -IB\ell = -\frac{B\ell v}{R} B\ell = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

- A segunda lei de Newton fornece então:

$$-\frac{B^2\ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

- Separando as variáveis e integrando a velocidade desde  $v_0$  até  $v_t$  e o tempo desde 0 e  $t_f$ :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} dt$$

$$\int_{v_0}^{v_t} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} \int_0^{t_f} dt$$

$$\ln \frac{v_t}{v_0} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} t_f$$

$$v = v_0 e^{-t_f/\tau}, \text{ onde } \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

- Fazendo  $v = v_t$  e  $t = t_f$ , resolve-se então para  $v$ :

**NOTAS** Se a força fosse constante, a velocidade da haste diminuiria linearmente com o tempo. Entretanto, como a força é proporcional à velocidade da haste, como encontrado no passo 4, a força é inicialmente grande, mas diminui conforme a velocidade decresce. Em princípio, a haste nunca pára de se mover. Na verdade, a haste se desloca apenas uma distância finita. (Veja o Problema 37.)

A equação geral para a fem induzida por movimento é

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad 28-8$$

EQUAÇÃO GERAL PARA A FEM INDUZIDA POR MOVIMENTO

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do fio no elemento  $d\vec{l}$ . A integral é tomada em um instante de tempo.

Integre  $\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  para mostrar que a fem no circuito da Figura 28-23 é dada pela Equação 28-6.

FIGURA 28-23

As direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  positivas estão para a direita, para dentro da página e para cima da página, respectivamente. A haste se move para a direita com velocidade  $\vec{v}_t$ , e existe um campo magnético uniforme estático direcionado para dentro da página.



**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O circuito C pode ser dividido em duas partes: a parte  $C_1$ , que está se movendo, e a parte  $C_2$ , que é estacionária.

- Divide-se o circuito em duas partes,  $C_1$  e  $C_2$ . Sobre  $C_1$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_1$ , e sobre  $C_2$ ,  $\vec{v} = 0$ :

$$\oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \int_a^b (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + 0$$

- Avalia-se  $(\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$  sobre  $C_1$ :

$$\vec{v}_1 \times \vec{B} = v_1 \hat{i} \times B \hat{j} = v_1 B \hat{k}$$

e

$$d\vec{\ell} = d\ell \hat{k}$$

então

$$(\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = v_1 B \hat{k} \cdot d\ell \hat{k} = v_1 B d\ell$$

$$\mathcal{E} = \int_a^b (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b v_1 B d\ell = v_1 B \int_a^b d\ell$$

$$= v_1 B \ell$$

- Avalie a integral e encontre a fem:

## 28-5 Correntes Parasitas

Nos exemplos que foram discutidos, as correntes eram induzidas em fios finos ou hastes. Normalmente um fluxo variante gera correntes circulantes, que são chamadas de *correntes parasitas*, em um pedaço de metal, como o núcleo de um transformador. O calor produzido por tais correntes constitui uma perda de potência no transformador. Considere um pedaço de metal entre os pólos de um eletroímã (Figura 28-24). Se o campo magnético  $\vec{B}$  entre os pólos está variando com o tempo (o que ocorrerá se a corrente nos enrolamentos do ímã é alternada), o fluxo através de qualquer caminho fechado no pedaço de metal, tal como a curva C indica na figura, será variável. Uma vez que o caminho C está em um condutor, existirá uma fem induzida em torno de C.

A existência das correntes parasitas pode ser demonstrada puxando-se uma folha de cobre ou alumínio entre os pólos de um forte ímã permanente (Figura 28-25). Parte da área envolvida pela curva C na figura está no campo magnético, e parte da área envolvida por C está fora do campo magnético. Conforme a folha é puxada para a direita, o fluxo através dessa curva diminui (admitindo que a direção normal positiva é para dentro do papel). Uma fem no sentido horário é induzida em volta dessa curva. Essa fem gera uma corrente que está direcionada para cima na região entre os pólos, e o campo magnético exerce uma força sobre essa corrente para a esquerda, se opondo ao movimento da folha. Pode-se sentir a força de arrasto sobre a folha condutora se ela for puxada rapidamente através de um forte campo magnético.

Correntes parasitas são normalmente indesejadas porque se perde potência devido ao efeito joule gerado pela corrente, e essa energia dissipada deve ser transferida para o ambiente. A potência perdida pode ser reduzida pelo aumento da resistência dos possíveis caminhos para a corrente parasita, como mostrado na Figura 28-26a. Aqui o pedaço de condutor é laminado; isto é, o condutor é feito de pequenas tiras coladas juntas. Como a cola isolante separa as tiras, as correntes parasitas estão essencialmente confinadas às tiras. As grandes malhas

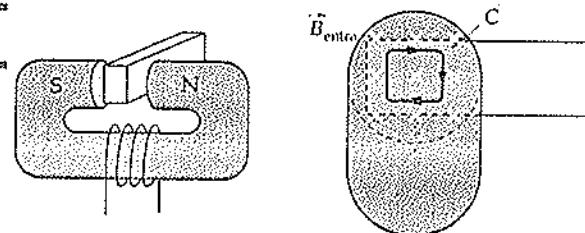


FIGURA 28-24

Correntes parasitas. Quando o campo magnético aplicado a uma barra de metal está variando, uma fem é induzida ao longo de qualquer curva fechada, tal como em C. As fem induzidas geram correntes, que são chamadas de correntes parasitas.

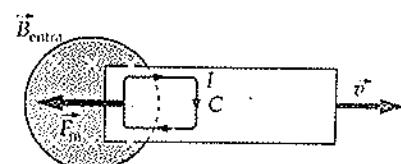
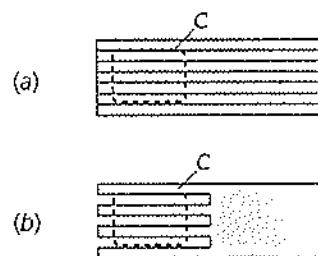


FIGURA 28-25

Demonstração das correntes parasitas. Quando a folha de metal é puxada para a direita, existe uma força magnética para a esquerda sobre a corrente induzida se opondo ao movimento.

de correntes parasitas são quebradas, e a potência perdida é bastante reduzida. Similarmente, se existem cortes na folha, como mostrado na Figura 28-26b, as correntes parasitas são diminuídas e a força magnética é bastante reduzida.

As correntes parasitas não são sempre indesejáveis. Por exemplo, correntes parasitas são normalmente empregadas para amortecer oscilações. Sem amortecimento, balanças mecânicas sensíveis, que são usadas para medir pequenas massas, podem oscilar muitas vezes em torno da posição de leitura de equilíbrio. Tais balanças são normalmente projetadas de tal modo que uma pequena folha de alumínio (ou algum outro metal) se move entre os pólos de um ímã conforme o ponteiro da escala oscila. As correntes parasitas resultantes amortecem as oscilações, de modo que o equilíbrio é rapidamente atingido. Correntes parasitas também têm um papel relevante nos sistemas magnéticos de frenagem de alguns veículos terrestres, como os trens. Um grande eletroímã é colocado no veículo, acima dos trilhos. Se o ímã é energizado por uma corrente em seus enrolamentos, correntes parasitas são induzidas nos trilhos devido ao movimento do ímã, e as forças magnéticas fornecem uma força de arrasto sobre o ímã, que freia o veículo.



**FIGURA 28-26**  
Descontinuidades nos caminhos de condução no pedaço de metal podem reduzir as correntes parasitas. (a) Se o pedaço de metal é construído por fitas de metal coladas juntas, a cola isolante entre as fitas aumenta a resistência da malha fechada C. (b) Fendas cortadas no pedaço de metal também reduzem a corrente parasita.

## 28-6 Indutância

### Auto-indutância

O fluxo magnético através de um circuito está relacionado à corrente nesse circuito e às correntes dos circuitos nas vizinhanças.<sup>†</sup> Considere uma bobina transportando uma corrente  $I$ . A corrente no enrolamento produz um campo magnético  $\vec{B}$  que varia de ponto a ponto, mas o valor de  $\vec{B}$  em cada ponto é proporcional a  $I$ . O fluxo magnético através da espira é, portanto, também proporcional a  $I$ :

$$\phi_m = LI \quad 28-9$$

### DEFINIÇÃO — AUTOINDUTÂNCIA

onde  $L$ , a constante de proporcionalidade, é chamada de auto-indutância da bobina. A auto-indutância depende da forma geométrica da bobina. A unidade SI da indutância é o henry (H). A partir da Equação 28-9, pode-se ver que a unidade de indutância é igual à unidade de fluxo dividida pela unidade de corrente:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

Em princípio, a auto-indutância de qualquer espira ou circuito pode ser calculada admitindo-se uma corrente  $I$ , calculando  $\vec{B}$  em todos os pontos sobre uma superfície limitada pelo enrolamento, calculando o fluxo  $\phi_m$  e usando  $L = \phi_m/I$ . Na realidade prática, o cálculo é normalmente muito mais desafiador. Entretanto, a auto-indutância de um solenóide longo, com fios enrolados bem juntos, pode ser determinada diretamente. O fluxo magnético através de um solenóide de comprimento  $l$  e  $N$  voltas transportando uma corrente  $I$  foi calculado no Exemplo 28-1:

$$\phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I A}{l} = \mu_0 n^2 I A \ell \quad 28-10$$

<sup>†</sup>Presume-se que não existam ímãs permanentes nas proximidades.

onde  $n = N/\ell$  é o número de voltas por unidade de comprimento. Como esperado, o fluxo é proporcional à corrente  $I$ . A constante de proporcionalidade é a auto-indutância:

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \ell \quad 28-11$$

### AUTO-INDUTÂNCIA DE UM SOLENÓIDE

A auto-indutância de um solenóide é proporcional ao quadrado do número de voltas por unidade de comprimento  $n$  e ao volume  $A\ell$ . Assim como a capacidade, a auto-indutância depende apenas de fatores geométricos.<sup>1</sup> A partir das dimensões da Equação 28-11, pode-se ver que  $\mu_0$  pode ser expresso em henrys por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

### EXEMPLO 28-10 AUTO-INDUTÂNCIA DE UM SOLENÓIDE

Encontre a auto-indutância de um solenóide com comprimento de 10 cm, área de  $5 \text{ cm}^2$  e 100 voltas.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pode-se calcular a auto-indutância em henrys a partir da Equação 28-11.

1.  $L$  é dada pela Equação 28-11:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

2. Convertem-se as grandezas dadas para as unidades SI:  $\ell = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

$$A = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$n = N/\ell = (100 \text{ voltas})/(0,1 \text{ m}) = 1000 \text{ voltas/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

3. Substituem-se as grandezas dadas:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

$$= (4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(10^3 \text{ voltas/m})^2(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0,1 \text{ m})$$

$$= \boxed{6,28 \times 10^{-5} \text{ H}}$$

Quando a corrente em um circuito está variando, o fluxo magnético devido à corrente está também variando, e então uma fem é induzida no circuito. Como a auto-indutância de um circuito é constante, a variação no fluxo está relacionada à variação na corrente por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

De acordo com a lei de Faraday, tem-se

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad 28-12$$

<sup>1</sup>Se o indutor possuir um núcleo de ferro, a auto-indutância também depende das propriedades do núcleo.

Assim, a fem auto-induzida é proporcional à taxa de variação da corrente. Uma espira ou solenóide com várias voltas tem uma elevada auto-indutância, e é chamada de indutor. Em circuitos, o indutor é denotado pelo símbolo

Tipicamente, pode-se desprezar a auto-indutância do resto do circuito, comparada com a de um indutor. A diferença de potencial entre os terminais de um indutor é dada por

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = -L \frac{di}{dt} - Ir \quad 28-13$$

#### DIFERENÇA DE POTENCIAL ATRAVÉS DE UM INDUTOR

onde  $r$  é a resistência interna do indutor.<sup>†</sup> Para um indutor ideal,  $r = 0$ .

**EXERCÍCIO** Em qual taxa deve a corrente no solenóide do Exemplo 28-11 variar para induzir uma contra-fem de 20 V? (Resposta  $3,18 \times 10^5$  A/s)

### Indutância Mútua

Quando dois ou mais circuitos estão próximos um dos outros, como na Figura 28-27, o fluxo magnético através de um circuito depende não apenas da corrente naquele circuito, mas também da corrente nos circuitos da vizinhança. Seja  $I_1$  a corrente no circuito 1, à esquerda na Figura 28-27, e seja  $I_2$  a corrente no circuito 2, à direita na Figura 28-27. O campo magnético  $\vec{B}$  na superfície  $S_2$  é a superposição de  $\vec{B}_1$  devido a  $I_1$  e  $\vec{B}_2$  devido a  $I_2$ , em que  $\vec{B}_1$  é proporcional a  $I_1$  (e  $\vec{B}_2$  é proporcional a  $I_2$ ). Pode-se então escrever o fluxo de  $\vec{B}_1$  através de  $I_2$ ,  $\phi_{m2,1}$  como:

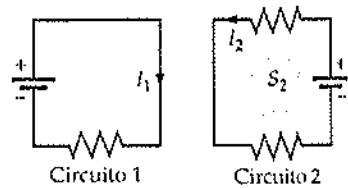
$$\phi_{m2,1} = M_{2,1} I_1 \quad 28-14a$$

#### DEFINIÇÃO — INDUTÂNCIA MÚTUA

onde  $M_{2,1}$  é chamada de indutância mútua dos dois circuitos. A indutância mútua depende do arranjo geométrico dos dois circuitos. Geralmente, se os circuitos estão distantes, o fluxo  $\vec{B}_1$  através do circuito 2 será pequeno e a indutância mútua será pequena. (O fluxo líquido  $\phi_m$  de  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ , através do circuito 2, é dado por  $\phi_m = \phi_{m2,2} + \phi_{m2,1}$ .) Uma equação similar à Equação 28-14a pode ser escrita para o fluxo de  $\vec{B}_2$  através do circuito 1:

$$\phi_{m1,2} = M_{1,2} I_2 \quad 28-14b$$

Calcula-se, a seguir, a indutância mútua para dois solenóides concêntricos com fios enrolados muito próximos como as mostradas na Figura 28-28. Seja  $l$  o comprimento de ambos os solenóides, e admita que o solenóide interno tem  $N_1$  voltas e raio  $r_1$ , e que o solenóide externo tem  $N_2$  voltas e raio  $r_2$ . Calcula-se, inicialmente, a indutância mútua  $M_{2,1}$  assumindo que o solenóide interno transporta uma corrente  $I_1$  e encontrando o fluxo magnético  $\phi_{m2}$  devido a essa corrente através do solenóide externo.



**FIGURA 28-27**  
Dois circuitos adjacentes. O campo magnético sobre  $S_2$  é parcialmente devido à corrente  $I_1$ . O fluxo através do campo magnético é a soma de dois termos, um proporcional a  $I_1$  e outro a  $I_2$ .

<sup>†</sup>Se o indutor possui um núcleo de ferro, a resistência interna inclui as propriedades do núcleo.

O campo magnético  $\vec{B}_1$ , devido à corrente no solenóide interno, é constante no espaço do solenóide interno e possui módulo

$$B_1 = \mu_0(N_1/\ell)I_1 = \mu_0 n_1 I_1, \quad r < r_1 \quad 28-15$$

e externamente ao solenóide interno esse campo magnético  $B_1$  é desprezível. O fluxo de  $\vec{B}_1$  através do solenóide externo é, portanto,

$$\phi_{m2} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \ell (\pi r_1^2) I_1$$

Note que a área usada para calcular o fluxo através do solenóide externo não é a área desse solenóide,  $\pi r_2^2$ , mas, em vez disso, é a área do solenóide interno,  $\pi r_1^2$ , porque o campo magnético devido ao solenóide interno é nulo externamente a ele. A indutância mútua  $M_{1,2}$  é, assim,

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2,1}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2 \quad 28-16$$

**EXERCÍCIO** Calcule a indutância mútua  $M_{1,2}$  dos solenóides concêntricos da Figura 28-28 através do fluxo através do solenóide interno devido à corrente  $I_2$  no solenóide externo. (Resposta  $M_{1,2} = M_{2,1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2$ )

Note, a partir do exercício, que  $M_{1,2} = M_{2,1}$ . Pode-se mostrar que este é um resultado geral. A seguir serão retirados os subscritos para a indutância mútua e será escrito simplesmente  $M$ .

## 28-7 Energia Magnética

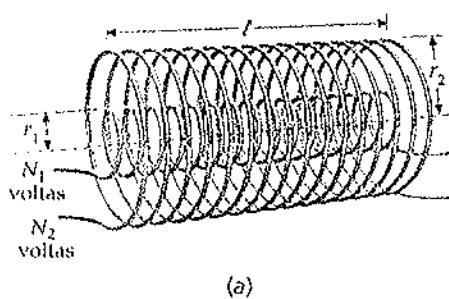
Um indutor armazena energia magnética, assim como um capacitor armazena energia elétrica. Considere o circuito mostrado na Figura 28-29, que consiste em uma indutância  $L$  e uma resistência  $R$  em série com uma bateria de fem  $\mathcal{E}_0$  e uma chave  $S$ . Admite-se que  $R$  e  $L$  são a resistência e a indutância de todo o circuito. A chave está inicialmente aberta, então não existe corrente no circuito. Um curto período de tempo após a chave ser fechada existe uma corrente  $I$  no circuito, uma diferença de potencial  $-IR$  entre os terminais do resistor e uma diferença de potencial  $-Ldi/dt$  entre os terminais do indutor. (Para um indutor com resistência desprezível, a diferença no potencial é igual à contra-fem, que é dada pela Equação 28-12.) Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff a esse circuito, tem-se

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad 28-17$$

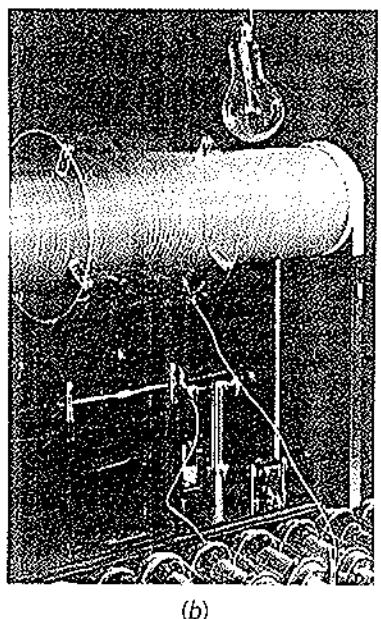
Se cada termo for multiplicado pela corrente  $I$ , obtém-se, rearrumando,

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI \frac{di}{dt} \quad 28-18$$

O termo  $\mathcal{E}_0 I$  é a taxa na qual a energia potencial elétrica é liberada pela bateria. O termo  $I^2 R$  é a taxa na qual a energia potencial é liberada para o resistor. (É também a taxa na qual a energia potencial é dissipada pela resistência no cir-



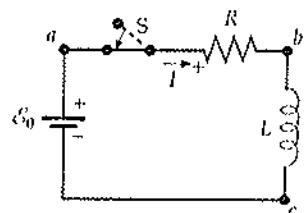
(a)



(b)

**FIGURA 28-28**

(a) Um solenóide longo e estreito dentro de um segundo solenóide do mesmo comprimento. Uma corrente em qualquer solenóide produz fluxo magnético na outra. (b) Um enrolamento tesla ilustrando a geometria dos fios na Figura 28-28a. Tal aparato funciona como um transformador.<sup>†</sup> Aqui, a corrente alternada de baixa tensão no enrolamento externo é transformada em uma corrente alternada de alta tensão no enrolamento interno. A fem induzida no enrolamento interno pelo campo da corrente que varia no enrolamento externo é elevada o suficiente para acender a lâmpada acima dos enrolamentos.

**FIGURA 28-29**

Logo após a chave  $S$  ser fechada nesse circuito, a corrente começa a aumentar e uma fem contrária de módulo  $L di/dt$  é induzida no indutor. A queda de potencial através do resistor  $IR$  mais a queda de potencial através do indutor  $L di/dt$  igual à fem da bateria.

<sup>†</sup>O transformador é discutido no Capítulo 29.

cuito.) O termo  $LI dL/dt$  é a taxa na qual a energia potencial é liberada para o indutor. Se  $U_m$  é a energia no indutor, então

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

e que implica

$$dU_m = LI dI$$

Integrando essa equação desde o tempo  $t = 0$ , quando a corrente é nula, até  $t = \infty$ , quando a corrente já atingiu seu valor final  $I_f$ , obtém-se

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI dI = \frac{1}{2} LI_f^2$$

A energia armazenada no indutor transportando uma corrente  $I$  é assim dada por

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad 28-19$$

#### ENERGIA ARMAZENADA EM UM INDUTOR

Quando uma corrente é produzida em um indutor, um campo magnético é criado no espaço interno do enrolamento do indutor. Pode-se interpretar a energia armazenada no indutor como a energia armazenada no campo magnético. Para o caso especial de um solenóide longo, o campo magnético está relacionado à corrente  $I$  e ao número de voltas por unidade de comprimento  $n$  através de

$$B = \mu_0 n I$$

e a auto-indutância é dada pela Equação 28-11:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

onde  $A$  é a área de seção reta e  $\ell$  é o comprimento. Substituindo  $I$  por  $B/(\mu_0 n)$  e  $L$  por  $\mu_0 n^2 A \ell$  na Equação 28-19, obtém-se

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 A \ell \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell$$

A grandeza  $A \ell$  é o volume do espaço interno do solenóide contendo o campo magnético. A energia por unidade de volume é a densidade de energia magnética  $u_m$ :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad 28-20$$

#### DENSIDADE DE ENERGIA MAGNÉTICA

Apesar de essa expressão ter sido desenvolvida considerando o caso especial do campo magnético em um solenóide longo, este é um resultado geral. Em qualquer lugar do espaço em que exista um campo magnético, a energia magnética por unidade de volume é dada pela Equação 28-20. Nota-se a similaridade com a densidade de energia em um campo elétrico (Equação 24-13):

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Uma certa região do espaço contém um campo magnético uniforme de 0,020 T e um campo elétrico uniforme de  $2,5 \times 10^6 \text{ N/C}$ . Encontre (a) a densidade total de energia eletromagnética e (b) a energia em uma caixa cúbica de comprimento dos lados  $\ell = 12 \text{ cm}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A densidade total de energia  $u$  é a soma das densidades de energia magnética e elétrica,  $u = u_e + u_m$ . A energia em um volume  $V$  é dada por  $U = u V$ .

(a) 1. Calcula-se a densidade de energia elétrica:

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ &= \frac{1}{2} (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) (2,5 \times 10^6 \text{ N/C})^2 \\ &= 27,7 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

2. Calcula-se a densidade de energia magnética:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0,02 \text{ T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)} = 159 \text{ J/m}^3$$

3. A densidade total de energia é a soma das duas contribuições anteriores:

$$u = u_e + u_m = 27,7 \text{ J/m}^3 + 159 \text{ J/m}^3 = 187 \text{ J/m}^3$$

(b) A energia total na caixa é  $U = u V$ , onde  $V = \ell^3$  é o volume da caixa:

$$U = u V = u \ell^3 = (187 \text{ J/m}^3)(0,12 \text{ m})^3 = 0,323 \text{ J}$$

## 28-3 Circuitos RL

Um circuito contendo um resistor e um indutor, tal como o mostrado na Figura 28-29, é chamado de circuito *RL*. Como todos os circuitos têm resistência e auto-indutância na temperatura ambiente, a análise de um circuito *RL* pode ser aplicada de alguma forma a todos os circuitos.\*

Para o circuito mostrado na Figura 28-29, a aplicação da lei das malhas de Kirchhoff (Equação 28-17) fornece

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Analisam-se algumas características gerais da corrente antes de resolver essa equação. Logo após a chave ter sido fechada no circuito a corrente ainda é nula, então  $RI = 0$ , e  $L \frac{dI}{dt}$  é igual à fem da bateria,  $\mathcal{E}_0$ . Fazendo  $I = 0$  na Equação 28-17, tem-se

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad 28-21$$

Com o aumento da corrente,  $IR$  aumenta e  $dI/dt$  diminui. Note que a corrente não pode variar repentinamente de zero para algum valor, como poderia ocorrer se não existisse indutância. Quando a indutância  $L$  não é desprezível  $dI/dt$  é finita e, portanto, a corrente deve ser contínua no tempo. Após um curto inter-

\*Todos os circuitos possuem alguma capacitância entre partes dos circuitos em diferentes potenciais. Serão considerados os efeitos da capacitância no Capítulo 29, quando forem estudados os circuitos CA. Aqui será desprezada a capacitância para simplificar a análise e focar sobre os efeitos da indutância.

valo de tempo, a corrente atinge um valor positivo  $I_f$ , e a taxa de variação da corrente é

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

Nesse instante a corrente ainda está aumentando, mas sua taxa de aumento é menor que em  $t = 0$ . O valor final da corrente pode ser obtido fazendo  $dI/dt$  igual a zero:

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad 28-22$$

A Figura 28-30 mostra a corrente nesse circuito como uma função do tempo. Essa figura é a mesma da carga em um capacitor como função do tempo quando o capacitor é carregado em um circuito RC (Figura 25-41).

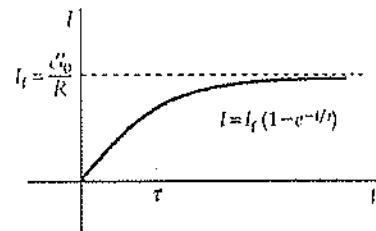
A Equação 28-17 é da mesma forma da Equação 25-36 para o carregamento de um capacitor, e pode ser resolvida do mesmo modo — através da separação de variáveis e integrando-se em seguida. O resultado é

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = I_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad 28-23$$

onde  $I_f = \mathcal{E}_0/R$  é a corrente quando  $t \rightarrow \infty$  e

$$\tau = \frac{L}{R} \quad 28-24$$

é a constante de tempo do circuito. Quanto maior a auto-indutância  $L$  ou menor a resistência  $R$ , mais tempo é necessário para que a corrente atinja alguma fração especificada de seu valor final  $I_f$ .



**FIGURA 28-30**

Corrente *versus* tempo em um circuito RL. No instante  $t = \tau = L/R$ , a corrente está em 63% de seu valor máximo  $\mathcal{E}_0/R$ .

Uma bobina de auto-indutância de 5 mH e resistência 15 Ω é colocada entre os terminais de uma bateria de 12 V e resistência interna desprezível. (a) Qual é a corrente final? (b) Qual é a constante de tempo? (c) Quantas constantes de tempo são necessárias para a corrente atingir 99% de seu valor final?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A corrente final é a corrente quando  $dI/dt = 0$ , como dada pela Equação 28-22. A corrente como uma função do tempo é dada pela Equação 28-23,  $I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$ , onde  $\tau = L/R$ .

1. Usa-se a Equação 28-22 para encontrar a corrente final  $I_f$ :

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{12 \text{ V}}{15 \Omega} = 0,800 \text{ A}$$

2. Calcula-se a constante de tempo  $\tau$ :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ H}}{15 \Omega} = 333 \mu\text{s}$$

3. Emprega-se a Equação 28-23 e calcula-se o tempo  $t$  para  $I = 0,99I_f$ :

$$I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$$

então

$$e^{-t/\tau} = \left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

e

$$\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

Assim,

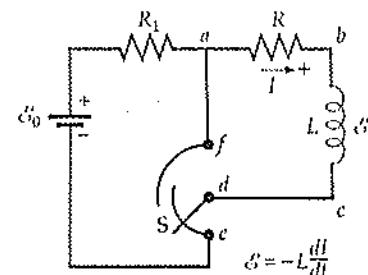
$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right) = -\tau \ln(1 - 0,99)$$

$$= -\tau \ln(0,01) = +\tau \ln 100 = 4,61 \tau$$

**NOTAS** Em cinco constantes de tempo a corrente está a aproximadamente 1% do seu valor final.

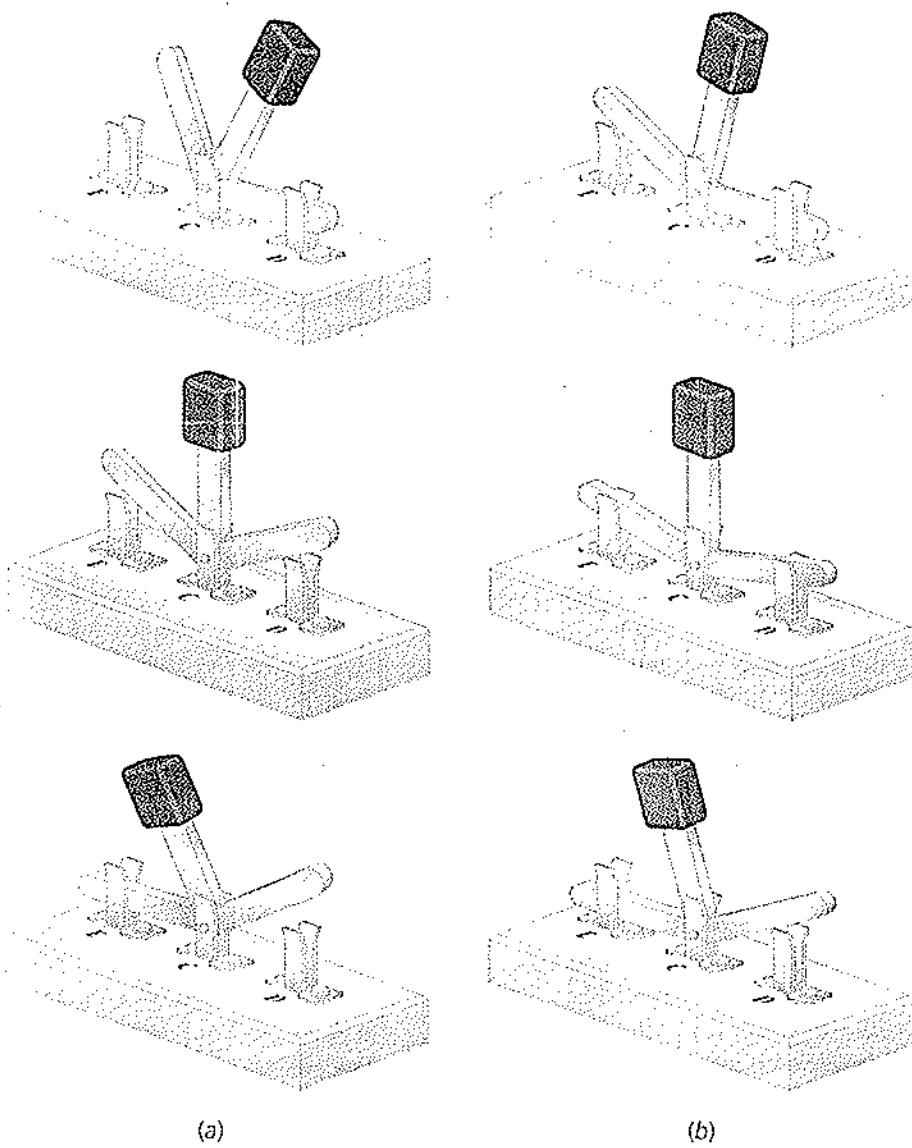
**EXERCÍCIO** Quanta energia será armazenada nesse indutor quando a corrente final tiver sido atingida? (Resposta  $U_m = \frac{1}{2} L I_f^2 = 1,6 \times 10^{-3}$  J)

Na Figura 28-31 o circuito possui uma chave de fecho seguido de abertura (mostrada na Figura 28-32) que permite remover a bateria do circuito sem interromper a corrente através do indutor. O resistor  $R_1$  protege a bateria, de modo que não há curto-círcuito na bateria quando a chave é reposicionada. Se o conector da chave está na posição *e*, a bateria, o indutor e os dois resistores estão conectados em série e a corrente é gerada no circuito, como foi discutido antes, exceto que a resistência total é agora  $R + R_1$  e a corrente final é  $\mathcal{E}_0 / (R + R_1)$ . Suponha que o conector esteja na posição *e* por um longo tempo, de tal modo que a corrente permaneça em seu valor final, que será chamado de  $I_0$ . No instante  $t = 0$ , move-se rapidamente o conector da chave para a posição *f* (para remover a bateria completamente). Agora se tem um circuito (malha *abcd*) com



**FIGURA 28-31**

Um circuito  $RL$  com uma chave fecho seguido de abertura, de tal modo que a bateria pode ser removida do circuito sem interromper a corrente através do indutor. A corrente no indutor atinge seu valor máximo com o contato da chave na posição *e*. O contato é então rapidamente deslocado para a posição *f*.



**FIGURA 28-32**

(a) Uma chave-padrão com comando único e contato duplo é uma chave fecho seguido de abertura. Isto é, ela abre o primeiro contato antes de realizar o segundo contato. (b) Em uma chave fecho seguido de abertura, de comando único, contato duplo, o comando realiza o segundo contato antes de abrir o primeiro contato. Com a alavanca na posição central, o comando está em contato elétrico com os contatos *E* e *D*.

apenas um resistor e um indutor transportando uma corrente inicial  $I_0$ . Aplicando a lei da malhas de Kirchoff a esse circuito, tem-se

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Rearranjando essa equação para separar as variáveis  $I$  e  $t$ , tem-se

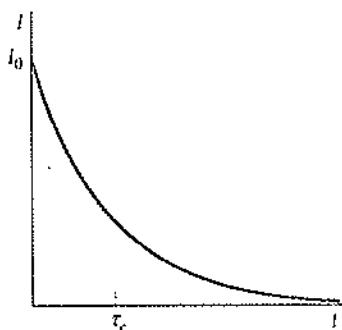
$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad 28-25$$

A Equação 28-25 tem a mesma forma que a Equação 25-31 para a descarga de um capacitor. Integrando e depois resolvendo para  $I$ ,

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad 28-26$$

onde  $\tau = L/R$  é a constante de tempo. A Figura 28-33 mostra a corrente como uma função do tempo.

**EXERCÍCIO** Qual é a constante de tempo de um circuito com resistência de 85  $\Omega$  e indutância de 6 mH? (Resposta 70,6  $\mu s$ )



**FIGURA 28-33**  
Corrente versus tempo para o circuito da Figura 28-31. A corrente diminui exponencialmente com o tempo.

Encontre a energia total dissipada no resistor  $R$ , como mostrado na Figura 28-31, quando a corrente no indutor diminui de seu valor inicial  $I_0$  até 0.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A taxa de dissipação de energia  $P = I^2 R$  varia com o tempo; então, para calcular a energia total dissipada requer uma integração.

1. A taxa de produção de calor é  $P = I^2 R$ :

$$P = I^2 R$$

2. A energia total  $U$  dissipada no resistor é a integral de  $P dt$  desde  $t = 0$  até  $t = \infty$ :

$$U = \int_0^\infty I^2 R dt$$

3. A corrente  $I$  é dada pela Equação 28-26:

$$I = I_0 e^{-(RL)t}$$

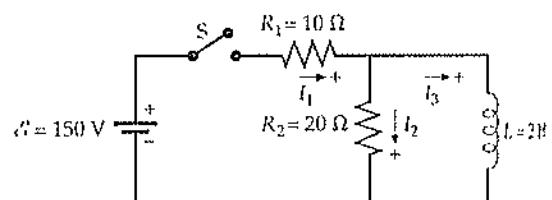
4. Substitui-se essa corrente na integral:

$$U = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-(RL)t} R dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2(R/L)t} dt$$

5. A integração pode ser feita pela substituição de  $x = 2(R/L)t$ :  $U = I_0^2 R \frac{e^{-2(R/L)t}}{-2(R/L)} \Big|_0^\infty = I_0^2 R \frac{-L}{2R} (0 - 1) = \boxed{\frac{1}{2} L I_0^2}$

**VERIFICAÇÃO** A quantidade total de energia dissipada é igual à energia  $\frac{1}{2} L I_0^2$  originalmente armazenada no indutor.

Para o circuito mostrado na Figura 28-34, encontre as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  (a) imediatamente após a chave  $S$  ser fechada e (b) muito tempo depois de a chave  $S$  ter sido fechada. Após a chave estar fechada por um longo tempo ela é aberta. Imediatamente após a chave ter sido aberta, (c) encontre as três correntes e (d) encontre a queda de potencial entre os terminais do resistor de 20  $\Omega$ . (e) Encontre todas as três correntes muito tempo depois de a chave  $S$  ter sido aberta.



**FIGURA 28-34**

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** (a) Simplificam-se os cálculos usando o fato de que a corrente em um indutor não pode variar abruptamente. Assim, a corrente no indutor deve ser zero logo após a chave ser fechada, porque a corrente é zero antes de a chave fechar. (b) Quando a corrente atinge seu valor final  $dI/dt = 0$  ela é igual a zero, então não existe queda de potencial entre os terminais do indutor. O indutor, assim, atua como um curto-círcuito; isto é, o indutor atua como um fio com resistência nula. (c) Imediatamente após a chave ser aberta, a corrente no indutor é a mesma que anteriormente. (d) Muito tempo após a chave ser aberta, todas as correntes devem ser nulas.

- (a) 1. A chave acaba de abrir. A corrente através do indutor é zero, assim como ela era antes de a chave ser fechada. Aplicando a lei dos nós para relacionar  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_3 = \boxed{0}$$

$$I_3 = I_2 + I_3$$

então

$$I_1 = I_2$$

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

então

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{150 \text{ V}}{10 \Omega + 20 \Omega} = \boxed{5 \text{ A}} = I_2$$

$$-L \frac{dI_3}{dt} + I_2 R_2 = 0$$

$$0 + I_2 R_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \boxed{0}$$

- (b) 1. Após um longo tempo, as correntes estão em regime permanente e o indutor atua como um curto-círcuito, então a queda de potencial entre os terminais de  $R_2$  é zero. Aplica-se a lei das malhas à malha da esquerda e resolve-se para  $I_2$ :

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - 0 = 0$$

então

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{150 \text{ V}}{10 \Omega} = \boxed{15 \text{ A}}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$15 \text{ A} = 0 + I_3$$

então

$$I_3 = \boxed{15 \text{ A}}$$

3. Aplica-se a lei dos nós e resolve-se para  $I_3$ :

- (c) Quando a chave é reaberta,  $I_1$  instantaneamente se torna zero. A corrente  $I_3$  no indutor varia continuamente, então nesse instante  $I_3 = 15$  A. Aplica-se a lei dos nós e resolve-se para  $I_2$ :

$$I_3 = \boxed{15 \text{ A}}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

então

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0 - 15 \text{ A} = \boxed{-15 \text{ A}}$$

- (d) Aplica-se a lei de Ohm para encontrar a queda de potencial entre os terminais de  $R_2$ :

$$V = I_2 R_2 = (15 \text{ A})(20 \Omega) = \boxed{300 \text{ V}}$$

- (e) Um longo tempo depois de a chave ser aberta, todas as correntes devem ser nulas.

$$I_1 = I_2 = I_3 = \boxed{0}$$

**NOTAS** É surpreendente o fato de se encontrar a queda de potencial entre os terminais de  $R_2$  na Parte (d) maior que a fem da bateria? Essa queda de potencial é igual à fem do indutor.

**EXERCÍCIO** Suponha que  $R_2 = 200 \Omega$  e que a chave está fechada por muito tempo. Qual é a queda de potencial entre os seus terminais imediatamente após a chave ter sido aberta? (Resposta 3000 V)

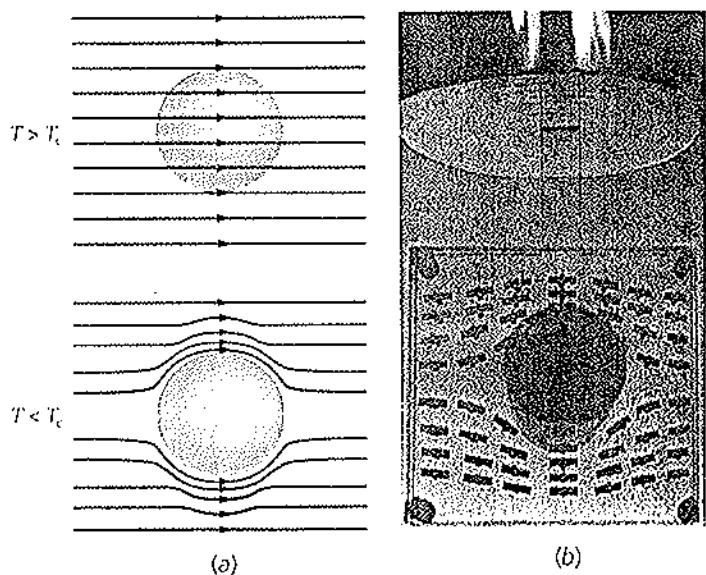
### \*28-9 Propriedades Magnéticas dos Supercondutores

Supercondutores possuem resistividades nulas abaixo de certa temperatura crítica  $T_c$ , que varia de material para material. Na presença de um campo magnético  $B$ , a temperatura crítica é menor que aquela quando não existe campo. Conforme o campo aumenta, a temperatura crítica diminui. Se o campo magnético é maior que algum campo crítico  $B_c$ , a supercondutividade não existe em nenhuma temperatura.

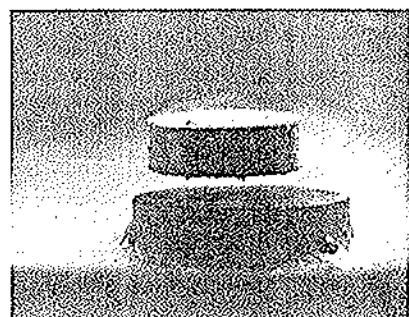
#### \*Efeito Meissner

Conforme um supercondutor é resfriado abaixo da temperatura crítica em um campo magnético aplicado, o campo magnético no interior do supercondutor se torna nulo (Figura 28-35). Esse efeito foi descoberto por Walter Meissner e Robert Ochsenfeld em 1933, e agora é conhecido como efeito Meissner. O campo magnético se torna nulo porque as correntes supercondutoras induzidas na superfície do supercondutor produzem um segundo campo magnético que cancela aquele aplicado. A levitação magnética (veja a foto) resulta da repulsão entre o ímã permanente, que produz o campo aplicado, e o campo magnético produzido pelas correntes induzidas no supercondutor. Apenas certos supercondutores, chamados de supercondutores do tipo I, exibem completamente o efeito Meissner. A Figura 28-36a mostra um gráfico da magnetização  $M$  versus o campo magnético aplicado  $B_{ap}$  para um supercondutor do tipo I. Para um campo magnético menor que o campo crítico  $B_c$ , o campo magnético  $\mu_0 M$  induzido no supercondutor é igual e oposto ao campo magnético aplicado. Os valores de  $B_c$  para os supercondutores do tipo I são sempre muito menores para tais materiais para que eles sejam empregados em bobinas de um ímã supercondutor.

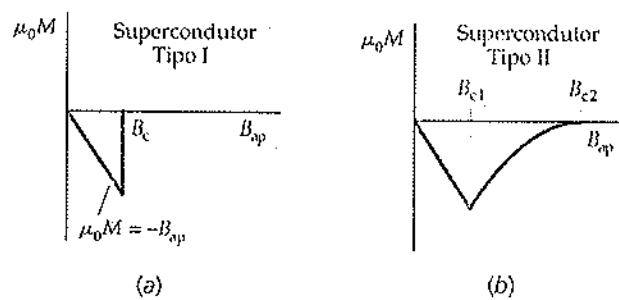
Outros materiais, conhecidos como supercondutores do tipo II, possuem uma curva de magnetização similar àquela na Figura 28-36b. Tais materiais são normalmente ligas ou metais que apresentam elevada resistividade no estado normal. Os supercondutores, do tipo II exibem propriedades elétricas dos supercondutores, exceto o efeito Meissner acima do campo crítico  $B_{c2}$ , que pode ser várias centenas de vezes maior que os valores típicos dos campos críticos para os supercondutores do tipo I. Por exemplo, a liga  $Nb_3Ge$  tem um campo crítico  $B_{c2} = 34$  T. Tais materiais podem ser usados para ímãs supercondutores de campo elevado. Abaixo do campo crítico  $B_{c1}$ , o comportamento de um supercondutor do tipo II é igual àquele de um supercondutor do tipo I. Na região entre os campos  $B_{c1}$  e  $B_{c2}$  o supercondutor é definido como estando em um estado vórtex.



**FIGURA 28-35**  
(a) O efeito Meissner em uma esfera sólida supercondutora resfriada em um campo magnético aplicado constante. Conforme a temperatura cai abaixo da temperatura crítica  $T_c$ , o campo magnético dentro da esfera tende a zero. (b) Demonstração do efeito Meissner. Um cilindro fino supercondutor está posicionado com seu eixo perpendicular a um campo magnético horizontal. As direções das linhas de campo são indicadas por agulhas de bússola fracamente magnetizadas, montadas em um sanduíche de Lucite, de tal modo que elas estão livres para girar.



O cubo é um supercondutor. A levitação magnética resulta da repulsão entre o ímã permanente produzindo o campo aplicado e o campo magnético produzido pelas correntes induzidas no supercondutor.



### \*Quantização do Fluxo

Considere um anel supercondutor de área  $A$  transportando uma corrente. Deve existir um fluxo magnético  $\phi_m = B_n A$  através da superfície  $S$  limitada pelo anel devido à corrente no anel e devido também, talvez, a outras correntes externas ao anel. De acordo com a Equação 28-5, se o fluxo através de  $S$  variar, um campo elétrico será induzido no anel, cuja circulação é proporcional à taxa de variação do fluxo. Mas não pode existir campo elétrico em um anel supercondutor porque não existe resistência, então um campo elétrico finito deve gerar uma corrente infinita. O fluxo através do anel é assim congelado, e não varia.

Outro efeito, que resulta do tratamento da mecânica quântica da supercondutividade, é que o fluxo total através da superfície  $S$  é quantizado e dado por

$$\phi_m = n \frac{h}{2e}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 28-27$$

A menor unidade de fluxo, chamada de flúxon, é

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,0678 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad 28-28$$

**FIGURA 28-36**  
Representações de  $\mu_0$  vezes a magnetização  $M$  versus o campo magnético aplicado para os supercondutores do tipo I e do tipo II.  
(a) No supercondutor do tipo I, o campo magnético resultante é nulo abaixo de um campo aplicado crítico  $B_c$  porque o campo devido às correntes induzidas sobre a superfície do supercondutor cancela exatamente o campo aplicado. Acima do campo crítico o material é um condutor normal e a magnetização é muito pequena para ser vista nessa escala. (b) No supercondutor do tipo II o campo magnético começa a penetrar o supercondutor em um campo  $B_{c1}$ , mas o material permanece supercondutor até um campo  $B_{c2}$ , após o qual o material se torna um condutor normal.

## RESUMO

1. A lei de Faraday e a lei de Lenz são leis fundamentais da Física.
2. A auto-indutância é uma propriedade de um elemento de circuito que relaciona o fluxo através do elemento à corrente.

### Tópicos

#### 1. Fluxo Magnético $\phi_m$

Definição Geral

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

28-1

Campo uniforme, superfície plana limitada por um enrolamento de  $N$  voltas

$$\phi_m = NBA \cos \theta$$

28-3

onde  $A$  é a área da superfície limitada por uma única espira.

Unidades

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

28-2

Devido à corrente no circuito

$$\phi_m = LI$$

28-9

### Equações e Observações Importantes

Devido à corrente em dois circuitos	$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M I_2$	
	$\phi_{m2} = L_2 I_2 + M I_1$	28-14
*Quantização	$\phi_m = n \frac{h}{2e}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	28-27
*Flúxon	$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,0678 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$	28-28
2. FEM		
Lei de Faraday (incluindo tanto a indução quanto a fem induzida por movimento)	$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$	28-4
Indução (campo magnético variável no tempo, C estacionário)	$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$	28-5
Induzida por movimento (campo magnético estacionário, C não-estacionário)	$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$	28-6
	onde $\vec{v}$ é a velocidade do caminho condutor.	
Haste se movendo perpendicularmente tanto a ela mesma quanto a $\vec{B}$	$\mathcal{E} = v B l$	28-6
Indução própria (contra fem)	$\mathcal{E} = -L \frac{dl}{dt}$	28-12
3. Lei de Faraday	$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$	28-4
4. Lei de Lenz	A fem induzida e a corrente induzida estão ambas na direção que se opõe, ou tende a se opor, à carga que as produziu.	
Forma alternativa	Quando um fluxo magnético através de uma superfície varia, o campo magnético devido a qualquer corrente induzida produz um fluxo sobre ele mesmo — através da mesma superfície e em oposição à carga.	
5. Indutância		
Auto-indutância	$L = \frac{\phi_m}{I}$	28-9
Auto-indutância de um solenóide	$L = \mu_0 n^2 A C$	28-11
Indutância mútua	$M = \frac{\phi_{m2,1}}{I_1} = \frac{\phi_{m1,2}}{I_2}$	28-16
Unidades	$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$	
6. Energia Magnética		
Energia armazenada em um indutor	$U_m = \frac{1}{2} L I^2$	28-19
Densidade de energia em um campo magnético	$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2$	28-20
7. Circuitos RL		
Diferença de potencial através de um indutor	$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = -L \frac{di}{dt} - Ir$	28-13
	onde $r$ é a resistência interna do indutor. Para um indutor ideal, $r = 0$ .	

Energizando um indutor com uma bateria

Em um circuito consistindo em uma resistência  $R$ , uma indutância  $L$  e uma bateria de fém  $\mathcal{E}_0$  em série, a corrente não atinge seu máximo valor  $I_f$  instantaneamente, mas em vez disso leva um certo tempo para alcançá-lo. Se a corrente é inicialmente nula, seu valor algum tempo  $t$  depois é dado por

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad 28-23$$

Constante de tempo  $\tau$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad 28-24$$

Desenergizando um indutor através de um resistor

Em um circuito consistindo em uma resistência  $R$  e uma indutância  $L$ , a corrente não cai a zero instantaneamente, mas em vez disso leva algum tempo para diminuir. Se a corrente é inicialmente  $I_0$ , seu valor algum tempo  $t$  depois é dado por

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad 28-26$$

## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil.
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador
- Problema que pode ser resolvido com o auxílio de planilha

### Problemas Conceituais

- 1 • Uma espira condutora está no plano desta página e transporta uma corrente induzida no sentido horário. Qual das seguintes afirmativas poderia ser verdadeira? (a) Um campo magnético constante é direcionado para dentro da página. (b) Um campo magnético constante é direcionado para fora da página. (c) Um campo magnético crescente é direcionado para dentro da página. (d) Um campo magnético decrescente é direcionado para dentro da página. (e) Um campo magnético decrescente é direcionado para fora da página.
- 2 • Obtenha a direção da corrente induzida no circuito, mostrado na direita da Figura 28-37, quando a resistência no circuito da esquerda é subitamente (a) aumentada e (b) diminuída.

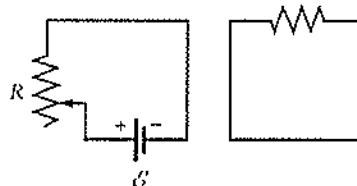


FIGURA 28-37  
Problema 2

- 3 • • As duas espiras circulares na Figura 28-38 têm seus planos paralelos entre si. Como visto a partir da esquerda, existe uma corrente no sentido anti-horário na espira A. Obtenha a direção da corrente na espira B e estabeleça se as espiras se atraem ou se repelêm uma à outra se a corrente na espira A está (a) aumentando e (b) diminuindo.

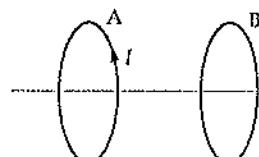


FIGURA 28-38  
Problema 3

- 4 • • Uma barra imantada se move com velocidade constante ao longo do eixo de uma espira, como mostrado na Figura 28-39. (a) Faça um gráfico qualitativo do fluxo  $\phi_m$  através da espira como função do tempo. Indique o instante  $t_1$  no qual a metade do ímã está passando na espira. (b) Esboce um gráfico da corrente  $I$  na espira versus o tempo, escolhendo  $I$  como positivo quando está no sentido horário quando vista da esquerda.

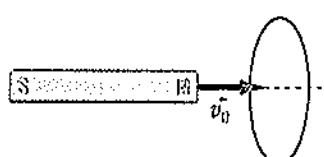
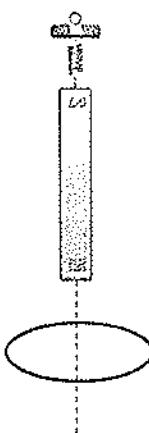


FIGURA 28-39  
Problema 4

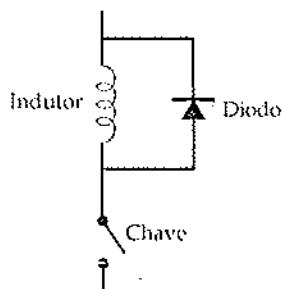
- 5 •• Uma barra imantada está montada na extremidade de uma mola, de tal modo que ela se desloca com um movimento harmônico simples ao longo do eixo de uma espira, como mostrado na Figura 28-40. (a) Faça um gráfico qualitativo de fluxo  $\phi_m$  através da espira como função do tempo. Indique o instante  $t_1$  no qual a metade do ímã está passando na espira. (b) Esboce um gráfico da corrente  $I$  na espira versus o tempo, escolhendo  $I$  como positivo quando está no sentido horário quando vista de cima.



**FIGURA 28-40**  
Problema 5

- 6 • Se a corrente através de um indutor fosse dobrada, a energia armazenada no indutor seria (a) a mesma. (b) dobrada. (c) quadruplicada. (d) metade. (e) um quarto.

- 7 • Indutores em circuitos que possuem chaves liga e desliga são normalmente protegidos sendo colocados em paralelo com um diodo, como mostrado na Figura 28-41. (Um diodo é uma válvula de um único sentido para correntes; a corrente pode passar no sentido da seta, mas não no sentido oposto ao da seta.) Por que tal proteção é necessária? Explique como a tensão entre os terminais do indutor varia sem a proteção do diodo se a chave é aberta subitamente enquanto a corrente está fluindo através do indutor.



**FIGURA 28-41**  
Problema 7

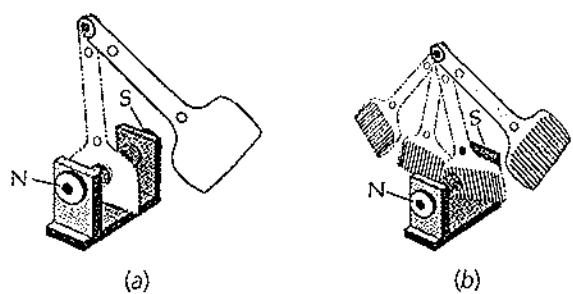
- 8 • Dois indutores são feitos a partir de comprimentos idênticos de fio enrolados em torno de núcleos circulares idênticos de mesmo raio. Entretanto, um indutor possui três vezes mais espiras por unidade de comprimento que o outro. Qual enrolamento possui a maior auto-indutância? Qual é a razão da auto-indutância dos dois enrolamentos?

- 9 • Verdadeiro ou falso:

- A fem induzida em um circuito é proporcional ao fluxo magnético através do circuito.
- Pode existir uma fem induzida em um instante em que o fluxo através do circuito é zero.
- A lei de Lenz é relacionada à conservação de energia.
- A indutância de um solenóide é proporcional à taxa de variação da corrente na solenóide.
- A densidade de energia magnética em algum ponto do espaço é proporcional ao quadrado do campo magnético naquele ponto.

- 10 • Um pêndulo é fabricado a partir de um pedaço fino e plano de alumínio. Na parte inferior de seu arco ele passa entre os

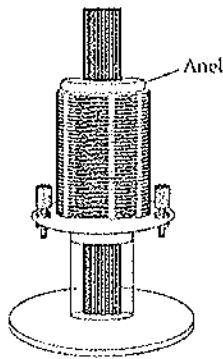
pólos de um ímã permanente forte. Na Figura 28-42a, a folha de metal é contínua, enquanto na Figura 28-42b existem fendas na folha. O pêndulo com fendas oscila para a frente e para trás várias vezes, mas o pêndulo sem as fendas pára em não mais de uma oscilação completa. Explique por quê.



**FIGURA 28-42**  
Problema 10

- 11 • Uma barra imantada é inserida dentro de um tubo longo vertical. Se o tubo é feito de metal, o ímã rapidamente se aproxima de uma velocidade terminal, mas se o tubo é feito de papelão o ímã não alcança uma velocidade terminal. Explique.

- 12 •• Um aparato experimental para uma demonstração de um lançador de anel é mostrado na Figura 28-43. Um anel de metal é colocado no topo de um grande enrolamento, com uma haste de ferro passando pelo centro do anel e do enrolamento. Quando uma corrente é subitamente iniciada no enrolamento, o anel é lançado para cima vários metros no ar. Explique por que a demonstração funciona. A demonstração funcionaria se fosse feita uma fenda no anel?



**FIGURA 28-43**  
Problema 12

### Estimação e Aproximação

- 13 •• Uma professora de física realiza a seguinte demonstração de fem. Ela coloca dois de seus estudantes segurando um longo fio conectado a um voltímetro. O fio é mantido frouxo, de modo que existe nele um grande arco. Quando ela diz "comecem", os estudantes começam a girar o fio em um grande arco vertical, como se estivessem brincando de pular corda. Os estudantes encontram-se a uma distância de 3,0 m um do outro, e o arco no fio tem cerca de 1,5 m. (Você pode imaginar a forma do fio como um perfeito arco semicircular de diâmetro  $d = 1,5 \text{ m}$ .) A fem induzida na corda de pular é então medida no voltímetro. (a) Estime um valor razoável para

máxima velocidade angular com que os estudantes podem girar o fio. (b) A partir disso, estime a máxima fem induzida no fio. O módulo do campo magnético da Terra é de aproximadamente 0,7 G. (c) Os estudantes podem rodar o fio rápido o bastante para gerar uma fem de 1 V? (d) Sugira modificações na demonstração de modo a permitir que fem maiores sejam geradas.

14 • Compare a densidade de energia armazenada no campo elétrico da Terra, que possui um valor  $E \sim 100 \text{ V/m}$  na superfície da Terra, com aquela do campo magnético da Terra, onde  $B \sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ .

15 ••• Um relâmpago transfere cerca de 30 C de carga do céu para o solo em aproximadamente 1  $\mu\text{s}$ . Estime a máxima fem induzida pelo relâmpago em uma antena consistindo em uma espira única de um fio com área de seção reta  $0,1 \text{ m}^2$  a uma distância de 300 m do relâmpago.

### Fluxo Magnético

16 • Um campo magnético de módulo 2000 G é paralelo ao eixo  $x$ . Uma espira quadrada de lado 5 cm possui uma única volta e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ , como mostrado na Figura 28-44. Encontre o fluxo magnético através da espira quando (a)  $\theta = 0^\circ$ , (b)  $\theta = 10^\circ$ , (c)  $\theta = 60^\circ$  e (d)  $\theta = 90^\circ$ .

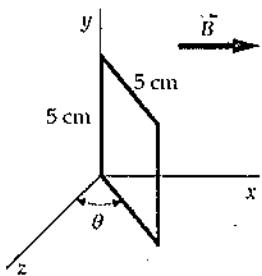


FIGURA 28-44  
Problema 16

17 • Uma espira circular possui 25 voltas e um raio de 5 cm. Ela está no equador, onde o campo magnético da Terra é 0,7 G norte. Encontre o fluxo magnético através da espira quando seu plano é (a) horizontal, (b) vertical com seu eixo apontando para norte, (c) vertical com seu eixo apontado para oeste, (d) vertical com o seu eixo fazendo um ângulo de  $30^\circ$  com o norte.

18 • Um campo magnético de 1,2 T é perpendicular a uma espira quadrada de 14 voltas. O comprimento de cada lado da espira é de 5 cm. (a) Encontre o fluxo magnético através da espira. (b) Encontre o fluxo magnético através da espira se o campo magnético faz um ângulo de  $60^\circ$  com a normal ao plano da espira.

19 • Um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  é perpendicular à base de um hemisfério de raio  $R$ . Calcule o fluxo magnético através da superfície esférica do hemisfério.

20 •• Encontre o fluxo magnético através de um solenóide de 400 voltas, comprimento de 25 cm e raio de 1 cm que transporta uma corrente de 3 A.

21 •• Refaça o Problema 20 para um solenóide de 800 voltas, comprimento de 30 cm e raio de 3 cm que transporta uma corrente de 2 A.

22 •• Uma espira circular de 15 voltas e raio de 4 cm está em um campo magnético de 4000 G na direção  $x$  positiva. Encontre o

fluxo através da espira quando o vetor unitário perpendicular ao plano da espira é (a)  $\hat{n} = \hat{i}$ , (b)  $\hat{n} = \hat{j}$ , (c)  $\hat{n} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ , (d)  $\hat{n} = \hat{k}$ , e (e)  $\hat{n} = 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}$ .

23 ••• Um solenóide possui  $n$  voltas por unidade de comprimento, raio  $R_2$  e transporta uma corrente  $I$ . (a) Uma grande espira circular de raio  $R_2 > R_1$  e  $N$  voltas circula o solenóide em um ponto longe das extremidades do solenóide. Encontre o fluxo magnético através da espira. (b) Uma pequena espira circular de raio de  $N$  voltas e raio  $R_3 < R_1$  está completamente dentro do solenóide, longe de suas extremidades, com o seu eixo paralelo ao do solenóide. Encontre o fluxo magnético através dessa pequena espira.

24 ••• Um fio reto e longo transporta uma corrente  $I$ . Uma espira retangular com dois lados paralelos ao fio reto possui lados  $a$  e  $b$ , com o seu lado mais próximo a uma distância  $d$  do fio reto, como mostrado na Figura 28-45. (a) Calcule o fluxo magnético através da espira retangular. (Sugestão: Calcule o fluxo através da faixa de área  $dA = b dx$  e integre de  $x = d$  até  $x = d + a$ .) (b) Avalie sua resposta para  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$  e  $I = 20 \text{ A}$ .

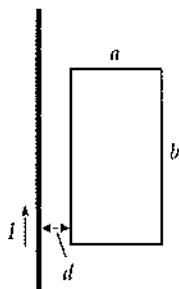


FIGURA 28-45  
Problema 24

25 ••• Um longo cilindro condutor de raio  $R$  transporta uma corrente  $I$  que está uniformemente distribuída sobre sua área de seção reta. Encontre o fluxo magnético por unidade de comprimento através da área indicada na Figura 28-46.

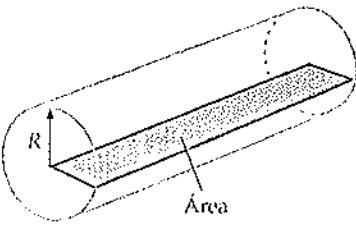
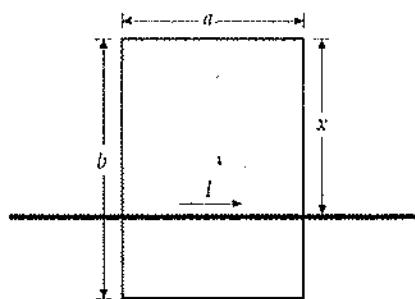


FIGURA 28-46  
Problema 25

26 ••• Uma espira retangular no plano da página tem dimensões  $a$  e  $b$ . Um longo fio que transporta uma corrente  $I$  é colocado diretamente sobre a espira (Figura 28-47). (a) Obtenha uma expressão para o fluxo magnético através da espira com uma função de  $x$  para  $0 \leq x \leq 2b$ . (b) Para qual valor de  $x$  o fluxo através da espira é máximo? Para qual valor de  $x$  o fluxo através da espira é mínimo?



**FIGURA 28-47**  
Problema 26

### FEM Induzida e Lei de Faraday

27 • Um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  é estabelecido perpendicularmente ao plano de uma espira com raio de 5 cm, resistência de  $0,4\ \Omega$  e auto-indutância desprezível. O módulo de  $\vec{B}$  está aumentando a uma taxa de  $40\text{ mT/s}$ . Encontre (a) a fem induzida  $\mathcal{E}$  na espira, (b) a corrente induzida na espira e (c) a taxa de aquecimento da espira em joules.

28 • O fluxo através de uma espira é dado por  $\phi_m = (t^2 - 4t) \times 10^{-1}\text{ Wb}$ , onde  $t$  está em segundos. (a) Encontre a fem induzida  $\mathcal{E}$  como função do tempo. (b) Encontre  $\phi_m$  e  $\mathcal{E}$  para  $t = 0\text{ s}$ ,  $t = 2\text{ s}$ ,  $t = 4\text{ s}$  e  $t = 6\text{ s}$ .

29 • (a) Para o fluxo dado no Problema 28, esboce gráficos de  $\phi_m$  e  $\mathcal{E}$  versus  $t$ . (b) Em qual instante de tempo o fluxo é mínimo? Qual é a fem nesse instante? (c) Em quais instantes de tempo o fluxo é nulo? Qual é a fem nesses instantes?

30 • Um solenóide com comprimento de 25 cm e raio de 0,8 cm, com 400 voltas, está em um campo magnético externo de 600 G que faz um ângulo de  $50^\circ$  com o eixo do solenóide. (a) Encontre o fluxo magnético através do solenóide. (b) Encontre o módulo da fem induzida no solenóide se o campo magnético externo é reduzido para zero em  $1,4\text{ s}$ .

31 •• Um enrolamento circular de 100 voltas possui um diâmetro de 2 cm e resistência  $50\ \Omega$ . O plano do enrolamento é perpendicular a um campo magnético uniforme de módulo 1 T. A direção do campo é subitamente invertida. (a) Encontre a carga total que passa através do enrolamento. Se a reversão leva  $0,1\text{ s}$ , encontre (b) a corrente média no enrolamento e (c) a fem média no enrolamento.

32 •• No equador, um enrolamento com 1000 voltas com área de seção reta de  $300\text{ cm}^2$  e resistência de  $15\ \Omega$  está alinhado com seu plano perpendicular ao campo magnético da Terra de 0,7 G. Se o enrolamento é girado, quanta carga flui através dele?

33 •• Um enrolamento circular de 300 voltas e raio de 5 cm está conectado com um integrador de corrente. A resistência total do circuito é  $20\ \Omega$ . O plano do enrolamento está originalmente alinhado de modo perpendicular ao campo magnético da Terra em algum ponto. Quando o enrolamento é girado de  $90^\circ$ , a carga que passa através do integrador de corrente é medida como sendo  $9,4\ \mu\text{C}$ . Calcule o módulo do campo magnético da Terra naquele ponto.

34 •• O fio no Problema 26 é colocado em  $x = b/4$ . (a) Obtenha uma expressão para a fem induzida na espira se a corrente varia com o tempo de acordo com  $I = 2t$ . (b) Se  $a = 1,5\text{ m}$  e  $b = 2,5\text{ m}$ , qual deve ser a resistência na espira de tal modo que a corrente induzida seja  $0,1\text{ A}$ ? Qual é a direção dessa corrente?

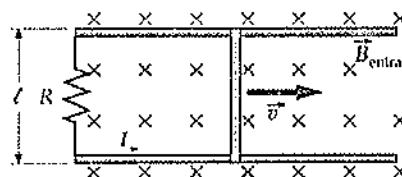
35 •• Repita o Problema 34 se o fio é colocado em  $x = b/3$ .

### FEM Induzida por Movimento

36 • Uma haste com comprimento de 30 cm se move a  $8\text{ m/s}$  em um plano perpendicular a um campo magnético de  $500\text{ G}$ . A velocidade da haste é perpendicular ao seu comprimento. Encontre (a) a força magnética sobre um elétron na haste, (b) o campo eletrostático  $\vec{E}$  na haste e (c) a diferença de potencial  $V$  entre as extremidades da haste.

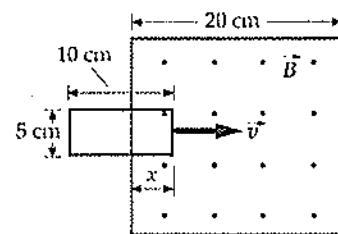
37 • Encontre a velocidade da haste no Problema 36 se a diferença de potencial entre as extremidades é de  $6\text{ V}$ .

38 • Na Figura 28-22, scja  $B = 0,8\text{ T}$ ,  $v = 10\text{ m/s}$ ,  $l = 20\text{ cm}$  e  $R = 2\ \Omega$ . Encontre (a) a fem induzida no circuito (b) a corrente no circuito, e (c) a força necessária para mover a haste com velocidade constante, presumindo atrito desprezível. Encontre (d) a potência de entrada devida à força encontrada na Parte (c) e (e) a taxa de efeito joule  $P_R$ .



**FIGURA 28-22**  
Problema 38

39 •• Uma espira retangular de 10 cm por 5 cm, com resistência de  $2,5\ \Omega$ , é puxada através de uma região com campo magnético uniforme  $B = 1,7\text{ T}$  (Figura 28-48) com velocidade constante  $v = 24\text{ cm/s}$ . A frente da espira entra na região do campo magnético no instante  $t = 0$ . (a) Encontre e faça um gráfico do fluxo através da espira como função do tempo. (b) Encontre e faça um gráfico da fem induzida e da corrente na espira com funções do tempo. Despreze qualquer auto-indutância da espira e tracce os gráficos desde  $t = 0$  até  $t = 16\text{ s}$ .



**FIGURA 28-48**  
Problema 39

40 •• Um campo magnético uniforme com módulo de  $1,2\text{ T}$  está na direção z. Uma haste condutora com comprimento de 15 cm se move paralela ao eixo y e oscila na direção x com deslocamento dado por  $x = (2\text{ cm}) \cos 120\pi t$ . Qual é a fem induzida na haste?

41 •• Na Figura 28-49, a haste tem uma resistência  $R$ , os trilhos são horizontais e apresentam resistência desprezível. Uma batuta de fem  $\mathcal{E}$ , com resistência interna desprezível, está conectada entre os pontos a e b de tal modo que a corrente na haste está para baixo. A haste está em repouso em  $t = 0$ . (a) Encontre a força sobre a haste como uma função da velocidade  $v$  e escreva a segunda lei de Newton para a haste quando ela apresenta uma velocidade  $v$ . (b) Mostre que a haste se move com uma velocidade terminal e encontre essa es-

pressão para a velocidade. (c) Qual é a corrente quando a haste se aproxima de sua velocidade terminal?

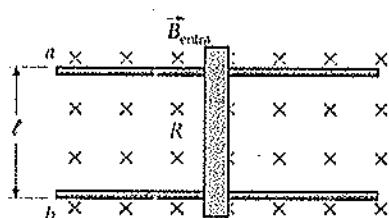


FIGURA 28-49  
Problemas 41 e 44

42 •• No Exemplo 28-9, encontre a energia total dissipada na resistência e mostre que ela é igual a  $mv_0^2$ .

43 •• Encontre a distância percorrida pela haste no Exemplo 28-9.

44 •• Na Figura 28-49, a haste tem uma resistência  $R$  e os trilhos possuem resistência desprezível. Um capacitor com carga  $Q_0$  e capacitância  $C$  está conectado entre os pontos  $a$  e  $b$  de tal modo que a corrente na haste está para baixo. A haste está em repouso em  $t = 0$ . (a) Escreva a equação de movimento para a haste sobre os trilhos. (b) Mostre que a velocidade terminal da haste ao longo dos trilhos está relacionada com a carga final no capacitor.

45 •• Na Figura 28-50, uma haste condutora de massa  $m$  e resistência desprezível é livre para deslizar sem atrito ao longo de dois trilhos paralelos de resistência desprezível separados por uma distância  $l$  e conectados por uma resistência  $R$ . Os trilhos estão montados em um longo plano inclinado, que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Existe um campo magnético  $B$  direcionado para cima. (a) Mostre que existe uma força de retardamento dada por  $F = (B^2 l^2 v \cos^2 \theta)/R$ . (b) Mostre que a velocidade terminal da haste é  $v_t = (mgR \operatorname{sen} \theta)/(B^2 l^2 \cos^2 \theta)$ .

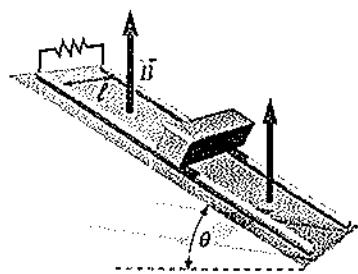


FIGURA 28-50  
Problemas 45 e 49

46 •• Uma espira quadrada de um fio condutor (área  $A$ ) está sendo puxado para fora de uma região com um campo magnético  $B$  muito elevado, constante, que está direcionado perpendicularmente ao plano do fio. Metade do fio está dentro do campo e metade fora quando o fio é puxado para fora. Uma força constante  $F$  é exercida sobre o fio para puxá-lo para fora. O fio é puxado para fora durante o intervalo de tempo  $t$ . Considerando que tudo mais seja mantido igual, se a força for dobrada em quanto tempo aproximadamente o fio seria puxado para fora?

- (a)  $t$  (b)  $t/\sqrt{2}$  (c)  $t/2$  (d)  $t/4$

47 •• Se ao invés de dobrar, a força de resistência do fio no Problema 46 fosse dividida pela metade (com tudo mais mantido igual), qual seria o novo tempo? (a)  $t$  (b)  $2t$  (c)  $t/2$  (d)  $t\sqrt{2}$

48 •• Um fio repousa ao longo do eixo  $z$  e transporta uma corrente  $I = 20$  no sentido positivo de  $z$ . Uma pequena esfera condutora com raio  $r = 2$  cm está inicialmente em repouso no eixo  $y$  a uma distância  $h = 45$  m acima do fio. A esfera é liberada no instante  $t = 0$ . (a) Qual é o campo elétrico no centro da esfera em  $t = 3$  s? Assuma que o único campo magnético é o produzido pelo fio. (b) Qual é a tensão através da esfera em  $t = 3$  s?

49 •• Na Figura 28-50, seja  $\theta = 30^\circ$ ,  $m = 0,4$  kg,  $l = 15$  m e  $R = 2\Omega$ . A haste parte do repouso no topo do plano inclinado em  $t = 0$ . Os trilhos possuem resistência desprezível. Existe um campo magnético constante direcionado verticalmente de módulo  $B = 1,2$  T. (a) Encontre a fem induzida na haste como função da sua velocidade para baixo nos trilhos. (b) Escreva a lei de Newton do movimento para a haste; mostre que a haste irá atingir uma velocidade terminal e determine o seu valor.

50 •• Um cilindro condutor sólido com raio de 0,1 m e massa de 4 kg repousa sobre trilhos horizontais condutores (Figura 28-51). Os trilhos, separados por uma distância  $a = 0,4$  m, possuem uma superfície rugosa, de tal modo que o cilindro rola sem deslizar. Uma bateria de 12 V está conectada aos trilhos, como mostrado. A única resistência significante no circuito é a resistência de contato de  $6\Omega$  entre o cilindro e os trilhos. O sistema está em um campo magnético uniforme vertical. O cilindro está inicialmente em repouso próximo à bateria. (a) Qual deve ser o módulo e a direção de  $B$  de modo que o cilindro tenha uma aceleração inicial de  $0,1\text{ m/s}^2$  para a direita? (b) Encontre a força sobre o cilindro como uma função da sua velocidade  $v$ . (c) Encontre a velocidade terminal do cilindro. (d) Qual é a energia cinética do cilindro quando ele atinge sua velocidade terminal? (Despreze o campo magnético devido à corrente na malha bateria-trilhos-cilindro, e presumá que a densidade de corrente no cilindro é uniforme.)

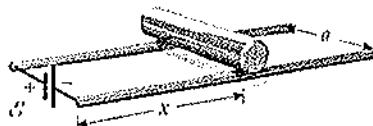
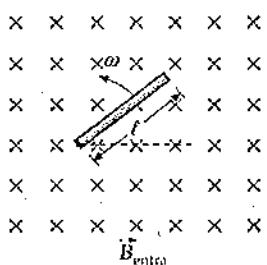


FIGURA 28-51  
Problema 50

51 •• A espira no Problema 24 se move para longe do fio com uma velocidade constante  $v$ . No instante  $t = 0$ , o lado esquerdo da espira está a uma distância  $d$  do fio longo reto. (a) Calcule a fem na espira através da determinação da fem induzida por movimento em cada segmento da espira que é paralelo ao fio longo. Explique por que pode-se desprezar a fem nos segmentos perpendiculares ao fio. (b) Calcule a fem na espira determinando inicialmente o fluxo através da espira como uma função do tempo e depois usando  $\mathcal{E} = -d\phi_B/dt$ . Compare a resposta com aquela obtida na Parte (a).

52 •• Uma haste condutora com comprimento  $l$  gira com uma velocidade angular constante em torno de uma extremidade, em um plano perpendicular a um campo magnético uniforme  $B$  (Figura 28-52). (a) Mostre que a força magnética sobre um corpo cuja carga  $q$  está a uma distância  $r$  da articulação é  $Bqr\omega$ . (b) Mostre que a diferença de potencial entre as extremidades da haste é  $V = \frac{1}{2}B\omega l^2$ . (c) Desenhe qualquer linha radial no plano a partir da qual se possa

medir  $\theta = \omega t$ . Mostre que a área da fatia entre a linha de referência e a baste é  $A = \frac{1}{2} \ell^2 \theta$ . Calcule o fluxo através dessa área, e mostre que  $\delta' = \frac{1}{2} B_0 \ell^2$  é obtido quando a lei da Faraday é aplicada a essa área.



**FIGURA 28-52**  
Problema 52

## Indutância

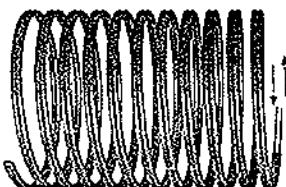
53 • Um enrolamento com auto-indutância de 8 H transporta uma corrente de 3 A que está variando a uma taxa de 200 A/s. Encontre (a) o fluxo magnético através do enrolamento e (b) a fem induzida no enrolamento.

54 • Um enrolamento com auto-indutância  $L$  transporta uma corrente  $I$ , dada por  $I = I_0 \sin 2\pi ft$ . Encontre e faça um gráfico do fluxo  $\phi_m$  e da fem auto-induzida como função do tempo.

55 • • Um solenóide possui comprimento de 25 cm, raio de 1 cm, 400 voltas e transporta uma corrente de 3 A. Encontre (a)  $B$  sobre o eixo no centro do solenóide; (b) o fluxo através do solenóide, admitindo  $B$  como uniforme; (c) a auto-indutância do solenóide; e (d) a fem induzida no solenóide quando a corrente varia a 150 A/s.

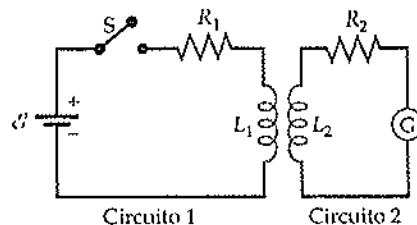
56 • • Dois solenóides com raios 2 de cm e 5 cm são coaxiais. Cada um tem comprimento de 25 cm, um tem 300 voltas e o outro 1000 voltas, respectivamente. Encontre a indutância mútua entre elas.

57 • • Um fio longo isolado, com uma resistência de  $18 \Omega/m$ , será usado na construção de um resistor. Inicialmente o fio é dobrado, e depois o fio duplo é enrolado na forma de um cilindro, como mostrado na Figura 28-53. O diâmetro da forma cilíndrica é de 2 cm e seu comprimento é de 25 cm, e o comprimento total do fio é de 9 m. Encontre a resistência a indutância desse resistor de fio enrolado.



**FIGURA 28-53**  
Problema 57

58 • • • Na Figura 28-54, o circuito 2 possui uma resistência total de  $300 \Omega$ . Uma carga total de  $2 \times 10^{-4} C$  flui através do galvanômetro no circuito 2 quando a chave  $S$  no circuito 1 é fechada. Após um longo tempo, a corrente no circuito 1 é 5 A. Qual é a indutância mútua entre os dois enrolamentos?

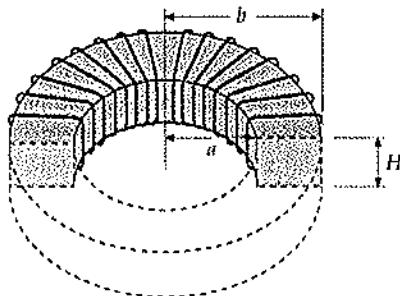


**FIGURA 28-54**  
Problema 58

59 • • • Mostre que a indutância de um toróide de seção retangular, como mostrado na Figura 28-55, é dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 H \ln(b/a)}{2\pi}$$

onde  $N$  é o número total de voltas,  $a$  é o raio interno,  $b$  é o raio externo, e  $H$  é a altura da toróide.



**FIGURA 28-55**  
Problema 59

## Energia Magnética

60 • • Uma bobina de auto-indutância de 2 H e resistência de  $12 \Omega$  é conectada entre os terminais de uma bateria de 24 V e resistência interna desprezível. (a) Qual é a corrente final? (b) Quanta energia é armazenada no indutor quando a corrente final é atingida?

61 • • Em uma onda eletromagnética plana, tal como uma onda de luz, os módulos dos campos elétricos e dos campos magnéticos estão relacionados por  $E = cB$ , onde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  é a velocidade da luz. Mostre que nesse caso as densidades de energia elétrica e energia magnética são iguais.

62 • • Um solenóide com 2000 voltas, área de  $4 \text{ cm}^2$  e comprimento de 30 cm transporta uma corrente de 4 A. (a) Calcule a energia magnética armazenada no solenóide a partir de  $\frac{1}{2} L I^2$ . (b) Divida a resposta na Parte (a) pelo volume do solenóide para encontrar a energia magnética por unidade de volume na solenóide. (c) Encontre  $B$  no solenóide. (d) Calcule a densidade de energia magnética a partir de  $u_m = B^2/2\mu_0$  e compare a resposta com o resultado para a Parte (b).

63 • • Um fio cilíndrico longo com raio  $a = 2 \text{ cm}$  transporta uma corrente  $I = 80 \text{ A}$  uniformemente distribuída ao longo de sua área de seção reta. Encontre a energia magnética por unidade de comprimento dentro do fio.

64 • • Um fio com comprimento  $d$  e raio  $a$  deve ser usado para construir um indutor na forma de um cilindro com seção transver-

sal circular de raio  $r$ . As espiras devem estar o mais próximo possível sem, entretanto, haver superposição. Mostre que a auto-indutância desse indutor é

$$L = \mu_0 \left( \frac{rd}{4a} \right)$$

65 • Usando o resultado do Problema 64, calcule a auto-indutância de um indutor enrolado a partir de um fio de 10 cm com diâmetro de 1 mm na forma de uma bobina com raio  $R = 0,25$  cm.

66 •• Um toróide com raio médio de 25 cm e seção transversal circular com raio de 2 cm é enrolado com um fio supercondutor com comprimento de 1000 m que transporta uma corrente de 400 A. (a) Qual é o número de voltas da bobina? (b) Qual é o campo magnético no raio médio? (c) Admitindo que  $B$  é constante ao longo da área da bobina, calcule a densidade de energia magnética e a energia total armazenada no toróide.

### Circuitos RL

67 • Uma bobina com resistência de  $8\Omega$  e auto-indutância de  $4\text{ H}$  é repentinamente conectada em uma diferença de potencial constante de  $100\text{ V}$ . Seja  $t = 0$  o instante da conexão, no qual a corrente é nula. Encontre a corrente  $I$  e sua taxa de variação  $dI/dt$  nos instantes (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 0,1\text{ s}$ , (c)  $t = 0,5\text{ s}$  e (d)  $t = 1,0\text{ s}$ .

68 • A corrente em uma bobina com auto-indutância de  $1\text{ mH}$  é  $2\text{ A}$  em  $t = 0$ , quando a bobina é conectada em curto-círcuito com um resistor. A resistência total da bobina e do resistor é de  $10\Omega$ . Encontre a corrente após (a)  $0,5\text{ ms}$  e (b)  $10\text{ ms}$ .

69 •• No circuito mostrado na Figura 28-29, seja  $\mathcal{E}_0 = 12\text{ V}$ ,  $R = 3\Omega$  e  $L = 0,6\text{ H}$ . A chave é fechada no instante  $t = 0$ . No instante  $t = 0,5$  encontre (a) a taxa na qual a bateria fornece potência, (b) a taxa de efeito joule e (c) a taxa na qual a energia está sendo armazenada no indutor.

70 •• Refaça o Problema 69 para os instantes  $t = 1\text{ s}$  e  $t = 100\text{ s}$ .

71 •• A corrente em um circuito  $RL$  é zero no instante  $t = 0$  e aumenta para metade do seu valor final em  $4\text{ s}$ . (a) Qual é a constante de tempo desse circuito? (b) Se a resistência total é  $5\Omega$ , qual é a auto-indutância?

72 •• Quantas constantes de tempo devem passar antes que a corrente em um circuito  $RL$ , que é inicialmente nula, atinja (a) 90%, (b) 99% e (c) 99,9% do seu valor final?

73 •• Uma bobina com indutância de  $4\text{ mH}$  e resistência de  $150\Omega$  está conectada em uma bateria de fem  $12\text{ V}$  e resistência interna desprezível. (a) Qual é a taxa inicial de aumento da corrente? (b) Qual é a taxa de aumento quando a corrente é a metade do seu valor final? (c) Qual é a corrente final? (d) Quanto tempo leva para a corrente atingir 99% de seu valor final?

74 •• Um grande ímã possui uma indutância de  $50\text{ H}$  e uma resistência de  $8\Omega$ . Ele é conectado a uma fonte de potência CC de  $250\text{ V}$ . Encontre o tempo para a corrente atingir (a)  $10\text{ A}$  e (b)  $30\text{ A}$ .

75 •• Dado o circuito mostrado na Figura 28-56, admita que a chave  $S$  esteja fechada por um longo tempo, de tal modo que exista uma corrente em regime permanente no indutor e que o indutor  $L$  possua uma resistência desprezível. (a) Encontre a corrente da bateria, a corrente no resistor de  $100\Omega$  e a corrente através do indutor. (b) Encontre a tensão inicial no indutor quando a chave  $S$  é aberta. (c) Usando um programa de computador, faça gráficos de corrente e de tensão no indutor como função do tempo.

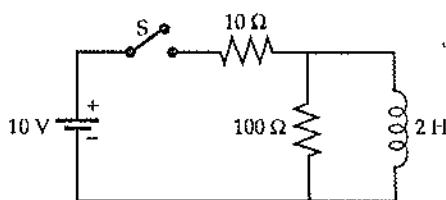


FIGURA 28-56

Problema 75

76 •• Calcule a inclinação inicial  $dI/dt$  em  $t = 0$  a partir da Equação 28-26, e mostre que se a corrente diminui continuamente a essa taxa, a corrente deverá ser nula após uma constante de tempo.

77 •• Uma indutância  $L$  e uma resistência  $R$  estão conectadas em série com uma bateria, como mostrado na Figura 28-31. Um longo tempo após a chave  $S_1$  ser fechada a corrente é  $2,5\text{ A}$ . Quando a bateria é desligada do circuito, abrindo-se a chave  $S_1$  e fechando a chave  $S_2$ , a corrente atinge  $1,5\text{ A}$  em  $45\text{ ms}$ . (a) Qual é a constante de tempo para esse circuito? (b) Se  $R = 0,4\Omega$ , qual o valor de  $L$ ?

78 • Quando a corrente em uma certa bobina é  $5\text{ A}$  e a corrente está aumentando a uma taxa de  $10\text{ A/s}$ , a diferença de potencial na bobina é  $140\text{ V}$ . Quando a corrente é  $5\text{ A}$  e a corrente está diminuindo a uma taxa de  $10\text{ A/s}$ , a diferença de potencial é  $60\text{ V}$ . Encontre a resistência e a auto-indutância da bobina.

79 •• Para o circuito mostrado na Figura 28-57, (a) encontre a taxa de variação da corrente em cada indutor e no resistor logo após a chave ser fechada. (b) Qual é a corrente final? (Use o resultado do Problema 88.)

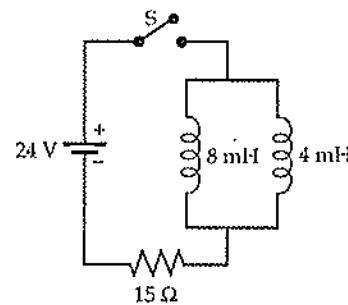


FIGURA 28-57

Problema 79

80 •• Para o circuito do Exemplo 28-11, encontre o instante no qual a dissipação de potência no resistor iguala a taxa na qual a energia magnética é armazenada no indutor.

81 ••• No indutor mostrado na Figura 28-29, seja  $\mathcal{E}_0 = 12\text{ V}$ ,  $R = 3\Omega$ , e  $L = 0,6\text{ H}$ . A chave é fechada no instante  $t = 0$ . A partir do instante  $t = 0$  até  $t = \tau$ , encontre (a) a energia total que é fornecida pela bateria, (b) a energia total que é dissipada no resistor, e (c) a energia que é armazenada no indutor. (Sugestão: Encontre as taxas como funções do tempo e integre desde  $t = 0$  até  $t = \tau = L/R$ .)

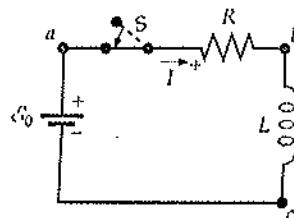


FIGURA 28-29

Problema 81

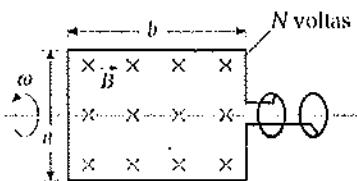
### Problemas Gerais

82 • Uma bobina circular com raio de 3 cm possui 6 voltas. Um campo magnético  $B = 5000 \text{ G}$  é perpendicular à bobina. (a) Encontre o fluxo magnético através da bobina. (b) Encontre o fluxo magnético na bobina se ela faz um ângulo de  $20^\circ$  com o campo magnético.

83 • O campo magnético no Problema 82 é continuamente reduzido a zero em 1,2 s. Encontre a fem induzida na bobina quando (a) o campo magnético é perpendicular à bobina e (b) o campo magnético faz um ângulo de  $20^\circ$  com a normal da bobina.

84 • Uma bobina com 100 voltas possui um raio de 4 cm e uma resistência de  $25 \Omega$ . A que taxa deve um campo magnético perpendicular variar para produzir uma corrente de 4 A na bobina?

85 • A Figura 28-58 mostra um gerador CA. O gerador consiste em uma espira retangular de dimensões  $a$  e  $b$  com  $N$  voltas conectada a anéis deslizantes. A espira gira com uma velocidade angular  $\omega$  em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . (a) Mostre que a diferença de potencial entre os dois anéis deslizantes é  $\mathcal{E} = NBab\omega$  sen  $\omega t$ . (b) Se  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $N = 1000$  e  $B = 2 \text{ T}$ , com qual velocidade angular  $\omega$  deve a bobina girar para gerar uma fem cujo valor máximo seja 110 V?



**FIGURA 28-58**  
Problemas 85 e 86

86 • Antes de 1960, a intensidade do campo magnético era medida por meio de uma bobina girante. Esse aparato, chamado de *gaussmeter*, usava uma pequena espira de várias voltas girando em torno de um eixo perpendicular ao campo magnético com uma elevada velocidade angular, que era conectada a um voltímetro CA por meio de anéis deslizantes, como aqueles mostrados na Figura 28-58. A bobina sensora para o *gaussmeter* girante possuía 400 voltas e uma área de  $1,4 \text{ cm}^2$ . A bobina girava a 180 rpm. Se a intensidade do campo magnético é de  $0,45 \text{ T}$ , encontre a máxima fem induzida na bobina e a orientação da bobina relativa ao campo para a qual essa fem induzida máxima ocorre.

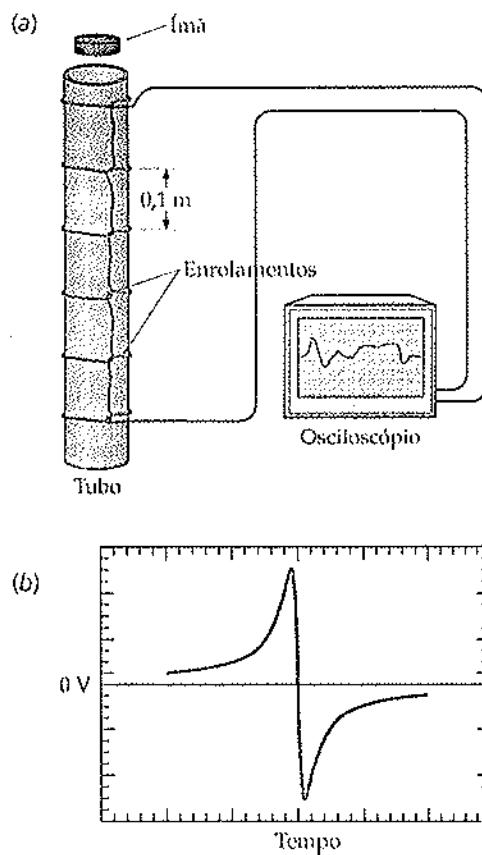
87 • • Mostre que a indutância efetiva para dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  conectados em série, onde nenhum fluxo de um passa através do outro, é dada por  $L_{\text{ef}} = L_1 + L_2$ .

88 • • Mostre que a indutância efetiva para dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  conectados em paralelo, onde nenhum fluxo de um passa através do outro, é dada por

$$\frac{1}{L_{\text{ef}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

89 • • A Figura 28-59(a) mostra um experimento projetado para medir a aceleração da gravidade. Um grande tubo plástico é enrolado por um fio, que é arrumado em espiras únicas separadas por uma distância de 10 cm. Um forte imã é liberado a partir do topo da espira. Conforme o imã cai, através de cada espira a tensão aumenta e depois cai rapidamente de 0 até um alto valor negativo, conforme o imã passa pela espira e depois volta a zero. A forma do sinal

de tensão é mostrada na Figura 28-59(b). (a) Explique como esse experimento funciona. (b) Explique por que o tubo não pode ser feito de material condutor. (c) Explique qualitativamente a forma do sinal de tensão na Figura 28-59(b). (d) Os instantes nos quais a tensão cruza o 0, conforme o imã cai através de cada espira em sucessão, são dados na tabela a seguir. Use esses dados para determinar um valor para  $g$ .



**FIGURA 28-59**  
Problema 89

Número da Espira	Instante de Cruzamento do Zero
1	0,011189
2	0,063133
3	0,10874
4	0,14703
5	0,18052
6	0,21025
7	0,23851
8	0,26363
9	0,28853
10	0,31144
11	0,33494
12	0,35476
13	0,37592
14	0,39107

90 •• A espira retangular mostrada na Figura 28-60 possui 80 voltas, tem largura de 25 cm, comprimento de 30 cm e está localizada em um campo magnético  $B = 1,4 \text{ T}$  direcionado para fora da página, como mostrado, com apenas metade da espira na região do campo magnético. A resistência da espira é de  $24 \Omega$ . Encontre o módulo e a direção da corrente induzida se a espira é deslocada com uma velocidade de  $2 \text{ m/s}$  (a) para a direita, (b) para cima, (c) para a esquerda e (d) para baixo.

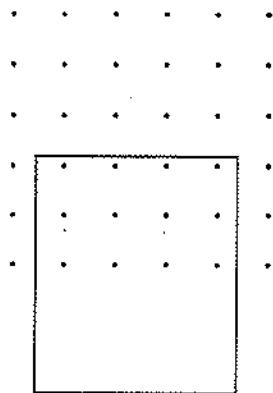


FIGURA 28-60  
Problema 90

91 •• Suponha que a espira do Problema 90 é girada em torno de sua linha do centro com uma velocidade angular constante de  $2 \text{ rad/s}$ . Encontre a corrente induzida como uma função do tempo.

92 •• Mostre que se o fluxo através de cada volta de uma espira de  $N$  voltas e resistência  $R$  varia de  $\phi_{m1}$  até  $\phi_{m2}$ , a carga total que passa através da espira é dada por  $Q = N(\phi_{m1} - \phi_{m2})/R$ .

93 •• Um longo solenóide possui  $n$  voltas por unidade de comprimento e transporta uma corrente dada por  $I = I_0 \sin \omega t$ . O solenóide possui uma seção transversal circular de raio  $R$ . Encontre o campo elétrico induzido no raio  $r$  a partir do eixo do solenóide para (a)  $r < R$  e (b)  $r > R$ .

94 ••• Um cabo coaxial consiste em dois cilindros condutores de paredes muito finas de raios  $r_1$  e  $r_2$  (Figura 28-61). A corrente  $I$  vai em um sentido no cilindro interno e no sentido oposto no cilindro externo. (a) Use a lei de Ampère para encontrar  $B$ . Mostre que  $B = 0$ , exceto na região entre os condutores. (b) Mostre que a densidade de energia magnética na região entre os cilindros é

$$u_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

(c) Encontre a energia magnética em um elemento de volume na forma de casca cilíndrica de comprimento  $\ell$  e volume  $dV = \ell 2\pi r dr$ , e integre o resultado para mostrar que a energia magnética total no volume de comprimento  $\ell$  é

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(d) Use o resultado na Parte (c) e  $U_m = \frac{1}{2} L^2$  para mostrar que a auto-indutância por unidade de comprimento é

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

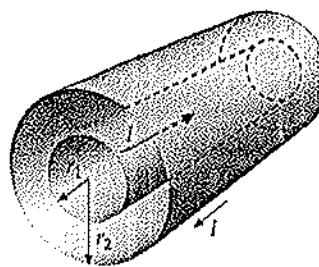


FIGURA 28-61  
Problemas 94 e 95

95 ••• Usando a Figura 28-61, calcule o fluxo através de uma área retangular de lados  $\ell$  e  $r_2 - r_1$  entre os condutores. Mostre que a auto-indutância por unidade de comprimento pode ser encontrada a partir de  $\phi_m = LI$  (veja a Parte (d) do Problema 94).

96 ••• A Figura 28-62 mostra uma espira retangular de fio, com largura de  $0,30 \text{ m}$  e comprimento de  $1,50 \text{ m}$ , no plano vertical e perpendicular a um campo magnético uniforme  $B = 0,40 \text{ T}$ , direcionado para dentro, como mostrado. A porção da espira que não está dentro do campo magnético tem comprimento de  $0,10 \text{ m}$ . A resistência da espira é de  $0,20 \Omega$  e sua massa é de  $0,05 \text{ kg}$ . A espira é liberada a partir do repouso em  $t = 0$ . (a) Quais são o módulo e a direção da corrente induzida quando a espira tem uma velocidade  $v$  para baixo? (b) Qual é a força que atua sobre a espira como resultado dessa corrente? (c) Qual é a força líquida atuando na espira? (d) Escreva a equação de movimento da espira. (e) Obtenha uma expressão para a velocidade da espira como função do tempo. (f) Integre a expressão obtida na Parte (e) para encontrar o deslocamento  $y$  como uma função do tempo. (g) Usando um programa de computador, faça um gráfico da posição  $y$  da espira como uma função do tempo para valores de  $y$  entre  $0 \text{ m}$  e  $1,4 \text{ m}$  (i.e., quando a espira deixa o campo magnético). Em qual instante de tempo  $t$  tem-se  $y = 1,4 \text{ m}$ ? Compare esse tempo com aquele que seria obtido se  $B = 0$

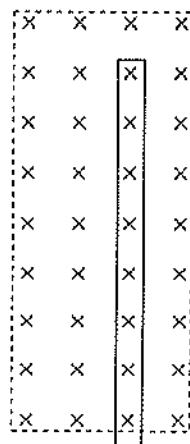


FIGURA 28-62  
Problemas 96 e 97

97 ••• A espira do Problema 96 está conectada a uma mola de plástico de constante  $k$  (veja o Problema 28-62). (a) Quando  $B = 0$ , o período das oscilações verticais de pequena amplitude do sistema massa-mola é de  $0,8 \text{ s}$ . Encontre a constante de mola  $k$ . (b) Quando  $B \neq 0$ , uma corrente é induzida na espira como consequência do seu movimento para cima e para baixo. Obtenha uma expressão para a

corrente induzida como uma função do tempo quando  $B = 0,40\text{ T}$  e o deslocamento do centro da espira é  $y = 0,05\text{ m}$  para baixo. (c) Mostre que a força sobre a espira é da forma  $\sim \beta v$ , onde  $v = dv/dt$ , e encontre uma expressão para  $\beta$  em termos de  $B$ ,  $w$  e  $R$ , onde  $w$  é a largura da espira de fio e  $R$  é a sua resistência. (d) Usando um programa de computador, faça gráficos da posição  $y$  e da velocidade  $v$  do centro da espira como função do tempo, usando os parâmetros dados.

98 ••• Uma espira de  $N$  voltas e área  $A$  está suspensa por um fio que fornece um torque restaurador linear com constante torsional

$\kappa$ . As duas extremidades da espira estão conectadas uma à outra, a espira tem resistência  $R$  e o momento de inércia da espira é  $I$ . O plano da espira é vertical e paralelo a um campo magnético uniforme horizontal  $B$  quando o fio não está deslocado (i.e.,  $\theta = 0$ ). A espira é deslocada e liberada de um pequeno ângulo  $\theta = \theta_0$ . Mostre que a orientação da espira será uma oscilação harmônica amortecida de acordo com  $\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ , onde

$$\omega = \sqrt{\kappa/I} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{N^2 B^2 A^2}{R I}.$$

## Circuitos com Corrente Alternada



ESTA MENINA COM O FONE DE OUVIDO AJUSTA O MOSTRADOR EM SUA ESTAÇÃO DE RÁDIO FAVORITA. ISSO VARIA A FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA DE UM CIRCUITO ELÉTRICO OSCILATÓRIO DENTRO DO RECEPTOR DE RÁDIO, DE TAL MODO QUE APENAS A ESTAÇÃO QUE ELA SELECCIONA É AMPLIFICADA.

**P** Qual componente do circuito é modificado quando ela gira o botão? Para saber mais sobre o funcionamento de equipamentos de rádio, veja o Exemplo 29-9.

- 29-1 Geradores de Corrente Alternada
- 29-2 Corrente Alternada em um Resistor
- 29-3 Circuitos com Corrente Alternada
- \*29-4 Fasores
- \*29-5 Circuitos LC e RLC sem um Gerador
- \*29-6 Circuitos RLC Excitados
- \*29-7 O Transformador

**M**ais de 99% da energia elétrica usada hoje em dia é produzida por geradores elétricos na forma de corrente alternada, que possui grandes vantagens sobre a corrente contínua, porque a energia elétrica pode ser transportada ao longo de grandes distâncias com tensões muito elevadas e baixas correntes para reduzir as perdas de energia devidas ao efeito Joule. A energia elétrica pode ser transformada, com quase nenhuma perda, para tensões pequenas e seguras e correspondentes altas correntes para o uso diário. O transformador que realiza tais variações na diferença de potencial e na corrente trabalha sobre a base da indução magnética. Na América do Norte, a potência é liberada por uma corrente senoidal com freqüência de 60 Hz. Dispositivos como rádios, aparelhos de televisão e fornos de microondas detectam ou geram correntes alternadas de freqüências muito maiores.

A corrente alternada é produzida por uma fem gerada por movimento ou por indução magnética em um gerador ca, que é projetado para fornecer uma fem senoidal.

> Neste capítulo, será visto que quando a saída do gerador é senoidal a corrente em um indutor, um capacitor ou um resistor é também senoidal, apesar de geralmente não estar em fase com a fem do gerador. Quando a fem e a corrente são ambas senoidais, seus valores máximos estão relacionados. O estudo de correntes senoidais é particularmente importante porque mesmo as correntes que não são senoidais podem ser analisadas em termos de componentes senoidais usando a análise de Fourier.

## 29-1 Geradores de Corrente Alternada

A Figura 29-1 mostra um simples gerador ca que consiste em um enrolamento de área  $A$  e  $N$  voltas girando em um campo magnético uniforme. As extremidades do enrolamento estão conectadas a anéis, chamados de anéis de deslizamento, que giram com o enrolamento. Eles fazem contato elétrico através de escovas estacionárias que estão em contato com os anéis.

Quando a normal ao plano do enrolamento faz um ângulo  $\theta$  com um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , como mostrado na figura, o fluxo magnético através do enrolamento é

$$\phi_m = NBA \cos \theta \quad 29-1$$

onde  $A$  é a área de superfície plana limitada por uma única volta do enrolamento e  $N$  o número de voltas. Quando o enrolamento é mecanicamente girado, o fluxo através do enrolamento irá variar e uma fem será induzida. Se  $\omega$  é a velocidade angular de rotação e o ângulo inicial é  $\delta$ , o ângulo em algum instante de tempo posterior  $t$  é dado por

$$\theta = \omega t + \delta$$

Então

$$\phi_m = NBA \cos(\omega t + \delta) = NBA \cos(2\pi ft + \delta)$$

A fem no enrolamento será então

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \delta) = +NBA\omega \sin(\omega t + \delta) \quad 29-2$$

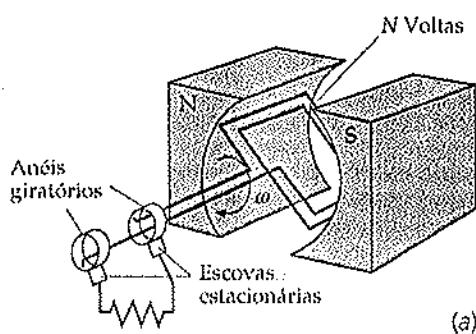
onde  $NBA\omega$  é o pico (máximo) de fem. Assim,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{pico}} \sin(\omega t + \delta) \quad 29-3$$

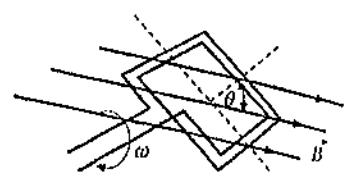
onde a amplitude da fem é dada por

$$\mathcal{E}_{\text{pico}} = NBA\omega \quad 29-4$$

Pode-se então produzir uma fem senoidal no enrolamento pela rotação do enrolamento com velocidade angular constante em um campo magnético. Apesar de os geradores reais serem consideravelmente mais complicados, eles produzem uma fem senoidal tanto via indução quanto via fem gerada por movimento. Nos diagramas de circuitos, um gerador ca é representado pelo símbolo  $\Theta$ .

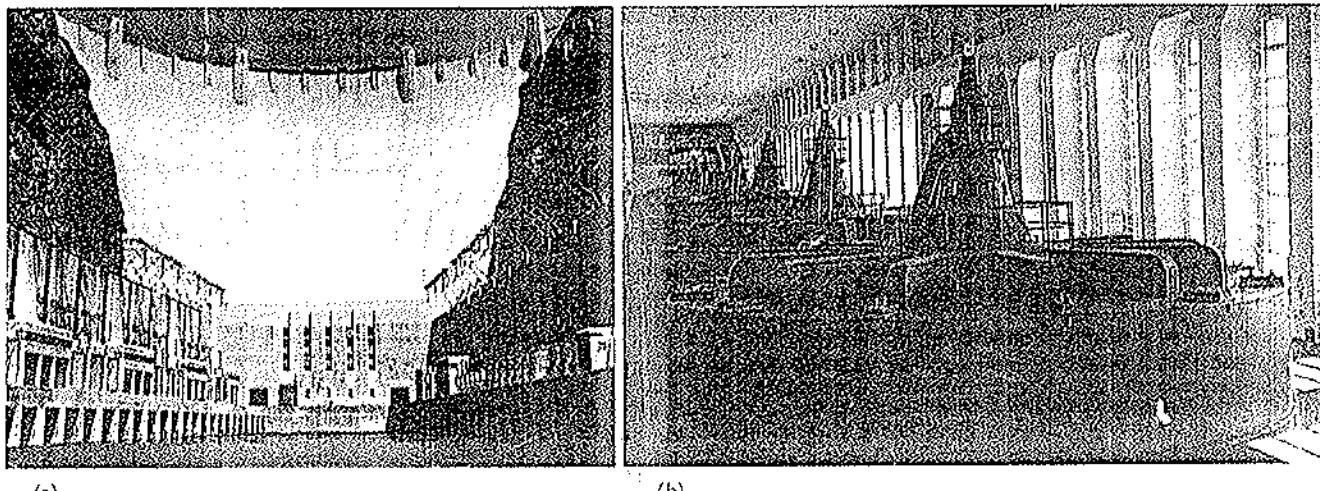


(a)



(b)

**FIGURA 29-1**  
 (a) Um gerador ca. Um enrolamento girante com freqüência angular constante  $\omega$  em um campo magnético estático  $\vec{B}$  gera uma fem senoidal. A energia de uma queda-d'água ou de uma turbina a vapor é usada para girar o enrolamento e produzir a energia elétrica. A fem é fornecida para um circuito externo pelas escovas que estão em contato com os anéis. (b) Nesse instante, o plano normal ao enrolamento faz um ângulo  $\theta$  com o campo magnético, e o fluxo através da superfície plana limitada pelo enrolamento é  $BA \cos \theta$ .



(a)

(b)

O mesmo enrolamento em um campo magnético estático que pode ser usado para gerar uma fem alternada pode também ser usado como um motor ca. Em vez de girar mecanicamente o enrolamento para gerar uma fem, aplica-se ao enrolamento uma diferença de potencial ca gerada por outro gerador ca. Isso produz uma corrente ca no enrolamento, e o campo magnético exerce forças sobre os fios produzindo um torque que gira o enrolamento. Conforme o enrolamento gira no campo magnético, uma contra-fem é gerada e tende a se opor à diferença de potencial aplicada que produz a corrente. Quando o motor é inicialmente ligado não existe contra-fem e a corrente é muito alta, sendo limitada apenas pela resistência do circuito. Conforme o motor começa a girar, a contra-fem aumenta e a corrente diminui.

**EXERCÍCIO** Um enrolamento de 250 voltas tem uma área de  $3 \text{ cm}^2$ . Se ele gira em um campo magnético de 0,4 T em 60 Hz, qual é  $\mathcal{E}_{\text{pico}}$ ? (Resposta  $\mathcal{E}_{\text{pico}} = 11,3 \text{ V}$ )

## 29-2 Corrente Alternada em um Resistor

A Figura 29-2 mostra um circuito ca simples que consiste em um gerador ideal e um resistor. (Um gerador é ideal se sua resistência interna, sua auto-indutância e sua capacidade são desprezíveis.) A queda de tensão através do resistor  $V_R$  é igual à fem  $\mathcal{E}$  do gerador. Se o gerador produz uma fem dada pela Equação 29-3, tem-se

$$V_R = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{pico}} \sin(\omega t + \delta) = V_{R,\text{pico}} \sin(\omega t + \delta)$$

onde  $V_{R,\text{pico}} = \mathcal{E}_{\text{pico}}$ . Nesta equação, a constante de fase  $\delta$  é arbitrária. É conveniente escolher  $\delta = \pi/2$  de tal modo que

$$V_R = V_{R,\text{pico}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{R,\text{pico}} \cos \omega t$$

Aplicando a lei de Ohm, tem-se

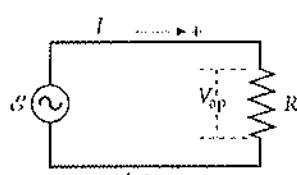
$$V_R = IR$$

29-5

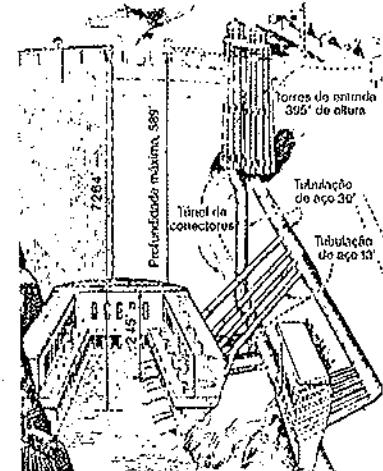
Assim,

$$V_{R,\text{pico}} \cos \omega t = IR$$

29-6



**FIGURA 29-2**  
Um gerador ca em série com um resistor  $R$ .



(c)

(a) A energia mecânica de quedas-d'água move a turbina (b) para a geração de eletricidade. (c) Desenho esquemático de uma usina hidrelétrica mostrando as torres de alimentação e as tubulações que transportam a água até os geradores.

então a corrente no resistor é

$$I = \frac{V_{R,\text{pico}}}{R} \cos \omega t = I_{\text{pico}} \cos \omega t \quad 29-7$$

onde

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_{R,\text{pico}}}{R} \quad 29-8$$

Note que a corrente através do resistor está em fase com a queda de potencial através do resistor, como mostrado na Figura 29-3.

A potência dissipada no resistor varia com o tempo. Seu valor instantâneo é

$$P = I^2 R = (I_{\text{pico}} \cos \omega t)^2 R = I_{\text{pico}}^2 R \cos^2 \omega t \quad 29-9$$

A Figura 29-4 mostra a potência como uma função do tempo. A potência varia a partir do zero até seu valor de pico  $I_{\text{pico}}^2 R$ , como mostrado. Normalmente se está interessado na potência média sobre um ou mais ciclos completos:

$$P_{\text{méd}} = (I^2 R)_{\text{méd}} = I_{\text{pico}}^2 R (\cos^2 \omega t)_{\text{méd}}$$

O valor médio de  $\cos^2 \omega t$  sobre um ou mais períodos é  $1/2$ . Isso pode ser visto a partir da identidade  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ . Um gráfico de  $\sin^2 \omega t$  parece igual ao gráfico de  $\cos^2 \omega t$ , exceto pelo fato de que há um deslocamento de  $90^\circ$  entre eles. Ambos possuem o mesmo valor médio sobre um ou mais períodos, e uma vez que sua soma é 1, o valor médio de cada um deve ser  $1/2$ . A potência dissipada no resistor é, assim,

$$P_{\text{méd}} = (I^2 R)_{\text{méd}} = \frac{1}{2} I_{\text{pico}}^2 R \quad 29-10$$

### Valor RMS (Root Mean Square)

A maioria dos amperímetros e dos voltímetros ca é projetada para medir valores eficazes da corrente e da diferença de potencial, em vez dos valores de pico. O valor rms de uma corrente  $I_{\text{rms}}$  é definido por

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(I^2)_{\text{med}}} \quad 29-11$$

DEFINIÇÃO → CORRENTE RMS

Para uma corrente senoidal, o valor médio de  $I^2$  é

$$(I^2)_{\text{med}} = [(I_{\text{pico}} \cos \omega t)^2]_{\text{med}} = \frac{1}{2} I_{\text{pico}}^2$$

Substituindo  $(I^2)_{\text{med}}$  por  $1/2 I_{\text{pico}}^2$  na Equação 29-11, obtém-se

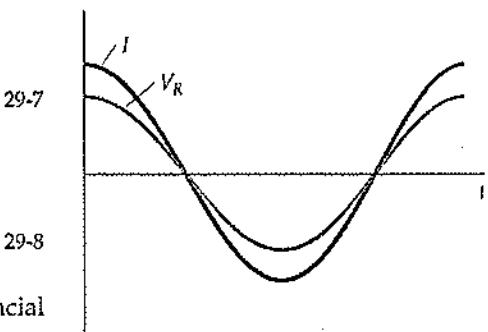
$$I_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{pico}} \approx 0,707 I_{\text{pico}} \quad 29-12$$

### VALOR RMS RELACIONADO AO VALOR DE PICO

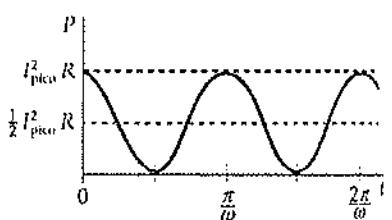
O valor rms de qualquer grandeza que varia senoidalmente é igual ao valor de pico daquela grandeza dividido por  $\sqrt{2}$ .

Substituindo  $1/2 I_{\text{pico}}^2$  por  $I_{\text{rms}}^2$  na Equação 29-10, obtém-se para a potência média dissipada no resistor

$$P_{\text{med}} = I_{\text{rms}}^2 R \quad 29-13$$



**FIGURA 29-3**  
A queda de tensão entre os terminais de um resistor em fase com a corrente.



**FIGURA 29-4**  
Gráfico da potência dissipada no resistor mostrado na Figura 29-2 versus o tempo. A potência varia de zero até um valor de pico  $I_{\text{pico}}^2 R$ . A potência média é metade da potência de pico.

A corrente rms é igual à corrente permanente cc que produziria o mesmo efeito Joule da corrente ca real.

Para o circuito simples na Figura 29-2, a potência média liberada pelo gerador é:

$$P_{\text{méd}} = (\mathcal{E}I)_{\text{média}} = [(\mathcal{E}_{\text{pico}} \cos \omega t)(I_{\text{pico}} \cos \omega t)]_{\text{média}} = \mathcal{E}_{\text{pico}} I_{\text{pico}} (\cos^2 \omega t)_{\text{média}}$$

ou

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\text{pico}} I_{\text{pico}}$$

Usando  $I_{\text{rms}} = I_{\text{pico}}/\sqrt{2}$  e  $\mathcal{E}_{\text{rms}} = \mathcal{E}_{\text{pico}}/\sqrt{2}$ , isto pode ser escrito

$$P_{\text{méd}} = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad 29-14$$

#### POTÊNCIA MÉDIA LIBERADA POR UM GERADOR

A corrente rms está relacionada à queda de potencial rms da mesma maneira que o pico de corrente está relacionado ao pico de queda de potencial. Pode-se ver isso dividindo cada lado da Equação 29-8 por  $\sqrt{2}$  e usando  $I_{\text{rms}} = I_{\text{pico}}/\sqrt{2}$  e  $V_{R,\text{rms}} = V_{R,\text{pico}}/\sqrt{2}$ .

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{R,\text{rms}}}{R} \quad 29-15$$

As Equações 29-13, 29-14 e 29-15 têm a mesma forma que as correspondentes equações para os circuitos de corrente contínua, com  $I$  substituído por  $I_{\text{rms}}$  e  $V_R$  substituído por  $V_{R,\text{rms}}$ . Pode-se então calcular a potência de entrada e o calor gerado usando as mesmas equações empregadas para a corrente contínua, se forem adotados os valores rms para a corrente e a queda de potencial.

**EXERCÍCIO** A queda de potencial senoidal através de um resistor de  $12 \Omega$  possui um valor de pico de 48 V. Encontre (a) a corrente rms, (b) a potência média e (c) a potência máxima. (Resposta (a) 2,83 A, (b) 96 W, (c) 192 W)

A potência ca fornecida para as tomadas de parede e bocais de iluminação domésticos nos Estados Unidos tem uma diferença de potencial de 120 V a uma freqüência de 60 Hz. Essa diferença de potencial é mantida, independentemente da corrente. Se for conectado um secador de cabelo de 1600 W em uma tomada de parede ele irá consumir uma corrente de

$$I_{\text{rms}} = \frac{P_{\text{med}}}{V_{\text{rms}}} = \frac{1600 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 13,3 \text{ A}$$

Todos os aparelhos ligados nas tomadas de um único circuito 120 V estão conectados em paralelo. Se uma torradeira de 500 W for ligada em uma outra tomada do mesmo circuito, ela irá consumir uma corrente de  $500 \text{ W}/120 \text{ V} = 4,17 \text{ A}$ , e a corrente total através da combinação paralela será de 17,5 A. As tomadas residenciais de parede típicas são feitas para suportar 15 A e fazem parte de um circuito que usa fios para suportar entre 15 A e 20 A, com cada circuito tendo várias tomadas. Por sua vez, o fio em cada circuito é feito para suportar de 15 A a 20 A. Uma corrente total maior que aquela para as quais os fios são feitos pode levar ao seu superaquecimento, com perigo de incêndio. Cada circuito é, portanto, equipado com um disjuntor (ou com um fusível, em residências antigas) que desarmam (ou queimam) quando a corrente total excede os 15 A ou 20 A.

Aparelhos domésticos de alta potência, tais como secadoras elétricas de roupas ou aquecedores de água, tipicamente exigem potência liberada a 240 V rms. Para uma dada necessidade de potência, apenas metade da corrente é requerida em 240 V em relação àquela em 120 V, entretanto 240 V são mais perigosos que 120 V, pois podem provocar um choque fatal ou iniciar um incêndio mais facilmente que 120 V.

Encontre (a) a corrente média e (b) a corrente rms para a forma de onda em dente de serra mostrada na Figura 29-5. Na região  $0 < t < T$ , a corrente é dada por  $I = (I_0/T)t$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A média de qualquer grandeza sobre um intervalo de tempo  $T$  é a integral da grandeza ao longo do intervalo dividida por  $T$ . Usa-se esse resultado para encontrar tanto a corrente média  $I_{\text{med}}$  quanto a média da corrente ao quadrado,  $(I^2)_{\text{med}}$ .

$$(a) \text{ Calcule } I_{\text{med}} \text{ pela integração de } I \text{ desde } t = 0 \text{ até } t = T \text{ e } I_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0}{T} t dt = \frac{I_0}{T^2} \frac{T^2}{2} = \frac{1}{2} I_0$$

$$(b) 1. \text{ Encontre } (I^2)_{\text{med}} \text{ pela integração de } I^2:$$

$$(I^2)_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt = \frac{1}{T} \left( \frac{I_0}{T} t \right)^2 \int_0^T dt = \frac{I_0^2}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{1}{3} I_0^2$$

$$2. \text{ A corrente rms é a raiz quadrada de } (I^2)_{\text{med}}:$$

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(I^2)_{\text{med}}} = \boxed{\frac{I_0}{\sqrt{3}}}$$

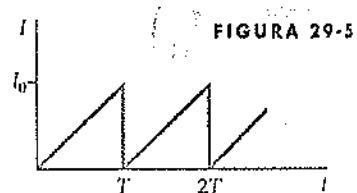


FIGURA 29-5

## 29-3 Circuitos com Corrente Alternada

Correntes alternadas se comportam diferentemente das correntes contínuas em indutores e capacitores. Quando um capacitor se torna completamente carregado em um circuito cc, o capacitor bloqueia a corrente; isto é, o capacitor atua como um circuito aberto. Entretanto, se a corrente é alternada a carga flui continuamente para as placas ou das placas do capacitor. Será visto que em altas freqüências um capacitor dificilmente impede a corrente. Isto é, o capacitor atua como um curto-circuito. Inversamente, um enrolamento de indução em geral possui uma pequena resistência e é essencialmente um curto-circuito para a corrente contínua; entretanto, quando a corrente está variando é gerada uma contra-fem em um indutor que é proporcional à  $dI/dt$ . Em altas freqüências, a contra-fem é elevada e o indutor atua como um circuito aberto.

### Indutores em Circuitos com Corrente Alternada

A Figura 29-6 mostra um indutor em série com um gerador ca. Quando a corrente varia no indutor uma contra-fem de módulo  $LdI/dt$  é gerada devido ao fluxo variante. Usualmente essa contra-fem é muito maior que a queda  $IR$  devido à resistência do indutor, o que permite desprezar a resistência do enrolamento. A queda de potencial através do indutor  $V_L$  é então dada por

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

29-16

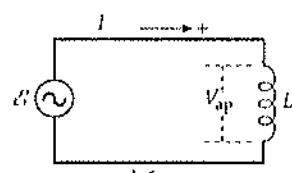


FIGURA 29-6

Um gerador ca em série com um indutor  $L$ . A seta indica a direção positiva ao longo do fio. Note que para um valor positivo de  $dI/dt$  a queda de tensão  $V_L$  através do indutor é positiva. Isto é, se o indutor for atravessado por algum objeto no sentido da seta ele está indo no sentido da diminuição de potencial.

Neste circuito, a queda de potencial  $V_L$  através do indutor é igual à fem  $\mathcal{E}$  do gerador. Isto é,

$$V_L = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t = V_{L,\text{pico}} \cos \omega t$$

onde  $V_{L,\text{pico}} = \mathcal{E}_{\text{pico}}$ . Substituindo  $V_L$  na Equação 29-16, tem-se

$$V_{L,\text{pico}} \cos \omega t = L \frac{dI}{dt} \quad 29-17$$

Rearrumando, obtém-se

$$dI = \frac{V_{L,\text{pico}}}{L} \cos \omega t dt \quad 29-18$$

Resolvendo para a corrente  $I$  pela integração de ambos os lados da equação:

$$I = \frac{V_{L,\text{pico}}}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{V_{L,\text{pico}}}{\omega L} \sin \omega t + C \quad 29-19$$

onde a constante de integração  $C$  é a componente cc da corrente. Ajustando a componente cc da corrente como sendo zero, tem-se

$$I = \frac{V_{L,\text{pico}}}{\omega L} \sin \omega t = I_{\text{pico}} \sin \omega t \quad 29-20$$

onde

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_{L,\text{pico}}}{\omega L} \quad 29-21$$

A queda de potencial  $V_L = V_{L,\text{pico}} \cos \omega t$  através do indutor está  $90^\circ$  fora de fase com a corrente  $I = I_{\text{pico}} \sin \omega t$ . A partir da Figura 29-7, que mostra  $I$  e  $V_L$  como função do tempo, pode-se ver que o valor de pico da queda de potencial ocorre  $90^\circ$  ou um quarto de período antes do correspondente valor de pico da corrente. A queda de potencial através de um indutor é dita como *avançada* (*em avanço*) em relação à corrente de  $90^\circ$ . Pode-se entender isso fisicamente. Quando  $I$  é nula mas aumentando,  $dI/dt$  é máxima, então a contra-fem induzida no indutor está em seu máximo. Um quarto de ciclo depois  $I$  é máxima. Nesse instante de tempo  $dI/dt$  é zero, então  $V_L$  é zero. Usando a identidade trigonométrica  $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ , onde  $\theta = \omega t$ , a Equação 29-20 para a corrente pode ser escrita

$$I = I_{\text{pico}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad 29-22$$

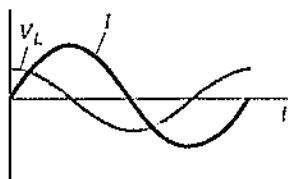
A relação entre o pico de corrente e o pico de queda de potencial (ou entre a corrente rms e a queda de potencial rms) para um indutor pode ser escrita na forma similar à da Equação 29-15 para um resistor. A partir da Equação 29-21, tem-se

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_{L,\text{pico}}}{\omega L} = \frac{V_{L,\text{pico}}}{X_L} \quad 29-23$$

onde

$$X_L = \omega L \quad 29-24$$

#### DEFINIÇÃO — REATÂNCIA INDUTIVA



**FIGURA 29-7**  
Corrente e queda de potencial através do indutor mostrado na Figura 29-6 como função do tempo. A queda máxima de potencial ocorre em um quarto do período antes da corrente máxima. Assim, diz-se que a queda de potencial está em avanço (ou avançada) em relação à corrente de um quarto de período ou de  $90^\circ$ .

é chamada de **reatância indutiva**. Uma vez que  $I_{\text{rms}} = I_{\text{pico}} / \sqrt{2}$  e  $V_{L,\text{rms}} = V_{L,\text{pico}} / \sqrt{2}$  a corrente rms é dada por

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{L,\text{rms}}}{X_L} \quad 29-25$$

Como a resistência, a reatância indutiva possui unidades de ohms. Como se pode ver da Equação 29-25, quanto maior a reatância para uma dada queda de potencial menor o pico de corrente. Diferentemente da resistência, a reatância indutiva depende da freqüência da corrente — quanto maior a freqüência, maior a reatância.

A potência *instantânea* liberada pelo gerador para o indutor é

$$P = V_L I = (V_{L,\text{pico}} \cos \omega t)(I_{\text{pico}} \sin \omega t) = V_{L,\text{pico}} I_{\text{pico}} \cos \omega t \sin \omega t$$

A potência *média* liberada pelo gerador para o indutor é zero. Pode-se ver isso usando a identidade trigonométrica

$$2 \cos \omega t \sin \omega t = \sin 2\omega t$$

O valor de  $\sin 2\omega t$  oscila duas vezes durante cada ciclo e é tanto negativo quanto positivo. Assim, na média não há energia dissipada em um indutor. (Este é o caso somente se a resistência no indutor é desprezível.)

**EXEMPLO 29-1** A queda de potencial através de um indutor de  $40 \text{ mH}$  é senoidal, com um pico de queda de potencial de  $120 \text{ V}$ . Encontre a reatância indutiva e o pico de corrente quando a freqüência é (a)  $60 \text{ Hz}$  e (b)  $2000 \text{ Hz}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Calcula-se a reatância indutiva em cada freqüência e usa-se a Equação 29-23 para encontrar o pico de corrente.

- (a) 1. O pico de corrente é igual ao pico de queda de potencial dividido pela reatância indutiva. O pico de queda de potencial é igual à fém:

2. Calcule a reatância indutiva em  $60 \text{ Hz}$ :

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_{L,\text{pico}}}{X_L}$$

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) \\ = 15,1 \Omega$$

3. Use esse valor de  $X_L$  para calcular o pico de corrente em  $60 \text{ Hz}$ :  $I_{1,\text{pico}} = \frac{120 \text{ V}}{15,1 \Omega} = 7,95 \text{ A}$

- (b) 1. Calcule a reatância indutiva em  $2000 \text{ Hz}$ :

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L$$

$$= (2\pi)(2000 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) = 503 \Omega$$

2. Use esse valor de  $X_L$  para calcular o pico de corrente em  $2000 \text{ Hz}$ :  $I_{2,\text{pico}} = \frac{120 \text{ V}}{503 \Omega} = 0,239 \text{ A}$

### Capacitores em Circuitos com Corrente Alternada

Quando um capacitor é conectado entre os terminais de um gerador ca (Figura 29-8), a queda de tensão através do capacitor é

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

onde  $Q$  é a carga na placa superior do capacitor.

Nesse circuito, a queda de potencial  $V_C$  através do capacitor é igual à fém  $\mathcal{E}$  do gerador. Isto é,

$$V_C = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{pico}} \cos \omega t = V_{C,\text{pico}} \cos \omega t$$

onde  $V_{C,\text{pico}} = \mathcal{E}_{\text{pico}}$ . Substituindo  $V_C$  na Equação 29-26 e resolvendo para  $Q$ , tem-se

$$Q = V_C C = V_{C,\text{pico}} C \cos \omega t$$

A corrente é

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega V_{C,\text{pico}} C \sin \omega t = -I_{\text{pico}} \sin \omega t$$

onde

$$I_{\text{pico}} = \omega V_{C,\text{pico}} C \quad 29-27$$

Usando a identidade trigonométrica  $\sin \theta = -\cos(\theta + \pi/2)$ , onde  $\theta = \omega t$ , obtém-se

$$I = -\omega C V_{C,\text{pico}} \sin \omega t = I_{\text{pico}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad 29-28$$

Assim como para o indutor, a queda de tensão  $V_C = V_{C,\text{pico}} \cos \omega t$  através do capacitor está fora de fase com a corrente

$$I = I_{\text{pico}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

no circuito. A partir da Figura 29-9, nota-se que o valor máximo da queda de potencial ocorre  $90^\circ$  ou um quarto de período *após* o valor máximo da corrente. Assim, a queda de potencial através de um capacitor está atrasada (ou em atraso) em relação à corrente de  $90^\circ$ . De novo, pode-se entender isso fisicamente. A carga  $Q$  é proporcional à queda de potencial  $V_C$ . O valor máximo de  $dQ/dt = I$  ocorre quando a carga  $Q$  é zero e, portanto,  $V_C$  é zero. Conforme a carga nas placas do capacitor aumenta, a corrente diminui até, um quarto de período depois, a carga  $Q$  e, portanto,  $V_C$ , estar em um máximo, e a corrente é zero. A corrente então se torna negativa conforme a carga  $Q$  diminui.

Novamente, pode-se relacionar a corrente à queda de potencial em uma forma similar à da Equação 29-8 para um resistor. A partir da Equação 29-27, tem-se

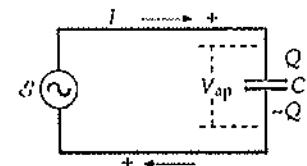
$$I_{\text{pico}} = \omega C V_{C,\text{pico}} = \frac{V_{C,\text{pico}}}{1/(\omega C)} = \frac{V_{C,\text{pico}}}{X_C}$$

e, do mesmo modo,

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{C,\text{rms}}}{X_C} \quad 29-29$$

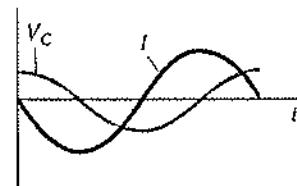
onde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad 29-30$$



**FIGURA 29-8**

Um gerador ca em série com um capacitor  $C$ . O sentido positivo ao longo do circuito é tal que quando a corrente é positiva a carga  $Q$  sobre a placa superior está aumentando, então a corrente está relacionada com a carga por  $I = +dQ/dt$ .



**FIGURA 29-9**

Corrente e queda de potencial através de um capacitor mostrado na Figura 29-8 versus o tempo. A queda máxima de potencial ocorre um quarto de período depois da corrente máxima. Assim, a queda de potencial é dita em atraso (ou atrasada) em relação à corrente de  $90^\circ$ .

#### DEFINIÇÃO — REATÂNCIA CAPACITIVA

é chamada de reatância capacitiva do circuito. Como a resistência e a reatância indutiva, a reatância capacitiva possui unidades ohms e, como a reatância indutiva, a reatância capacitiva depende da freqüência da corrente. Nesse caso, quanto maior a freqüência menor a reatância. A potência média liberada por um gerador ca para um capacitor é zero, assim como para um indutor. Isso ocorre porque a queda de potencial é proporcional a  $\cos \omega t$  e a corrente é proporcional a  $\sin \omega t$  e  $(\cos \omega t \sin \omega t)_{\text{med}} = 0$ . Assim, como nos indutores sem resistência, capacitores não dissipam energia.

Uma vez que a carga não pode passar através do espaço entre as placas de um capacitor, pode parecer estranho que exista uma corrente continuamente alternada no circuito mostrado na Figura 29-8. Suponha que seja escolhido o tempo como sendo zero no instante em que a queda de tensão  $V_C$  através do capacitor seja zero, mas aumentando. (Nesse mesmo instante, a carga  $Q$  na placa superior do capacitor é também zero e está aumentando.) Conforme  $V_C$  aumenta, carga positiva flui da placa inferior para a placa superior, e  $Q$  atinge seu máximo valor  $Q_{\text{pico}}$  um quarto de período depois. Após  $Q$  atingir seu valor máximo  $Q$  continua variando, atingindo zero no ponto de meio período,  $-Q_{\text{pico}}$  em três quartos do período, e zero (novamente) quando completa o ciclo em um período. A carga  $Q_{\text{pico}}$  flui através do gerador a cada quarto de período. Se a freqüência for dobrada, divide-se o período por dois. Assim, se a freqüência for dobrada divide-se por dois o tempo para a carga  $Q_{\text{pico}}$  fluir através do gerador, então dobra-se a amplitude da corrente  $I_{\text{pico}}$ . Desse modo, quanto maior a freqüência menos o capacitor tem capacidade de impedir o fluxo de carga.

**EXEMPLO 29-3**

Um capacitor de  $20 \mu\text{F}$  é conectado a um gerador ca que aplica uma queda de potencial com uma amplitude (valor de pico) de  $100 \text{ V}$ . Encontre a reatância capacitiva e a amplitude da corrente quando a freqüência é de  $60 \text{ Hz}$  e a freqüência é de  $6000 \text{ Hz}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A reatância capacitiva é  $X_C = 1/(\omega C)$  e o pico de corrente é  $I_{\text{pico}} = V_{C,\text{pico}}/X_C$ .

- Calcule a reatância capacitiva em  $60 \text{ Hz}$  e em  $6000 \text{ Hz}$ :

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = \frac{1}{2\pi(60 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})} = 133 \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C} = \frac{1}{2\pi(6000 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})} = 1,33 \Omega$$

- Use esses valores de  $X_C$  para encontrar os picos de corrente:

$$I_{1,\text{pico}} = \frac{V_{C,\text{pico}}}{X_{C1}} = \frac{100 \text{ V}}{133 \Omega} = 0,752 \text{ A}$$

$$I_{2,\text{pico}} = \frac{V_{C,\text{pico}}}{X_{C2}} = \frac{100 \text{ V}}{1,33 \Omega} = 75,2 \text{ A}$$

**NOTAS** Note que a reatância capacitiva é inversamente proporcional à freqüência, então aumentando a freqüência por duas ordens de grandeza a reatância diminui de duas ordens de grandeza. A corrente é diretamente proporcional à freqüência, como esperado.

## 29-4 Fasores

Até este ponto, os circuitos considerados contêm um gerador ca ideal e apenas um único elemento passivo (i. e., um resistor, indutor ou capacitor). Nesses circuitos, a queda de potencial através dos elementos passivos iguala-se à fém do gerador. Nos circuitos que contêm um gerador ca ideal e dois ou mais elementos adicionais conectados em série, a soma das quedas de potencial através dos elementos é igual à fém do gerador, que é o mesmo que ocorre como os circuitos cc. Entretanto, em circuitos ca essas quedas de potencial tipicamente não estão em fase, então a soma de seus valores rms não é igual ao valor rms da fém do gerador.

Vetores bidimensionais, que são chamados de fasores, podem representar as relações de fase entre a corrente e as quedas de potencial através de resistores, capacitores ou indutores. Na Figura 29-10, a queda de potencial através de um resistor  $V_R$  é representada por um vetor  $\vec{V}_R$  que possui módulo  $I_{\text{pico}}R$  e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ . Essa queda de potencial está em fase com a corrente. Em geral, a corrente em um circuito ca em regime permanente varia com o tempo, segundo

$$I = I_{\text{pico}} \cos \theta = I_{\text{pico}} \cos(\omega t - \delta) \quad 29-31$$

onde  $\omega$  é a freqüência angular e  $\delta$  alguma constante de fase. A queda de potencial através do resistor é então dada por

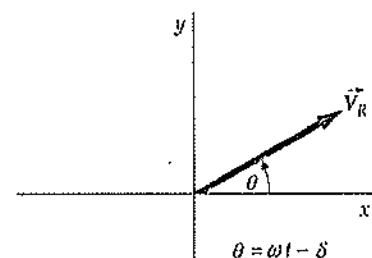
$$V_R = IR = I_{\text{pico}}R \cos(\omega t - \delta) \quad 29-32$$

A queda de potencial através de um resistor é, assim, igual à componente  $x$  do vetor fator  $\vec{V}_R$ , que gira no sentido anti-horário com freqüência angular  $\omega$ . A corrente  $I$  pode ser escrita com a componente  $x$  de um fator  $\vec{I}$  tendo o mesmo sentido de  $\vec{V}_R$ .

Quando vários componentes estão conectados juntos em uma combinação em série, suas quedas de potencial se adicionam. Quando vários componentes estão conectados em paralelo, suas correntes se adicionam. Infelizmente, adicionar senos ou co-senos de diferentes amplitudes e fases algebricamente é muito trabalhoso. É muito mais fácil fazer isso através da adição vetorial.<sup>†</sup>

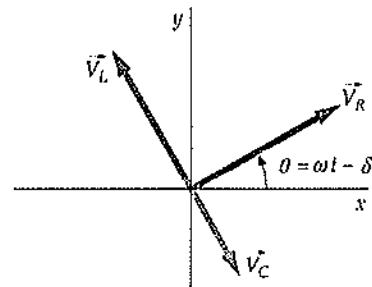
Mostra-se agora como os fasores são usados. Qualquer corrente ou queda de potencial ca é escrita na forma  $A \cos(\omega t - \delta)$ , que será tratado como  $A_x$ , a componente  $x$  de um fator que faz um ângulo  $(\omega t - \delta)$  com a direção positiva  $x$ . Em vez de adicionar duas quedas de potencial ou correntes algebricamente, como  $A \cos(\omega t - \delta_1) + B \cos(\omega t - \delta_2)$ , representa-se essas grandezas como fasores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  encontra-se a soma fatorial  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  geometricamente. A queda de potencial ou corrente resultante é então a componente  $x$  do fator resultante,  $C_x = A_x + B_x$ . A representação geométrica convenientemente mostra as amplitudes e as fases dos fasores.

Considere um circuito que contém um indutor  $L$ , um capacitor  $C$  e um resistor  $R$  conectados em série. Todos eles transportam a mesma corrente, que é representada como a componente  $x$  de um fator corrente  $\vec{I}$ . A queda de potencial através do indutor  $V_L$  é representada por um fator  $\vec{V}_L$  que possui módulo  $I_{\text{pico}}X_L$  e está avançado em relação ao fator corrente  $\vec{I}$  de  $90^\circ$ . Similarmente, a queda de potencial através do capacitor  $V_C$  é representada por um fator  $\vec{V}_C$  que possui módulo  $I_{\text{pico}}X_C$  e está atrasada em relação à corrente de  $90^\circ$ . A Figura 29-11 mostra os fasores  $\vec{V}_R$ ,  $\vec{V}_L$ , e  $\vec{V}_C$ . Conforme o tempo passa, os três fasores giram no sentido anti-horário com uma freqüência angular  $\omega$ , de tal modo que



**FIGURA 29-10**

A queda de potencial através de um resistor pode ser representada por um vetor  $\vec{V}_R$ , que é chamado de fator, que possui um módulo  $I_{\text{pico}}R$  e faz um ângulo  $\theta = \omega t - \delta$  com o eixo  $x$ . O fator gira com uma freqüência angular  $\omega$ . A queda de potencial  $V_R = IR$  é a componente  $x$  de  $\vec{V}_R$ .



**FIGURA 29-11**

Representações das quedas de potencial  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ . Cada vetor gira no sentido anti-horário com uma freqüência angular  $\omega$ . A cada instante de tempo, a queda de potencial através de um elemento é igual à componente  $x$  do fator correspondente, e a queda de potencial através da combinação RLC série, que é igual à soma das quedas de potencial, é igual à componente  $x$  da soma vetorial  $V_R + V_L + V_C$ .

<sup>†</sup>Também é fácil realizar essa soma usando números complexos.

a posição relativa entre os vetores não varia. Em qualquer instante de tempo, o valor instantâneo da queda de potencial através de qualquer desses elementos é igual à componente  $x$  do correspondente fasor.

### \*29-5 Circuitos LC e RLC sem um Gerador

A Figura 29-12 mostra um circuito simples com uma indutância e uma capacidade, mas sem resistência. Tal circuito é chamado de circuito *LC*. Admite-se que a placa superior do capacitor transporta uma carga positiva inicial  $Q_0$  e que a chave está inicialmente aberta.

Após a chave ser fechada em  $t = 0$ , a carga começa a fluir através do indutor. Seja  $Q$  a carga na placa superior do capacitor e seja o sentido anti-horário considerado como positivo em torno do circuito, como mostrado. Então,

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff ao circuito, tem-se

$$-L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 29-33$$

Substituindo  $I$  por  $-dQ/dt$  e multiplicando ambos os lados por  $-1$ , obtém-se

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 29-34$$

Essa equação tem a mesma forma da Equação 14-2 para a aceleração de uma massa como uma mola:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

O comportamento de um circuito *LC* é, assim, análogo ao de uma massa com uma mola, com  $L$  análogo à massa  $m$ ,  $Q$  análogo à posição  $x$  e  $1/C$  análogo à constante de mola  $k$ . Também a corrente  $I$  é análoga à velocidade  $v$ , uma vez que  $v = dx/dt$  e  $I = dQ/dt$ . Em mecânica, a massa de um objeto descreve a inércia do objeto. Quanto maior a massa, mais difícil é variar a velocidade do objeto. Do mesmo modo, a indutância  $L$  pode ser tratada como a inércia de um circuito ca. Quanto maior a indutância, mais oposição existe à variação na corrente  $I$ .

Se cada termo na Equação 29-34 for dividido por  $L$  e se rearranjar, obtém-se

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \quad 29-35$$

que é análogo à

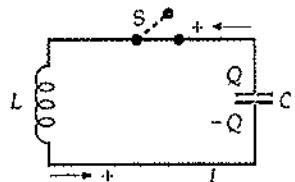
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad 29-36$$

No Capítulo 14, Volume 1, encontrou-se que a solução da Equação 29-36 poderia ser descrita pelo movimento harmônico simples na forma

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

onde  $\omega = \sqrt{k/m}$  é a freqüência angular,  $A$  é a amplitude do deslocamento e  $\delta$  é a constante de fase, que depende das condições iniciais. A solução da Equação 29-35 é, então,

$$Q = A \cos(\omega t - \delta)$$



**FIGURA 29-12**

Um circuito *LC*. Quando a chave é fechada, o capacitor inicialmente carregado descarrega através do indutor, produzindo uma contra-fem.

com

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

29-37

A corrente  $I$  é encontrada por diferenciação

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

Se forem escolhidas as condições iniciais  $Q = Q_{\text{pico}}$  e  $I = 0$  em  $t = 0$ , o ângulo de fase  $\delta$  é zero e  $A = Q_{\text{pico}}$ . A solução é, então,

$$Q = Q_{\text{pico}} \cos \omega t$$

29-38

e

$$I = -\omega Q_{\text{pico}} \sin \omega t = -I_{\text{pico}} \sin \omega t$$

29-39

onde  $I_{\text{pico}} = \omega Q_{\text{pico}}$ .

A Figura 29-13 mostra gráficos de  $Q$  e  $I$  versus o tempo. A carga oscila entre os valores  $+Q_{\text{pico}}$  e  $-Q_{\text{pico}}$  com freqüência angular  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . As correntes oscilam entre  $+\omega Q_{\text{pico}}$  e  $-\omega Q_{\text{pico}}$  com a mesma freqüência. Também, a corrente está avançada em relação à carga de  $90^\circ$  (veja o Problema 29-37). A corrente é máxima quando a carga é zero, e a corrente é zero quando a carga é máxima.

No estudo sobre as oscilações de uma massa com uma mola encontrou-se que a energia total era constante e que a energia total oscila entre a energia potencial e a energia cinética. Também existem dois tipos de energia no circuito  $LC$ , energia elétrica e energia magnética. A energia elétrica armazenada no capacitor é

$$U_e = \frac{1}{2} Q V_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Substituindo  $Q$  por  $Q_{\text{pico}} \cos \omega t$ , tem-se, para a energia elétrica,

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{pico}}^2}{C} \cos^2 \omega t$$

29-40

A energia elétrica oscila entre seu máximo valor  $Q_0^2/(2C)$  e zero em uma freqüência angular de  $2\omega$  (veja o Problema 29-37). A energia magnética armazenada no indutor é

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

29-41

Substituindo  $I = -\omega Q_{\text{pico}} \sin \omega t$  (Equação 29-39), tem-se

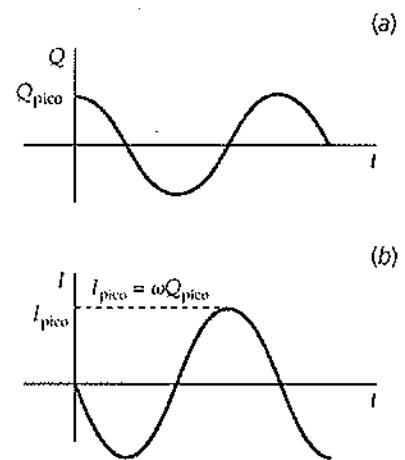
$$U_m = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_{\text{pico}}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{pico}}^2}{C} \sin^2 \omega t$$

29-42

onde foi usado  $\omega^2 = 1/LC$ . A energia magnética também oscila entre seu valor máximo de  $Q_{\text{pico}}^2/(2C)$  e zero em uma freqüência angular de  $2\omega$ . A soma da energia eletrostática e da energia magnética é a energia total, que é constante no tempo:

$$U_{\text{total}} = U_e + U_m = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{pico}}^2}{C} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{pico}}^2}{C} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{pico}}^2}{C}$$

Essa soma é igual à energia inicialmente armazenada no capacitor.



**FIGURA 29-13**  
Gráficos de (a)  $Q$  versus  $t$  e (b)  $I$  versus  $t$  para o circuito  $LC$  mostrado na Figura 29-12.

Um capacitor de  $2 \mu\text{F}$  é carregado até  $20 \text{ V}$ , e o capacitor é então conectado com um indutor de  $6 \mu\text{H}$ . (a) Qual é a freqüência de oscilação? (b) Qual é o valor de pico da corrente?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Em (b), a corrente é máxima quando  $dQ/dt$  é máxima, então a amplitude da corrente é  $\omega Q_{\text{pico}}$ ,  $Q = Q_{\text{pico}}$  quando  $V = V_{\text{pico}}$ , onde  $V$  é a tensão através do capacitor.

(a) A freqüência de oscilação depende apenas dos valores da capacidade e da indutância:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-6} \text{ H})(2 \times 10^{-6} \text{ F})}} \\ = 4,59 \times 10^4 \text{ Hz}$$

(b) 1. O valor de pico da corrente está relacionado com o valor de pico da carga:

2. O pico de carga sobre o capacitor está relacionado ao pico de queda de potencial através do capacitor:

3. Substitua  $Q_{\text{pico}}$  por  $CV_{\text{pico}}$  e calcule  $I_{\text{pico}}$ :

$$I_{\text{pico}} = \frac{CV_{\text{pico}}}{\sqrt{LC}} = \frac{(2 \mu\text{F})(20 \text{ V})}{\sqrt{(6 \mu\text{H})(2 \mu\text{F})}} = 11,5 \text{ A}$$

**EXERCÍCIO** Um capacitor de  $5 \mu\text{F}$  é carregado e então descarregado através de um indutor. Qual deve ser o valor da indutância de modo que a corrente oscile com freqüência  $8 \text{ kHz}$ ? (Resposta  $79,2 \mu\text{H}$ )

Se for incluído um resistor em série com o capacitor e o indutor, como na Figura 29-14, tem-se um circuito *RLC*. A lei das malhas de Kirchhoff fornece

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad 29-43a$$

ou

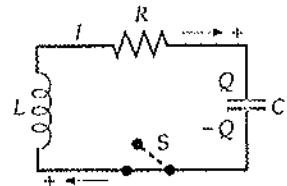
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad 29-43b$$

onde foi usado  $I = dQ/dt$  como antes. As Equações 29-43a e 29-43b são análogas à equação para um oscilador harmônico amortecido (veja o Problema 14-35):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

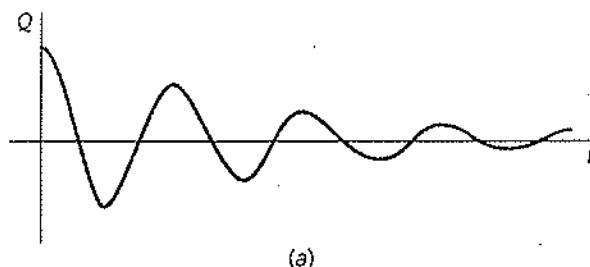
O primeiro termo,  $L dI/dt = L d^2Q/dt^2$ , é análogo à massa vezes a aceleração,  $m dv/dt = m d^2x/dt^2$ ; o segundo termo,  $IR = R dQ/dt$ , é análogo ao termo de amortecimento,  $bv = b dx/dt$ ; e o terceiro termo,  $Q/C$ , é análogo à força restauradora  $kx$ . Na oscilação de uma massa com uma mola, a constante de amortecimento  $b$  leva a uma dissipação da energia mecânica. Em um circuito *RLC*, a resistência  $R$  é análoga à constante de amortecimento  $b$  e leva a uma dissipação da energia elétrica.

Se a resistência é pequena, a carga e a corrente oscilam com freqüência (angular)<sup>†</sup> que é muito próxima de  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , que é chamada de freqüência natural do circuito, mas as oscilações são amortecidas. Pode-se compreender isso

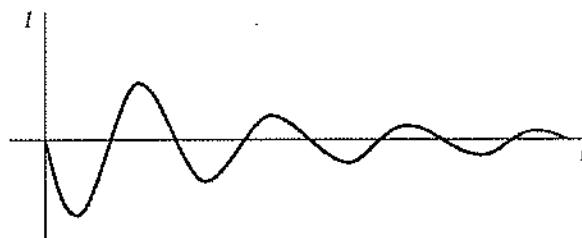


**FIGURA 29-14**  
Um circuito *RLC*.

<sup>†</sup>Como no Capítulo 14, quando foram discutidas as oscilações mecânicas, normalmente se omite a palavra *angular* quando a omissão não causar confusão.



(a)



(b)

**FIGURA 29-15**

Gráficos de (a)  $Q$  versus  $t$  e (b)  $I$  versus  $t$  para o circuito RLC mostrado na Figura 29-14 quando o valor de  $R$  é pequeno o suficiente, de modo que as oscilações são subamortecidas.

qualitativamente a partir de considerações de energia. Se cada termo na Equação 29-43a for multiplicado pela corrente  $I$ , obtém-se

$$LI \frac{dI}{dt} + I^2R + I \frac{Q}{C} = 0 \quad 29-44$$

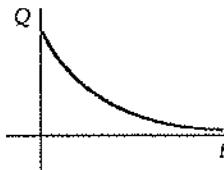
A energia magnética no indutor é dada por  $1/2LI^2$  (veja Equação 28-20). Note que

$$\frac{d(\frac{1}{2}LI^2)}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

onde  $LI \frac{dI}{dt}$  é o primeiro termo na Equação 29-44. Se  $LI \frac{dI}{dt}$  é positivo, ele é igual à taxa na qual a energia potencial elétrica é transformada em energia magnética. Se  $LI \frac{dI}{dt}$  é negativo, ele é igual à taxa na qual a energia magnética é transformada de volta em energia potencial elétrica. Note que  $LI \frac{dI}{dt}$  é positivo ou negativo dependendo de  $I$  e  $dI/dt$  possuírem o mesmo sinal ou sinais diferentes. O segundo termo na Equação 29-44 é  $I^2R$ , a taxa na qual a energia potencial elétrica é dissipada no resistor.  $I^2R$  não é nunca negativa. Note que

$$\frac{d(\frac{1}{2}Q^2/C)}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = I \frac{Q}{C}$$

onde  $IQ/C$  é o terceiro termo da Equação 29-44. Essa é a taxa de variação da energia potencial elétrica do capacitor, que pode ser positiva ou negativa. A soma das energias elétrica e magnética não é constante nesse circuito porque a energia é continuamente dissipada no resistor. A Figura 29-15 mostra gráficos de  $Q$  versus  $t$  e  $I$  versus  $t$  para uma pequena resistência  $R$  no circuito RLC. Se  $R$  for aumentado, as oscilações se tornam mais fortemente amortecidas até que seja atingido um valor crítico de  $R$ , para o qual não existem mais oscilações. A Figura 29-16 mostra um gráfico de  $Q$  versus  $t$  em um circuito RLC quando o valor de  $R$  é maior que o valor criticamente amortecido.

**FIGURA 29-16**

Um gráfico de  $Q$  versus  $t$  para o circuito RLC mostrado na Figura 29-14 quando o valor de  $R$  é bastante elevado, de modo que as oscilações são sobreamortecidas.

## 29-6 Circuitos RLC Excitados

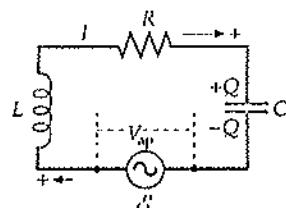
### Circuitos RLC Série

A Figura 29-17 mostra um circuito RLC série sendo senoidalmente excitado por um gerador ca. Se a queda de potencial aplicada pelo gerador à combinação RLC série é  $V_{ap} = V_{ap,pico} \cos \omega t$ , aplicando a lei das malhas de Kirchhoff tem-se

$$V_{ap,pico} \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

Usando  $I = dQ/dt$  e rearranjando, obtém-se

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_{ap,pico} \cos \omega t \quad 29-45$$

**FIGURA 29-17**

Um circuito RLC série com um gerador ca.

Essa equação é análoga à Equação 14-51 para a oscilação forçada de uma massa com uma mola:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

(Na Equação 14-51, a constante de mola  $k$  foi escrita em termos da massa  $m$  e da freqüência angular natural  $\omega_0$  usando  $k = m\omega_0^2$ . A capacidade na Equação 29-45 pode ser também escrita em termos de  $L$  e da freqüência angular natural usando  $1/C = L\omega_0^2$ .)

Será discutida a solução da Equação 29-45 qualitativamente, como foi feito para a Equação 14-51 para o oscilador forçado. A corrente no circuito consiste em uma corrente transiente que depende das condições iniciais (p. ex., a fase inicial do gerador e a carga inicial do capacitor) e a corrente em regime permanente que não depende das condições iniciais. Será ignorada a corrente transiente, que diminui exponencialmente com o tempo e eventualmente é desprezível, e a análise será concentrada na corrente em regime permanente. A corrente em regime permanente obtida pela solução da Equação 29-45 é

$$I = I_{\text{pico}} \cos(\omega t - \delta) \quad 29-46$$

onde o ângulo de fase  $\delta$  é dado por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad 29-47$$

#### CONSTANTE DE FASE PARA UM CIRCUITO RLC SÉRIE

O pico de corrente é

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_{\text{ap,pico}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{\text{ap,pico}}}{Z} \quad 29-48$$

#### PICO DE CORRENTE EM UM CIRCUITO RLC SÉRIE

onde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 29-49$$

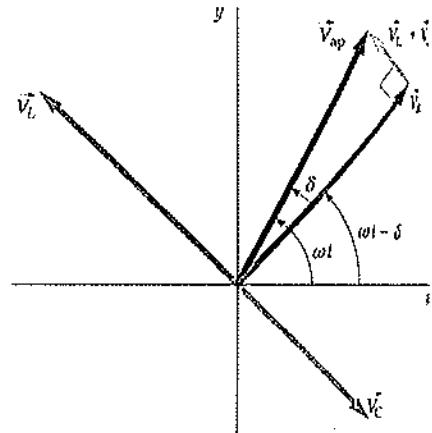
#### IMPEDÂNCIA DE UM CIRCUITO RLC SÉRIE

A grandeza  $X_L - X_C$  é chamada de reatância total, e  $Z$  é chamada de impedância. Combinando esses resultados, tem-se

$$I = \frac{V_{\text{ap,pico}}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \quad 29-50$$

(A Equação 29-50 pode ser também obtida a partir de um simples diagrama, usando as representações fasoriais. A Figura 29-18 mostra os fasores representando a queda de potencial através da resistência, da indutância e da capacidade. A componente  $x$  de cada um desses vetores é igual à queda de potencial instantânea através do correspondente elemento. Uma vez que a soma das componentes  $x$  é igual à componente  $x$  da soma, a soma das componentes  $x$  é igual à soma das quedas de potencial nesses elementos que, pela lei das malhas de Kirchhoff, é igual à queda de potencial instantânea aplicada.

Se a queda de potencial aplicada através da combinação série  $V_{\text{ap}} = V_{\text{ap,pico}} \cos \omega t$  for representada como um fasor  $\vec{V}_{\text{ap}}$  que possui módulo  $V_{\text{ap,pico}}$ , tem-se



**FIGURA 29-18**

Relações de fase entre as quedas de potencial em um circuito RLC série. A queda de potencial através de um resistor está em fase com a corrente. A queda de potencial através do indutor  $V_L$  está em avanço de  $90^\circ$  em relação à corrente. A queda de potencial através do capacitor está em atraso de  $90^\circ$  em relação à corrente. A soma dos vetores representando essas quedas de potencial fornece um vetor em um ângulo  $\delta$  com a corrente, representando a f.e.m. aplicada. Para o caso aqui mostrado,  $V_L$  é maior que  $V_C$  e a corrente está atrasada em relação à queda de potencial aplicada de  $V_{\text{ap}}$ .

$$\vec{V}_{ap} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$$

29-51

Em termos dos módulos,

$$V_{ap,pico} = |\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C| = \sqrt{V_{R,pico}^2 + (V_{L,pico} - V_{C,pico})^2}$$

Mas  $V_R = I_{pico}R$ ,  $V_L = I_{pico}X_L$ , e  $V_C = I_{pico}X_C$ . Assim,

$$V_{ap,pico} = I_{pico} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{pico}Z$$

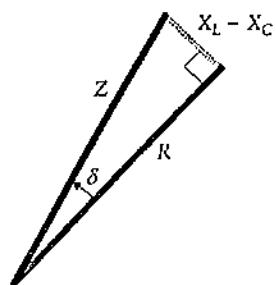
O fasor  $\vec{V}_{ap}$  faz um ângulo  $\delta$  com  $\vec{V}_R$ , como mostrado na Figura 29-18. A partir da figura, pode-se ver que

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|\vec{V}_L + \vec{V}_C|}{|\vec{V}_R|} = \frac{I_{pico}X_L - I_{pico}X_C}{I_{pico}R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

de acordo com a Equação 29-47. Uma vez que  $\vec{V}_{ap}$  faz um ângulo  $\omega t$  com o eixo  $x$ ,  $\vec{V}_R$  faz um ângulo  $\omega t - \delta$  com o eixo  $x$ . Essa queda de potencial aplicada está em fase com a corrente que é, portanto, dada por

$$I = I_{pico} \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_{ap,pico}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

Esta é a Equação 29-50. A relação entre a impedância  $Z$ , a resistência  $R$  e a reatância total  $X_L - X_C$  será mais bem lembrada usando o triângulo retângulo mostrado na Figura 29-19.



**FIGURA 29-19**  
O triângulo retângulo relacionando as reatâncias capacitiva e indutiva, resistência, impedância e o ângulo de fase em um circuito RLC série.

### Ressonância

Quando  $X_L$  e  $X_C$  são iguais, a reatância total é nula e a impedância  $Z$  possui seu menor valor  $R$ . Então,  $I_{pico}$  possui seu maior valor e o ângulo de fase  $\delta$  é nulo, significando que a corrente está em fase com a queda de potencial aplicada. Seja  $\omega_{res}$  o valor de  $\omega$  para o qual  $X_L$  e  $X_C$  são iguais. Isso é obtido de

$$X_L = X_C$$

$$\omega_{res}L = \frac{1}{\omega_{res}C}$$

ou

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

que é igual à freqüência natural  $\omega_0$ . Quando a freqüência da queda de potencial aplicada é igual à freqüência natural  $\omega_0$ , a impedância é a menor,  $I_{pico}$  é o maior e diz-se que o circuito está em ressonância. A freqüência natural  $\omega_0$  é, portanto, também chamada de freqüência de ressonância. Essa condição de ressonância em um circuito RLC excitado é similar àquela de um oscilador harmônico simples excitado.

Uma vez que nem o indutor nem o capacitor dissipam energia, a potência média liberada para um circuito RLC é a potência média fornecida ao resistor. A potência instantânea fornecida para o resistor é

$$P = I^2R = [I_{pico} \cos(\omega t - \delta)]^2R$$

Tomando a média ao longo de um ou mais ciclos e usando  $(\cos^2 \theta)_{med} = 1/2$ , obtém-se para a potência média

$$P_{med} = \frac{1}{2}I_{pico}^2R = I_{rms}^2R$$

29-52

Usando  $R/Z = \cos \delta$  a partir da Figura 29-19 e  $I_{\text{pico}} = V_{\text{ap,pico}}/Z$ , isso pode ser escrito como

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} V_{\text{ap,pico}} I_{\text{pico}} \cos \delta = V_{\text{ap,rms}} I_{\text{rms}} \cos \delta \quad 29-53$$

A grandeza  $\cos \delta$  é chamada de **fator de potência** do circuito RLC. Na ressonância,  $\delta$  é zero e o fator de potência é 1.

A potência pode também ser expressa como uma função da freqüência angular  $\omega$ . Usando  $I_{\text{rms}} = V_{\text{ap,rms}}/Z$ , a Equação 29-52 se torna

$$P_{\text{med}} = I_{\text{rms}}^2 R = V_{\text{ap,rms}}^2 \frac{R}{Z^2}$$

A partir da definição de impedância  $Z$ , tem-se

$$\begin{aligned} Z^2 &= (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2 \end{aligned}$$

onde foi usado  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Empregando essa expressão para  $Z^2$ , obtém-se a potência média como uma função de  $\omega$ :

$$P_{\text{med}} = \frac{V_{\text{ap,rms}}^2 R \omega^2}{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad 29-54$$

A Figura 29-20 mostra a potência média fornecida pelo gerador para a combinação em série como uma função da freqüência do gerador para dois valores diferentes de  $R$ . Essas curvas, chamadas de **curvas de ressonância**, são as mesmas curvas de potência versus freqüência de um oscilador amortecido excitado (veja a Seção 14-5). A potência média é maior quando a freqüência do gerador é igual à freqüência de ressonância. Quando a resistência é pequena, a curva de ressonância é estreita; quando a resistência é alta, a curva de ressonância é larga. A curva de ressonância pode ser caracterizada pela **largura de ressonância**  $\Delta\omega$ . Como mostrado na Figura 29-20, a largura de ressonância é a diferença de freqüência entre dois pontos sobre a curva nos quais a potência é metade de seu valor máximo. Quando a largura é pequena comparada com a freqüência de ressonância, a ressonância é pronunciada (forte); isto é, a curva de ressonância é estreita.

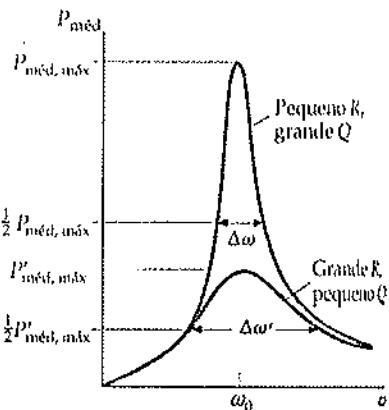
No Capítulo 14, o fator para um oscilador mecânico foi definido como  $Q = \omega_0 m / b$ , onde  $m$  é a massa e  $b$  a constante de amortecimento. Foi então mostrado que para um oscilador não-amortecido  $Q = 2\pi E/|\Delta E|$ , onde  $E$  é a energia total do sistema no início de um ciclo e  $|\Delta E|$  é a energia dissipada durante o ciclo. O fator  $Q$  para um RLC pode ser definido de uma maneira similar. Uma vez que  $L$  é análogo à massa  $m$  e  $R$  é análogo à constante de amortecimento  $b$ , o fator  $Q$  para um circuito RLC é dado por

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad 29-55$$

Quando a curva de ressonância é razoavelmente estreita (isto é, quando  $Q$  é maior que 2 ou 3), o fator  $Q$  pode ser aproximado por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \quad 29-56$$

FATOR Q PARA UM CIRCUITO RLC



**FIGURA 29-20**  
Gráfico da potência média versus a freqüência para um circuito RLC série. A potência é máxima quando a freqüência no gerador  $\omega$  se iguala à freqüência natural do circuito  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Se a resistência é pequena, o fator  $Q$  é alto e a ressonância é elevada. A largura da banda da ressonância  $\Delta\omega$  das curvas é medida entre os pontos onde a potência é metade de seu valor máximo.

Circuitos ressonantes são usados em receptores de rádio, em que a freqüência de ressonância do circuito é alterada pela variação da capacitância ou da indutância. A ressonância ocorre quando a freqüência natural do circuito é igual a uma das freqüências das ondas de rádio captadas pela antena. Na ressonância, existe uma corrente relativamente alta no circuito da antena. Se o fator  $Q$  do circuito é suficientemente elevado, as correntes devidas às outras estações com freqüências fora da ressonância serão desprezíveis, quando comparadas com aquelas correntes devidas à freqüência da estação na qual o circuito está sintonizado.

**EXEMPLO 29-5**

Circuito RLC em ressonância

Uma combinação  $RLC$  com  $L = 2 \text{ H}$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$  e  $R = 20 \Omega$  é alimentada por um gerador ideal com pico de fem de  $100 \text{ V}$  e uma freqüência que pode ser variada. Encontre (a) a freqüência de ressonância  $f_0$ , (b) o valor  $Q$ , (c) a largura de ressonância  $\Delta f$  e (d) a amplitude de corrente na ressonância.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A freqüência de ressonância é encontrada a partir de  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , e o valor  $Q$  é encontrado a partir de  $Q = \omega_0 L / R$ .

- A freqüência de ressonância é  $f_0 = \omega_0/2\pi$ :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2 \text{ H})(2 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 79,6 \text{ Hz}$$

- Use esse resultado para calcular  $Q$ :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(79,6 \text{ Hz})(2 \text{ H})}{20 \Omega} = 50$$

- Use o valor de  $Q$  para encontrar a largura de ressonância  $\Delta f$ :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{79,6 \text{ Hz}}{50} = 1,59 \text{ Hz}$$

- Na ressonância, a impedância é  $R$  e  $I_{\text{pico}}$  é  $V_{\text{ap,pico}}/R$ :

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{ap,pico}}}{R} = \frac{E_{\text{pico}}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5 \text{ A}$$

**NOTAS** A largura de  $1,59 \text{ Hz}$  é menos de  $2\%$  da freqüência de ressonância de  $79,6 \text{ Hz}$ , então o pico de ressonância é muito pronunciado.

**EXEMPLO 29-6**

Corrente, fase e potência num circuito RLC em série excitado

Tente resolver este exemplo sozinho

Se o gerador no Exemplo 29-5 possuir uma freqüência de  $60 \text{ Hz}$ , encontre (a) a amplitude da corrente, (b) a constante de fase  $\delta$ , (c) o fator de potência e (d) a potência média liberada.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A amplitude de corrente é a amplitude da queda de potencial dividida pela impedância total da combinação em série. O ângulo de fase  $\delta$  é encontrado a partir de  $\operatorname{tg} \delta = (X_L - X_C)/R$ . Podem ser usadas tanto a Equação 29-52 quanto a Equação 29-53 para encontrar a potência média liberada.

Cubra a coluna da direita (na página seguinte) e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

**Etapas**

- (a) 1. Escreva o pico de corrente em termos de  $V_{ap,pico}$  e a impedância  
           2. Calcule as reatâncias capacitiva e indutiva e a reatância total.  
           3. Calcule a impedância total  $Z$   
           4. Use os resultados das etapas 2 e 3 para calcular  $I_{pico}$ .
- (b) Use os resultados da Parte (a), etapas 2 e 3, para calcular  $\delta$ .
- (c) Use o valor de  $\delta$  para calcular o fator de potência.
- (d) Calcule a potência média liberada a partir da Equação 29-52.

**Respostas**

$$I_{pico} = \frac{V_{ap,pico}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{pico}}{Z}$$

$$X_C = 1326 \Omega, X_L = 754 \Omega$$

então

$$X_L - X_C = -572 \Omega$$

$$Z = 573 \Omega$$

$$I_{pico} = 0,175 \text{ A}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} = -88,0^\circ$$

$$\cos \delta = 0,0349$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} I_{pico}^2 R = 0,305 \text{ W}$$

**VERIFICAÇÃO** Para verificar o resultado da potência média usando o fator de potência encontrado na Parte (c), tem-se  $P_{med} = 1/2 V_{ap,pico} I_{pico} \cos \delta = 1/2 \mathcal{E}_{pico} I_{pico} \cos \delta = 0,305 \text{ W}$ . Esse valor está de acordo com o resultado da Parte (d).

**NOTAS** A freqüência de 60 Hz está bem abaixo da freqüência de ressonância de 79,6 Hz. (Lembre que a largura calculada no Exemplo 29-5 é de apenas 1,59 Hz.) Como um resultado, a reatância total é muito maior em módulo que a resistência. Esse é sempre o caso longe da ressonância. Da mesma forma, um  $I_{pico}$  de 0,175 A é muito menor que um  $I_{pico}$  na ressonância, que foi encontrado como sendo 5 A. Finalmente, nota-se da Figura 29-18 que um ângulo de fase negativo  $\delta$  significa que a corrente está avançada em relação à queda de potencial aplicada.

**EXEMPLO 29-7****CIRCUITO RLC SÉRIE EXCITADO EM RESSONÂNCIA**

Tente resolver este exemplo sozinho

Encontre o pico de queda de potencial através do resistor, do indutor e do capacitor na ressonância para o circuito no Exemplo 29-5.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O pico de queda de potencial através do resistor é  $I_{pico}$  vezes  $R$ . Igualmente, o pico de queda de potencial através do indutor ou capacitor é  $I_{pico}$  vezes a reatância apropriada. Encontrou-se que na ressonância  $I_{pico} = 5 \text{ A}$  e  $f_0 = 79,6 \text{ Hz}$  no Exemplo 29-5.

Cubra a coluna da direita e tente resolver o exemplo por seu próprio esforço, antes de olhar as respostas.

**Etapas**

1. Calcule  $V_{R,pico} = I_{pico} R$ .
2. Expressse  $V_{L,pico}$  em termos de  $I_{pico}$  e  $X_L$ .
3. Expressse  $V_{C,pico}$  em termos de  $I_{pico}$  e  $X_C$ .

**Respostas**

$$V_{R,pico} = I_{pico} R = 100 \text{ V}$$

$$V_{L,pico} = I_{pico} X_L = I_{pico} \omega_0 L = 5000 \text{ V}$$

$$V_{C,pico} = I_{pico} X_C = \frac{I_{pico}}{\omega_0 C} = 5000 \text{ V}$$

**NOTAS** As reatâncias indutiva e capacitativa são iguais, como seria de se esperar, uma vez que a freqüência de ressonância foi encontrada fazendo-as iguais. O diagrama fasorial para a queda de potencial através do resistor, capacitor e indutor é mostrado na Figura 29-21. O pico de queda de potencial através do resistor é relativamente seguro, 100 V, igual ao pico de fem do gerador. Entretanto, o pico de queda de potencial através do indutor e do capacitor é de 5000 V, perigosamente alto. Essas quedas de potencial estão  $180^\circ$  defasadas. Na ressonância, a queda de potencial do indutor em qualquer instante de tempo é simétrica à queda de potencial através do capacitor, então elas sempre somam zero, deixando a queda de potencial através do resistor igual à fem no circuito.

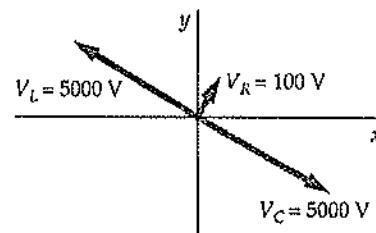


FIGURA 29-21

**EXEMPLO 29-8****PROBLEMA**

Um resistor  $R$  e um capacitor  $C$  estão em série com um gerador, como mostrado na Figura 29-22. O gerador aplica uma queda de potencial através da combinação  $RC$  dada por  $V_{ap} = \sqrt{2}V_{ap,rms} \cos \omega t$ . Encontre a queda de potencial rms através do capacitor  $V_{sal,rms}$  como função da freqüência  $\omega$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A queda de potencial rms através do capacitor é o produto da corrente rms e da reatância capacitativa. A corrente rms é encontrada a partir da queda de potencial aplicada pelo gerador e da impedância da combinação  $RC$  série.

1. A queda de potencial através do capacitor é  $I_{rms}$  vezes  $X_C$ :

$$V_{sal,rms} = I_{rms} X_C$$

2. A corrente rms depende da queda de potencial rms aplicada e da impedância:

$$I_{rms} = \frac{V_{ap,rms}}{Z}$$

3. Nesse circuito, apenas  $R$  e  $X_C$  contribuem para a impedância total:  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

4. Substitua esses valores e  $X_C = 1/(\omega C)$  para encontrar a queda de potencial rms de saída:

$$\begin{aligned} V_{sal,rms} &= I_{rms} X_C = \frac{V_{ap,rms}}{Z} X_C = \frac{V_{ap,rms} X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \\ &= \frac{V_{ap,rms} \left( \frac{1}{\omega C} \right)}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \boxed{\frac{V_{ap,rms}}{\sqrt{1 + \omega^2(RC)^2}}} \end{aligned}$$

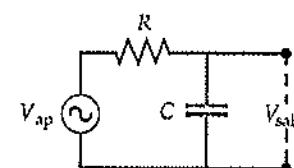


FIGURA 29-22

A tensão de saída de pico diminui conforme a freqüência aumenta.

**NOTAS** Este circuito é chamado de *filtro passa-baixas RC*, uma vez que transmite com grande amplitude freqüências baixas, em vez das altas freqüências. De fato, a queda de potencial de saída é igual à queda de potencial aplicada pelo gerador no limite quando  $\omega \rightarrow 0$ , mas se aproxima de zero para  $\omega \rightarrow \infty$ , como mostrado pelo gráfico da razão entre a queda de potencial da saída e a queda de potencial aplicada na Figura 29-23.

**EXERCÍCIO** Encontre a queda de potencial de saída para esse circuito se o capacitor é substituído por um indutor  $L$ . (Resposta  $V_{sal,rms} = V_{ent,rms}/\sqrt{1 + (R/L)^2/\omega^2}$ . Este circuito é um *filtro passa-altas*.)

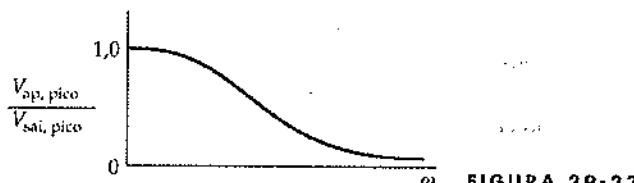


FIGURA 29-23

**EXEMPLO 29-9****Coloque-o no Contexto**

Você foi desafiado para construir um receptor de rádio usando seu novo conhecimento de física. Você sabe que o mostrador FM fornece suas freqüências em megahertz, e você quer determinar qual porcentagem de variação de um indutor irá permitir ajustar toda a faixa FM. Você decide começar no centro da faixa e determinar o aumento e a diminuição porcentual necessários para a indutância. Um indutor variável é normalmente um solenóide com núcleo de ferro, e a indutância é aumentada pela inserção do núcleo. O mostrador FM vai desde 88 MHz até 108 MHz.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pode-se relacionar a indutância com a freqüência de ressonância com  $\omega = 2\pi f$  e  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Então, se for encontrada a variação percentual na freqüência pode-se determinar a variação percentual na indutância. A capacitância não varia.

1. A freqüência angular de ressonância  $\omega$  está relacionada com a indutância  $L$ :

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

e

$$\omega = 2\pi f$$

então

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$L = af^{-2}$$

onde

$$a = (4\pi^2 C)^{-1}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\text{med}}} = \frac{af_{\max}^{-2} - af_{\min}^{-2}}{af_{\text{med}}^{-2}}$$

$$= f_{\text{med}}^2 \left( \frac{1}{f_{\max}^2} - \frac{1}{f_{\min}^2} \right) = 98^2 \left( \frac{1}{108^2} - \frac{1}{88^2} \right)$$

$$= -0,417$$

2.  $L$  é inversamente proporcional a  $f^2$ :

3. Expressse a variação fracional em  $L$  em termos das freqüências: quando  $L$  é máximo,  $f$  é mínimo, e vice-versa. A freqüência média  $f_{\text{med}}$  está no meio do caminho entre as freqüências máxima e mínima, e  $L_{\min}$  é a indutância quando  $f = f_{\text{med}}$ :

A indutância varia em torno de **42%**

4. O sinal negativo não é relevante, exceto como uma indicação de que quando a indutância aumenta a freqüência de ressonância diminui. Expressse o resultado da etapa 3 como uma porcentagem:



Um rádio de um navio por volta de 1920. No lado esquerdo do locutor são vistos os enrolamentos indutivos e as placas capacitivas do circuito de sintonia.

### Círculo RLC em Paralelo

A Figura 29-24 mostra um resistor  $R$ , um capacitor  $C$  e um indutor  $L$  conectados em paralelo entre os terminais de um gerador ca. A corrente total  $I$  do gerador divide-se em três correntes. A corrente  $I_R$  no resistor, a corrente  $I_C$  no capacitor e a corrente  $I_L$  no indutor. A queda de potencial instantânea  $V_{ap}$  é a mesma através de cada elemento. A corrente no resistor está em fase com a queda de potencial, e o fasor  $\vec{I}_R$  tem módulo  $V_{pico}/R$ . Uma vez que a queda de potencial através de um indutor está em avanço de  $90^\circ$  relativamente à corrente no indutor,  $I_L$  está atrasada em relação à queda de potencial de  $90^\circ$  e o fasor  $\vec{I}_L$  tem módulo  $V_{pico}/X_L$ . Do mesmo modo,  $I_C$  está em avanço em relação à queda de potencial de  $90^\circ$ , e o fasor  $\vec{I}_C$  apresenta módulo  $V_{pico}/X_C$ . Essas correntes são representadas por fasores na Figura 29-25. A corrente total  $I$  é a componente  $x$  da soma vetorial das correntes individuais mostradas na figura. O módulo da corrente total é

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V_{pico}}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_{pico}}{X_L} - \frac{V_{pico}}{X_C}\right)^2} = \frac{V_{pico}}{Z} \quad 29-57$$

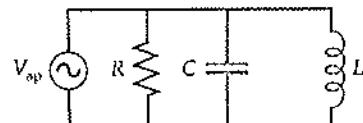
onde a impedância total  $Z$  está relacionada à resistência e às realâncias capacitiva e indutiva por

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \quad 29-58$$

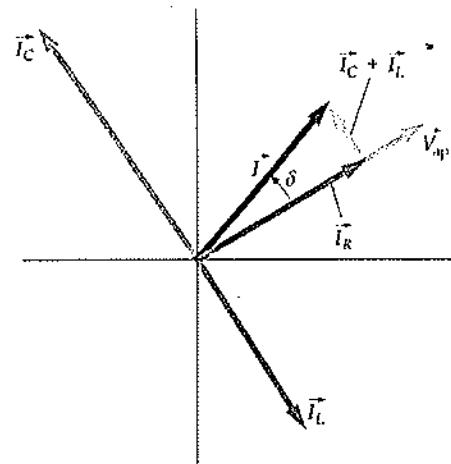
Na ressonância, as correntes no indutor e no capacitor estão  $180^\circ$  fora de fase, então a corrente total está em um mínimo e é apenas a corrente no resistor. Nota-se da Equação 29-57 que isso ocorre se  $Z$  é máximo, então  $1/Z$  é mínimo. Então, verifica-se da Equação 29-58 que se  $X_L = X_C$ ,  $1/Z$  possui seu valor mínimo  $1/R$ . Igualando  $X_L$  com  $X_C$  e resolvendo para  $\omega$ , obtém-se a freqüência de ressonância, que é igual à freqüência natural  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

### 29-7 Transformador

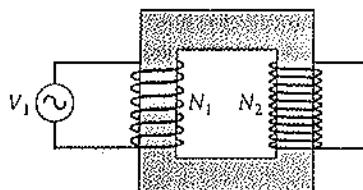
Um transformador é um dispositivo usado para aumentar ou diminuir a tensão em um circuito sem uma perda de potência apreciável. A Figura 29-26 mostra um transformador simples, consistindo em dois fios enrolados em torno de um núcleo de ferro comum. O enrolamento transportando a potência de entrada é chamado de primário, e o outro enrolamento é chamado de secundário. Cada enrolamento de um transformador pode ser usado como primário ou secundário. O transformador opera sobre o princípio de que uma corrente alternada em um circuito induz uma fem no circuito vizinho devido à indutância mútua do dois circuitos. O núcleo de ferro aumenta o campo magnético para uma dada corrente e guia-o de modo que quase todo o fluxo magnético através de um enrolamento vai para o outro enrolamento. Se não há perda de potência, o produto da diferença da potencial e da corrente através do enrolamento secundário deve ser igual ao produto da diferença de potencial e da corrente através do enrolamento primário. Assim, se a diferença de potencial através do enrolamento secundário é maior que a diferença de potencial através do primário, a corrente no enrolamento secundário é menor que a corrente no enrolamento primário, e vice-versa. Perdas de potência surgem devido ao efeito Joule nas pequenas resistências em ambos os enrolamentos ou devido às correntes parasitas no núcleo,<sup>5</sup> e devido à histerese nos núcleos de ferro. Se essas perdas



**FIGURA 29-24**  
Um circuito RLC paralelo.



**FIGURA 29-25**  
Um diagrama fasorial para as correntes no circuito RLC paralelo mostrado na Figura 29-24. A queda de potencial é a mesma em cada elemento. A corrente no resistor está em fase com a queda de potencial. A corrente no capacitor está em avanço de  $90^\circ$  em relação à queda de potencial, e a corrente no indutor está em atraso de  $90^\circ$  em relação à queda de potencial. A diferença de fase  $\delta$  entre a corrente total e a queda de potencial depende dos módulos relativos das correntes que, por sua vez, dependem dos valores da resistência e das realâncias capacitivas e indutivas.



**FIGURA 29-26**  
Um transformador com  $N_1$  voltas no primário e  $N_2$  voltas no secundário.

<sup>5</sup>As correntes induzidas, chamadas de correntes parasitas, podem ser bastante reduzidas usando-se um núcleo de metal laminado para quebrar os caminhos de corrente.

forem desprezadas, considera-se um transformador ideal com 100% de eficiência para o qual a potência fornecida ao enrolamento primário aparece integralmente no enrolamento secundário. Transformadores reais têm normalmente 90% a 95% de eficiência.

Considere um transformador com uma queda de potencial  $V_1$  através do enrolamento primário de  $N_1$  voltas; o enrolamento secundário de  $N_2$  voltas é um circuito aberto. Devido ao núcleo de ferro, existe um grande fluxo através de cada enrolamento, mesmo quando a corrente de magnetização  $I_m$  no circuito primário é muito pequena. Pode-se ignorar as resistências dos enrolamentos, que são desprezíveis em comparação com suas reatâncias indutivas. O circuito primário é então um simples circuito consistindo em um gerador ca e uma indutância pura, como discutido na Seção 29-3. A corrente de magnetização no enrolamento primário e a queda de tensão através do enrolamento primário estão 90° fora de fase, e a potência média dissipada no enrolamento primário é nula. Se  $\phi_{volta}$  é o fluxo magnético através de uma única volta do enrolamento primário, a queda de potencial através do enrolamento primário é igual à contra-fem, então

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_{volta}}{dt} \quad 29-59$$

Se não existe fuga de fluxo no núcleo de ferro, o fluxo através de cada volta é o mesmo em ambos os enrolamentos. Assim, o fluxo total através do enrolamento secundário é  $N_2\phi_{volta}$ , e a diferença de potencial através do enrolamento secundário é

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{volta}}{dt} \quad 29-60$$

Comparando as Equações 29-59 e 29-60, pode-se ver que

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad 29-61$$

Se  $N_2$  é maior que  $N_1$ , a diferença de potencial através do enrolamento secundário é maior que a queda de potencial através do enrolamento primário, e o transformador é chamado de transformador amplificador. Se  $N_2$  é menor que  $N_1$ , a diferença de potencial através do enrolamento secundário é menor que a diferença de potencial através do enrolamento primário, e o transformador é chamado de transformador atenuador.

Quando se coloca uma resistência  $R$ , chamada de resistência de carga, entre os terminais do enrolamento secundário, então existirá uma corrente  $I_2$  no circuito secundário que estará em fase com a queda de potencial  $V_2$  através da resistência. Essa resistência introduz um fluxo adicional  $\phi'_{volta}$  através de cada volta que é proporcional a  $N_2 I_2$ . Esse fluxo se opõe ao fluxo original devido à corrente de magnetização original  $I_m$  no primário. Entretanto, a queda de potencial através do enrolamento primário é determinada pelo gerador fem, que não é afetado pelo circuito secundário. De acordo com a Equação 29-60, o fluxo no núcleo de ferro deve variar na taxa original; isto é, o fluxo total no núcleo de ferro deve ser o mesmo encontrado na situação anterior, quando não havia carga através do secundário. Surge, assim, no enrolamento primário uma corrente adicional  $I_1$ , para manter o fluxo original  $\phi_{volta}$ . O fluxo através de cada volta, produzido por essa corrente adicional, é proporcional a  $N_1 I_1$ . Uma vez que esse fluxo é igual a  $-\phi'_{volta}$ , a corrente adicional  $I_1$  no primário está relacionada à corrente  $I_2$  no secundário por

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2 \quad 29-62$$

Essas correntes estão 180° fora de fase e produzem fluxos contrários. Uma vez que  $I_2$  está em fase com  $V_2$ , a corrente adicional  $I_1$  está em fase com a queda de

potencial através do circuito primário. A potência de entrada do gerador é  $V_{1,\text{rms}}I_{1,\text{rms}}$  e a potência de saída é  $V_{2,\text{rms}}I_{2,\text{rms}}$ . (A corrente de magnetização não contribui para a potência de entrada porque está  $90^\circ$  fora de fase em relação à tensão do gerador.) Se não existem perdas,

$$V_{1,\text{rms}}I_{1,\text{rms}} = V_{2,\text{rms}}I_{2,\text{rms}} \quad 29-63$$

Na maioria dos casos, uma corrente adicional no primário  $I_1$  é muito maior que a corrente original de magnetização  $I_m$  que está escoando do gerador quando não existe carga. Isso pode ser demonstrado colocando-se uma lâmpada em série com o enrolamento primário. A lâmpada é muito mais brillante quando existe uma carga através do enrolamento secundário do que quando o circuito secundário é aberto. Se  $I_m$  pode ser desprezada, a Equação 29-63 relaciona as correntes totais nos circuitos primário e secundário.

### EXEMPLO 29-10

Uma campainha de porta requer 0,4 A em 6 V. Ela é conectada a um transformador cujo primário contém 2000 voltas e está ligado a uma linha ca de 120 V. (a) Quantas voltas deve haver no secundário? (b) Qual é a corrente no primário?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pode-se encontrar o número de voltas a partir da razão do número de voltas, que é igual à razão das tensões. A corrente no primário pode ser encontrada igualando a potência de saída à potência de entrada.

- A razão do número de voltas pode ser obtida da Equação 29-61. Resolvendo para o número de voltas no secundário,  $N_2$ :
- $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$$
- então
- $$N_2 = \frac{V_{2,\text{rms}}}{V_{1,\text{rms}}} N_1 = \frac{6\text{ V}}{120\text{ V}} 2000 \text{ voltas} = 100 \text{ voltas}$$
- Uma vez que se está assumindo 100% de eficiência na transmissão de potência, as correntes de entrada e de saída são igualadas pela Equação 29-62. Resolvendo para a corrente no primário,  $I_1$ :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$V_2 I_2 = V_1 I_1$$

então

$$I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = \frac{6\text{ V}}{120\text{ V}} (0,4\text{ A}) = 0,02\text{ A}$$

Um importante uso dos transformadores é o transporte de potência elétrica. Para minimizar a perda por calor  $PR$  (efeito Joule) nas linhas de transmissão, é econômico usar uma alta tensão e uma baixa corrente. Por outro lado, segurança e outras considerações exigem que a potência deve ser liberada para os consumidores em baixa tensão e, portanto, com altas correntes. Suponha, por exemplo, que cada pessoa em uma cidade com uma população de 50.000 habitantes usa 1,2 kW de potência elétrica. (O consumo *per capita* de potência nos Estados Unidos é realmente alguma coisa maior que isso.) Em 120 V, a corrente necessária para cada pessoa deve ser

$$I = \frac{1200\text{ W}}{120\text{ V}} = 10\text{ A}$$

A corrente total para 50.000 pessoas deve ser então de 500.000 A. O transporte de tal corrente desde a planta de geração de potência até a cidade, distante vários quilômetros, deve exigir condutores de espessura enorme, e a perda de potência  $PR$  deve ser substancial. Em vez de transmitir a potência em 120 V,

transformadores de amplificação são usados na planta de geração para elevar a tensão até algum valor muito alto, tal como 600.000 V. Para essa tensão, a corrente necessária é de apenas

$$I = \frac{120 \text{ V}}{600.000 \text{ V}} (500.000 \text{ A}) = 100 \text{ A}$$

Para reduzir a tensão a um nível seguro para o transporte dentro da cidade, subestações de potência são localizadas na periferia das cidades para atenuar a tensão para um valor seguro, tal como 10.000 V. Transformadores em caixas, montados em postes no lado de fora de cada casa, novamente baixam a tensão para 120 V (ou 240 V) para distribuição nas casas. Devido à facilidade em aumentar ou diminuir a tensão com transformadores, a corrente alternada é de uso mais comum que a corrente contínua.

Uma linha de transmissão tem uma resistência de  $0,02 \Omega/\text{km}$ . Calcule a perda de potência  $I^2R$  se 200 kW de potência são transmitidos a partir de um gerador de potência para uma cidade 10 km afastada em (a) 240 V e (b) 4,4 kV.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Inicialmente, note que a resistência total dos 10 km de fio é  $R = (0,02 \Omega/\text{km})(10 \text{ km}) = 0,2 \Omega$ . Em cada caso, inicie encontrando a corrente necessária para transmitir 200 kW usando  $P = IV$  e, então, encontre a perda de potência usando  $I^2R$ .

- (a) 1. Encontre a corrente necessária para transmitir 200 kW de potência em 240 V:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200 \text{ kW}}{240 \text{ V}} = 833 \text{ A}$$

2. Calcule a perda de potência:

$$I^2R = (833 \text{ A})^2(0,2 \Omega) = 139.000 \text{ W}$$

- (b) 1. Agora, encontre a corrente necessária para transmitir 200 kW de potência em 4,4 kV:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200 \text{ kW}}{4,4 \text{ kV}} = 45,5 \text{ A}$$

2. Calcule a perda de potência:

$$I^2R = (45,5 \text{ A})^2(0,2 \Omega) = 414 \text{ W}$$

**NOTAS** Note que com a tensão de transmissão de 240 V quase 70% da potência são perdidos através de calor, e existe uma queda  $IR$  (tensão) através de linha de transmissão de 167 V, de modo que a potência é liberada com apenas 73 V. Entretanto, com a transmissão a 4,4 kW apenas cerca de 0,2% da potência são perdidos na transmissão, e existe uma queda  $IR$  através da linha de transmissão de apenas 9 V, de modo que a potência é liberada com apenas 0,2% de queda de tensão. Isso ilustra as vantagens da transmissão de potência em alta tensão.

## RESUMO

1. Realância é uma propriedade dos capacitores e indutores dependente da freqüência, que é análoga à resistência dos resistores.
2. Impedância é uma propriedade de um circuito ca ou de uma malha em um circuito que é análoga à resistência em um circuito cc.
3. Fasores são vetores bidimensionais que permitem representar graficamente as relações de fase em um circuito.
4. Ressonância ocorre quando a freqüência do gerador se iguala à freqüência natural do circuito oscilatório.

Tópicos	Equações e Observações Importantes	
1. Geradores de Corrente Alternada	Um gerador ca é um dispositivo que transforma energia mecânica em energia elétrica. Essa transformação pode ser obtida usando a energia mecânica, tanto girando um enrolamento condutor em um campo magnético quanto girando um ímã em um enrolamento condutor.	
FEM gerada	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{pico}} \sin(\omega t + \delta) = NBA\omega \sin(\omega t + \delta)$	29-3, 29-4
2. Corrente		
Corrente RMS	$I_{\text{rms}} = \sqrt{(I^2)_{\text{méd}}}$	29-11
Corrente RMS e valor de pico	$I_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{pico}}$	29-12
Para um resistor	$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{R,rms}}}{R}$ queda de potencial e corrente em fase	29-15
Para um indutor	$I_{\text{rms}} = \frac{V_{L,\text{rms}}}{\omega L} = \frac{V_{L,\text{rms}}}{X_L}$ queda de potencial avançada da corrente de $90^\circ$	29-25
Para um capacitor	$I_{\text{rms}} = \frac{V_{C,\text{rms}}}{1/\omega C} = \frac{V_{C,\text{rms}}}{X_C}$ queda de potencial atrasada da corrente de $90^\circ$	29-29
3. Reatância		
Reatância indutiva	$X_L = \omega L$	29-24
Reatância capacitiva	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	29-30
4. Dissipação de Potência Média		
Por um resistor	$P_{\text{méd}} = V_{R,\text{rms}} I_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}^2 R$	29-13, 29-15
Por um indutor ou por um capacitor	$P_{\text{méd}} = 0$	
5. *Fasores	Fasores são vetores bidimensionais que representam a corrente $\vec{I}$ , a queda de potencial através de um resistor $\vec{V}_R$ , a queda de potencial através de um capacitor $\vec{V}_C$ e a queda de potencial através de um indutor $\vec{V}_L$ em um circuito ca. Esses fasores giram no sentido anti-horário com uma velocidade angular que é igual à freqüência angular $\omega$ da corrente. $\vec{V}_R$ está em fase com a corrente, $\vec{V}_L$ está	

avançada em relação à corrente de  $90^\circ$  e  $\tilde{V}_C$  está atrasada em relação à corrente de  $90^\circ$ . A componente  $x$  de cada fator é igual ao módulo da corrente ou à correspondente queda de potencial em cada instante.

## 6. \*Circuitos LC e RLC Série

Se um capacitor é descarregado através de um indutor, a carga e a tensão sobre o capacitor oscilam com freqüência angular

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 29-37$$

A corrente no indutor oscila com a mesma freqüência, mas está fora de fase em relação à carga de  $90^\circ$ . A energia oscila entre a energia elétrica no capacitor e a energia magnética no indutor. Se o circuito também possui resistência, as oscilações são amortecidas porque a energia é dissipada no resistor.

7. Circuitos RLC Série Excitados por uma Diferença de Potencial Aplicada de Freqüência  $\omega$ 

Diferença de Potencial Aplicada	$V_{ap} = V_{ap,pico} \cos \omega t$
Corrente	$I = \frac{V_{ap,pico}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \quad 29-50$
Impedância Z	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 29-49$
Ângulo de Fase $\delta$	$\operatorname{tg} \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad 29-47$
Potência Média	$P_{med} = I_{rms}^2 R = V_{ap,rms} I_{rms} \cos \delta = \frac{V_{ap,rms}^2 R \omega^2}{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad 29-52, 29-53, 29-54$

## Fator de Potência

A grandeza  $\cos \delta$  na Equação 29-53 é chamada de fator de potência do circuito RLC. Na ressonância  $\delta$  é nulo, o fator de potência é 1 e

$$P_{med} = V_{ap,rms} I_{rms}$$

## Ressonância

Quando a corrente rms é máxima, o circuito é dito em ressonância. As condições para ressonância são

$$X_L = X_C, \text{ então } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{e} \quad \delta = 0$$

## 8. Fator Q

A largura da curva de ressonância é descrita pelo fator Q

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad 29-55$$

Quando a curva de ressonância é razoavelmente estreita, o fator Q pode ser aproximado por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \quad 29-56$$

## 9. Transformadores

Um transformador é um dispositivo usado para aumentar ou diminuir a tensão em um circuito sem perda considerável de potência. Para um transformador com  $N_1$  voltas no primário e  $N_2$  voltas no secundário, a diferença de potencial através

do enrolamento secundário está relacionada com a queda de potencial através do enrolamento primário por

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

29-61

Se não existem perdas de potência

$$V_{1,\text{rms}} I_{1,\text{rms}} = V_{2,\text{rms}} I_{2,\text{rms}}$$

29-63

## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil.
- Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- Problema desafiador
- Problema que pode ser resolvido com auxílio de planilha

### Problemas Conceituais

- 1 ● Conforme a freqüência em um simples circuito ca na Figura 29-27 aumenta, a corrente rms através do resistor (*a*) aumenta, (*b*) não varia, (*c*) pode aumentar ou diminuir, dependendo do módulo da freqüência original, (*d*) pode aumentar ou diminuir, dependendo do módulo da resistência, (*e*) diminui.



FIGURA 29-27

Problema 1

- 2 ● Se a tensão rms em um circuito ca é dobrada, a tensão de pico é (*a*) aumentada por um fator de 2, (*b*) diminui por um fator de 2, (*c*) aumenta por um fator  $\sqrt{2}$ , (*d*) diminui por um fator de  $\sqrt{2}$ , (*e*) não varia.

- 3 ● Se a freqüência no circuito mostrado na Figura 29-28 é dobrada, a indutância do indutor irá (*a*) aumentar por um fator de 2, (*b*) não varia, (*c*) diminui por um fator de 2, (*d*) diminui por um fator de 4, (*e*) diminui por um fator de 4.

FIGURA 29-28  
Problemas 3 e 4

- 4 ● Se a freqüência no circuito mostrado na Figura 29-28 é dobrada, a reatância indutiva do indutor irá (*a*) aumentar por um fator de 2, (*b*) não varia, (*c*) diminuir por um fator de 2, (*d*) aumentar por um fator de 4, (*e*) diminuir por um fator de 4.

- 5 ● Se a freqüência no circuito na Figura 29-29 é dobrada, a capacidade reativa irá (*a*) aumentar por um fator de 2, (*b*) não varia, (*c*) diminuir por um fator de 2, (*d*) aumentar por um fator de 4, (*e*) diminuir por um fator de 4.

FIGURA 29-29  
Problema 5

- 6 ● Em um circuito consistindo em um gerador e um indutor, existem instantes de tempo nos quais o indutor absorve potência do gerador? Existem instantes de tempo nos quais o indutor fornece potência para o gerador?

- 7 ● Em um circuito consistindo em um gerador e um capacitor, existem instantes de tempo nos quais o capacitor absorve potência do gerador? Existem instantes de tempo nos quais o capacitor fornece potência para o gerador?

- 8 ● As unidades SI da indutância vezes as da capacidade são (*a*) segundos ao quadrado, (*b*) hertz, (*c*) volts, (*d*) ampères, (*e*) ohms.

- 9 ●● Fazer circuitos LC com freqüências de oscilação de milhares de hertz ou mais é fácil, mas fazer circuitos LC que tenham pequenas freqüências é difícil. Por quê?

- 10 ● Verdadeiro ou falso:

(a) Um circuito RLC com um elevado fator  $Q$  tem uma curva de ressonância estreita.

(b) Na ressonância, a impedância de um circuito RLC é igual à resistência  $R$ .

(c) Na ressonância, a corrente e a tensão do gerador estão em fase.

11 • O fator de potência depende da freqüência?

12 • Existem desvantagens em possuir um circuito receptor de rádio com um fator  $Q$  extremamente elevado?

13 • Qual é o fator de potência para um circuito que possui indutância e capacitância, mas não resistência?

14 • Um transformador é usado para variar a (a) capacitância, (b) freqüência, (c) tensão, (d) potência, (e) nenhuma dessas respostas.

15 • Verdadeiro ou falso: se um transformador aumenta a corrente, ele deve diminuir a tensão.

16 • • Um transformador ideal possui  $N_1$  voltas no seu primário e  $N_2$  voltas no seu secundário. A potência dissipada em uma resistência carga conectada no secundário é  $P_2$  quando a tensão no primário é  $V_1$ . A corrente nas espiras do primário é, então, (a)  $P_2/V_1$ , (b)  $(N_1/N_2)(P_2/V_1)$ , (c)  $(N_2/N_1)(P_2/V_1)$ , (d)  $(N_2/N_1)^2(P_2/V_1)$ .

17 • Verdadeiro ou falso:

(a) A corrente alternada em uma resistência não dissipava potência porque a corrente é negativa durante mais tempo do que a corrente é positiva.

(b) Em freqüências muito elevadas, um capacitor atua como um curto-circuito.

### Estimativas e Aproximações

18 • • As impedâncias de motores, transformadores e eletroimãs possuem reatância indutiva. Suponha que o ângulo de fase da impedância total de uma grande planta industrial é  $25^\circ$  quando a planta está em operação total e usando 2,3 MW de potência. A potência é fornecida para a planta de uma subestação a 4,5 km; a linha de tensão de 60 Hz rms na planta é de 40.000 V. A resistência da linha de transmissão da subestação à planta é de  $5,2\ \Omega$ . O custo por quilowatt-hora é de US\$ 0,07. A planta paga apenas a energia realmente usada. (a) Qual é a resistência e a reatância indutiva da carga total da planta? (b) Qual é a corrente nas linhas de potência, e qual deve ser a tensão rms da subestação para manter a tensão na planta em 40.000 V? (c) Quanta potência é perdida na transmissão? (d) Suponha que o ângulo de fase da impedância da planta seja reduzido para  $18^\circ$  pela adição de um banco de capacitores em série com a carga. Quanto dinheiro será economizado pela empresa durante um mês de operação, presumindo que a planta opera em capacidade total por 16 h cada dia? (e) Qual deve ser a capacidade desse banco de capacitores?

### Geradores de Corrente Alternada

19 • Um enrolamento de 200 voltas tem uma área de  $4\text{ cm}^2$  e gira em um campo magnético de 0,5 T. (a) Qual freqüência irá gerar uma fem máxima de 10 V? (b) Se o enrolamento gira em 60 Hz, qual é a máxima fem?

20 • Em qual campo magnético deveria o enrolamento do Problema 19 girar para gerar uma fem máxima de 10 V em 60 Hz?

21 • Um enrolamento retangular de 2 cm por 1,5 cm possui 300 voltas e gira em um campo magnético de 4000 G. (a) Qual é a máxima fem gerada quando o enrolamento gira a 60 Hz? (b) Qual deve ser a freqüência para gerar uma fem máxima de 110 V?

22 • O enrolamento do Problema 21 gira a 60 Hz em um campo magnético  $B$ . Qual valor de  $B$  irá gerar uma fem máxima de 24 V?

### Corrente Alternada em um Resistor

23 • Uma lâmpada de 100 W é conectada em uma saída-padrão de 120 V (rms). Encontre (a)  $I_{\text{rms}}$ , (b)  $I_{\text{max}}$  e (c) a potência máxima.

24 • O interruptor de um circuito é ajustado para uma corrente de 15 A rms a uma tensão de 120 V rms. (a) Qual é o maior valor de  $I_{\text{max}}$  que o interruptor pode suportar? (b) Qual é a potência média que pode ser fornecida por esse circuito?

### Corrente Alternada em Indutores e Capacitores

25 • Qual é a reatância de um indutor de 1 mH a (a) 60 Hz, (b) 600 Hz e (c) 6 kHz?

26 • Um indutor possui uma reatância de  $100\ \Omega$  em 80 Hz. (a) Qual é a sua indutância? (b) Qual é a sua reatância em 160 Hz?

27 • Em qual freqüência a reatância de um capacitor de  $10\ \mu\text{F}$  é igual àquela de um indutor de 1 mH?

28 • Qual é a reatância de um capacitor de 1 nF em (a) 60 Hz, (b) 6 kHz, e (c) 6 MHz?

29 • Uma fem de máximo 10 V e freqüência de 20 Hz é aplicada a um capacitor de  $20\ \mu\text{F}$ . Encontre (a)  $I_{\text{max}}$  e (b)  $I_{\text{rms}}$ .

30 • Em qual freqüência a reatância de um capacitor de  $10\ \mu\text{F}$  é (a)  $1\ \Omega$ , (b)  $100\ \Omega$  e (c)  $0,01\ \Omega$ ?

31 • • Duas fontes de tensão ca estão conectadas em série com um resistor  $R = 25\ \Omega$ . Uma fonte é dada por

$$V_1 = (5\text{ V}) \cos(\omega t - \alpha),$$

e a outra fonte

$$V_2 = (5\text{ V}) \cos(\omega t + \alpha),$$

com  $\alpha = \pi/6$ . (a) Encontre a corrente em  $R$  usando uma identidade trigonométrica para a soma de dois cossenos. (b) Use diagramas fasoriais para encontrar a corrente em  $R$ . (c) Encontre a corrente em  $R$  se  $\alpha = \pi/4$  e a amplitude de  $V_2$  é aumentada de 5 V para 7 V.

### Circuitos LC e RLC sem um Gerador

32 • Mostre a partir das definições de henry e farad que  $1/\sqrt{LC}$  possui unidade  $\text{s}^{-1}$ .

33 • (a) Qual é o período de oscilação de um circuito LC consistindo em um enrolamento de 2 mH e um capacitor de  $20\ \mu\text{F}$ ? (b) Que indutância é necessária para construir junto com um capacitor de  $80\ \mu\text{F}$  um circuito LC que oscila com uma freqüência de 60 Hz?

34 • • Um circuito LC possui capacitância  $C_1$  e indutância  $L_1$ . Um segundo circuito possui capacitância  $C_2 = 1/2C_1$  e indutância  $L_2 = 2L_1$ , e um terceiro circuito possui capacitância  $C_3 = 2C_1$  e  $L_3 = 1/2L_1$ . (a) Mostre que cada circuito oscila com a mesma freqüência. (b) Em qual circuito a corrente será máxima se os capacitores em cada um deles forem carregados com o mesmo potencial  $V$ ?

35 • • • Um capacitor de  $5\ \mu\text{F}$  é carregado até 30 V e é conectado a um indutor de 10 mH. (a) Quanta energia é armazenada no sistema? (b) Qual é a freqüência de oscilação do circuito? (c) Qual é a máxima corrente no circuito?

36 • Um enrolamento pode ser considerado como uma resistência e uma indutância em série. Admita que  $R = 100\ \Omega$  e  $L = 0,3\ \text{H}$ . O enrolamento é conectado a uma linha de 120 V rms e 60 Hz. Encontre (a) o fator de potência, (b) a corrente rms e (c) a potência média fornecida.

- 37 •• Um indutor e um capacitor estão conectados, como na Figura 29-30. Com a chave aberta, a placa esquerda do capacitor possui carga  $Q_0$ . A chave é fechada, e a carga e a corrente variam senoidalmente com o tempo. (a) Represente graficamente  $Q$  versus  $t$  e  $I$  versus  $t$  e explique como interpretar esses dois gráficos para ilustrar que a corrente está avançada de  $90^\circ$  em relação à carga. (b) Usando uma identidade trigonométrica, mostre que a expressão para a corrente (Equação 29-38) está avançada em relação à expressão para a carga (Equação 29-39) de  $90^\circ$ . Isto é, mostre que

$$I = -I_{\text{pico}} \sin \omega t = I_{\text{pico}} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

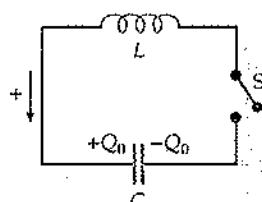


FIGURA 29-30  
Problema 37

### Circuitos RL com um Gerador

- 38 •• Uma resistência  $R$  e uma indutância de  $1,4 \text{ H}$  estão em série com uma fonte de tensão ca de  $60 \text{ Hz}$ . A tensão através do resistor é  $30 \text{ V}$ , e a tensão através do indutor é de  $40 \text{ V}$ . (a) Qual é a resistência  $R$ ? (b) Qual é a tensão ca de entrada?

- 39 •• Uma bobina possui resistência cc de  $80 \Omega$  e impedância de  $200 \Omega$  em uma freqüência de  $1 \text{ kHz}$ . Despreze a capacidade associada à bobina nessa freqüência. Qual é a indutância da bobina?

- 40 •• Uma única linha de transmissão transporta dois sinais de tensão dados por  $V_1 = 10 \text{ V} \cos 100t$  e  $V_2 = 10 \text{ V} \cos 10.000t$ , onde  $t$  está em segundos. Um indutor de  $1 \text{ H}$  em série e um resistor de  $1 \text{ k}\Omega$  são inseridos na linha de transmissão, como indicado na Figura 29-31. (a) Qual é o sinal de tensão observado no lado de saída da linha de transmissão? (b) Qual é a razão entre a amplitude de baixa freqüência e a amplitude de alta freqüência?

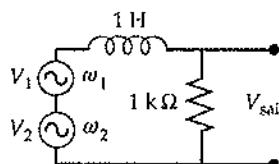


FIGURA 29-31  
Problema 40

- 41 •• Um enrolamento com resistência e indutância é conectado a uma linha de  $120 \text{ V rms}$  e  $60 \text{ Hz}$ . A potência média fornecida para o enrolamento é  $60 \text{ W}$ , e a corrente rms é  $1,5 \text{ A}$ . Encontre (a) o fator de potência, (b) a resistência do enrolamento e (c) a indutância do enrolamento. (d) A corrente está avançada ou atrasada em relação à tensão? Qual é o ângulo de fase  $\delta$ ?

- 42 •• Um indutor de  $36 \text{ mH}$ , com uma resistência de  $40 \Omega$ , está conectado com uma fonte cuja tensão é  $\mathcal{E} = 345 \text{ V} \cos 150\pi t$ , onde  $t$  está em segundos. Determine a máxima corrente no circuito, as tensões máxima e rms através do indutor, a dissipação média de potência, as energias máxima e média armazenadas no campo magnético do indutor.

- 43 •• Uma bobina de resistência  $R$ , indutância  $L$  e capacitância desprezível possui um fator de potência de  $0,866$  a uma freqüência de  $60 \text{ Hz}$ . Qual é o fator de potência para uma freqüência de  $240 \text{ Hz}$ ?

- 44 •• Um resistor e um indutor estão conectados em paralelo com uma fem  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}}$  como mostrado na Figura 29-32. Mostre que (a) a corrente no resistor é  $I_R = \mathcal{E}_{\text{max}}/R \cos \omega t$ , (b) a corrente no indutor é  $I_L = \mathcal{E}_{\text{max}}/X_L \cos(\omega t - 90^\circ)$  e (c)  $I = I_R + I_L = I_{\text{max}} \cos(\omega t - \delta)$ , onde  $\delta = R/X_L$  e  $I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/Z$  com  $Z^2 = R^2 + X_L^2$ .

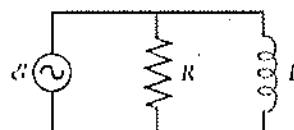


FIGURA 29-32  
Problema 44

- 45 •• A Figura 29-33 mostra um resistor de carga  $R_C = 20 \Omega$  conectado a um filtro passa-altas consistindo de um indutor  $L = 3,2 \text{ mH}$  e um resistor  $R = 4 \Omega$ . A tensão de entrada é  $\mathcal{E} = 100 \text{ V} \cos 2\pi ft$ . Encontre as correntes rms em  $R$ ,  $L$  e  $R_C$  se (a)  $f = 500 \text{ Hz}$  e (b)  $f = 2000 \text{ Hz}$ . (c) Qual fração da potência total liberada pela fonte de tensão é dissipada no resistor de carga se a freqüência é de  $500 \text{ Hz}$  e a freqüência é de  $2000 \text{ Hz}$ ?

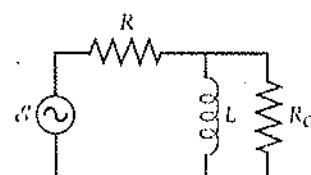


FIGURA 29-33  
Problema 45

- 46 •• Uma fonte ca  $\mathcal{E}_1 = 20 \text{ V} \cos 2\pi f t$  em série com uma bateria cuja fem é  $\mathcal{E}_2 = 16 \text{ V}$  está conectada com um circuito consistindo em resistores  $R_1 = 10 \Omega$  e  $R_2 = 8 \Omega$  e um indutor  $L = 6 \text{ mH}$  (Figura 29-34). Encontre a potência dissipada em  $R_1$  e  $R_2$  se (a)  $f = 100 \text{ Hz}$ , (b)  $f = 200 \text{ Hz}$  e (c)  $f = 800 \text{ Hz}$ .

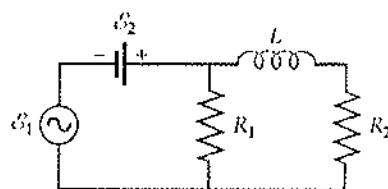


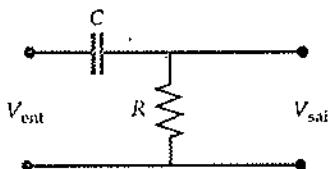
FIGURA 29-34  
Problema 46

- 47 •• Uma tensão de  $100 \text{ V rms}$  é aplicada a um circuito  $RC$  sério. A tensão rms através do capacitor é de  $80 \text{ V}$ . Qual é a tensão através do resistor?

### Filtros e Retificadores

- 48 •• O circuito mostrado na Figura 29-35 é chamado de filtro  $RC$  passa-altas porque transmite sinais com altas freqüências de entrada com maior amplitude que sinais de baixa freqüência. Se a tensão de entrada é  $V_{\text{ent}} = V_{\text{pico}} \cos \omega t$ , mostre que a tensão de saída é  $V_{\text{sa}} = V_{\text{II}} \cos(\omega t - \delta)$ , onde

$$V_{\text{II}} = \frac{V_{\text{pico}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$



**FIGURA 29-35**  
Problema 48

49 •• (a) Mostre que a constante de fase no Problema 48 é dada por

$$\operatorname{tg} \delta = -\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

(b) Qual é o valor de  $\delta$  no limite quando  $\omega \rightarrow 0$ ? (c) Qual é o valor de  $\delta$  no limite quando  $\omega \rightarrow \infty$ ?

50 •• Admita que o resistor do Problema 48 tem valor  $R = 20 \text{ k}\Omega$  e o capacitor possui valor  $C = 15 \text{ nF}$ . (a) Em qual freqüência  $f$  tem-se  $V_{\text{saí}} = V_{\text{ent}}/\sqrt{2}$ ? (Essa é conhecida como a freqüência 3 dB, ou  $f_{3\text{dB}}$ , para o circuito.) (b) Usando um programa de computador, faça um gráfico de  $V_{\text{saí}}$  versus  $f$ . Use uma escala logarítmica para cada variável. Tenha certeza de que a escala se estenda pelo menos de 0,1  $f_{3\text{dB}}$  até 10  $f_{3\text{dB}}$ . (c) Faça um gráfico de  $\delta$  versus  $f$  e trace  $f$  em uma escala logarítmica. Qual valor  $\delta$  possui em  $f = f_{3\text{dB}}$ ?

51 ••• Mostre que se um sinal de tensão arbitrário alimenta o filtro passa-altas do Problema 48, no qual a variação no tempo do sinal é muito menor que  $1/(RC)$ , a saída do circuito será proporcional à derivada no tempo da entrada.

52 •• Define-se a saída do filtro passa-altas do Problema 48 na escala decibel como

$$\beta = 20 \log_{10} \frac{V_{\text{II}}}{V_{\text{pico}}}$$

Mostre que para  $f < f_{3\text{dB}}$ , onde  $f_{3\text{dB}}$  é definida no Problema 50, a saída cai a uma taxa de 6 dB por oitava. Isto é, toda vez que a freqüência é dividida por 2, a saída tem uma queda de 6 dB.

53 •• Mostre que a potência média dissipada no resistor do filtro passa-altas do Problema 48 é dada por

$$P_{\text{med}} = \frac{V_{\text{pico}}^2}{2R} \left( \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} \right)$$

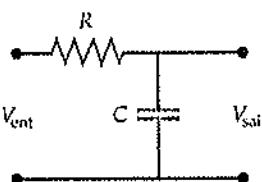
54 •• Uma aplicação do filtro passa-altas do Problema 48 é a de filtragem de ruídos para circuitos eletrônicos (i.e., um filtro que bloqueia ruídos de baixa freqüência). Usando  $R = 20 \text{ k}\Omega$ , determine um valor de  $C$  para um filtro passa-altas que atenua um sinal de tensão de entrada em  $f = 60 \text{ Hz}$  por um fator de 10.

55 •• O circuito mostrado na Figura 29-36 é um filtro passa-baixas. Se a tensão de saída é

$$V_{\text{entra}} = V_{\text{pico}} \cos \omega t \text{ mostra que a tensão de saída é}$$

$$V_{\text{saí}} = V_{\text{I}} \cos(\omega t - \delta) \text{ onde}$$

$$V_{\text{I}} = \frac{V_{\text{pico}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$



**FIGURA 29-36**  
Problema 55

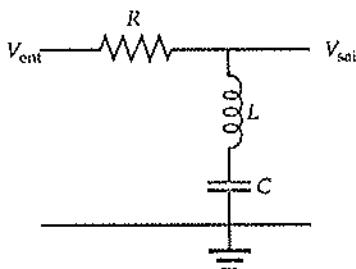
Discuta o comportamento da tensão de saída nos casos limites de  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ .

56 •• Mostre que  $\delta$  para o circuito passa-baixas do Problema 55 é dada pela expressão  $\operatorname{tg} \delta = \omega RC$ . Encontre o valor de  $\delta$  no limite  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ .

57 •• Usando um programa de computador, faça um gráfico de  $V_{\text{I}}$  versus  $f = \omega/2\pi$  e  $\delta$  versus  $f$  para o filtro passa-baixas do Problema 55. Use  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 5 \text{nF}$ .

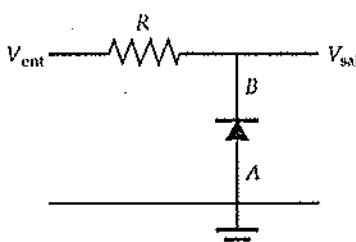
58 ••• Mostre que se um sinal de tensão arbitrário alimenta o filtro passa-baixas do Problema 55, no qual a variação no tempo do sinal é muito mais rápida que  $1/(RC)$ , a saída do circuito será proporcional à integral da entrada.

59 ••• Mostre que o filtro de corte, mostrado na Figura 29-37, alia rejeitando sinais na freqüência  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Como a largura da banda de freqüência rejeitada depende da resistência  $R$ ?



**FIGURA 29-37**  
Problema 59

60 •• Um retificador de meia onda para transformar uma tensão ca em uma tensão cc é mostrado na Figura 29-38. O diodo na figura pode ser considerado como uma válvula de uma via para a corrente, permitindo que a corrente passe na sua direção (para cima) quando a tensão entre os pontos A e B é maior que +0,6 V. A resistência do diodo é efetivamente infinita quando a tensão é menor que +0,6 V. Usando os mesmos eixos, faça gráficos dos ciclos de  $V_{\text{saí}}$  e  $V_{\text{saí}}$  versus  $t$  quando  $V_{\text{ent}} = V_{\text{pico}} \cos \omega t$ .



**FIGURA 29-38**  
Problema 60

61 •• (a) A saída do retificador do Problema 60, Figura 29-38, pode ser suavizada fazendo-a passar através de um filtro passa-latas. A saída resultante é uma tensão cc com uma pequena quanti-

dade de oscilação em torno dela, como mostrado na Figura 29-39b. Se a freqüência de entrada  $f = \omega/2\pi = 60$  Hz e a resistência é  $R = 1\text{ k}\Omega$ , encontre um valor que aproxime  $C$ , de tal modo que a tensão de saída varie menos que 50% do valor médio ao longo de um ciclo.

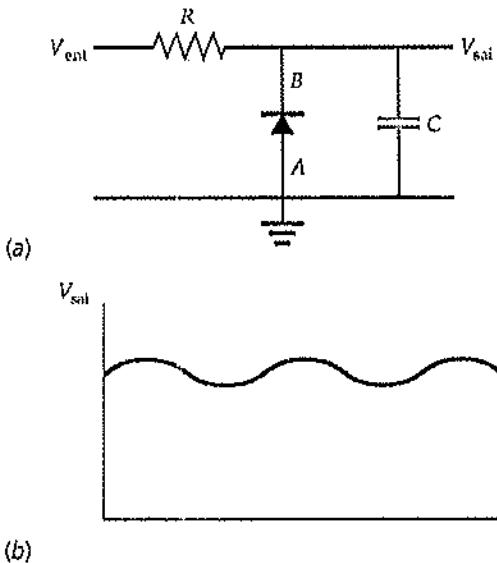


FIGURA 29-39  
Problema 61

### Círculo LC com um Gerador

62 •• O gerador de tensão da Figura 29-40 é dado por  $\mathcal{E} = (100\text{ V}) \cos(2\pi ft)$ . (a) Para cada malha, qual é a amplitude da corrente e qual é a sua fase relativamente à da tensão aplicada? (b) Qual é a freqüência angular  $\omega$  de tal modo que a corrente no gerador desapareça? (c) Nessa ressonância, qual é a corrente no indutor? Qual é a corrente no capacitor? (d) Desenhe um diagrama fasorial mostrando as relações gerais entre a tensão aplicada, a corrente gerada, a corrente no capacitor e a corrente no indutor para o campo onde a reatância indutiva é maior que a reatância capacitiva.

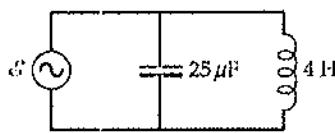


FIGURA 29-40  
Problema 62

63 •• A carga no capacitor de um circuito LC série é dada por  $Q = (15\text{ }\mu\text{C}) \cos(1250t + \pi/4)$ , onde  $t$  está em segundos. (a) Encontre a corrente como função do tempo. (b) Encontre  $C$  se  $L = 28\text{ mH}$ . (c) Escreva expressões para a energia elétrica  $U_e$ , a energia magnética  $U_m$  e para a energia total  $U$ .

64 ••• Um método para medir a compressibilidade de um material dielétrico usa um circuito LC com um capacitor de placas paralelas. O dielétrico é inserido entre as placas, e a variação na freqüência de ressonância é determinada conforme as placas do capacitor são sujeitas a esforços mecânicos de compressão. Em tal arranjo, a freqüência de ressonância é de 120 MHz quando um dielétrico com espessura de 0,1 cm e constante dielétrica  $k = 6,8$  é colocado entre as placas do capacitor. Sob uma tensão mecânica compressiva de 800 atm, a freqüência de ressonância diminui para 116 MHz. Encontre o módulo de Young para o material dielétrico.

65 ••• A Figura 29-41 mostra uma indutância  $L$  e um capacitor de placas paralelas de largura  $w = 20\text{ cm}$  e espessura 0,2 cm. Um dielétrico de constante dielétrica  $k = 4,8$ , que está completamente inserido no espaço entre as placas, pode deslizar entre elas. O indutor possui uma indutância  $L = 2\text{ mH}$ . Quando metade do dielétrico está entre as placas do capacitor (i.e., quando  $x = 1/2w$ ), a freqüência de ressonância dessa combinação LC é 90 MHz. (a) Qual é a capacidade do capacitor sem o dielétrico? (b) Encontre a freqüência de ressonância como uma função de  $x$ .

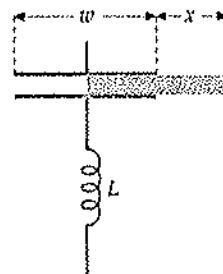


FIGURA 29-41  
Problema 65

### Circuitos RLC com um Gerador

66 • Um circuito RLC série em um receptor de rádio é ajustado por um capacitor variável, de tal modo que ele pode entrar em ressonância em freqüências de 500 até 1600 kHz. Se  $L = 1\text{ }\mu\text{H}$ , encontre a faixa de capacidades necessárias para cobrir essa faixa de freqüências.

67 • (a) Encontre o fator de potência para o circuito no Exemplo 29-5 quando  $\omega = 400$  rad/s. (b) Em qual freqüência angular o fator de potência é 0,5?

68 • Um gerador ca com máxima fem de 20 V está conectado em série com um capacitor de  $20\text{ }\mu\text{F}$  e um resistor de  $80\text{ }\Omega$ . Não existe indutância no circuito. Encontre (a) o fator de potência, (b) a corrente rms e (c) a potência média se a freqüência angular do gerador é de 400 rad/s.

69 •• Mostre que a fórmula  $P_{\text{med}} = R_{\text{rms}}^2/Z^2$  fornece o resultado correto para um circuito contendo apenas um gerador e (a) um resistor, (b) um capacitor e (c) um indutor.

70 •• Um circuito RLC série com  $L = 10\text{ mH}$ ,  $C = 2\text{ }\mu\text{F}$  e  $R = 5\text{ }\Omega$  é alimentado por um gerador com uma fem máxima de 100 V e uma freqüência angular variável  $\omega$ . Encontre (a) a freqüência de ressonância  $\omega_0$  e (b)  $I_{\text{rms}}$  na ressonância. Quando  $\omega = 8000$  rad/s, encontre (c)  $X_C$  e  $X_L$ , (d)  $Z$  e  $I_{\text{rms}}$  e (e) o ângulo de fase  $\delta$ .

71 •• Para o circuito no Problema 70, faça a freqüência do gerador  $f = \omega/2\pi = 1\text{ kHz}$ . Encontre (a) a freqüência de ressonância  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , (b)  $X_C$  e  $X_L$ , (c) a impedância total  $Z$  e  $I_{\text{rms}}$  e (d) o ângulo de fase  $\delta$ .

72 •• Encontre o fator de potência e o ângulo de fase  $\delta$  para o circuito do Problema 70 quando a freqüência do gerador é (a) 900 Hz, (b) 1,1 kHz e (c) 1,3 kHz.

73 •• Encontre (a) o fator  $Q$  e (b) a largura da curva de ressonância para o circuito do Problema 70. (c) Qual é o fator de potência quando  $\omega = 8000$  rad/s?

74 •• Estações de rádio FM possuem freqüências portadoras que são separadas por 0,20 MHz. Quando o rádio está sintonizado em uma estação, por exemplo em 100,1 MHz, a largura da curva de ressonância do circuito receptor deve ser muito menor que 0,2 MHz, de tal modo que as estações adjacentes não sejam recebidas. Se  $f_0 = 100,1\text{ MHz}$  e  $\Delta f = 0,05\text{ Hz}$ , qual é o fator  $Q$  para o circuito?

75 •• Uma bobina está conectada a um gerador de 100 V ca e 60 Hz. Nessa freqüência, a bobina possui uma impedância de  $10\ \Omega$  e uma reatância de  $8\ \Omega$ . (a) Qual é a corrente na bobina? (b) Qual é o ângulo de fase entre a corrente e a tensão aplicada? (c) Qual capacidade em série é requerida de modo que a corrente e a tensão estejam em fase? (d) Qual é a tensão medida entre os terminais do capacitor?

76 •• Um indutor de  $0,25\ \text{H}$  e um capacitor  $C$  estão conectados em série com um gerador ca de 60 Hz. Um voltímetro ca é usado para medir as tensões rms através do indutor e do capacitor separadamente. A tensão rms através do capacitor é de 75 V, e através do indutor é de 50 V. (a) Encontre a capacidade  $C$  e a corrente rms no circuito. (b) Qual deve ser a tensão rms medida através do capacitor e do indutor juntos?

77 •• (a) Mostre que a Equação 29-47 pode ser escrita como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega R}$$

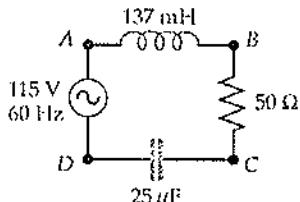
Encontre  $\delta$  aproximadamente em (b) freqüências muito baixas e (c) freqüências muito altas.

78 •• (a) Mostre que em um circuito  $RC$  série sem indutância o fator de potência é dado por

$$\cos \delta = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

(b) Usando um programa de computador, faça um gráfico do fator de potência *versus*  $\omega$ .

79 •• No circuito mostrado na Figura 29-42, o gerador ca produz uma tensão rms de 115 V quando opera a 60 Hz. Qual é a tensão rms entre os pontos (a)  $AB$ , (b)  $BC$ , (c)  $CD$ , (d)  $AC$  e (e)  $BD$ ?



**FIGURA 29-42**  
Problema 79

80 •• Quando um circuito  $RLC$  série está conectado a uma linha de 120 V rms e 60 Hz, a corrente é  $I_{\max} = 31\ \text{A}$  e a corrente está avançada em relação à tensão de  $45^\circ$ . (a) Encontre a potência fornecida para o circuito. (b) Qual é a resistência? (c) Se a indutância  $L = 0,05\ \text{H}$ , encontre a capacidade  $C$ . (d) Qual capacidade ou indutância deve ser adicionada para se obter um fator de potência 1?

81 •• Um circuito  $RLC$  série é alimentado por uma freqüência de 500 Hz. O ângulo de fase entre a tensão aplicada e a corrente é determinado a partir de uma medida no osciloscópio como sendo  $\delta = 75^\circ$ . Se a resistência total é conhecida como sendo  $35\ \Omega$  e a indutância é  $0,15\ \text{H}$ , qual é a capacidade do circuito?

82 •• Um circuito  $RLC$  série com  $R = 400\ \Omega$ ,  $L = 0,35\ \text{H}$  e  $C = 5\ \mu\text{F}$  é alimentado por um gerador de freqüência variável  $f$ . (a) Qual é a freqüência de ressonância  $f_0$ ? Encontre  $f/f_0$  quando o ângulo de fase  $\delta$  é (b)  $60^\circ$  e (c)  $-60^\circ$ .

83 •• Faça um esboço da impedância  $Z$  *versus*  $\omega$  para (a) um circuito  $LR$  série, (b) um circuito  $RC$  série e (c) um circuito  $RLC$  série.

84 •• Mostre que a Equação 29-48 pode ser escrita como

$$I_{\max} = \frac{\omega \mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2}}$$

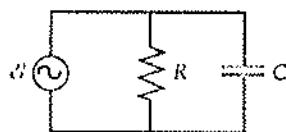
85 •• Em um circuito  $RLC$  série,  $X_C = 16\ \Omega$  e  $X_L = 4\ \Omega$  em alguma freqüência. A freqüência de ressonância é  $\omega_0 = 10^4\ \text{rad/s}$ . (a) Encontre  $L$  e  $C$ . Se  $R = 5\ \Omega$  e  $\mathcal{E}_{\max} = 26\ \text{V}$ , encontre (b) o fator  $Q$  e (c) a máxima corrente.

86 •• Em um circuito  $RLC$  série conectado a um gerador ca, cuja máxima fem é 200 V, a resistência é  $60\ \Omega$  e a capacidade é  $8\ \mu\text{F}$ . A indutância pode variar de  $8\ \text{mH}$  até  $40\ \text{mH}$ , pela inserção de um núcleo de ferro no solenóide. A freqüência angular do gerador é de  $2500\ \text{rad/s}$ . Se a tensão no capacitor não excede 150 V, encontre (a) a máxima corrente e (b) a faixa de indutância de emprego seguro.

87 •• Um certo dispositivo elétrico libera  $10\ \text{A}$  rms e possui uma potência média de  $720\ \text{W}$  quando conectado a uma linha de potência de 120 V rms e 60 Hz. (a) Qual é a impedância do dispositivo? (b) Qual combinação série de resistência e reatância é equivalente a esse circuito? (c) Se a corrente está avançada em relação à fem, a reatância é inductiva ou capacitativa?

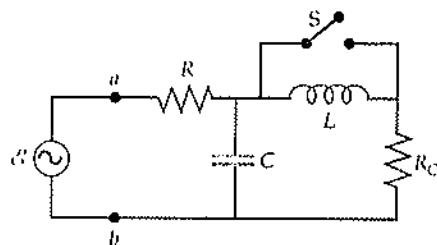
88 •• Um método para medida de indutância é conectar o indutor em série com uma capacidade conhecida, uma resistência conhecida, um amperímetro ca e um gerador de sinais de freqüência variável. A freqüência do gerador de sinais é variada e a fem é mantida constante até que a corrente seja máxima. (a) Se  $C = 10\ \mu\text{F}$ ,  $\mathcal{E}_{\max} = 10\ \text{V}$ ,  $R = 100\ \Omega$  e  $I$  é máxima em  $\omega = 5000\ \text{rad/s}$ , qual é  $L$ ? (b) Qual é  $I_{\max}$ ?

89 •• Um resistor e um capacitor estão conectados em paralelo com uma fem senoidal  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$ , como mostrado na Figura 29-43. (a) Mostre que a corrente no resistor é  $I_R = (\mathcal{E}_{\max}/R) \cos \omega t$ . (b) Mostre que a corrente na malha do capacitor é  $I_C = (\mathcal{E}_{\max}/X_C) \cos(\omega t + 90^\circ)$ . (c) Mostre que a corrente total é dada por  $I = I_R + I_C = I_{\max} \cos(\omega t + \delta)$ , onde  $\operatorname{tg} \delta = R/X_C$  e  $I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$  com  $Z^{-2} = R^{-2} + X_C^{-2}$ .



**FIGURA 29-43**  
Problema 89

90 •• No circuito mostrado na Figura 29-44,  $R = 10\ \Omega$ ,  $R_C = 30\ \Omega$ ,  $L = 150\ \text{mH}$  e  $C = 8\ \mu\text{F}$ ; a freqüência da fonte ca é de 10 Hz, e sua amplitude é 100 V. (a) Usando diagramas fasoriais, determine a impedância do circuito quando a chave  $S$  é fechada. (b) Determine a impedância do circuito quando a chave  $S$  é aberta. (c) Quais são as tensões através do resistor  $R_C$  quando a chave  $S$  é fechada e quando ela é aberta? (d) Repita as Partes (a), (b), e (c) com a freqüência da fonte variando para 1000 Hz. (e) Qual arranjo é um melhor filtro passa-baixas, a chave  $S$  aberta ou a chave  $S$  fechada?



**FIGURA 29-44**  
Problema 90

- 91 ••• No circuito mostrado na Figura 29-45,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $L = 12 \text{ mH}$ ,  $C = 30 \mu\text{F}$  e  $\mathcal{E} = (40 \text{ V}) \cos \omega t$ . (a) Encontre a freqüência de ressonância. (b) Na freqüência de ressonância, quais são as correntes rms em cada resistor e a corrente rms fornecida pela fonte de sín.

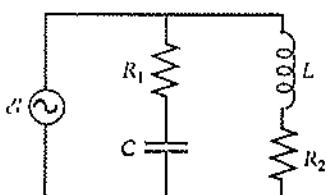


FIGURA 29-45  
Problemas 91, 103 e 104

- 92 ••• Para o circuito na Figura 29-24, desenvolva uma expressão para o  $Q$  do circuito presumindo que a ressonância é pronunciada.

- 93 ••• Para o circuito na Figura 29-24,  $L = 4 \text{ mH}$ . (a) Qual capacidade  $C$  irá resultar em uma freqüência de ressonância de  $4 \text{ kHz}$ ? (b) Quando  $C$  possui o valor encontrado na Parte (a), qual deve ser a resistência  $R$ , de tal modo que o  $Q$  do circuito seja 8?

- 94 ••• Se a capacitância  $C$  no Problema 93 é reduzida para a metade do valor encontrado no Problema 93, quais são então a freqüência de ressonância e o  $Q$  do circuito? Qual deveria ser a resistência  $R$  para fornecer  $Q = 8$ ?

- 95 ••• Um circuito série consiste em um capacitor de  $4,0 \text{ nF}$ , um indutor de  $36 \text{ mH}$  e um resistor de  $100 \Omega$ . O circuito está conectado a uma fonte ca de  $20 \text{ V}$ , cuja freqüência pode variar ao longo de uma larga faixa. (a) Encontre a freqüência de ressonância  $f_0$  do circuito. (b) Na ressonância, qual é a corrente rms no circuito e quais são as tensões rms através do indutor e do capacitor? (c) Qual é a corrente rms e quais são as tensões rms através do indutor e do capacitor em  $f = f_0 + 1/2 \Delta f$ , onde  $\Delta f$  é a largura de ressonância?

- 96 ••• No circuito paralelo mostrado na Figura 29-46,  $V_{\text{max}} = 110 \text{ V}$ . (a) Qual é a impedância de cada malha? (b) Para cada malha, qual é a amplitude da corrente e sua fase relativamente à tensão aplicada? (c) Obtenha o diagrama fasorial da corrente e use-o para encontrar a corrente total e sua fase relativamente à tensão aplicada.

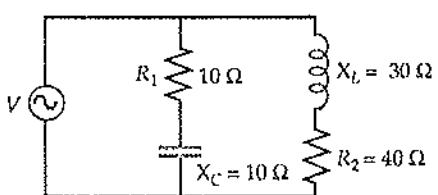


FIGURA 29-46  
Problema 96

- 97 ••• (a) Mostre que a Equação 29-47 pode ser escrita como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0}$$

- (b) Mostre que próximo à ressonância

$$\operatorname{tg} \delta \approx \frac{2Q(\omega - \omega_0)}{\omega}$$

- (c) Faça um esboço de  $\delta$  versus  $x$ , onde  $x = \omega/\omega_0$  para um circuito com alto  $Q$  e para um com baixo  $Q$ .

98 ••• Mostre por substituição direta que a corrente dada pela Equação 29-46 com  $\delta$  e  $I_{\text{max}}$  dadas pelas Equações 29-47 e 29-48, respectivamente, satisfazem a Equação 29-45. (Sugestão: use identidades trigonométricas para o seno e o co-seno da soma de dois ângulos, e escreva a equação na forma  $A \sin \omega t + B \cos \omega t = 0$ . Com essa equação deve ocorrer para todos os instantes de tempo,  $A = 0$  e  $B = 0$ .)

99 ••• Um gerador ca está em série com um capacitor e um indutor em um circuito com resistência desprezível. (a) Mostre que a carga no capacitor obedece à equação

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = Q_{\text{max}} \cos \omega t$$

(b) Mostre por substituição direta que essa equação é satisfeita por  $Q = Q_{\text{max}} \cos \omega t$  se

$$Q_{\text{max}} = -\frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

(c) Mostre que a corrente pode ser escrita como  $I = I_{\text{max}} \cos(\omega t - \delta)$ , onde

$$I_{\text{max}} = \frac{\omega \mathcal{E}_{\text{max}}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{|X_L - X_C|}$$

e  $\delta = -90^\circ$  para  $\omega < \omega_0$  e  $\delta = 90^\circ$  para  $\omega > \omega_0$ .

100 ••• A Figura 29-20 mostra um gráfico da potência média  $P_{\text{med}}$  versus a freqüência do gerador  $\omega$  para um circuito  $RLC$  com um gerador. A potência média  $P_{\text{med}}$  é dada pela Equação 29-54. A largura completa no meio-máximo,  $\Delta\omega$ , é a largura da curva de ressonância entre dois pontos, onde  $P_{\text{med}}$  é metade de seu valor máximo. Mostre que para uma ressonância com pico pronunciado,  $\Delta\omega \approx R/L$  e, portanto, que nesse caso  $Q = \omega_0/\Delta\omega$  (Equação 29-56). (Sugestão: na ressonância, o denominador da expressão da direita na Equação 29-54 é  $\omega^2 R^2$ . Os pontos de potência média irão ocorrer quando o denominador é o dobro do valor próximo da ressonância; isto é, quando  $L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega^2 R^2 \approx \omega_0^2 R^2$ . Faça  $\omega_1$  e  $\omega_2$  como sendo as soluções dessa equação. Para uma ressonância com pico pronunciado,  $\omega_1 \approx \omega_0$  e  $\omega_2 \approx \omega_0$ . Então, usando o fato de que  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ , encontra-se que  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx R/L$ .)

101 • Mostre por substituição direta que

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

(Equação 29-43b) é satisfeita por

$$Q = Q_0 e^{-Rt/2L} \cos \omega' t$$

onde

$$\omega' = \sqrt{(1/LC - (R/2L)^2)}$$

$Q_0$  é a carga sobre o capacitor em  $t = 0$ .

102 ••• Um método para medir a suscetibilidade magnética de uma amostra usa um circuito  $LC$  consistindo em um solenóide com núcleo de ar e um capacitor. A freqüência de ressonância do circuito sem a amostra é determinada e, depois, medida novamente com a amostra inserida no solenóide. Suponha que o solenóide tem comprimento  $4 \text{ cm}$ ,  $0,3 \text{ cm}$  de diâmetro e possui  $400$  voltas de um fio fino. Admita que a amostra inserida no solenóide tem também  $4 \text{ cm}$  de comprimento e ocupa completamente o espaço interno onde havia ar. Despreze os efeitos de extremidade. (Na prática, uma amostra

de teste de suscetibilidade conhecida de mesma forma que a desconhecida é usada para calibrar o instrumento.) (a) Qual é a indutância do solenóide vazio? (b) Qual deverá ser a capacitância do capacitor de tal modo que a freqüência de ressonância do circuito sem a amostra seja de 6,0000 MHz? (c) Quando uma amostra é inserida no solenóide, a freqüência de ressonância cai para 5,9989 MHz. Determine a suscetibilidade da amostra.

103 • • • (a) Encontre a freqüência angular  $\omega$  para o circuito no Problema 91, de tal modo que os módulos da reatância das duas malhas paralelas sejam iguais. (b) Nessa freqüência, qual é a dissipação de potência em cada um dos dois resistores?

104 • • • (a) Para o circuito do Problema 91, encontre a freqüência angular  $\omega$  para a qual a dissipação de potência nos dois resistores é a mesma. (b) Nessa freqüência angular, qual é a reatância de cada uma das duas malhas paralelas? (c) Desenhe um diagrama fasorial mostrando a corrente através de cada uma das malhas paralelas. (d) Qual é a impedância do circuito?

### \*O Transformador

105 • Uma tensão ca de 24 V é necessária para um dispositivo cuja impedância é de  $12 \Omega$ . (a) Qual deve ser a razão de voltas do transformador, de tal modo que o dispositivo possa ser operado a partir de uma linha de 120 V? (b) Suponha que o transformador é acidentalmente conectado invertido (i.e., com o enrolamento secundário ligado à linha de 120 V e a carga de  $12 \Omega$  no primário). Quanta corrente irá então fluir através do enrolamento primário?

106 • Um transformador possui 400 voltas no primário e 8 voltas no secundário. (a) Este é um transformador amplificador ou atenuador? (b) Se o primário é conectado em 120 V rms, qual é a tensão de circuito aberto no secundário? (c) Se a corrente no primário é de 0,1 A, qual é a corrente no secundário, presumindo a corrente de magnetização desprezível e que não haja perda de potência?

107 • O primário de um transformador atenuador possui 250 voltas e está conectado a uma linha de 120 V. O secundário deve fornecer 20 A em 9 V. Encontre (a) a corrente no primário e (b) o número de voltas no secundário, admitindo 100% de eficiência.

108 • Um transformador possui 500 voltas no seu primário, que está conectado em 120 V rms. Seu enrolamento secundário pode ser conectado em três posições para fornecer saídas de 2,5 V, 7,5 V e 9 V. Quantas voltas são necessárias para cada parte do enrolamento secundário?

109 • O circuito de distribuição de uma linha de potência residencial está operando em 2000 V rms. Essa tensão deve ser reduzida para 240 V rms para o uso interno nas residências. Se o lado secundário do transformador possui 400 voltas, quantas voltas existem no primário?

110 • • Um oscilador de áudio (fonte ca) com uma resistência interna de  $2000 \Omega$  e uma tensão de saída rms de circuito aberto de 12 V deve ser usado para alimentar um alto-falante com uma resistência de  $8 \Omega$ . Qual dever ser a razão do número de voltas do primário e do secundário de um transformador, de tal modo que a máxima potência seja transferida para o alto-falante? Suponha que um outro alto-falante idêntico seja conectado em paralelo com o primeiro alto-falante. Quanta potência é então fornecida para os dois alto-falantes combinados?

111 • • Um dos usos de um transformador é para o *acoplamento de impedâncias*. Por exemplo, a impedância de saída de um amplificador estéreo é acoplada com a impedância de um alto-falante por um transformador. Na Equação 29-63, as correntes  $I_1$  e  $I_2$  podem ser

relacionadas à impedância  $Z$  no secundário porque  $I_2 = V_2/Z$ . Usando as Equações 29-61 e 29-62, mostre que

$$I_1 = \mathcal{E}/[(N_1/N_2)^2 Z]$$

e, portanto,  $Z_{eq} = (N_1/N_2)^2 Z$ .

### Problemas Gerais

112 • • Um secador de roupas elétrico de 5 kW opera com 240 V rms. Encontre (a)  $I_{rms}$  e (b)  $I_{max}$ . (c) Encontre as mesmas grandezas para um secador de mesma potência que opere a 120 V rms.

113 • Encontre a reatância de um capacitor de  $10.0 \mu F$  em (a) 60 Hz, (b) 6 kHz e (c) 6 MHz.

114 • • Uma resistência  $R$  transporta uma corrente  $I = 5 A$  sen  $120\pi t + 7 A$  sen  $240\pi t$ . (a) Qual é a corrente rms? (b) Se a resistência  $R$  é  $12 \Omega$ , qual é a potência dissipada no resistor? (c) Qual é a tensão rms através do resistor?

115 • • A Figura 29-47 mostra a tensão  $V$  versus o tempo  $t$  para uma tensão na forma de *onda quadrada*. Se  $V_0 = 12 V$ , (a) qual é a tensão rms para essa forma de onda? (b) Se essa forma de onda alternada é retificada pela eliminação das tensões negativas, de tal modo que apenas as tensões positivas permaneçam, qual é a tensão rms da forma de onda retificada?

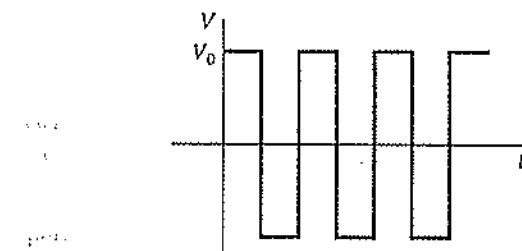


FIGURA 29-47

Problema 115

116 • • Uma corrente pulsada tem um valor constante de 15 A para os primeiros 0,1 s de cada segundo e depois 0 para os próximos 0,9 s de cada segundo. (a) Qual é o valor rms para a corrente nessa forma de onda? (b) Cada pulso de corrente é gerado por um pulso de tensão de valor máximo de 100 V. Qual é a potência média liberada pelo gerador de pulso?

117 • • Um circuito consiste em dois capacitores, uma bateria de 24 V e uma fonte de tensão ca conectados, como mostrado na Figura 29-48. A fonte de tensão ca é dada por  $\mathcal{E} = 20 V \cos 120\pi t$ , onde  $t$  está em segundos. (a) Encontre a carga em cada capacitor como função do tempo. Admita que os efeitos transientes tiveram tempo suficiente para decafrem. (b) Qual é a corrente em regime permanente? (c) Qual é a energia máxima armazenada nos capacitores?

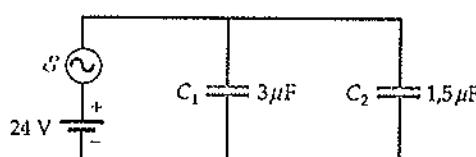


FIGURA 29-48

Problema 117

- 118 • • Quais são os valores médio e rms da corrente para as duas formas de onda mostradas na Figura 29-49?

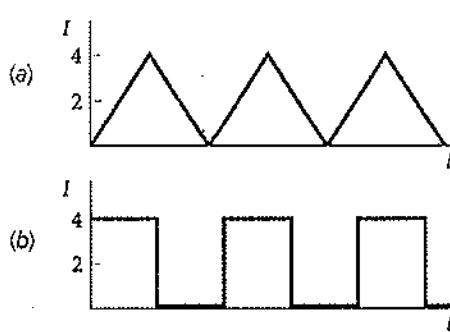


FIGURA 29-49  
Problema 118

- 119 • • No circuito mostrado na Figura 29-50,  $\mathcal{E}_1 = (20 \text{ V}) \cos 2\pi ft$ ,  $f = 180 \text{ Hz}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 18 \text{ V}$  e  $R = 36 \Omega$ . Encontre os valores máximos, mínimo, médio e rms para a corrente através do resistor.

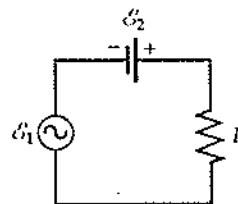
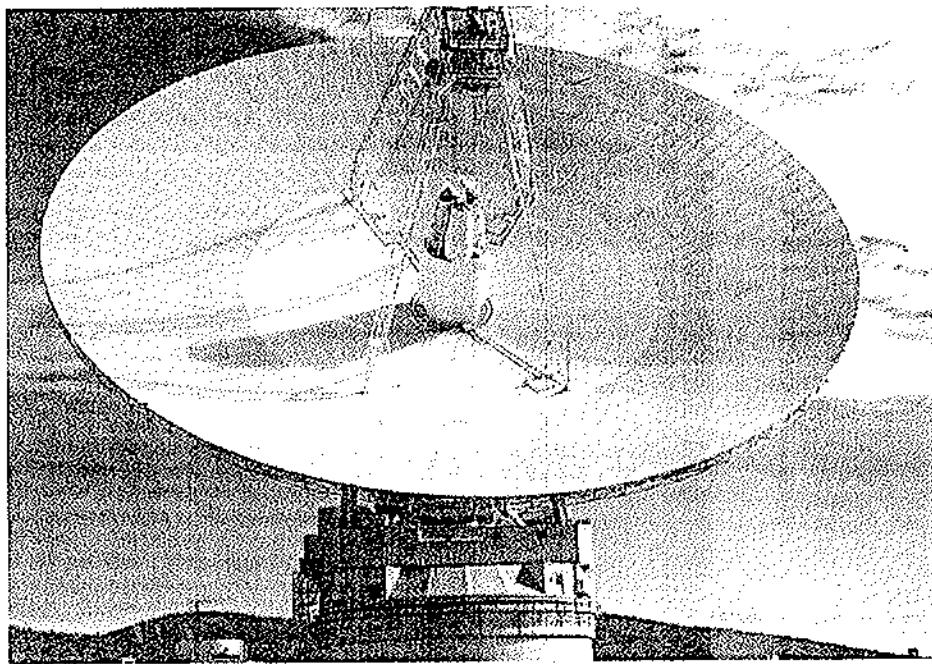


FIGURA 29-50  
Problemas 119 até 121

- 120 • • Repita o Problema 119 com o resistor  $R$  sendo substituído por um capacitor de  $2 \mu\text{F}$ .

- 121 • • Repita o Problema 119 com o resistor  $R$  sendo substituído por um indutor de  $12 \text{ mH}$ .

## Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas



UMA ANTENA DE 70 M EM GOLDSTONE, CALIFÓRNIA. O COMPLEXO DE GOLDSTONE PARA COMUNICAÇÕES COM O ESPAÇO PROFUNDO, LOCALIZADO NO DESERTO DE MOJAVE, NA CALIFÓRNIA, É UM DOS TRÊS COMPLEXOS QUE FORMAM A REDE DA NASA DO ESPAÇO PROFUNDO. ESSA REDE FORNECE COMUNICAÇÃO DE RÁDIO PARA TODAS AS NAVES INTERPLANETÁRIAS DA NASA E TAMBÉM UTILIZADA PARA RADIOASTRONOMIA E OBSERVAÇÕES ATRAVÉS DE RADAR DO SISTEMA SOLAR E DO UNIVERSO.

**?** Você já imaginou que uma antena de rádio gera uma onda igual em todas as direções do espaço? Este tópico é discutido na Seção 30-3.

- 30-1 Corrente de Deslocamento de Maxwell
- 30-2 Equações de Maxwell
- 30-3 Ondas Eletromagnéticas
- \*30-4 A Equação de Onda para as Ondas Eletromagnéticas

**A**s equações de Maxwell, propostas pelo grande físico escocês James Clerk Maxwell, relacionam os vetores campo elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e suas fontes, que são as cargas elétricas e as correntes. Essas equações summarizam as leis experimentais da eletricidade e do magnetismo — as leis de Coulomb, Gauss, Biot-Savart, Ampère e Faraday. Essas leis experimentais são válidas de forma geral, exceto a lei de Ampère, que se aplica apenas para correntes contínuas em regime permanente.

» Neste capítulo, será visto como Maxwell foi capaz de generalizar a lei de Ampère com a invenção da corrente de deslocamento (Seção 30-1). Maxwell pôde, então, mostrar que as leis generalizadas da eletricidade e do magnetismo implicam a existência das ondas eletromagnéticas.

As equações de Maxwell têm um papel no eletromagnetismo clássico análogo àquele das leis de Newton na mecânica clássica. Em princípio, todos os problemas na eletricidade e no magnetismo clássicos podem ser resolvidos usando as leis de Maxwell, assim como todos os problemas em mecânica clássica podem ser resolvidos usando as leis de Newton. Entretanto, as equações de Maxwell são conside-

ravelmente mais complexas que as leis de Newton, e suas aplicações para a maioria dos problemas envolvem uma matemática além do escopo deste livro. Apesar disso, as equações de Maxwell são de grande importância teórica. Por exemplo, Maxwell mostrou que essas equações podem ser combinadas para fornecer uma equação de onda para os vetores campo elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Tais ondas eletromagnéticas são causadas por cargas aceleradas (como as cargas na corrente alternada de uma antena). Essas ondas eletromagnéticas foram produzidas pela primeira vez em laboratório por Heinrich Hertz em 1887. Maxwell mostrou que suas equações previam a velocidade das ondas eletromagnéticas no espaço livre como sendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

30-1

### A Velocidade de Ondas Eletromagnéticas

onde  $\epsilon_0$ , a permissividade do espaço livre, é a constante que aparece nas leis de Coulomb e Gauss, e  $\mu_0$ , a permeabilidade do espaço livre, é a constante que aparece na lei de Biot-Savart e na lei de Ampère. Maxwell noticiou com grande excitação a coincidência que a medida da velocidade da luz era igual a  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , e Maxwell corretamente considerou que a luz também é uma onda eletromagnética. Hoje em dia, o valor de  $c$  é definido como  $2,99792458 \times 10^8$  m/s, e o valor de  $\mu_0$  é definido como  $4\pi \times 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>, e o valor de  $\epsilon_0$  é definido pela Equação 30-1.

## 30-1 Corrente de Deslocamento de Maxwell

A lei de Ampère (Equação 27-15) relaciona a integral de linha de um campo magnético em torno de alguma curva fechada  $C$  com a corrente que passa através de qualquer superfície limitada por essa curva:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_s \text{ para qualquer curva fechada } C \quad 30-2$$

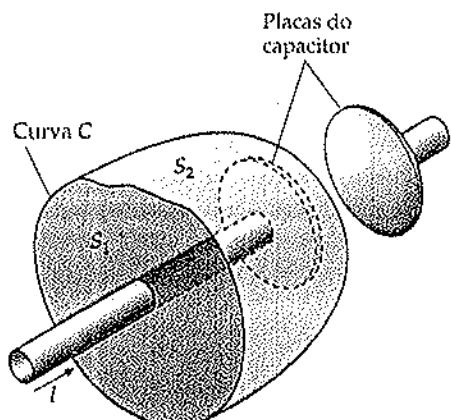
Maxwell identificou uma falha na lei de Ampère. A Figura 30-1 mostra duas diferentes superfícies,  $S_1$  e  $S_2$ , limitadas pela mesma curva  $C$ , que circula um fio transportando uma corrente para a placa de um capacitor. A corrente através da superfície  $S_1$  é  $I$ , mas não existe corrente através da superfície  $S_2$  porque a carga pára na placa do capacitor. Assim, existe uma ambigüidade na frase "a corrente através de qualquer superfície limitada pela curva". Tal problema surge quando a corrente não é contínua.

Maxwell mostrou que a lei pode ser generalizada, incluindo todas as situações, se a corrente  $I$  na equação for substituída pela soma da corrente  $I$  e de um outro termo  $I_d$ , chamado de corrente de deslocamento de Maxwell, definida como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 30-3$$

### DEFINIÇÃO — CORRENTE DE DESLOCAMENTO

onde  $\phi_e$  é o fluxo do campo elétrico através da mesma superfície limitada pela curva  $C$ . A forma generalizada da lei de Ampère é então



**FIGURA 30-1**  
Duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , limitadas pela mesma curva  $C$ . A corrente  $I$  passa através da superfície  $S_1$ , mas não através da superfície  $S_2$ . A lei de Ampère, que relaciona a integral da linha de um campo magnético em torno da curva  $C$  com a corrente total passando através de qualquer superfície limitada por  $C$ , não é válida quando a corrente não é contínua, como quando ela pára na placa do capacitor.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 30-4$$

## FORMA GENERALIZADA DA LEI DE AMPÈRE

Pode-se entender essa equação generalizada considerando a Figura 30-1 novamente. Chama-se a soma  $I + I_d$  de corrente generalizada. De acordo com a afirmativa que foi estabelecida antes, a mesma corrente generalizada deve cruzar qualquer superfície limitada pela curva C. Assim, não pode haver corrente generalizada líquida para dentro ou para fora do volume limitado pelas duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , que juntas formam uma superfície fechada. Se existe uma corrente  $I$  líquida para o volume, deve existir uma corrente de deslocamento  $I_d$  líquida igual para fora do volume. No volume da figura, existe uma corrente  $I$  líquida para dentro do volume que aumenta com a carga  $Q_{int}$  dentro do volume:

$$I = \frac{dQ_{int}}{dt}$$

O fluxo do campo elétrico para fora do volume está relacionado à carga pela lei de Gauss:

$$\phi_{e, liq} = \oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

Resolvendo para as cargas fornece

$$Q_{int} = \epsilon_0 \phi_{e, liq}$$

e tomindo a derivada de cada lado tem-se

$$\frac{dQ_{int}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{e, liq}}{dt}$$

A taxa de aumento da carga é assim proporcional à taxa de aumento do fluxo líquido para fora do volume:

$$\frac{dQ_{int}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{e, liq}}{dt} = I_d$$

Assim, a corrente de condução líquida para dentro do volume é igual à corrente de deslocamento líquida para fora do volume. A corrente generalizada é desse modo contínua, e este é *sempre* o caso.

É interessante comparar a Equação 30-4 com a Equação 28-5:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA \quad 30-5$$

que neste capítulo será referida como a lei de Faraday. (A Equação 30-5 é uma forma restrita da lei de Faraday, uma forma que não inclui as fem devidas ao movimento. A Equação 30-5 inclui as fem associadas a um campo magnético variante no tempo.) De acordo com a lei de Faraday, um fluxo magnético variante produz um campo elétrico cuja integral de linha em torno de uma curva fechada é proporcional à taxa de variação do fluxo magnético através de qualquer superfície limitada pela curva. A modificação de Maxwell na lei de Ampère mostra que um fluxo elétrico variante produz um campo magnético cuja integral de linha em torno de uma curva é proporcional à taxa de variação do fluxo elétrico. Assim se tem um interessante resultado recíproco, que a variação do campo magnético produz um campo elétrico (lei de Faraday) e um campo elétrico variante produz um campo magnético (forma generalizada da lei de Ampère). Note que

não existe análogo magnético à corrente  $I$ . Isso ocorre porque o monopolo magnético, o análogo magnético de uma carga elétrica, não existe.<sup>†</sup>

### EXEMPLO 30-1 CALCULANDO A CORRENTE DE DESLOCAMENTO

Um capacitor de placas paralelas tem placas circulares de raio  $R$  com pequena distância entre elas. A carga está fluindo para a placa positiva e da placa negativa a uma taxa  $I = dQ/dt = 2,5 \text{ A}$ . Calcule a corrente de deslocamento através da superfície  $S$  entre as placas (Figura 30-2) através da determinação direta da taxa de variação do fluxo de  $\vec{E}$  através da superfície  $S$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A corrente de deslocamento é  $I_d = \epsilon_0 d\phi_e/dt$ , onde  $\phi_e$  é o fluxo elétrico através da superfície entre as placas. Uma vez que as placas paralelas estão muito próximas, na região entre as placas o campo elétrico é uniforme e perpendicular às placas. Fora do capacitor o campo elétrico é desprezível. Assim, o fluxo elétrico é simplesmente  $\phi_e = EA$ , onde  $E$  é o campo elétrico entre as placas e  $A$  é a área da placa.

1. A corrente de deslocamento é encontrada tomando a derivada no tempo do fluxo elétrico:
2. O fluxo é igual ao módulo do campo elétrico vezes a área da placa:
3. O campo elétrico é proporcional à densidade de carga sobre as placas, que é tratada como uniformemente distribuída:
4. Substituindo esses resultados para calcular  $I_d$ :

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$\phi_e = EA$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 A \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{A \epsilon_0} \right)$$

$$= \frac{dQ}{dt} = \boxed{2,5 \text{ A}}$$

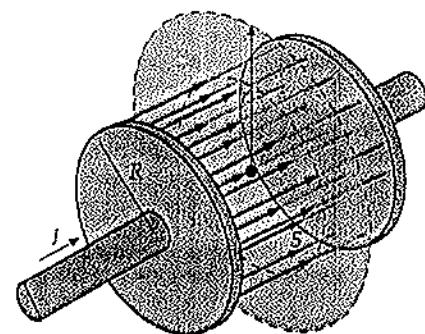


FIGURA 30-2

A superfície  $S$  passa através das placas do capacitor. A carga  $Q$  está aumentando em  $2,5 \text{ C/s} = 2,5 \text{ A}$ . A distância entre as placas não está desenhada em escala. As placas estão muito mais próximas do que mostrado na figura.

**NOTAS** Observe que a corrente de deslocamento através da superfície passando entre as placas do capacitor é igual à corrente nos fios que transportam a carga para o capacitor e do capacitor.

### EXEMPLO 30-2 CALCULANDO O CAMPO MAGNÉTICO

As placas circulares no Exemplo 30-1 apresentam um raio de  $R = 3,0 \text{ cm}$ . Encontre a intensidade do campo magnético  $B$  em um ponto entre as placas a uma distância  $r = 2,0 \text{ cm}$  a partir do eixo das placas quando a corrente para a placa positiva é  $2,5 \text{ A}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Encontra-se  $B$  a partir da forma generalizada da lei de Ampère (Equação 30-4). Escolhe-se um caminho circular  $C$  de raio  $r = 2,0 \text{ cm}$  em torno da linha de centro que une as placas, como mostrado na Figura 30-3. Calcula-se então a corrente de deslocamento através da superfície  $S$  limitada por  $C$ . Por simetria,  $B$  é tangente a  $C$  e possui o mesmo módulo em qualquer local sobre  $C$ .

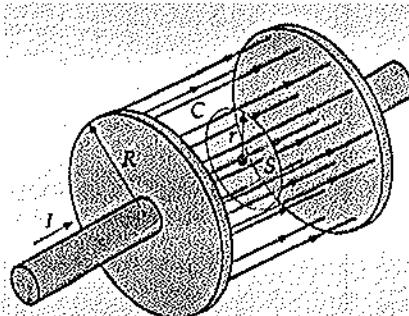


FIGURA 30-3

A distância entre as placas não está desenhada em escala. As placas estão muito mais próximas do que aparece na figura.

<sup>†</sup>A questão da existência de monópolos magnéticos tem importância teórica. Foram feitas diversas tentativas para se observar os monópolos magnéticos, mas até hoje nenhuma delas obteve sucesso.

1. Encontra-se  $\vec{B}$  a partir da forma generalizada da lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d)$$

onde

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$B(2\pi r) = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$\phi_e = \pi r^2 E = \pi r^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \pi r^2 \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2}$$

$$= \frac{QR^2}{\epsilon_0 R^2}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{QR^2}{\epsilon_0 R^2} \right) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} I$$

$$= (2 \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{0,02 \text{ m}}{(0,03 \text{ m})^2} (2,5 \text{ A})$$

$$= 1,11 \times 10^{-5} \text{ T}$$

5. Substituindo esses resultados no passo 3 e resolvendo para  $B$ :

## 30-2 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são

$$\oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} \quad 30-6a$$

$$\oint_S B_n dA = 0 \quad 30-6b$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA \quad 30-6c$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0(I + I_d) \\ &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E_n dA = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA \end{aligned} \quad 30-6d$$

### EQUAÇÕES DE MAXWELL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Em todas essas quatro equações, os caminhos de integração  $C$  e as superfícies de integração  $S$  estão em repouso e as integrações ocorrem em um instante no tempo.

A Equação 30-6a é a lei de Gauss; ela estabelece que o fluxo do campo elétrico através de qualquer curva fechada é igual a  $1/\epsilon_0$  vezes a carga líquida dentro da superfície. Como discutido no Capítulo 22, a lei de Gauss implica que o campo elétrico devido a uma carga pontual varia inversamente com o quadrado da distância à carga. Essa lei descreve como as linhas de campo elétrico divergem a partir de uma carga positiva e convergem para uma carga negativa. Sua base experimental é a lei de Coulomb.

A Equação 30-6b, algumas vezes chamada de lei de Gauss para o magnetismo, estabelece que o fluxo do vetor campo magnético  $\vec{B}$  é nulo através de *qualquer* superfície fechada. Essa equação descreve a observação experimental de que as linhas de campo magnético não divergem de qualquer ponto no espaço ou convergem para qualquer ponto; isto é, ela implica que pólos magnéticos isolados não existem.

A Equação 30-6c é a lei de Faraday; ela estabelece que a integral do campo elétrico em torno de qualquer curva fechada  $C$ , que é a *fem*, é igual à taxa (negativa) de variação do fluxo magnético através de qualquer superfície  $S$  limitada pela curva. ( $S$  não é uma superfície fechada, então o fluxo magnético através de  $S$  não é necessariamente nulo.) A lei de Faraday descreve como as linhas de campo elétrico circulam qualquer área através da qual o fluxo magnético está variando, e ela relaciona o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  à taxa de variação do vetor campo magnético  $\vec{B}$ .

A Equação 30-6d, que é a lei de Ampère modificada para incluir a corrente de deslocamento de Maxwell, estabelece que a integral de linha do campo magnético  $\vec{B}$  em torno de qualquer curva fechada  $C$  é igual a  $\mu_0$  vezes a taxa de variação do fluxo elétrico através da mesma superfície. Essa lei descreve como as linhas de campo magnético circulam uma área através da qual uma corrente está passando ou através da qual o fluxo elétrico está variando.

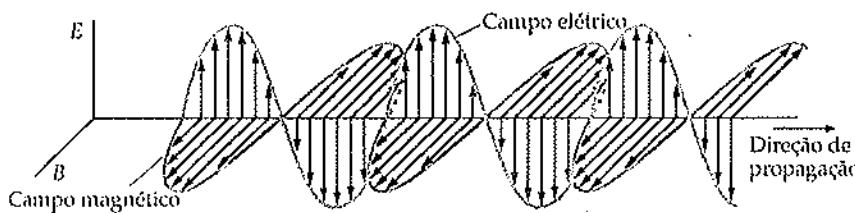
Na Seção 30-4, mostra-se como as equações de onda tanto para o campo elétrico  $\vec{E}$  quanto para o campo magnético  $\vec{B}$  podem ser derivadas das equações de Maxwell.

### 30-3 Ondas Eletromagnéticas

A Figura 30-4 mostra os vetores campo elétrico e magnético de uma onda eletromagnética. Os campos elétrico e magnético são perpendiculares um ao outro e perpendiculares à direção de propagação da onda. As ondas eletromagnéticas são, portanto, ondas transversas. Os campos elétrico e magnético estão em fase, e em cada ponto do espaço e em cada instante no tempo seus módulos estão relacionados por

$$E = cB \quad 30-7$$

onde  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  é a velocidade da onda. A direção de propagação de uma onda eletromagnética é a direção do produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$ .



**FIGURA 30-4**  
Os vetores campo elétrico e magnético em uma onda eletromagnética. Os campos estão em fase, perpendiculares um ao outro e perpendiculares à direção de propagação da onda.

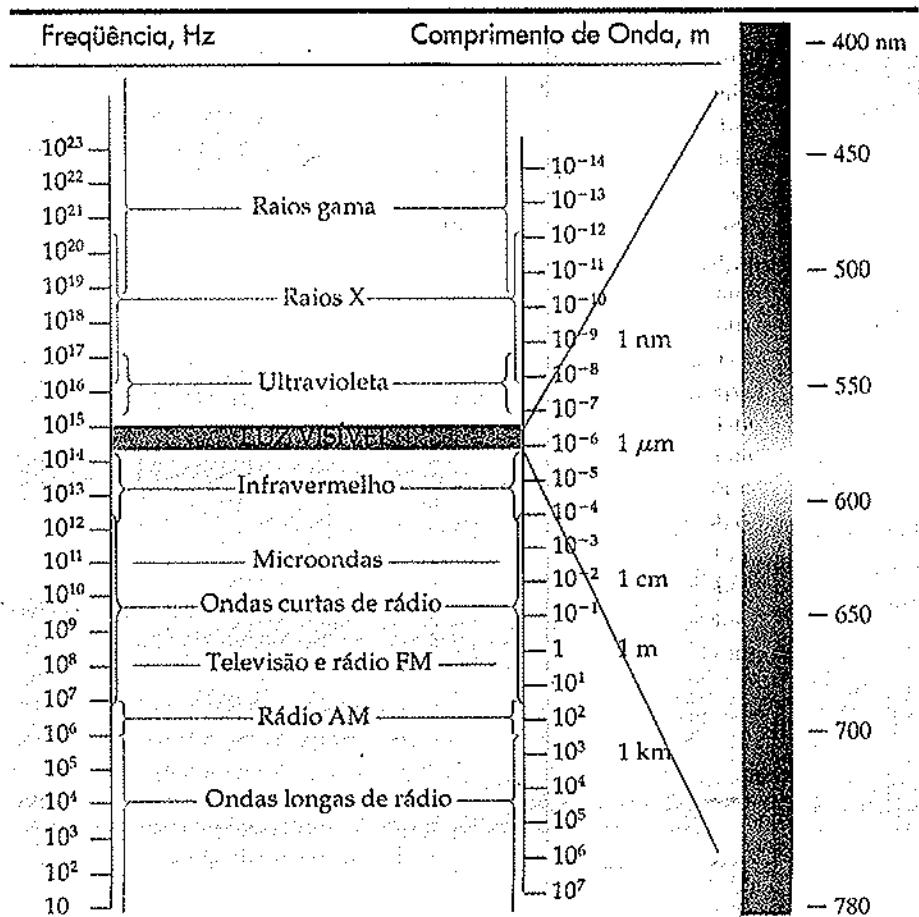
### O Espectro Eletromagnético

Os vários tipos de ondas eletromagnéticas — luz, ondas de rádio, raios X, raios gama, microondas e outras — diferem apenas no comprimento de onda e da freqüência, que estão relacionadas à velocidade  $c$  da forma usual,  $f\lambda = c$ . A Tabela 30-1 fornece o espectro eletromagnético e os nomes usualmente associados às várias faixas de freqüência e comprimentos de onda. Essas faixas são normalmente mal definidas e, algumas vezes, se superpõem. Por exemplo, as ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda de aproximadamente 0,1 nm são usualmente chamadas de raios X, mas se as ondas eletromagnéticas se originam da radioatividade nuclear elas são chamadas de raios gama.

Os olhos humanos são sensíveis à radiação eletromagnética com comprimentos de onda de aproximadamente 400 nm até 700 nm, que é a faixa chamada de **luz visível**. Os menores comprimentos de onda no espectro visível correspondem à luz violeta, e os maiores comprimentos de onda à luz vermelha, com todas as cores do arco-íris ficando entre esses extremos. As ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda na região logo abaixo do menor comprimento de onda do espectro visível são chamadas de **raios ultravioleta**, e aquelas cujo comprimento de onda se encontram na região logo acima do maior comprimento de onda do espectro visível são chamadas de **ondas infravermelhas**. A radiação térmica liberada pelos corpos na temperatura ambiente está na região do infravermelho do espectro eletromagnético; isto é, todos os comprimentos de onda (ou freqüências) são possíveis.

**TABELA 30-1** (Veja encarte em cores)

### O Espectro Eletromagnético



As diferenças nos comprimentos de onda dos vários tipos de ondas eletromagnéticas têm consequências físicas importantes. Como se sabe, o comportamento das ondas depende fortemente da relação entre os comprimentos de onda e as dimensões dos objetos físicos ou das aberturas que as ondas encontram. Uma vez que os comprimentos de onda da luz estão na faixa mais estreita de aproximadamente 400 nm até 700 nm, elas são muito menores que a maioria dos obstáculos, então a aproximação de raio (introduzida na Seção 15-4) é normalmente válida. O comprimento de onda e a freqüência são também importantes na determinação dos tipos de interação entre as ondas eletromagnéticas e a matéria. Os raios X, por exemplo, têm comprimentos de onda muito curtos e altas freqüências. Eles penetram facilmente em vários materiais que são opacos para ondas de luz de mais baixa freqüência, que são absorvidas pelos materiais. As microondas possuem comprimentos de onda da ordem de poucos centímetros e freqüências que são próximas das freqüências naturais de ressonância das moléculas de água nos sólidos e líquidos. As microondas são, por isso, facilmente absorvidas pelas moléculas de água nos alimentos, que é o mecanismo pelo qual os alimentos são aquecidos nos fornos de microondas.

### Produção de Ondas Eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas são produzidas quando cargas elétricas livres aceleram ou quando elétrons ligados a átomos e moléculas sofrem transições para estados de menor energia. Ondas de rádio, que possuem freqüência de aproximadamente 550 kHz até 1600 KHz para AM e desde aproximadamente 88 MHz até 108 MHz para FM, são produzidas por correntes elétricas macroscópicas oscilando em antenas de transmissão de rádio. A freqüência das ondas emitidas é igual à freqüência de oscilação das cargas.

Um espectro contínuo de raios X é produzido pela desaceleração de elétrons quando eles colidem com um alvo de metal. A radiação produzida é chamada de *bremstrahlung* (o termo em alemão para radiação de frenagem). O espectro contínuo de *bremstrahlung* é um espectro discreto de linha de raios X produzido pelas transições dos elétrons internos nos átomos do material do alvo.

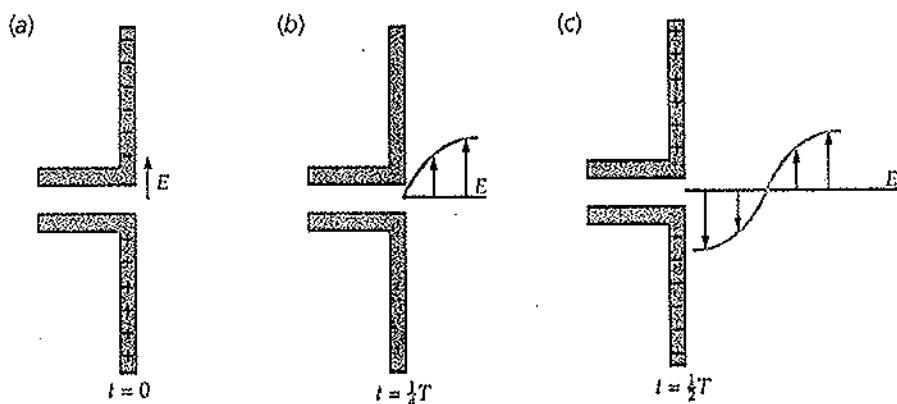
A radiação de sincrotron surge a partir do movimento orbital circular das partículas carregadas (usualmente elétrons ou pósitrons) nos aceleradores nucleares chamados de sincrotrons. Originariamente considerados pelos cientistas como um efeito indesejável do acelerador, os raios X da radiação de sincrotron são agora produzidos e usados como uma ferramenta de diagnose médica por causa da fácil manipulação dos feixes através da refração e da difração ótica. A radiação sincrotron é também emitida pelas partículas carregadas capturadas nos campos magnéticos associados a estrelas e galáxias. Acredita-se que a maioria das ondas de rádio de baixa freqüência que atingem a Terra vindas do espaço se origina a partir da radiação de sincrotron.

O calor é radiado por cargas moleculares termicamente excitadas. O espectro da radiação térmica é o espectro de radiação do corpo negro discutido na Seção 20-4.

As ondas de luz, que possuem freqüências da ordem de  $10^{14}$  Hz, são geralmente produzidas pelas transições de cargas atômicas ligadas. As fontes de ondas de luz são discutidas no Capítulo 31.

### Radiação de um Dipolo Elétrico

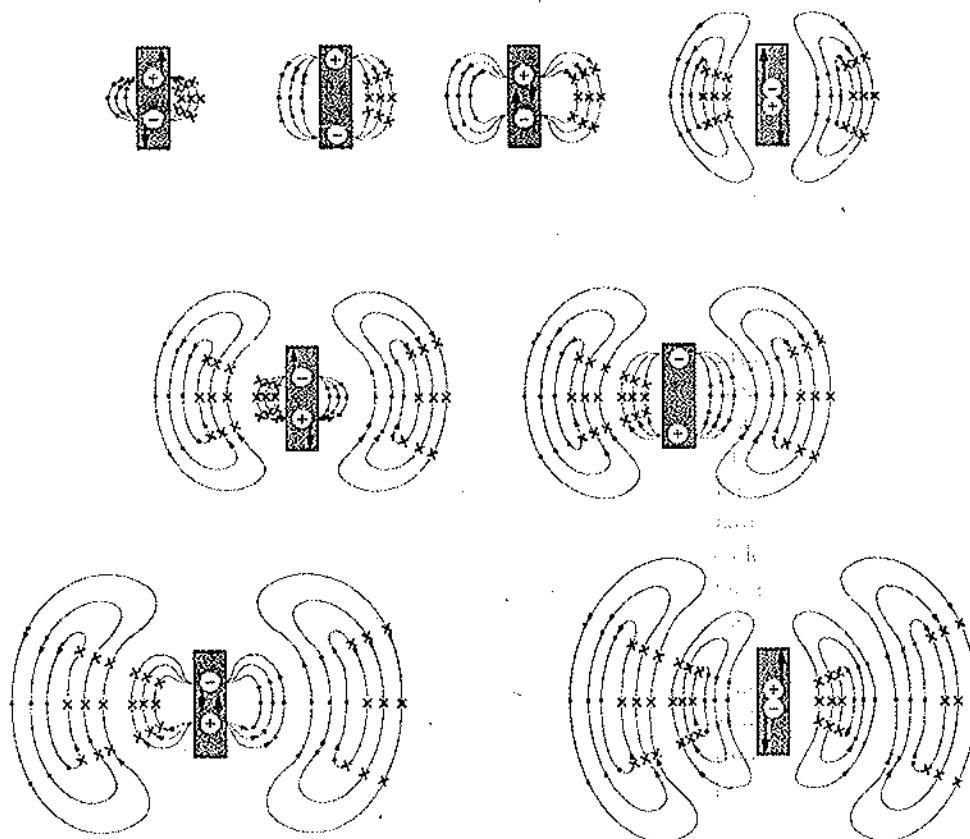
A Figura 30-5 é um desenho esquemático de uma antena de dipolos elétricos que consiste em duas hastes condutoras ao longo de uma linha alimentada por um gerador de corrente alternada. No instante  $t = 0$  (Figura 30-5a), as extremidades das hastes estão carregadas e existe um campo elétrico próximo da haste e paralelo a ela. Existe também um campo magnético, que não está mostrado,

**FIGURA 30-5**

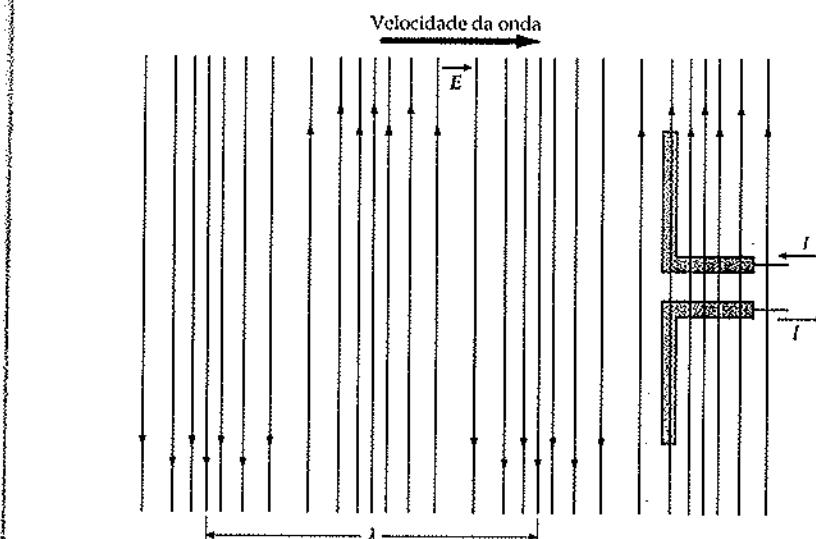
Uma antena de rádio de dipolos elétricos para radiar ondas eletromagnéticas. Corrente alternada é fornecida à antena por um gerador (não mostrado). As flutuações no campo magnético, devidas às flutuações nas cargas na antena, se propagam para fora na velocidade da luz. Existe também um campo magnético flutuante (não mostrado) perpendicular ao papel devido à corrente na antena.

circulando as hastes devido à corrente que passa por elas. As flutuações nesses campos se movem para fora das hastes com a velocidade da luz. Após um quarto de período, em  $t = T/4$  (Figura 30-5b), as hastes estão descarregadas e o campo elétrico próximo das hastes é nulo. Em  $t = T/2$  (Figura 30-5c), as hastes estão novamente carregadas, mas as cargas estão ao contrário daquelas em  $t = 0$ . Os campos elétrico e magnético a uma grande distância da antena são bastante diferentes daqueles próximos à antena. Longe da antena, os campos elétrico e magnético oscilam em fase com movimento harmônico simples, perpendiculares um ao outro e à direção de propagação da onda. A Figura 30-6 mostra os campos elétrico e magnético longe da antena de dipolos elétricos.

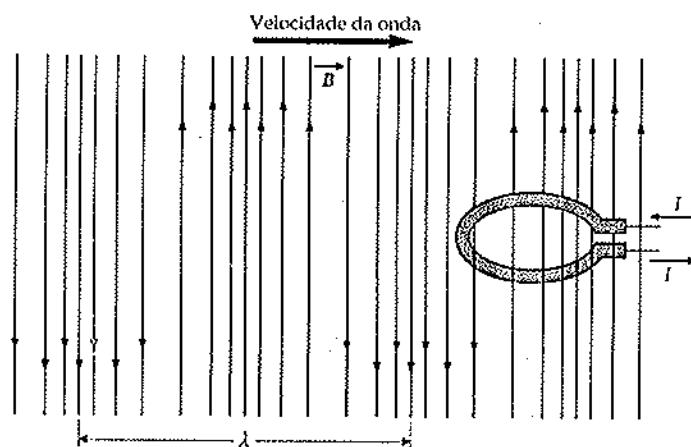
As freqüências de ondas eletromagnéticas de rádio e televisão podem ser detectadas por uma antena de dipolos elétricos posicionada paralelamente ao campo elétrico da onda incidente, de tal modo que ele induz uma corrente alternada na antena (Figura 30-7). Essas ondas eletromagnéticas podem também

**FIGURA 30-6**

Linhas de campo elétrico e linhas de campo magnético produzidas por um dipolo elétrico oscilante. Cada linha de campo magnético é um círculo com o dipolo em seu eixo. O produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$  está direcionado para fora do dipolo em todos os pontos.

**FIGURA 30-7**

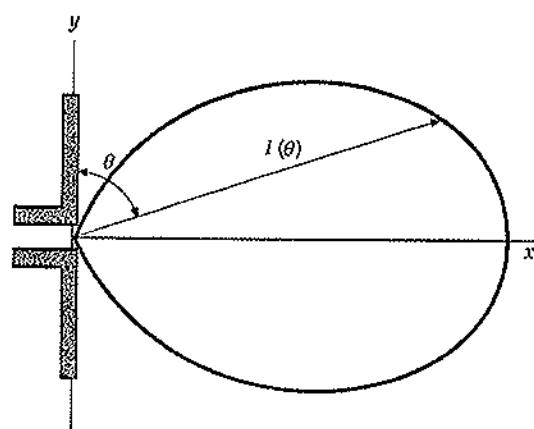
Uma antena de dipolos elétricos para detectar ondas eletromagnéticas. O campo elétrico alternado da onda que chega produz uma corrente alternada na antena.

**FIGURA 30-8**

Uma antena em espira para detectar radiação eletromagnética. O fluxo magnético alternado através da espira, devido ao campo magnético da radiação, induz uma corrente alternada na espira.

ser detectadas por uma antena em espira posicionada perpendicularmente ao campo magnético, de modo que o fluxo magnético variante através da espira induz uma corrente na espira (Figura 30-8). As ondas eletromagnéticas de freqüência na faixa da luz visível são detectadas pelos olhos ou por filmes fotográficos, ambos mais sensíveis ao campo elétrico.

A radiação de uma antena de dipolos elétricos, tal como aquela mostrada na Figura 30-5, é chamada de radiação de dipolo elétrico. Muitas ondas eletromagnéticas exibem as características da radiação de dipolo elétrico. Uma importante propriedade desse tipo de radiação é que a intensidade das ondas eletromagnéticas radiadas por uma antena dipolar é nula ao longo do eixo da antena e é máxima na direção radial (para fora do eixo). Se o dipolo está na direção  $y$  com seu centro na origem, como na Figura 30-9, a intensidade é zero ao longo do eixo  $y$  e é máxima no plano  $xz$ . Na direção de uma linha que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $y$ , a intensidade é proporcional a  $\sin^2 \theta$ .

**FIGURA 30-9**

Representação polar da intensidade da radiação eletromagnética de uma antena de dipolos elétricos versus o ângulo. A intensidade  $I(\theta)$  é proporcional ao comprimento da seta. A intensidade é máxima perpendicularmente à antena em  $\theta = 90^\circ$  e um mínimo ao longo da antena em  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$ .

**EXEMPLO 30-3**

Uma antena em espira, consistindo em uma única espira de fio de raio de 10 cm, é usada para detectar ondas eletromagnéticas para as quais  $E_{\text{rms}} = 0,15 \text{ V/m}$ . Encontre a fem rms induzida na espira se a freqüência da onda é (a) 600 kHz e (b) 60 MHz.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A fem induzida no fio é relacionada à taxa de variação do fluxo magnético através da espira pela lei de Faraday (Equação 30-5). Usando a Equação 30-7, pode-se obter o valor rms do campo magnético a partir do valor do campo elétrico rms dado.

- A lei de Faraday relaciona o módulo da fem à taxa de variação do fluxo magnético através da superfície plana estacionária limitada pela espira:
- O comprimento de onda de uma onda em 600 kHz deslocando-se à velocidade  $c$  é  $\lambda = c/f = 500 \text{ m}$ . Sobre a superfície plana limitada pela espira de raio 10 cm,  $\vec{B}$  é inteiramente uniforme.

- Calcule  $dB_{\text{rms}}/dt$  a partir de  $B$  senoidal:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\phi_m = BA = \pi r^2 B, \text{ logo } |\mathcal{E}| = \frac{d\phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = \pi r^2 \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{rms}}$$

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

- Calcule o valor rms de  $B/t$ . O valor rms de qualquer função senoidal do tempo é igual a  $1/\sqrt{2}$ , e o valor de pico dividido por  $1/\sqrt{2}$ , é igual ao valor rms:

- Usando a Equação 30-7 ( $E = cB$ ), relaciona-se o valor rms de  $B/t$  a  $E_{\text{rms}}$ :

$$\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{rms}} = \omega B_0 [-\cos(kx - \omega t)]_{\text{rms}} = \omega B_0 / \sqrt{2} = \omega B_{\text{rms}}$$

$$E = cB$$

então

$$B_{\text{rms}} = \frac{E_{\text{rms}}}{c}$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{rms}} = \omega B_{\text{rms}} = \omega \frac{E_{\text{rms}}}{c} = \frac{2\pi f}{c} E_{\text{rms}}$$

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = \pi r^2 \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{rms}} = \pi r^2 \frac{2\pi f}{c} E_{\text{rms}}$$

$$= \pi (0,1 \text{ m})^2 \frac{2\pi (6 \times 10^5 \text{ Hz})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} (0,15 \text{ V/m})$$

$$= 5,92 \times 10^{-5} \text{ V} = 59,2 \mu\text{V}$$

- Substituindo no passo 3, o resultado fornece:

- Substituindo o resultado do passo 6 no resultado do passo 2, calcula-se  $\mathcal{E}_{\text{rms}}$  em  $f = 600 \text{ kHz}$ :

- A fem induzida é proporcional à freqüência (passo 4), de tal modo que em 600 MHz será 100 vezes maior que em 600 kHz:

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = (100)(5,92 \times 10^{-5} \text{ V}) = 0,00592 \text{ V}$$

$$= 5,92 \text{ mV}$$

**NOTAS** Para a parte (b) a freqüência é de 60 MHz, então  $\lambda = c/f = 5 \text{ m}$ .  $\vec{B}$  não é tão uniforme ao longo da superfície limitada pela espira de raio 10 cm quando  $\lambda = 5 \text{ m}$  quanto ele é quando  $\lambda = 500 \text{ m}$ , como na parte (a). Entretanto,  $\vec{B}$  sobre a superfície quando  $\lambda = 5 \text{ m}$  pode ser considerado uniforme o suficiente para que o resultado da parte (b) seja válido para diversos propósitos.

## Energia e Quantidade de Movimento em uma Onda Eletromagnética

Assim como outras ondas, as ondas eletromagnéticas transportam energia e quantidade de movimento. A energia transportada é descrita pela intensidade, que é a potência média por unidade de área incidente sobre uma superfície perpendicular à direção de propagação. A quantidade de movimento por unidade de tempo por unidade de área transportada por uma onda eletromagnética é chamada de pressão de radiação.

**Intensidade** Considere uma onda eletromagnética se deslocando para a direita e uma região cilíndrica de comprimento  $L$  e área de seção reta  $A$  com seu eixo orientado da esquerda para a direita. A quantidade média de energia eletromagnética  $U_{\text{med}}$  dentro dessa região é igual a  $u_{\text{med}}V$ , onde  $u_{\text{med}}$  é a densidade média de energia e  $V = LA$  é o volume da região. No intervalo de tempo em que a onda eletromagnética se desloca de uma distância  $L$ , toda essa energia passa através da extremidade direita da região. O intervalo  $\Delta t$  para a onda se deslocar uma distância  $L$  é  $L/c$ , então a potência  $P_{\text{med}}$  (a energia por unidade de tempo) passando para fora da extremidade esquerda da região é

$$P_{\text{med}} = U_{\text{med}}/\Delta t = u_{\text{med}}LA/(L/c) = u_{\text{med}}Ac$$

e a intensidade  $I$  (a potência média por unidade de área) é

$$I = P_{\text{med}}/A = u_{\text{med}}c$$

A densidade de energia total na onda  $u$  é a soma das densidades de energia elétrica e magnética. A densidade de energia elétrica  $u_e$  (Equação 24-13) e a densidade de energia magnética  $u_m$  (Equação 28-20) são dadas por

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{e} \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Em uma onda eletromagnética no espaço livre,  $E$  é igual a  $cB$ , então pode-se expressar a densidade de energia magnética em termos do campo elétrico:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

onde foi usado  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ . Assim, as densidades de energia elétrica e magnética são iguais. Usando  $E = cB$ , pode-se expressar a densidade de energia total em várias formas úteis:

$$u = u_e + u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad 30-8$$

### DENSIDADE DE ENERGIA EM UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA

Para calcular a densidade de energia média, substituem-se os campos instantâneos  $E$  e  $B$  por seus valores rms  $E_{\text{rms}} = E_0/\sqrt{2}$  e  $B_{\text{rms}} = B_0/\sqrt{2}$ , onde  $E_0$  e  $B_0$  são os valores máximos dos campos. A intensidade é, então,

$$I = u_{\text{med}}c = \frac{E_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = |\vec{S}|_{\text{med}} \quad 30-9$$

### INTENSIDADE DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA

onde o vetor

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad 30-10$$

#### DEFINIÇÃO — VETOR DE POYNTING

é chamado de **vetor de Poynting** em homenagem ao seu descobridor, John Poynting. O módulo médio de  $\vec{S}$  é a intensidade da onda, e a direção de  $\vec{S}$  é a direção de propagação da onda.

**Pressão de Radiação** Pode-se mostrar agora através de um simples exemplo que uma onda eletromagnética transporta quantidade de movimento. Considere uma onda se movendo ao longo do eixo  $x$ , que é incidente sobre uma carga estacionária, como mostrado na Figura 30-10. Para simplificar, presume-se que  $\vec{E}$  está na direção  $y$  e  $\vec{B}$  está na direção  $z$ , e despreza-se a dependência dos campos com o tempo. A partícula experimenta uma força  $q\vec{E}$  na direção  $y$  e, portanto, é acelerada pelo campo elétrico. Em qualquer instante de tempo  $t$ , a velocidade na direção  $y$  é

$$v_y = at = \frac{qE}{m} t$$

Após um curto intervalo de tempo  $t_1$ , a carga adquiriu uma energia cinética igual a

$$K = \frac{1}{2} mv_y^2 = \frac{1}{2} \frac{m q^2 E^2 t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_1^2 \quad 30-11$$

Quando a carga está se movendo na direção  $y$ , ela experimenta uma força magnética

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_y \hat{j} \times B \hat{k} = qv_y B \hat{i} = \frac{q^2 EB}{m} t \hat{i}$$

Note que essa força está na direção de propagação da onda. Usando  $dp_x = F_x dt$ , encontra-se a quantidade de movimento  $p_x$  transferida pela onda para a partícula no intervalo  $t_1$ :

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x dt = \int_0^{t_1} \frac{q^2 EB}{m} t dt = \frac{1}{2} \frac{q^2 EB}{m} t_1^2$$

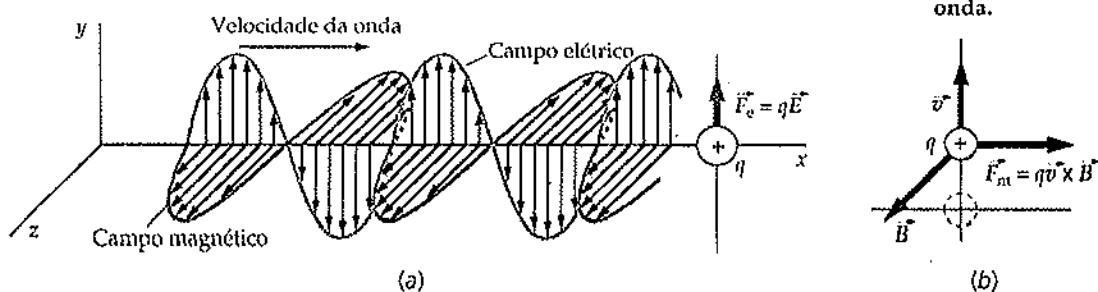
Se for usado  $B = E/c$ , essa equação se torna

$$p_x = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_1^2 \right) \quad 30-12$$

Comparando as Equações 30-11 e 30-12, nota-se que a quantidade de movimen-

FIGURA 30-10

Uma onda eletromagnética incidente sobre uma carga pontual que está inicialmente em repouso sobre o eixo  $x$ . (a) A força elétrica  $q\vec{E}$  acelera a carga para cima. (b) Quando a velocidade  $\vec{v}$  da carga é para cima, a força magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$  acelera a carga na direção da onda.



to adquirida pela carga na direção da onda é  $1/c$  vezes a energia. Apesar de o cálculo simplificado não ser rigoroso, os resultados são corretos. O módulo da quantidade de movimento transportado por uma onda eletromagnética é  $1/c$  vezes a energia transportada pela onda:

$$p = \frac{U}{c} \quad 30-13$$

#### QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA EM UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA

Uma vez que a intensidade é a energia por unidade de área por unidade de tempo, a intensidade dividida por  $c$  é a quantidade de movimento transportada pela onda por unidade de área por unidade de tempo. A quantidade de movimento transportada por unidade de tempo é a força. A intensidade dividida por  $c$  é, portanto, a força por unidade de área, que é a pressão. Essa pressão é a pressão de radiação  $P_r$ .

$$P_r = \frac{I}{c} \quad 30-14$$

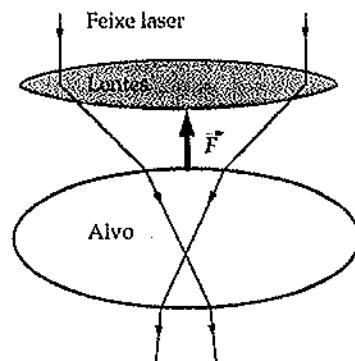
#### PRESSÃO DE RADIAÇÃO E INTENSIDADE

Pode-se relacionar a pressão de radiação com os campos elétrico e magnético usando a Equação 30-9 para vincular  $I$  a  $E$  e  $B$ , e a Equação 30-7 para eliminar tanto  $E$  quanto  $B$ :

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0 c} = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad 30-15$$

#### PRESSÃO DE RADIAÇÃO EM TERMOS DE $E$ E $B$

Considere uma onda eletromagnética incidindo normalmente sobre alguma superfície. Se a superfície absorve a energia  $U$  da onda eletromagnética, ela também absorve quantidade de movimento  $p$  dada pela Equação 30-13, e a pressão exercida sobre a superfície é igual à pressão de radiação. Se a onda é refletida, a quantidade de movimento transferida é  $2p$  porque a onda irá transportar quantidade de movimento no sentido contrário. A pressão exercida sobre a superfície pela onda é então o dobro daquela dada pela Equação 30-15.



As "pinças a laser" fazem uso da quantidade de movimento transportada por ondas eletromagnéticas para manipular objetos em escala molecular. Os dois raios mostrados são refratados ao passar através do alvo transparente, como uma célula biológica ou mesmo, em uma escala ainda menor, como uma pequena esfera de plástico transparente presa a uma grande molécula em uma célula. Em cada refração os raios tendem a se curvar para baixo, o que aumenta a componente da quantidade de movimento dos raios para baixo. O alvo exerce assim uma força para baixo sobre o feixe laser, e o feixe laser exerce uma força para cima sobre o alvo, que o puxa no sentido da fonte laser. A força é tipicamente da ordem de piconewttons. As pinças a laser têm sido usadas para realizar algumas façanhas aparentemente impossíveis, como esticar moléculas de DNA.

#### EXEMPLO 30-4

Uma lâmpada de bulbo emite ondas eletromagnéticas esféricas uniformemente em todas as direções. Encontre (a) a intensidade, (b) a pressão de radiação e (c) os módulos dos campos elétrico e magnético a uma distância de 3 m da lâmpada, admitindo que 50 W de radiação eletromagnética são emitidos.

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** A uma distância  $r$  da lâmpada, a energia está distribuída uniformemente sobre a área  $4\pi r^2$ . A intensidade é a potência dividida pela área. A pressão de radiação pode então ser encontrada a partir de  $P_r = I/c$ .

- (a) 1. Divida a potência de saída pela área para encontrar a intensidade:  $I = \frac{50 \text{ W}}{4\pi r^2}$

2. Substitua  $r = 3\text{ m}$ :

$$I = \frac{50\text{ W}}{4\pi(3\text{ m})^2} = 0,442\text{ W/m}^2$$

- (b) A pressão de radiação é a intensidade dividida pela velocidade da luz:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{0,442\text{ W/m}^2}{3 \times 10^8\text{ m/s}} = 1,47 \times 10^{-9}\text{ Pa}$$

- (c) 1.  $B_0$  está relacionado com  $P_r$  pela Equação 30-15:

$$B_0 = \sqrt{2\mu_0 P_r}$$

$$= [2(4\pi \times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})(1,47 \times 10^{-9}\text{ Pa})]^{1/2}$$

$$= 6,08 \times 10^{-8}\text{ T}$$

2. O valor máximo do campo elétrico  $E_0$  é  $c$  vezes  $B_0$ :

$$E_0 = cB_0 = (3 \times 10^8\text{ m/s})(6,08 \times 10^{-8}\text{ T})$$

$$= 18,2\text{ V/m}$$

3. Os módulos dos campos elétrico e magnético naquele ponto são da forma:

$$E = E_0 \sin \omega t \quad \text{e} \quad B = B_0 \sin \omega t$$

$$\text{com } E_0 = 18,2\text{ V/m} \quad \text{e} \quad B_0 = 6,08 \times 10^{-8}\text{ T}$$

**NOTAS** Apenas cerca de 2% da potência consumida por lâmpadas incandescentes são transformados em luz visível. Note que a pressão de radiação calculada na Parte (a) é muito pequena comparada com a pressão atmosférica, que é da ordem de  $10^5\text{ Pa}$ .

### EXEMPLO 30-5

Você está no espaço a uma distância de 20 m de sua nave espacial. Você tem uma pistola laser de 1 kW. Se sua massa total, incluindo a roupa espacial e o laser, é 95 kg, quanto tempo você levará para atingir a nave se apontar o laser diretamente no sentido contrário a ela e disparar?

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O laser emite luz, que transporta sua quantidade de movimento. Pela conservação da quantidade de movimento, será dada a você uma quantidade de movimento igual e contrária no sentido da nave espacial. A quantidade de movimento transportada pela luz é  $p = U/c$ , onde  $U$  é a energia da luz. Se a potência do laser é  $P = dU/dt$ , então a taxa de variação da quantidade de movimento produzida pelo laser é  $dp/dt = (dU/dt)/c = P/c$ . Esta é a força exercida sobre você, que é constante.

1. O tempo está relacionado com a distância e a aceleração. Admitindo que você está inicialmente em repouso relativamente à nave espacial:

$$x = \frac{1}{2}at^2; \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

2. Sua aceleração é a força dividida pela sua massa, e a força é a potência dividida por  $c$ :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P/c}{m} = \frac{P}{mc}$$

3. Use essa aceleração para calcular o tempo  $t$ :

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2xmc}{P}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(20\text{ m})(95\text{ kg})(3 \times 10^8\text{ m/s})}{1000\text{ W}}}$$

$$= 3,38 \times 10^4\text{ s} = 9,38\text{ h}$$

**NOTAS** Note que a aceleração é extremamente pequena — cerca de apenas  $10^{-9}\text{ g}$ . Sua velocidade, quando você atingisse a nave espacial, seria de  $v = at = 1,19\text{ mm/s}$ , que é praticamente imperceptível.

**EXERCÍCIO** Quanto tempo levaria para atingir a nave espacial se você tirasse os laços de suas botas e os lançasse o mais rápido que pudesse no sentido contrário ao da nave? (Para responder a esta pergunta, você deve inicialmente estimar a massa dos laços e a velocidade máxima com que você poderia lançá-los.) (Resposta: cerca de cinco horas para laços de botas de 10 g lançados a 10 m/s)

### \*30-4 A Equação de Onda para as Ondas Eletromagnéticas

Na Seção 15-1, foi visto que as ondas sobre uma corda obedecem à equação diferencial parcial chamada de equação de onda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad 30-16$$

onde  $y(x, t)$  é a função de onda, que para ondas em cordas é o deslocamento da corda. A velocidade da onda é dada por  $v = \sqrt{F/\mu}$ , onde  $F$  é a tração e  $\mu$  é a massa específica linear. A solução geral para essa equação é

$$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

As funções gerais de solução podem ser expressas como a superposição de funções de onda harmônicas na forma

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda e  $\omega = 2\pi f$  é a freqüência angular.

As equações de Maxwell implicam que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  obedecem às equações de onda similares à Equação 30-16. Considera-se aqui apenas o espaço livre, no qual não existem cargas ou correntes, e presume-se que os campos elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são funções do tempo e de apenas uma coordenada espacial, que será adotada como sendo a coordenada  $x$ . Tal onda é chamada de onda plana, porque  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são uniformes através de qualquer plano perpendicular ao eixo  $x$ . Para uma onda eletromagnética plana se deslocando paralelamente ao eixo  $x$ , as componentes  $x$  dos campos são nulas, então os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares ao eixo  $x$ , e cada um obedece à equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad 30-17a$$

EQUAÇÃO DE ONDA PARA  $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad 30-17b$$

EQUAÇÃO DE ONDA PARA  $\vec{B}$

onde  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  é a velocidade das ondas. (Nota: uma análise dimensional auxilia a lembrar essas equações. Para cada equação, os numeradores em ambos os lados são os mesmos e os denominadores em ambos os lados têm dimensão de comprimento ao quadrado.)

#### \*Derivação da Equação de Onda

Pode-se relacionar a derivada espacial de um dos vetores campo à derivada no tempo do outro vetor campo pela aplicação da lei de Faraday (Equação 30-6c) e

da versão modificada da lei de Ampère (Equação 30-6d) para curvas apropriadamente escolhidas no espaço. Inicialmente relaciona-se a derivada no espaço de  $E_y$  à derivada no tempo de  $B_z$  pela aplicação da Eq. 30-6c (lei de Faraday) à curva retangular de lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$  que pertence ao plano  $xy$  (Figura 30-11). A circulação de  $\vec{E}$  em torno de  $C$  (a integral de linha de  $\vec{E}$  em torno da curva  $C$ ) é

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_y(x_2)\Delta y - E_y(x_1)\Delta y$$

onde  $E_y(x_1)$  é o valor de  $E_y$  no ponto  $x_1$  e  $E_y(x_2)$  é o valor de  $E_y$  no ponto  $x_2$ . As contribuições do tipo  $E_x\Delta x$  do topo e da parte inferior dessa curva são nulas porque  $E_x = 0$ . Uma vez que  $\Delta x$  é muito pequeno (comparado com o comprimento de onda), pode-se aproximar a diferença em  $E_y$  nos lados esquerdo e direito dessa curva (em  $x_1$  e em  $x_2$ ) por

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E_y \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x$$

Então

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

A lei de Faraday é

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial B_z}{\partial t} dA$$

O fluxo de  $B_z/t$  através da superfície retangular limitada por essa curva é aproximadamente

$$\int_S B_z dA \approx \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

A lei de Faraday fornece então

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

ou

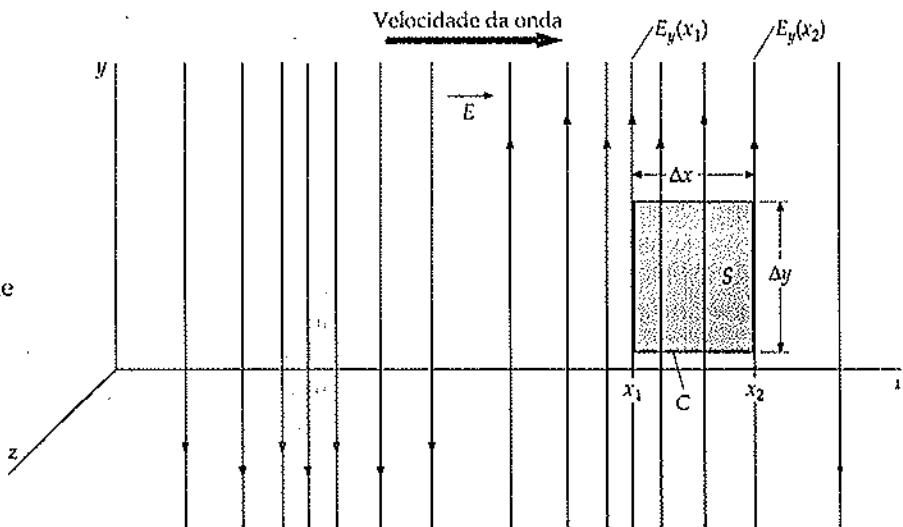
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad 30-18$$

A Equação 30-18 implica que se existe uma componente do campo elétrico  $E_y$  que depende de  $x$ , deve existir uma componente do campo magnético  $B_z$  que depende do tempo ou, inversamente, se existe uma componente do campo magnético  $B_z$  que depende do tempo, deve existir uma componente do campo elétrico  $E_y$  que depende de  $x$ . Pode-se obter uma equação similar relacionando a derivada no espaço do campo magnético  $B_z$  à derivada no tempo do campo elétrico  $E_y$  pela aplicação da lei de Ampère (Equação 30-6d) à curva de lados  $\Delta x$  e  $\Delta z$  no plano  $xz$  mostrado na Figura 30-12.

Para o caso em que não existe corrente de condução ( $I = 0$ ), a Equação 30-6d é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_y}{\partial t} dA$$

Os detalhes dos cálculos são similares àqueles para a Equação 30-18. O resultado é



**FIGURA 30-11**  
Uma curva retangular no plano  $xy$  para a derivação da Equação 30-18.

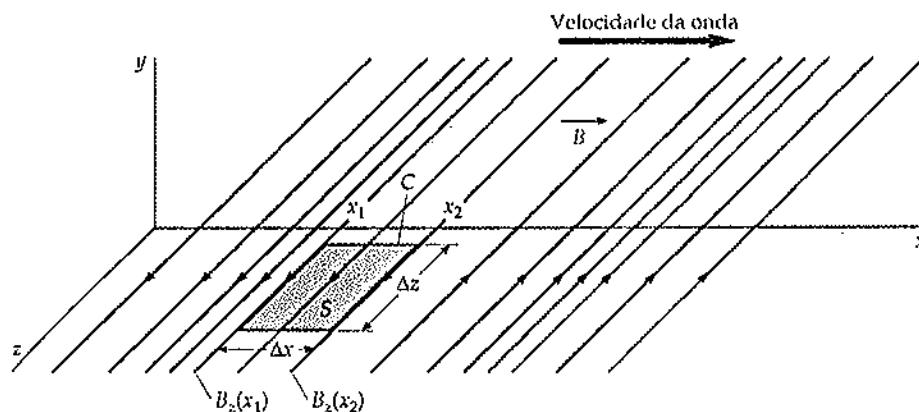


FIGURA 30-12

Uma curva retangular no plano  $xz$  para derivação da Equação 30-19.

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad 30-19$$

Pode-se eliminar tanto  $B_z$  ou  $E_y$  a partir das Equações 30-18 e 30-19 pela diferenciação de ambos os lados de cada equação com respeito tanto a  $x$  como a  $t$ . Se ambos os lados da Equação 30-18 forem derivados com respeito a  $x$ , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

Trocando a ordem das derivadas no tempo e no espaço no termo da direita do sinal de igual, tem-se

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

Usando a Equação 30-19, substitui-se  $B_z / t$  para obter

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

que leva à equação de onda

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad 30-20$$

Comparando a Equação 30-20 com a Equação 30-16, nota-se que  $E_y$  obedece à equação de onda para ondas com velocidade  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , que é a Equação 30-1.

Se se escolhesse eliminar  $E_y$  a partir das Equações 30-18 e 30-19 (pela diferenciação da Equação 30-18 com relação a  $t$ , por exemplo), seria obtida uma equação idêntica à Equação 30-20 apenas com  $B_z$ , substituindo  $E_y$ . Pode-se, desse modo, ver que tanto o campo elétrico  $E_y$  quanto o campo magnético  $B_z$  obedecem a uma equação de onda para ondas se deslocando com velocidade  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , que é a velocidade da luz.

Seguindo a mesma linha de raciocínio aqui empregada, e aplicando a Equação 30-6c (lei de Faraday) à curva no plano  $xy$  (Figura 30-11), pode-se obter

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad 30-21$$

Da mesma maneira, a aplicação da Equação 30-6d à curva no plano  $xy$  (Figura 30-11) fornece

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad 30-22$$

Pode-se usar esses resultados para mostrar que para uma onda se propagando na direção  $x$  as componentes  $E_x$  e  $B_y$  também obedecem à equação de onda.

Para mostrar que o campo magnético  $B_z$  está em fase com o campo elétrico  $E_y$ , considere a função de onda harmônica da forma

$$E_y = E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad 30-23$$

Se essa solução for substituída na Equação 30-18, tem-se

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_{y0} \cos(kx - \omega t)$$

Para determinar  $B_z$ , toma-se a integral de  $B_z / t$  com relação ao tempo. Realizando a integração, chega-se a

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{k}{\omega} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) \quad 30-24$$

em que  $f(x)$  é uma função arbitrária de  $x$ .

**EXERCÍCIO** Verifique a Equação 30-24 tomando  $B_z / t$ , onde  $B_z = (k/\omega) E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x)$ .

O resultado deve ser  $-kE_{y0} \cos(kx - \omega t)$ , que é o lado direito da equação anterior.

Substituindo em seguida a solução (Equação 30-23) na Equação 30-19, obtém-se

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega \mu_0 \epsilon_0 E_{y0} \cos(kx - \omega t)$$

Resolvendo para  $B_z$ , tem-se

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t) \quad 30-25$$

onde  $g(t)$  é uma função arbitrária do tempo. Igualando os lados direitos das Equações 30-24 e 30-25, chega-se a

$$\frac{k}{\omega} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

Substituindo  $\omega/k$  por  $c$  e  $\mu_0 \epsilon_0$  por  $1/c^2$  tem-se

$$\frac{1}{c} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{1}{c} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

o que implica  $f(x) = g(t)$  para todos os valores de  $x$  e  $t$ . Essa relação permanece igual apenas se  $f(x) = g(t) = \text{constante}$  (independentemente tanto de  $x$  quanto de  $t$ ). Assim, a Equação 30-24 se torna

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \text{constante} = B_{z0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad 30-26$$

onde  $B_{z0} = (k/\omega) E_{y0} = (1/c) E_{y0}$ . A constante de integração foi eliminada, pois ela não tem significado na onda. Ela apenas possibilita a presença de um campo magnético estático uniforme. Uma vez que os campos elétrico e magnético oscilam em fase com a mesma freqüência, tem-se o resultado geral de que o módulo do campo elétrico é  $c$  vezes o módulo do campo magnético para uma onda eletromagnética:

$$E = cB$$

que é a Equação 30-7.

Verifica-se que as equações de Maxwell implicam as equações de onda 30-17a e 30-17b para os campos elétrico e magnético; e que se  $E_y$  varia harmonicamente, como na Equação 30-23, o campo magnético  $B_z$  está em fase com  $E_y$  e tem uma amplitude relacionada com a amplitude de  $E_y$  por  $B_z = E_y/c$ . Os campos elétrico e magnético são perpendiculares um ao outro e à direção de propagação da onda, como mostrado na Fig. 30-4.

### EXEMPLO 30-6

O campo elétrico de uma onda eletromagnética é dado por  $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$ . (a) Qual é a direção de propagação da onda? (b) Qual é a direção do campo magnético no plano  $x = 0$  no instante de tempo  $t = 0$ ? (c) Encontre o campo magnético da mesma onda. (d) Calcule  $\vec{E} \times \vec{B}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** O argumento do co-seno fornece a direção de propagação.  $\vec{B}$  é perpendicular a ambos,  $\vec{E}$  e à direção de propagação.  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  estão em fase.

- (a) O argumento da função co-seno ( $kx - \omega t$ ) diz qual é a direção de propagação:

A direção de propagação é a direção do aumento de  $x$ , que é a direção de  $\hat{i}$ .

- (b) 1.  $\vec{B}$  está em fase com  $\vec{E}$  e é perpendicular tanto a  $\vec{E}$  quanto à direção de propagação  $\hat{k}$ . (Isto é,  $\vec{B}$  é perpendicular tanto a  $\hat{k}$  quanto a  $\hat{i}$ .) Isso significa que:

$$\vec{B}(x, t) = \pm B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}$$

2.  $\vec{E} \times \vec{B}$  está na direção de propagação  $\hat{i}$ . Use as expressões para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e tome o produto vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k} \times (\pm B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}) \\ &= E_0(\pm B_0) \cos^2(kx - \omega t)(\hat{k} \times \hat{j}) \\ &= E_0(\pm B_0) \cos^2(kx - \omega t)(-\hat{i})\end{aligned}$$

3. Escolha o sinal de tal modo que  $\vec{E} \times \vec{B}$  esteja no sentido de  $\hat{i}$  positivo:

$$\vec{E} \times \vec{B} = E_0(-B_0) \cos^2(kx - \omega t)(-\hat{i})$$

então

$$\vec{B}(x, t) = -B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}$$

$$\vec{B}(0, 0) = -B_0 \cos[k(0) - \omega(0)]\hat{j} = -B_0\hat{j}$$

∴  $\vec{B}(0, 0)$  está na direção  $y$  negativa

4. Avalie  $\vec{B}$  quando ambos,  $x$  e  $t$ , são iguais a zero:

- (c) Em uma onda eletromagnética,  $E_0 = cB_0$  e  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  estão em fase. Assim:

$$\vec{B}(x, t) = [-B_0 \cos(kx - \omega t)]\hat{j}, \text{ onde } B_0 = E_0/c$$

- (d) Calcule  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Faça  $\theta = kx - \omega t$  e realize os cálculos:

$$\vec{E} \times \vec{B} = (E_0 \cos \theta \hat{k}) \times (-B_0 \cos \theta \hat{j})$$

$$= -E_0 B_0 \cos^2 \theta (\hat{k} \times \hat{j})$$

$$= E_0 B_0 \cos^2 \theta \hat{i}, \text{ onde } \theta = kx - \omega t$$

**NOTAS** O resultado da Parte (d) confirma aquele da Parte (a), pois para uma onda eletromagnética  $\vec{E} \times \vec{B}$  está sempre na direção de propagação.

 PENSANDO

 IDEAS

 MECÂNICA

 POLÍTICA

O campo elétrico de uma onda eletromagnética é dado por  $(\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{k})$ . (a) Encontre o campo magnético da mesma onda. (b) Calcule  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  e  $\vec{E} \times \vec{B}$ .

**DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA** Pode-se resolver este problema usando o princípio da superposição. O campo elétrico dado é a superposição de dois campos, um dado na Equação 30-23 e o outro dado na pergunta do problema do Exemplo 30-6.

- (a) 1. A partir da fase (argumento da função trigonométrica) pode-se ver que a direção de propagação é a direção  $x$  positiva:

A fase é para uma onda se deslocando na direção  $x$  positiva.

2. O campo elétrico dado pode ser considerado uma superposição de  $\vec{E}_1 = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j}$  e  $\vec{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{k}$ . Encontre os campos magnéticos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  associados a esses campos elétricos, respectivamente. Use o procedimento seguido no Exemplo 30-6:
3. A superposição dos campos magnéticos fornece os campos magnéticos resultantes:

$$\text{Para } \vec{E}_1 = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j}, \vec{B}_1 = B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k}$$

e

$$\text{Para } \vec{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{k}, \vec{B}_2 = -B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{j}$$

onde

$$E_0 = cB_0$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, t) &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k} - B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{j} \end{aligned}$$

onde

$$B_0 = E_0/c$$

- (b) 1. Faça  $\theta = kx - \omega t$  para simplificar a notação e calcule  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} &= (E_0 \sin \theta \hat{j} + E_0 \cos \theta \hat{k}) \cdot (B_0 \sin \theta \hat{k} - B_0 \cos \theta \hat{j}) \\ &= E_0 B_0 \sin^2 \theta \hat{j} \cdot \hat{k} - E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta \hat{j} \cdot \hat{j} \\ &\quad + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta \hat{k} \cdot \hat{k} - E_0 B_0 \cos^2 \theta \hat{k} \cdot \hat{j} \\ &= 0 - E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta - 0 = 0 \end{aligned}$$

2. Calcule  $\vec{E} \times \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{B} &= (E_0 \sin \theta \hat{j} + E_0 \cos \theta \hat{k}) \times (-B_0 \cos \theta \hat{j} + B_0 \sin \theta \hat{k}) \\ &= -E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta (\hat{j} \times \hat{j}) + E_0 B_0 \sin^2 \theta (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad - E_0 B_0 \cos^2 \theta (\hat{k} \times \hat{j}) + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= 0 + E_0 B_0 \sin^2 \theta \hat{i} + E_0 B_0 \cos^2 \theta \hat{i} + 0 = E_0 B_0 \hat{i} \end{aligned}$$

**NOTAS** Observa-se que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares um ao outro, e que  $\vec{E} \times \vec{B}$  está na direção de propagação da onda. Esse tipo de onda eletromagnética é dita *circularmente polarizada*. Em um valor fixo de  $x$ , tanto  $\vec{E}$  quanto  $\vec{B}$  giram em um círculo em um plano perpendicular a  $\hat{i}$  com freqüência angular  $\omega$ .

**EXERCÍCIO** Calcule  $\vec{E} \cdot \vec{E}$  e  $\vec{B} \cdot \vec{B}$ . (Resposta  $\vec{E} \cdot \vec{E} = E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = E_0^2$  e  $\vec{B} \cdot \vec{B} = B_y^2 + B_z^2 = B_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + B_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = B_0^2$ )

**NOTAS** Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são constantes em módulo.

## RESUMO

- As equações de Maxwell são uma síntese das leis fundamentais da física que governam a eletricidade e o magnetismo.
- As ondas eletromagnéticas incluem a luz, as ondas de rádio e televisão, os raios X, os raios gama, as microondas e outras.

### Tópicos

### Equações e Observações Importantes

#### 1. Corrente de Deslocamento de Maxwell

A lei de Ampère pode ser generalizada para ser aplicada às correntes que não estão em regime permanente (e não são contínuas) se a corrente  $I$  for substituída por  $I + I_d$ , onde  $I_d$  é a corrente de deslocamento de Maxwell:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

#### Lei de Ampère generalizada

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

#### 2. Equações de Maxwell

As leis da eletricidade e do magnetismo são sintetizadas pelas equações de Maxwell.

#### Lei de Gauss

$$\oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interna}}$$

#### Lei de Gauss para o magnetismo (pólos magnéticos isolados não existem)

$$\oint_S B_n dA = 0$$

#### Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

#### Lei de Ampère modificada

$$\begin{aligned} & \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) \\ &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E_n dA = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA \end{aligned}$$

#### 3. Ondas Eletromagnéticas

Em uma onda eletromagnética, os vetores campo elétrico e magnético são perpendiculares um ao outro e à direção de propagação. Seus módulos são relacionados por

$$E = cB$$

#### Velocidade de onda

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

#### Espectro eletromagnético

Os vários tipos de ondas eletromagnéticas — luz, ondas de rádio, raios X, raios gama, microondas etc. — diferem apenas no comprimento de onda e na frequência. O olho humano é sensível em uma faixa de cerca de 400 nm até 700 nm.

#### Radiação de um dipolo elétrico

Ondas eletromagnéticas são produzidas quando cargas elétricas livres são aceleradas. Cargas oscilatórias em uma antena de dipolos elétricos radiam ondas eletromagnéticas com uma intensidade que é maior nas direções perpendiculares à da antena. Não existe intensidade radiante ao longo do eixo da antena. Perpendicularmente à antena e longe dela o campo elétrico de uma onda eletromagnética é paralelo à antena.

Densidade de energia em uma onda eletromagnética	$u = u_e + u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c}$	30-8
Intensidade de uma onda eletromagnética	$I = u_{\text{med}} c = \frac{E_{\text{med}} B_{\text{med}}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} =  \vec{S} _{\text{med}}$	30-9
Vetor de Poynting	$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$	30-10
Quantidade de movimento e energia em uma onda eletromagnética	$p = \frac{U}{c}$	30-13
Pressão de radiação e intensidade	$P_r = \frac{I}{c}$	30-14
4. *A Equação de Onda para Ondas Eletromagnéticas	As equações de Maxwell implicam que os vetores campo elétrico e magnético no espaço livre obedecem à equação de onda.	
	$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$	30-17a
	$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$	30-17b

## PROBLEMAS

Em alguns problemas são fornecidos mais dados do que o necessário; em outros, será necessário acrescentar informações provenientes de seus conhecimentos ou de outras fontes de dados e de estimativas.

- Problema de conceito único, uma única etapa, relativamente fácil
- • Problema de nível intermediário, pode exigir a síntese de alguns conceitos
- • • Problema desafiador

### Problemas Conceituais

1 • • Verdadeiro ou falso:

- As equações de Maxwell se aplicam apenas para campos que são constantes ao longo do tempo.
  - A equação de onda pode ser derivada a partir das equações de Maxwell.
  - Ondas eletromagnéticas são ondas transversas.
  - Em uma onda eletromagnética no espaço livre, os campos elétricos e magnético estão em fase.
  - Em uma onda eletromagnética no espaço livre, os vetores campo elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são iguais em módulo.
  - Em uma onda eletromagnética no espaço livre, as densidades de energia elétrica e magnética são iguais.
- 2 • • Alguns cientistas têm especulado sobre a possível existência de monopolos magnéticos e têm realizado, sem sucesso, vá-

rios experimentos para determinar tais monopolos. Suponha que monopolos magnéticos sejam encontrados e que o campo magnético a uma distância  $r$  a partir de um monopolo de intensidade  $q_m$  é dado por  $B = (\mu_0/4\pi)q_m/r^2$ . Como as equações de Maxwell deveriam ser alteradas para serem consistentes com tal descoberta?

- Quais ondas possuem maior freqüência, as ondas de luz ou os raios X?
- As freqüências da radiação ultravioleta são maiores ou menores do que as da radiação infravermelha?
- Que tipos de ondas têm comprimento de onda da ordem de alguns metros?
- A detecção de ondas de rádio pode ser realizada através de uma antena dipolar ou uma antena em espira. A antena dipolar detecta (escolha um) o campo elétrico/magnético da onda, e a antena em espira detecta o campo elétrico/magnético da onda.

30-8

30-9

30-10

30-13

30-14

30-17a

30-17b

- 7 • Um transmissor usa uma antena em espira com a espira no plano horizontal. Qual deve ser a orientação da antena dipolar do receptor para uma recepção ótima do sinal?

- 8 • Um laser hélio-néon tem um feixe vermelho. Ele incide sobre um filtro de plástico vermelho (do tipo empregado na iluminação de teatros) e sobre um filtro de plástico verde. (Um filtro de plástico vermelho de iluminação teatral transmite apenas luz vermelha.) Sobre qual filtro o laser irá exercer uma maior força?

### Estimativas e Aproximações

- 9 •• Estime a intensidade e a potência total necessária em um feixe laser para elevar uma esfera de plástico de diâmetro  $15 \mu\text{m}$  contra a força de gravidade. Faça as hipóteses que achar razoáveis.

- 10 ••• Alguns escritores de ficção científica têm usado velas solares para impulsionar naves interestelares. Imagine uma vela solar gigante sobre uma espaçonave sujeita à pressão de radiação solar. (a) Mostre que a aceleração da espaçonave é dada por

$$a = \frac{P_s A}{4\pi r^2 m}$$

onde  $P_s$  é a potência de saída do Sol e é igual a  $3,8 \times 10^{26} \text{ W}$ ,  $A$  é a área superficial da vela,  $m$  é massa total da nave espacial,  $r$  é sua distância do Sol e  $c$  é a velocidade da luz. (b) Mostre que a velocidade da espaçonave a uma distância  $r$  do Sol é dada por

$$v^2 = v_0^2 + \left( \frac{P_s A}{2\pi mc} \right) \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial em  $r_0$ . (c) Compare as acelerações relativas devidas à pressão de radiação e à força gravitacional. Use valores razoáveis para  $A$  e  $m$ . Esse sistema irá funcionar?

- 11 •• A intensidade dos raios solares que atingem a atmosfera superior da Terra (chamada de constante solar) é de  $1,37 \text{ kW/m}^2$ . (a) Encontre  $E_{\text{rad}}$  e  $B_{\text{rad}}$  devidos ao Sol na atmosfera superior da Terra. (b) Encontre a potência média de saída do Sol. (c) Encontre a intensidade e a pressão de radiação na superfície do Sol.

- 12 •• Estime a força da pressão de radiação exercida sobre a Terra pelo Sol e compare a força da pressão de radiação com a força de atração gravitacional do Sol. Na órbita da Terra a intensidade da luz do Sol é de  $1,37 \text{ kW/m}^2$ .

- 13 •• Repita o Problema 12 para o planeta Marte. Qual planeta possui uma maior razão entre a pressão de radiação e a atração gravitacional? Por quê?

- 14 •• No novo campo do resfriamento e da captura a laser, as forças associadas à pressão de radiação são usadas para desacelerar os átomos de velocidades de centenas de metros por segundo, na temperatura ambiente, para velocidades de apenas poucos metros por segundo ou menos. Um átomo isolado irá absorver energia apenas em freqüências de ressonância específicas. Se a freqüência da radiação do feixe laser é uma das freqüências de ressonância do átomo-alvo, então a radiação é absorvida através de um processo chamado de absorção ressonante. A área de seção reta efetiva de um átomo para absorção ressonante é aproximadamente igual a  $\lambda^2$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe laser. (a) Estime a aceleração de um átomo de rubídio (massa atômica  $85 \text{ g/mol}$ ) em um feixe laser cujo comprimento de onda é de  $780 \text{ nm}$  e a intensidade é de  $10 \text{ W/m}^2$ . (b) Quanto tempo aproximadamente irá levar para que esse feixe de luz desacelere um átomo de rubídio em um gás à temperatura ambiente ( $300 \text{ K}$ ) para uma velocidade próxima de zero?

### Corrente de Deslocamento de Maxwell

- 15 • Um capacitor de placas paralelas no vácuo tem placas circulares de raio  $2,3 \text{ cm}$  separadas por  $1,1 \text{ mm}$ . A carga está fluindo para a placa superior, vindas da placa inferior, com uma taxa de  $5 \text{ A}$ . (a) Encontre a taxa de variação no tempo do campo elétrico entre as placas. (b) Calcule a corrente de deslocamento entre as placas e mostre que a corrente de deslocamento é igual a  $5 \text{ A}$ .

- 16 • Em uma região do espaço, o campo elétrico varia de acordo com  $E = (0,05 \text{ N/C}) \sin 2000t$ , onde  $t$  está em segundos. Encontre a máxima corrente de deslocamento através de uma área de  $1 \text{ m}^2$  perpendicular a  $\vec{E}$ .

- 17 •• Para o Problema 15, mostre que a uma distância  $r$  a partir do eixo das placas o campo magnético entre as placas é dado por  $B = (1,89 \times 10^{-3} \text{ T/m})r$ , se  $r$  é menor que o raio das placas.

- 18 •• Mostre que para um capacitor de placas paralelas no vácuo a corrente de deslocamento é dada por  $I_d = Cdv/dt$ , onde  $C$  é a capacidade e  $V$  é a tensão através do capacitor. (b) Um capacitor de placas paralelas de  $5 \text{ nF}$  é conectado a um fêm  $\beta = \beta_0 \cos \omega t$ , onde  $\beta_0 = 3 \text{ V}$  e  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ . Encontre a corrente de deslocamento entre as placas como uma função do tempo. Despreze qualquer resistência no circuito.

- 19 •• Uma corrente de  $10 \text{ A}$  flui para um capacitor que dispõe de placas com áreas de  $0,5 \text{ m}^2$ . Há vácuo entre as placas. (a) Qual é a corrente de deslocamento entre as placas? (b) Qual é  $dE/dt$  entre as placas para essa corrente? (c) Qual é a integral de linha de  $\vec{B} \cdot d\ell$  em torno de um círculo de raio de  $10 \text{ cm}$  que se encontra dentro das placas e é paralelo a elas?

- 20 •• Um capacitor de placas circulares paralelas apresenta uma carga  $Q_0$ . Entre as placas encontra-se um dielétrico de constante  $k$  e resistividade  $\rho$ . (a) Encontre a corrente de condução entre as placas como função do tempo. (b) Encontre a corrente de deslocamento entre as placas como função do tempo. (c) Encontre o campo magnético produzido entre as placas pela corrente de descarga como função do tempo. (d) Encontre o campo magnético entre as placas produzido pela corrente de deslocamento como função do tempo. (e) Qual é o campo magnético total entre as placas durante a descarga do capacitor?

- 21 •• O capacitor do Problema 20 tem placas com separação  $d$ . Ele começa a ser carregado de tal modo que a tensão através do capacitor é dada por  $V(t) = (0,01 \text{ V/s})t$ . (a) Encontre a corrente de condução como função do tempo. (b) Encontre a corrente de deslocamento. (c) Encontre o instante de tempo para o qual a corrente de deslocamento é igual à corrente de condução.

- 22 •• O espaço entre as placas de um capacitor é preenchido com um material de resistividade  $\rho = 10^4 \Omega \cdot \text{m}$  e constante dielétrica  $k = 2,5$ . As placas paralelas são circulares, com um raio de  $20 \text{ cm}$ , e estão separadas de  $1 \text{ mm}$ . A tensão através das placas é dada por  $V_0 \cos \omega t$ , com  $V_0 = 40 \text{ V}$  e  $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$ . (a) Qual é a densidade da corrente de deslocamento? (b) Qual é a corrente de condução entre as placas? (c) Em qual velocidade angular a corrente total está  $45^\circ$  fora de fase em relação à tensão aplicada?

- 23 ••• Mostre que a forma generalizada da lei de Ampère (Equação 30-4) e a lei de Biot-Savart fornecem o mesmo resultado em uma situação em que ambas podem ser aplicadas. A Figura 30-13 mostra duas cargas  $+Q$  e  $-Q$  sobre o eixo  $x$  em  $x = -a$  e  $x = +a$ , com uma corrente  $I = -dQ/dt$  ao longo da linha entre elas. O ponto  $P$  está sobre o eixo  $y$  em  $y = R$ . (a) Use a lei de Biot-Savart para mostrar que o módulo de  $B$  no ponto  $P$  é

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

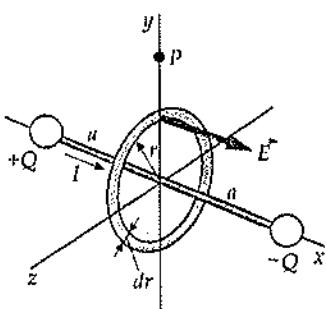


FIGURA 30-13  
Problema 23

(b) Considere uma fatia circular de raio  $r$  e largura  $dr$  no plano  $xy$  com seu centro na origem. Mostre que o fluxo do campo elétrico através dessa fatia é

$$E_x dA = \frac{Q}{\epsilon_0} a (r^2 + a^2)^{-3/2} r dr$$

(c) Use seu resultado da Parte (b) para encontrar o fluxo total  $\phi_e$  através de uma área circular de raio  $R$ . Mostre que

$$\epsilon_0 \phi_e = Q \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

(d) Encontre a corrente de deslocamento  $I_d$  e mostre que

$$I + I_d = I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

(d) Finalmente, mostre que a Equação 30-4 fornece o mesmo resultado para  $B$  que aquele encontrado na Parte (a).

### Equações de Maxwell e Espectro Eletromagnético

24 •• Mostre que a componente normal do campo magnético  $\vec{B}$  é contínuo sobre uma superfície, aplicando a lei de Gauss para  $\vec{B}$  ( $\int B_n dA = 0$ ) para uma superfície gaussiana fechada que tem uma face sobre cada lado da superfície.

25 • Encontre o comprimento de onda para (a) uma onda de rádio AM típica, com freqüência de 1000 kHz, e (b) uma onda de rádio FM típica com freqüência de 100 MHz.

26 • Qual é a freqüência de uma microonda de 3 cm?

27 • Qual é a freqüência de um raio X com um comprimento de onda de 0,1 nm?

### Radiação de um Dipolo Elétrico

28 •• A intensidade de radiação de um dipolo elétrico é proporcional ao  $\sin^2 \theta / r^2$ , em que  $\theta$  é o ângulo entre o momento dipolar elétrico e o vetor posição  $\vec{r}$ . Um dipolo elétrico radiante repousa sobre o eixo  $z$  (seu momento dipolar está na direção  $z$ ). Seja  $I_r$  a intensidade da radiação a uma distância  $r = 10$  cm e no ângulo  $\theta = 90^\circ$ . Encontre a intensidade (em termos de  $I_r$ ) em (a)  $r = 30$  m,  $\theta = 90^\circ$ ; (b)  $r = 10$  m,  $\theta = 45^\circ$ ; e (c)  $r = 20$  m,  $\theta = 30^\circ$ .

29 •• (a) Para a situação descrita no Problema 28, em qual ângulo a intensidade em  $r = 5$  m é igual a  $I_r$ ? (b) Em qual distância a intensidade é igual a  $I_r$  para  $\theta = 45^\circ$ ?

30 •• A antena transmissora de uma estação é um dipolo localizado no topo de uma montanha a 2000 m acima do nível do mar. A intensidade do sinal em uma montanha vizinha, distando 4 km e também a 2000 m acima do nível do mar, é de  $4 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Qual é a intensidade do sinal no nível do mar a 1,5 km do transmissor? (Veja o Problema 28.)

31 ••• Uma estação de rádio que usa uma antena vertical dipolar transmite a uma freqüência de 1,20 MHz com potência total de saída de 500 kW. O padrão de radiação é como o mostrado na Fig. 30-8 (i.e., a intensidade do sinal varia com  $\sin^2 \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção de propagação e a vertical e é independente do ângulo de azimute.) Calcule a intensidade do sinal a uma distância horizontal de 120 km a partir da estação. Qual é a intensidade nesse ponto, medida em fôtons por centímetro quadrado por segundo?

32 ••• A uma distância de 30 km de uma estação de rádio transmitindo a uma freqüência de 0,8 MHz, a intensidade de uma onda eletromagnética é  $2 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$ . A antena transmissora é um dipolo vertical. Qual é a potência total radiada pela estação?

33 ••• Um pequeno avião particular, se aproximando de um aeroporto, voa a uma altitude de 2500 m acima do solo. O sistema de controle de vôo do aeroporto transmite 100 W a 24 MHz, usando uma antena dipolar vertical. Qual é a intensidade do sinal na antena receptora do avião quando sua posição em um mapa é de 4 km do aeroporto?

### Energia e Quantidade de Movimento em uma Onda Eletromagnética

34 •• Uma onda eletromagnética tem uma intensidade de  $100 \text{ W/m}^2$ . Encontre (a) a pressão de radiação  $P_r$ , (b)  $E_{rms}$  e (c)  $B_{rms}$ .

35 •• A amplitude de uma onda eletromagnética é de  $E_0 = 400 \text{ V/m}$ . Encontre (a)  $E_{rms}$ , (b)  $B_{rms}$ , (c) a intensidade  $I$  e (d) a pressão de radiação  $P_r$ .

36 •• O valor rms de um campo elétrico em uma onda eletromagnética é  $E_{rms} = 400 \text{ V/m}$ . (a) Encontre  $B_{rms}$ , (b) a densidade de energia média e (c) a intensidade.

37 •• Mostre que as unidades de  $E = cB$  são consistentes; isto é, mostre que quando  $B$  está em teslas e  $c$  em metros por segundo a unidade de  $cB$  é volts por metro ou newtons por coulomb.

38 •• O valor rms do módulo do campo magnético em uma onda eletromagnética é  $B_{rms} = 0,245 \mu\text{T}$ . Encontre (a)  $E_{rms}$ , (b) a densidade de energia média e (c) a intensidade.

39 •• (a) Uma onda eletromagnética de intensidade  $200 \text{ W/m}^2$  incide normalmente sobre uma placa negra retangular com lados de 20 cm e 30 cm que absorve toda a radiação. Encontre a força exercida sobre a placa pela radiação. (b) Encontre a força exercida pela mesma onda se a placa refletir toda a radiação incidente sobre ela.

40 •• Encontre a força exercida pela onda eletromagnética sobre a placa reflectora na Parte (b) do Problema 39 se a radiação é incidente em um ângulo de  $30^\circ$  com relação à normal.

41 •• Uma estação de rádio AM radia uma onda senoidal isotrópica com uma potência média de 50 kW. Quais são as amplitudes de  $E_{max}$  e  $B_{max}$  a uma distância de (a) 500 m, (b) 5 km e (c) 50 km?

42 •• Um feixe laser tem um diâmetro de 1,0 mm e uma potência média de 1,5 mW. Encontre (a) a intensidade do feixe, (b)  $E_{rms}$ , (c)  $B_{rms}$  e (d) a pressão de radiação.

43 •• Em vez de se liberar potência por uma linha de transmissão de 750 kV e 1000 A, prefere-se enviar essa energia através de uma onda eletromagnética. O feixe possui uma intensidade uniforme com área de seçãoreta de  $50 \text{ m}^2$ . Quais são os valores rms dos campos elétrico e magnético?

44 •• Um pulso laser tem uma energia de 20 J e um feixe de raio 2 mm. A duração do pulso é de 10 ns e a densidade de energia é constante dentro do pulso. (a) Qual é o comprimento espacial do pulso? (b) Qual é a densidade de energia dentro do pulso? (c) Encontre as amplitudes elétrica e magnética do pulso laser.

- 45 •• O campo elétrico de uma onda eletromagnética oscila na direção  $y$ , e o vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S}(x, t) = (100 \text{ W/m}^2) \cos^2[10x - (3 \times 10^9)t] \hat{i}$$

onde  $x$  está em metros e  $t$  em segundos. (b) Qual é a direção de propagação da onda? (b) Encontre o comprimento de onda e a frequência. (c) Encontre os campos elétrico e magnético.

- 46 •• Um capacitor de placas paralelas está sendo carregado. O capacitor consiste em duas placas paralelas circulares de área  $A$  e separação  $d$ . (a) Mostre que a corrente de deslocamento no espaço entre as placas do capacitor tem o mesmo valor que a corrente de condução nos terminais do capacitor. (b) Qual é a direção do vetor de Poynting na região do espaço entre as placas do capacitor? (c) Calcule o vetor de Poynting  $\vec{S}$  nessa região e mostre que o fluxo de  $S$  dentro dessa região é igual à taxa de variação da energia armazenada no capacitor.

- 47 •• Um laser pulsado dispara um pulso de 1000 MW de 200 ns de duração sobre um pequeno objeto com massa de 100 mg, suspenso através de uma fibra fina de 4 cm de comprimento. Se a radiação é completamente absorvida sem outros efeitos, qual é o máximo ângulo de deflexão desse pêndulo?

- 48 •• Os espelhos usados em um tipo específico de laser são 99,99% refletores. (a) Se o laser tem uma potência média de saída de 15 W, qual é a potência média da radiação incidente sobre um dos espelhos? (b) Qual é a força devida à pressão de radiação sobre um dos espelhos?

- 49 •• Uma placa de 10 cm por 15 cm apresenta massa de 2 g e é perfeitamente refletora. A placa se encontra no plano vertical e é livre para girar em torno de um eixo horizontal que passa através do seu topo. A placa é iluminada uniformemente por uma intensa luz, que faz com que a placa tenha um ângulo de 1° com a vertical. Encontre a intensidade da luz.

## A Equação de Onda para Ondas Eletromagnéticas

- 50 • Mostre por substituição direta que a Equação 30-17a é satisfeita pela função da onda

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin k(x - ct)$$

onde  $c = \omega/k$ .

- 51 • Use os valores conhecidos de  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  em unidades SI para determinar  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , e mostre que esse valor é de aproximadamente  $3 \times 10^8$  m/s.

- 52 ••• (a) Usando argumentos similares aos adotados ao longo do texto, mostre que para uma onda plana, na qual  $E$  e  $B$  são independentes de  $y$  e  $z$ ,

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

- (b) Mostre que  $E_z$  e  $B_y$  também satisfazem a equação de onda.

- 53 ••• Mostre que qualquer função da forma  $y(x, t) = f(x - vt)$  ou  $y(x, t) = g(x + vt)$  satisfaz a equação de onda Equação 30-16.

## Problemas Gerais

- 54 • (a) Mostre que se  $E$  está em volts por metro e  $B$  em teslas, a unidade do vetor de Poynting  $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$  está em watts por metro quadrado. (b) Mostre que a intensidade  $I$  está em watts por

metro quadrado e a unidade da pressão de radiação  $P_r \approx I/c$  está em newtons por metro quadrado.

- 55 •• Uma antena em espira, que pode ser girada em torno de um eixo vertical, é usada para localizar um transmissor de rádio amador não-licenciado. Se a saída do receptor é proporcional à intensidade do sinal recebido, como a saída do receptor varia com a orientação da antena em espira?

- 56 •• Uma onda eletromagnética tem uma frequência de 100 MHz e está se deslocando no vácuo. O campo magnético é dado por  $B(z, t) = (10^{-8} \text{ T}) \cos(kz - \omega t) \hat{i}$ . (a) Encontre o comprimento de onda e a direção de propagação dessa onda. (b) Encontre o vetor elétrico  $\vec{E}(z, t)$ . (c) Determine o vetor de Poynting e encontre a intensidade dessa onda.

- 57 •• Uma espira de fio circular pode ser usada para detectar ondas eletromagnéticas. Suponha que uma estação de rádio FM de 100 MHz radia 50 kW uniformemente em todas as direções. Qual é a tensão rms máxima induzida na espira com raio de 30 cm a uma distância de  $10^3$  m da estação?

- 58 •• O campo elétrico de uma estação de rádio a alguma distância do transmissor é dado por  $E = (10^{-4} \text{ N/C}) \cos 10^4 t$ , onde  $t$  está em segundos. (a) Qual tensão é captada em um fio de 10 cm orientado ao longo da direção do campo elétrico? (b) Qual tensão pode ser induzida em uma espira com raio de 20 cm?

- 59 •• Um capacitor circular de raio  $a$  tem um fio fino de resistência  $R$  conectado aos centros das duas placas. A tensão  $V_0 \sin \omega t$  é aplicada entre as placas. (a) Qual é a corrente liberada por esse capacitor? (b) Qual é o campo magnético como função da distância radial  $r$  a partir da linha de centro dentro das placas desse capacitor? (c) Qual é o ângulo de fase entre a corrente e a tensão aplicada?

- 60 •• Um feixe de radiação com 20 kW incide normalmente sobre uma superfície que reflete metade da radiação. Qual é a força sobre essa superfície?

- 61 •• Os campos elétricos de duas ondas harmônicas de frequência angular  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são dadas por  $\vec{E}_1 = E_{1,0} \cos(k_1 x - \omega_1 t) \hat{j}$  e por  $\vec{E}_2 = E_{2,0} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta) \hat{j}$ . Encontre (a) o vetor de Poynting instantâneo para o movimento de onda resultante, e (b) o vetor de Poynting médio no tempo. Se o sentido de propagação da segunda onda for revertido de modo que  $\vec{E}_2 = E_{2,0} \cos(k_2 x + \omega_2 t + \delta) \hat{j}$ , encontre (c) o vetor de Poynting instantâneo para o movimento de onda resultante e (d) o vetor de Poynting médio no tempo.

- 62 •• Na superfície da Terra existe um fluxo solar médio aproximado de  $0,75 \text{ kW/m}^2$ . Uma família deseja construir um sistema de conversão de energia solar para alimentar sua casa. Se o sistema de conversão tem eficiência de 30% e a família precisa de um máximo de 25 kW, que área efetiva de coletores perfeitamente absorventes é necessária?

- 63 •• Suponha que alguém disponha de um excelente rádio, capaz de detectar um sinal tão fraco quanto  $10^{-14} \text{ W/m}^2$ . Esse rádio tem uma antena em espira de 2000 voltas, com raio de 1 cm, enrolada em um núcleo de ferro que aumenta o campo magnético por um fator de 200. A frequência do rádio é de 140 kHz. (a) Qual é a amplitude do campo magnético dessa onda? (b) Qual é a fem induzida na antena? (c) Qual seria a fem induzida em um fio de 2 m orientado na direção do campo elétrico?

- 64 •• Mostre que

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

(Equação 30-19) é obtida a partir de

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

(Equação 30-6d com  $I = 0$ ) pela integração ao longo de uma curva  $C$  adequada e sobre uma superfície  $S$  apropriada de forma similar à determinação da Equação 30-18.

65 ••• Um grande condutor cilíndrico com comprimento  $L$ , raio  $a$  e resistividade  $\rho$  transporta uma corrente  $I$  em regime permanente que está uniformemente distribuída ao longo de sua área de seção reta. (a) Use a lei de Ohm para relacionar o campo elétrico  $E$  no condutor com  $I$ ,  $\rho$  e  $a$ . (b) Encontre o campo magnético  $B$  na parte externa do condutor nas proximidades de sua superfície. (c) Use os resultados da Parte (a) e da Parte (b) para determinar o vetor de Poynting  $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$  em  $r = a$  (o limite do condutor). Em qual direção está  $\vec{S}$ ? (d) Encontre o fluxo ( $\oint S_n dA$ ) através da superfície do condutor dentro do condutor, e mostre que a taxa do fluxo de energia dentro do condutor é igual a  $I^2 R$ , em que  $R$  é a resistência do cilindro. (Aqui,  $S_n$  é a componente para dentro de  $\vec{S}$ , perpendicular à superfície do condutor.)

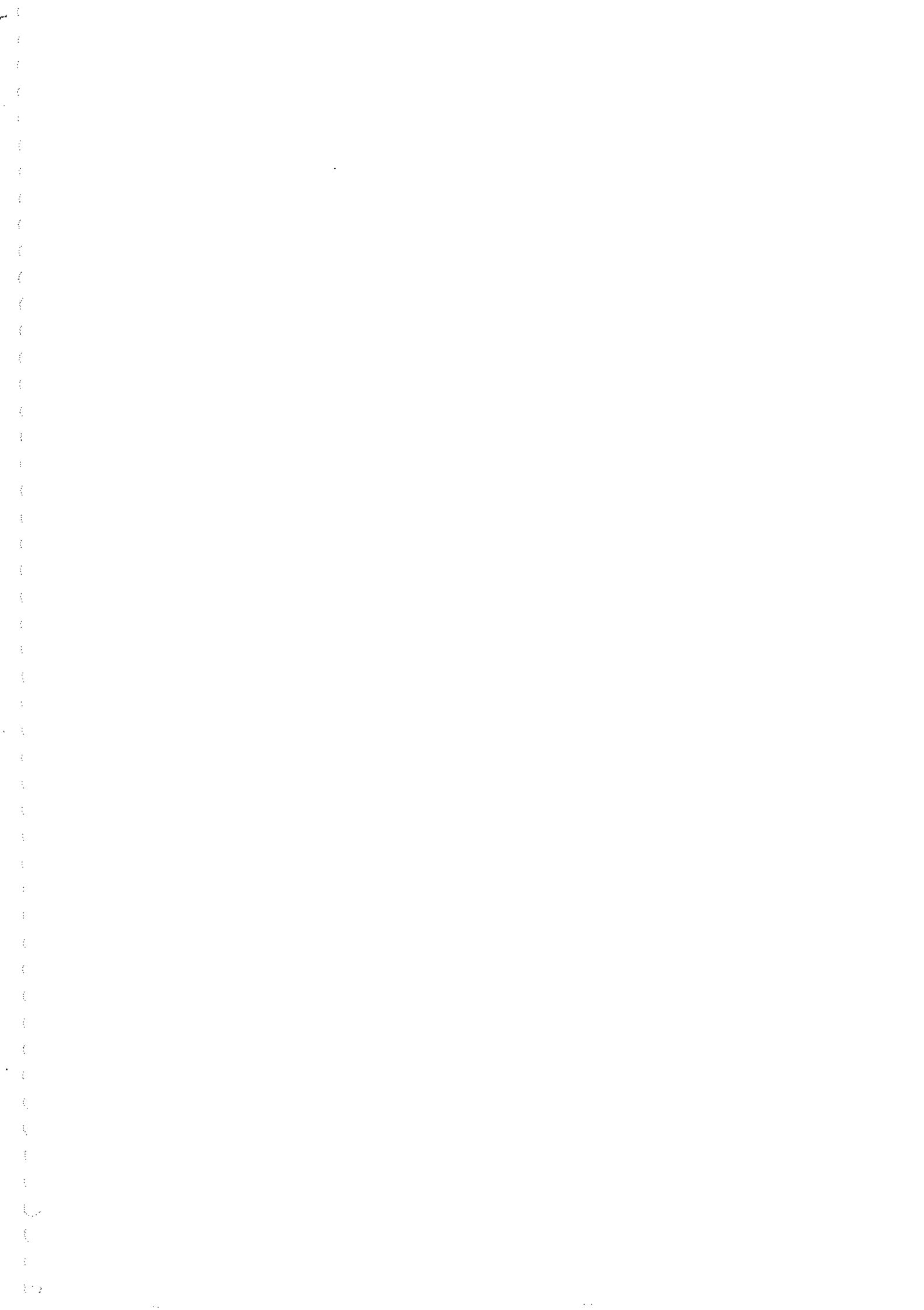
66 ••• Um grande solenóide de  $n$  voltas por unidade de comprimento tem uma corrente que aumenta lentamente com o tempo. O solenóide tem raio  $R$  e a corrente no enrolamento tem a forma  $I(t) = at$ . (a) Encontre o campo elétrico induzido a uma distância  $r < R$  do eixo do solenóide. (b) Encontre o módulo e a direção do vetor

de Poynting  $\vec{S}$  na superfície do cilindro  $r = R$ , bem dentro do enrolamento da solenóide. (c) Calcule o fluxo ( $\oint S_n dA$ ) dentro do solenóide, e mostre que o fluxo é igual à taxa de aumento do módulo da energia magnética dentro do solenóide. (Aqui,  $S_n$  é a componente para dentro de  $\vec{S}$  perpendicular à superfície do solenóide.)

67 ••• Pequenas partículas podem deixar o sistema solar devido à pressão de radiação da luz solar. Admita que as partículas são esféricas, com raio  $r$  e massa específica de  $1 \text{ g/cm}^3$ , e que absorvem toda a radiação em uma área de seção reta  $\pi r^2$ . As partículas estão distantes  $R$  do Sol, que apresenta uma potência de saída de  $3,83 \times 10^{26} \text{ W}$ . Qual é o raio  $r$  para que a força de radiação de repulsão atue em equilíbrio a força gravitacional de atração do Sol?

68 ••• Quando uma onda eletromagnética é refletida em incidência normal sobre uma superfície perfeitamente condutora, o vetor campo elétrico da onda refletida na superfície refletora é negativo em relação àquele da onda incidente. (a) Explique como isso pode ocorrer. (b) Mostre que a superposição das ondas incidente e refletida resulta em uma onda estacionária. (c) Qual é a relação entre o vetor campo magnético da onda incidente e da onda refletida na superfície refletora?

69 ••• Uma intensa fonte de luz pontual radia  $1 \text{ MW}$  isotropicamente. A fonte está localizada  $1 \text{ m}$  acima de um plano infinito perfeitamente refletor. Determine a força que atua sobre o plano.



# RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES

DAQUI ATÉ O FINAL

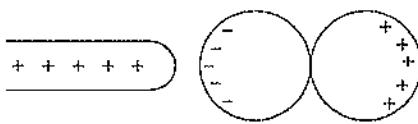
## Capítulo 21

1. **Semelhanças:** as forças entre as cargas e entre as massas variam com  $1/r^2$ .

**Diferenças:** existem cargas positivas e negativas, porém apenas massas positivas. Cargas opostas se repelem, enquanto as massas se atraem. A constante gravitacional  $G$  é muitas ordens de grandeza menor do que a constante de Coulomb  $k$ .

3. (c)

5. (a)



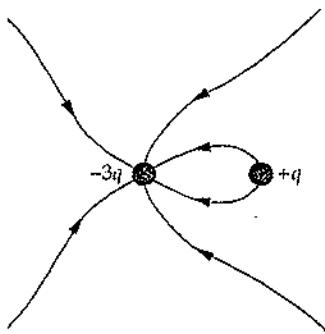
(b)



7. (d)

9. (d)

11.



13. (a)

15. Uma vez que  $\theta \neq 0$ , um dipolo na presença de um campo elétrico estará sujeito a um torque restaurador cujo módulo é  $pE \sin \theta$ . Logo, ele oscilará em torno de sua orientação de equilíbrio,  $\theta = 0$ . Se o campo não for uniforme e se  $dE/dx > 0$ , o dipolo se acelerará no sentido positivo de  $x$  ao oscilar em torno de  $\theta = 0$ .

17. (a) A força entre as esferas diminui, uma vez que o campo produzido pelas duas cargas gera um campo dipolar que se opõe àquele das duas cargas quando elas estão fora da água.  
 (b) A força é aumentada, uma vez que um dipolo é induzido na terceira esfera metálica. O dipolo atrai cada uma das esferas carregadas.

19. Admita que a vareta possui uma carga negativa. Quando a vareta carregada é aproximada da esfera de estanho, o lado mais próximo da vareta fica carregado positivamente por indução e, assim, ela se move em direção à vareta. Quando ela toca a vareta, uma parte da carga negativa é transferida para a esfera que, assim, passa a ter uma carga resultante negativa e é, agora, repelida pela vareta.

21. (a)  $3,46 \times 10^{10} \text{ N}$

(b)  $32,0 \mu\text{C}$

23.  $141 \text{ nC}$

25.  $5,00 \times 10^{12} \text{ C}$

27.  $4,82 \times 10^7 \text{ C}$

29.  $(1,50 \times 10^{-2} \text{ N})\hat{i}$

31.  $(-8,66 \text{ N})\hat{j}$

33.  $\vec{F}_1 = (0,899 \text{ N})\hat{i} + (1,80 \text{ N})\hat{j}$

$\vec{F}_2 = (-1,28 \text{ N})\hat{i} - (1,16 \text{ N})\hat{j}$

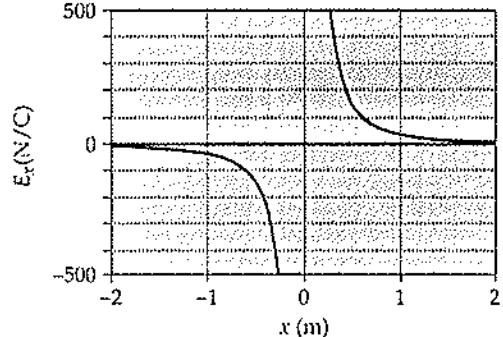
$\vec{F}_3 = (0,381 \text{ N})\hat{i} - (0,640 \text{ N})\hat{j}$

$$35. \vec{F}_q = \frac{kqQ}{R^2} \left(1 + \sqrt{2}\right)\hat{i}$$

37. (a)  $\vec{E}(6 \text{ m}) = (999 \text{ N/C})\hat{i}$

(b)  $\vec{E}(-10 \text{ m}) = (-360 \text{ N/C})\hat{i}$

(c)



39. (a)  $(400 \text{ kN/C})\hat{j}$

(b)  $(-1,60 \text{ mN})\hat{j}$

(c)  $-40,0 \text{ nC}$

41. (a)  $\vec{E}_x = (34,5 \text{ kN/C})\hat{i}$

(b)  $\vec{F} = (69,0 \mu\text{N})\hat{i}$

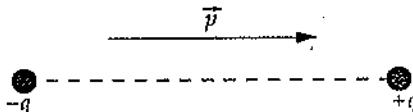
43. (a)  $12,9 \text{ kN/C}, 231^\circ$

(b)  $2,08 \times 10^{-15} \text{ N}, 51,3^\circ$

45. (a)  $1,90 \text{ kN/C}, 235^\circ$

(b)  $3,04 \times 10^{-16} \text{ N}, 235^\circ$

47. (a) Uma vez que  $\vec{E}$  está na direção  $+x$ , uma carga de prova positiva deslocada do ponto  $(0, 0)$  na direção  $+x$  estará sujeita a uma força na direção  $x$  e se acelerará na direção  $x$ . Consequentemente,

- te, o equilíbrio em  $(0, 0)$  é instável para um pequeno deslocamento ao longo do eixo  $x$ . Se a carga de prova positiva for deslocada na direção  $+y$ , a carga em  $+a$  exercerá uma força maior do que a carga em  $-a$  e a força resultante estará, assim, orientada no sentido negativo do eixo  $y$ ; isto é, ela é uma força restauradora. Consequentemente, o equilíbrio em  $(0, 0)$  será estável para pequenos deslocamentos ao longo do eixo  $y$ .
- (b) Seguindo os mesmos argumentos estabelecidos no item (a), pode-se concluir que para uma carga de prova negativa o equilíbrio é estável no ponto  $(0, 0)$  para deslocamentos ao longo do eixo  $x$ , e o equilíbrio será instável para deslocamentos ao longo do eixo  $y$ .
- (c) Uma vez que duas cargas  $+q$  se repelem, a carga  $q_0$  em  $(0, 0)$  deve ser uma carga negativa. Como a força entre as cargas varia com  $1/r^2$  e a carga negativa está posicionada exatamente à meia distância entre as duas cargas positivas,  $q_0 = -q/4$ .
- (d) Se a carga  $q_0$  for deslocada, a condição de equilíbrio fica alterada, conforme discutido no item (b). Se qualquer das cargas  $+q$  for deslocada, o sistema fica instável.
49. (a)  $1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$   
 (b)  $1,76 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$ ; A orientação da aceleração é oposta à do campo elétrico.  
 (c)  $0,170 \mu\text{s}$   
 (d)  $25,5 \text{ cm}$
51. (a)  $(-7,03 \times 10^{13} \text{ m/s}^2)\hat{j}$   
 (b)  $50,0 \text{ ns}$   
 (c)  $(-8,79 \text{ cm})\hat{j}$
53.  $800 \mu\text{C}$
55.  $4,07 \text{ cm}$
57. (a)  $8,00 \times 10^{-18} \text{ C}\cdot\text{m}$   
 (b)
- 
61. (a)  $\vec{F}_{\text{res}} = Cp\hat{i}$   
 (b)  $\vec{F}_{\text{res}} = p_x \frac{dE_x}{dx} \hat{i}$
63. (a)  $1,86 \times 10^{-9} \text{ kg}$   
 (b)  $1,24 \times 10^{36}$
65.  $\vec{E}_{r_2} = (1,73 \times 10^6 \text{ N/C})\hat{i}$ . Enquanto a separação entre as duas cargas do dipolo for maior do que 10% da distância até o ponto de interesse, isto é,  $x$  não é muito maior do que  $a$ , esse resultado estará em excelente concordância com o resultado do Problema 64.
67. (a)  $q_1 = 3,99 \mu\text{C}, q_2 = 2,01 \mu\text{C}$ ; ou  $q_1 = 2,01 \mu\text{C}, q_2 = 3,99 \mu\text{C}$   
 (b)  $q_1 = 7,12 \mu\text{C}, q_2 = -1,12 \mu\text{C}$
71. (a)  $q_1 = 17,5 \mu\text{C}, q_2 = 183 \mu\text{C}$ ; ou  $q_1 = 183 \mu\text{C}, q_2 = 17,5 \mu\text{C}$   
 (b)  $q_1 = -15,0 \mu\text{C}, q_2 = 215 \mu\text{C}$
73. (a)  $0,225 \text{ N}$   
 (b)  $0,113 \text{ N}\cdot\text{m}$ ; sentido anti-horário  
 (c)  $0,0461 \text{ kg}$   
 (d)  $5,03 \times 10^{-7} \text{ C}$
75. (a)  $q_1 = 28,0 \mu\text{C}, q_2 = 172 \mu\text{C}$ ; ou  $q_1 = 172 \mu\text{C}, q_2 = 28,0 \mu\text{C}$   
 (b)  $250 \text{ N}$
77. (a)  $-97,2 \mu\text{C}$   
 (b)  $x_1 = 0,0508 \text{ m}; x_2 = 0,169 \text{ m}$
79. (a)  $10,3^\circ$

- (b)  $9,86^\circ$
81.  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2qE}{ma}\theta; T = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{2qE}}$
83.  $v = \sqrt{\frac{k\epsilon^2}{2mr}}$
87. (a)  $8,48^\circ$   
 (b)  $\theta_1 = 9,42^\circ; \theta_2 = 6,98^\circ$
89.  $\vec{E} = (-1,10 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{j}$
91. (a)  $\vec{E}_P = \frac{2kQy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\hat{j}$   
 (b)  $\vec{F}_y = \frac{2kqQy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\hat{j}$   
 (c) A equação diferencial do movimento é  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{16kqQ}{mL^3}y = 0$   
 (d)  $9,37 \text{ Hz}$
93. (b)  $5,15 \times 10^{-5} \text{ m/s}$

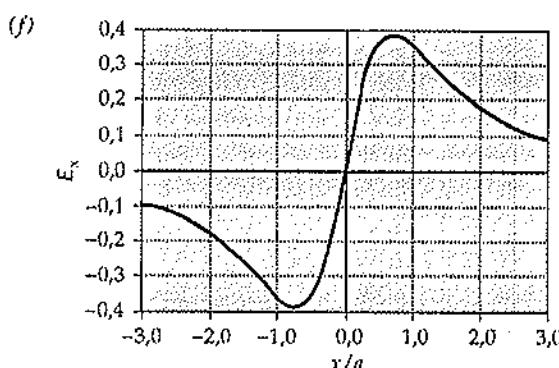
## Capítulo 22

1. (a) Falso. A lei de Gauss estabelece que o fluxo resultante através de qualquer superfície é expresso por  $\phi_{\text{es}} = \oint_S E_n dA = 4\pi kQ_{\text{int}}$ . Embora seja verdadeiro que a lei de Gauss é mais fácil de ser aplicada a distribuições simétricas de carga, ela é válida para qualquer superfície.  
 (b) Verdadeiro
3. O campo elétrico é devido a todas as cargas, internas e externas à superfície. A lei de Gauss estabelece que o fluxo resultante através de qualquer superfície é expresso por  $\phi_{\text{es}} = \oint_S E_n dA = 4\pi kQ_{\text{int}}$ . As linhas de fluxo através de uma superfície gaussiana começam nas cargas de um dos lados da superfície e terminam nas cargas do outro lado da superfície.
5. (a) Falso. Considere uma casca esférica, na qual não há carga, nas vizinhanças de uma folha infinita carregada. O campo elétrico devido à folha infinita seria não-nulo em qualquer ponto sobre a superfície esférica.  
 (b) Verdadeiro (admitindo que não haja qualquer carga no interior da casca).  
 (c) Verdadeiro
- (d) Falso. Considere uma casca esférica condutora. Essa superfície possuirá cargas iguais em suas superfícies interior e exterior, porém, sendo suas áreas distintas, suas densidades de carga serão também distintas.
7. (a)  
 9. (b)  
 11. (c)
13. Falso. Uma grandeza física é descontínua se seu valor em um dos lados de um contorno for diferente do valor no outro lado. Pode-se mostrar que essa afirmativa é falsa citando um contra-exemplo. Considere o campo de uma esfera uniformemente carregada. A densidade  $\rho$  é descontínua na superfície e o campo  $E$  não.
15.  $3 \times 10^6 \text{ V/m}; 5,31 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$
17. (a)  $17,5 \text{ nC}$   
 (b)  $26,2 \text{ N/C}$   
 (c)  $4,37 \text{ N/C}$   
 (d)  $2,57 \text{ mN/C}$   
 (e)  $2,52 \text{ mN/C}$

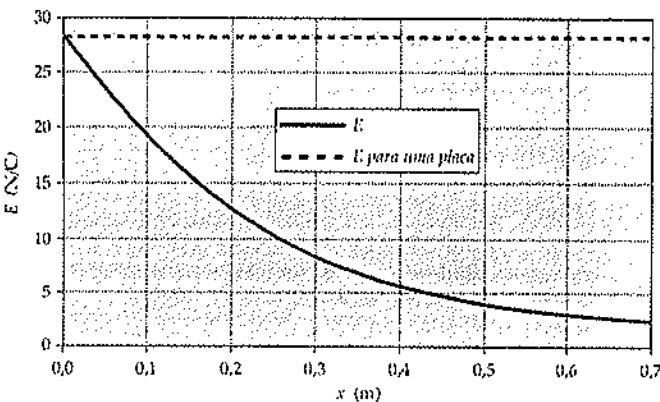
19. (a)  $4,69 \times 10^5 \text{ N/C}$   
 (b)  $1,13 \times 10^6 \text{ N/C}$   
 (c)  $1,54 \times 10^3 \text{ N/C}$   
 (d)  $1,55 \times 10^3 \text{ N/C}$ ; Esse resultado está de acordo com o item (c) a menos de 0,1%.

21. (a) 0,380 nC  
 (b) 1,43 kN/C  
 (c) 183 N/C  
 (d) 0,133147 N/C  
 (e) 0,133149 N/C

23. (a)  $E_x(0,2a) = 0,189 \frac{kQ}{a^2}$   
 (b)  $E_y(0,5a) = 0,358 \frac{kQ}{a^2}$   
 (c)  $E_x(0,7a) = 0,385 \frac{kQ}{a^2}$   
 (d)  $E_x(a) = 0,354 \frac{kQ}{a^2}$   
 (e)  $E_x(2a) = 0,179 \frac{kQ}{a^2}$



25.



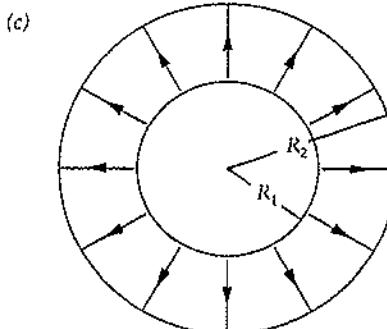
Os módulos dos campos elétricos diferem em mais de 10% para  $x = 0,03 \text{ m}$ .

31. (a)  $20,0 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 (b)  $17,3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 33. (a)  $\phi_{direita} = 1,51 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ ;  $\phi_{esquerda} = 1,51 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 (b)  $\phi_{superfície} = 0$   
 (c)  $\phi_{ext} = 3,02 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 (d)  $Q_{int} = 2,67 \times 10^{-11} \text{ C}$   
 35. (a)  $3,34 \text{ m}^2$   
 (b)  $7,19 \times 10^1 \text{ N/C}$

- (c)  $2,26 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
 (d) Não. O fluxo através da superfície é independente de onde a carga está localizada internamente à esfera.  
 (e)  $2,26 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

37.  $3,77 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

39. (a)  $E_{r < R_1} = 0$ ;  $E_{R_1 < r < R_2} = \frac{kq_1}{r^2}$ ;  $E_{r > R_2} = \frac{k(q_1 + q_2)}{r^2}$   
 (b) -1



41. (a) 0,407 nC

- (b) 339 N/C

- (c) 999 N/C

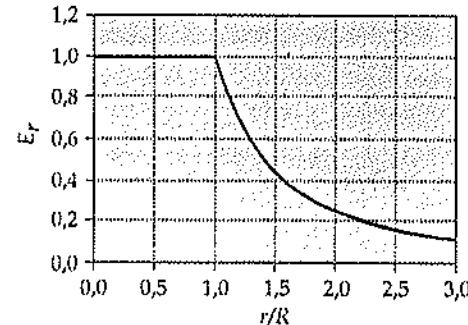
- (d) 983 N/C

- (e) 366 N/C

43. 3,77 N/C

45. (a)  $2\pi BR^2$

$$(b) E_r(r > R) = \frac{BR^2}{2\epsilon_0 r^2}; E_r(r < R) = \frac{B}{2\epsilon_0}$$



$$(a) \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)$$

$$47. (b) E_r(r < a) = 0; E_r(a < r < b) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - a^3); \\ E_r(r > b) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(b^3 - a^3)$$

49. (a) 679 nC

- (b)  $E(2 \text{ cm}) = 0$

- (c)  $E(5,9 \text{ cm}) = 0$

- (d)  $E(6,1 \text{ cm}) = 1,00 \text{ kN/C}$

- (e)  $E(10 \text{ cm}) = 610 \text{ N/C}$

51. (a) 679 nC

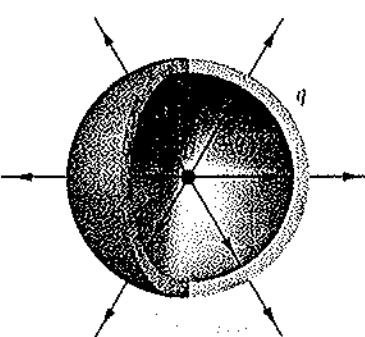
- (b)  $E_r(2 \text{ cm}) = 339 \text{ N/C}$

- (c)  $E_r(5,9 \text{ cm}) = 1,00 \text{ kN/C}$

- (d)  $E_r(6,1 \text{ cm}) = 1,00 \text{ kN/C}$

- (e)  $E_r(10 \text{ cm}) = 610 \text{ N/C}$

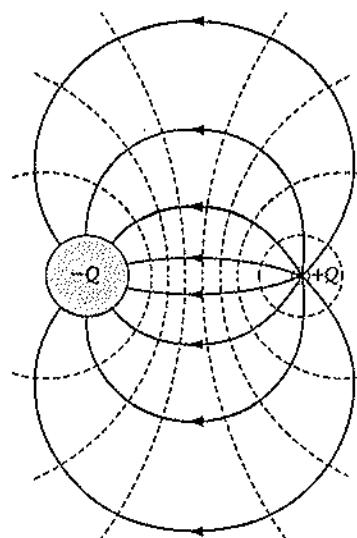
53. (a)  $E_n(r < 1,5 \text{ cm}) = 0$ ;  $E_n(1,5 \text{ cm} < r < 4,5 \text{ cm}) = \frac{(108 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{C})}{r}$ ,  
 $E_n(4,5 \text{ cm} < r < 6,5 \text{ cm}) = 0$

- (b)  $\sigma_1 = -21,2 \text{ nC/m}^2; \sigma_2 = 14,7 \text{ nC/m}^2$
55. (b)  $E_n(r < R) = \frac{b}{4\epsilon_0} r^3; E_n(r > R) = \frac{bR^4}{4r\epsilon_0}$
57. (a)  $\lambda_{int} = 18,8 \text{ nC/m}$   
 (b)  $E_n(r < 1,5 \text{ cm}) = 22,6 \text{ kN/C};$   
 $E_n(1,5 \text{ cm} < r < 4,5 \text{ cm}) = \frac{339 \text{ N}\cdot\text{m/C}}{r};$   
 $E_n(4,5 \text{ cm} < r < 6,5 \text{ cm}) = 0;$   
 $E_n(r > 6,5 \text{ cm}) = \frac{339 \text{ N}\cdot\text{m/C}}{r}$
59.  $9,42 \text{ kN/C}$
61. (a)  $E_n(r < a) = \frac{kq}{r^2}; E_n(a < r < b) = 0; E_n(r > b) = \frac{kq}{r^2}$   
 (b)
- 
- (c)  $\sigma_{int} = -\frac{q}{4\pi a^2}; \sigma_{ext} = \frac{q}{4\pi b^2}$
63. (a)  $\sigma_{int} = -0,553 \mu\text{C/m}^2; \sigma_{ext} = 0,246 \mu\text{C/m}^2$   
 (b)  $E_n(r < a) = (2,25 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C})\left(\frac{1}{r^2}\right);$   
 $E_n(0,6 \text{ m} < r < 0,9 \text{ m}) = 0;$   
 $E_n(r > 0,9 \text{ m}) = (2,25 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C})\left(\frac{1}{r^2}\right)$   
 (c)  $\sigma_{int} = -0,553 \mu\text{C/m}^2; \sigma_{ext} = 0,589 \mu\text{C/m}^2;$   
 $E_n(r < a) = (2,25 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C})\left(\frac{1}{r^2}\right);$   
 $E_n(0,6 \text{ m} < r < 0,9 \text{ m}) = 0;$   
 $E_n(r > 0,9 \text{ m}) = (5,39 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C})\left(\frac{1}{r^2}\right)$
65. (a)  $\sigma_{face} = 1,60 \mu\text{C/m}^2; E_{placa} = 1,81 \times 10^5 \text{ N/C}$   
 (b)  $\vec{E}_{próximo} = (-0,680 \times 10^5 \text{ N/C})\hat{i}; \vec{E}_{afastado} = (2,94 \times 10^5 \text{ N/C})\hat{i};$   
 $\sigma_{próximo} = 0,602 \mu\text{C/m}^2; \sigma_{afastado} = 2,60 \mu\text{C/m}^2$
67.  $1,15 \times 10^5 \text{ N/C}$
69. (a)  $\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$   
 (b)  $\frac{Q^2 r^2}{32\pi\epsilon_0 r^4}$   
 (c)  $\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$
71.  $1,11 \times 10^6 \text{ N/C}$
73. (a)  $\vec{E}(0, 0) = (339 \text{ kN/C})\hat{i}$   
 (b)  $\vec{E}(0,2 \text{ m}, 0,1 \text{ m}) = (1310 \text{ kN/C})\hat{i} + (-268 \text{ kN/C})\hat{j}$   
 $= 1340 \text{ kN/C, no quarto quadrante do plano } xy \text{ em } \theta = -11,6^\circ$   
 (c)  $\vec{E}(0,5 \text{ m}, 0,2 \text{ m}) = (203 \text{ kN/C})\hat{i}$
75. (a)  $\frac{e}{\pi a_0^3}$
- (b)  $E(r) = \frac{ke}{r^2} e^{-2r/a} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right)$
77. (a)  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}; E_1 > E_2$   
 (b) Como  $E_1 > E_2$ , o campo resultante é orientado para  $s_2$ .  
 (c)  $E_1 = E_2$   
 (d)  $\vec{E} = 0$ ; Como  $E \propto 1/r$ , então  $s_2$  produziria o campo mais forte em P e  $\vec{E}$  seria orientado para  $s_1$ .
79. (a) Se a carga Q for positiva, o campo na origem é orientado radialmente para fora do aro.
- (b)  $E_{centro} = \frac{kQ\ell}{2\pi R^3}$
81. (a)  $E(0,4 \text{ m}, 0) = 203 \text{ kN/C}; \theta = 56,2^\circ$   
 (b)  $E(2,5 \text{ m}, 0) = 263 \text{ kN/C}; \theta = 153^\circ$
83.  $T = 2\pi R \sqrt{\frac{m}{2k\lambda q}}$
85.  $7,42 \text{ rad/s}$
87. (b)  $\vec{E}_1 = \frac{\rho b}{3\epsilon_0} \hat{r}; \vec{E}_2 = \frac{\rho b}{3\epsilon_0} \hat{r}$
89. (b)  $\vec{E}_1 = \frac{(2\rho + \rho')b}{3\epsilon_0} \hat{r}; \vec{E}_2 = \frac{\rho'}{3\epsilon_0} b\hat{r}$
91.  $200 \text{ N/C}$
95.  $0,5R$
97.  $4,49 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$

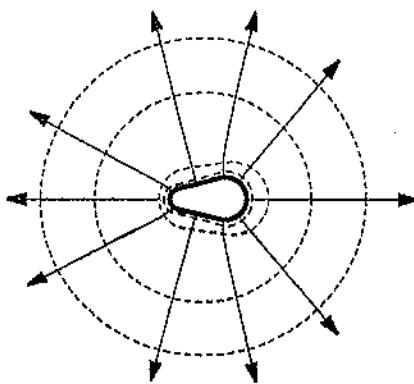
## Capítulo 23

- Uma carga positiva sempre se moverá no sentido da redução de sua energia potencial. A carga positiva reduzirá sua energia potencial quando se mover para uma região de menor potencial elétrico.
- Se  $V$  for constante, sua derivada será nula e, consequentemente,  $\vec{E} = 0$ .
- Como as linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies eqüipotenciais, você deve se mover perpendicularmente ao campo.

7.



9.



11. (b)

13. (c)

15. (a) Não. O potencial na superfície de um condutor também depende do raio local da superfície. Assim,  $r$  e  $\sigma$  podem variar de modo que  $V$  seja constante.

(b) Sim; Sim

17.  $3,00 \times 10^9$  V19. (a)  $K = 0,719$  MeV

(b) 0,0767%

21. (a) -8,00 kV

(b) -24,0 mJ

(c) 24,0 mJ

(d) -(2 kV/m)x

(e) 4 kV - (2 kV/m)x

(f) 2 kV - (2 kV/m)x

23. (a) 4,50 kV

(b) 13,5 mJ

(c) 13,5 mJ

25. (a)  $3,10 \times 10^7$  m/s

(b) 2,50 MV/m

27. (a)  $r = \frac{2kZe^2}{E}$ 

(b) 45,4 fm; 25,3 fm

29. (a) 12,9 kV

(b) 7,55 kV

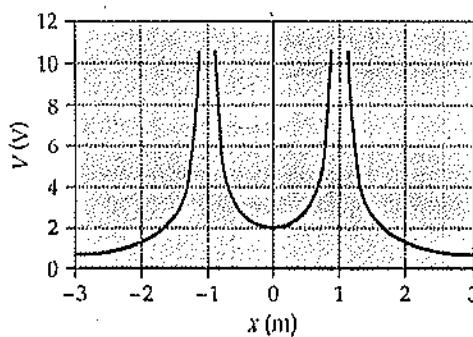
(c) 4,44 kV

31. (a) 270 kV

(b) 191 kV

33. (a)  $V = kq\left(\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x+a|}\right)$ 

(b)



(c) 0; 0

35. (a) A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é positiva.

(b) 25,0 kV/m

37. (a) 8,99 kV; 8,96 kV

(b) 3,00 kV/m

(c) 3,00 kV/m

(d) 8,99 kV

39. (a) A diferença de potencial  $V_b - V_a$  é negativa.

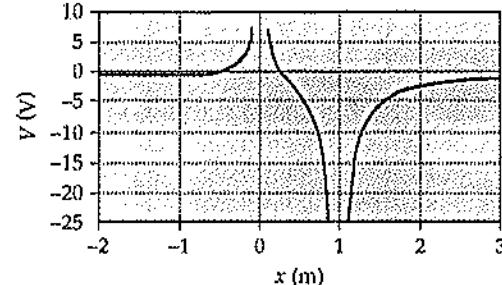
(b) 5,00 kV/m

$$41. (a) V(x) = k\left(\frac{q}{|x|} + \frac{3q}{|x-1|}\right)$$

(b) -0,500 m; 0,250 m

(c)  $E_x(0,25 \text{ m}) = (21,3 \text{ m}^{-2})kq$ ;  $E_x(-0,5 \text{ m}) = (-2,67 \text{ m}^{-2})kq$ 

(d)



$$43. (a) V(x) = kq\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{|x-a|}\right)$$

$$(b) E_x(x > a) \approx \frac{2kqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{kq}{(x-a)^2}$$

45. (a) 6,02 kV

(b) -12,7 kV

(c) -42,3 kV

$$47. (a) V(x, 0) = \frac{kQ}{L} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{x^2 + L^2/4} - L/2}\right)$$

$$49. (a) Q = \frac{1}{2}\pi\sigma_0 R^2$$

$$(b) V = \frac{2\pi k\sigma_0}{R^2} \left( \frac{R^2 - 2x^2}{3} \sqrt{x^2 + R^2} + \frac{2x^3}{3} \right)$$

$$51. (a) V(x) = 2\pi k\sigma_0 \left( 2\sqrt{x^2 + \frac{R^2}{2}} - \sqrt{x^2 + R^2} - x \right)$$

$$(b) V(x) = \frac{\pi k\sigma_0 R^4}{8x^3}$$

$$53. (a) V(x) = \frac{kQ}{L} \ln\left(\frac{x + \frac{L}{2}}{x - \frac{L}{2}}\right)$$

$$(b) V(x) = \frac{kQ}{x}$$

$$55. V_b - V_a = -\frac{2kq}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$57. (a) V_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0}x; V_{II} = 0; V_{III} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(a-x)$$

$$(b) V_I = 0; V_{II} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x; V_{III} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}a$$

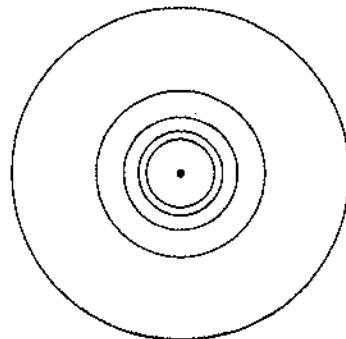
$$59. (a) V_I = \frac{kQ}{R^3}r^2$$

$$(b) dV_2 = \frac{3kQ}{R^3}r' dr'$$

(c)  $V_2 = \frac{3kQ}{2R^3} (R^2 - r^2)$

(d)  $V = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$

61.  $r_{20V} = 0,499 \text{ m}$ ;  $r_{40V} = 0,250 \text{ m}$ ;  $r_{60V} = 0,166 \text{ m}$ ;  $r_{80V} = 0,125 \text{ m}$ ;  $r_{100V} = 0,0999 \text{ m}$

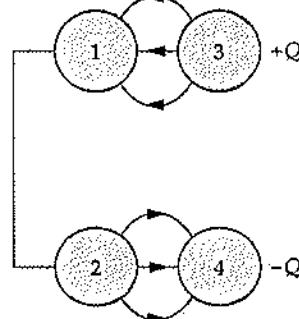


As superfícies eqüipotenciais não são igualmente espaçadas.

63.  $26,6 \mu\text{C/m}^2$

65.  $V_a - V_b = V_a = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

67. (a)



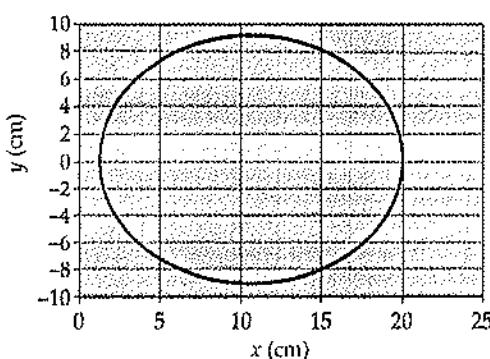
- (b)  $V_1 = V_2$  porque as esferas estão conectadas. Pela orientação das linhas de campo elétrico, pode-se concluir que  $V_3 > V_1$ .  
(c) Se as esferas 3 e 4 estiverem conectadas,  $V_3 = V_4$ . As condições do item (b) só podem ser satisfeitas se todos os potenciais forem nulos. Consequentemente, a carga em cada esfera é nula.

69. (a)  $V(x) = \frac{2kq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

(b)  $\vec{E}(x) = \frac{2kqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}$

71. (a)  $V(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right]; V(0, y) = 0$

- (b)



73.  $\rho_0 = \frac{c}{\pi a^3}$

75.  $-20 \mu\text{C}$

77. (a)  $W_{+Q \rightarrow +a} = \frac{kQ^2}{2a}$

(b)  $W_{-Q \rightarrow 0} = \frac{-2kQ^2}{a}$

(c)  $W_{-Q \rightarrow 2a} = \frac{2kQ^2}{3a}$

79.  $1,38 \times 10^5 \text{ m/s}$

81.  $R_2 = \frac{2}{3} R_1$

83.  $7,12 \text{ nC}$

85. (a)  $\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$

(b)  $\Delta V' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - a)$

87. (b)  $\sigma = \frac{qd}{4\pi(d^2 + r^2)^{3/2}}$

89. (a)  $V(c) = 0; V(b) = kQ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right); V(a) = kQ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$

(b)  $Q_b = Q; V(a) = V(c) = 0; Q_a = -Q \frac{a(c-b)}{b(c-a)}$

$Q_c = -Q \frac{c(b-a)}{b(c-a)}$ ;  $V(b) = kQ \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$

91.  $W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$

93. (a)  $R' = 0,794R$

(b)  $\Delta E = 0,370E$

95. (a)  $V_{\text{med}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

- (b) O princípio da superposição permite afirmar que o potencial em qualquer ponto é igual à soma dos potenciais devidos a qualquer distribuição de carga no espaço. Como esse resultado é independente de quaisquer propriedades da esfera, ele é válido para qualquer esfera e para qualquer configuração de cargas externas à esfera.

## Capítulo 24

1. (c)

3. Verdadeiro

5. (d)

7. Ambas as afirmativas estão corretas.

9. Verdadeiro

11. (a) Falso

- (b) Falso

- (c) Falso

13.  $0,104 \text{ nF/m} \leq C/L \leq 0,173 \text{ nF/m}$

15.  $9,03 \times 10^{10} \text{ J}$

17. (a)  $30 \text{ mJ}$

- (b)  $-5,99 \text{ mJ}$

- (c)  $\sim 18,0 \text{ mJ}$

19.  $22,2 \mu\text{J}$

21.  $v = q\sqrt{\frac{6\sqrt{2}k}{ma}}$

23. 75,0 nF

25. (a) 15,0 mJ  
(b) 45,0 mJ

27. (a) 0,625 J  
(b) 1,88 J

29. (a) 100 kV/m

(b) 44,3 mJ/m<sup>3</sup>

(c) 88,6 μJ

(d) 17,7 nF

(e) 88,5 μJ; está coerente com o resultado do item (c)

31. (a) 11,1 nC

(b) 0,553 μJ

33. (a) 100

(b) 10 V

(c) carga: 1,00 μC; diferença de potencial: 10,0 kV

35.  $C_{eq} = C_2 + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}$

37. (a) 40,0 μC

(b)  $V_{10} = 4,00$  V;  $V_{20} = 2,00$  V

39. (a) 15,2 μF

(b) 2,40 mC; 0,632 mC

(c) 0,304 J

41. (a) 0,242 μF

(b) 2,42 μC;  $Q_1 = 1,93$  μC;  $Q_{0,25} = 0,483$  μC

(c) 12,1 μJ

43. Coloque quatro dos capacitores em série. Assim, o potencial entre os terminais de cada capacitor será de 100 V quando o potencial entre os terminais da combinação for de 400 V. A capacidade equivalente dos capacitores em série é igual a  $2/4$  μF = 0,5 μF. Colocando-se quatro dessas combinações em série em paralelo, conforme mostrado no esquema do circuito, a capacidade total entre os terminais será de 2 μF.

45. (a)  $C_{eq} = 0,618$  μF

(b) 1,618 μF

47. (a) 40,0 V

(b) 4,24 m

49. (a) 0,333 mm

(b) 3,76 m<sup>2</sup>

51. (a)  $E_{r < R_1} = 0$ ;  $u_{r < R_1} = 0$ ;  $E_{r > R_2} = 0$ ;  $u_{r > R_2} = 0$

(b)  $\frac{kQ^2}{L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

(c)  $\frac{kQ^2}{L} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$

53.  $C = \frac{\epsilon_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2d} (\theta - \Delta\theta)$

57.  $2R$

59. (a) 2,00 kV

(b) 0

61. (a) 2,40 μF

(b) 360 μJ

63. (a) 6,00 V

(b) 1,15 mJ

(c) 0,288 mJ

65. (a) 200 V

(b)  $q_1 = -254$  μC;  $q_2 = 146$  μC;  $q_3 = 546$  μC

(c)  $V_1 = -127$  V;  $V_2 = 36,5$  V;  $V_3 = 91,0$  V

67. 2,71 nF

69. (a)  $E_{r < R_1} = 0$ ;  $u_{r < R_1} = 0$ ;  $E_{r > R_2} = 0$ ;  $u_{r > R_2} = 0$

(b)  $dU = \frac{kQ^2}{2\kappa r^2} dr$

(c)  $U = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{R_2 - R_1}{4\pi\kappa\epsilon_0 R_1 R_2} \right)$

71.  $C_{eq} = \left( \frac{4\kappa_1\kappa_2}{3\kappa_1 + \kappa_2} \right) C_0$

73.  $C_{eq} = \left( \frac{\kappa d}{\kappa(d - t) + t} \right) C_0$

75. (a) 5,00

(b) 1,25

(c) 50,0

77.  $C = \left( \kappa_3 + \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) \left( \frac{\epsilon_0 A}{2d} \right)$

79. (a)  $C = \frac{3\epsilon_0 A}{y_0 \ln(4)}$

(b)  $\left. \frac{\sigma_b}{\sigma_t} \right|_{y=0} = 0$ ;  $\left. \frac{\sigma_b}{\sigma_t} \right|_{y=y_0} = 0,750$

(c)  $\rho(y) = \frac{3\sigma}{[y_0(1 + 3y/y_0)^2]}$

(d)  $\rho = -\frac{3}{4}\sigma$ , que é a carga por unidade de área no dielétrico que cancela a densidade de carga superficial induzida.

81. (a) 14,0 μF

(b) 1,14 μF

83. 1,00 mm

85.  $C_2 C_3 = C_1 C_4$

87. (a)  $C_{nova} = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$

(b)  $V_{nova} = 2V$

(c)  $U_{nova} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{d}$

(d)  $W = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2d}$

89. (a) 2,22 nF

(b) 66,6 μC

91.  $Q_1 = 267$  μC;  $Q_2 = 133$  μC

95. (a)  $U = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} x$

(b)  $dU = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} dx$

(c)  $F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$

(d)  $F = \frac{1}{2} QE$

97. (a)  $U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a[(\kappa - 1)x + a]}$

(b)  $-F = \frac{(\kappa - 1)Q^2 d}{2a\epsilon_0 [(\kappa - 1)x + a]^2}$

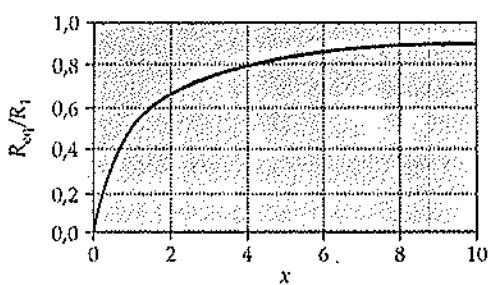
(c)  $F = \frac{(\kappa - 1)a\epsilon_0 V^2}{2d}$

- (d) Essa força tem origem no efeito do campo no entorno das bordas do capacitor. O efeito dessa força é puxar o dielétrico para dentro do espaço entre as placas do capacitor.
99.  $2,55 \mu\text{J}$
101. (a) Como  $F$  aumenta quando  $\ell$  diminui, uma diminuição na separação das placas desbalanceará o sistema e, portanto, o equilíbrio é instável.
- (b)  $V = \ell \sqrt{\frac{2Mg}{\epsilon_0 A}}$
103. (a)  $Q_1 = (200 \text{ V})C_1; Q_2 = (200 \text{ V})\kappa C_1$   
 (b)  $U = (2 \times 10^4 \text{ V}^2)(1 + \kappa)C_1$   
 (c)  $U_f = (10^4 \text{ V}^2)C_1(1 + \kappa)^2$   
 (d)  $V_f = 100(1 + \kappa)\text{V}$
105. (a)  $0,225 \text{ J}$   
 (b)  $3,50 \text{ mC}; 1,00 \text{ mC}$   
 (c)  $2,25 \text{ mC}$   
 (d)  $0,506 \text{ J}$
107.  $0,100 \mu\text{F}; 16,0 \mu\text{C}$
109. (a)  $1,00 \text{ mJ}$   
 (b)  $Q'_1 = 47,6 \mu\text{C}; Q'_2 = 152 \mu\text{C}$   
 (c)  $0,476 \text{ mJ}$
111. (a)  $C(V) = C_0 \left(1 + \frac{\kappa \epsilon_0 V^2}{2Yd^2}\right)$   
 (b)  $7,97 \text{ kV}$   
 (c)  $0,209\%; 99,8\%$

## Capítulo 25

- Quando a corrente flui, as cargas não estão em equilíbrio. Nesse caso, o campo elétrico é que fornece a força necessária para a carga fluir.
- (e)
- (c)
- (d)
- Você poderia diminuir a resistência. Como a tensão entre os terminais do resistor é constante, o calor que sai é expresso por  $P = V^2/R$ . Assim, diminuindo-se a resistência,  $P$  diminuirá.
- (a)
- (a)
- (b)
- (b)
- (b)
- (e)
- Uma pequena resistência, pois  $P = I^2/R$ .
- Sim, as regras de Kirchhoff representam os princípios da conservação da energia e da carga e, portanto, são aplicáveis a todos os circuitos.
- (a)  $3,12 \text{ V}$   
 (b)  $78,0 \text{ mV/m}$   
 (c)  $18,7 \text{ W}$
- $2,03 \text{ m}$
- $2,08 \text{ mm}$
- $0,281 \text{ mm/s}$
- (a)  $5,93 \times 10^7 \text{ m/s}$   
 (b)  $37,3 \mu\text{A}$
- $0,210 \text{ mm/s}; 0,531 \text{ mm/s}$
- (a)  $1,04 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$   
 (b)  $1,04 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$
- (a)  $33,3 \Omega$   
 (b)  $0,751 \text{ A}$
- $8,98 \text{ mm}$
- $1,95 \text{ V}$
- $62,2 \text{ ciano}$
- (a)  $0,170$   
 (b) O campo  $E$  é maior no fio de ferro.
- $1,20 \Omega$
- $0,0314 \Omega$
- (b)  $90,0 \text{ mA}$
- $\frac{\rho L}{\pi ab}$
- (a)  $\frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$   
 (b)  $2,05 \text{ A}$
- $45,6^\circ\text{C}$
- (a)  $15,0 \text{ A}$   
 (b)  $11,1 \Omega$   
 (c)  $1,30 \text{ kW}$
- (a)  $\frac{1}{A} [\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2]$   
 (b)  $264$
- (a)  $636 \text{ K}$   
 (b) Quando o filamento se aquece sua resistência aumenta, fazendo com que mais potência seja dissipada, o que leva a um aumento do calor, que eleva a temperatura e assim por diante. Esse processo térmico pode provocar um sobreaquecimento do filamento, caso não seja controlado.
- (a)  $5,00 \text{ mA}$   
 (b)  $50,0 \text{ V}$
- $180 \text{ J}$
- (a)  $240 \text{ W}$   
 (b)  $228 \text{ W}$   
 (c)  $43,2 \text{ kJ}$   
 (d)  $2,16 \text{ kJ}$
- (a)  $6,91 \text{ MJ}$   
 (b)  $12,8 \text{ h}$
- (a)  $26,7 \text{ kW}$   
 (b)  $5,76 \text{ MC}$   
 (c)  $69,1 \text{ MJ}$   
 (d)  $57,6 \text{ km}$   
 (e)  $\$0,03/\text{km}$
- (a)  $1,33 \Omega$   
 (b)  $I_4 = 3,00 \text{ A}; I_3 = 4,00 \text{ A}; I_6 = 2,00 \text{ A}$
- (b) Como a diferença de potencial entre os pontos  $c$  e  $d$  é nula, nenhuma corrente fluiria pelo resistor conectado entre esses dois pontos, e a inserção daquele resistor não alteraria o circuito.
- $450 \Omega$

85. (b)



87. (a) 6,00 Ω

(b) 0,667 A; 1,33 A; 0,667 A

89. 8

91. (a)  $R_3 = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}$

(b)  $R_2 = 0$

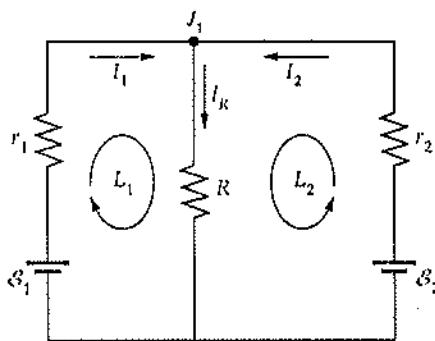
(c)  $R_1 = \frac{R_3 + \sqrt{R_3^2 + 4R_2R_3}}{2}$

93. (a) 4,00 A

(b) 2,00 V

(c) 1,00 Ω

95. (a)



(b)  $I_1 = -57,0 \text{ A}; I_2 = 63,0 \text{ A}; I_R = 6,00 \text{ A}$

(c)  $P_2 = 794 \text{ W}; P_1 = 650 \text{ W}; P_{r_1} = 32,5 \text{ W}; P_{r_2} = 39,7 \text{ W}; P_R = 72,0 \text{ W}$

97. (a)  $I_1 = 0,667 \text{ A}; I_2 = 0,889 \text{ A}; I_3 = 1,56 \text{ A}$

(b) 9,36 V

(c) 8,00 W; 10,7 W

99. Se  $r = R$ , ambos os arranjos fornecem a mesma potência à carga. A análise da segunda derivada de  $P_p$  em  $R = \frac{1}{2}r$  mostra que  $R = \frac{1}{2}r$  corresponde ao valor máximo de  $P_p$  e, assim, para a combinação em paralelo a potência fornecida à carga será maior se  $R < r$  e será máxima quando  $R = \frac{1}{2}r$ .

103. 2,40 V

105. (a) 3,33 V

(b) 3,33 V

(c) 3,13 V

(d) 2,00 V

(e) 0,435 V

(f) 1,67 MΩ

107. 2,50 Ω

109. 195 kΩ

111. (a) 600 μC

(b) 0,200 A

(c) 3,00 ms

(d) 81,2 μC

113. 2,18 MΩ

115. (a) 8,00 μC

(b) 73,7 ms

117. (a) 5,69 μC

(b) 1,10 μA

(c) 1,10 μA

(d) 6,60 μW

(e) 2,42 μW

(f) 4,17 μW

121. (a) 0,250 A

(b) 62,5 mA

(c)  $I_2(t) = (62,5 \text{ mA}) (1 - e^{-t/0,750 \text{ ms}})$

123. (a) 48,0 μA

(b) 0,866 s

125. (a)

127. (b)

129. (a) 30,0 A

(b) 4,00 V

131.  $R = 14,0 \Omega$ ;  $\mathcal{E} = -7,00 \text{ V}$

133. (a) 43,9 Ω

(b) 300 Ω

(c) 3,80 kΩ

135. (a)  $2,19 \times 10^{13} \text{ s}$

(b) 210 J/s

(c) 27,6 s

137. 0,164 L/s

139. Esse resultado é válido independentemente das geometrias do capacitor e do resistor.

141. (a) 10,0 ms

$$(b) V(t) = \frac{\mathcal{E}}{\tau} t$$

(c) 1,00 GΩ

(d) 60,9 ps

(e)  $P_1 = 6,17 \text{ nW}; P_2 = 2,89 \text{ kW}$

$$145. (a) I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$(b) P(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

(c)  $E = \frac{1}{2} V_0^2 C_{eq}$ ; esta é a diferença exata entre as energias inicial e final armazenadas obtidas no problema anterior, o que confirma a afirmativa no final daquele problema de que a diferença entre as energias armazenadas é igual à energia dissipada no resistor.

149. (a)  $10^{12}$

(b) 0,160 mA

(c) 64,0 kW

(d) 640 MW

(e)  $10^{-4}$

$$151. R_{eq} = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}$$

## Capítulo 26

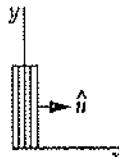
1. (b)
3. Falso
5. A corrente alternada que passa pelo filamento tem sua orientação alterada a cada  $1/60\text{ s}$ , logo em um campo magnético o filamento sofre o efeito de uma força que tem seu sentido alternado naquela frequência.
7. (a) Verdadeiro  
(b) Verdadeiro  
(c) Verdadeiro  
(d) Falso  
(e) Verdadeiro
9. Para cima
11. (a)
13. Pela relatividade, essa situação é equivalente à do elétron movendo-se da direita para a esquerda a uma velocidade  $v$  com o ímã estacionário. Quando o elétron está diretamente sobre o ímã, o campo fica orientado diretamente para cima, logo há uma força orientada para fora da página atuante sobre o elétron.
15. Se apenas a força  $\vec{F}$  e a corrente  $I$  são conhecidas, pode-se apenas concluir que o campo magnético  $\vec{B}$  está no plano perpendicular a  $\vec{F}$ . A orientação específica de  $\vec{B}$  é indeterminada.
17. (a)  $88,6\text{ C/kg}$   
(b)  $26,6\text{ nC}$
19. (a)  $-(3,80\text{ mN})\hat{k}$   
(b)  $-(7,51\text{ mN})\hat{k}$   
(c) 0  
(d)  $(7,51\text{ mN})\hat{j}$
21.  $0,962\text{ N}$
23.  $0,621\text{ pN}$ ;  $\theta_x = 108^\circ$ ;  $\theta_y = 102^\circ$ ;  $\theta_z = 158^\circ$
25.  $1,48\text{ A}$
29.  $\vec{B} = (10\text{ T})\hat{i} + (10\text{ T})\hat{j} - (15\text{ T})\hat{k}$
31. (a)  $87,4\text{ ns}$   
(b)  $4,62 \times 10^7\text{ m/s}$   
(c)  $11,4\text{ MeV}$
33. (a)  $142\text{ m}$   
(b)  $2,84\text{ m}$
35. (a)  $\frac{v_a}{v_p} = \frac{1}{2}$   
(b)  $\frac{K_a}{K_p} = 1$   
(c)  $\frac{L_a}{L_p} = 2$
39. (a)  $\phi = 24^\circ$ ;  $v_p = 1,26 \times 10^7\text{ m/s}$ ;  $v_p = 6,29 \times 10^6\text{ m/s}$   
(b)  $v_d = 1,41 \times 10^7\text{ m/s}$
41. (a)  $1,64 \times 10^6\text{ m/s}$   
(b)  $14,0\text{ keV}$   
(c)  $7,66\text{ eV}$
43. (a)  $7,34\text{ mm}$   
(b)  $66,2\text{ }\mu\text{T}$
45. (a)  $63,3\text{ cm}$   
(b)  $2,60\text{ cm}$
47.  $\Delta t_{ss} = 15,8\text{ }\mu\text{s}$ ;  $\Delta t_m = 16,3\text{ }\mu\text{s}$

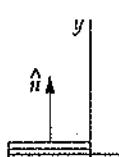
49. (a)  $21,3\text{ MHz}$   
(b)  $46,0\text{ MeV}$   
(c)  $10,7\text{ MHz}; 23,0\text{ MeV}$

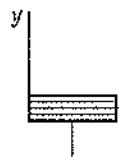
53. (a)  $0,302\text{ A}\cdot\text{m}^2$   
(b)  $0,131\text{ N}\cdot\text{m}$

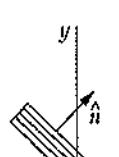
55. (a) 0  
(b)  $\pm(2,70 \times 10^{-3}\text{ N}\cdot\text{m})\hat{j}$

57.  $B = \frac{mg}{I\pi R}$

59. (a)   
 $\vec{F} = (0,840\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$

- (b)   
 $\vec{F} = 0$

- (c)   
 $\vec{F} = 0$

- (d)   
 $\vec{F} = (0,594\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$

61.  $0,377\text{ A}\cdot\text{m}^2$ ; entrando pela página.

67.  $\mu = \frac{4}{3}\pi\sigma R^4\omega$

69. (a)  $\tau = \frac{1}{2}\pi\sigma r^4\omega B \sin\theta$

(b)  $\Omega = \frac{\pi\sigma r^2 B}{2m} \sin\theta$

71. (a)  $3,69 \times 10^{-5}\text{ m/s}$

(b)  $1,48\text{ }\mu\text{V}$

73.  $1,02\text{ mV}$

75. 3,46

77. (a)  $0,131\text{ }\mu\text{s}$

(b)  $2,40 \times 10^7\text{ m/s}$

(c)  $12,0\text{ MeV}$

81. (a)  $\vec{B} = -\frac{mg}{I\ell} \operatorname{tg}\theta \hat{n}_y$

(b)  $g \sin\theta$

83. (a)  $\vec{F} = (1,60 \times 10^{-18}\text{ N})\hat{j}$

(b)  $\vec{E} = (10,0 \text{ V/m})\hat{j}$

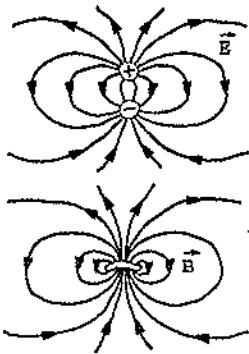
(c)  $\Delta V = 20,0 \text{ V}$

85. 5,10 m

**Capítulo 27**

1. (a) As forças elétricas são repulsivas; as forças magnéticas são atrativas (as duas cargas que se movem no mesmo sentido atuam como duas correntes com a mesma orientação).  
 (b) As forças elétricas são novamente repulsivas; As forças magnéticas também são repulsivas.

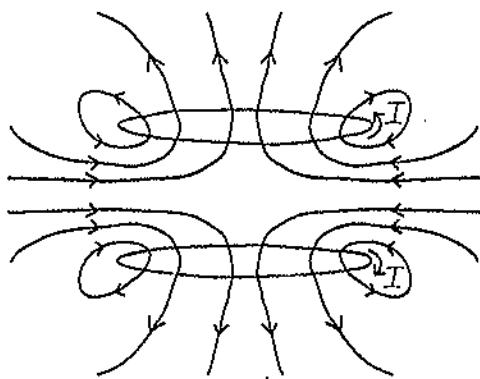
3.



5. (a)

7. (e)

9.



11. (a) Verdadeiro

(b) Verdadeiro

13. (a) Falso

(b) Verdadeiro

(c) Falso

(d) Falso

(e) Verdadeiro

15. Não. A relação clássica entre os momentos magnéticos e o momento angular é  $\vec{m} = \frac{q}{2m}\vec{L}$ . Assim, se o momento angular da partícula é nulo, seu momento magnético será também nulo.17. Pela lei de Ampère, a corrente envolvida por uma trajetória fechada no interior do tubo é nula e, pela simetria cilíndrica, pode-se concluir que  $B = 0$  em qualquer local do interior do tubo.19. H<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub> e N<sub>2</sub> são diamagnéticos ( $\chi_m < 0$ ); O<sub>2</sub> é paramagnético ( $\chi_m > 0$ ).21. 60,0  $\mu\text{T}$ 23. (a)  $\vec{B}(0, 0) = -(9,00 \text{ pT})\hat{k}$ (b)  $\vec{B}(0, 1 \text{ m}) = -(36,0 \text{ pT})\hat{k}$ 

(c)  $\vec{B}(0, 3 \text{ m}) = (36,0 \text{ pT})\hat{k}$

(d)  $\vec{B}(0, 4 \text{ m}) = (9,00 \text{ pT})\hat{k}$

25. (a)  $\vec{B}(1 \text{ m}, 3 \text{ m}) = 0$

(b)  $\vec{B}(6 \text{ m}, 4 \text{ m}) = -(3,56 \times 10^{-23} \text{ T})\hat{k}$

(c)  $\vec{B}(3 \text{ m}, 6 \text{ m}) = (4,00 \times 10^{-23} \text{ T})\hat{k}$

27.  $\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$

29.  $d\vec{B}(3 \text{ m}, 0, 0) = -(9,60 \text{ pT})\hat{i}$

31. (a)  $B(0) = 54,5 \mu\text{T}$

(b)  $B(0,01 \text{ m}) = 46,5 \mu\text{T}$

(c)  $B(0,02 \text{ m}) = 31,4 \mu\text{T}$

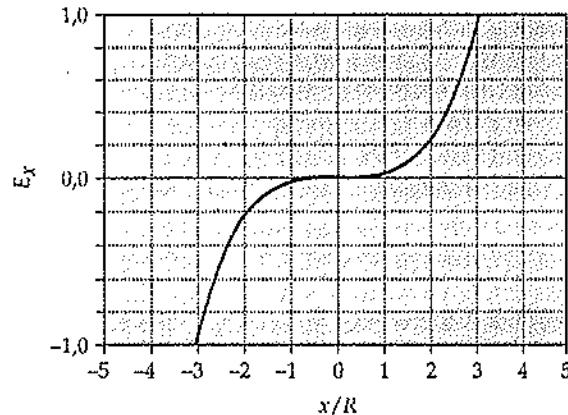
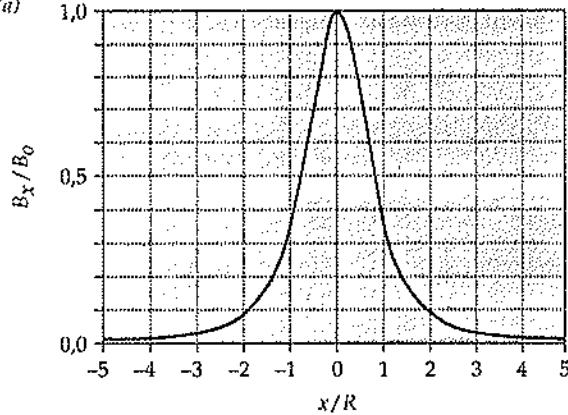
(d)  $B(0,35 \text{ m}) = 33,9 \mu\text{T}$

33. (a) 19,1 cm

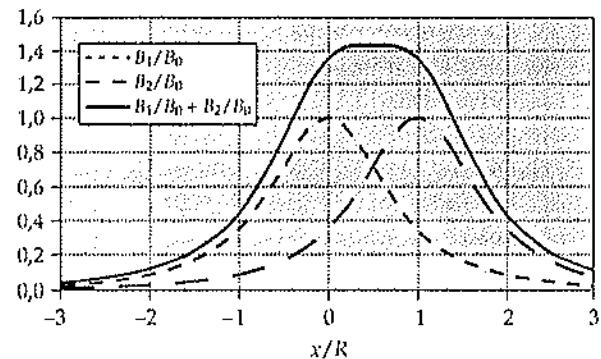
(b) 45,3 cm

(c) 99,5 cm

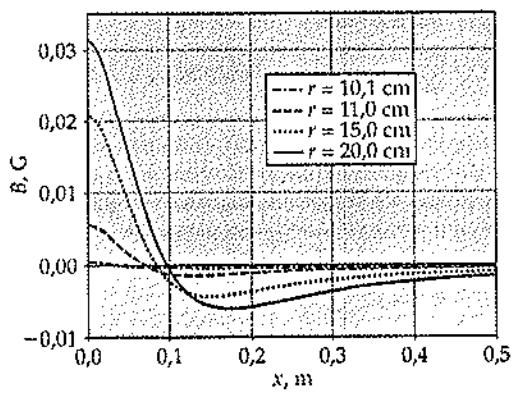
35. (a)



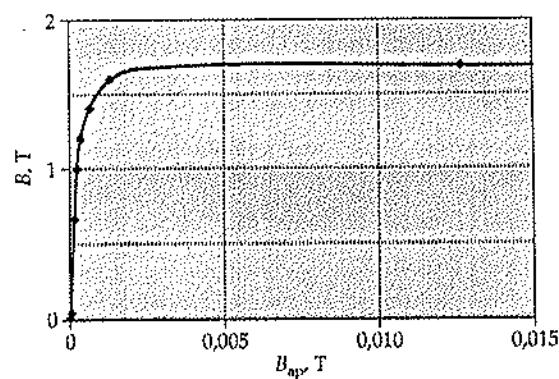
(b)



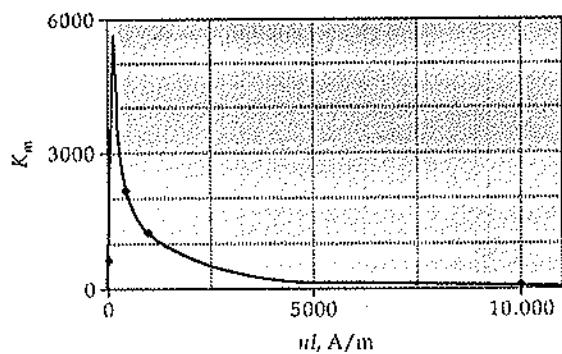
39.



79.



43. (a)  $\vec{B}(-3 \text{ cm}) = -(88,6 \mu\text{T})\hat{k}$   
 (b)  $\vec{B}(0) = 0$   
 (c)  $\vec{B}(3 \text{ cm}) = -(88,6 \mu\text{T})\hat{k}$   
 (d)  $\vec{B}(9 \text{ cm}) = -(160 \mu\text{T})\hat{k}$
45. (a)  $\vec{B}(-3 \text{ cm}) = -(177 \mu\text{T})\hat{k}$   
 (b)  $\vec{B}(0) = -(133 \mu\text{T})\hat{k}$   
 (c)  $\vec{B}(3 \text{ cm}) = -(177 \mu\text{T})\hat{k}$   
 (d)  $\vec{B}(9 \text{ cm}) = (106 \mu\text{T})\hat{k}$
47. (a)  $\vec{B}(z = 8 \text{ cm}) = (64,0 \mu\text{T})\hat{j}$   
 (b)  $\vec{B}(z = 8 \text{ cm}) = -(48,0 \mu\text{T})\hat{k}$
49. (a) Como as correntes se repelem, elas são antiparalelas.  
 (b)  $39,3 \text{ mA}$
51.  $80,2 \text{ A}$
53. (a)  $4,50 \times 10^{-4} \text{ N/m}$   
 (b)  $30,0 \mu\text{T}$
55. (a)  $80,0 \text{ A}$   
 (b)  $-(0,240 \text{ mT})\hat{j}$
57. (a)  $\frac{3\sqrt{2}\mu_0I^2}{4\pi a}$   
 (b)  $\frac{\sqrt{2}\mu_0I^2}{4\pi a}$
59. (a)  $3,25 \text{ mT}$   
 (b)  $3,25 \text{ mT}$   
 (c)  $1,63 \text{ mT}$
63.  $B_{int} = 0; B_{ext} = \frac{\mu_0I}{2\pi R}$
65. (a)  $B_{r < R} = \frac{\mu_0I}{2\pi r}$   
 (b)  $B_{r > R} = 0$
69. (a)  $B_{r < a} = 0$   
 (b)  $B_{a < r < b} = \frac{\mu_0I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$   
 (c)  $B_{r > b} = \frac{\mu_0I}{2\pi r}$
71. (a)  $27,3 \text{ mT}$   
 (b)  $20,0 \text{ mT}$
73. (a)  $10,1 \text{ mT}$   
 (b)  $10,1 \text{ mT}; 1,52 \text{ T}$
75. (a)  $B_{ap} = 10,053 \text{ mT}; M = 0,554 \text{ A/m}; B = 10,054 \text{ mT}$
77.  $-4,00 \times 10^{-5}$



83.  $1,69 \mu_B$   
 85. (b)  $7,46 \times 10^{-4}$   
 87.  $B_{ap} = \frac{\mu_0NI}{2\pi a}; B = \frac{\mu_0NI}{2\pi a} + \mu_0M$
89. (a)  $30,2 \text{ mT}$   
 (b)  $6,96 \text{ A/m}$   
 (c)  $30,2 \text{ mT}$
91.  $K_m = 11,75; \mu = 1,48 \times 10^{-5} \text{ N/A}^2$   
 93. (a)  $12,6 \text{ mT}$   
 (b)  $1,36 \times 10^6 \text{ A/m}$   
 (c) 137
95. (a)  $60,3 \text{ mT}$   
 (b)  $24,0 \text{ A}$
97. (a)  $1,42 \times 10^6 \text{ A/m}$   
 (b)  $K_m = 90,0; \mu = 1,13 \times 10^{-4} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}; \chi_m = 89,0$
99. (a)  $(8,00 \text{ T/m})r$   
 (b)  $(3,20 \times 10^{-3} \text{ T}\cdot\text{m})\frac{1}{r}$   
 (c)  $(8,00 \times 10^{-6} \text{ T}\cdot\text{m})\frac{1}{r}$

(d) Note que o campo na região ferromagnética é o que deveria ser produzido na região não-magnética pela corrente de  $400I = 1600 \text{ A}$ . A corrente amperiana na superfície interna do material ferromagnético deve, portanto, ser igual a  $1600 \text{ A} - 40 \text{ A} = 1560 \text{ A}$  no sentido de  $I$ . Na superfície externa deve, então, haver uma corrente amperiana de  $1560 \text{ A}$  no sentido oposto.

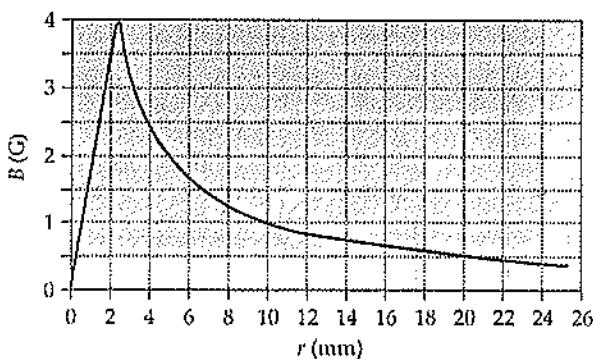
$$101. \quad \frac{\mu_0I}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{i}$$

103.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} (1 + \sqrt{2})$

105. (a)  $\vec{F}_2 = (1,00 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{i}; \vec{F}_4 = (-0,286 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{i}$   
 (b)  $\vec{F}_{\text{res}} = (0,714 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{i}$

107.  $(7,07 \mu\text{T}) \hat{i}$

109.



111.  $\kappa = 0,246 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}; T = 0,523 \text{ s}$

115. (a)  $5,24 \times 10^{-2} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

(b)  $7,70 \times 10^5 \text{ A}/\text{m}$

(c)  $2,31 \times 10^4 \Delta$

117. (a)  $70,6 \text{ A}\cdot\text{m}^2$

(b)  $17,7 \text{ N}\cdot\text{m}$

119. 3,18 cm

121. (a)  $10,0 \mu\text{T}$

(b)  $10,0 \mu\text{T}$

(c)  $5,00 \mu\text{T}$

123.  $2,24 \Delta$

125. (c)  $\frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left( \frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 2x \right)$

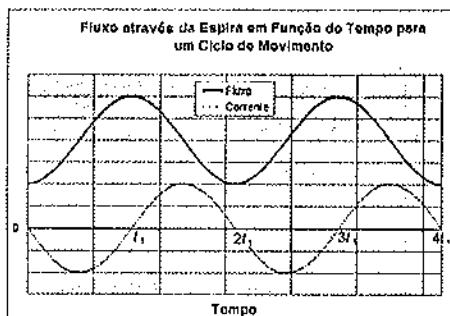
## Capítulo 28

1. (d)

3. (a) Se a corrente em  $B$  estiver no sentido horário, as espiras se repelem mutuamente.

(b) Se a corrente em  $B$  estiver no sentido anti-horário, as espiras se atraem mutuamente.

5. (a) e (b)



7. A proteção é necessária porque se a corrente for interrompida bruscamente, a fem resultante gerada entre os terminais do indutor, devida à grande variação do fluxo, pode sobrecarregar o indutor. O diodo permite que a corrente flua (na espira) mesmo quando a chave estiver aberta.

9. (a) Falso

(b) Verdadeiro

(c) Verdadeiro

(d) Falso

(e) Verdadeiro

11. O campo magnético do ímã, variando com o tempo, submete o tubo metálico às correntes parasitas. Essas correntes estabelecem um campo cujo momento magnético é oposto ao do ímã em movimento; assim, o ímã fica mais lento. Se o tubo for de um material não-condutor, não haverá correntes parasitas.

13. (a)  $3,14 \text{ rad/s}$

(b)  $1,94 \text{ mV}$

(c) Não. Para gerar uma fem de 1 V, os estudantes deveriam girar a corda a uma velocidade aproximadamente 500 vezes maior.

(d) A utilização de fios torcidos mais leves (de modo que o conjunto poderia ser girado com a mesma velocidade angular) enrolados diversas vezes poderia aumentar a fem induzida.

15. 2,00 kV

17. (a) 0

(b)  $1,37 \times 10^{-5} \text{ Wb}$

(c) 0

(d)  $1,19 \times 10^{-5} \text{ Wb}$

19.  $\pi R^2 B$

21.  $6,74 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

23. (a)  $\mu_0 n IN \pi R_1^2$

(b)  $\mu_0 n IN \pi R_3^2$

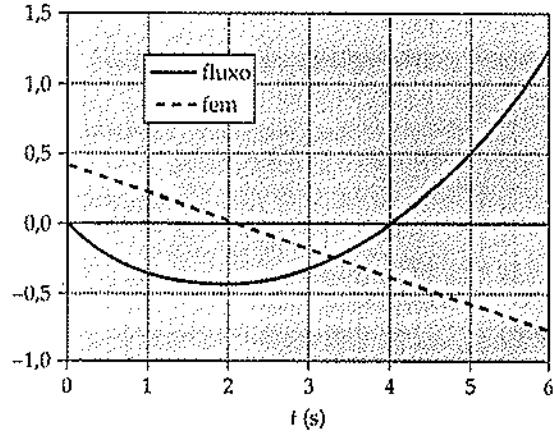
25.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$

27. (a)  $0,314 \text{ mV}$

(b)  $0,785 \text{ mA}$

(c)  $0,247 \mu\text{W}$

29. (a)



(b) Observando-se o gráfico, pode-se perceber que o fluxo é mínimo em  $t = 2 \text{ s}$  e que  $V = 0$  nesse instante.

(c) O fluxo é nulo em  $t = 0$  e  $t = 4 \text{ s}$ . Nessas tempos,  $\mathcal{E} = 0,4 \text{ V}$  e  $-0,4 \text{ V}$ , respectivamente.

31. (a)  $-1,26 \text{ mC}$

(b)  $12,6 \text{ mA}$

(c)  $630 \text{ mV}$

33.  $79,8 \mu\text{T}$

35. (a)  $0,693 \frac{\mu_0 R}{\pi}$

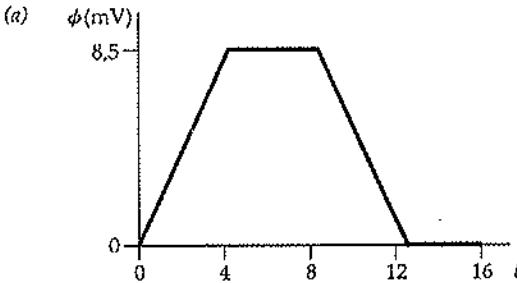
(b)  $4,16 \mu\Omega$

Como o fluxo magnético devido à corrente  $I$  aumenta no sentido de entrar para o plano da página, a corrente induzida terá

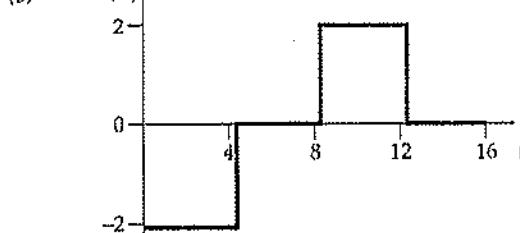
uma orientação tal que seu correspondente campo magnético será oposto a esse aumento; isto é, ele estará no sentido de sair da página. Assim, a corrente induzida tem o sentido anti-horário.

37.  $400 \text{ m/s}$

39. (a)  $\phi(\text{mV})$



(b)  $\text{fem (V)}$



41. (a)  $\frac{dv}{dt} = \frac{B\ell}{mR} (\mathcal{E} - B\ell v)$

(b)  $v_t = \frac{\mathcal{E}}{B\ell}$

(c) 0

43.  $x = \frac{mv_0 R}{B^2 \ell^2}$

47. (d)

49. (a)  $(15,6 \text{ T}\cdot\text{m}) v$

(b)  $1,61 \text{ cm/s}$

51. (a)  $\frac{\mu_0 I v b}{2\pi} \left( \frac{1}{d+vt} - \frac{1}{d+a+vt} \right)$

(b)  $\frac{\mu_0 l v b}{2\pi} \left( \frac{1}{d+vt} - \frac{1}{d+a+vt} \right)$

53. (a)  $24 \text{ Wb} + (1600 \text{ H}\cdot\text{A}/\text{s})t$

(b)  $-1,60 \text{ kV}$

55. (a)  $6,03 \text{ mT}$

(b)  $7,58 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

(c)  $0,253 \text{ mH}$

(d)  $38,0 \text{ mV}$

57. 0;  $162 \Omega$

63.  $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

65.  $0,157 \mu\text{H}$

67. (a)  $I = 0; dI/dt = 25,0 \text{ A/s}$

(b)  $I = 2,27 \text{ A}; dI/dt = 20,5 \text{ A/s}$

(c)  $I = 7,90 \text{ A}; dI/dt = 9,20 \text{ A/s}$

(d)  $I = 10,8 \text{ A}; dI/dt = 3,38 \text{ A/s}$

69. (a)  $44,0 \text{ W}$

(b)  $40,4 \text{ W}$

(c)  $3,62 \text{ W}$

71. (a)  $5,77 \text{ s}$

(b)  $28,9 \text{ H}$

73. (a)  $3,00 \text{ kA/s}$

(b)  $1,50 \text{ kA/s}$

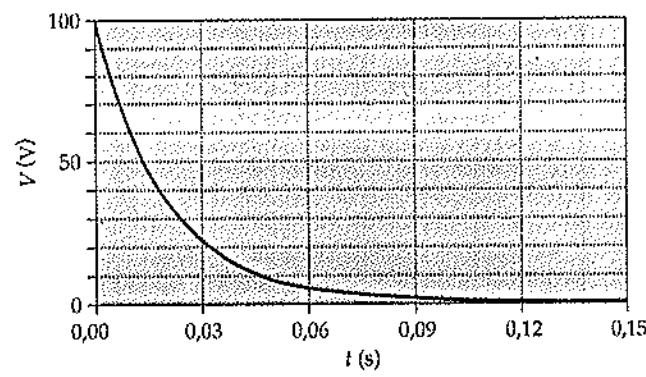
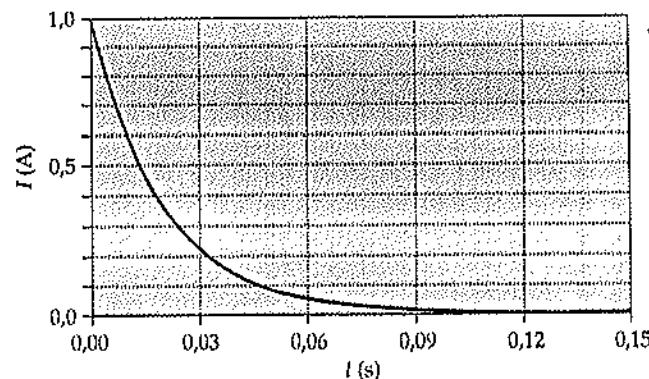
(c)  $80,0 \text{ mA}$

(d)  $0,123 \text{ ms}$

75. (a)  $1,00 \text{ A}; 0$

(b)  $100 \text{ V}; 100 \text{ V}$

(c)



77. (a)  $88,1 \text{ ms}$

(b)  $35,2 \text{ mH}$

79. (a)  $\frac{dI_R}{dt} \int_{t=0}^{\infty} = 9,00 \text{ kA/s}; \frac{dI_{R \text{ mH}}}{dt} = 3,00 \text{ kA/s};$

$\frac{dI_{4 \text{ mH}}}{dt} = 6,00 \text{ kA/s}$

(b)  $1,60 \text{ A}$

81. (a)  $3,53 \text{ J}$

(b)  $1,61 \text{ J}$

(c)  $1,92 \text{ J}$

83. (a)  $7,07 \text{ mV}$

(b)  $6,64 \text{ mV}$

85. (b)  $275 \text{ rad/s}$

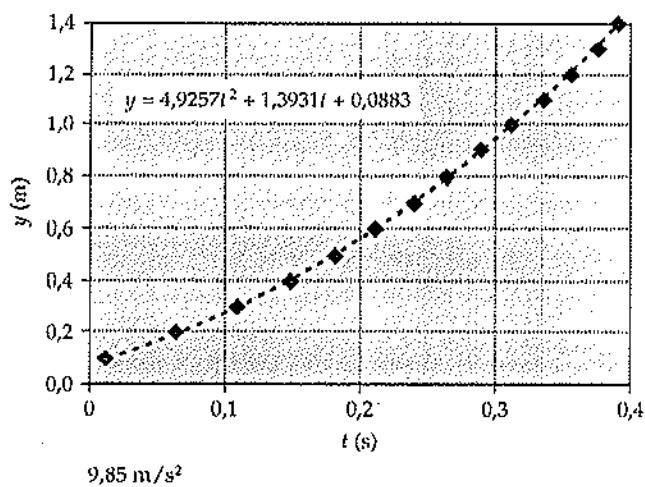
89. (a) Quando o ímã passa pela bobina, ele induz uma fem devida à variação no fluxo através da bobina. Essa condição permite que a bobina sinta quando o ímã passa por ela.

(b) Não se pode utilizar um cilindro de material condutor, porque as correntes parasitas induzidas no material pelo ímã que cai fariam com que este diminuísse sua velocidade.

(c) Quando o ímã se aproxima da espira, o fluxo aumenta, resultando no aumento do sinal da lensão. Quando o ímã está passando pela bobina, o fluxo passa de um aumento para uma

diminuição, de modo que a fem induzida fica nula e, em seguida, negativa. O tempo no qual a fem induzida é nula é o tempo em que o fmã fica no centro da bobina.

(d)



$$9.85 \text{ m/s}^2$$

91.  $I(t) = (0,350 \text{ A}) \sin(2 \text{ rad/s})t$

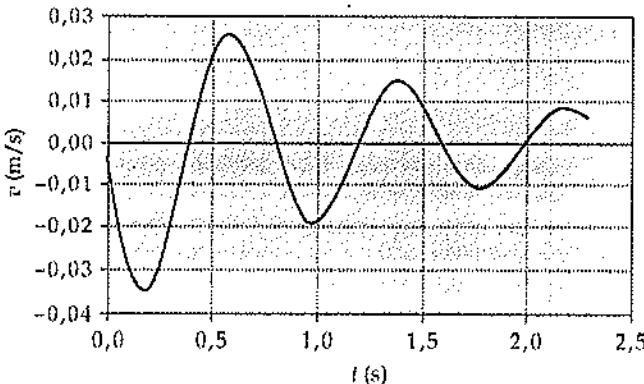
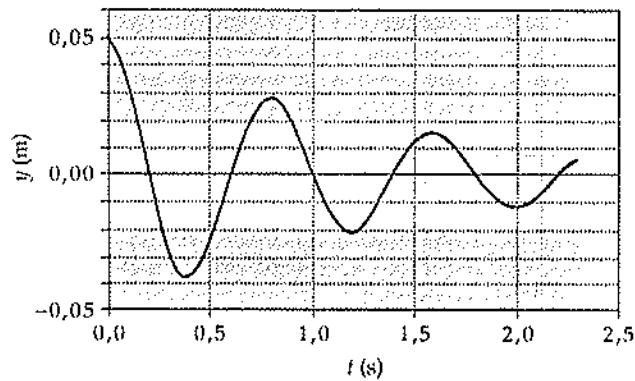
93. (a)  $-\frac{1}{2}r\mu_0nI_0\omega \cos \omega t$   
 (b)  $\frac{\mu_0nR^2I_0\omega}{2r} \cos \omega t$

97. (a)  $30,8 \text{ N/m}$

(b)  $\frac{By_0\omega w}{R} \cos \omega t$

(c)  $\beta = \frac{B^2w^2}{R}$

(d)



## Capítulo 29

1. (b)

3. (b)

5. (c)

7. Sim para ambas as questões. Enquanto a carga se acumula no capacitor, este absorve potência do gerador. Quando o capacitor descarrega, ele fornece potência para o gerador.

9. O projeto de um circuito  $LC$  com uma pequena freqüência de ressonância requer uma grande indutância e uma grande capacilância. Nenhum desses componentes é de fácil construção.

11. Sim. O fator de potência é definido como sendo  $\cos \delta = R/Z$ , como  $Z$  é dependente da freqüência,  $\cos \delta$  também o será.

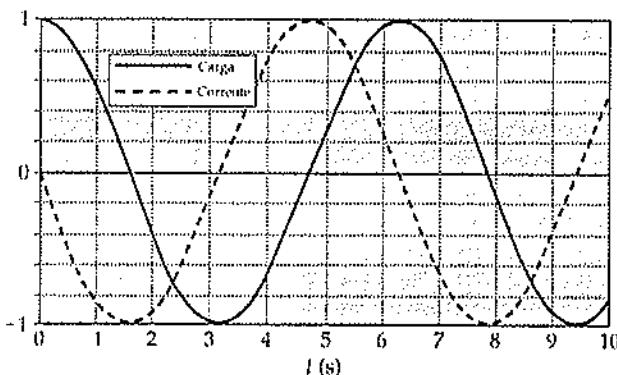
13. 0

15. Verdadeiro

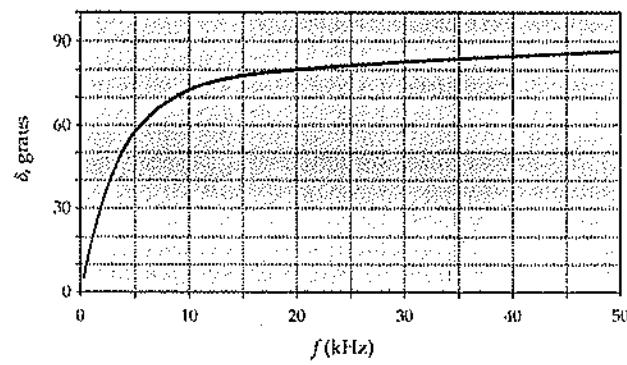
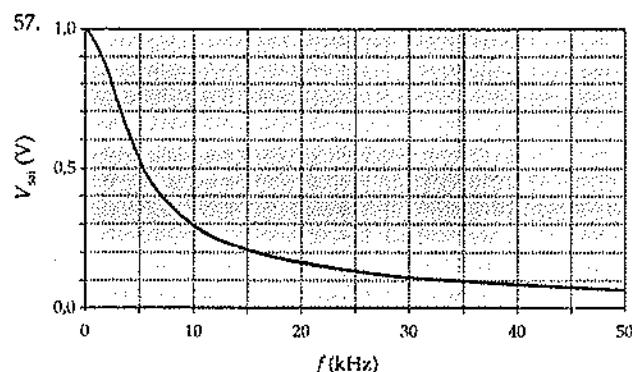
17. (a) Falso  
 (b) Verdadeiro

19. (a)  $39,8 \text{ Hz}$ (b)  $15,1 \text{ V}$ 21. (a)  $13,6 \text{ V}$ (b)  $486 \text{ Hz}$ 23. (a)  $0,833 \text{ A}$ (b)  $1,18 \text{ A}$ (c)  $200 \text{ W}$ 25. (a)  $0,377 \Omega$ (b)  $3,77 \Omega$ (c)  $37,7 \Omega$ 27.  $1,59 \text{ kHz}$ 29. (a)  $25,1 \text{ mA}$ (b)  $17,8 \text{ mA}$ 31. (a)  $(0,346 \text{ A}) \cos \omega t$ (b)  $(0,346 \text{ A}) \cos \omega t$ (c)  $(0,344 \text{ A}) \cos(\omega t + 0,165 \text{ rad})$ 33. (a)  $1,26 \text{ ms}$ (b)  $88,0 \text{ mH}$ 35. (a)  $2,25 \text{ mJ}$ (b)  $712 \text{ Hz}$ (c)  $0,671 \text{ A}$ 

37. (a)

39.  $29,2 \text{ mH}$ 41. (a)  $0,333$ (b)  $26,7 \Omega$

- (c) 0,200 H  
 (d) A corrente I se atrasa de 3° em 70,5°
43. 0,397
45. (a)  $I_{\text{rms}} = 6,20 \text{ A}$ ;  $I_{R_L} = 2,80 \text{ A}$ ;  $I_{L,\text{rms}} = 5,53 \text{ A}$   
 (b)  $I_{\text{rms}} \approx 3,27 \text{ A}$ ;  $I_{R_L} = 2,93 \text{ A}$ ;  $I_{L,\text{rms}} = 1,46 \text{ A}$   
 (c) 50,3%; 80,4%
47. 60,0 V
49. (b)  $-90^\circ$   
 (c) 0



59.  $\Delta\omega = R/2L$

61.  $33,3 \mu\text{F}$

63. (a)  $I = -(18,75 \text{ mA}) \sin\left(1250t + \frac{\pi}{4}\right)$

(b)  $22,86 \mu\text{F}$

(c)  $U_e = (4,92 \mu\text{J}) \cos^2\left(1250t + \frac{\pi}{4}\right)$

$U_m = (4,92 \mu\text{J}) \sin^2\left(1250t + \frac{\pi}{4}\right)$

$U = U_m + U_e = 4,92 \mu\text{J}$

65. (a)  $5,39 \times 10^{-16} \text{ F}$

(b)  $f(x) = \frac{70,0 \text{ MHz}}{\sqrt{1 - (3,96 \text{ m}^{-1})x}}$

67. (a) 0,0444

(b) 491 rad/s ou 509 rad/s

71. (a) 1,13 kHz

(b)  $X_C = 79,6 \Omega$ ;  $X_L = 62,8 \Omega$

(c)  $Z = 17,5 \Omega$ ; 4,04 A

(d)  $\delta = -73,4^\circ$

73. (a) 14,1

(b) 79,8 Hz

(c) 0,275

75. (a) 10,0 A

(b)  $53,1^\circ$

(c)  $332 \mu\text{F}$

(d) 133 V

77. (b)  $\delta = -\frac{\pi}{2} + \omega RC$

(c)  $\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{R}{\omega L}$

79. (a) 80,0 V

(b) 77,5 V

(c) 164 V

(d) 111 V

(e) 181 V

81.  $0,935 \mu\text{F}$

83. (a)

$Z$

$R$

$\omega$

(b)

$Z$

$R$

$\omega$

(c)

$Z$

$R$

$\omega$

85. (a)  $L = 0,800 \text{ mH}$ ;  $C = 12,5 \mu\text{F}$

(b) 1,60

(c) 2,00 A

87. (a)  $12,0 \Omega$

(b)  $7,20 \Omega$ ;  $9,60 \Omega$

(c) Se a corrente estiver avançada em relação à tensão, a reatância é capacitativa.

91. (a)  $1,64 \times 10^3 \text{ rad/s}$

(b)  $I_{C,\text{rms}} = 1,39 \text{ A}$ ;  $\delta_C = -84,4^\circ$

$I_{L,\text{rms}} = 1,41 \text{ A}$ ;  $\delta_L = 78,5^\circ$

$I_{\text{rms}} = 0,417 \text{ A}$

93. (a)  $0,396 \mu\text{F}$

(b) 804 Ω

95. (a) 13,26 kHz

(b) 200 mA; 600 V

(c)  $V_L = 433 \text{ V}$ ;  $V_C = 419 \text{ V}$ ;  $I = 142 \text{ mA}$

103. (a) 1,67 rad/s  
 (b) 3,96 W; 7,69 W
105. (a) 1/5  
 (b) 50,0 A
107. (a) 1,50 A  
 (b) 19
109. 3333
113. (a) 265 Ω  
 (b) 2,65 Ω  
 (c) 2,65 mΩ
115. (a) 12,0 V  
 (b) 8,49 V
117. (a)  $Q_1 = (60 \mu\text{F}) \cos(120\pi t) + 72 \mu\text{F}$   
 $Q_2 = (30 \mu\text{F}) \cos(120\pi t) + 36 \mu\text{F}$   
 (b)  $I = -(33,9 \text{ mA}) \sin(120\pi t)$   
 (c) 4,36 mJ  
 (d) 36,0 μJ
119.  $I_{\text{máx}} = 1,06 \text{ A}; I_{\text{mín}} = -0,0560 \text{ A}; I_{\text{med}} = 0,500 \text{ A}; I_{\text{rms}} = 0,636 \text{ A}$
121. A indutância atua como um curto-círcuito para a fonte de tensão constante. A corrente é infinita em todos os casos. Conseqüentemente,  $I_{\text{máx}} = I_{\text{mín}} = \infty$ . Não existe corrente mínima.

## Capítulo 30

1. (a) Falso  
 (b) Verdadeiro  
 (c) Verdadeiro  
 (d) Verdadeiro  
 (e) Falso  
 (f) Verdadeiro
3. Os raios X possuem freqüências maiores, enquanto as ondas de luz possuem comprimentos de onda maiores (veja a Tabela 30-1).
5. Consultando a Tabela 30-1, percebe-se que as ondas de rádio FM e as ondas televisivas possuem comprimentos de onda da ordem de alguns metros.
7. A antena dipolar deve ficar no plano horizontal e perpendicular à linha entre o transmissor e o receptor.
9.  $I = 2,94 \times 10^7 \text{ W/m}^2; P = 5,20 \text{ mW}$
11. (a)  $E_{\text{rms}} = 719 \text{ V/m}; B_{\text{rms}} = 2,40 \mu\text{T}$   
 (b)  $P_{\text{med}} = 3,87 \times 10^{26} \text{ W}$   
 (c)  $I = 6,36 \times 10^7 \text{ W/m}^2; P_r = 0,212 \text{ Pa}$
13.  $F_r = 7,09 \times 10^7 \text{ N}$ ; como a relação entre essas forças é de  $1,65 \times 10^{-14}$  para a Terra e  $4,26 \times 10^{-14}$  para Marte, Marte possui a maior relação. A relação é maior para Marte porque a pressão de radiação depende da distância ao Sol, que é idêntica para ambas as forças, ( $r^{-2}$ ), enquanto a dependência dos raios dos planetas é distinta. A pressão de radiação varia com  $R^2$ , enquanto a força gravitacional varia com  $R^3$  (admitindo que os dois planetas possuem a mesma massa específica, uma hipótese que é bem próxima da realidade). Conseqüentemente, a relação entre as forças fica  $R^2/R^3 = R^{-1}$ . Como Marte é menor do que a Terra, sua relação fica maior.
15. (a)  $3,40 \times 10^{14} \text{ V/m}\cdot\text{s}$   
 (b) 5,00 A
19. (a) 10,0 A  
 (b)  $2,26 \times 10^{12} \text{ V/m}\cdot\text{s}$   
 (c)  $7,90 \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}$
21. (a)  $I = \frac{A(0,01 \text{ V/s})}{\rho d} t$   
 (b)  $I_d = \frac{(0,01 \text{ V/s})\epsilon_0 A}{d}$   
 (c)  $I = \epsilon_0 \rho$
25. (a) 300 m  
 (b) 3,00 m
27.  $3,00 \times 10^{18} \text{ Hz}$
29. (a)  $30,0^\circ$   
 (b) 7,07 m
31.  $4,15 \mu\text{W/m}^2; 5,22 \times 10^{17} \text{ W/cm}^2\cdot\text{s}$
33.  $0,386 \mu\text{W/m}^2$
35. (a) 283 V/m  
 (b) 0,943 μT  
 (c) 212 W/m<sup>2</sup>  
 (d) 0,707 μPa
39. (a) 40,0 nN  
 (b) 80,0 nN
41. (a) 3,46 V/m; 11,5 nT  
 (b) 0,346 V/m; 1,15 nT  
 (c) 0,0346 V/m; 0,115 nT
43.  $E_{\text{rms}} = 75,2 \text{ kV/m}; B_{\text{rms}} = 0,251 \text{ mT}$
45. (a) Sentido positivo do eixo x  
 (b) 0,628 m; 477 MHz  
 (c)  $\vec{E}(x, t) = (194 \text{ V/m}) \cos[10x - (3 \times 10^9)t] \hat{i}$   
 $\vec{B}(x, t) = (0,647 \mu\text{T}) \cos[10x - (3 \times 10^9)t] \hat{k}$
47.  $6,10 \times 10^{-3}$  graus
49.  $3,42 \text{ MW/m}^2$
55. A corrente induzida em uma antena em espira é proporcional ao campo magnético variando com o tempo. Para um sinal máximo, o plano da antena deve fazer um ângulo  $\theta = 0^\circ$  com a linha que liga a antena ao transmissor. Para qualquer outro ângulo, a corrente induzida é proporcional a  $\cos \theta$ . A intensidade do sinal é, portanto, proporcional a  $\cos \theta$ .
57. 7,25 nV
59. (a)  $I = V_0 \left( \frac{1}{R} \sin \omega t + \frac{\omega \epsilon_0 \pi a^2}{d} \cos \omega t \right)$   
 (b)  $B(r) = \frac{\mu_0 V_0}{2\pi r} \left( \frac{1}{R} \sin \omega t + \frac{r^2}{a^2} \cos \omega t \right)$   
 (c)  $\delta = \lg^{-1} \left( \frac{R \omega \epsilon_0 \pi a^2}{d} \right)$
61. (a)  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} [E_{1,0}^2 \cos^2(k_1 x - \omega_1 t) + 2E_{1,0}E_{2,0} \cos(k_1 x - \omega_1 t) \times \cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta) + E_{2,0}^2 \cos^2(k_2 x - \omega_2 t + \delta)] \hat{i}$   
 (b)  $\vec{S}_{\text{ant1}} = \frac{1}{2\mu_0 c} [E_{1,0}^2 + E_{2,0}^2] \hat{i}$   
 (c)  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} [E_{1,0}^2 \cos^2(k_1 x - \omega_1 t) - E_{2,0}^2 \cos^2(k_2 x + \omega_2 t + \delta)] \hat{i}$   
 (d)  $\vec{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2\mu_0 c} [E_{1,0}^2 - E_{2,0}^2] \hat{i}$
63. (a)  $9,15 \times 10^{-15} \text{ T}$   
 (b)  $(1,01 \mu\text{V}) \cos(8,80 \times 10^5 \text{ s}^{-1})t$   
 (c)  $(5,49 \mu\text{V}) \sin(8,80 \times 10^5 \text{ s}^{-1})t$
65. (a)  $E = \frac{I\rho}{\pi a^2}$

$$(b) \quad B = \frac{\mu_0 l}{2\pi a}$$

$$(c) \quad \vec{S} = -\frac{l^2 \rho}{2\pi^2 a^3} \hat{r}$$

67.  $0,574 \mu\text{m}$ 69.  $3,33 \text{ mN}$ 

$$(b) \quad 38,8^\circ$$

$$(c) \quad 26,3^\circ$$

37. 92,2%

41.  $62,5^\circ$ 43.  $102 \text{ m}^2$ 

45. 1,30

47.  $5,43^\circ$ 49. (a)  $48,7^\circ$ 

(b) Note que  $\theta_2$  é igual ao ângulo crítico para a interface água-ar. Portanto, o raio não sai da água para  $\theta_1 \geq 41,8^\circ$ .

51.  $1,02^\circ$ 53. (a)  $53,1^\circ$ (b)  $56,3^\circ$ 55. (a)  $\frac{1}{8} I_0$ (b)  $\frac{3}{32} I_0$ 57. (a)  $30,0^\circ$ 

(b) 1,73

59.  $I_3 = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\omega t$ 

61. 13

63.  $I_4 = 0,211 I_0$ 

65. Circularmente polarizada à direita;  $\vec{E} = E_0 \sin(kx + \omega t) \hat{j} - E_0 \cos(kx + \omega t) \hat{k}$

67.  $35,3^\circ$ 69.  $1,45 \text{ m}$ 71.  $3,42 \text{ m}$ 73. (a)  $36,8^\circ$ (b)  $38,7^\circ$ 75. (a)  $-1,00 \text{ m}$ (b)  $\theta_i = 26,6^\circ; \theta_r = 26,6^\circ$ 

77. Para o vidro de silicato duro:  $\theta_p = 58,3^\circ$ ; para o vidro de borato duro:  $\theta_p = 57,5^\circ$ ; para o quartzo:  $\theta_p = 57,0^\circ$ ; para o vidro de silicato ótico:  $\theta_p = 56,5^\circ$

79. (b)  $\theta_p > \theta_c$ 

81. (a) 1,33

(b)  $\theta_c = 37,2^\circ$ (c)  $\theta_2 = 48,8^\circ$ 

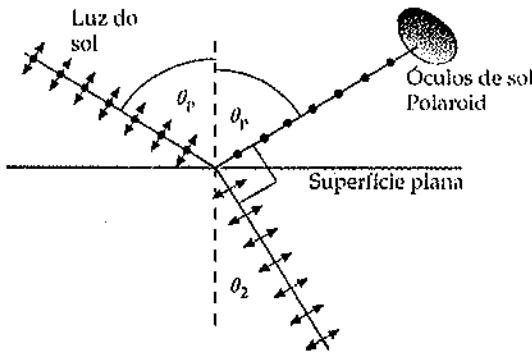
83. (a)  $\frac{I_t}{I_0} = \left[ \frac{4n}{(n+1)^2} \right]^{2N}$

(b) 0,783

(c)  $\approx 28$ 85. (a)  $24,0^\circ$ (b)  $4,45 \text{ km}$ (c)  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{v_{\text{temp}}}{c} \right)$ (d)  $2,99 \times 10^8 \text{ m/s}$ 

9. (d)

11.



13. (c)

15. Na absorção ressonante, as moléculas respondem à freqüência da luz através da relação de Einstein,  $E = hf$ . Assim, a cor aparente ser a mesma, embora o comprimento de onda tenha sido alterado.

17. (a) 2:00 h da manhã do dia 1º de setembro  
(b) 2:08 h da manhã do dia 1º de setembro

19. (a)  $15,0 \text{ mJ}$   
(b)  $5,25 \times 10^{16}$

21. (a)  $435 \text{ nm}$   
(b)  $1210 \text{ nm}$

23. (a)  $387,5 \text{ nm}; \lambda_{21} = 1138 \text{ nm}; \lambda_{10} = 587,7 \text{ nm}$   
(b)  $\lambda_{03} = 285,1 \text{ nm}; \lambda_{32} = 1078 \text{ nm}; \lambda_{21} = 1138 \text{ nm};$   
 $\lambda_{10} = 587,7 \text{ nm}; \lambda_{31} = 553,6 \text{ nm}; \lambda_{20} = 387,5 \text{ nm}$

25. (a)

27. 5 min, 23 s

29. (a)  $20,0 \mu\text{s}$   
(b)  $\Delta t_{\text{regrão}} \approx 10^4 \Delta t$

33.  $v_{\text{água}} = 2,25 \times 10^8 \text{ m/s}; v_{\text{vídeo}} = 2,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 35. (a)  $50,2^\circ$ **Capítulo 32**

1. Sim. Note que uma imagem virtual é vista porque o olho foca os raios divergentes para formar uma imagem real na retina. De forma análoga, as lentes da câmera podem focar os raios divergentes no filme.

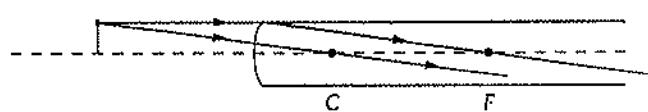
3. (a) Falso

(b) Falso

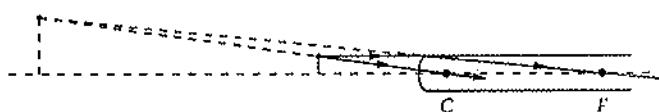
- (c) Verdadeiro  
(f) Falso
5. Um espelho convexo produz sempre uma imagem ereta virtual menor do que o objeto. Ele jamais produz uma imagem ampliada.
7. (b)
9. (a) A lente será positiva se seu índice de refração for maior que o do meio que a circunda e se a lente for mais grossa no centro do que nas bordas. Ao contrário, se o índice de refração da lente for menor que o de suas vizinhanças, a lente será negativa se ela for mais fina no centro do que nas bordas.  
(b) A lente será negativa se seu índice de refração for maior que o do meio que a circunda e se a lente for mais fina no centro do que nas bordas. Ao contrário, se o índice de refração da lente for menor que o de suas vizinhanças, a lente será negativa se ela for mais grossa no centro do que nas bordas.
11. (d)
13. O olho se acomoda pela variação da distância focal da lente localizada a uma distância fixa à frente da retina. Uma câmera, por outro lado, possui uma lente de distância focal fixa que pode se mover em relação à localização do filme. A distância entre a lente e o filme varia.
15. (b)
17. (d)
19. (a)
21. Basicamente, os microscópios produzem imagens (sejam as intermediárias produzidas pela objetiva, sejam as vistas através da ocular) maiores do que os corpos que estão sendo investigados. Um telescópio, por outro lado, produz, basicamente, imagens que são muito reduzidas se comparadas às dimensões do corpo observado. Este normalmente é visto de uma grande distância, e o telescópio amplia o ângulo por ele subtendido.
23. Lente plana convexa:  $r_1 = -16,2 \text{ cm}$  e  $r_2 = \infty$   
Lente biconvexa com curvaturas idênticas:  $r_1 = -32,4 \text{ cm}$  e  $r_2 = -32,4 \text{ cm}$   
Lente biconvexa com curvaturas distintas:  $r_1 = 16,2 \text{ cm}$  e  $r_2 = 8,10 \text{ cm}$
- 25.
- 
- 27.
- 
29. (a) A primeira imagem no espelho da esquerda está 10 cm atrás do espelho. O espelho da direita forma uma imagem 20 cm atrás desse espelho ou a 50 cm do espelho da esquerda. Essa imagem resultará em uma segunda imagem 50 cm atrás do espelho da esquerda. A primeira imagem no espelho esquerdo está a 40 cm do espelho da direita, e forma uma imagem 40 cm atrás do espelho da direita ou a 70 cm do espelho da esquerda. Aquela imagem gera uma imagem 70 cm atrás do espelho da esquerda. A quarta imagem atrás do espelho da esquerda está 110 cm atrás desse espelho.  
(b) Procedendo como no item (a) para o espelho da direita, encontra-se a localização das imagens como sendo 20 cm, 40 cm, 80 cm e 100 cm atrás do espelho da direita.
31. (a)  $s' = 15,8 \text{ cm}$ ;  $m = -0,316$ ; como a distância da imagem é positiva e a ampliação lateral é menor do que um e negativa, a imagem é real, invertida e reduzida.  
(b)  $s' = 24,0 \text{ cm}$ ;  $m = -1$ ; como a distância da imagem é positiva e a ampliação lateral é igual a um e negativa, a imagem é real, invertida e com a mesma dimensão do objeto.  
(c)  $s' = \infty$  e não há imagem.  
(d)  $s' = -24,0 \text{ cm}$ ;  $m = 3$ ; como a distância da imagem é negativa e a amplificação lateral é igual a três e positiva, a imagem é virtual, ereta e três vezes maior que a dimensão do objeto.
33. (a)  $s' = -9,85 \text{ cm}$ ;  $m = 0,179$ ; como a distância da imagem é negativa e a ampliação lateral tem módulo menor que um e é positiva, a imagem é virtual, ereta e reduzida.  
(b)  $s' = -8,00 \text{ cm}$ ;  $m = 0,333$ ; como a distância da imagem é negativa e a ampliação lateral tem módulo menor que um e é positiva, a imagem é virtual, ereta e reduzida.  
(c)  $s' = -6,00 \text{ cm}$ ;  $m = 0,5$ ; como a distância da imagem é negativa e a ampliação lateral tem módulo meio e é positiva, a imagem é virtual, ereta e com metade da dimensão do objeto.  
(d)  $s' = -4,80 \text{ cm}$ ;  $m = 0,600$ ; como a distância da imagem é negativa e a ampliação lateral é menor que um e positiva, a imagem é virtual, ereta e com seis décimos da dimensão do objeto.
35. (a) 5,13 cm  
(b) O espelho deve ser côncavo. Um espelho convexo sempre produz uma imagem virtual reduzida.
37.  $s' = -4,00 \text{ m}$ ;  $y' = 3,68 \text{ cm}$
39. (a)
- 
- (b) Limitando-se as bordas do espelho, de modo que apenas raios paraxiais a 2 cm do eixo do espelho sejam refletidos, a fáixa é reduzida de aproximadamente 83%.
41. (a)  $-1,33 \text{ m}$   
(b) Como  $f_{\text{pequeno}} < 0$ , o espelho pequeno é convexo.
43. (a)  $s' = -8,58 \text{ cm}$ , onde o sinal negativo indica que a imagem está a 8,58 cm da superfície frontal do aquário, no mesmo lado que o peixe.

- (b)  $s' = -35,9 \text{ cm}$ , onde o sinal negativo indica que a imagem está a 35,9 cm da superfície frontal do aquário, no mesmo lado que o peixe.

45. 14,4 cm



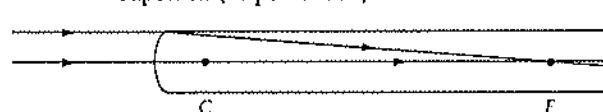
47. (a)  $s' = -104 \text{ cm}$ , onde a posição negativa da imagem indica que ela está 104 cm à frente da superfície e é virtual.



- (b)  $s' = -8,29 \text{ cm}$ , onde o sinal negativo indica que a imagem está 8,29 cm à frente da superfície e é virtual.



- (c)  $s' = 63,5 \text{ cm}$ , isto é, a imagem está 63,5 cm atrás (à direita) da superfície (no ponto focal) e é real.

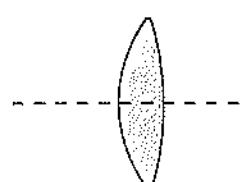


49. (a)  $s' = 64,0 \text{ cm}$

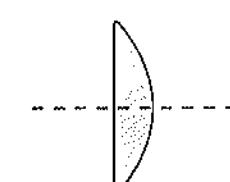
(b)  $s' = -80,0 \text{ cm}$

- (c) A imagem final está a  $96 \text{ cm} - 80 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$  da superfície, o raio da superfície é de  $8 \text{ cm}$  e é virtual.

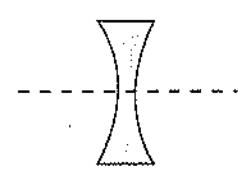
51. (a) 19,0 cm



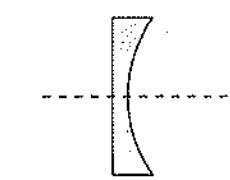
(b) 30,0 cm



(c) -15,0 cm



(d) -52,0 cm



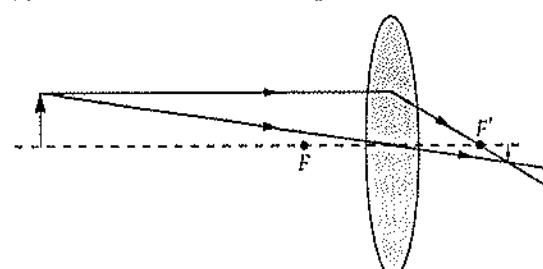
53. (a) -30,3 cm

(b) -22,0 cm (22,0 cm à esquerda da lente)

(c) 0,275

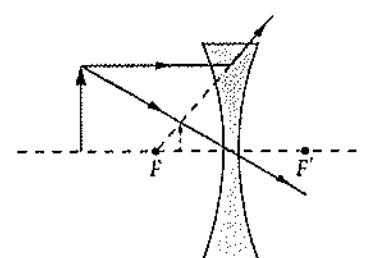
- (d) Como  $s' < 0$  e  $m > 0$ , a imagem é virtual e para cima.

55.



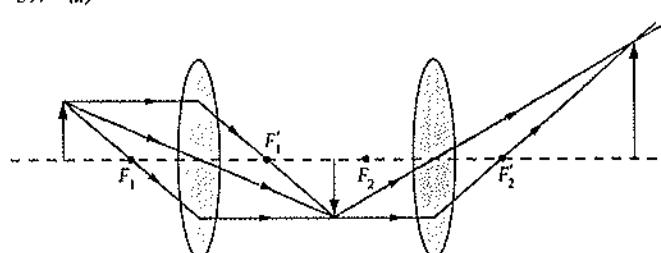
- $s' = 16,7 \text{ cm}$ ;  $y' = -2,00 \text{ cm}$ ; a imagem é real, invertida e reduzida. Como  $s' > 0$  e  $y' = -2,00 \text{ cm}$ , a imagem é real, invertida e reduzida, o que está de acordo com o diagrama de raio.

57.



- $s' = -6,67 \text{ cm}$ ;  $y' = 0,500 \text{ cm}$ ; a imagem é real, ereta e reduzida. Como  $s' < 0$  e  $y' = 0,500 \text{ cm}$ , a imagem é virtual, ereta e com aproximadamente um terço da dimensão do objeto, o que está de acordo com o diagrama de raio.

59. (a)



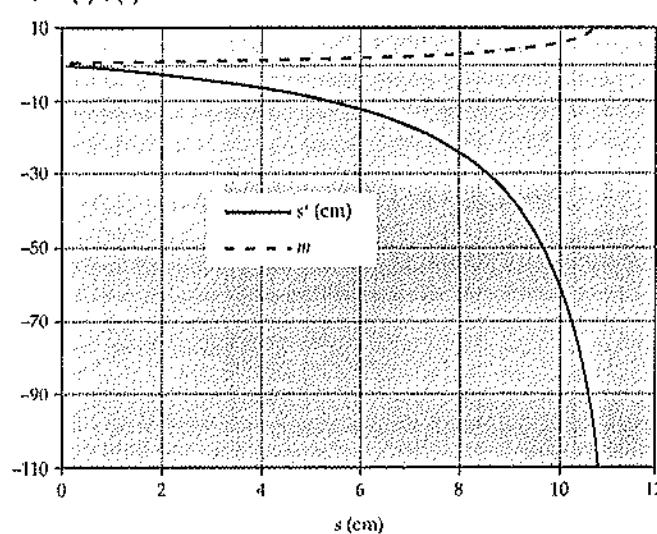
- $s'_2 = 30 \text{ cm}$  e a imagem final está a 85 cm do objeto;  $m_2 = -2$

(b) Como  $s'_2 > 0$  e  $m = m_1 m_2 = 2$ , a imagem é real e ereta.

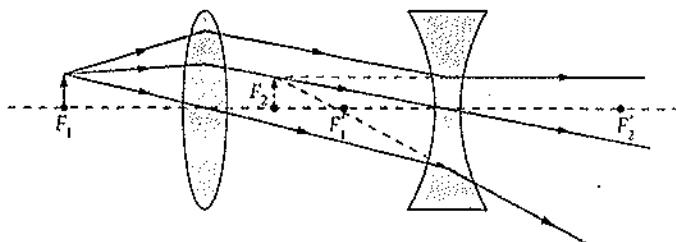
(c) A ampliação da imagem é de duas vezes a dimensão do objeto.

61. (b) 3,70 m

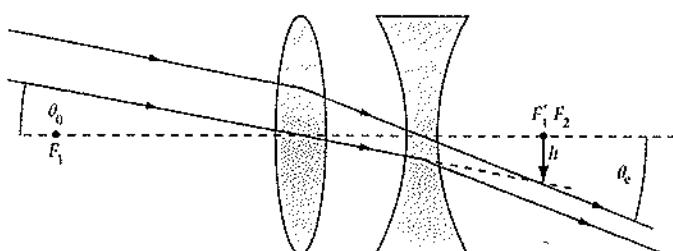
63. (a) e (b)



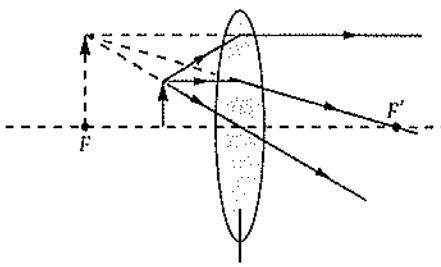
- (c) As imagens são virtuais e eretas para essa faixa de distâncias.  
 (d) A assíntota do gráfico de  $s'$  em função de  $s$  corresponde à imagem aproximando-se do infinito quando a distância do objeto se aproxima do comprimento focal da lente. A assíntota horizontal do gráfico de  $m$  em função de  $s$  indica que, quando o objeto se move em direção à lente, a altura da imagem formada pela lente aproxima-se da altura do objeto.
65. 15,0 cm; a imagem final está a 50 cm do objeto, é real, invertida e possui as mesmas dimensões do objeto.



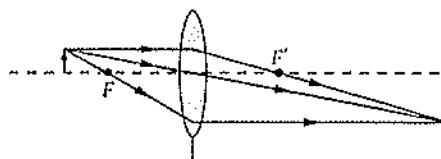
69. (a) 41,2 cm  
 (b) -1,53  
 (c) Como  $m < 0$ , a imagem é invertida. Como  $s'_2 > 0$ , a imagem é real.  
 71. (a) Falso  
 (b) Verdadeiro  
 73. (c) 40,0 D; 4,00 D  
 75. (c) 6,00 D  
 77. 1,72 mm  
 79. (a)  $80,0 \mu\text{rad}$   
 (b) 1,60 mm  
 81. 0,444 D  
 83. 3,07 D  
 85. 6,00  
 87. 5,00  
 89. (a) 3,00  
 (b) 4,00  
 93. (a) -18,8  
 (b) -188  
 95. -232  
 97. (a) 9,00 mm  
 (b)  $\sim 20,0; -0,180 \text{ rad}$   
 99. (a)  $P_{\text{paralelo}} = (25,0)P_{\text{Verde}}$   
 (b)  $\sim 134$
101. (b)



103.  $-1/150$   
 105. 1,34 mm  
 107. (a)  $s = 5,00 \text{ cm}; s' = -10,0 \text{ cm}$

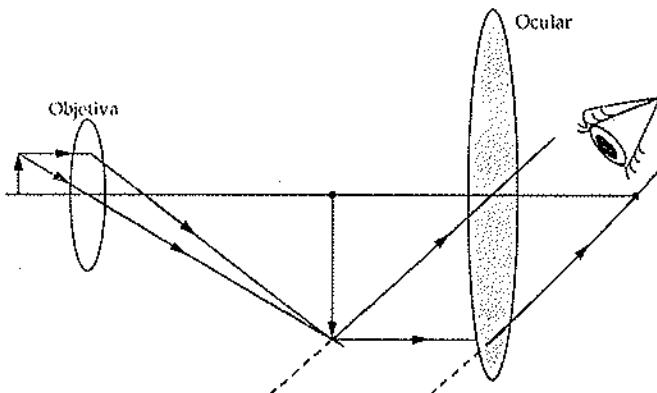


(b)  $s = 15,0 \text{ cm}; s' = 30,0 \text{ cm}$

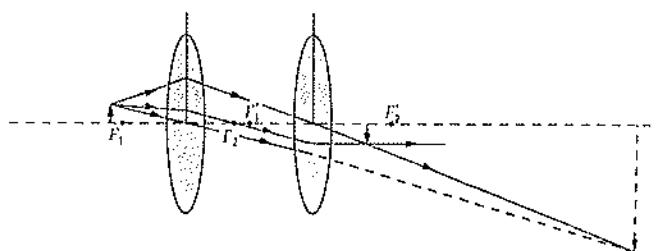


109. (a) Como os comprimentos focais aparecem na fórmula de ampliação na forma de um produto, aparentemente não importa a ordem com que são utilizados. O arranjo usual poderia ser no sentido de utilizar-se a lente de menor comprimento focal como objetiva, porém o mesmo fator de ampliação seria obtido na ordem inversa. Assim, qual seria a diferença entre esses arranjos? No problema, não haveria qualquer diferença. Entretanto, sabe-se que, geralmente, quanto menor o comprimento focal de uma lente, menor seu diâmetro. Essa condição torna mais difícil o uso da lente de menor comprimento focal, com seu menor diâmetro, como a lente ocular. Ao se separar as lentes objetiva e ocular de uma distância  $L + f_{\text{ocu}} + f_{\text{obj}} = 16 \text{ cm} + 7,5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm} = 26,0 \text{ cm}$ , o fator de amplificação global será -21,3.

(b)

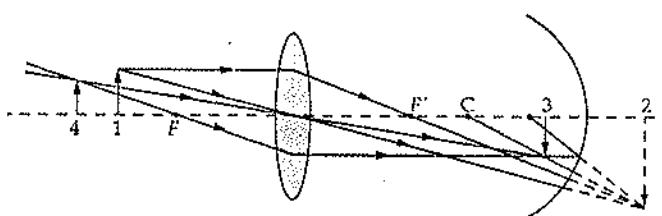


111. 3,70 m  
 113. (a) 9,52 cm  
 (b)  $\sim 1,19$   
 (c)



115. (a) 21,3 cm  
 (b) 79,2 cm

117. 0,0971 m/s  
 119. (a) 22,5 cm  
 (b) 18,0 cm  
 (c)



Para ver essa imagem, o olho deve estar à esquerda da imagem 4.

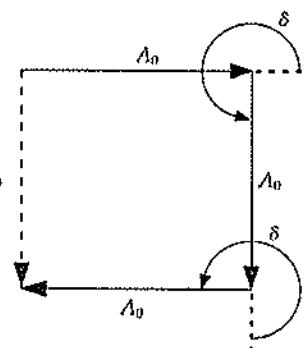
121. 36,8 cm  
 123. (a) A imagem final está a 0,8 cm atrás da superfície do espelho.  
 (b) A imagem final está na superfície do espelho.

## Capítulo 33

- A energia é distribuída de forma não-uniforme no espaço; em algumas regiões a energia está abaixo da média (interferência destrutiva), em outras ela é maior do que a média (interferência construtiva).
- O espaçamento do ar entre o vidro plano e as lentes é aproximadamente proporcional ao quadrado do diâmetro  $d$  do anel. Conseqüentemente, a separação entre os anéis adjacentes é proporcional a  $1/d$ .
- Se o filme for espesso, as diversas cores (isto é, os diferentes comprimentos de onda) resultarão em interferências construtiva e destrutiva ao longo da espessura. Conseqüentemente, o que se observa é a intensidade da luz branca refletida.
- Os primeiros zeros na intensidade ocorrem para ângulos dados por  $\sin \theta = \lambda/a$ . Assim, diminuindo  $a$ , o ângulo  $\theta$  aumenta e o padrão de difração fica mais amplo.
- (a)
- (a) Falso  
 (b) Verdadeiro  
 (c) Verdadeiro  
 (d) Verdadeiro  
 (e) Verdadeiro
- 3,50  $\mu\text{m}$
- $\theta_{\text{vermelho}} \approx 1,82^\circ$ ;  $\theta_{\text{azul}} \approx 1,26^\circ$ .
- (a) 300 nm  
 (b)  $135^\circ$
- $164^\circ$
- $5,46 \mu\text{m} < d < 5,75 \mu\text{m}$
- (a) 600 nm  
 (b) Pela tabela, pode-se perceber que os únicos comprimentos de onda no espectro visível são 720 nm, 514 nm e 400 nm.  
 (c) Pela tabela, pode-se perceber que os comprimentos de onda que faltam no espectro visível são 720 nm, 514 nm e 400 nm.
- 476 nm
- (c) O padrão transmitido é complementar ao padrão refletido.  
 (d) 68 franjas claras  
 (e) 1,14 cm  
 (f) O comprimento de onda da luz no filme será  $\lambda_s/n = 444 \text{ nm}$ .

A separação entre as franjas é reduzida, e o número de franjas que serão vistas é aumentado de um fator  $n = 1,33$ .

- 0,535 nm; 0,926 nm
- 4,95 mm
- (a) 50,0  $\mu\text{m}$   
 (b) Não a olho nu. A separação é muito pequena para ser observada a olho nu.  
 (c) 0,500 mm
- 625 nm e 417 nm
- (a) 0,600 mrad  
 (b) 6,00 mrad  
 (c) 60,0 mrad
- (a) 1,53 km  
 (b) 459 m  
 (c)  $1,1 \times 10^{-7}$   
 (d)  $1,21 \times 10^{-14}$
- (a) 20,0  $\mu\text{m}$   
 (b) 9
- Existem oito franjas de interferência em cada lado do máximo central. A difração secundária máxima tem a metade da largura da difração central. Logo, ela terá oito interferências máximas.
- 3,61  $\sin(\omega t - 56,3^\circ)$
- 0,0162  $I_0$
- (b) 6,00 mm. A largura para as quatro fontes é igual à metade da largura para as duas fontes.
- (a)
 
 (b)  $5,56 \text{ mW/m}^2$
- (a) 8,54 mrad  
 (b) 6,83 cm
- 7,00 mm
- 484 m
- $5,00 \times 10^9 \text{ m}$
- 86,9 mrad; 82,1 mrad
- 40,6°; 38,0°
- 30,0°
- Como  $m_{\text{máx}} = 2,98$ , pode-se ver o espectro completo apenas para  $m = 1$  e 2. Como  $700 \text{ nm} < 2 \times 400 \text{ nm}$ , não há superposição do espectro de segunda ordem com o espectro de primeira ordem; todavia, há superposição de comprimentos de onda longos no espectro de segunda ordem com comprimentos de onda curtos no espectro de terceira ordem.
- (a)  $y_1 = 0,364 \text{ m}$ ;  $y_2 = 0,802 \text{ m}$   
 (b)  $\Delta y = 88,4 \mu\text{m}$   
 (c) 8000
- $R = 3,09 \times 10^5$ ;  $n = 5,15 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$
- (a)  $n = 750 \text{ cm}^{-1}$



- (b) 4,20 cm; 12,6 cm
75. (a)  $\phi_m = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left( m \frac{\lambda}{d} \right)$   
(b) 32,1°
77. (a) 0,150 nm  
(b)  $3,33 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$
79. 1,68 cm
81. 0,130 mrad
85. (a) 97,8 nm  
(b) Não, porque 180 nm não estão na faixa visível do espectro.  
(c) 0,273; 0,124
87. 12,3 m

# Índice

## A

Aberração, 431  
 cromática, 432  
 esférica, 410, 431  
 Absorção ressonante, 369  
 Acionamento do motor de um carro (chupeta), 165  
 Ampère, 231  
 Ampère, André-Marie, 218  
 Amperímetros, 170  
 Ampliadores simples, 436-438  
 Amplificação lateral, 415  
 Analisador, 391  
 Anéis de Newton, 457  
 Ângulo  
 crítico, 384  
 de incidência, 380  
 Antenas de rádio, grande rede de, 476  
 Aquecimento por efeito Joule, 153  
 Arco elétrico, 94  
 Arco-íris  
 cálculo do raio angular do, 389  
 como dispersão, 388  
 Aston, Francis William, 200  
 Átomos de hidrogênio  
 energia potencial do, 77  
 momento de dipolo induzido no, 132  
 Auto-indutância, 278

## B

Balança de corrente, 231  
 Bateria(s)  
 acionando o motor de partida de um carro, 165  
 capacitores  
 conectados a uma, 114  
 desconectados de uma, 114  
 carregando um capacitor de placas paralelas com, 114  
 fem (força eletromotriz) e, 154-157  
 ideais, 154  
 reais, 155  
 resistência interna das, 155  
 tensão  
 entre os terminais de um circuito aberto, 118  
 nos terminais das, 117  
 Biot, Jean-Baptiste, 218  
 Birrefringência, 394, 396  
 Bremsstrahlung (radiação de frenagem), 345  
 Brewster, David, 393

## C

Cabo coaxial, 112  
 Campo(s)  
 cruzados, 197  
 elétrico(s)  
 cálculo(s)  
 a partir da lei de Coulomb, 35-43  
 a partir da lei de Gauss, 47-55

do potencial elétrico a partir dos, 80-82  
 corrente de acionamento, 152  
 da Terra, 58  
 definição, 112  
 descontinuidade de  $E_x$  em uma superfície carregada, 55  
 devidos a duas cargas iguais e opostas, 15  
 devidos a um sistema de cargas puntiformes, 13  
 diferença de potencial e, 75  
 dipolos elétricos nos, 23  
 e magnéticos cruzados, 197  
 elétroto  
 movendo-se paralelo a um campo elétrico uniforme, 20  
 movendo-se perpendicularmente a um campo elétrico uniforme, 21  
 em um dielétrico, 125  
 em uma impressora de jato de tinta, 22  
 em uma linha que une duas cargas positivas, 13  
 exemplos na natureza, 12  
 gráfico do módulo em função da distância dos, 39  
 induzido não-conservativo, 266  
 lei de Coulomb para os campos elétricos devidos a uma carga puntiforme, 13  
 movimento de cargas puntiformes nos, 20-23  
 nas proximidades e afastados de um segmento infinito carregado, 38  
 no eixo y devido a uma carga puntiforme no eixo x, 14  
 nos planos infinitos carregados, 48  
 para várias cargas uniformes  
 devido a dois planos infinitos, 48  
 devido a um plano infinito carregado, 42  
 devido a um segmento carregado e a uma carga puntiforme, 39  
 devido a um segmento de reta carregada uniformemente, 36-37  
 devido a um segmento infinito carregado, 37  
 devida a uma carga de linha de comprimento infinito, 54  
 devida a uma casca esférica fina carregada, 50-52  
 devida a uma distribuição contínua de carga, 34  
 devida a uma esfera carregada uniformemente, 52  
 nas duas faces de um disco, 59-61  
 simetria esférica dos, 49  
 simetria plana dos, 48  
 sobre o eixo de um anel carregado, 40  
 sobre o eixo de um disco, 42  
 sobre o eixo de um disco carregado uniformemente, 41

sobre o eixo de um segmento infinito carregado, 37  
 produzido por dipolo elétrico oscilante, 346  
 magnético(s)  
 cálculo da carga móvel, 224  
 campo de dipolo magnético sobre o eixo do dipolo, 222  
 da Terra, 190  
 de cargas móveis pontuais, 219  
 dentro de uma toróide, 235  
 dentro e fora de um fio, 234  
 devido à corrente em um fio reto, 227  
 devido à corrente em um solenóide, 225  
 devido a dois fios paralelos, 229  
 devido a um elemento com corrente (lei de Biot-Savart), 220  
 devido a uma espira com corrente, 221  
 em um elemento com corrente, 193  
 energia potencial de um dipolo magnético nos, 205  
 entre fios paralelos, 230  
 fens induzidas e correntes induzidas com a variação dos, 262  
 força  
 em um fio curvo, 194  
 exercida por, 190-195  
 sobre cargas em movimento, 191  
 sobre fios retos, 194  
 lei de Ampère sobre, 233-237  
 medidos em gauss, 191  
 movimento de uma carga pontual nos, 195-202  
 no centro  
 de um solenóide, 227  
 de uma espira com corrente, 221  
 de uma espira quadrada com corrente, 229  
 nos segmentos de fios condutores de corrente, 193  
 primeiros conhecimentos sobre, 218  
 regra da mão direita para a determinação do sentido da força proveniente dos, 191, 228  
 sobre o eixo de uma espira, 223  
 com corrente, 222  
 torque sobre uma barra magnética, 224  
 remanescente, 245  
 Capacitância  
 capacitores cilíndricos e a expressão da, 111  
 de um condutor, 105  
 definição, 109  
 efeito dielétrico na, 125  
 equivalente, 119  
 utilizada no teclado dos computadores, 116  
 Capacitores  
 carregando, 173-176  
 com placas paralelas com uma bateria, 114  
 cascos, 128  
 cilíndricos, 111  
 combinação de, 118-124  
 conectados  
 em paralelo, 118

- em série, 119  
 conservação da energia no carregamento dos, 173-176  
 de placas paralelas, 110  
 descarregando os, 171-173  
 descrição, 106, 110  
 dielétricos utilizados em placas paralelas, 126  
 em série  
     e em paralelo, 123  
     rearranjados em paralelo, 122  
 energia  
     armazenada nos, 113-117  
     do campo eletrostático produzida durante o carregamento dos, 116  
 garrafa de Leyden, 105  
 utilizando a fórmula de equivalência dos, 122  
**Carga(s)**  
 de prova, 12  
 elétrica. *Veja também Circuitos*  
     conservação da, 3  
     Descrição, 2  
     dois corpos que se repelem ou se atraem, 2  
     quantização, 3  
     unidade fundamental da, 3  
 pontuais  
     campo magnético de, móveis, 219  
     em movimento na presença de um campo magnético, 195-202  
 puntiformes  
     campo elétrico  
         devido a um segmento carregado e, 39  
         no eixo y devido a cargas puntiformes no eixo x, 14  
     em movimento na presença de campos elétricos, 20-23  
     energia potencial eletrostática de um sistema de, 107  
     lei de Coulomb para o campo elétrico devido a, 13  
     linhas de campo elétrico  
         devido a duas cargas positivas, 17  
         devido a uma única carga positiva, 17  
     no centro da cavidade de uma casca condutora esférica, 58  
     potencial elétrico devido a um sistema de, 75-80  
**Carregamento por indução**, 5  
**Ciclotron**, 201  
**Cinturões de Van Allen**, 197  
**Círculo(s)**. *Veja também Carga elétrica*  
 auto-indutância, 278  
 com uma única malha, 163-166  
     aplicação das regras de Kirchhoff, 167  
     círculo com três ramos, 168  
     procedimentos gerais de análise, 168  
     regra do sinal para a variação no potencial entre os terminais de um resistor, 166  
 constante de tempo dos, 284  
 de corrente alternada, 301-326  
     indutores nos, 306-308  
     nos capacitores, 308  
     reatância  
         capacitiva, 309  
         indutiva nos, 307  
 energia, 153-157  
     magnética dos, 281-283  
 indutância mútua dos, 280  
**LC**, 312-315  
**RC**, 171-176  
 regras de Kirchhoff  
     para múltiplas malhas, 166-170  
     para os nós, 163-166  
**RL**, 283-288
- constante de tempo dos, 284  
 correntes inicial e final, 286  
 energia dissipada, 286  
 regra de Kirchhoff das malhas aplicada aos, 283  
**RLC**, 312-323  
 com fontes de energia  
     corrente, fase e potência com os elementos em série, 319  
     em série, 315-317, 319  
     filtro passa-baixa, 321  
     ressonância, 317-320  
     sintonia FM, 322  
 em paralelo, 323  
 excitados em série, 315-323  
 fator  
     de potência do, 318  
     Q para, 318  
**LC e**, 312-315  
**Círculo de menor confusão**, 431  
**Combinação de lentes**  
     imagens produzidas pela, 428-430  
     por duas lentes, 430  
     por uma segunda lente, 429  
     por lentes compostas, 431  
**Comprimento**  
     de coerência, 456  
     focal, 412  
**Condutores**  
     aterrados, 6  
     capacitância dos, 105  
     carga na superfície dos, 57  
     duas esferas condutoras carregadas, 95  
     energia potencial eletrostática de um sistema de, 108  
     equilíbrio eletrostático dos, 57  
     polarizados, 6  
**Constante**  
     de Coulomb  
         Descrição, 7  
         permissividade do vácuo e a, 46  
     de tempo, 172  
         de um circuito, 284  
     de Von Klitzing, 209  
**Corrente(s)**  
     alternada (ca), 302  
     em um resistor  
         Descrição, 303  
         forma de onda em dente de serra, 306  
         potência média liberada pelo gerador, 305  
         valores da raiz média quadrática (rms), 304  
     de deslocamento de Maxwell  
         cálculo da, 341  
         definição da, 339  
         generalizada a partir da lei de Ampère, 340  
     elétrica  
         definição, 144  
         gerada por um campo elétrico, 152  
         relação entre velocidade de migração e, 146  
     induzidas, 261  
     parasitas, 277  
**Coulomb**, Charles, 6  
**Coulomb (C)**, 3  
**Critério para resolução de Rayleigh**, 475  
**Curva(s)**  
     de histerese, 245  
     de ressonância, 318
- D**
- Decaimento exponencial, 172-173  
 Deflexão de um feixe de elétrons, 199  
 Densidade
- de energia eletromagnética, 283  
 do número dos portadores de carga na prata, 208  
 linear de carga, 34  
 superficial de carga, 34  
**Derivada**, 515  
**Descontinuidade de E**, 55  
**Diagramas de raios**  
     para espelhos, 414-418  
     para lentes, 426-428  
**Dielétrico(s)**  
     campo elétrico no interior de um, 125  
     constants e resistências elétricas de diversos materiais, 126  
     Descrição, 124  
     efeito na capacidade, 125  
     energia armazenada na presença de um, 128-130  
     permisividade dos, 125  
     ponto de vista molecular, 130-134  
     utilizados nos capacitores de placas paralelas, 126  
**Diferença**  
 de fase  
     devida à reflexão, 455  
     devida a uma diferença de caminho, 455  
**de potencial**  
     campos elétricos e, 75  
     continuidade de V e a, 73-74  
     definição, 73  
     dispositivos de medição, 170  
     entre os terminais de um indutor, 280  
     nos circuitos de uma única malha, 164  
     obtenção de V para campos elétricos constantes, 75  
     para deslocamentos infinitesimais, 73-74  
**Diffração**  
     coerência e fase da, 455  
     definição de, 454  
     hologramas, 480  
     resolução e, 475-477  
**Dioptria (D)**, 425  
**Dipolos elétricos**  
     Descrição, 16  
     fluxo através de uma superfície fechada envolvendo, 43  
     linhas de campo elétrico para os, 18, 23  
     potencial devido a, 79  
**Disco rígido/armazenamento magnético**, 246-247  
**Dispersão**  
     arco-íris, 388  
     definição de, 387  
**Distorção**, 431  
**Domínio magnético**, 243-244  
**Dualidade onda-partícula**, 366
- E**
- Efeito Hall**  
     constante de von Klitzing, 209  
     Descrição, 207  
     quântico, 209  
**Meissner**, 288  
**piezelétrico**, 133  
**Eixo**  
     de transmissão, 391  
     ótico, 394  
**Elétrons**  
     medida de Thomson da relação  $q/m$  para os, 198  
     momento(s) magnético(s)  
         atômicos devidos ao movimento orbital dos, 240  
         devido à rotação dos, 241

- movendo-se em uma trajetória circular no campo magnético, 195  
movendo-se paralelos a um campo elétrico uniforme, 20  
movendo-se perpendiculares a um campo elétrico uniforme, 21
- Eletroscópio, 5**
- Eletrostática, 2**
- Emissão**  
espontânea, 368  
estimulada, 369
- Energia.** Veja também Energia cinética; Potência; Ondas  
armazenada  
na presença de um dielétrico, 128-130  
no capacitor, 113-117  
no indutor, 282  
tensão da bateria, potência e, 156  
cinética. Veja também Energia; Potência de um próton acelerado, 202  
energia potencial dos produtos da fissão nuclear, 77  
magnética, 281-283  
definição, 281  
densidade de, 282  
nos circuitos elétricos, 153-157  
ondas eletromagnéticas, 349-351  
potencial  
de dipolo  
em um campo elétrico, 23  
magnético, 205  
na presença de um campo elétrico, 23  
do átomo de hidrogênio, 77  
dos produtos da fissão nuclear, 77  
eletrostática, 106-109  
de um sistema, 106  
de cargas puntiformes, 107  
de condutores, 108  
descrição, 106  
perda por unidade de tempo, 153  
torque e, 24  
Energização de uma espira, 284
- Equação**  
das lentes finas, 423  
de fabricação de lentes, 423, 424  
de Maxwell  
para ondas eletromagnéticas, 338  
visão geral, 342
- de onda**  
definição, 353  
derivação da, 353-357  
plana com polarização circular, 358  
polarizada plana linearmente, 357  
do espelho, 413
- Equilíbrio eletrostático, 57**
- Espalhamento**  
Anti-Stokes Raman, 369  
das fontes de luz, 369  
de Rayleigh, 369  
inelástico, 369  
polarização por, 393
- Especro**  
contínuo, 368  
de luz, 366  
de primeira ordem, 479  
de segunda ordem, 479  
eletromagnético, 344  
em linha, 367
- Espectrômetro de massa, 200**
- Espelhos.** Veja também Imagens; Reflexão  
convexos, 416  
de Lloyd, 462  
determinação da região da imagem dos, 417  
diagramas de raios para os, 414-418  
esféricos, 409-414  
imagens nos, côncavos, 413  
obtenção de aberrações com o uso de, 431
- planos, 407-409  
Estados metaestáveis, 370  
Estrutura molecular do dielétrico, 130-134
- Exponentes, 501**  
funções exponenciais, 503-504  
logaritmos, 502-503
- F**
- Faraday, Michael, 261  
Fasores, 311  
Fator  
de potência de um circuito RLC, 318  
*Q*, 318  
Feixe de fôtons em um laser, 372
- Fem (força eletromotriz)**  
baterias e a, 154-157  
definição da, 154-157  
induzida, 261, 264-267  
em espira circular  
I, 265  
II, 265  
lei de Faraday e a, 264-267  
no circuito estacionário pela variação do campo magnético, 265  
por movimento, 272-277  
arrasto magnético, 275  
carga total através de uma espira, 272  
condutor em forma de U e barra deslizante, 275  
de uma haste, 274  
definição, 262, 272  
diferença de potencial entre as extremidades de uma haste em movimento, 274
- Fibra ótica, 386**
- Filme de ar em forma de cunha, 458**
- Fizeau, Armand, 375, 378**
- Fluxo**  
elétrico  
descrição, 44  
e carga elétrica referente a uma superfície fechada imaginária, 46  
magnético  
através de um solenóide, 263  
definição, 262
- Flúxon, 289**
- Foguete a laser, 352**
- Fonte(s)**  
de fem, 154  
de luz  
absorção  
e emissão ressonante, 370  
espalhamento, emissão espontânea e emissão estimulada, 369  
emissão espontânea, 368  
espectro  
contínuo das, 368  
de linha, 367  
lasers, 371-374  
luminosas, lasers, 479
- Força(s).** Veja também Potência  
dos elétrons no hidrogênio, 8  
equilíbrio de, magnética, 232  
exercida por um campo magnético, 190-195  
exercidas por um sistema de cargas, 9  
lei de Coulomb sobre, 6-11
- Forma de onda dente de serra, 306**
- Foucault, Jean, 375**
- Franjas (interferência)**  
definição, 457  
distância da tela à *m*-ésima franja clara, 460  
em linhas retas, 459  
espaçamento das fendas, 461
- Franklin, Benjamin, 2, 105**
- Freqüência do ciclotrôn, 196**
- Função potencial-elétrico**
- devida a um plano infinito carregado, 85-87  
devida a um segmento de reta infinito carregado, 89  
interna e externa a uma casca esférica carregada, 87-89  
sobre o eixo de um anel carregado, 82-83  
sobre o eixo de um disco uniformemente carregado, 83-85
- G**
- Galileu, 374, 442**
- Galvanômetro, 170**
- Garrafa de Leyden, 105**
- Gauss, C. F., 191**
- Gerador de Van de Graaff, 92**
- Gilbert, William, 190**
- Gradiente, 80**
- H**
- Henry, Joseph, 261**
- Herschel, Friedrich Wilhelm, 442**
- Histerese, 245**
- Hologramas, 480**
- Hubble, Edwin Powell, 442**
- I**
- Imagem(ns).** Veja também Espelhos; Reflexão; Refração  
aberração das, 431  
amplificação lateral da, 415  
cálculo da geometria das, 411  
determinação da região de visualização das, 417  
formadas  
pelas lentes, 427  
por dois espelhos planos, 409  
por refração, 418-422  
instrumentos óticos, 433-443  
inversão de profundidade, 408  
no espelho côncavo, 413  
óticas  
espelhos, 407-418  
lentes, 418-423  
produzidas pela combinação de lentes, 428-430  
reais, 410  
virtuais, 407-408  
vistas  
de um aquário, 420  
de um galho acima da cabeça, 421
- Imãs**  
torque em uma barra imantada, 224  
torques sobre espiras com corrente, 202-206
- Impressora a jato de tinta, 22**
- Índice de refração, 380**
- Indução**  
auto-indutância, 278  
carregando por, 5  
descoberta da, magnética, 262  
málua, 280  
via aterrramento, 6
- Indutores**  
diferença de potencial entre os terminais dos, 280
- Energia**  
armazenada nos, 282  
quando a corrente final é atingida, 285
- Nos circuitos de corrente alternada, 306-308**
- Instrumentos óticos**  
amplificação angular de um amplificador simples, 437  
amplificador simples, 436  
microscópio composto, 438-440  
o olho, 433-436

óculos de leitura, 435  
telescópio, 440  
Integração, revisão dos processos de, 518-519  
Integral de circulação, 233  
Intensidade de luz transmitida, 383  
Interação  
de câmbio, 243  
fóton-átomo, 369  
Interferência nos filmes finos, 456-459  
Inversão da profundidade, 408  
Isolantes, 5  
Isótopos  
de níquel, separação das, 201  
espectrômetro para medição das massas das, 200

**K**

Kirchhoff, Gustav, 367  
Klitzing, Klaus von, 209

**L**

Largura de ressonância, 318  
Lasers, 371-374, 376  
a rubi, 371-372  
de argônio, 376  
de criptônio, 376  
hélio-neônio, 372  
Lawrence, E. O., 201  
Lei  
da conservação da carga elétrica, 3  
da reflexão, 380  
da refração, 381  
de Ampère  
corrente de deslocamento de Maxwell, forma generalizada da, 340  
visão geral, 233-237  
de Biot-Savart, 220  
de Coulomb  
cálculo do campo elétrico a partir da, 35-43  
dedução da lei de Gauss a partir da, 49, 61, 343  
descrição da, 7  
força  
elétrica no hidrogênio e a, 8  
resultante e a, 9  
resultante em duas dimensões e a, 10  
para o campo elétrico devido a uma carga puntiforme, 13  
relação entre forças elétrica e gravitacional e a, 8  
de Curie, 243  
de Faraday  
descrição, 264, 340  
fem induzida e a, 264-267  
de Gauss  
cálculo do campo elétrico a partir da, 47-55  
dedução a partir da lei de Coulomb, 49, 61, 343  
descrição, 43  
do magnetismo, 232, 343  
enunciado quantitativo da, 45-47  
de Lenz  
corrente induzida e a, 269  
enunciado, 267  
alternativo da, 268  
espira móvel e a, 270  
de Malus, 391  
de Ohm, 148-152  
de refração de Snell, 381  
Lentes  
aberração obtida no uso de, 431  
ampliador simples, 436  
combinação de, 428-430

compostas, 431  
comprimento focal do sistema  
córnea-cristalino do olho, 434  
convergentes, 424  
diagrama de raios para, 426-428  
finas, 422-426  
através da refração, 422-426  
convergentes (positivas), 424  
dioptrias (D), 425  
equação, 423  
dos fabricantes de lentes, 423, 424  
potência das, 425  
imagens formadas por refração, 418-422, 427  
microscópio composto de, 438-440  
óculos de leitura, 435  
positivas, 424  
telescópio, 440

Linha(s)  
de campo elétrico  
de um campo uniforme que atravessa a área de uma superfície, 44  
descrição, 17  
devidas a duas cargas puntiformes positivas, 17  
devidas a duas esferas condutoras carregadas, 19  
devidas a um dipolo elétrico, 18, 23  
devidas a uma única carga puntiforme positiva, 17  
nas proximidades de um longo fio, 37  
para um cilindro e uma placa com cargas opostas, 59  
regras para a construção das, 18  
uniforme perpendicular a uma superfície, 44  
de campo magnético, 190, 346  
espectral, 479

Livingston, M. S., 201

Luz. *Veja também Reflexão; Refração*  
comprimento coerente da, 456  
de sódio, 479  
dualidade onda-partícula, 366  
espectro da, 366  
fontes de, 367-374  
interferência e difração, 454-481  
negra (ultravioleta), 370  
polarização, 390-396  
propagação da, 379  
ultravioleta (negra), 370  
velocidade da, 374-379  
visível, 344

**M**

Magnetismo  
aplicação da lei de Curie, 243  
diamagnético, 247-249  
ferro e saturação, 241  
lei de Gauss da, 232, 343  
material  
ferromagnético, 237, 243-247  
paramagnético, 237, 242  
momentos magnéticos atômicos, 239  
na matéria, 237-249  
susceptibilidade magnética da, 238  
Magnetização de saturação, 241  
Magneton de Bohr, 240  
Maiman, Theodore, 371  
Malus, E. L., 392  
Maricourt, Pierre de, 190  
Mark, Robert, 395  
Materia  
diamagnética, 237, 247-249  
ferromagnética, 237, 243-247  
magneticamente dura e macia, 246-247  
magnetismo na, 237-249  
paramagnética, 237, 242  
permeabilidade relativa da, 239

susceptibilidade magnética da, 238  
**Materiais**  
diamagnéticos, 237, 247-249  
ferromagnéticos, 237, 247-249  
fosforescentes, 370  
magneticamente  
duros, 246-247  
macios, 246-247  
paramagnéticos, 237, 242  
Máximo de difração central, 463  
Medições de Thomson para  $q/m$ , 198  
Michelson, A. A., 377  
Microscópio composto, 438-440  
Miragens, 387  
Moléculas  
não-polares, 24  
polarizadas, 24  
**Momento(s)**  
de dipolo  
elétrico, 16  
magnético, 203  
magnéticos atômicos  
devido a rotação do elétron, 241  
devido ao movimento orbital do elétron, 240  
magnetização de saturação para o ferro, 241  
magneton de Bohr, 240  
relação entre quantidade de movimento angular e, 240  
visão geral, 239  
Movimento. *Veja também Oscilação; Rotação*  
de cargas pontuais  
espectrômetro de massa, 200  
freqüência de ciclotron, 196  
no campo magnético, 195-202  
período de ciclotron, 196  
segunda lei de Newton e, 195  
seletor de velocidade, 197  
de cargas puntiformes, 20-23  
medições de Thomson para  $q/m$ , 198  
do dipolo elétrico no forno de microondas, 24

**N**

Nanolasers, 376  
Newton, Sir Isaac, 366

**O**

Observatório  
de Whipple, 442  
de Yerkes (Universidade de Chicago), 441  
Keck, 443  
Lick, 442  
Ohmímetros, 170  
Olho  
comprimento focal do sistema  
córnea-cristalino, 434  
hipermetropia, 433  
imagens vistas através do, 433  
Ondas. *Veja também Energia eletromagnética*  
antena de dipolo elétrico/antena em loop para detecção das, 347  
energia e quantidade de movimento nas, 349-351  
equação(ões)  
de onda para as, 353-358  
de Maxwell para, 338  
espectro eletromagnético, 344  
foguete a laser, 352  
freqüências das ondas  
eletromagnéticas em rádios e televisores, 346  
intensidade das, 349

- polarização das, 390  
pressão de radiação nas, 350  
produção das, 345  
radiação do dipolo elétrico, 345  
velocidade das, 339  
infravermelhas, 344  
plana, 353
- Oscilação. Veja também Movimento Oscilador LC, 314
- P**
- Padrão(s)  
de difração  
cálculo para múltiplas fendas, 472  
fenda única, 463-466  
Fraunhofer e Fresnel, 465, 473-474
- de interferência  
de duas fendas, 459-461  
cálculo da intensidade, 461  
distância da tela à  $m$ -ésima franja clara, 460  
interferências máxima e mínima, 459-460  
visão geral, 459-461
- e difração  
de duas fendas, 465  
de múltiplas fendas, 472  
fazores para somar ondas harmônicas/cálculos, 466-473  
três ou mais fontes igualmente espaçadas, 467
- Partículas  
ciclotron para acelerar, 201  
movimento em um campo magnético, 197
- Perdas na transmissão, 326
- Período do ciclotron, 196
- Permeabilidade  
de um material, 246  
do espaço livre (vácuo), 219  
relativa de um material, 239
- Permissividade do espaço livre (vácuo), 46
- Placa  
de meia onda, 396  
de quarto de onda, 396
- Plano  
de incidência, 380  
focal, 412
- Poder de resolução de uma rede de difração, 480
- Polarização  
eixos de transmissão de duas películas polarizantes, 395  
elíptica, 390  
intensidade transmitida, 392  
linear, 390  
plana, 390  
por absorção, 391  
por birefringência, 394-396  
por espalhamento, 393  
por reflexão, 392  
visão geral, 390
- Ponto focal, 412
- Potência. Veja também Energia; Forças; Energia cinética  
das lentes, 425  
dissipada em um resistor, 153  
fornecida a um dispositivo ou segmento, 153  
fornecida por uma fonte de fém, 155  
tensão da bateria, energia armazenada e, 156
- Potencial  
de Coulomb, 76  
elétrico  
ao longo do eixo  $x$ , 79  
cálculo  
do campo elétrico a partir do, 80-82  
para distribuição contínua de carga, 82-90  
devido
- a duas cargas puntiformes, 78  
a um dipolo elétrico, 79  
a um sistema de cargas puntiformes, 75-80  
a uma carga puntiforme, 75  
do átomo de hidrogênio, 77
- Princípio  
de Fermat, 380, 397  
de Huygen, 379, 396
- Propagação da luz  
princípio de Fermat, 380, 397  
princípio de Huygen, 379, 396
- Próton(s)  
energia de, acelerados, 202  
força sobre um, movendo-se para o norte, 192
- Q**
- Quantização do fluxo, 289
- R**
- Radiação de um dipolo elétrico, 345
- Raios(s)  
central, 426  
focal, 414-426  
paralelo, 414, 426  
paraxiais, 410  
radial, 414  
ultravioleta, 344
- Rayleigh, Lord, 369
- Realância  
capacitiva, 309  
indutiva, 307
- Reator de fusão-teste de Tokamak, 236
- Receptor FM, 322
- Rede(s)  
crystalina (lattice), 5  
de difração, 477-481
- Reflexão. Veja também Imagens; Espelhos  
aplicação da, às fibras ópticas, 386  
convenção de sinais para, 415  
de ondas planas provenientes de espelhos convexos, 413  
derivação das leis de, 396-399  
diferença de fase devida a, 455  
difusa, 382  
intensidade relativa da luz refletida, 383  
interna total, 384  
mecanismo físico da, 381  
na superfície água-ar, 385  
por polarização, 392  
princípio  
de Fermat, 380, 397  
de Huygen, 379, 396  
especular, 382
- Refração. Veja também Imagens; Luz  
convenção de sinais para, 419  
dedução das leis de, 396-399  
definição, 380  
dispersão, 387-390  
do ar para a água, 383  
imagens formadas por, 418-422, 427  
índice de, 380  
lei da, 381  
de Snell, 381  
lentes finas, 422-426  
mecanismo físico da, 381  
miragens, 387  
princípio  
de Fermat, 380, 397  
de Huygen, 379, 397
- Região eqüipotencial, 90
- Regra(s)  
da mão direita  
campo magnético, 228  
força magnética, 191  
das malhas, 163, 283
- de Kirchhoff  
aplicadas a circuitos com múltiplas malhas, 167  
circuitos  
com múltiplas malhas e as, 166-170  
com uma única malha e as, 163-166  
descrição, 163  
dos nós, 163
- Resistência  
calculada por unidade de comprimento de um fio, 151  
coeficiente de temperatura da resistividade, 150  
definição, 149  
dielétrica, 94  
equipamentos de medida, 170  
materiais ôhmicos e não-ôhmicos e, 149  
resistência interna de baterias, 155
- Resistores  
combinações, 157-163  
de combinações, 161  
em série e em paralelo, 160  
em paralelo, 158-159  
em série, 157, 159  
potência dissipada em um resistor, 153  
queima de um fusível, 162  
regra dos sinais para variação do potencial entre os terminais dos, 166
- Resolução  
critério de Rayleigh para, 475  
problema sobre, 476
- Ressonância  
no circuito RLC em série com fonte de alimentação, 320  
visão geral, 317-319
- Reversibilidade, 413
- Rotação. Veja também Movimento
- Ruptura dielétrica, 94
- S**
- Savart, Félix, 218
- Série tribolétrica, 2
- Simetria  
cilíndrica, 54  
esférica, 49  
plana, 48
- Solenóides  
auto-indutância, 279  
campo magnético  
devido a corrente nos, 225  
no centro dos, 227  
com núcleo de ferro, 246-247  
fluxo magnético através dos, 263
- Supercondutores  
como diamagnéticos, 248  
efeito Meissner, 288  
propriedades magnéticas dos, 288  
quantização do fluxo, 289  
tipo  
I, 288  
II, 288
- Superfície(s)  
eqüipotenciais  
descrição, 90  
dois condutores esféricos carregados, 95  
gerador de Van de Graaff, 92  
na casca esférica oca, 91  
ruptura dielétrica em esferas carregadas, 94  
gaussiana, 47  
oticamente planas, 458
- Susceptibilidade magnética, 238
- T**
- Técnica de modelocking, 376
- Telescópio

astronômico, 441-443  
diagrama esquemático de um, 440  
espacial Hubble, 443  
visão geral, 440  
Temperatura de Curie, 244  
Tempo de coerência, 456  
Tensão  
de Hall, 207, 209  
entre os terminais de um circuito aberto, 118  
terminal, 117, 155, 156  
Toróide, 235  
Torques, exemplos, demonstrações de, 202-206  
Transformador, 323-326  
de uma campainha de porta, 325  
Tubo de raios catódicos (desenho esquemático), 20

## U

Unidade(s)  
de medidas, volt (V), 74  
fundamental de carga, 3

## V

Valor RMS (raiz média quadrática), 304  
Velocidade  
da luz  
exercício sobre conversão de unidades, 378  
método

de Fizeau para medição da, 375  
de Foucault para medição da, 375  
de Michelson para medição da, 377  
de Römer para medida da, 375  
principais concepções sobre, 374  
definição, 145  
determinação da, 146  
relação entre corrente e, 146

Volt (V), 74  
Voltímetros, 170

## W

Weber (Wb), 262

## Constantes Físicas\*

Constante de massa atômica	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	$1 \text{ u} = 1,660\,538\,73(13) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Número de Avogadro	$N_A$	$6,022\,141\,99(47) \times 10^{23} \text{ partículas/mol}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1,380\,6503(24) \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $8,617\,342(15) \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Magnéton de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	$9,274\,008\,99(37) \times 10^{-28} \text{ J/T} =$ $5,788\,381\,749(43) \times 10^{-5} \text{ eV/T}$
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987\,551\,788 \dots \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
Comprimento de onda de Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2,426\,310\,215(18) \times 10^{-12} \text{ m}$
Carga do elétron	$e$	$1,602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante dos gases perfeitos	$R$	$8,314\,472(15) \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K}) =$ $1,987\,2065(36) \text{ cal}/(\text{mol}\cdot\text{K}) =$ $8,205\,746(15) \times 10^{-2} \text{ L}\cdot\text{atm}/(\text{mol}\cdot\text{K})$
Constante de gravitação	$G$	$6,673(10) \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Massa do elétron	$m_e$	$9,109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg} =$ $0,510\,998\,902(21) \text{ MeV}/c^2$
Massa do próton	$m_p$	$1,672\,621\,58(13) \times 10^{-27} \text{ kg} =$ $938,271\,998(38) \text{ MeV}/c^2$
Massa do nêutron	$m_n$	$1,674\,927\,16(13) \times 10^{-27} \text{ kg} =$ $939,565\,330(38) \text{ MeV}/c^2$
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0$	$8,854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Constante de Planck	$h$	$6,626\,068\,76(52) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} =$ $4,135\,667\,27(16) \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
	$h = h/(2\pi)$	$1,054\,571\,596(82) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} =$ $6,582\,118\,89(26) \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Velocidade da luz	$c$	$2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5,670\,400(40) \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}^4)$

\*Os valores para essas e outras constantes podem ser encontrados no Apêndice B e também através da Internet na página <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. Os números entre parênteses representam as incertezas nos dois últimos dígitos. (Por exemplo, 2,04443 (13) significa  $2,04443 \pm 0,00013$ .) Os valores sem as incertezas são exatos. Os valores com reticências são exatos (como o valor de  $\pi$ , que é exatamente 3,1415 ...).

## Derivada e Integrais Definidas

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

Nas seis integrais  $a$  é uma constante positiva.

$$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{4}{a^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2} dx = \frac{2}{a}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

## Produtos Vetoriais

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

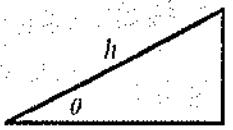
$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad (\hat{n} \text{ foi obtido utilizando a regra da mão direita})$$

Para dados adicionais, veja as tabelas indicadas a seguir:

- Tabela 21-1** A Série Triboelétrica, p. 2
- Tabela 21-2** Alguns Campos Elétricos Encontrados na Natureza, p. 12
- Tabela 24-1** Constantes Dielétricas e Resistências Dielétricas de Diversos Materiais, p. 126
- Tabela 25-1** Resistividades e Coeficientes de Temperatura, p. 150
- Tabela 25-2** Diâmetros e Áreas das Seções Transversais dos Fios de Cobre Comumente Utilizados, p. 151
- Tabela 27-1** Suscetibilidade Magnética de Vários Materiais a 20°C, p. 239
- Tabela 27-2** Valores Máximos de  $\mu_0 M$  e  $K_m$  para Alguns Materiais Ferromagnéticos, p. 245
- Tabela 30-1** O Espectro Eletromagnético, p. 344

## Geometria e Trigonometria

$C = \pi d = 2\pi r$	definição de $\pi$
$A = \pi r^2$	área do círculo
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	volume de uma esfera
$A = dV/dr = 4\pi r^2$	área da superfície de uma esfera
$V = A_{base}L = \pi r^2 L$	volume de um cilindro
$A = dV/dr = 2\pi rL$	área da superfície de um cilindro



$$o = h \sin \theta$$

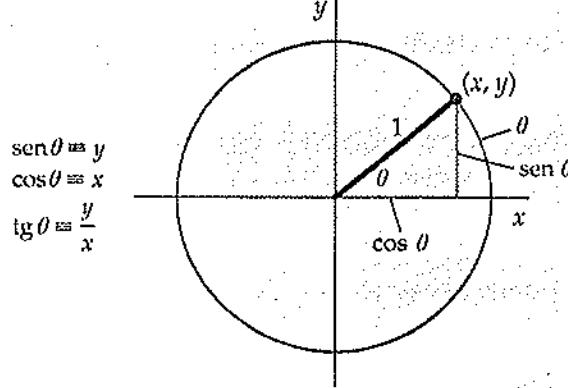
$$a = h \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin[\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos[\frac{1}{2}(A \mp B)]$$



Se  $|\theta| \ll 1$ , então

$$\cos \theta \approx 1 \text{ e } \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad (\theta \text{ em radianos})$$

## Polinômio de Segundo Grau

$$\text{Se } ax^2 + bx + c = 0, \text{ então } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Expansão Binomial

Se  $|x| < 1$ , então  $(1 + x)^n =$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Se  $|x| \ll 1$ , então  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Se  $|\Delta x|$  é pequeno, então  $\Delta F \approx \frac{dF}{dx} \Delta x$