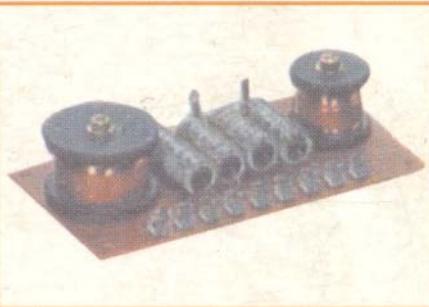
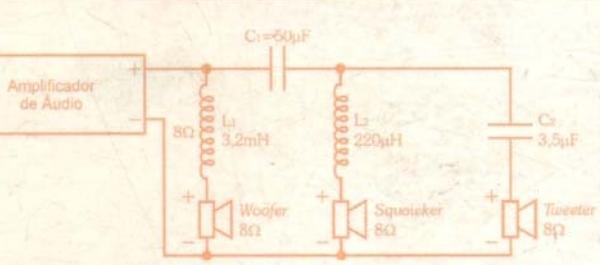


# CIRCUITOS ELÉTRICOS

Marco  
Markus

## Corrente Contínua e Corrente Alternada



Otávio Markus

C.A.

C.C.

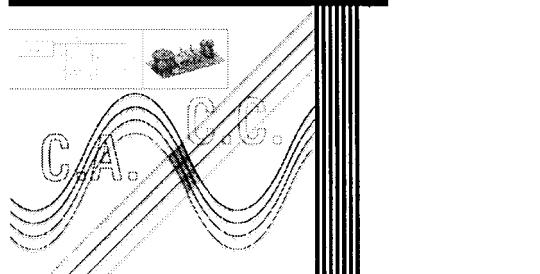
Teoria e Exercícios



*Otávio Markus*

# CIRCUITOS ELETRICOS

Corrente Contínua e  
Corrente Alternada



Ano: 2004 2003 2002 2001

Edição: 9 8 7 6 5 4 3 2 1

**Editora Érica Ltda.**

#### **Conselho Editorial:**

Diretor Editorial:	<i>Antonio Marco Vicari Cipelli</i>
Diretor Comercial:	<i>Paulo Roberto Alves</i>
Diretor de Publicidade:	<i>Waldir João Sandrini</i>
Editoração:	<i>Otávio Markus</i>
Capa:	<i>Rosana Ap. Alves dos Santos</i>
Desenhos:	<i>Maurício S. de França</i> <i>Pedro Paulo Vieira Herruzo</i> <i>Flávio Eugênio de Lima</i>
Revisão Interna:	<i>Érica Regina A. Pagano e Rosana Arruda da Silva</i>
Revisão Gramatical:	<i>Marlene Teresa Santin Alves</i>
Coordenação:	<i>Rosana Arruda da Silva</i>

# Índice Analítico

<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	01
1.1 Energia .....	01
1.2 Primeiro Contato com a Eletricidade .....	02
1.3 Segurança em Eletricidade .....	02
1.4 Simbologia .....	03
<b>Capítulo 2 - Princípios da Eletrostática .....</b>	05
2.1 Carga Elétrica.....	05
2.2 Eletrização dos Corpos.....	06
2.3 Campo Elétrico.....	07
2.4 Força Elétrica .....	08
2.5 Potencial Elétrico .....	09
<b>Capítulo 3 - Princípios da Eletrodinâmica.....</b>	13
3.1 Tensão Elétrica.....	13
3.2 Corrente Elétrica .....	15
3.3 Fontes de Alimentação .....	16
3.4 Bipolos Gerador e Receptor .....	18
3.5 Terra ( <i>GND</i> ) ou Potencial de Referência .....	18
3.6 Instrumentos de Medidas Elétricas .....	19
<b>Capítulo 4 - Resistência Elétrica e Leis Ohm.....</b>	25
4.1 Conceito de Resistência Elétrica .....	25
4.2 Primeira Lei de Ohm.....	26
4.3 Informações Adicionais sobre Resistências .....	27
4.4 Resistências Fixas .....	28
4.5 Resistências Variáveis.....	31
4.6 Ohmímetro .....	33
4.7 Segunda Lei de Ohm.....	34
4.8 Resistência x Temperatura .....	35
<b>Capítulo 5 - Potência e Energia Elétrica .....</b>	39
5.1 Conceito de Potência Elétrica .....	39
5.2 Conceito de Energia Elétrica .....	41
<b>Capítulo 6 - Leis de Kirchhoff e Associação de Resistores .....</b>	43
6.1 Elementos de um Circuito Elétrico .....	43
6.2 Leis de Kirchhoff .....	43
6.3 Associação de Resistores .....	44
6.4 Configurações Estrela e Triângulo.....	48

<b>Capítulo 7 - Divisores de Tensão e de Corrente Ponte de Wheatstone</b> .....	53
7.1 Divisor de Tensão .....	53
7.2 Divisor de Corrente .....	54
7.3 Ponte de Wheatstone .....	54
<b>Capítulo 8 - Geradores de Tensão e de Corrente</b> .....	59
8.1 Gerador de Tensão .....	59
8.2 Máxima Transferência de Potência .....	62
8.3 Gerador de Corrente .....	63
<b>Capítulo 9 - Metodologias de Análise de Circuitos</b> .....	67
9.1 Método da Superposição .....	67
9.2 Método de Thévenin.....	69
9.3 Método de Norton .....	71
9.4 Método de Maxwell .....	73
9.5 Verificação dos Resultados pelas Leis de Kirchhoff.....	76
9.6 Balanço Energético de um Circuito .....	77
<b>Capítulo 10 - Capacitores e Circuito <i>RC</i></b> .....	81
10.1 Conceito de Dispositivos Reativos.....	81
10.2 Capacitor e Conceito de Capacitância.....	81
10.3 Capacitores Fixos e Variáveis .....	84
10.4 Associação de Capacitores .....	86
10.5 Circuito <i>RC</i> de Temporização .....	88
10.6 Aplicações do Circuito <i>RC</i> .....	93
<b>Capítulo 11 - Indutores, Circuito <i>RL</i> e Relés</b> .....	99
11.1 Princípios do Eletromagnetismo .....	99
11.2 Indutor e Conceito de Indutância .....	102
11.3 Indutores Fixos e Variáveis .....	104
11.4 Associação de Indutores .....	105
11.5 Circuito <i>RL</i> de Temporização .....	106
11.6 Relés Eletromecânicos .....	111
<b>Capítulo 12 - Corrente Alternada</b> .....	117
12.1 Circuito Aplicativo em CA - DF-1 .....	117
12.2 Geração do Sinal Alternado .....	118
12.3 Parâmetros do Sinal Alternado.....	120
12.4 Fontes de Tensão Alternada .....	124
12.5 Instrumentos de Medida de Sinais CA .....	126
12.6 Operações Matemáticas com Sinais CA .....	128

<b>Capítulo 13 - Fundamentos de Circuitos CA .....</b>	135
13.1 Conceito de Impedância.....	135
13.2 Lei de Ohm para Circuito CA.....	136
13.3 Leis de Kirchhoff para Circuito CA .....	136
13.4 Associação de Impedâncias.....	137
13.5 Divisores de Tensão e de Correntes Alternadas.....	138
13.6 Resistor, Indutor e Capacitor em CC .....	139
13.7 Reatâncias Indutiva e Capacitiva .....	140
13.8 Resistor em Corrente Alternada .....	141
13.9 Indutor e Capacitor em Corrente Alternada .....	142
13.10 Análise das Reatâncias do DF - I .....	146
<b>Capítulo 14 - Circuitos RL e RC.....</b>	151
14.1 Circuitos RL e RC em Série .....	151
14.2 Circuitos RL e RC em Paralelo.....	156
14.3 Equivalência Série / Paralelo .....	161
14.4 Análise das Impedâncias do DF - I .....	162
<b>Capítulo 15 - Potência em Corrente Alternada .....</b>	169
15.1 Potência Instantânea.....	169
15.2 Potência em Números Complexos .....	171
15.3 Análise das Potências Ativa, Reativa e Aparente .....	173
15.4 Wattímetro .....	176
15.5 Correção do Fator de Potência .....	177
<b>Capítulo 16 - Modelamento de Indutores e de Capacitores Pontes de Impedância .....</b>	183
16.1 Definições .....	183
16.2 Modelamento do Indutor.....	184
16.3 Modelamento do Capacitor .....	189
16.4 Ponte Genérica e Condição de Equilíbrio .....	192
16.5 Ponte para Medir Indutância .....	193
16.6 Ponte para Medir Capacitância .....	194
<b>Capítulo 17 - Gerador de Tensão CA Real e Decibel .....</b>	199
17.1 Gerador de Tensão CA Real .....	199
17.2 Decibel .....	201
17.3 Diagramas de Bode .....	204
<b>Capítulo 18 - Circuitos RLC e de Sintonia .....</b>	207
18.1 Circuito RLC Série .....	207
18.2 Circuito RLC Paralelo .....	209
18.3 Conceito Físico de Ressonância.....	211
18.4 Circuito Série de Sintonia .....	213
18.5 Circuito Paralelo de Sintonia .....	216
18.6 Circuitos Práticos de Sintonia .....	221

<b>Capítulo 19 - Filtros Passivos e Circuitos de Pulso .....</b>	229
19.1 Conceitos e Tipos de Filtro .....	229
19.2 Filtros Passa Baixas - <i>RC</i> e <i>LR</i> .....	230
19.3 Filtros Passa Altas - <i>CR</i> e <i>RL</i> .....	235
19.4 Filtros Passa Faixa e Rejeita Faixa.....	240
19.5 Análise Final do Divisor de Freqüências <i>DF</i> - 1 .....	242
19.6 Projeto de um Divisor de Freqüências <i>Three Way</i> .....	246
19.7 Circuitos de Pulso - Diferenciador e Integrador.....	247
<b>Capítulo 20 - Sistema Trifásico .....</b>	253
20.1 Características Gerais.....	253
20.2 Configurações do Gerador Trifásico .....	254
20.3 Sistema Trifásico com Carga Equilibrada.....	256
20.4 Sistema Trifásico com Carga Desequilibrada .....	258
20.5 Potência em Sistemas Trifásicos .....	260
<b>Apêndice 1 - Fundamentos Matemáticos .....</b>	265
I - Potência de Dez .....	265
II - Prefixos Métricos .....	265
III - Teoria do Arredondamento .....	266
IV - Métodos para Solução Analítica de Sistemas de Equações .....	266
V - Métodos para Solução Matricial de Sistemas de Equações .....	267
VI - Função Exponencial.....	269
VII - Função Logarítmica.....	270
VIII - Identidades Trigonométricas.....	271
IX - Operações Fasoriais .....	273
X - Números Complexos.....	274
XI - Regras de Derivação e Derivadas Elementares .....	277
XII - Regras de Integração e Integrais Elementares.....	278
<b>Apêndice 2 - Respostas dos Exercícios Propostos.....</b>	279

# Capítulo 1

## Introdução

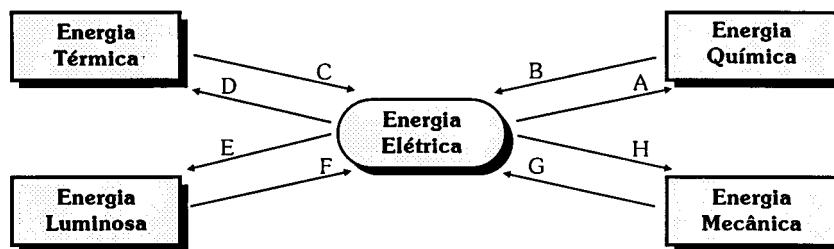
### 1.1

### Energia

**Energia** é uma grandeza que caracteriza um sistema físico, mantendo o seu valor independente das transformações que ocorrem nesse sistema, expressando, também, a capacidade de modificar o estado de outros sistemas com os quais interage.

O símbolo de energia é  $\tau$  (tau) e a sua unidade de medida é o *joule* [J].

Inicialmente, vamos analisar a figura abaixo, que mostra algumas formas de energia e suas possíveis transformações, tomando como referência a energia elétrica.



Um dos processos de transformação de energia elétrica em química é denominado eletrólise. Na figura acima esse processo está representado por *A*.

Os demais processos podem ser realizados por diversos dispositivos. Como exemplos, apresentamos os seguintes:

- B = pilha elétrica  
C = sensor termoelétrico  
D = resistência elétrica  
E = lâmpada elétrica

- F = sensor fotoelétrico  
G = dínamo  
H = motor elétrico

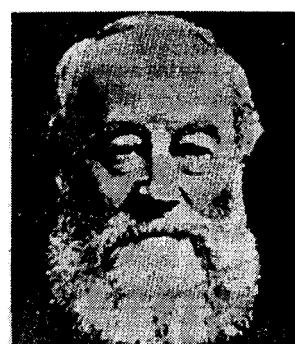
Nenhum processo de transformação de um tipo de energia em outro é ideal. Isso significa que sempre há energias indesejáveis, que são denominadas perdas.

Como exemplo, podemos citar a lâmpada incandescente, em que uma parte da energia elétrica é convertida em energia luminosa (desejável) e outra parte é convertida em calor (perda).

#### James Prescott Joule (1818 – 1889)

*Físico inglês, estudou a energia térmica desenvolvida por processos elétricos e mecânicos. No caso dos processos elétricos, demonstrou que a quantidade de calor desenvolvida num condutor é proporcional à corrente elétrica e ao tempo.*

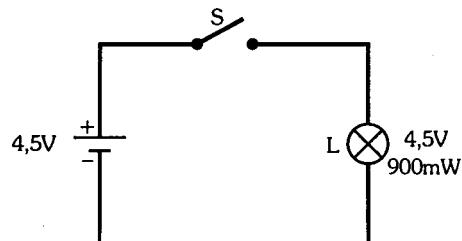
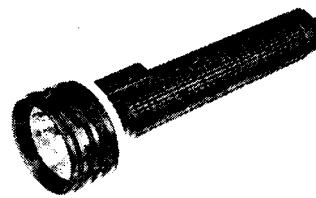
*A unidade de medida de energia e trabalho é joule, em sua homenagem.*



**Eletricidade** é uma forma de energia associada aos fenômenos causados por cargas elétricas em repouso (eletrostática) e em movimento (eletrodinâmica).

Um exemplo de circuito elétrico bem simples é o de uma lanterna.

Os seus dispositivos básicos são: bateria (conjunto de pilhas), lâmpada e chave liga/desliga.



O esquema elétrico da lanterna está mostrado ao lado.

Neste exemplo, há uma bateria com tensão de 4,5V (três pilhas de 1,5V em série) e uma lâmpada específica para 4,5V com potência de 900mW.

Ao fechar a chave *S*, a bateria fornece corrente elétrica à lâmpada. Portanto, a bateria converte a energia química em elétrica, a corrente elétrica “transfere” essa energia à lâmpada, que a converte em energia luminosa (desejável) e térmica (perda) por meio de sua resistência elétrica.

Como você deve ter percebido, há vários conceitos envolvidos nesse circuito elétrico: *tensão, corrente, resistência e potência*.

Este exemplo serviu apenas para que pudéssemos mostrar que estes quatro conceitos devem estar de alguma forma relacionados entre si.

Nos capítulos seguintes, conforme estes conceitos forem sendo analisados detalhadamente, voltaremos ao circuito elétrico da lanterna.

Apesar de não termos ainda estudado a corrente elétrica, por prudência, apresentamos neste primeiro capítulo uma tabela mostrando os possíveis efeitos que ela pode causar no corpo humano, principalmente quando a corrente atravessa o coração ou o tórax.

Intensidade da corrente	Perturbações durante o choque	Situação após o choque	Método de salvamento	Resultado provável
< 1mA	Nenhuma	Normal	-	Normal
1 a 9mA	Choque fraco	Normal	-	Normal
9 a 20mA	Choque doloroso	Dores	Relaxamento	Restabelecimento
20 a 100mA	Choque forte	Paralisia muscular Dificuldades respiratórias	Relaxamento Respiração artificial	Restabelecimento
> 100mA	Choque fortíssimo	Morte aparente ou imediata	Diffícil	Morte
vários ampères	Choque fortíssimo	Morte aparente ou imediata	Muito difícil	Morte

Para simbolizar literalmente as grandezas elétricas, há uma convenção válida tanto para sinais contínuos e constantes como para sinais variáveis e alternados.

A tabela seguinte apresenta essa convenção:

Grandeza	Símbolo da Grandeza	Exemplos		
Valor constante	maiúsculo	$V_1$	$e$	$I_1$
Valor variável (domínio temporal)	minúsculo	$v_1(t)$	$e$	$i_1(t)$
Valor variável (domínio angular)	minúsculo	$v_1(\theta)$	$e$	$i_1(\theta)$
Valor AC (instantâneo)	minúsculo	$v_1$	$e$	$i_1$
Valor de pico	maiúsculo	$V_P$	$e$	$I_P$
Valor de pico a pico	maiúsculo	$V_{PP}$	$e$	$I_{PP}$
Valor eficaz (RMS)	maiúsculo	$V$	$e$	$I$

### ***Para que serve a eletricidade?***

*“Certa vez, enquanto Franklin empinava uma pipa durante uma tempestade para atrair o raio, uma senhora que passava pelo local lhe perguntou:*

*– Senhor, para que servem tais experiências?*

*Franklin, em vez de responder, fez outra pergunta à senhora:*

*– Para que serve uma criança?*

*Estranhando a pergunta de Franklin, a senhora respondeu:*

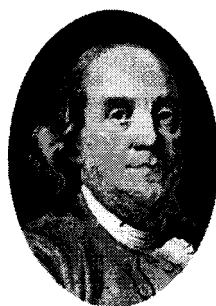
*– Ora, primeiro para brincar, depois ela irá crescer e se tornar uma trabalhadora eficiente.*

*Assim, Franklin concluiu:*

*– Com a eletricidade ocorre a mesma coisa. Por enquanto ela serve para brincar, depois crescerá e tornar-se-á uma trabalhadora eficiente.”*

*Esse fato é também atribuído a Faraday (1791-1867), cientista britânico, numa conversa com a Rainha Vitória.*

*Independente de quem tenha sido o personagem real, o fato serve para mostrar o grau de confiança na eletricidade.*



***Benjamin Franklin (1706 – 1790)***

*Tipógrafo e político norte-americano, era um homem extremamente polivalente, pois, além de realizar experimentos no campo da eletricidade, foi o criador do Corpo de Bombeiros e redator da Declaração de Independência dos Estados Unidos.*

*Inventou o pára-raios depois de provar que o raio é uma faísca elétrica.*

**2.1**

**Carga Elétrica**

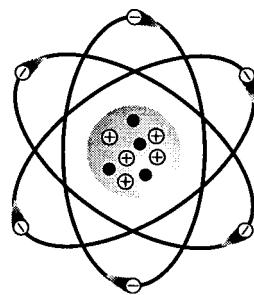
A *eletrostática* estuda os fenômenos relacionados às cargas elétricas em repouso.

Os átomos presentes em qualquer material são formados por *elétrons*, que giram em órbitas bem determinadas em torno do núcleo que, por sua vez, é constituído por *prótons* e *nêutrons*.

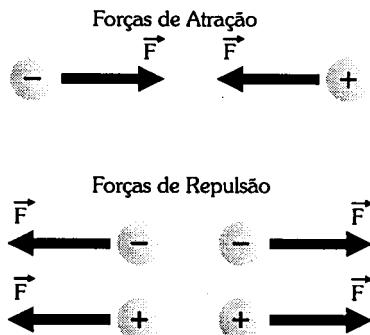
A diferença básica entre esses elementos que formam o átomo está na característica de suas cargas elétricas.

O próton tem carga elétrica positiva, o elétron tem carga elétrica negativa e o nêutron não tem carga elétrica.

Os átomos são, em princípio, eletricamente neutros, pois o número de prótons é igual ao número de elétrons, fazendo com que a carga total positiva anule a carga total negativa.



O princípio fundamental da eletrostática é chamado de *princípio da atração e repulsão*, cujo enunciado é:



"Cargas elétricas de sinais contrários se atraem e de mesmos sinais se repelem."

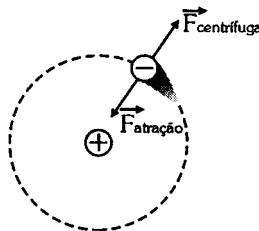
A carga elétrica fundamental é simbolizada pela letra *q* e sua unidade de medida é o *coulomb* [*C*].

O módulo da carga elétrica de um próton e de um elétron vale:

$$q = 1,6 \times 10^{-19} C$$

No átomo, os prótons atraem os elétrons das órbitas em direção ao núcleo.

Porém, como os elétrons realizam um movimento circular em torno do núcleo, surgem neles forças centrífugas de mesma intensidade, mas em sentido contrário, anulando as forças de atração, mantendo os elétrons em órbita.

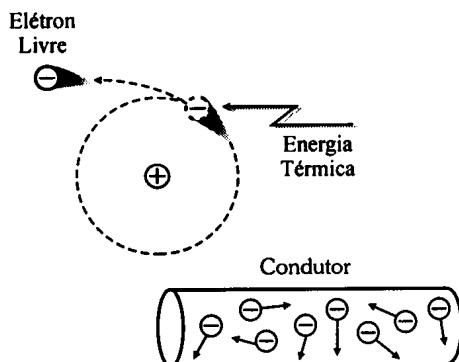


### Condutores e Isolantes

Quanto mais afastado do núcleo está um elétron, maior é a sua energia, porém mais fracamente ligado ao átomo ele está.

Os materiais *condutores* são aqueles que conduzem facilmente eletricidade, como o cobre e alumínio.

**Nota:** Consulte no Apêndice 1, os tópicos I e II.



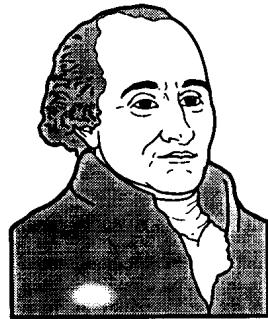
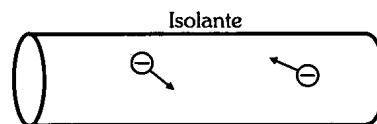
Nos condutores metálicos, os elétrons da última órbita dos átomos estão tão fracamente ligados aos seus núcleos que, à temperatura ambiente, a energia térmica é suficiente para libertá-los dos átomos, tornando-os elétrons livres, cujos movimentos são aleatórios.

Isso significa que, nos condutores metálicos, a condução da eletricidade dá-se basicamente pela movimentação de elétrons.

Os materiais *isolantes* são aqueles que não conduzem eletricidade, como o ar, a borracha e o vidro.

nos isolantes, os elétrons da última órbita dos átomos estão fortemente ligados aos seus núcleos, de tal forma que, à temperatura ambiente, apenas alguns elétrons conseguem se libertar.

A existência de poucos elétrons livres praticamente impede a condução de eletricidade em condições normais.



**Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806)**

Engenheiro militar francês, foi um dos pioneiros da física experimental.

Descobriu a lei da atração e repulsão eletrostática em 1787, estudou os materiais isolantes e diversos outros assuntos relacionados à eletricidade e ao magnetismo, que constam de seu livro "Mémoires sur l'Électricité et sur le Magnetisme" (Memórias sobre a Eletricidade e sobre o Magnetismo).

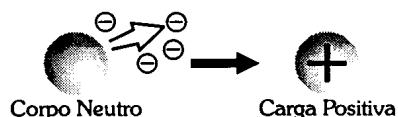
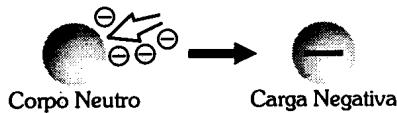
A unidade de medida de carga elétrica é coulomb, em sua homenagem.

## 2.2

## Eletrização dos Corpos

Podemos eletrizar um corpo com carga  $Q$  por meio da ionização dos seus átomos, isto é, retirando ou inserindo elétrons em suas órbitas, tornando-os íons positivos (*cátions*) ou íons negativos (*ânions*).

Retirando elétrons dos átomos de um corpo, ele fica eletrizado positivamente, pois o número de prótons fica maior que o número de elétrons.



Por outro lado, inserindo elétrons nos átomos de um corpo, ele fica eletrizado negativamente, pois o número de elétrons fica maior que o número de prótons.

Assim, a carga  $Q$  de um corpo pode ser calculada multiplicando a carga  $q$  de um elétron pelo número  $n$  de elétrons inseridos ou retirados do corpo:

em que:

$$Q = n \cdot q$$

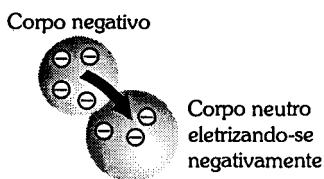
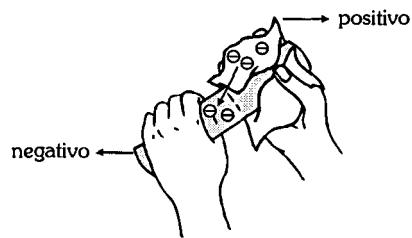
$q = -1,6 \times 10^{-19} C$  (carga de um elétron)  
 $n$  positivo = número de elétrons inseridos  
 $n$  negativo = número de elétrons retirados

## Processos de Eletrização

Os processos básicos de eletrização dos corpos são: atrito, contato e indução.

### Eletrização por Atrito

Atritando dois materiais isolantes diferentes, o calor gerado pode ser suficiente para transferir elétrons de um material para o outro, ficando ambos os materiais eletrizados, sendo um positivo (o que cedeu elétrons) e outro negativo (o que recebeu elétrons).



### Eletrização por Contato

Se um corpo eletrizado negativamente é colocado em contato com outro neutro, o excesso de elétrons do corpo negativo será transferido para o neutro até que ocorra o *equilíbrio eletrostático*. Assim, o corpo neutro fica eletrizado negativamente.

**Obs.:** *Equilíbrio eletrostático* não significa que os corpos têm cargas iguais, mas que têm *potenciais elétricos iguais*, conceito esse que será estudado no tópico 2.5.

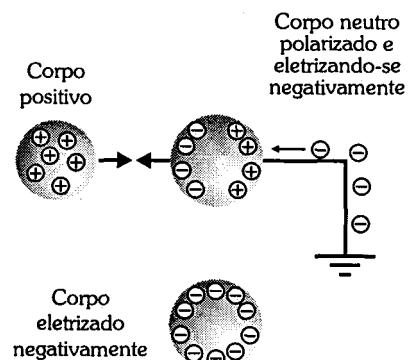
### Eletrização por Indução

Aproximando um corpo eletrizado positivamente de um corpo condutor neutro isolado, os seus elétrons livres serão atraídos para a extremidade mais próxima do corpo positivo.

Dessa forma, o corpo neutro fica polarizado, ou seja, com excesso de elétrons numa extremidade (pôlo negativo) e falta de elétrons na outra (pôlo positivo).

Aterrando o pôlo positivo desse corpo, ele atrairá elétrons da Terra, até que essa extremidade fique novamente neutra.

Desfazendo o aterramento e afastando o corpo com carga positiva, o corpo inicialmente neutro fica eletrizado negativamente.

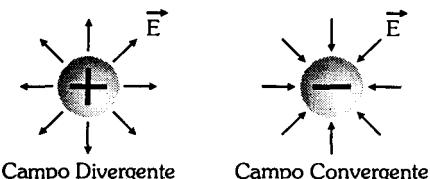


## 2.3

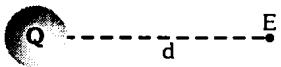
## Campo Elétrico

Uma carga cria ao seu redor um *campo elétrico*  $\vec{E}$  que pode ser representado por linhas de campo radiais orientadas, uma vez que é uma grandeza vetorial, sendo que a sua unidade de medida é *newton/coulomb* [N/C].

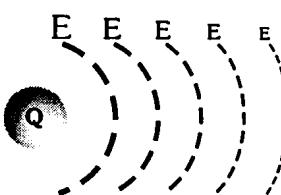
Se a carga é *positiva*, o campo é *divergente*, isto é, as linhas de campo saem da carga.



Se a carga é *negativa*, o campo é *convergente*, isto é, as linhas de campo chegam à carga.



A intensidade  $E$  do campo elétrico criado por uma carga  $Q$  é diretamente proporcional à intensidade dessa carga e da constante dielétrica do meio  $K$ , e é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $d$  entre a carga e o ponto considerado.



O campo diminui com o aumento da distância.

Matematicamente, tem-se:

$$E = \frac{K \cdot Q}{d^2}$$

em que:

$K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$  (no vácuo e no ar)

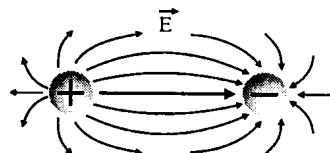
$Q$  = módulo da carga elétrica, em coulomb [C]

$d$  = distância, em metro [m]

## Comportamento das Linhas de Campo

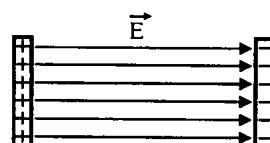
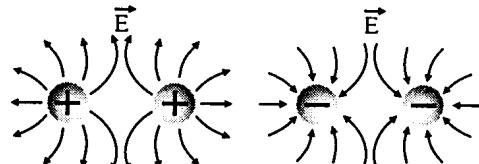
Vamos analisar agora como se comportam as linhas de campo em quatro situações diferentes:

Cargas Diferentes



Cargas Positivas

Cargas Negativas



Quando duas placas paralelas são eletrizadas com cargas de sinais contrários, surge entre elas um campo elétrico uniforme, caracterizado por linhas de campo paralelas.

## 2.4

## Força Elétrica

Consideremos uma região submetida a um campo elétrico  $\vec{E}$  uniforme.

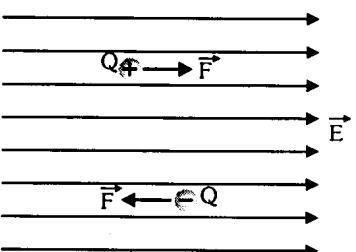
Colocando uma carga  $Q$  num ponto dessa região, essa carga ficará sujeita a uma força  $\vec{F}$ , cuja unidade de medida é newton [N] e cujo módulo pode ser calculado por:

$$F = Q \cdot E$$

em que:

$Q$  = módulo da carga elétrica, em coulomb [C]

$E$  = módulo do campo elétrico, em newton/coulomb [N/C]



Se a carga é positiva, a força age no mesmo sentido da linha de campo, e se a carga é negativa, a força age no sentido contrário ao da linha de campo.

Na realidade, essa força que age na carga é de atração ou repulsão entre  $Q$  e a carga geradora desse campo elétrico.

## Lei de Coulomb

Como decorrência do estudo do campo elétrico gerado por uma carga e da força que surge em outra carga colocada nesse campo, pode-se deduzir a expressão que nos dá o módulo da *força de atração ou de repulsão* entre duas cargas elétricas, devido à interação dos seus campos elétricos.

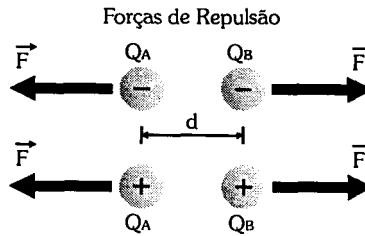
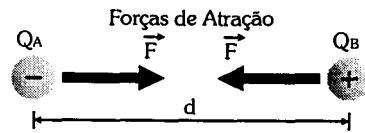
Essa expressão é denominada *Lei de Coulomb*:

$$F = \frac{K \cdot Q_A \cdot Q_B}{d^2}$$

em que:

$$K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (\text{no vácuo e no ar})$$

$Q_A$  e  $Q_B$  = módulos das cargas, em coulomb [C]  
 $d$  = distância, em metro [m]



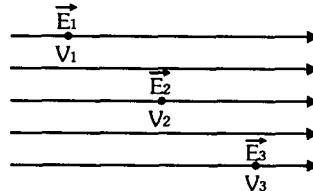
## 2.5

## Potencial Elétrico

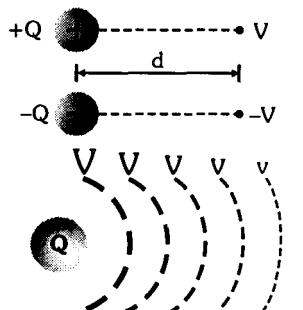
Vimos que numa região submetida a um campo elétrico, uma carga fica sujeita a uma força, fazendo com que ela se movimente.

Isso significa que em cada ponto dessa região existe um *potencial* para a realização de trabalho, independente da carga ali colocada.

O símbolo de potencial elétrico é  $V$  e a sua unidade de medida é o *volt* [V].



Na realidade, esse potencial depende da carga  $Q$  geradora do campo elétrico, sendo que, quanto maior a distância  $d$  entre o ponto considerado e a carga geradora, menor é o potencial elétrico  $V$ .



O módulo do potencial diminui com o aumento da distância.

O potencial elétrico é uma grandeza escalar, podendo ser positivo ou negativo, dependendo de a carga ser positiva ou negativa.

Matematicamente:

$$V = \frac{K \cdot Q}{d}$$

em que:

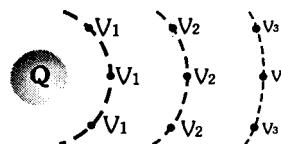
$$K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (\text{no vácuo e no ar})$$

$Q$  = valor absoluto da carga elétrica, em coulomb [C]  
 $d$  = distância, em metro [m]

Por essa expressão, vê-se que uma *carga positiva* cria ao seu redor *potenciais positivos* e uma *carga negativa* cria ao seu redor *potenciais negativos*.

Numa superfície em que todos os pontos são eqüidistantes em relação à carga geradora, os potenciais são iguais.

Nesse caso, elas são denominadas *superfícies equipotenciais*.



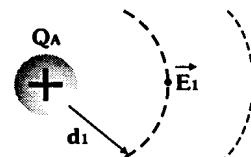
## Exercícios Propostos

### **Eletrização dos Corpos**

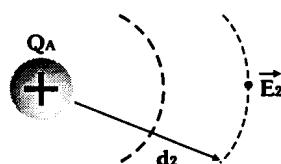
- 2.1) Qual é o número de elétrons retirado de um corpo cuja carga elétrica é  $Q = + 32\mu C$ ?
- 2.2) Qual é o número de elétrons inserido num corpo cuja carga elétrica é  $Q = - 80nC$ ?
- 2.3) De um corpo neutro foi retirado um milhão de elétrons. Qual é a sua carga elétrica final?
- 2.4) Num corpo eletrizado com carga inicial  $Q_i = + 1pC$ , foi inserido um milhão de elétrons. Qual é a sua carga elétrica final  $Q_f$ ?
- 2.5) De um corpo eletrizado com carga inicial  $Q_i = - 12 \mu C$  foram retirados  $n$  elétrons, de forma que sua carga final passou a ser  $Q_f = + 2 \mu C$ . Quantos elétrons foram retirados desse corpo?
- 2.6) Como se eletriza positivamente um corpo neutro por meio do contato?
- 2.7) Como se eletriza positivamente um corpo neutro por meio da indução?

### **Campo Elétrico**

- 2.8) Uma carga elétrica  $Q_A = 20nC$  encontra-se no vácuo. Quais são a intensidade e o sentido do campo elétrico  $\vec{E}_1$  na superfície com raio  $d_1 = 1m$  em torno dessa carga?



- 2.9) Quais são a intensidade e o sentido do campo elétrico  $\vec{E}_2$  na superfície com raio  $d_2 = 2m$  em torno dessa mesma carga?

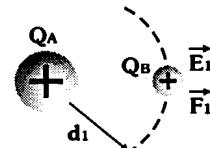


- 2.10) O que acontece com a intensidade do campo elétrico quando a distância em relação à carga geradora dobra de valor?

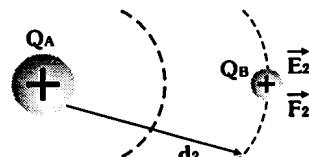
### **Força Elétrica**

- 2.11) No exercício 2.8, consideremos que a carga  $Q_A = 20nC$  esteja fixa. Uma carga  $Q_B = 10nC$  é colocada num ponto da superfície de raio  $d_1 = 1m$ , em que o campo é  $\vec{E}_1$ .

Determine a intensidade e o sentido da força  $\vec{F}_1$  que age na carga  $Q_B$ .

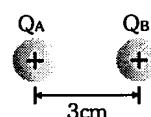


- 2.12) Quais são a intensidade e o sentido da força  $\vec{F}_2$  que agirá na carga  $Q_B$ , quando ela atingir um ponto da superfície de raio  $d_2 = 2m$ ?

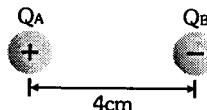


- 2.13) O que acontece com a intensidade da força quando a distância entre as cargas dobra de valor?

- 2.14) Determine a intensidade e o sentido da força  $\vec{F}$  entre duas cargas  $Q_A = 10\mu C$  e  $Q_B = 2nC$ , no vácuo, distantes  $3cm$  uma da outra.



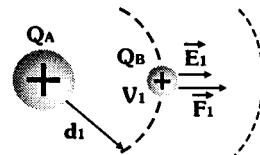
- 2.15) Determinar a intensidade e o sentido da força  $\vec{F}$  entre duas cargas  $Q_A = 50nC$  e  $Q_B = -18\mu C$ , no ar, distantes 4cm uma da outra.



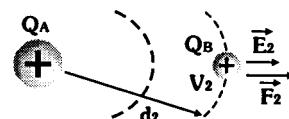
### Potencial Elétrico

- 2.16) No exercício 2.8, foi calculado o campo elétrico  $\vec{E}_1$  criado pela carga  $Q_A = 20nC$  a uma distância  $d_1 = 1m$ . No exercício 2.11, foi calculada a força de repulsão  $\vec{F}_1$  que age na carga  $Q_B = 10nC$  colocada nessa distância, fazendo com que ela se afaste de  $Q_A$ .

Determine o potencial elétrico  $V_1$  criado pela carga  $Q_A$  no ponto em que se encontra a carga  $Q_B$ .



- 2.17) Determine o potencial elétrico  $V_2$  criado pela mesma carga  $Q_A$  num ponto em que  $d_2 = 2m$ .

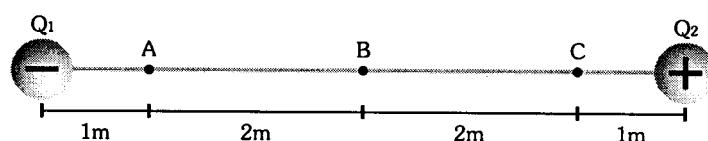


- 2.18) O que acontece com o potencial elétrico quando a distância em relação à carga geradora dobra de valor?

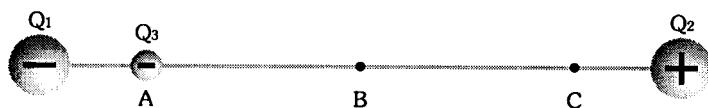
- 2.19) Com base nos exercícios 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.16 e 2.17, preencha as lacunas da análise abaixo:

"A carga  $Q_B$  \_\_\_\_\_ (positiva/negativa) colocada em  $d_1$  deslocou-se em direção a  $d_2$  pela força de \_\_\_\_\_ (atração/repulsão). Esse deslocamento ocorreu no \_\_\_\_\_ (mesmo sentido/sentido contrário) do campo elétrico. O potencial elétrico criado pela carga positiva  $Q_A$  \_\_\_\_\_ (aumentou/diminuiu) com o aumento da distância. Portanto, uma carga positiva imersa num campo elétrico desloca-se de um potencial \_\_\_\_\_ (maior/menor) para um potencial \_\_\_\_\_ (maior/menor)."

- 2.20) Considere o esquema abaixo, formado pelas cargas  $Q_1 = -20\mu C$  e  $Q_2 = +20\mu C$ , fixas, no vácuo, distantes 6m uma da outra, e os pontos A, B e C entre essas cargas:

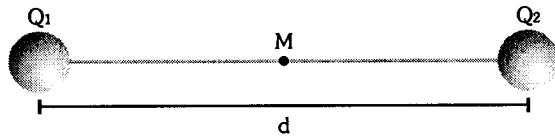


- Determine os campos elétricos resultantes criados por  $Q_1$  e  $Q_2$  nos pontos A, B e C;
- Determine os potenciais elétricos resultantes criados por  $Q_1$  e  $Q_2$  nos pontos A, B e C;
- Considere que uma carga negativa  $Q_3 = -10\mu C$  tenha sido colocada no ponto A e responda por que e como ela irá se movimentar;



- Determine a força resultante na carga  $Q_3$  quando ela se encontrar nos pontos A, B e C;
  - Complete a frase abaixo referente à análise desse exercício, considerando os potenciais elétricos obtidos no item b:
- "Uma carga negativa move-se do potencial \_\_\_\_\_ para o potencial \_\_\_\_\_."

**2.21)** Considere o seguinte esquema eletrostático:



- Quais devem ser as características das cargas elétricas  $Q_1$  e  $Q_2$  para que, no ponto médio  $M$ , o campo elétrico seja nulo e o potencial elétrico seja diferente de zero?
- Quais devem ser as características das cargas elétricas  $Q_1$  e  $Q_2$  para que, no ponto médio  $M$ , o potencial e o campo elétrico sejam nulos?

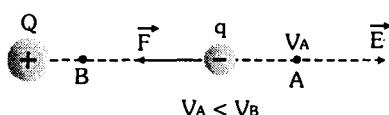
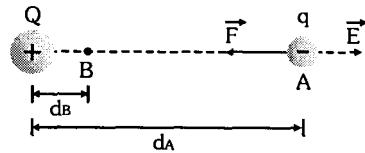
**3.1**

**Tensão Elétrica**

**Diferença de Potencial - ddp**

Seja uma região submetida a um campo elétrico  $\vec{E}$  criado por uma carga  $Q$  positiva.

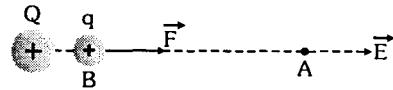
Colocando um elétron  $-q$  no ponto  $A$ , situado a uma distância  $d_A$  da carga  $Q$ , ele se movimentará no sentido contrário do campo, devido à força  $\vec{F}$  que surge no elétron, indo em direção ao ponto  $B$ , situado a uma distância  $d_B$  da carga  $Q$ .



Como  $d_A > d_B$ , o potencial do ponto  $A$  é menor que o do ponto  $B$ , isto é,  $V_A < V_B$ .

Conclui-se, então, que uma *carga negativa move-se do potencial menor para o maior*.

Se uma carga *positiva*  $+q$  fosse colocada no ponto  $B$ , ela se movimentaria na mesma direção do campo elétrico, indo do *potencial maior para o menor*.



Assim, para que uma carga se movimente, isto é, para que haja condução de eletricidade, é necessário que ela esteja submetida a uma *diferença de potencial ou ddp*.

**Tensão Elétrica**

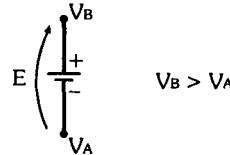
A diferença de potencial elétrico entre dois pontos é denominada *tensão elétrica*, podendo ser simbolizada pelas letras  $V$ ,  $U$  ou  $E$ , cuja unidade de medida é também o *volt [V]*.

Matematicamente, tem-se:

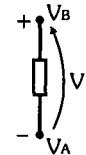
$$E = V_B - V_A \quad \text{ou} \quad V = V_B - V_A$$

Num circuito, indica-se uma tensão por uma seta voltada para o ponto de maior potencial.

Fonte de Alimentação



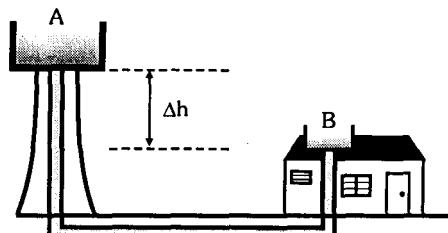
Dispositivo



**Obs.:** Neste livro, usaremos o símbolo  $E$  para identificar fontes de alimentação contínuas (pilha, bateria e fonte de tensão eletrônica) e o símbolo  $V$  para identificar a tensão contínua entre terminais de outros dispositivos (resistores, indutores e capacitores).

**Analogia entre Eletricidade e Hidráulica**

No sistema hidráulico ao lado, a água se desloca da caixa d'água  $A$  para a  $B$  por causa da diferença de altura  $\Delta h$ .



Cada ponto do espaço possui um potencial gravitacional que é proporcional à sua altura.

Portanto, a *corrente* de água existe por causa da *diferença de potencial gravitacional* entre as caixas d'água.

**Nota:** Consulte no Apêndice 1, o tópico III.

### Alessandro G. Volta (1745 – 1827)

Físico e professor italiano, tinha 24 anos quando publicou seu primeiro trabalho científico: "Da Força Magnética do Fogo e dos Fenômenos daí Dependentes".

Por meio de experimentos, provou que a eletricidade do corpo de um animal é idêntica à eletricidade gerada por materiais inanimados.

Foi o inventor da pilha elétrica.

A unidade de medida de potencial e tensão elétrica é volt, em sua homenagem.



### A Perna da Rã e a Célula Voltaica

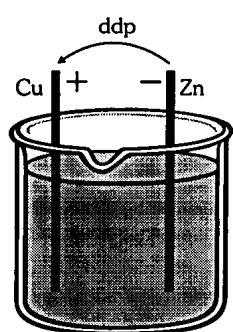
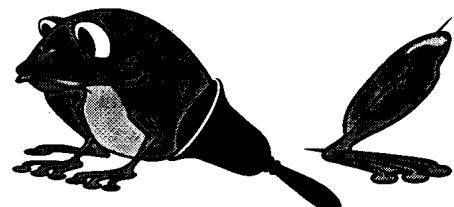
Enquanto a eletricidade estava restrita à eletrostática, era difícil achar uma utilização prática para ela, já que cargas paradas não realizam trabalho, nem é possível realizar a conversão de energia elétrica em outra forma útil de energia. Isso só seria possível se as cargas se movimentassem.

Já, de um corpo carregado eletricamente, utilizando um condutor, o máximo que se consegue é um fluxo quase instantâneo de cargas e, eventualmente, alguma faísca.

Era preciso, portanto, criar um processo para manter o fluxo contínuo das cargas, possibilitando a conversão dessa energia elétrica em outra forma, como o calor.

Em 1790, o físico e anatomista Luigi Galvani (1737 – 1798) amputou a perna de uma rã para estudar os seus nervos e a possível existência de eletricidade animal.

Mexendo num dos nervos da perna da rã com duas pinças de metais diferentes, Galvani notou que quando as extremidades superiores dos instrumentos se tocavam, a perna da rã reagia, como se estivesse viva. Dessa observação, ele concluiu que os nervos eram capazes de produzir eletricidade.



Alessandro Volta, aproveitando-se dessa descoberta quase acidental, constatou, por meio de diversos experimentos, que a eletricidade não era propriedade dos nervos, mas dos metais diferentes imersos em uma solução de ácido ou de sal. Nesses casos, os metais se eletrizam com polaridades contrárias.

Ligando as extremidades externas dos metais com um condutor, a diferença de potencial entre eles garante o fluxo constante de cargas, isto é, uma corrente elétrica estável.

Uma célula voltagem simples pode ser obtida mergulhando uma barra de zinco (Zn) e outra de cobre (Cu) em uma solução de ácido sulfúrico ( $H_2SO_4$ ). Nesse caso, a barra de zinco torna-se negativa e a de cobre positiva, por meio da ionização de seus átomos.

O conceito de diferença de potencial elétrico e movimento de carga elétrica leva-nos à *eletrodinâmica*, isto é, ao estudo das *cargas elétricas em movimento*.

Aplicando uma diferença de potencial num condutor metálico, os seus elétrons livres movimentam-se de forma ordenada no sentido contrário ao do campo elétrico.

Essa movimentação de elétrons denomina-se *corrente elétrica*, que pode ser simbolizada por  $i$  ou  $I$ , sendo que sua unidade de medida é o *ampère [A]*.

### Intensidade da Corrente Elétrica

A intensidade instantânea  $i$  da corrente elétrica é a medida da variação da carga  $dQ$ , em *coulomb [C]*, por meio da seção transversal de um condutor durante um intervalo de tempo  $dt$ , em *segundo [s]*.

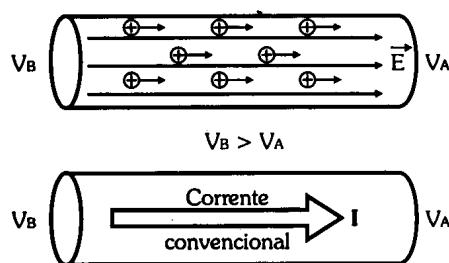
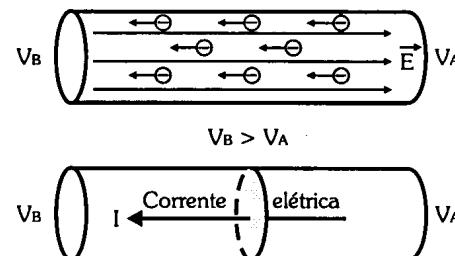
Matematicamente, o valor instantâneo da corrente  $i$  é dado por:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Se a variação da carga for linear, a corrente será contínua e constante. Nesse caso, ela será simbolizada por  $I$  e poderá ser calculada por:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

**Obs.:** Pelas expressões apresentadas, vemos que o *ampère [A]* é a denominação usual para a unidade de medida de corrente, que é *coulomb/segundo [C/s]*.

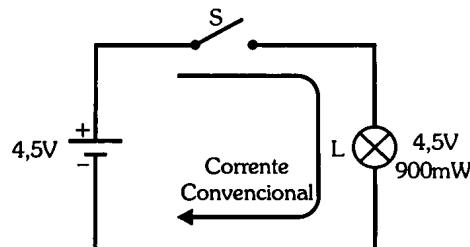


Num circuito, indica-se a corrente convencional por uma seta, no sentido do potencial maior para o menor, como no circuito da lanterna, em que a corrente sai do pôlo positivo da bateria (maior potencial) e retorna ao seu pôlo negativo (menor potencial).

### Corrente Elétrica Convencional

Nos condutores metálicos, a corrente elétrica é formada apenas por *cargas negativas* (elétrons) que se deslocam do potencial menor para o maior.

Assim, para evitar o uso freqüente de valor negativo para corrente, utiliza-se um *sentido convencional* para ela, isto é, considera-se que a corrente elétrica num condutor metálico seja formada por cargas positivas, indo, porém, do *potencial maior para o menor*.





**André-Marie Ampère (1775 – 1836)**

Físico francês, desenvolveu diversos trabalhos sobre a aplicação da matemática na física e realizou diversos experimentos e descobertas no campo do eletromagnetismo.

Analisou profundamente os fenômenos eletrodinâmicos e descobriu o princípio da telegrafia elétrica.

Em 1826, publicou a teoria dos fenômenos eletrodinâmicos. Segundo ele, todos os fenômenos elétricos, do magnetismo terrestre ao eletromagnetismo, derivam de um princípio único: a ação mútua de suas correntes elétricas. Essa descoberta é uma das mais importantes da física moderna.

A unidade de medida de corrente elétrica é ampère, em sua homenagem.

### 3.3

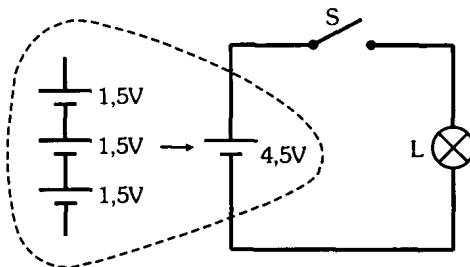
## Fontes de Alimentação

O dispositivo que fornece tensão a um circuito é chamado genericamente de *fonte de tensão* ou *fonte de alimentação*.

### Pilhas e Baterias

Voltando ao circuito da lanterna, nele identificamos a bateria, que nada mais é do que um conjunto de pilhas.

A pilha comum, quando nova, possui tensão de 1,5V. Associadas em série, elas podem aumentar essa tensão, como no caso da lanterna, cuja bateria é formada por três pilhas de 1,5V, resultando numa tensão de 4,5V.



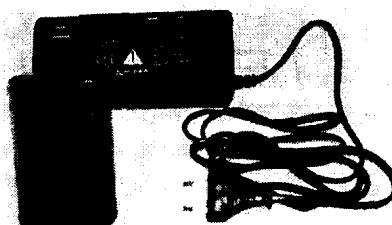
Existem, ainda, outros tipos de bateria como, por exemplo, a de 9V e a minibateria de 3V.

Todas essas baterias produzem energia elétrica a partir de energia liberada por reações químicas.

Com o tempo de uso, as reações químicas dessas baterias liberam cada vez menos energia, fazendo com que a tensão disponível seja cada vez menor.

Uma alternativa são as baterias que podem ser recarregadas por aparelhos apropriados, inclusive as pilhas comuns, o que é importante, sobretudo no que se refere ao meio ambiente.

As baterias recarregáveis mais difundidas são aquelas utilizadas em equipamentos de uso constante, como os telefones celulares, ou de equipamentos que demandam maiores correntes elétricas, como as das filmadoras de videocassete.



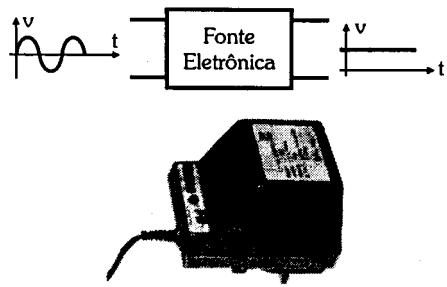
### NÓS CUIDAMOS DO MEIO AMBIENTE?

As pilhas e baterias recarregáveis e não recarregáveis não devem ser jogadas em lixos comuns, pois são fabricadas com materiais altamente tóxicos, podendo causar danos à saúde e ao meio ambiente. Infelizmente, somente nesse final de século nós passamos a nos preocupar com o meio ambiente, embora ainda não tenhamos uma solução concreta para o problema da destinação desse tipo de lixo.

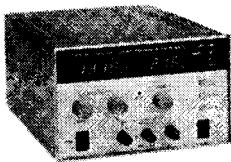
## Fontes de Alimentação Eletrônicas

No lugar das pilhas e baterias, é comum a utilização de circuitos eletrônicos que convertem a tensão alternada da rede elétrica em tensão contínua.

Esses circuitos são conhecidos por eliminadores de bateria, e são fartamente utilizados em equipamentos portáteis como videogames e aparelhos de som.



Símbolo da  
Fonte de  
Alimentação  
Variável



Porém, em laboratórios e oficinas de eletrônica, é mais utilizada a fonte de alimentação variável (ou ajustável).

Essa fonte tem a vantagem de fornecer tensão contínua e constante, cujo valor pode ser ajustado manualmente, conforme a necessidade.

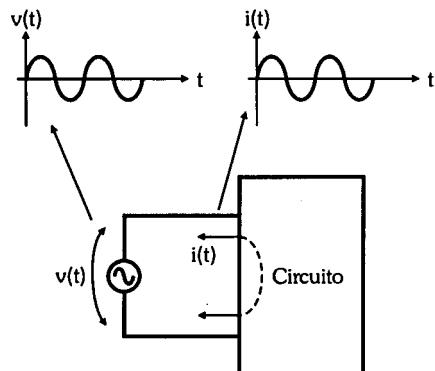
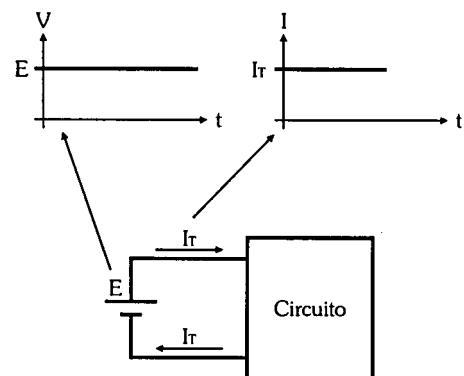
Nas fontes variáveis mais simples, o único tipo de controle é o de ajuste de tensão. Nas mais sofisticadas, existem ainda os controles de ajuste fino de tensão e de limite de corrente.

## Corrente Contínua

As pilhas e baterias analisadas têm em comum a característica de fornecerem corrente contínua ao circuito.

**Obs.:** Abrevia-se corrente contínua por CC (ou, em inglês, DC – Direct Current).

Isso significa que a fonte de alimentação CC mantém sempre a mesma polaridade, de forma que a corrente no circuito tem sempre o mesmo sentido.



## Corrente Alternada

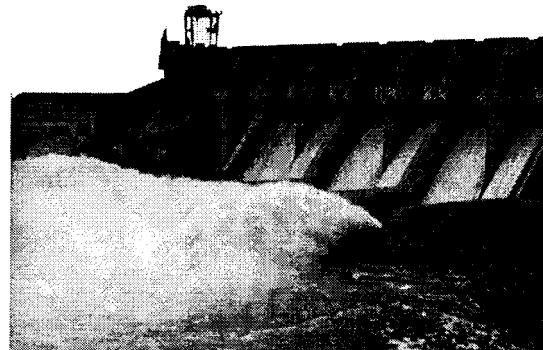
Já, a rede elétrica fornece às residências e indústrias a corrente alternada.

**Obs.:** Abrevia-se corrente alternada por CA (ou, em inglês, AC – Alternate Current).

Nesse caso, a tensão muda de polaridade em períodos bem-definidos, de forma que a corrente no circuito circula ora num sentido, ora no outro.

A corrente alternada pode ser gerada em diferentes tipos de usina de energia elétrica, como, por exemplo, as hidrelétricas, termoelétricas e nucleares.

O Brasil é um dos países que possuem mais usinas hidrelétricas no mundo, devido ao seu enorme potencial hídrico.

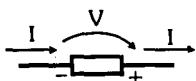


## 3.4

## Bipolos Gerador e Receptor

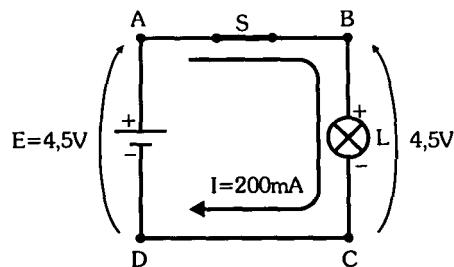
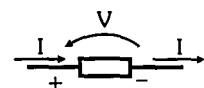
Denomina-se *bipolo* qualquer dispositivo formado por dois terminais, podendo ser representado genericamente pelo símbolo mostrado ao lado.

Bipolo Genérico

Se o bipolo *eleva* o potencial elétrico do circuito, ou seja, se a corrente entra no dispositivo pelo pólo de menor potencial e sai pelo pólo de maior potencial, o dispositivo é chamado de *gerador* ou *bipolo ativo*, como a fonte de alimentação.

Se o bipolo provoca *queda* de potencial elétrico no circuito, ou seja, se a corrente entra no dispositivo pelo pólo de maior potencial e sai pelo pólo de menor potencial, o dispositivo é chamado de *receptor* ou *bipolo passivo*, como a lâmpada.



No circuito da lanterna, a bateria de 4,5V fornece uma corrente de 200mA à lâmpada (no Capítulo 4, mostraremos como se calcula esse valor de corrente).

A corrente sai do ponto A (pôlo positivo da bateria) indo em direção ao ponto B, atravessa a lâmpada até o ponto C e retorna pelo ponto D (pôlo negativo da bateria).

Acompanhando o sentido da corrente elétrica, verificamos que a bateria eleva o potencial do circuito, fornecendo energia, e a lâmpada provoca queda de potencial no circuito, consumindo energia, isto é, transformando-a em luz (e em calor).

## 3.5

## Terra (GND) ou Potencial de Referência

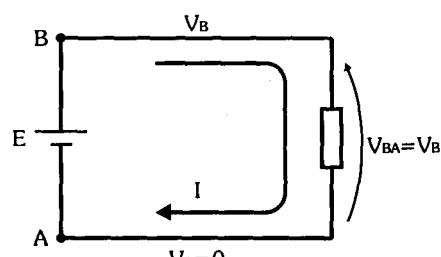
Num circuito, deve-se sempre estabelecer um ponto cujo potencial elétrico servirá de *referência* para a medida das tensões.

Em geral, a referência é o *pôlo negativo* da fonte de alimentação, que pode ser considerado um ponto de *potencial zero*, fazendo com que a tensão entre qualquer outro ponto do circuito e essa referência seja o próprio potencial elétrico do ponto considerado.

Assim, se  $V_A$  é a referência, a tensão  $V_{BA}$  entre os pontos B e A é dada por:

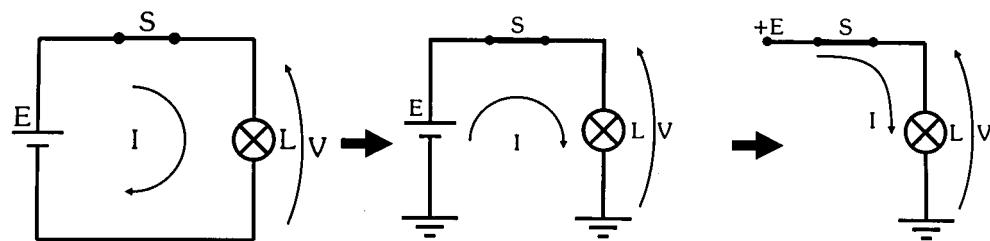
$$V_{BA} = V_B - V_A = V_B - 0 = V_B$$

A essa referência damos o nome de *terra* ou *GND* (do inglês, *ground*), cujos símbolos mais usuais são mostrados ao lado.



 ou  ou 

No caso da lanterna, podemos substituir a linha do potencial de referência por símbolos de terra, simplificando o seu circuito para um dos seguintes diagramas:



Em muitos equipamentos, esse potencial de referência do circuito é ligado à sua carcaça (quando esta é metálica) e a um terceiro pino do plugue que vai ligado à tomada da rede elétrica.

Esse terceiro pino serve para conectar o terra do circuito à malha de aterramento da instalação elétrica, com o objetivo de proteger o equipamento e o usuário de qualquer acúmulo de carga elétrica.

#### ATERRAMENTO JÁ!

*No Brasil, é muito comum as malhas de aterramento existirem apenas em instalações industriais, e não em instalações residenciais, o que é um grave erro.*

*A “norma técnica popular” recomenda a ligação do fio terra à torneira para que o encanamento sirva de aterramento. Grande bobagem! Qualquer descarga elétrica estaria sendo espalhada para diversos pontos do encanamento residencial, sem contar que há vários anos os canos de ferro estão sendo substituídos por canos de PVC, que é um isolante.*

*Nos computadores, simplesmente corta-se o pino terra do plugue, já que a maioria das tomadas residenciais têm apenas dois pontos de conexão (fase e neutro). Já inventaram até o “adaptador” de plugue de três para dois pinos.*

*Temos de mudar isso!*

## 3.6

## Instrumentos de Medidas Elétricas

Os instrumentos de medidas servem para mensurar grandezas físicas. Os valores medidos podem ser obtidos de forma analógica ou digital.

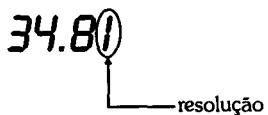
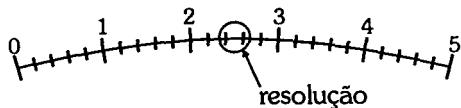
No instrumento *analógico*, o resultado é mostrado por um *ponteiro* que deflete sobre uma escala graduada, sendo que a leitura é feita por meio da analogia entre o valor indicado e o valor de fundo de escala selecionado.

No instrumento *digital*, o resultado é mostrado diretamente num *display*, conforme o valor de fundo de escala selecionado.

Instrumento Analógico	Instrumento Digital

## Resolução

Resolução é a menor medida que o instrumento pode distinguir com certeza.

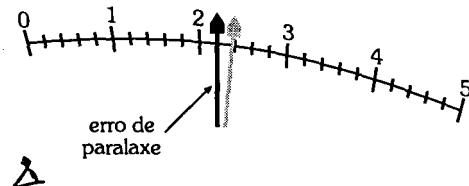


Se o instrumento for *analógico*, a sua resolução é dada pelo valor da *menor divisão* da escala graduada, conforme o fundo de escala selecionado.

Se o instrumento for *digital*, a sua resolução é dada pela unidade do *dígito menos significativo* em relação ao ponto decimal, conforme o fundo de escala selecionado.

## Erro de Paralaxe

Um cuidado importante a ser tomado com o instrumento *analógico* é que a leitura da medida deve ser feita olhando o ponteiro de frente, evitando o *erro de paralaxe*.



## Tolerância e Erro

Nenhum instrumento de medida é perfeito, da mesma forma que nenhum dispositivo fabricado é perfeito. Por isso, os fabricantes fornecem a margem de erro prevista para o seu produto, que é denominada *tolerância*.

### Análise do Erro

A tolerância pode ser dada *percentualmente* ( $\pm e\%$ ) ou em *valores absolutos* ( $\pm e$ ), informando a *precisão* do produto.

Para analisar uma medida realizada por um instrumento, tendo como referência um *valor nominal* (ou *teórico*), pode-se utilizar a seguinte expressão:

$$e\% = \frac{\text{valor medido} - \text{valor nominal}}{\text{valor nominal}} \times 100$$

## Multímetro

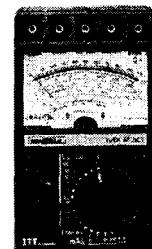
São vários os instrumentos utilizados em laboratórios e oficinas de eletrônica que medem grandezas elétricas, sendo que os principais são o *multímetro* e o *osciloscópio*.

Num primeiro momento, o instrumento que nos interessa é o multímetro, já que ele tem a finalidade de medir as grandezas elétricas que são objetos deste estudo, a saber: tensão, corrente e resistência. Mais adiante, analisaremos a utilização do osciloscópio.

O multímetro, seja analógico ou digital, possui dois terminais nos quais são ligadas as pontas de prova ou pontas de teste. A ponta de prova *vermelha* deve ser ligada ao terminal *positivo* do multímetro (vermelho ou marcado com sinal +) e a ponta de prova *preta* deve ser ligada ao terminal *negativo* do multímetro (preto ou marcado com sinal -).

Os multímetros possuem alguns controles, sendo que o principal é a chave rotativa ou conjunto de teclas para a seleção da grandeza a ser medida (tensão, corrente ou resistência) com os respectivos valores de fundo de escala.

Multímetro Analógico



Multímetro Digital



Nos multímetros digitais mais modernos, os controles possuem multifunções, tornando-os mais versáteis, menores e leves.

Embora existam instrumentos de medida que funcionam apenas como voltímetros, amperímetros ou ohmímetros, eles são mais utilizados por profissionais que trabalham nas áreas de instalações elétricas prediais e industriais e instalações de redes telefônicas.

Nos laboratórios e oficinas de eletrônica e na maioria dos trabalhos técnicos de campo, o multímetro é o melhor instrumento devido a sua versatilidade e multiplicidade de funções.

**Obs.:** Daqui em diante, as referências ao voltímetro, amperímetro e ohmímetro corresponderão ao multímetro operando, respectivamente, nas escalas de tensão, corrente e resistência.

## Interferência do Multímetro no Circuito

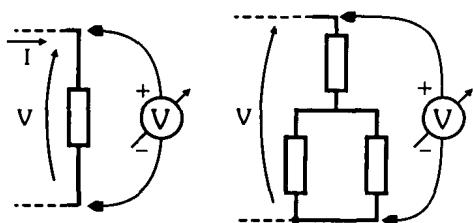
Quando um multímetro operando como voltímetro ou amperímetro é ligado a um circuito para realizar uma medida, ele interfere em seu comportamento, causando um erro.

Porém, esse erro pode ser desprezado na maioria dos casos, pois geralmente é menor que as tolerâncias dos componentes do circuito, principalmente quando o multímetro for digital.

### Voltímetro

O voltímetro é o instrumento utilizado para medir a *tensão elétrica* (diferença de potencial) entre dois pontos de um circuito elétrico.

Para que o multímetro funcione como um voltímetro, basta selecionar uma das escalas para medida de tensão (CC ou CA).

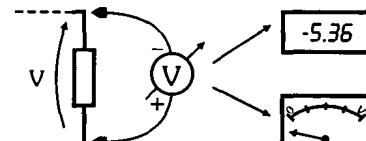
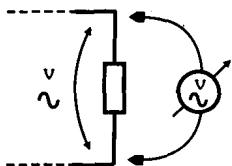


Para medir uma tensão, os terminais do voltímetro devem ser ligados aos dois pontos do circuito em que se deseja conhecer a diferença de potencial, isto é, em *paralelo*, podendo envolver um ou mais dispositivos.

Se a tensão a ser medida for *contínua (CC)*, o pôlo positivo do voltímetro deve ser ligado ao ponto de maior potencial e o pôlo negativo, ao ponto de menor potencial.

Assim, o voltímetro, seja analógico ou digital, indicará um valor positivo de tensão.

Estando a ligação dos terminais do voltímetro invertida, sendo digital, o *display* indicará valor negativo; sendo analógico, o ponteiro tentará defletir no sentido contrário, podendo danificá-lo.



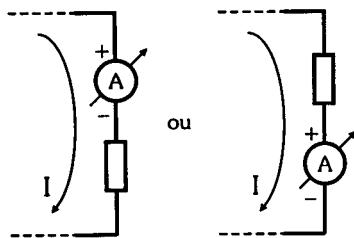
Se a tensão a ser medida for *alternada (CA)*, os pólos positivo e negativo do voltímetro podem ser ligados ao circuito sem se levar em conta a polaridade, resultando numa medida sempre positiva.

Normalmente, tanto os multímetros analógicos quanto os digitais possuem escalas específicas para a medida de tensão CA.

## Amperímetro

O amperímetro é o instrumento utilizado para medir a *corrente elétrica* que atravessa um condutor ou um dispositivo.

Para que o multímetro funcione como um amperímetro, basta selecionar uma das escalas para medida de corrente (*CC* ou *CA*).



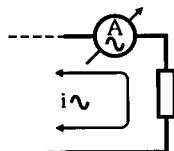
Para medir uma corrente, o circuito deve ser aberto no ponto desejado, ligando o amperímetro em *série*, para que a corrente passe por ele.

A corrente que passa por um dispositivo pode ser medida antes ou depois dele, já que a corrente que entra num bipolo é a mesma que sai.

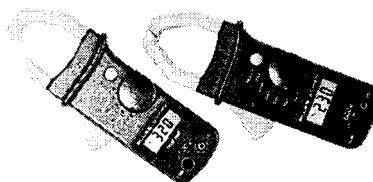
Se a corrente a ser medida for *contínua (CC)*, o polo positivo do amperímetro deve ser ligado ao ponto pelo qual a corrente convencional entra, e o polo negativo, ao ponto pelo qual ela sai.

Assim, o amperímetro, seja analógico ou digital, indicará um valor positivo de corrente.

Estando a ligação dos terminais do amperímetro invertida, sendo digital, o *display* indicará valor negativo; sendo analógico, o ponteiro tentará defletir no sentido contrário, podendo danificá-lo.



Se a corrente a ser medida for *alternada (CA)*, os pólos positivo e negativo do amperímetro podem ser ligados ao circuito sem se levar em conta a polaridade, resultando numa medida sempre positiva.



Um amperímetro *CA* muito comum para aplicação em instalações elétricas residenciais e industriais é o amperímetro de alicate.

Nele, a corrente é medida de forma indireta, a partir do campo magnético que surge em torno do condutor.

A vantagem desse amperímetro é que, além de não necessitar abrir o condutor para realizar a medida, ele oferece maior proteção para o operador, principalmente quando a corrente a ser medida é de alta intensidade.

Em geral, os multímetros analógicos e digitais não possuem escalas específicas para a medida de corrente *CA*. Na prática, o que se faz é medir a tensão *CA* e, por meio da Primeira Lei de Ohm, obter a corrente *CA*.

**Obs.:** A Primeira Lei de Ohm será apresentada no Capítulo 4.

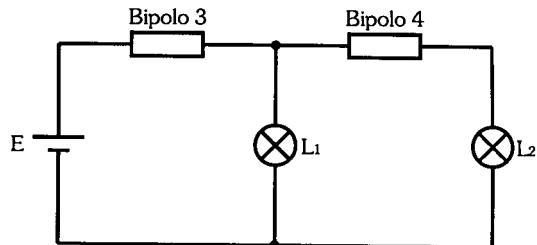
## Exercícios Propostos

### Corrente Elétrica

- 3.1) Qual é a intensidade da corrente elétrica em um fio condutor, sabendo que durante  $12\text{s}$  a variação da carga através da sua seção transversal é linear e igual a  $3600\mu\text{C}$ ?
- 3.2) Pela seção transversal de um fio condutor passou uma corrente de  $2\text{mA}$  durante  $45\text{s}$ . Quantos elétrons atravessaram essa seção nesse intervalo de tempo?

### Terra (GND) ou Potencial de Referência

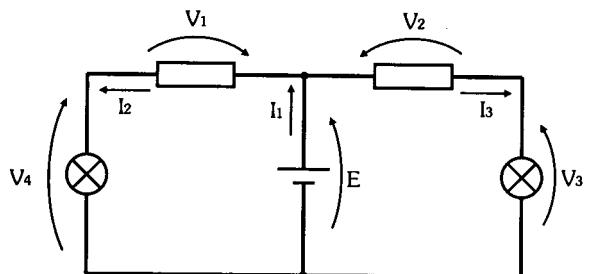
- 3.3) Dado o circuito ao lado, represente seus dois diagramas elétricos equivalentes utilizando o símbolo de terra.



### Instrumentos de Medidas Elétricas

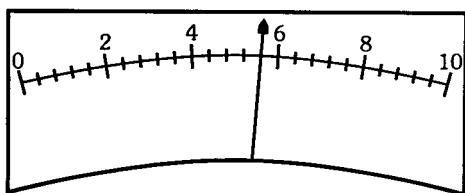
- 3.4) Considere o circuito ao lado:

- a) Refaça o seu diagrama elétrico, inserindo dois voltímetros para indicarem os valores positivos das tensões  $E$  e  $V_4$ :
- b) Refaça o seu diagrama elétrico, inserindo dois amperímetros para indicarem os valores positivos das correntes  $I_1$  e  $I_3$ :



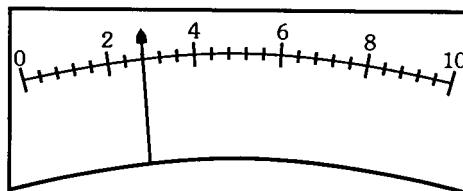
- 3.5) Um voltímetro e um amperímetro, ambos analógicos, são ligados num circuito. Qual é o valor das medidas, conforme as marcações dos ponteiros dos instrumentos e das respectivas escalas selecionadas?

Voltímetro



Escala: 200VDC

Amperímetro



Escala: 100mA

- 3.6) Relacione as colunas de forma que as escalas do multímetro estejam adequadas para as medidas sugeridas:

#### Medidas

- (I) Tensão da rede elétrica residencial
- (II) Corrente de um rádio portátil a pilha
- (III) Tensão da bateria de um automóvel
- (IV) Corrente de uma máquina de lavar roupas
- (V) Tensão de uma pilha comum de lanterna

#### Escalas

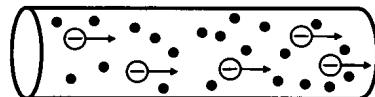
- (a) 200 mA DC
- (b) 10 AAC
- (c) 2 VDC
- (d) 700 VAC
- (e) 20 VDC

## 4.1

### Conceito de Resistência Elétrica

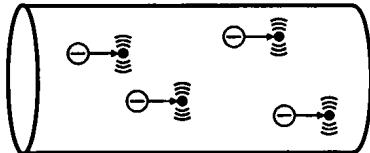
A *resistência* é a característica elétrica dos materiais, que representa a *oposição* à passagem da corrente elétrica.

Essa oposição à condução da corrente elétrica é provocada, principalmente, pela dificuldade de os elétrons livres se movimentarem pela estrutura atômica dos materiais.



A resistência elétrica é representada pela letra *R* e sua unidade de medida é *ohm* [ $\Omega$ ]. Ao lado, estão os símbolos mais usuais para representá-la num circuito elétrico.

O valor da resistência elétrica depende basicamente da *natureza* dos materiais, de suas *dimensões* e da *temperatura*.



O choque dos elétrons com os átomos provoca a transferência de parte da sua energia para eles, que passam a vibrar com mais intensidade, aumentando a temperatura do material.

Esse aumento de temperatura do material devido à passagem da corrente elétrica é denominado *efeito Joule*, conceito esse que será retomado no Capítulo 5.



A lâmpada da lanterna comporta-se como uma resistência elétrica. O aumento da temperatura por efeito Joule leva seu filamento interno à incandescência, transformando parte da energia elétrica em calor e parte em radiação luminosa.

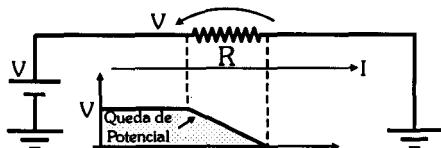
#### George Simon Ohm (1789 – 1854)

Físico alemão, trabalhou como professor de física e de matemática.

Em 1826, publicou seu trabalho “Exposição Matemática das Correntes Galvânicas”, demonstrando as *Leis de Ohm*.

A unidade de medida de resistência elétrica é *ohm*, em sua homenagem.





Uma resistência comporta-se como um *bipolo passivo*, isto é, consome a energia elétrica fornecida por uma fonte de alimentação, provocando *queda de potencial* no circuito quando uma corrente passa por ela.

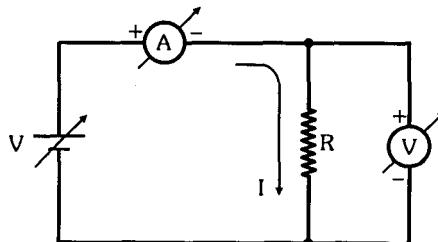
A intensidade dessa corrente  $I$  depende do valor da tensão  $V$  aplicada e da própria resistência  $R$ .

Vejamos o seguinte experimento:

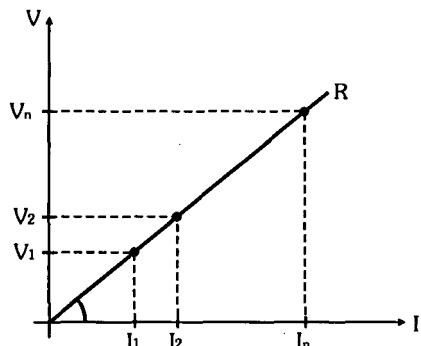
O circuito ao lado mostra uma fonte variável ligada a uma resistência elétrica. Em paralelo com a resistência, o voltímetro mede a tensão nela aplicada. Em série com a resistência, o amperímetro mede a corrente que a atravessa.

Para cada tensão aplicada à resistência ( $V_1, V_2, \dots, V_n$ ), obtém-se uma corrente diferente ( $I_1, I_2, \dots, I_n$ ).

Fazendo a relação entre  $V$  e  $I$  para cada caso, observa-se que:



$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = \dots = \frac{V_n}{I_n} = \text{constante}$$



Essa característica linear é o que chamamos de comportamento ôhmico, sendo que esse valor constante equivale à *resistência elétrica*  $R$  do material, cuja unidade de medida é *volt/ampère* [ $V/A$ ] ou, como é denominada comumente, *ohm* [ $\Omega$ ].

A relação entre tensão, corrente e resistência é denominada *Primeira Lei de Ohm*, cuja expressão matemática é:

$$V = R.I$$

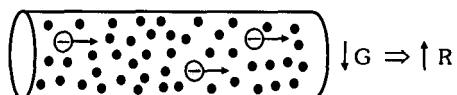
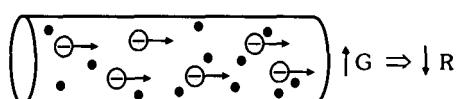
## Condutância

A *condutância* é outra característica dos materiais e, ao contrário da resistência, expressa a *facilidade* com que a corrente elétrica pode atravessá-los.

Assim, a expressão da condutância é o inverso da resistência, sendo simbolizada pela letra  $G$ , cuja unidade de medida é *1/ohm* [ $\Omega^{-1}$ ] ou *siemens* [ $S$ ].

Matematicamente:

$$G = \frac{I}{V}$$

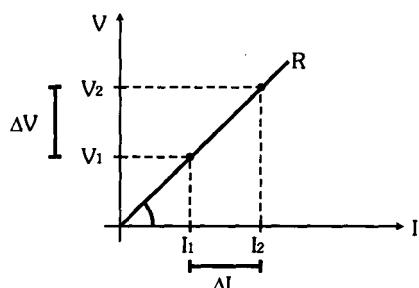
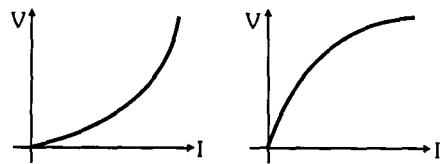


## Resistências Ôhmicas e Não Ôhmicas

A maioria das resistências elétricas têm um comportamento *ôhmico* (linear).

Porém, alguns materiais, principalmente os sensíveis ao calor e à luz, apresentam um comportamento *não ôhmico* (não linear).

O comportamento não ôhmico das resistências elétricas pode ser representado por gráficos não lineares, como os que são mostrados na figura ao lado.

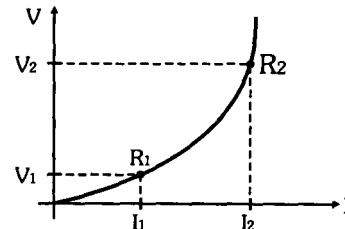


No caso da resistência linear, o seu valor ôhmico independe da tensão aplicada, podendo ser obtido por uma das seguintes formas:

$$R = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} \quad \text{ou} \quad R = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{V_2 - V_1}{I_2 - I_1}$$

Já, para a resistência não linear, o seu valor ôhmico depende da tensão aplicada, tendo um valor específico para cada condição de operação, ou seja:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \neq R_2 = \frac{V_2}{I_2}$$

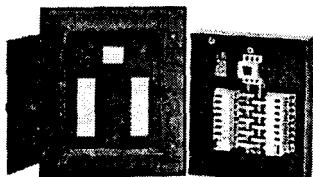
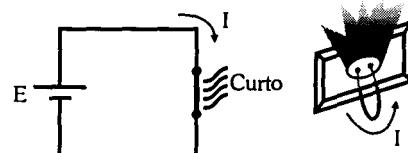


## Curto-circuito

Quando ligamos um condutor ( $R \approx 0$ ) diretamente entre os pólos de uma fonte de alimentação ou de uma tomada da rede elétrica, a corrente tende a ser *extremamente elevada*.

Essa condição é denominada *curto-circuito*, devendo ser evitada, pois a corrente alta produz um calor intenso por efeito Joule, podendo danificar a fonte de alimentação ou provocar incêndio na instalação elétrica.

Por isso, é comum as fontes de alimentação possuírem internamente circuitos de proteção contra curto-circuito e/ou circuitos limitadores de corrente.



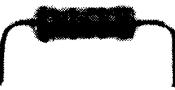
É o que ocorre também com as instalações elétricas, que possuem fusíveis que queimam ou disjuntores que se desarmam na ocorrência de uma elevação brusca da corrente, protegendo toda a fiação da instalação.

Diversos dispositivos são fabricados para atuarem como *resistências fixas* num circuito elétrico.

## Resistor

O *resistor* é um dispositivo cujo valor de resistência, sob condições normais, permanece constante.

Comercialmente, podem ser encontrados resistores com diversas tecnologias de fabricação, aspectos e características, como mostra a tabela seguinte:

Tipo de Resistor	Valor Nominal	Tolerância	Potência
Filme Metálico 	1 a 10MΩ	1 a 5%	1/4 a 5W
Filme Carbono 	1 a 10MΩ	5 a 10%	1/4 a 5W
Fio 	1 a 1kΩ	5 a 20%	1/2 a 100W
SMD 	1 a 10MΩ	1 a 5%	1/10 a 1W

**Obs.:** • Essas características podem variar em função do fabricante de resistores.

- *SMD (Surface Mounting Device)* significa Dispositivo de Montagem em Superfície.

Das características dos resistores, duas merecem uma explicação adicional:

**I- Potência:** O conceito de potência será melhor abordado no Capítulo 5, porém, apenas para que essa característica do resistor seja compreendida, podemos dizer que ela está relacionada ao efeito Joule, isto é, ao aquecimento provocado pela passagem da corrente pela resistência. Por isso, o fabricante informa qual é a *potência máxima* que o resistor suporta sem alterar o seu valor além da tolerância prevista e sem danificá-lo.

**II- Tolerância:** Os resistores não são componentes ideais. Por isso, os fabricantes fornecem o seu *valor nominal RN* acompanhado de uma *tolerância r%*, que nada mais é do que a sua margem de erro, expressando a faixa de valores prevista para ele. Assim, o valor real *R* de um resistor pode estar compreendido entre um valor mínimo *Rm* e máximo *RM*, isto é,  $R_m \leq R \leq R_M$ , sendo essa faixa de resistências dada por  $R = RN \pm r\%$ .

## Código de Cores

Os resistores de maior potência, por terem maiores dimensões, podem ter gravados em seus corpos os seus valores nominais e tolerâncias. Porém, os resistores de baixa potência são muito pequenos, tornando inviável essa gravação.

Assim sendo, gravam-se nos resistores anéis coloridos que, a partir de um *código de cores* preestabelecido, informam os seus *valores nominais* e suas *tolerâncias*.

Existem dois códigos de cores: um para resistores de 5% e 10% de tolerância, formado por quatro anéis; outro para resistores de 1% e 2% de tolerância (resistores de precisão), formado por cinco anéis.



**Obs.:** Há também os resistores com 20% de tolerância, cujo código de cores é formado por três anéis. Atualmente, esses resistores não são mais fabricados em grande escala.

A leitura do valor nominal e da tolerância de um resistor é feita conforme mostra o esquema e a tabela dados abaixo:

Resistores - Código de Cores					
Cores	1º Dígito	2º Dígito	3º Dígito	Múltiplo	Tolerância
				5 anéis (1 e 2%)	4 anéis (5 e 10%)
Preto		0	0	x 1	
Marrom	1	1	1	x 10	± 1 %
Vermelho	2	2	2	x 10 <sup>2</sup>	± 2 %
Laranja	3	3	3	x 10 <sup>3</sup>	
Amarelo	4	4	4	x 10 <sup>4</sup>	
Verde	5	5	5	x 10 <sup>5</sup>	
Azul	6	6	6	x 10 <sup>6</sup>	
Violeta	7	7	7	x 10 <sup>7</sup>	
Cinza	8	8	8		
Branco	9	9	9		
Ouro				x 10 <sup>-1</sup>	± 5 %
Prata				x 10 <sup>-2</sup>	± 10 %
Ausência					± 20 %

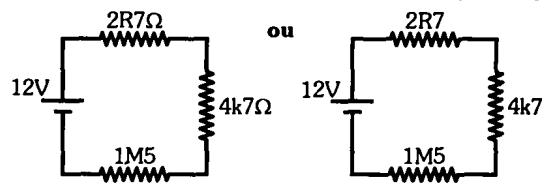
### IMPORTANTE!

Num esquema elétrico, ao identificar o valor de um resistor, é comum substituir a vírgula pela letra *R* ou por um *prefixo métrico*.

Na prática, isso é feito para evitar que uma falha de impressão na vírgula ou uma mancha resultem na leitura errada do valor do resistor.

Veja os exemplos abaixo!

$$\begin{array}{lll} 2,7\Omega & \Rightarrow & 2R7\Omega \quad \text{ou} \quad 2R7 \\ 4,7k\Omega & \Rightarrow & 4k7\Omega \quad \text{ou} \quad 4k7 \\ 1,5M\Omega & \Rightarrow & 1M5\Omega \quad \text{ou} \quad 1M5 \end{array}$$



## Valores Comerciais de Resistores

Comercialmente, podem ser encontrados resistores de diversos valores, dependendo da classe de tolerâncias à qual pertencem.

A tabela seguinte mostra as *décadas* de 10 a 99, cujos valores nominais são seus múltiplos e submúltiplos:

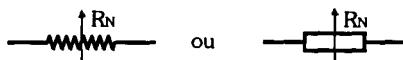
Décadas de Valores Comerciais de Resistores											
1% 2%	5%	10% 20%	1% 2%	5%	10% 20%	1% 2%	5%	10% 20%	1% 2%	5%	10% 20%
10,0	10	10	18,7	-	-	33,2	-	-	57,6	-	-
10,2	-	-	19,1	-	-	34,0	-	-	59,0	-	-
10,5	-	-	19,6	-	-	34,8	-	-	60,4	-	-
10,7	-	-	20,0	20	-	35,7	-	-	61,9	-	-
11,0	11	-	20,5	-	-	-	36	-	-	62	-
11,3	-	-	21,0	-	-	36,5	-	-	63,4	-	-
11,5	-	-	21,5	-	-	37,4	-	-	64,9	-	-
11,8	-	-	-	22	22	38,3	-	-	66,5	-	-
12,0	12	12	22,1	-	-	-	39	39	-	68	68
12,1	-	-	22,6	-	-	39,2	-	-	68,1	-	-
12,4	-	-	23,2	-	-	40,2	-	-	69,8	-	-
12,7	-	-	23,7	-	-	41,2	-	-	71,5	-	-
13,0	13	-	24,0	24	-	42,2	-	-	73,2	-	-
13,3	-	-	24,3	-	-	-	43	-	75,0	75	-
13,7	-	-	24,9	-	-	43,2	-	-	76,8	-	-
14,0	-	-	25,5	-	-	44,2	-	-	78,7	-	-
14,3	-	-	26,1	-	-	45,3	-	-	80,6	-	-
14,7	-	-	26,7	-	-	46,4	-	-	-	82	82
15,0	15	15	-	27	27	47,0	47	47	82,5	-	-
15,4	-	-	27,4	-	-	47,5	-	-	84,5	-	-
15,8	-	-	28,0	-	-	48,7	-	-	86,6	-	-
16,0	16	-	28,7	-	-	49,9	-	-	88,7	-	-
16,2	-	-	29,4	-	-	-	51	-	90,9	-	-
16,5	-	-	-	30	-	51,1	-	-	-	91	-
16,9	-	-	30,1	-	-	52,3	-	-	93,1	-	-
17,4	-	-	30,9	-	-	53,6	-	-	95,3	-	-
17,8	-	-	31,6	-	-	54,9	-	-	96,5	-	-
18,0	18	18	32,4	-	-	-	56	56	97,6	-	-
18,2	-	-	-	33	33	56,2	-	-	98,8	-	-

**Obs.:** Os valores mostrados nesta tabela podem variar de um fabricante para outro.

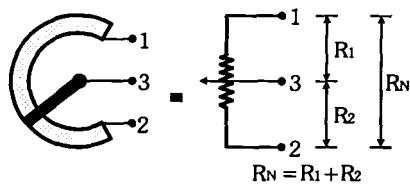
Diversos dispositivos são fabricados para atuarem como *resistências variáveis* num circuito elétrico.

A resistência variável é aquela que possui uma haste para o *ajuste manual* da resistência entre os seus terminais.

Os símbolos usuais para essas resistências variáveis estão mostrados na figura abaixo.



As resistências variáveis possuem três terminais. A resistência entre as duas extremidades é o seu valor nominal  $R_N$  (resistência máxima), sendo que a resistência ajustada é obtida entre uma das extremidades e o terminal central, que é acoplado mecanicamente à haste de ajuste, conforme mostra a figura abaixo.



### Valores Comerciais de Resistências Variáveis

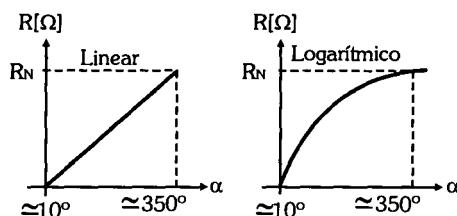
Comercialmente, podem ser encontradas resistências variáveis de diversos valores, sendo que as décadas mais comuns, cujos valores nominais são seus múltiplos e submúltiplos, estão na tabela seguinte:

Décadas para Resistências Variáveis					
10	20	22	25	47	50

A resistência variável, embora possua três terminais, é também um bipolo, pois, após o ajuste, ela se comporta como um resistor de dois terminais com o valor desejado.

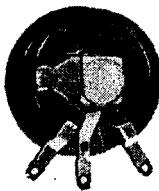
Uma resistência variável pode ser linear ou logarítmica, conforme a variação de seu valor em função da ação da haste de ajuste.

Os gráficos abaixo mostram a diferença de comportamento da resistência entre um potenciômetro rotativo linear e um potenciômetro rotativo logarítmico.



Comercialmente, podem ser encontrados diversos tipos de resistências variáveis, cada um voltado para determinadas aplicações.

A tabela abaixo mostra alguns tipos de resistências variáveis, bem como exemplos de seus empregos.

Tipos e Aplicações das Resistências Variáveis					
Rotativo	Deslizante	Potenciômetro			
		<b>Potenciômetro</b> Os potenciômetros rotativos e deslizantes são utilizados em equipamentos que precisam da atuação constante do usuário, como o controle de volume de um amplificador de áudio.			
Trimpot	Multivoltas	<b>Trimpot</b> O trimpot é utilizado em equipamentos que necessitam de calibração ou ajuste interno, cuja ação não deve ficar acessível ao usuário, como nos instrumentos de medidas. Nos casos em que a precisão do ajuste é importante, deve-se utilizar o trimpot multivoltas.			
	<b>Reostato</b> O reostato é uma resistência variável de alta potência, sendo utilizado em instalações que operam com altas correntes elétricas, como o controle de motores elétricos.				
	<b>Década Resistiva</b> A década resistiva é um equipamento de laboratório, utilizado para fornecer resistências com valores precisos para a realização de determinados experimentos.				

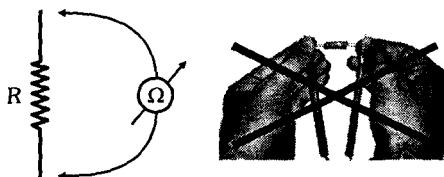
O instrumento que mede resistência elétrica é chamado de *ohmímetro*.

Os multímetros possuem escalas apropriadas para a medida de resistência elétrica.

Para medir a resistência elétrica de uma resistência fixa ou variável, ou ainda, de um conjunto de resistores interligados, é preciso que eles *não estejam submetidos a qualquer tensão*, pois isso poderia acarretar em erro de medida ou até danificar o instrumento.

Assim, é necessário desconectar o dispositivo do circuito para a medida de sua resistência.

Para a medida, os terminais do ohmímetro devem ser ligados em paralelo com o dispositivo ou circuito a ser medido, sem se importar com a polaridade dos terminais do ohmímetro.

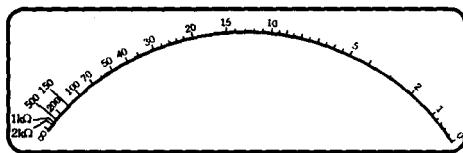


**Atenção:** Nunca segure os dois terminais do dispositivo a ser medido com as mãos, pois a resistência do corpo humano pode interferir na medida, causando erro.

O ohmímetro analógico é bem diferente do digital, tanto no procedimento quanto na leitura de uma medida.

No *ohmímetro digital*, após a escolha do valor de fundo de escala adequado, a leitura da resistência é feita diretamente no *display*.

Escala do Ohmímetro Analógico



No *ohmímetro analógico*, a escala graduada é invertida e não linear, iniciando com resistência infinita ( $R = \infty$ ) na extremidade esquerda (correspondendo aos terminais do ohmímetro em aberto e ponteiro na posição de repouso) e terminando com resistência nula ( $R = 0$ ) na extremidade direita (correspondendo aos terminais do ohmímetro em curto e ponteiro totalmente defletido).

Assim sendo, o procedimento para a realização da *medida* com o ohmímetro analógico deve ser:

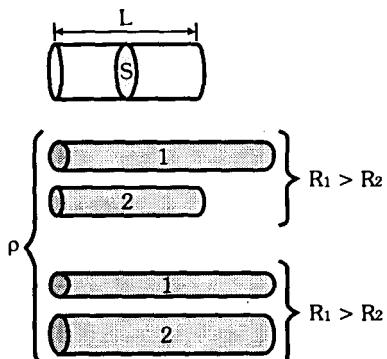
- 1) Escolhe-se a escala desejada, que é um múltiplo dos valores da escala graduada:  $\times 1$ ,  $\times 10$ ,  $\times 100$ ,  $\times 1k$ ,  $\times 10k$  e  $\times 100k$ ;
- 2) Curto-circuitam-se os terminais do ohmímetro, provocando a deflexão total do ponteiro;
- 3) Ajusta-se o *pontenciômetro de ajuste de zero* até que o ponteiro indique  $R = 0$ ;
- 4) Abrem-se os terminais e mede-se a resistência;
- 5) A leitura é feita multiplicando o valor indicado pelo ponteiro pelo múltiplo da escala selecionada.

#### Observações:

- Por causa da não-linearidade da escala, as leituras mais precisas no ohmímetro analógico são feitas na *região central* da escala graduada.
- No procedimento de ajuste de zero (item 3), caso o ponteiro não atinja o ponto zero, significa que a bateria do multímetro está fraca, devendo ser substituída.
- O procedimento de ajuste de zero deve ser repetido a cada mudança de escala.

A Segunda Lei de Ohm estabelece a relação entre a resistência de um material com a sua natureza e suas dimensões.

Quanto à natureza, os materiais se diferenciam por suas resistividades, característica essa que é representada pela letra grega  $\rho$  (rô), cuja unidade de medida é ohm.metro [ $\Omega \cdot m$ ]. Quanto às dimensões do material, são importantes o seu comprimento  $L$ , em [m], e a área da seção transversal  $S$ , em [ $m^2$ ].



A Segunda Lei de Ohm expressa a relação entre essas características da seguinte forma:

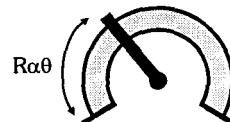
“A resistência  $R$  de um material é diretamente proporcional à sua resistividade  $\rho$  e ao seu comprimento  $L$ , e inversamente proporcional à área de sua seção transversal  $S$ .”

Matematicamente:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S}$$

Portanto, a resistência elétrica aumenta com o aumento da resistividade do material, com o aumento do seu comprimento e com a diminuição da área de sua seção transversal.

No caso das resistências variáveis, como o potenciômetro rotativo, a resistência entre o terminal central e uma das extremidades depende do comprimento do material resistivo interno, que é proporcional ao ângulo de giro da haste.



A tabela seguinte mostra a resistividade média  $\rho$  de diferentes materiais. Esses valores são aproximados e tomados à temperatura de 20 °C.

Classificação	Material - (T = 20°C)	Resistividade - $\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]
Metal	Prata	$1,6 \times 10^{-8}$
	Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$
	Alumínio	$2,8 \times 10^{-8}$
	Tungstênio	$5,0 \times 10^{-8}$
Liga	Latão	$8,6 \times 10^{-8}$
	Constantâ	$50 \times 10^{-8}$
	Níquel-cromo	$110 \times 10^{-8}$
Carbono	Grafite	$4000 \text{ a } 8000 \times 10^{-8}$
Isolante	Água pura	$2,5 \times 10^3$
	Vidro	$10^{10} \text{ a } 10^{13}$
	Porcelana	$3,0 \times 10^{12}$
	Mica	$10^{13} \text{ a } 10^{15}$
	Baquelite	$2,0 \times 10^{14}$
	Borracha	$10^{15} \text{ a } 10^{16}$
	Âmbar	$10^{16} \text{ a } 10^{17}$

O fio de cobre, embora seja um bom condutor, passa a ter uma resistência considerável para grandes distâncias. Por isso, a Segunda Lei de Ohm é particularmente importante no cálculo da resistência das linhas de transmissão de energia elétrica, linhas telefônicas e linhas de comunicação de dados.

A resistividade dos materiais depende da temperatura. Assim, uma outra característica dos materiais é o *coeficiente de temperatura*, que mostra de que forma a resistividade e, consequentemente, a resistência variam com a temperatura.

O coeficiente de temperatura é simbolizado pela letra grega  $\alpha$  (alfa), cuja unidade de medida é  $[{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$ .

A expressão para calcular a variação da resistividade com a temperatura é a seguinte:

$$\rho = \rho_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

em que:  $\rho$  = resistividade do material, em  $[\Omega \cdot \text{m}]$ , à temperatura  $T$ ;

$\rho_o$  = resistividade do material, em  $[\Omega \cdot \text{m}]$ , a uma temperatura de referência  $T_o$ ;

$\Delta T = T - T_o$  = variação da temperatura, em  $[{}^{\circ}\text{C}]$ ;

$\alpha$  = coeficiente de temperatura do material, em  $[{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$ .

Nesse caso, a relação entre as resistências envolvidas é a seguinte:

$$\frac{R}{\rho} = \frac{R_o}{\rho_o}$$

As tabelas seguintes mostram o coeficiente de temperatura, as características e as aplicações de diferentes materiais:

Classificação	Material	Coeficiente - $\alpha [{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$
Metal	Prata	0,0038
	Alumínio	0,0039
	Cobre	0,0040
	Tungstênio	0,0048
Liga	Constantã	0 (valor médio)
	Níquel-cromo	0,00017
	Latão	0,0015
Carbono	Grafite	-0,0002 a -0,0008

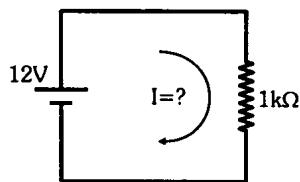
Aplicação de Alguns Materiais na Fabricação de Dispositivos Elétricos

Material	Característica	Aplicações
Cobre	<ul style="list-style-type: none"> <li>• baixa resistividade</li> <li>• alta flexibilidade</li> </ul>	Fabricação de condutores e cabos elétricos.
Tungstênio	<ul style="list-style-type: none"> <li>• baixa resistividade</li> <li>• alta temperatura de fusão</li> </ul>	Fabricação de filamentos para lâmpadas incandescentes.
Carbono	<ul style="list-style-type: none"> <li>• alta resistividade</li> <li>• baixo coeficiente de temperatura</li> </ul>	Fabricação de resistores de baixa e média potências.
Constantã	<ul style="list-style-type: none"> <li>• média resistividade</li> <li>• coeficiente de temperatura nulo</li> </ul>	Fabricação de resistores de baixa e média potências.
Mica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• alta resistividade</li> <li>• baixa resistência térmica</li> </ul>	Revestimento de resistências de aquecimento.
Plástico e borracha	<ul style="list-style-type: none"> <li>• alta resistividade</li> <li>• alta flexibilidade</li> </ul>	Revestimento de fios, cabos elétricos e ferramentas.
Baquelite	<ul style="list-style-type: none"> <li>• alta resistividade</li> <li>• baixa flexibilidade</li> </ul>	Revestimento de dispositivos de controle e proteção, como chaves e disjuntores.

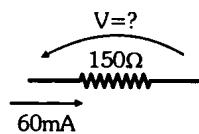
## Exercícios Propostos

### Primeira Lei de Ohm

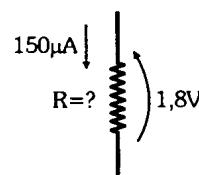
- 4.1) Qual é a intensidade da corrente elétrica que passa por uma resistência de  $1k\Omega$  submetida a uma tensão de  $12V$ ?



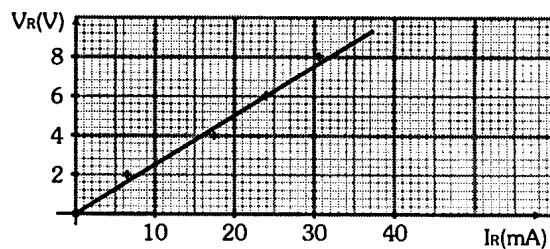
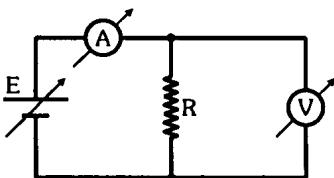
- 4.2) Por uma resistência de  $150\Omega$  passa uma corrente elétrica de  $60mA$ . Qual é a queda de tensão que ela provoca no circuito?



- 4.3) Por uma resistência passa uma corrente de  $150\mu A$ , provocando uma queda de tensão de  $1,8V$ . Qual é o valor dessa resistência?



- 4.4) Num experimento, levantou-se a curva característica  $V_R \times I_R$  de um resistor, cuja tolerância é  $10\%$ , conforme as figuras abaixo:



- a) Quais são os valores experimental e nominal de  $R$ ?  
b) Qual é o erro percentual entre o valor experimental obtido e o nominal?

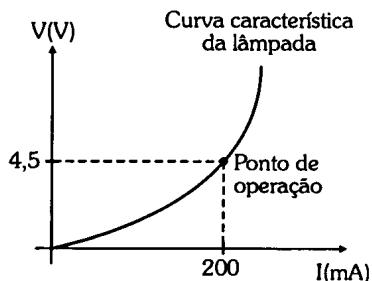
- 4.5) Determine a condutância correspondente a uma resistência de  $10k\Omega$ .

- 4.6) Determine a condutância correspondente a uma resistência de  $1\Omega$ .

### Informações Adicionais sobre Resistências

- 4.7) A lâmpada da lanterna possui comportamento não ôhmico devido, principalmente, à temperatura do filamento durante a incandescência.

Determine a resistência da lâmpada para a sua condição normal de operação:  $V = 4,5V$  e  $I = 200mA$ .

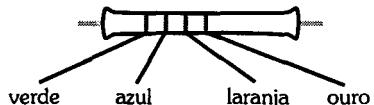


## Resistências Fixas

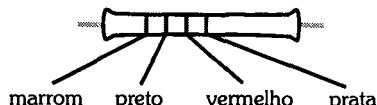
4.8) Um resistor é especificado em  $22k\Omega \pm 10\%$ . Determina a faixa de valores reais  $R_m \leq R \leq R_M$  prevista pelo fabricante para esse resistor.

4.9) Determine o valor nominal e a tolerância dos seguintes resistores:

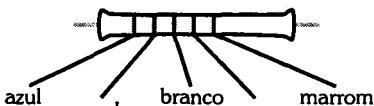
a)



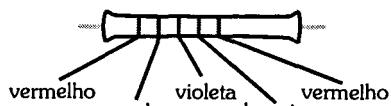
b)



c)



d)



4.10) Descreva as cores dos anéis dos seguintes resistores:

a)  $3,3k\Omega \pm 5\%$

b)  $470\Omega \pm 10\%$

c)  $86,6k\Omega \pm 1\%$

d)  $5,11\Omega \pm 2\%$

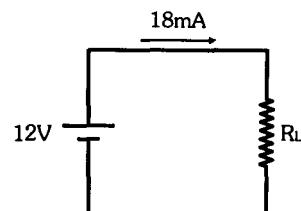
4.11) No projeto de um amplificador, foram calculados os valores dos quatro resistores de polarização do transistor:

$$R_{B1} = 5230\Omega; R_{B2} = 1073\Omega; R_C = 328\Omega; R_E = 102\Omega.$$

Escolha os resistores comerciais mais próximos, com tolerâncias de 1%, 5% e 10%, que podem ser utilizados na montagem desse amplificador.

**Obs.:** O transistor é um dispositivo semicondutor, não sendo objeto de estudo deste livro.

4.12) Deseja-se que a fonte de alimentação ao lado forneça uma corrente de  $18mA$  ao resistor de carga  $R_L$ .



a) Quais são o valor comercial e a tolerância desse resistor de carga para que a corrente seja a mais próxima possível de  $18mA$ ?

b) Escolhido o resistor, quais serão as correntes máxima e mínima possíveis, levando-se em consideração a sua tolerância?

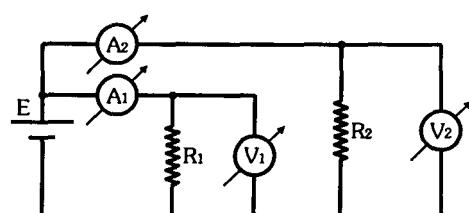
4.13) Determine as cores dos resistores do circuito ao lado, sabendo que  $R_1$  é de 5% e  $R_2$  é de 1%, e os instrumentos de medidas são ideais, considerando os dados seguintes:

$$A_1 = 1,42 mA$$

$$A_2 = 33,63 mA$$

$$V_1 = 12 V$$

$$V_2 = 12 V$$



## Ohmímetro

4.14) Um resistor de 5% de tolerância com valor desconhecido foi medido por um ohmímetro digital e um analógico. No ohmímetro digital, com a escala selecionada em  $20k\Omega$ , o valor mostrado pelo display foi 15,35 e no ohmímetro analógico, calibrado corretamente na escala selecionada, o valor mostrado pelo ponteiro foi 14,5.

a) Qual escala foi selecionada pelo ohmímetro analógico?

b) Qual é o provável valor nominal desse resistor?

c) Quais são os erros percentuais dos valores medidos em relação ao valor nominal para ambos os ohmímetros?

d) Qual é a provável causa para a diferença entre as medidas obtidas pelos ohmímetros digital e analógico?

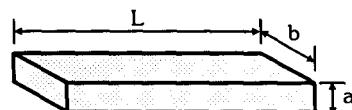
## Segunda Lei de Ohm

- 4.15) Determine a resistência de um fio de cobre de  $4\text{mm}$  de diâmetro e  $10\text{km}$  de comprimento.  
 4.16) Deseja-se montar um resistor de precisão de  $2,43\Omega$  com um fio de níquel-cromo de  $1\text{mm}$  de diâmetro. Qual deve ser o comprimento desse fio?

- 4.17) O material ao lado possui as seguintes dimensões:

$$L = 20\text{cm}; \quad a = 2\text{mm}; \quad b = 4\text{mm}.$$

A resistência entre as extremidades desse material medida com um ohmímetro é de  $1,5\Omega$ . Que material provavelmente é esse?



- 4.18) Considere o reostato ao lado e os dados seguintes:

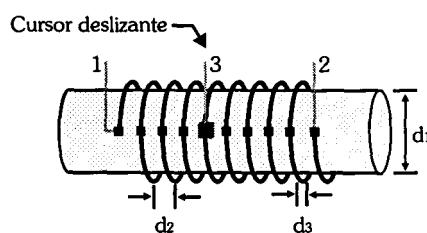
$$\rho = 150 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$d_1 = 8\text{ cm}$$

$$d_2 = 1\text{ mm}$$

$$d_3 = 0,5\text{ mm}$$

$$\text{nº de espiras} = 50$$



a) Qual é o valor aproximado da resistência de cada espira do reostato?

b) Qual é a resistência total  $R_{12}$  do reostato?

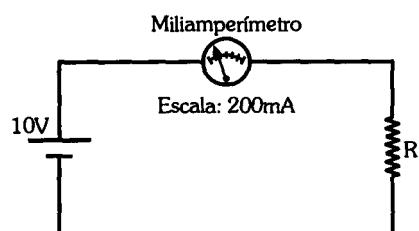
c) Qual é a resistência  $R_{13}$ , estando o cursor no ponto médio do reostato?

- 4.19) Há duas resistências  $R_1 = R_2 = 100\Omega$  à temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Sabendo que  $R_1$  é de grafite, com  $\rho_0 = 5000 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e  $\alpha = -0,0004^\circ\text{C}^{-1}$ , e  $R_2$  é de níquel-cromo, com  $\rho_0 = 110 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e  $\alpha = 0,00017^\circ\text{C}^{-1}$ , determine:

a) A resistência  $R'_1$  para a temperatura de  $100^\circ\text{C}$ ;

b) A resistência  $R'_2$  para a temperatura de  $100^\circ\text{C}$ .

- 4.20) Considere o circuito abaixo e a escala graduada do miliamperímetro:

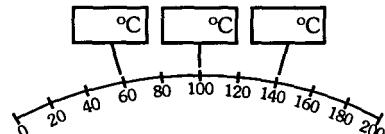


Dados:

$$R = 100 \Omega \text{ (a } 20^\circ\text{C)}$$

$$\rho = 110 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \text{ (a } 20^\circ\text{C)}$$

$$\alpha = 0,00017^\circ\text{C}^{-1}$$



Determine as temperaturas que correspondem às correntes do miliamperímetro, conforme os retângulos da escala graduada.

**5.1**

**Conceito de Potência Elétrica**

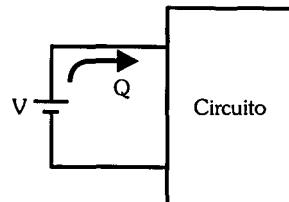
O conceito de *potência elétrica*  $P$  está associado à quantidade de energia elétrica  $\tau$  desenvolvida num intervalo de tempo  $\Delta t$  por um dispositivo elétrico.

$$\text{Matematicamente: } P = \frac{\tau}{\Delta t}$$

Por essa expressão, a unidade de medida de potência é *joule/segundo [J/s]*.

Num circuito elétrico, a potência pode também ser definida como sendo a quantidade de carga elétrica  $Q$  que uma fonte de tensão  $V$  pode fornecer ao circuito num intervalo de tempo  $\Delta t$ .

$$\text{Matematicamente: } P = \frac{V \cdot Q}{\Delta t}$$



Mas  $Q / \Delta t$  corresponde à corrente elétrica  $I$  fornecida pela fonte de alimentação ao circuito. Assim, a expressão da potência se resume à fórmula abaixo:

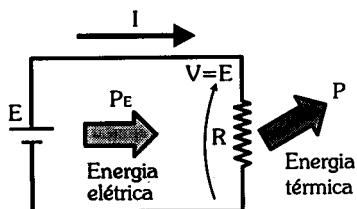
$$P = V \cdot I$$

Embora as três expressões de potência acima sejam correspondentes, por motivos práticos, utilizamos a terceira expressão ( $P = V \cdot I$ ), já que tensão e corrente podem ser medidas facilmente com um multímetro.

Por essa expressão, a unidade de medida de potência é *volt.ampère [VA]*.

Para unidade de medida de potência em circuitos  $CC$ , ao invés de  $[J/s]$  ou  $[V.A]$ , é mais comum a utilização de uma unidade equivalente denominada *watt [W]*.

No Capítulo 15, quando analisarmos a potência em circuitos indutivos e capacitivos operando em corrente alternada, veremos que, além das unidades *watt [W]* e *volt.ampère [VA]*, é também usada a unidade *volt.ampère reativo [VAR]*.



Analisemos agora uma fonte de tensão alimentando uma carga resistiva  $R$ .

A fonte  $E$  fornece ao resistor uma corrente  $I$  e, portanto, uma potência  $P_E = E.I$ . No resistor, a tensão é a mesma da fonte, isto é,  $V = E$ . Assim, a potência dissipada pelo resistor é  $P = V.I$ .

Isso significa que toda a potência da fonte foi dissipada (ou absorvida) pelo resistor, pois  $P_E = P$ .

De fato, o que está ocorrendo é que em todo instante a energia elétrica fornecida pela fonte está sendo transformada pela resistência em energia térmica (calor) por *efeito Joule*.

No resistor, a potência dissipada em função de  $R$  pode ser calculada pelas expressões:

$$P = V \cdot I = \frac{R \cdot I \cdot I}{V} \Rightarrow \boxed{P = R \cdot I^2}$$

ou

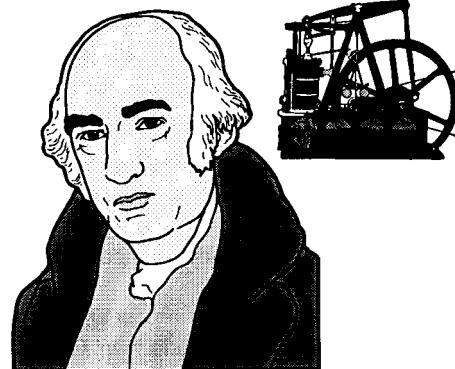
$$P = V \cdot I = V \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

### **James Watt (1736 – 1819)**

*Escocês, aprendiz de fabricante de ferramentas, logo cedo interessou-se pelas descobertas no campo da eletricidade.*

*Quando se tornou fabricante de peças e de instrumentos de matemática na Universidade de Glasgow, Watt criou uma máquina a vapor muito mais rápida e econômica, permitindo a mecanização das indústrias em grande escala.*

*A unidade de medida de potência elétrica é watt, em sua homenagem.*



Inicialmente, vimos que  $P = \tau / \Delta t$ . Assim, a *energia elétrica* desenvolvida em um circuito pode ser calculada pela fórmula ao lado:

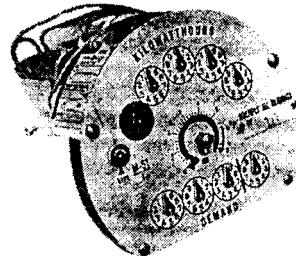
$$\tau = P \cdot \Delta t$$

Por essa expressão, a unidade de medida de energia elétrica é *joule [J]* ou *watt.segundo [W.s]*.

Essa expressão é utilizada para calcular a energia elétrica consumida por circuitos eletrônicos, equipamentos eletrodomésticos, lâmpadas e máquinas elétricas.

No quadro de distribuição de energia elétrica de uma residência, prédio ou indústria, existe um *medidor de energia* que indica constantemente a quantidade de energia que está sendo consumida.

Mensalmente, a empresa concessionária faz a leitura da energia elétrica consumida, calculando a tarifa correspondente a ser paga pelo usuário.



Porém, como a ordem de grandeza do consumo de energia elétrica em residências e indústrias é muito elevada, a unidade de medida utilizada, no lugar de [W.s], é o *quilowatt.hora [kW.h]*.

No caso da quantidade de energia elétrica produzida por uma usina hidrelétrica, termoelétrica ou nuclear, a unidade de medida utilizada é *megawatt.hora [MW.h]*.

### Fusível e Disjuntor

Os equipamentos eletrônicos e as instalações elétricas residenciais e industriais possuem fusíveis ou disjuntores de proteção contra sobrecarga de corrente. Eles são dimensionados pela corrente elétrica máxima que suportam.

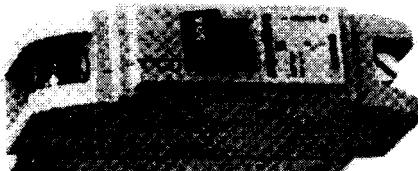
O fusível possui um filamento à base de estanho (baixo ponto de fusão) que se derrete quando a corrente que passa por ele é maior que a sua corrente nominal.

Quando isso ocorre, é preciso trocá-lo por outro após a correção do problema que causou a sua queima.

Vidro



Cartucho



No disjuntor, quando a corrente é maior que a sua corrente nominal, ele apenas se desarma. Após a correção do problema que causou o seu desarme, basta rearmá-lo para que a instalação elétrica volte a ser energizada.

## ***Exercícios Propostos***

### ***Conceito de Potência Elétrica***

- 5.1)** No circuito da lanterna, sabendo que a lâmpada está especificada para uma potência de  $900mW$  quando alimentada por uma tensão de  $4,5V$ , determine:

- a) A corrente consumida pela lâmpada;

**Obs.:** Confira esse resultado com a figura do Exercício Proposto 4.7, página 36.

- b) A resistência da lâmpada nessa condição de operação.

**Obs.:** Confira esse resultado com o obtido no Exercício Proposto 4.7, página 36.

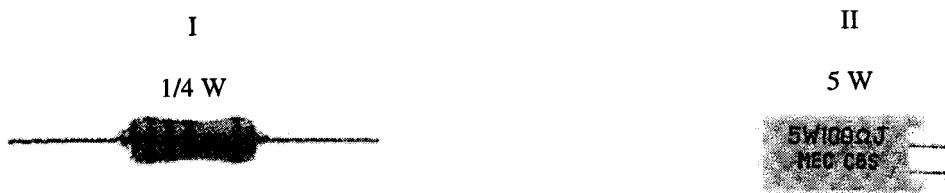
- 5.2)** Considere um resistor com as seguintes especificações:  $1k\Omega - 1/2W$ .

- a) Qual é a corrente  $I_{máx}$  e a tensão  $V_{máx}$  que ele pode suportar?

- b) Que potência  $P'$  ele dissiparia caso a tensão aplicada  $V'$  fosse metade de  $V_{máx}$ ?

- c) Quanto vale a relação  $P_{máx}/P'$  e qual conclusão pode ser tirada?

- 5.3)** Os dois resistores abaixo são de  $100 \Omega$ .



Quais são as tensões e correntes máximas que podem ser aplicadas nesses resistores?

### ***Conceito de Energia Elétrica***

- 5.4)** Uma lâmpada residencial está especificada para  $110V / 100W$ . Determine:

- a) a energia elétrica consumida por essa lâmpada num período de 5 horas diárias num mês de 30 dias.

- b) o valor a ser pago por esse consumo, sabendo que a empresa de energia elétrica cobra a tarifa de  $R\$ 0,13267$  por  $kW.h$  mais um imposto de  $33,33\%$ .

- 5.5)** Uma turbina de uma usina hidrelétrica gera energia de  $100.000 kW.h$ , abastecendo uma região com tensão de  $110V$ . Quantas lâmpadas de  $200W/110V$  essa turbina pode alimentar simultaneamente sem ultrapassar o seu limite de geração?

## Capítulo 6

# Leis de Kirchhoff e Associação de Resistores

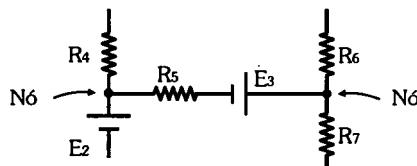
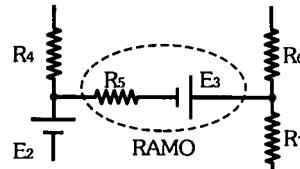
### 6.1

#### Elementos de um Circuito Elétrico

As Leis de Kirchhoff envolvem conceitos básicos para a resolução e análise de circuitos elétricos, tanto em corrente contínua como em alternada. Antes, porém, de apresentá-las, vejamos os elementos que formam um circuito elétrico.

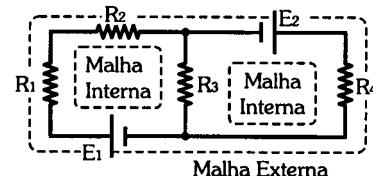
##### Ramo

Qualquer parte de um circuito elétrico composta por um ou mais dispositivos ligados em série é denominada *ramo*.



##### Nó

Qualquer ponto de um circuito elétrico no qual há a conexão de três ou mais ramos é denominado *nó*.



##### Malha

Qualquer parte de um circuito elétrico cujos ramos formam um caminho fechado para a corrente é denominada *malha*.

### 6.2

#### Leis de Kirchhoff

Um circuito admite um único sentido de corrente com um único valor para cada ramo. Uma vez conhecidos os sentidos e as intensidades das correntes em todos os ramos de um circuito, todas as tensões podem também ser determinadas.

A compreensão e a análise de um circuito dependem das duas leis básicas da eletricidade apresentadas em seguida.

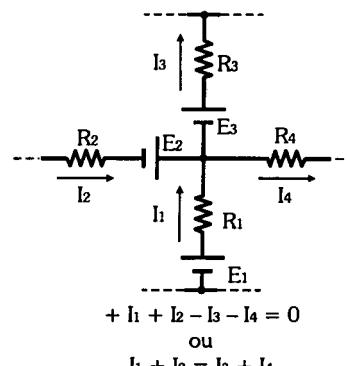
##### Lei de Kirchhoff para Correntes - Lei dos Nós

Definindo arbitrariamente as correntes que chegam ao nó como positivas e as que saem do nó como negativas, a *Lei de Kirchhoff para Correntes* pode ser enunciada como segue:

"A soma algébrica das correntes em um nó é igual a zero".

Ou

"A soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó".



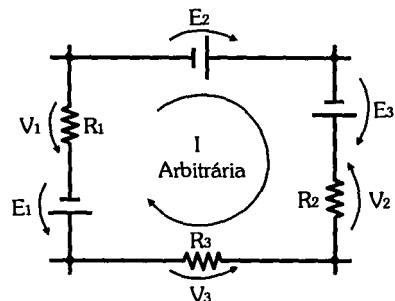
## Lei de Kirchhoff para Tensões - Lei das Malhas

Adotando um sentido arbitrário de corrente para a análise de uma malha, e considerando as tensões que elevam o potencial do circuito como positivas (geradores) e as tensões que causam queda de potencial como negativas (receptores passivos e ativos), a *Lei de Kirchhoff para Tensões* pode ser enunciada como segue:

*"A soma algébrica das tensões em uma malha é zero".*

Ou

*"A soma das tensões que elevam o potencial do circuito é igual à soma das tensões que causam a queda de potencial".*



$$+E_2 + E_3 - V_2 - V_3 - E_1 - V_1 = 0$$

ou

$$E_2 + E_3 = V_2 + V_3 + E_1 + V_1$$

## 6.3

## Associação de Resistores

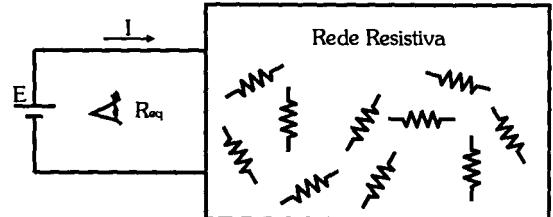
Num circuito elétrico, os resistores podem estar ligados em série e/ou paralelo, em função das características dos dispositivos envolvidos no circuito, da necessidade de dividir uma tensão ou uma corrente, ou de obter uma resistência com valor diferente dos valores encontrados comercialmente.

### Rede Resistiva

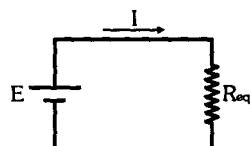
Uma rede resistiva é um circuito formado por diversas resistências ligadas em série e/ou em paralelo, alimentadas por uma única fonte de alimentação  $E$ .

As principais características de uma rede resistiva são:

- a) a resistência equivalente  $R_{eq}$  vista pela fonte de alimentação;
- b) a corrente total  $I$  fornecida pela fonte de alimentação.



Isso significa que se todos os resistores dessa rede forem substituídos por uma única resistência de valor  $R_{eq}$ , a fonte de alimentação  $E$  fornecerá a mesma corrente  $I$  ao circuito, conforme mostra a figura abaixo.



## Associação Série de Resistores

Na associação série, os resistores estão ligados de forma que a corrente  $I$  que passa por eles seja a mesma, e a tensão total  $E$  aplicada aos resistores se subdivida entre eles proporcionalmente aos seus valores.

Pela Lei de Kirchhoff para Tensões, a soma das tensões nos resistores é igual à tensão total aplicada  $E$ :

$$E = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$\text{Em que: } V_1 = R_1 \cdot I ; V_2 = R_2 \cdot I ; \dots ; V_n = R_n \cdot I$$

Substituindo as tensões nos resistores pela Primeira Lei de Ohm ( $V_i = R_i \cdot I$ ), tem-se:

$$E = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \dots + R_n \cdot I \Rightarrow E = I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

Dividindo a tensão  $E$  pela corrente  $I$ , chega-se a:

$$\frac{E}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

O resultado  $E/I$  corresponde à resistência equivalente  $R_{eq}$  da associação série, isto é, a resistência que a fonte de alimentação entende como sendo a sua carga.

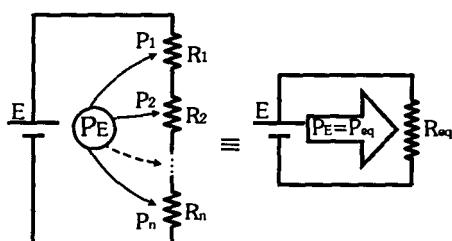
Matematicamente:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Se os  $n$  resistores da associação série forem iguais a  $R$ , a resistência equivalente pode ser calculada por:

$$R_{eq} = n \cdot R$$

Nesse circuito, a potência total  $P_E$  fornecida pela fonte ao circuito é igual à soma das potências dissipadas pelos resistores ( $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ ).

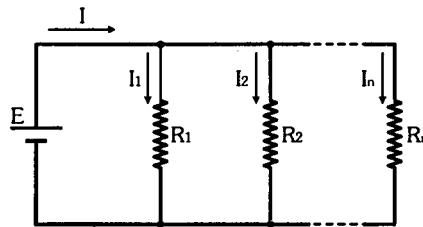


Portanto, a potência total  $P_E = E \cdot I$  fornecida pela fonte é igual à potência dissipada pela resistência equivalente  $P_{eq} = R_{eq} \cdot I^2$ .

Matematicamente:  $P_E = P_1 + P_2 + \dots + P_n = P_{eq}$

## Associação Paralela de Resistores

Na associação paralela, os resistores estão ligados de forma que a tensão total  $E$  aplicada ao circuito seja a mesma em todos os resistores, e a corrente  $I$  total do circuito se subdivida entre eles de forma inversamente proporcional aos seus valores.



Pela Lei de Kirchhoff para Correntes, a soma das correntes nos resistores é igual à corrente total  $I$  fornecida pela fonte:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$\text{Em que: } I_1 = \frac{E}{R_1} \quad ; \quad I_2 = \frac{E}{R_2} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad I_n = \frac{E}{R_n}$$

Substituindo as correntes nos resistores pela Primeira Lei de Ohm ( $I_i = E / R_i$ ), tem-se:

$$I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \dots + \frac{E}{R_n} \Rightarrow I = E \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

$$\text{Dividindo a corrente } I \text{ pela tensão } E, \text{ chega-se a: } \frac{I}{E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

O resultado  $I/E$  corresponde à condutância equivalente  $G_{eq}$  da associação paralela. Invertendo esse valor, obtém-se, portanto, a resistência equivalente  $R_{eq}$  que a fonte de alimentação entende como sendo a sua carga. Matematicamente:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Se os  $n$  resistores da associação paralela forem iguais a  $R$ , a resistência equivalente pode ser calculada por:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R}{n}}$$

No caso específico de *dois* resistores ligados em paralelo, a resistência equivalente pode ser calculada por uma equação mais simples:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

**Obs.:** Num texto, podemos representar dois resistores em paralelo por:  $R_1 // R_2$ .

Finalmente, a relação entre as potências envolvidas é:  $P_E = P_1 + P_2 + \dots + P_n = P_{eq}$ .

## Associação Mista de Resistores

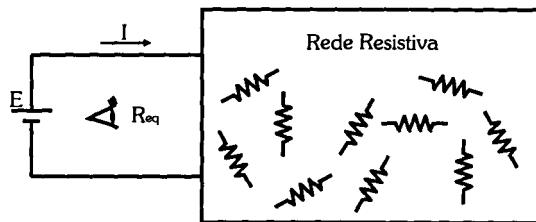
A associação mista é formada por resistores ligados em série e em paralelo, não existindo uma equação geral para a resistência equivalente, pois ela depende da configuração do circuito.

Se o circuito tiver apenas uma fonte de alimentação (rede resistiva), a sua análise, isto é, a determinação das correntes e tensões nos diversos ramos e resistores do circuito pode ser feita aplicando apenas os conceitos de associação série e paralela de resistores, e da Lei de Ohm.

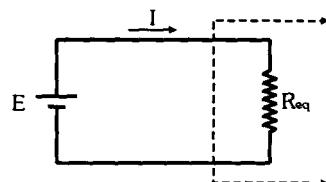
### Método de Análise

No caso de não se conhecer nenhuma tensão ou corrente interna do circuito, o método para a sua análise completa é o seguinte:

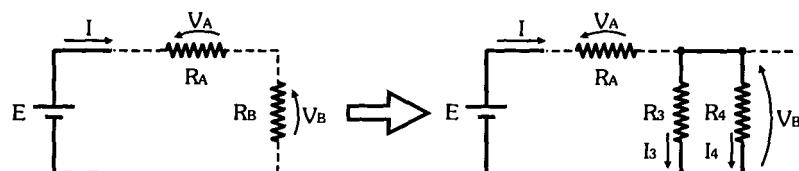
- 1) Calcula-se a resistência equivalente  $R_{eq}$  do circuito;



- 2) Calcula-se a corrente  $I$  fornecida pela fonte de alimentação ao circuito;



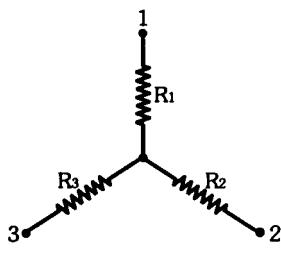
- 3) Desmembra-se a resistência equivalente, passo a passo, calculando as tensões e/ou correntes em cada parte do circuito, conforme a necessidade, até obter as tensões e correntes desejadas.



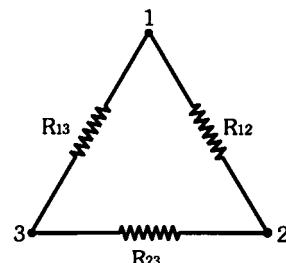
**Obs.:** Caso alguma tensão ou corrente interna do circuito seja conhecida, a análise torna-se muito mais fácil, sendo, às vezes, desnecessário até o cálculo da resistência equivalente.

Num circuito, é comum os resistores estarem ligados conforme as configurações estrela ou triângulo.

Estrela



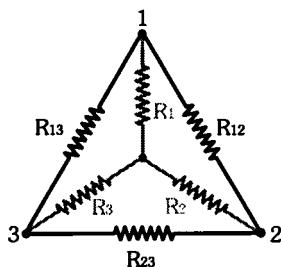
Triângulo



Estas configurações não se caracterizam nem como série, nem como paralelo, dificultando o cálculo da resistência equivalente do circuito e, portanto, a sua análise.

Para resolver este problema, é possível converter uma configuração na outra, fazendo com que os resistores mudem de posição sem, no entanto, mudarem as características elétricas do circuito.

Conversão Estrela-Triângulo

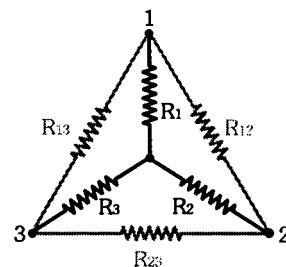


$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

Conversão Triângulo-Estrela



$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

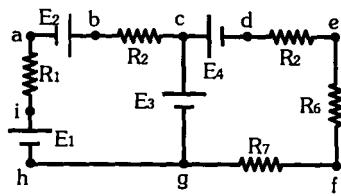
$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

## Exercícios Propostos

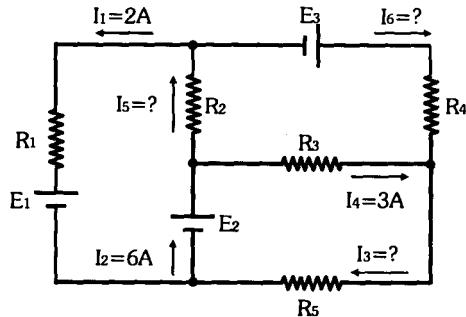
### Elementos de um Circuito Elétrico

- 6.1) No circuito elétrico ao lado, identifique os seus nós, ramos e malhas.

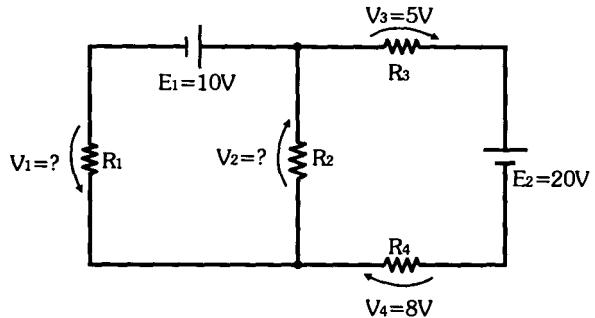


### Lei de Kirchhoff

- 6.2) No circuito ao lado, são conhecidos os valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_4$ . Determine  $I_3$ ,  $I_5$  e  $I_6$  por meio da Lei de Kirchhoff para Correntes.

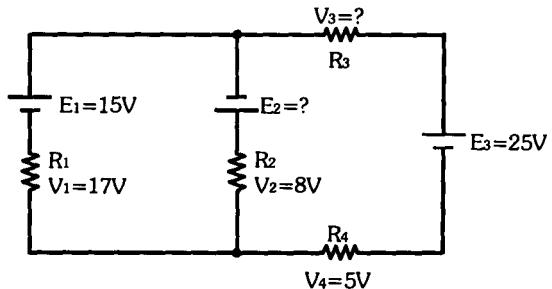


- 6.3) No circuito ao lado, são conhecidos os valores de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $V_3$  e  $V_4$ . Determine  $V_1$  e  $V_2$  por meio da Lei de Kirchhoff para Tensões.

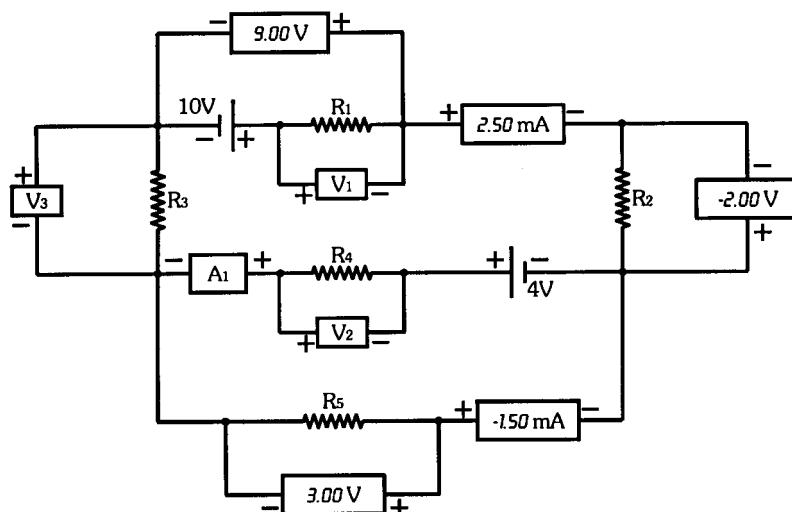


- 6.4) No circuito ao lado, são conhecidos os valores de  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_4$ . Determine  $E_2$  e  $V_3$  para que a Lei de Kirchhoff para Tensões seja válida.

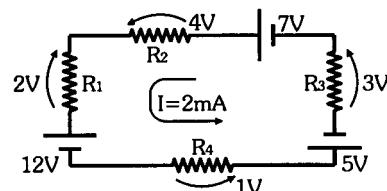
Obs.: As polaridades de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_4$  não são conhecidas.



- 6.5) Considere o circuito ao lado. Nele foram inseridos voltímetros e amperímetros digitais ideais, com as polaridades indicadas em seus terminais. Os instrumentos estão marcando valores positivos ou negativos, dependendo de as ligações no circuito estarem corretas ou não. Descubra que valores devem estar marcando os voltímetros  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  e o amperímetro  $A_1$ .



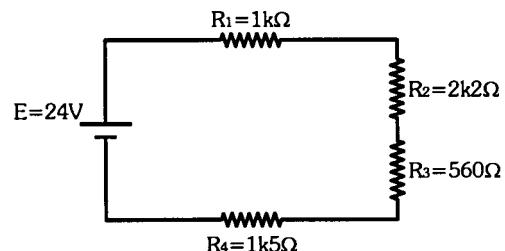
- 6.6) Um estudante calculou a corrente e as tensões nos resistores de um circuito, conforme mostrado ao lado. Porém, ao analisar os resultados, você, obviamente, observou dois erros gritantes. Identifique esses erros.



### Associação de Resistores

- 6.7) Considerando o circuito ao lado, formado por quatro resistores ligados em série, determine:

- a resistência equivalente do circuito série;
- a corrente  $I$  fornecida pela fonte  $E$  ao circuito;
- A queda de tensão provocada por cada resistor.

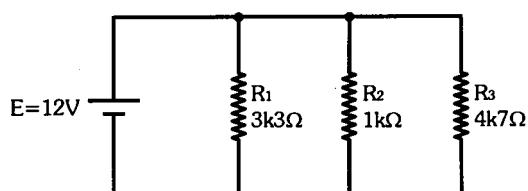


- 6.8) Considere o exercício 6.7.

- Verifique pela Lei de Kirchhoff para Tensões se os resultados do item (c) estão corretos.
- Mostre que  $P_E = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_{eq}$ .

- 6.9) Considerando o circuito ao lado, formado por três resistores ligados em paralelo, determine:

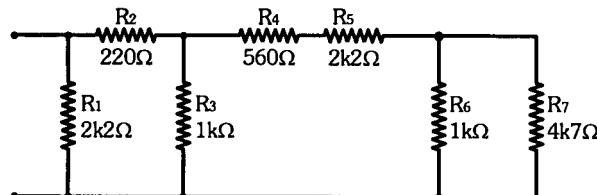
- a resistência equivalente do circuito paralelo;
- a corrente  $I$  fornecida pela fonte  $E$  ao circuito;
- a corrente que passa por cada resistor.



**6.10) Considere o exercício 6.9.**

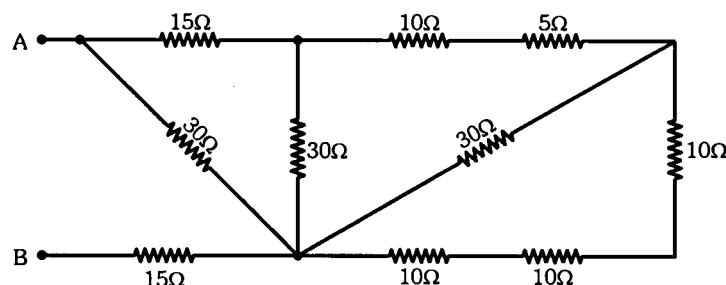
- Verifique pela Lei de Kirchhoff para Correntes se os resultados do item (c) estão corretos.
- Mostre que  $P_E = P_1 + P_2 + P_3 = P_{eq}$ .

**6.11) Considerando o circuito ao lado, formado por diversos resistores ligados em série e em paralelo, resolva os itens seguintes:**



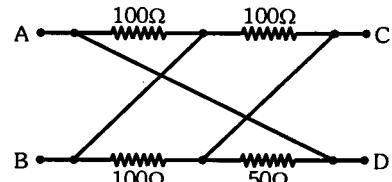
- determine  $R_A = R_6 \parallel R_7$  e desenhe o circuito correspondente;
- determine  $R_B = R_4 + R_5 + R_A$  e desenhe o circuito correspondente;
- determine  $R_C = R_3 \parallel R_B$  e desenhe o circuito correspondente;
- determine  $R_D = R_2 + R_C$  e desenhe o circuito correspondente;
- determine  $R_{eq} = R_1 \parallel R_D$  e desenhe o circuito correspondente.

**6.12) Determine a resistência equivalente entre os terminais A e B do circuito abaixo:**



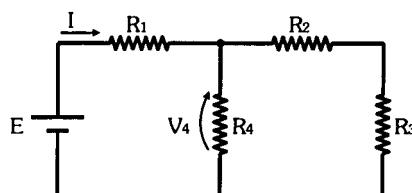
**6.13) Considere o circuito ao lado e determine:**

- a resistência equivalente entre os terminais A e B;
- a resistência equivalente entre os terminais C e D.



**6.14) Considere o circuito ao lado e determine:**

- a tensão E da fonte;
- a resistência equivalente;
- o valor aproximado de  $R_4$ .

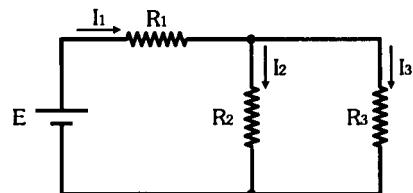


Dados:

$$\begin{aligned} I &= 20 \text{ mA} \\ R_1 &= 220 \Omega \\ R_2 &= 470 \Omega \\ R_3 &= 120 \Omega \\ V_4 &= 7,6 \text{ V} \end{aligned}$$

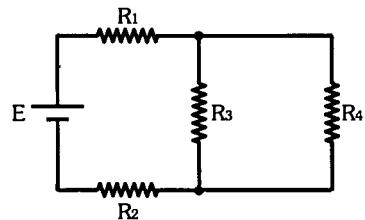
- 6.15)** Determine a tensão, a corrente e a potência em cada resistor da rede resistiva ao lado.

Dados:  $E = 20V$   
 $R_1 = 500\Omega$   
 $R_2 = 8k2\Omega$   
 $R_3 = 10k\Omega$



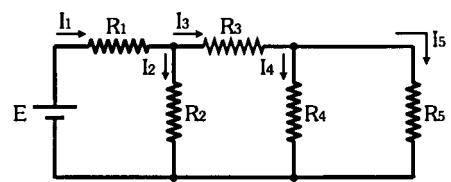
- 6.16)** Determine a tensão e a corrente no resistor  $R_4$  do circuito ao lado.

Dados:  $E = 22V$   
 $R_1 = 1k\Omega$   
 $R_2 = 2k2\Omega$   
 $R_3 = R_4 = 2k4\Omega$



- 6.17)** No circuito ao lado, determine a potência dissipada pelo resistor  $R_5$ , sabendo que  $I_2 = 120mA$ .

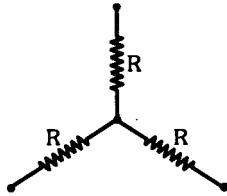
Dados:  $E = 42V$   
 $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 100\Omega$   
 $R_2 = 150\Omega$



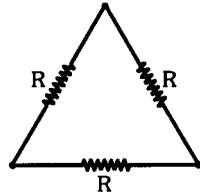
### Configurações Estrela e Triângulo

- 6.18)** Converta os circuitos abaixo nas configurações triângulo ou estrela equivalentes.

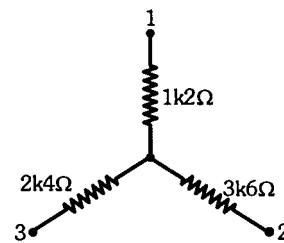
a)



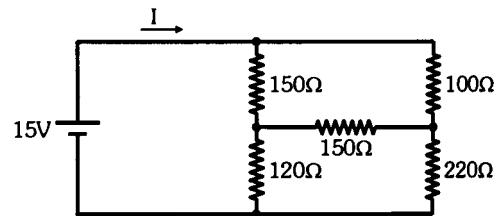
b)



c)



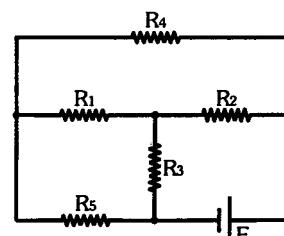
- 6.19)** No circuito ao lado, determine a resistência equivalente e a corrente fornecida pela fonte de alimentação.



- 6.20)** Considere a rede resistiva ao lado e determine:

- a resistência equivalente do circuito;
- a corrente total fornecida pela fonte de alimentação ao circuito.

Dados:  $E = 25 V$   
 $R_1 = R_2 = R_3 = 150 \Omega$   
 $R_4 = R_5 = 50 \Omega$



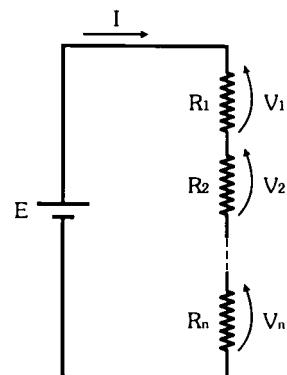
Após a análise do comportamento dos resistores em associação série, paralela e mista, neste capítulo veremos alguns circuitos aplicativos.

### 7.1

### Divisor de Tensão

Na associação série de resistores, vimos que a tensão da fonte de alimentação se subdivide entre os resistores, formando um divisor de tensão.

Podemos deduzir uma equação geral para calcular a tensão  $V_i$  num determinado resistor  $R_i$  da associação em função da tensão  $E$  aplicada.



A tensão  $V_i$  no resistor  $R_i$  é dada por:

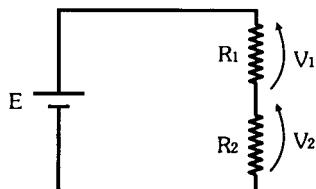
$$V_i = R_i \cdot I \quad (\text{I})$$

Mas a corrente  $I$  que passa pelos resistores em série vale:  $I = \frac{E}{R_{eq}}$  (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), obtém-se a *equação geral do divisor de tensão*:

$$V_i = \frac{R_i}{R_{eq}} \cdot E$$

No caso de um divisor de tensão formado por *dois* resistores, as equações de  $V_1$  e  $V_2$  são:



$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

e

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E$$

## 7.2

## Divisor de Corrente

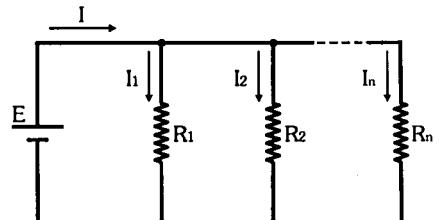
Na associação paralela de resistores, vimos que a corrente fornecida pela fonte de alimentação se subdivide entre os resistores, formando um divisor de corrente.

Podemos deduzir uma equação geral para calcular a corrente  $I_i$  num determinado resistor  $R_i$  da associação em função da corrente total  $I$ .

Como os resistores estão em paralelo, temos:

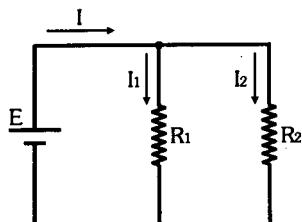
$$I_i = \frac{E}{R_i} \quad (\text{I})$$

Mas a tensão  $E$  aplicada à associação paralela vale:  $E = R_{\text{eq}}.I$  (II)



Substituindo a equação (II) na equação (I), obtém-se a *equação geral do divisor de corrente*:

$$I_i = \frac{R_{\text{eq}}}{R_i} \cdot I$$



No caso de um divisor de corrente formado por dois resistores, podem-se deduzir facilmente as equações de  $I_1$  e  $I_2$ , que ficam como segue:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$\text{e} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

## 7.3

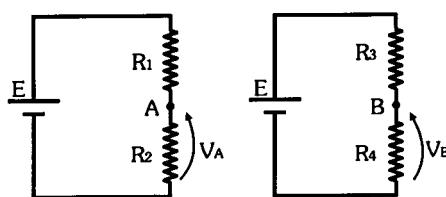
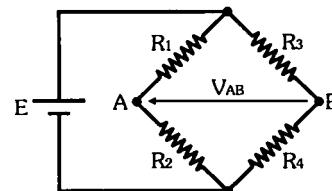
## Ponte de Wheatstone

A *Ponte de Wheatstone* é um circuito muito utilizado em instrumentação eletrônica, pois por meio dela é possível medir, além de resistência elétrica, diversas outras grandezas físicas, como temperatura, força e pressão. Para isso, basta utilizar sensores ou transdutores que convertam as grandezas a serem medidas em resistência elétrica.

O circuito básico da Ponte de Wheatstone está mostrado ao lado.

Trata-se de um divisor de corrente em que cada ramo forma um divisor de tensão.

Na ponte, o interesse recai sobre a tensão  $V_{AB}$  entre as extremidades que não estão ligadas à fonte de alimentação.



Para equacionar a Ponte de Wheatstone, podemos desmembrá-la em duas partes, cada uma formando um divisor de tensão, conforme a figura ao lado.

As tensões  $V_A$  e  $V_B$  de cada parte da ponte são dadas por:

$$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E \quad \text{e} \quad V_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot E$$

Quando  $V_{AB} = V_A - V_B = 0$ , dizemos que a ponte encontra-se em *equilíbrio*. Nesse caso,  $V_A = V_B$ , ou seja:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot E \Rightarrow R_2 \cdot (R_3 + R_4) = R_4 \cdot (R_1 + R_2) \Rightarrow R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 = R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4 \Rightarrow$$

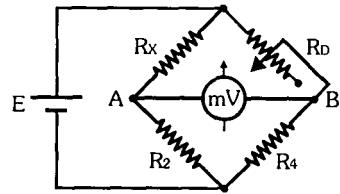
$$R_2 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4$$

Portanto, a condição de equilíbrio da ponte é dada pela igualdade entre os produtos das suas resistências opostas.

## Ohmímetro em Ponte

A Ponte de Wheatstone pode ser utilizada para medir, com razoável precisão, resistências desconhecidas, adotando o seguinte procedimento:

- 1) Liga-se um milivoltímetro de zero central entre os pontos  $A$  e  $B$ ;
- 2) Substitui-se um dos resistores da ponte pela resistência desconhecida  $R_x$ , como, por exemplo, o resistor  $R_1$ ;
- 3) Substitui-se um outro resistor por uma década resistiva  $R_D$ , como, por exemplo, o resistor  $R_3$ ;
- 4) Ajusta-se a década resistiva até que a ponte entre em equilíbrio, isto é, até que o milivoltímetro indique tensão zero ( $V_{AB} = 0$ ), anotando o valor de  $R_D$ ;



- 5) Calcula-se  $R_x$  pela expressão de equilíbrio da ponte, ou seja:

$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_D}{R_4}$$

- 6) Se  $R_2 = R_4$ , a expressão de  $R_x$  se resume a:  $R_x = R_D$ .

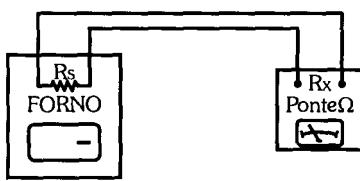
## Instrumento de Medida de uma Grandeza Qualquer

Neste momento, você deve estar se perguntando se não seria mais simples medir a resistência desconhecida diretamente com um multímetro.

Pois é aqui que entra a grande aplicação da Ponte de Wheatstone.

Essa resistência desconhecida pode ser um sensor ou um transdutor, cujas resistências variam proporcionalmente a uma outra grandeza física.

Para que essa outra grandeza possa ser medida, é necessário que o sensor esteja sob sua influência e, ao mesmo tempo, ligado ao circuito de medição (ponte).



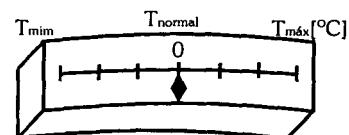
### Exemplo: Medidor de Temperatura

Para medir a temperatura de um forno, o sensor deve estar dentro do forno e, ao mesmo tempo, ligado ao circuito.

Essas duas condições impedem que a resistência do sensor possa ser medida diretamente por um multímetro.

Porém, por meio da ponte, podemos relacionar o desequilíbrio causado pela resistência do sensor com a medida indicada pelo milivoltímetro.

Para isso, basta converter a escala graduada do milivoltímetro de tensão em temperatura.

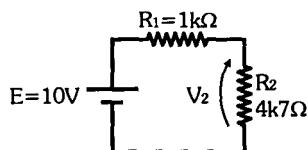


Um procedimento similar pode ser adotado, usando um milivoltímetro digital. Só que nesse caso, utiliza-se um circuito para alterar os valores numéricos mostrados no *display*, de forma que eles correspondam aos valores de temperaturas medidos.

## Exercícios Propostos

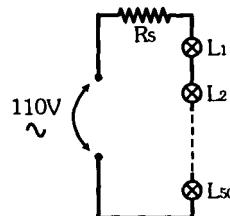
### Divisor de Tensão

- 7.1) No divisor de tensão ao lado, determine a tensão  $V_2$  no resistor de saída  $R_2$ .



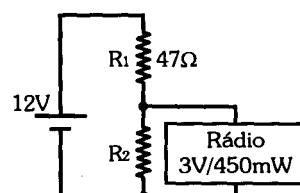
- 7.2) Um enfeite de Natal é formado por 50 lâmpadas coloridas em série, conforme mostra a figura ao lado. Cada lâmpada está especificada para  $1,5V/6mW$ .

Determine o valor do resistor  $R_s$  para que o enfeite possa ser alimentado pela rede elétrica de  $110V$ .



- 7.3) Um rádio AM/FM portátil funciona, em condições normais de operação, com as seguintes especificações:  $3V/450mW$ .

Qual deve ser o valor do resistor  $R_2$  para que esse rádio opere a partir de uma fonte de  $12V$ , conforme a montagem ao lado?



**Obs.:** O divisor de tensão é formado por  $R_1$  e  $R_2 // R_{\text{rádio}}$ .

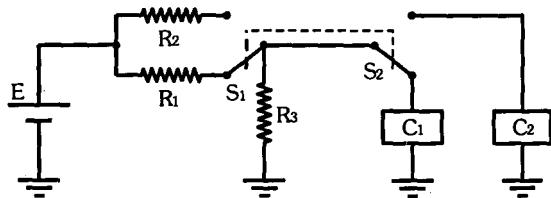
- 7.4) Determine  $R_1$  e  $R_2$  para que as cargas  $C_1$  e  $C_2$  possam ser alimentadas pela mesma bateria, conforme a posição das chaves  $S_1$  e  $S_2$ , acopladas mecanicamente.

Dados:  $E = 9V$

$$R_3 = 1k2 \Omega$$

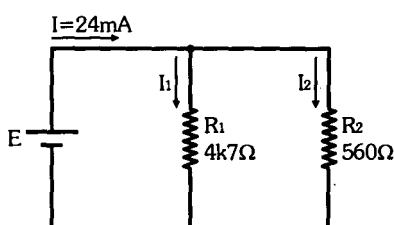
$$C_1 = 6V / 20mA$$

$$C_2 = 4,5V / 50mA$$

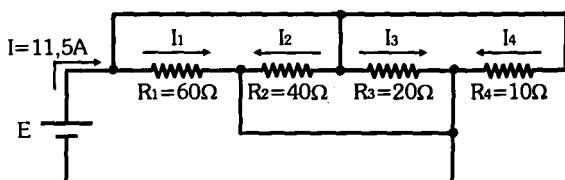


### Divisor de Corrente

- 7.5) Considerando o divisor de corrente ao lado, determine  $I_1$  e  $I_2$  a partir da sua equação geral.

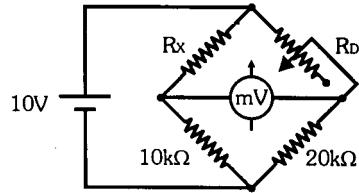


- 7.6) Considerando o divisor de corrente ao lado, determine  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  a partir da sua equação geral.



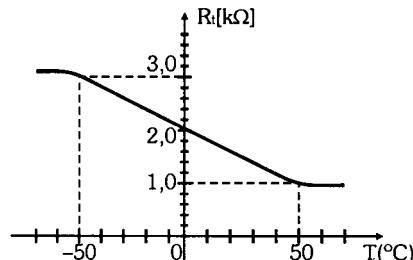
### Ponte de Wheatstone

- 7.7) Na ponte de Wheatstone ao lado, qual é o valor de  $R_x$ , sabendo que no seu equilíbrio  $R_D = 18k\Omega$ ?



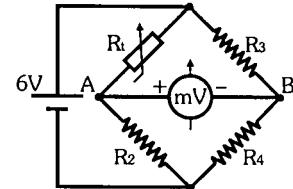
- 7.8) Projetar um termômetro eletrônico para medir temperaturas na faixa de  $-40^{\circ}C$  e  $+40^{\circ}C$ . Para isso, dispõe-se de um sensor de temperatura  $R_t$  e de um milivoltímetro de zero central, conforme mostram as figuras abaixo.

Curva Característica do Sensor

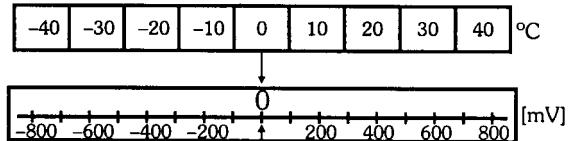


Sensor de Temperatura

$$R_t = f(T)$$



- a) Adote valores para  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  para que o milivoltímetro marque tensão nula à temperatura de  $0^{\circ}C$ .
- b) Calcule a tensão  $V_{AB}$ , em [mV], medida pelo milivoltímetro, para cada temperatura de  $-40^{\circ}C$  a  $+40^{\circ}C$ , com intervalo de  $10^{\circ}C$ .
- c) Faça a conversão da escala do milivoltímetro de tensão em temperatura, indicando com uma seta as posições aproximadas do ponteiro para cada valor de temperatura.



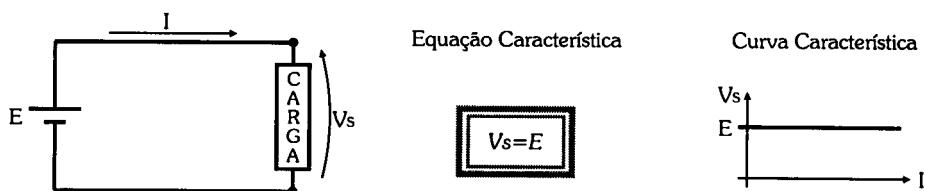
- d) Qual é a característica da escala de temperatura resultante da conversão realizada no item c?
- e) O que aconteceria se  $R_t$  tivesse sido colocada no lugar de  $R_3$ ?

Nesse capítulo, faremos um estudo mais detalhado das fontes de alimentação CC, que aqui serão denominadas geradores de tensão ou geradores de corrente.

**8.1**

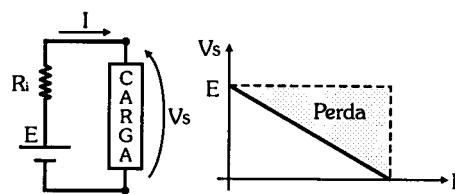
**Gerador de Tensão**

O gerador de tensão ideal é aquele que mantém a tensão na saída sempre constante, independente da corrente que fornece ao circuito que está sendo alimentado.



Porém, qualquer que seja o gerador (pilha química, fonte de tensão eletrônica, bateria de automóvel etc.), ele sempre apresenta perdas internas, fazendo com que, para cargas muito baixas ou correntes muito altas, a sua tensão de saída  $V_s$  caia.

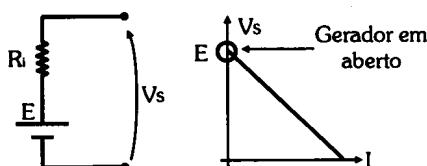
Por isso, o estudo do gerador de tensão real pode ser feito representando-o por meio de um modelo, no qual as suas perdas internas correspondem a uma resistência interna  $R_i$  em série com o gerador de tensão  $E$  supostamente ideal, conforme mostra a figura abaixo.



A equação característica do gerador de tensão real leva em consideração essa perda, sendo descrita matematicamente como:

$$V_s = E - R_i \cdot I$$

Portanto, quanto menor a resistência interna do gerador de tensão, melhor é o seu desempenho.



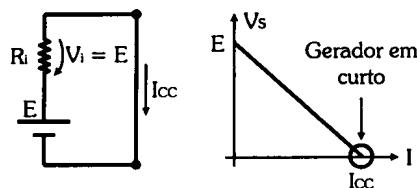
Quando o gerador está em aberto, isto é, sem carga, a corrente de saída é zero e, consequentemente, não há perda de tensão interna.

Nesse caso, toda a tensão gerada  $E$  está presente na saída ( $V_s = E$ ), pois:

$$V_s = E - R_i \cdot 0 \Rightarrow V_s = E$$

Quando uma carga  $R_L$  é ligada à saída do gerador, a corrente  $I$  fornecida à carga provoca uma queda de tensão na resistência interna ( $V_i = R_i \cdot I$ ).

Nesse caso, a perda de tensão  $V_i$  faz com que a tensão de saída seja menor ( $V_s = E - V_i$ ).



No caso limite, quando  $R_L = 0$  (saída em curto), o gerador fornece a sua máxima corrente  $I_{cc}$  (corrente de curto-círcuito), mas a tensão na saída é, obviamente, zero ( $V_s = 0$ ).

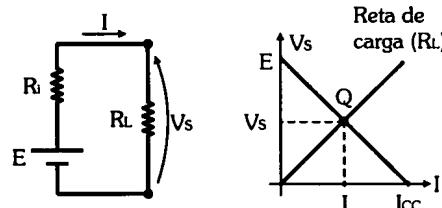
A corrente de curto-círcuito do gerador de tensão é determinada por:

$$V_s = E - R_i \cdot I \Rightarrow 0 = E - R_i \cdot I_{cc} \Rightarrow$$

$$I_{cc} = \frac{E}{R_i}$$

### Reta de Carga e Ponto Quiescente

Quando uma carga  $R_L$  é ligada à saída do gerador, a corrente  $I$  e a tensão  $V_s$  podem ser obtidas graficamente pela interseção da reta de carga com a curva característica do gerador. Esse ponto é denominado *ponto quiescente*  $Q$ .



### Rendimento

O rendimento do gerador de tensão mede o seu desempenho. Ele é simbolizado pela letra grega  $\eta$  (eta), e corresponde à relação entre a sua tensão de saída  $V_s$  e a sua tensão interna  $E$ . Matematicamente:

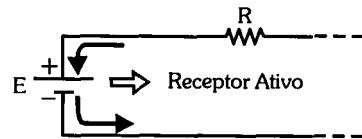
$$\eta = \frac{V_s}{E}$$

ou

$$\eta = \frac{V_s}{E} \cdot 100 [\%]$$

## Receptores Ativos

Num circuito elétrico formado por mais de um gerador de tensão, é possível que em algum deles a corrente entre pelo pólo positivo e saia pelo pólo negativo.



Nesse caso, ao invés elevar o potencial do circuito, a fonte provoca a sua queda, isto é, ao invés de gerador, ela se comporta como um *receptor ativo*.

### Gerador de Tensão Real Operando como Receptor Ativo

Se considerarmos o gerador de tensão real operando como receptor ativo, a sua equação característica será:

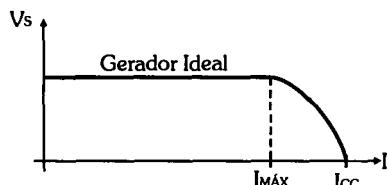
$$V_s = E + R_i \cdot I$$

Portanto, a tensão de saída  $V_s$  será maior do que a tensão em vazio  $E$ .

A figura ao lado mostra o comportamento do *receptor ativo real* por meio de sua curva característica.

## Fontes de Alimentação Eletrônicas

As fontes de alimentação eletrônicas possuem, internamente, um circuito de estabilização de tensão, que garante uma tensão de saída constante até um limite de corrente.



Isso significa que essas fontes funcionam como se fossem geradores de tensão ideais até esse limite de corrente.

A partir desse limite, a tensão da fonte começa a cair, chegando a zero quando a sua saída está curto-circuitada.

A maioria das fontes de alimentação eletrônicas atuais possuem, também, proteção contra sobrecarga, bloqueando a corrente de saída quando isso ocorrer, evitando danificá-las.

### EXEMPLO: Especificações Técnicas de uma Fonte de Alimentação Eletrônica

Alimentação: ..... 110/220V ac ± 10%; 50/60Hz	Tensão de Saída: ..... 0 a 30V, ajuste externo
Faixa de Temperatura: ..... 0°C a +40°C	Corrente de Saída: ..... 0 a 1A, ajuste externo
Proteção contra Sobrecarga: ..... ajuste externo	Potência de Saída: ..... 30W, máximo

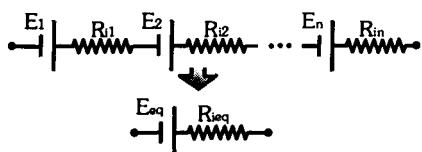
## Associação de Geradores de Tensão

Os geradores de tensão podem ser associados em série, formando o que denominamos de *bateria*.



1,5V  
1,5V  
1,5V  
4,5V

É isso que fazemos com as pilhas quando precisamos de uma tensão maior para alimentar um circuito.



Nesse caso, o gerador equivalente pode ser representado por uma fonte interna equivalente  $E_{eq}$  e uma resistência interna equivalente  $R_{ieq}$ , sendo que esses valores podem ser calculados por:

$$E_{eq} = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

e

$$R_{ieq} = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{in}$$

O conceito de máxima transferência de potência do gerador para a carga é muito útil, sendo vastamente aplicado no estudo dos amplificadores e em sistemas de comunicação.

Considere um gerador de tensão cuja equação característica é:  $V_s = E - R_i \cdot I$ .

Cada ponto da curva característica corresponde a uma coordenada  $(V_s, I)$  para uma determinada carga.

O produto dos valores de cada coordenada corresponde à potência em cada carga, isto é,  $P = V_s \cdot I$ .

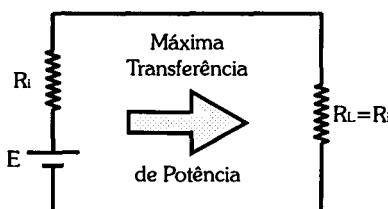
Se levantarmos a curva de potência nas cargas em função de  $I$ , obteremos uma parábola, conforme mostra a figura ao lado.

O ponto de máxima potência  $P_M$ , transferida do gerador para a carga, coincide com as seguintes condições:

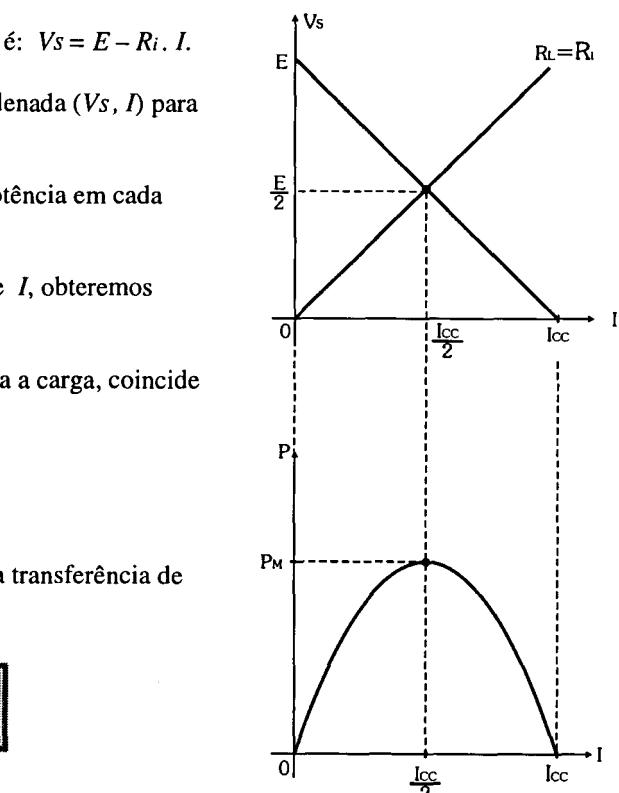
$$V_s = \frac{E}{2} \quad \text{e} \quad I = \frac{I_{CC}}{2}$$

Dessa análise, conclui-se que a carga que propicia a máxima transferência de potência pode ser calculada por:

$$R_L = \frac{V_s}{I} = \frac{\frac{E}{2}}{\frac{I_{CC}}{2}} \Rightarrow R_L = \frac{E}{I_{CC}}$$



A potência máxima  $P_M$  que o gerador pode fornecer a uma carga pode ser calculada em função apenas dos seus parâmetros  $E$  e  $R_i$ :



Mas, como vimos anteriormente,  $E / I_{CC}$  é a resistência interna  $R_i$  do gerador.

Isto significa que a máxima transferência de potência ocorre quando a carga é igual à resistência interna do gerador de tensão, ou seja:

$$R_L = R_i$$

$$P_M = \frac{E}{2} \cdot \frac{I_{CC}}{2} = \frac{1}{4} \cdot E \cdot I_{CC} = \frac{1}{4} \cdot E \cdot \frac{E}{R_i} \Rightarrow P_M = \frac{E^2}{4 \cdot R_i}$$

Essa expressão mostra que o gerador de tensão pode fornecer a uma carga, no máximo, um quarto ou 25% de sua potência total  $P_T = E^2/R_i$ , dissipada com a saída curto-circuitada.

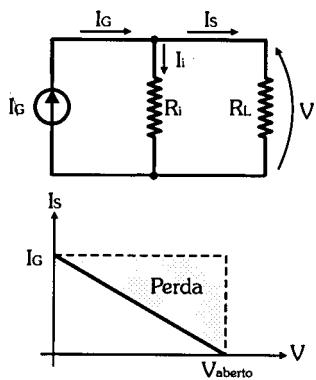
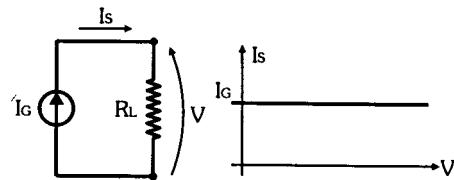
Na máxima transferência de potência, o rendimento do gerador é  $\eta = 50\%$ , pois:

$$\eta = \frac{V_s}{E} \cdot 100 = \frac{\frac{E}{2}}{E} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \Rightarrow \eta = 50\%$$

O gerador de corrente, ao contrário do gerador de tensão, não é um equipamento vastamente utilizado, mas seu estudo é importante para a compreensão futura de determinados dispositivos e circuitos eletrônicos.

O gerador de corrente ideal é aquele que fornece uma corrente  $I_G$  sempre constante, independente da carga alimentada, isto é, para qualquer tensão  $V$  na saída.

A figura ao lado mostra o símbolo do gerador de corrente ideal, bem como a sua curva característica.



A equação característica do gerador de corrente real que leva em consideração a perda é dada por:

Porém, no gerador de corrente real, a resistência interna consome parte da corrente gerada, fazendo com que  $I_S < I_G$ . Nesse caso, representa-se o gerador de corrente real por um gerador supostamente ideal em paralelo com uma resistência interna  $R_i$ .

Aplicando a equação do divisor de corrente, obtemos a corrente  $I_S$  na carga em função da corrente  $I_G$  do gerador:

$$I_S = \frac{R_i}{(R_L + R_i)} \cdot I_G$$

$$I_S = I_G - \frac{V}{R_i}$$

Portanto, quanto maior a resistência interna do gerador de corrente, melhor é o seu desempenho.

### Rendimento

O rendimento  $\eta$  do gerador de corrente, que mede o seu desempenho, é a relação entre a sua corrente de saída  $I_S$  e a sua corrente interna  $I_G$ . Matematicamente:

$$\eta = \frac{I_S}{I_G}$$

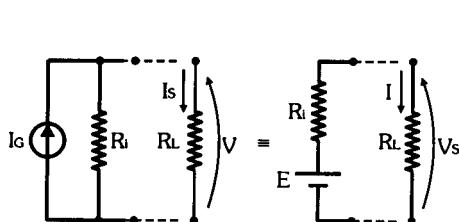
ou

$$\eta = \frac{I_S}{I_G} \cdot 100 [\%]$$

### Equivalência entre os Geradores de Tensão e de Corrente

Os geradores de tensão e de corrente são considerados *equivalentes* quando ambos possuem a mesma resistência interna e fornecem a mesma tensão ou a mesma corrente a uma mesma carga.

A condição de equivalência pode ser determinada, por exemplo, pelas correntes de saída dos geradores:



$$\text{Gerador de Corrente: } I_S = \frac{R_i}{(R_L + R_i)} \cdot I_G$$

$$\text{Gerador de Tensão: } I = \frac{E}{(R_L + R_i)}$$

$$\text{Igualando } I = I_S: \quad \frac{E}{(R_L + R_i)} = \frac{R_i}{(R_L + R_i)} \cdot I_G \Rightarrow$$

$$E = R_i \cdot I_G$$

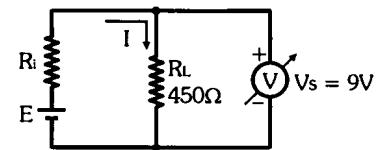
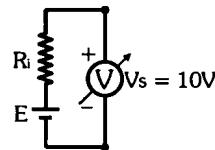
A conversão de um gerador de tensão com alto rendimento em gerador de corrente, ou vice-versa, resulta num gerador com baixo rendimento, devido à necessidade de as resistências internas serem iguais.

## Exercícios Propostos

### **Gerador de Tensão**

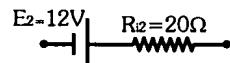
- 8.1)** Mediú-se a tensão em aberto de um gerador com um voltímetro, obtendo-se  $10V$ . Com uma carga de  $450\Omega$ , a tensão na saída caiu para  $9V$ . Determine:

- a corrente na carga;
- a perda de tensão na resistência interna do gerador;
- a resistência interna do gerador;
- a corrente de curto-círcuito do gerador;
- o rendimento do gerador;
- a equação característica do gerador válida para qualquer carga  $R_L$ .



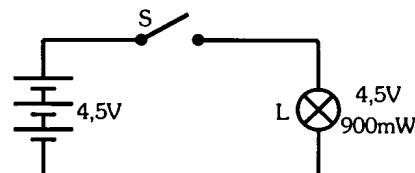
- 8.2)** Considere os dois geradores de tensão ao lado:

- Determine a corrente de curto-círcuito de cada gerador;
- Determine a equação característica do gerador série equivalente;
- Represente num mesmo sistema cartesiano as curvas características de cada gerador e do gerador série equivalente e compare as características do gerador equivalente com cada gerador individualmente.



- 8.3)** Considere o circuito da lanterna ao lado. As três pilhas que formam a sua bateria têm resistência interna de  $0,5\Omega$  cada uma, e quando novas, fornecem  $1,5V$  em aberto. Determine:

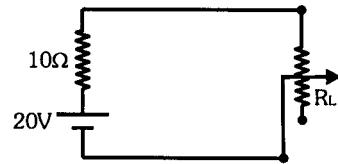
- a tensão efetiva fornecida à lâmpada caso as pilhas estejam novas;
- o rendimento da bateria nas condições do item anterior;
- a tensão efetiva fornecida à lâmpada caso as pilhas estejam gastas, com tensão em aberto de  $0,75V$  cada;
- o rendimento da bateria nas condições do item anterior.



## Máxima Transferência de Potência

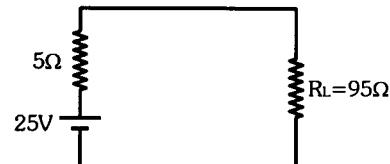
- 8.4) Considere o gerador de tensão ao lado, cuja equação característica é:  $V_s = 20 - 10 \cdot I$ .

- Determine a tensão de saída para cada valor de corrente de 0 a 2A, em intervalos de 0,25A e levante o gráfico  $V_s = f(I)$ .
- Determine a potência na carga para os valores de corrente do item anterior e levante o gráfico  $P = f(I)$  usando a mesma escala de corrente do gráfico anterior.
- Determine, a partir dos gráficos,  $P_M$ ,  $I$ ,  $V_s$  e  $R_L$ , na máxima transferência de potência do gerador para a carga.
- Determine, a partir das equações,  $P_M$ ,  $R_L$  e  $\eta$  na máxima transferência de potência do gerador para a carga.



## Gerador de Corrente

- 8.5) Considere o gerador de tensão ao lado, alimentando uma carga de  $95\Omega$ .



- Determine a corrente e a tensão na carga fornecidas pelo gerador de tensão, bem como o seu rendimento;
  - Converta esse gerador de tensão no seu gerador de corrente equivalente;
  - Determine a corrente e a tensão na carga fornecidas pelo gerador de corrente, bem como o seu rendimento;
  - Qual é a sua análise dos resultados obtidos nos itens *a* e *c* desse exercício?
  - Qual é a sua análise do valor de  $I_G$  para que o gerador de corrente equivalente possa funcionar como o gerador de tensão inicial, isto é, fornecendo a mesma tensão e corrente à carga?
- 8.6) Considere o circuito da lanterna do exercício 8.3. Quais devem ser os parâmetros  $R_i$  e  $I_G$  do gerador de corrente equivalente à bateria da lanterna (com as pilhas novas) para que a lâmpada funcione da mesma forma?

Nesse capítulo, aprenderemos alguns métodos importantes de análise de circuitos elétricos, todos baseados em teoremas e nos principais fundamentos da eletricidade.

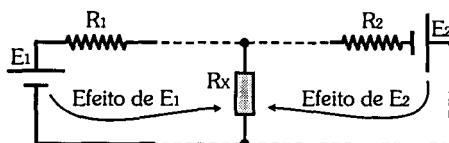
**9.1**

**Método da Superposição**

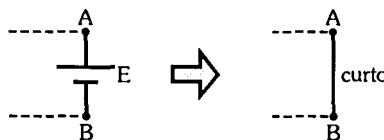
O Método da Superposição é baseado no *Teorema da Superposição de Efeitos* e se aplica nos casos em que desejamos analisar o comportamento elétrico (tensão e corrente) num único dispositivo ou ramo de um circuito, sem precisar determinar as tensões e correntes nos demais.

**Teorema da Superposição de Efeitos**

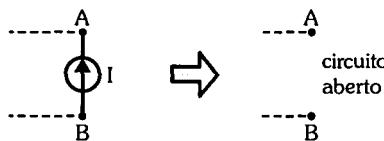
*"Num circuito elétrico formado por vários bipolos lineares, o efeito causado pelos geradores num determinado ramo ou bipolar é equivalente à soma algébrica dos efeitos causados por cada gerador individualmente, eliminados os efeitos dos demais."*



Para eliminar o efeito causado num circuito por um *gerador de tensão*, ele deve ser substituído por um curto-circuito.



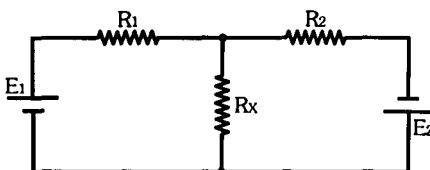
Para eliminar o efeito causado num circuito por um *gerador de corrente*, ele deve ser substituído por um circuito aberto.



**Nota:** Consulte no Apêndice 1, os tópicos IV e V.

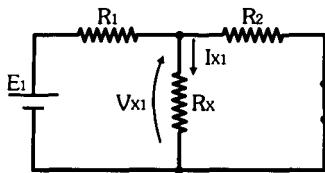
## EXEMPLO

No circuito abaixo, determinaremos a corrente e a tensão no resistor  $R_x$ :



Dados:  $E_1 = 10V$   
 $E_2 = 20V$   
 $R_1 = 100\Omega$   
 $R_2 = 220\Omega$   
 $R_x = 100\Omega$

- Primeiramente, eliminaremos o efeito causado pelo gerador de tensão  $E_2$  por meio da sua substituição por um curto-circuito e determinaremos a tensão  $V_{x1}$  e a corrente  $I_{x1}$  em  $R_x$ , por efeito de  $E_1$ .

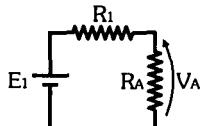


$$R_A = \frac{R_x \cdot R_2}{R_x + R_2} = \frac{100 \times 220}{100 + 220} = 68,75\Omega$$

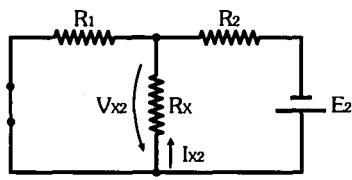
$$V_{x1} = V_A = \frac{R_A}{R_1 + R_A} \cdot E_1 \Rightarrow$$

$$V_{x1} = \frac{68,75}{100 + 68,75} \times 10 \Rightarrow V_{x1} = 4,07V$$

$$I_{x1} = \frac{V_{x1}}{R_x} = \frac{4,07}{100} \Rightarrow I_{x1} = 40,70mA$$



- Em seguida, eliminaremos o efeito causado pelo gerador de tensão  $E_1$  por meio da sua substituição por um curto-circuito e determinaremos a tensão  $V_{x2}$  e a corrente  $I_{x2}$  em  $R_x$ , por efeito de  $E_2$ .

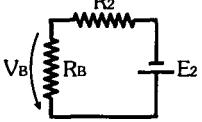


$$R_B = \frac{R_x \cdot R_1}{R_x + R_1} = \frac{100 \times 100}{100 + 100} = 50\Omega$$

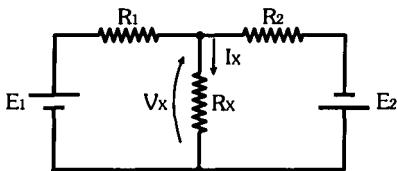
$$V_{x2} = V_B = \frac{R_B}{R_2 + R_B} \cdot E_2 \Rightarrow$$

$$V_{x2} = \frac{50}{220 + 50} \times 20 \Rightarrow V_{x2} = 3,70V$$

$$I_{x2} = \frac{V_{x2}}{R_x} = \frac{3,70}{100} \Rightarrow I_{x2} = 37,00mA$$

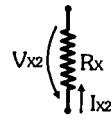
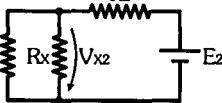


- Finalmente, podemos calcular a tensão  $V_x$  e a corrente  $I_x$  pela soma algébrica dos efeitos de  $E_1$  e  $E_2$ .



$$V_x = V_{x1} - V_{x2} = 4,07 - 3,70 \Rightarrow V_x = 0,37V$$

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = 40,70 - 37,00 \Rightarrow I_x = 3,70mA$$

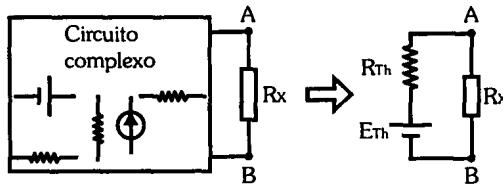


O Método de Thévenin é baseado no *Teorema de Thévenin* e se aplica nos casos em que desejamos simplificar um circuito complexo por um mais simples equivalente.

Esse procedimento é muito útil quando precisamos analisar, em detalhes, o comportamento de apenas uma parte de um circuito elétrico.

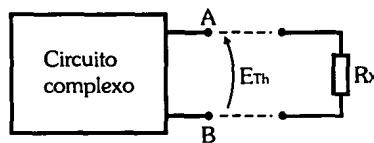
### Teorema de Thévenin

*"Num circuito formado por vários bipolos lineares, todos os geradores e receptores do circuito que envolvem um determinado bipolar ou ramo de interesse podem ser substituídos por um gerador de tensão Thévenin formado por uma fonte de tensão equivalente Thévenin  $E_{Th}$  em série com uma resistência interna equivalente Thévenin  $R_{Th}$ ."*

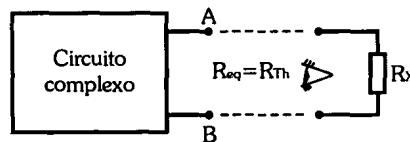


Os valores de  $E_{Th}$  e  $R_{Th}$  são calculados da seguinte forma:

$E_{Th}$ : tensão em aberto entre os pontos em que está localizado o bipolar ou ramo de interesse, causada por todos os geradores e receptores do circuito.

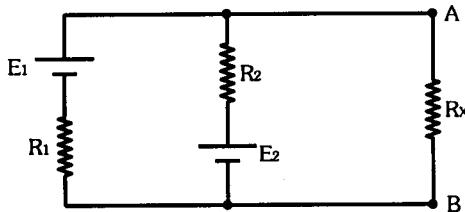


$R_{Th}$ : resistência equivalente vista pelo bipolar ou ramo de interesse, quando todos os geradores de tensão são substituídos por curto-circuitos e todos os geradores de corrente são substituídos por circuitos abertos.



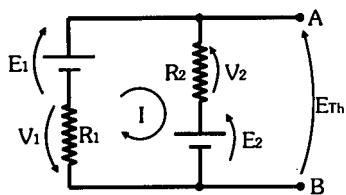
### EXEMPLO

No circuito abaixo, determinaremos a corrente e a tensão no resistor  $R_x$ :



Dados:  
 $E_1 = 15V$   
 $E_2 = 10V$   
 $R_1 = 150\Omega$   
 $R_2 = 100\Omega$   
 $R_x = 1k\Omega$

- 1) Primeiramente, retiraremos  $R_x$  e calcularemos a tensão  $E_{Th}$  entre A e B.



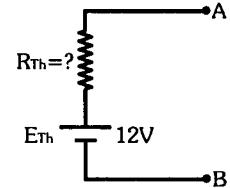
$$E_1 - V_2 - E_2 - V_1 = 0 \Rightarrow E_1 - R_2 \cdot I - E_2 - R_1 \cdot I = 0 \Rightarrow$$

$$15 - 100I - 10 - 150I = 0 \Rightarrow 250I = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{250} = 20mA$$

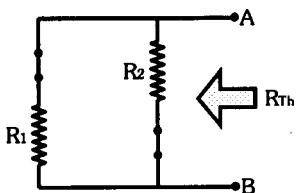
$$E_{Th} = E_2 + V_2 = E_2 + R_2 \cdot I \Rightarrow$$

$$E_{Th} = 10 + 100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$E_{Th} = 12V$$



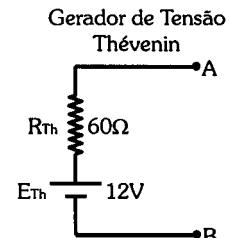
- 2) Em seguida, substituiremos os geradores de tensão  $E_1$  e  $E_2$  por curto-circuitos e calcularemos a resistência  $R_{Th}$  entre A e B, vista pela resistência  $R_x$ .



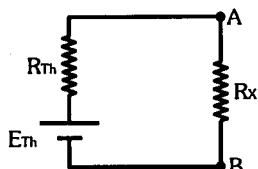
$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$R_{Th} = \frac{150 \cdot 100}{150 + 100} \Rightarrow$$

$$R_{Th} = 60\Omega$$



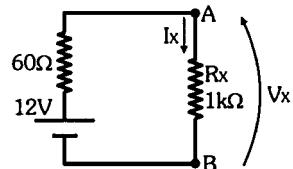
- 3) Com o gerador de tensão Thévenin determinado, ligaremos novamente  $R_x$  entre A e B e calcule a tensão  $V_x$  e a corrente  $I_x$ .



$$V_x = \frac{R_x}{R_{Th} + R_x} \cdot E_{Th} \Rightarrow$$

$$V_x = \frac{1000}{60 + 1000} \times 12 \Rightarrow$$

$$V_x = 11,32V$$

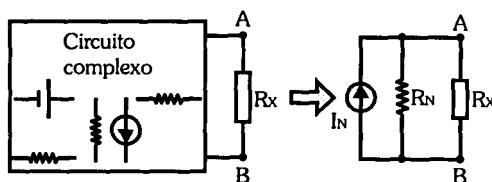


$$I_x = \frac{V_x}{R_x} = \frac{11,32}{1000} \Rightarrow I_x = 11,32mA$$

O Método de Norton é baseado no *Teorema de Norton*, que é similar ao de Thévenin, isto é, se aplica nos casos em que desejamos simplificar um circuito complexo por um mais simples equivalente, com a diferença de que o circuito simplificado é formado por um gerador de corrente no lugar do gerador de tensão.

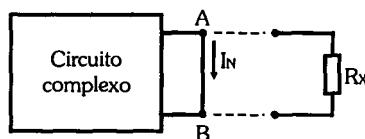
### Teorema de Norton

*"Num circuito formado por vários bipolos lineares, todos os geradores e receptores do circuito que envolvem um determinado bipolar ou ramo de interesse podem ser substituídos por um gerador de corrente Norton formado por uma fonte de corrente equivalente Norton  $I_N$  em paralelo com uma resistência interna equivalente Norton  $R_N$ ."*

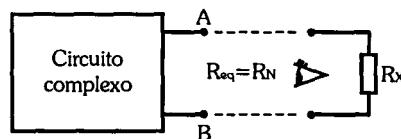


Os valores de  $I_N$  e  $R_N$  são calculados da seguinte forma:

$I_N$ : corrente que passa pelos pontos em que está localizado o bipolar ou ramo de interesse, quando ele é substituído por um curto-círcuito.

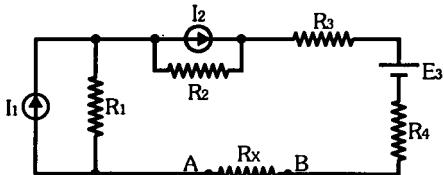


$R_N$ : resistência equivalente vista pelo bipolar ou ramo de interesse, quando todos os geradores de tensão são substituídos por curto-circuitos e todos os geradores de corrente são substituídos por circuitos abertos.



## EXEMPLO

No circuito abaixo, determinaremos a corrente e a tensão no resistor  $R_x$ :

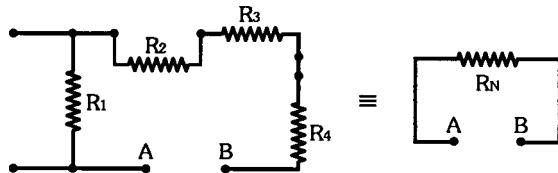


Dados:  
 $I_1 = 20mA; I_2 = 15mA$   
 $E_3 = 300V$   
 $R_1 = 10k\Omega; R_2 = 12k\Omega$   
 $R_3 = 2k2\Omega; R_4 = 1k\Omega$   
 $R_x = 4k7\Omega$

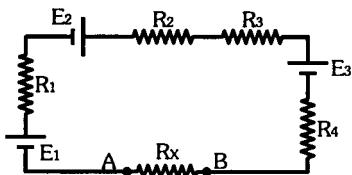
- Primeiramente, substituiremos os geradores de corrente  $I_1$  e  $I_2$  por circuitos abertos e o gerador de tensão  $E_3$  por um curto-circuito e calcularemos a resistência  $R_N$  entre A e B, vista pela resistência  $R_x$ .

$$R_N = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \Rightarrow$$

$$R_N = 10k + 12k + 2,2k + 1k \Rightarrow R_N = 25,2k\Omega$$



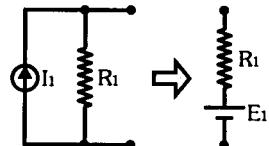
- Em seguida, converteremos os geradores de corrente em geradores de tensão.



Conversão de  $I_1, R_1$  em  $E_1, R_1$ :

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 = 20 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^3 \Rightarrow$$

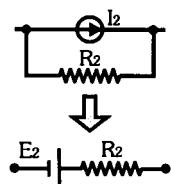
$$E_1 = 200V$$



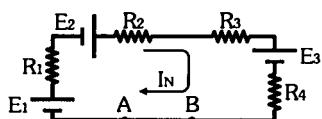
Conversão de  $I_2, R_2$  em  $E_2, R_2$ :

$$E_2 = I_2 \cdot R_2 = 15 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^3 \Rightarrow$$

$$E_2 = 180V$$



- Agora, substituiremos  $R_x$  por um curto-circuito entre A e B e calcularemos a corrente  $I_N$ .



$$E_1 - V_1 + E_2 - V_2 - V_3 - E_3 - V_4 = 0 \Rightarrow$$

$$E_1 - R_1 \cdot I_N + E_2 - R_2 \cdot I_N - R_3 \cdot I_N - E_3 - R_4 \cdot I_N = 0 \Rightarrow$$

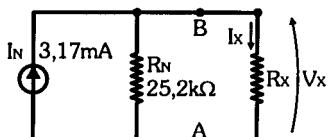
$$200 + 180 - 300 - (10000 + 12000 + 2200 + 1000) \cdot I_N = 0$$

$$25200 \cdot I_N = 80 \Rightarrow I_N = \frac{80}{25200} \Rightarrow I_N = 3,17mA$$

$$I_X = \frac{R_N}{R_N + R_x} \cdot I_N \Rightarrow$$

$$I_X = \frac{25200}{25200 + 4700} \times 3,17 \times 10^{-3} \Rightarrow I_X = 2,67mA$$

$$V_X = R_x \cdot I_X = 4,7 \times 10^3 \times 2,67 \times 10^{-3} \Rightarrow V_X = 12,55V$$



Os métodos apresentados nos tópicos anteriores permitem a análise isolada de um único ramo ou bipolo do circuito. No entanto, para uma análise completa do circuito, esses métodos são inviáveis.

Dos vários métodos de análise completa existentes, isto é, que permitem calcular as tensões e correntes em qualquer ponto de um circuito elétrico, apresentaremos aqui apenas o *Método de Maxwell*, pelo fato de este gerar um sistema menor de equações.

O Método de Maxwell parte de correntes de malhas adotadas *arbitrariamente*, chamadas de *correntes fictícias*, pois em ramos comuns a duas ou mais malhas, haverá mais de uma corrente, o que, na realidade, é impossível.

No final da análise, serão encontradas as correntes reais em cada ramo do circuito, podendo-se calcular a tensão em todos os bipolos.

### Método de Análise por Maxwell

- 1) Adota-se um sentido arbitrário para as correntes nas diversas malhas do circuito e orientam-se as tensões nos bipolos receptores e geradores.
- 2) Aplica-se a Lei de Kirchhoff para Tensões nas malhas internas do circuito, chegando a um sistema de equações.
- 3) Resolve-se o sistema de equações, pela forma analítica ou matricial (veja Apêndice 1), encontrando as correntes fictícias das malhas.
- 4) Um resultado positivo de corrente significa que o sentido arbitrário adotado estava correto e, portanto, deve ser mantido; um resultado negativo de corrente significa que o sentido arbitrário adotado estava incorreto e, portanto, deve ser invertido, corrigindo nos resistores a polaridade das tensões afetadas.
- 5) Nos ramos comuns a duas malhas, a corrente real corresponde à soma algébrica das correntes fictícias encontradas, já com o sentido corrigido.
- 6) Com as correntes nos ramos determinadas, calculam-se as tensões nos diversos bipolos receptores do circuito.

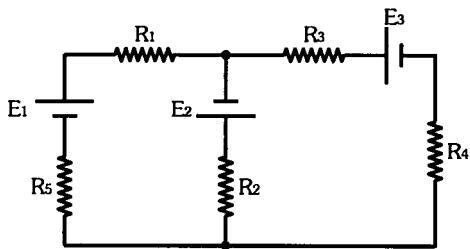
**Obs.:** A resolução de um sistema de equações pela forma matricial é mais vantajosa quando o sistema é formado por mais de duas equações. Porém, a sua maior vantagem está na possibilidade de desenvolvimento de programas computacionais para a sua resolução, como, por exemplo, as planilhas eletrônicas, que permitem a resolução de matrizes.

## EXEMPLO

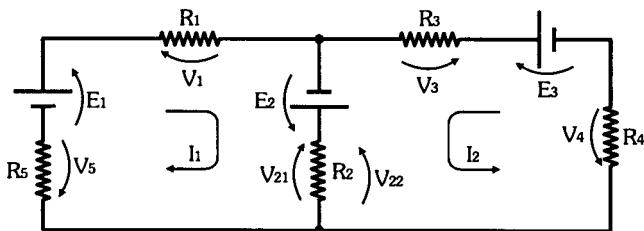
No circuito abaixo, determinaremos as correntes e tensões em todos os bipolos.

Dados:

$E_1 = 20V$
$E_2 = 10V$
$E_3 = 5V$
$R_1 = R_3 = R_5 = 100\Omega$
$R_2 = R_4 = 330\Omega$



- Primeiramente, adotaremos arbitrariamente uma corrente para cada malha interna do circuito, como  $I_1$  e  $I_2$ , e orientaremos as tensões nos resistores conforme o sentido adotado das correntes, e as tensões nos geradores conforme as suas polaridades.



**Obs.:** Note que em  $R_2$  aparecem duas tensões:  $V_{21}$  por causa de  $I_1$  e  $V_{22}$  por causa de  $I_2$ .

- Em seguida, aplicaremos a Lei de Kirchhoff para Tensões nas duas malhas e obteremos o sistema de equações:

$$\text{Malha 1: } E_1 - V_1 + E_2 - V_{21} - V_{22} - V_5 = 0 \Rightarrow E_1 - R_1.I_1 + E_2 - R_2.I_1 - R_2.I_2 - R_5.I_1 = 0 \Rightarrow$$

$$20 - 100.I_1 + 10 - 330.I_1 - 330.I_2 - 100.I_1 = 0 \Rightarrow -530.I_1 - 330.I_2 = -30 \quad (I)$$

$$\text{Malha 2: } E_3 - V_3 + E_2 - V_{22} - V_{21} - V_4 = 0 \Rightarrow E_3 - R_3.I_2 + E_2 - R_2.I_2 - R_2.I_1 - R_4.I_2 = 0 \Rightarrow$$

$$5 - 100.I_2 + 10 - 330.I_2 - 330.I_1 - 330.I_2 = 0 \Rightarrow -330.I_1 - 760.I_2 = -15 \quad (II)$$

Portanto, o sistema de equações é formado por I e II:

$$\begin{cases} -530.I_1 - 330.I_2 = -30 & (I) \\ -330.I_1 - 760.I_2 = -15 & (II) \end{cases}$$

- Agora, resolveremos o sistema de equações de forma analítica para determinarmos os valores de  $I_1$  e  $I_2$ :

$$\begin{cases} -530.I_1 - 330.I_2 = -30 & x(-330) \\ -330.I_1 - 760.I_2 = -15 & x(+530) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 174900.I_1 + 108900.I_2 = 9900 \\ -174900.I_1 - 402800.I_2 = -7950 \end{cases}$$

$$\text{Somando as duas equações, obteremos: } -293900.I_2 = 1950 \Rightarrow I_2 = \frac{1950}{-293900} \Rightarrow I_2 = -6,63mA$$

Substituindo  $I_2$  na segunda equação, obteremos:

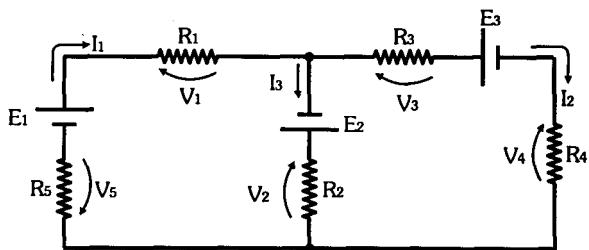
$$-330.I_1 - 760.I_2 = -15 \Rightarrow -330.I_1 - 760(-6,63 \times 10^{-3}) = -15 \Rightarrow -330.I_1 + 5,04 = -15 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{-15 - 5,04}{-330} \Rightarrow I_1 = 60,73mA$$

**EXEMPLO (continuação)**

- 4) Pelos resultados obtidos, isto é,  $I_1$  positivo e  $I_2$  negativo, concluímos que o sentido correto de  $I_2$  é o contrário do adotado inicialmente.

Por isso, corrigiremos o sentido da corrente  $I_2$  e a polaridade das tensões afetadas e redesenharemos o circuito.



- 5) Em seguida, determinaremos o valor de  $I_3$  no ramo central a partir das correntes fictícias  $I_1$  e  $I_2$ .

$$I_3 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_3 = 60,73 \times 10^{-3} - 6,63 \times 10^{-3} \Rightarrow I_3 = 54,10 \text{ mA}$$

- 6) Finalmente, calcularemos as tensões nos diversos resistores do circuito:

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 100 \times 60,73 \times 10^{-3} \Rightarrow V_1 = 6,07 \text{ V}$$

$$V_2 = R_2 \cdot I_3 = 330 \times 54,10 \times 10^{-3} \Rightarrow V_2 = 17,85 \text{ V}$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_2 = 100 \times 6,63 \times 10^{-3} \Rightarrow V_3 = 0,66 \text{ V}$$

$$V_4 = R_4 \cdot I_2 = 330 \times 6,63 \times 10^{-3} \Rightarrow V_4 = 2,19 \text{ V}$$

$$V_5 = R_5 \cdot I_1 = 100 \times 60,73 \times 10^{-3} \Rightarrow V_5 = 6,07 \text{ V}$$

- 7) Em seguida, mostraremos que o mesmo sistema de equações poderia ser resolvido pela forma matricial.

Sistema de equações:

$$\begin{cases} -530 \cdot I_1 - 330 \cdot I_2 = -30 \\ -330 \cdot I_1 - 760 \cdot I_2 = -15 \end{cases}$$

Sistema matricial:

$$\begin{vmatrix} -530 & -330 \\ -330 & -760 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -30 \\ -15 \end{vmatrix}$$

Determinante da matriz incompleta:

$$\begin{vmatrix} -530 & -330 \\ -330 & -760 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (-530) \times (-760) - (-330) \times (-330) = 402800 - 108900 \Rightarrow D = 293900$$

Determinante de  $I_1$ : (substituindo a primeira coluna pela matriz de termos independentes)

$$\begin{vmatrix} -30 & -330 \\ -15 & -760 \end{vmatrix} \Rightarrow DI_1 = (-30) \times (-760) - (-330) \times (-15) = 22800 - 4950 \Rightarrow DI_1 = 17850$$

Determinante de  $I_2$ : (substituindo a segunda coluna pela matriz de termos independentes)

$$\begin{vmatrix} -530 & -30 \\ -330 & -15 \end{vmatrix} \Rightarrow DI_2 = (-530) \times (-15) - (-30) \times (-330) = 7950 - 9900 \Rightarrow DI_2 = -1950$$

Cálculo de  $I_1$  e de  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{DI_1}{D} = \frac{17850}{293900} \Rightarrow I_1 = 60,73 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{DI_2}{D} = \frac{-1950}{293900} \Rightarrow I_2 = -6,63 \text{ mA}$$

Como podemos notar, os resultados de  $I_1$  e de  $I_2$  são idênticos aos obtidos pela forma analítica (item 3).

As duas leis de Kirchhoff (para tensões e para correntes) podem ser utilizadas para avaliar os resultados obtidos na análise de um circuito, verificando se eles estão corretos.

Para isso, basta aplicar a Lei de Kirchhoff para Correntes aos nós do circuito e a Lei de Kirchhoff para Tensões às suas malhas.

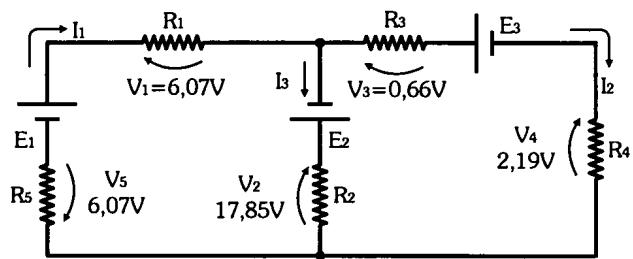
Porém, apenas a aplicação da Lei de Kirchhoff para Tensões à malha externa do circuito é suficiente para a verificação.

Se a aplicação dessa lei for satisfeita, a análise pode ser considerada correta; caso contrário, ela deve ser revista.

### EXEMPLO

A análise realizada no exemplo da página 74 obteve os resultados mostrados abaixo. Verificaremos se eles estão corretos por meio das Leis de Kirchhoff.

Dados:  $E_1 = 20V$   
 $E_2 = 10V$   
 $E_3 = 5V$   
 $I_1 = 60,73mA$   
 $I_2 = 6,63mA$   
 $I_3 = 54,10mA$   
 $R_1 = R_3 = R_5 = 100\Omega$   
 $R_2 = R_4 = 330\Omega$



Aplicando a Lei de Kirchhoff para Tensões à malha externa do circuito, tomando como referência o sentido horário, obtemos:

$$E_1 - V_1 - V_3 - E_3 - V_4 - V_5 = 0 \Rightarrow$$

$$20 - 6,07 - 0,66 - 5 - 2,19 - 6,07 = 0$$

$$0,01 = 0$$

Essa verificação comprova que a análise foi feita corretamente, pois a diferença ocorrida ( $0,01 = 0$ ) é devido aos arredondamentos efetuados durante a resolução.

O *balanço energético* de um circuito verifica se os resultados obtidos numa análise indicam que toda energia fornecida pelos geradores é consumida pelos receptores passivos e ativos, já que “*toda energia fornecida deve ser consumida ou transformada*”.

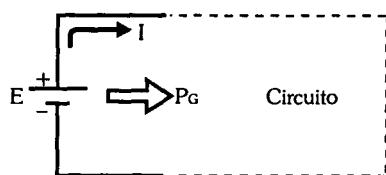
Se isso ocorrer, a análise pode ser considerada correta; caso contrário, ela deve ser revista.

Como *energia = potência x tempo*, o balanço energético pode ser realizado por meio das potências envolvidas, ao invés das energias, não havendo necessidade de considerar o tempo de funcionamento do circuito.

Para que possamos equacionar o balanço energético, temos de considerar o seguinte:

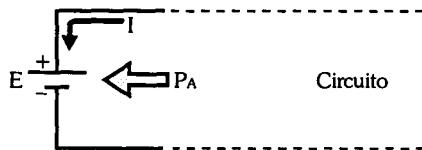
- Num circuito, as fontes de alimentação que funcionam como *geradores* são as responsáveis pelo fornecimento de energia a ele.

A potência total dos geradores será chamada de  $P_G$ .



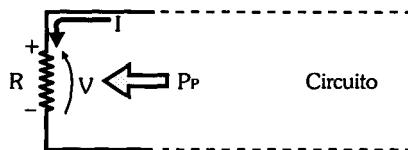
- Num circuito, as fontes de alimentação que funcionam como *receptores ativos*, ao invés de fornecerem energia, elas a consomem.

A potência total dos receptores ativos será chamada de  $P_A$ .



- Num circuito, todos os resistores funcionam como *receptores passivos* e, portanto, consomem energia.

A potência total desses receptores passivos será chamada de  $P_P$ .



Dessa forma, o balanço energético pode ser equacionado pelas potências envolvidas no circuito da seguinte forma:

$$P_G - P_A - P_P = 0$$

em que:

$P_G$  = potência total dos geradores

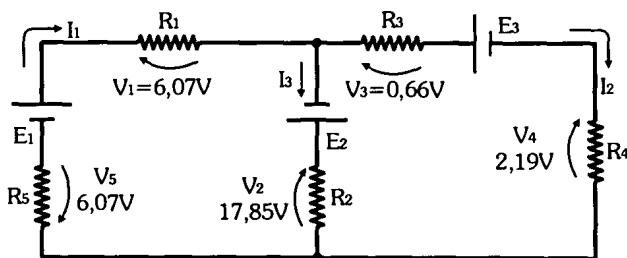
$P_A$  = potência total dos receptores ativos

$P_P$  = potência total dos receptores passivos

## EXEMPLO

A análise realizada no exemplo da página 74 obteve os resultados mostrados ao lado. Verificaremos se eles estão corretos por meio do Balanço Energético.

Dados:  $E_1 = 20V$   
 $E_2 = 10V$   
 $E_3 = 5V$   
 $I_1 = 60,73mA$   
 $I_2 = 6,63mA$   
 $I_3 = 54,10mA$   
 $R_1 = R_3 = R_5 = 100\Omega$   
 $R_2 = R_4 = 330\Omega$



Nesse circuito, verificamos o seguinte comportamento dos bipolos:

Geradores:  $E_1$  e  $E_2$

Receptor Ativo:  $E_3$

Receptores Passivos:  $R_1, R_2, R_3, R_4$  e  $R_5$

Cálculo de  $P_G$ :

$$P_G = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_3 \Rightarrow$$

$$P_G = 20 \times 60,73 \times 10^{-3} + 10 \times 54,10 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$P_G = 1,215 + 0,541 \Rightarrow P_G = 1,756W$$

Cálculo de  $P_A$ :

$$P_A = E_3 \cdot I_2 \Rightarrow$$

$$P_A = 5 \times 6,63 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$P_A = 0,0336W$$

Cálculo de  $P_P$ :

$$P_P = V_1 \cdot I_1 + V_2 \cdot I_3 + V_3 \cdot I_2 + V_4 \cdot I_2 + V_5 \cdot I_1 \Rightarrow$$

$$P_P = 6,07 \times 60,73 \times 10^{-3} + 17,85 \times 54,10 \times 10^{-3} + 0,66 \times 6,63 \times 10^{-3} + 2,19 \times 6,63 \times 10^{-3} + 6,07 \times 60,73 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$P_P = 0,369 + 0,966 + 0,004 + 0,015 + 0,369 \Rightarrow P_P = 1,723W$$

Portanto:

$$P_G - P_A - P_P = 0 \Rightarrow 1,756 - 0,033 - 1,723 = 0$$

O resultado do balanço energético comprova que toda energia fornecida ao circuito pelos geradores foi consumida pelos receptores.

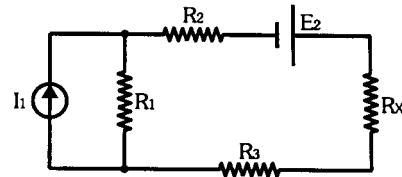
Isso comprova também que a análise anteriormente realizada está correta.

## Exercícios Propostos

### Método da Superposição

- 9.1) Considere o circuito ao lado e determine a tensão e a corrente em  $R_x$  pelo método da superposição.

Dados:  $I_1 = 500 \text{ mA}$   
 $E_2 = 20 \text{ V}$   
 $R_1 = R_3 = 100 \Omega$   
 $R_2 = R_x = 200 \Omega$

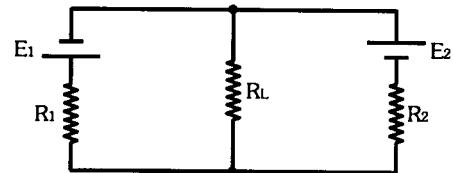


### Método de Thévenin

- 9.2) Considere o circuito do exercício 9.1 e determine a tensão e a corrente em  $R_x$  pelo método de Thévenin.

- 9.3) Dado o circuito ao lado, determine a corrente e a tensão na carga  $R_L$  pelo método de Thévenin, para cada um dos valores seguintes que ela pode assumir:  
 $R_{L1} = 100\Omega$ ;  $R_{L2} = 500\Omega$ ;  $R_{L3} = 1k5\Omega$ .

Dados:  $E_1 = 20V$   
 $E_2 = 40V$   
 $R_1 = 1k\Omega$   
 $R_2 = 470\Omega$

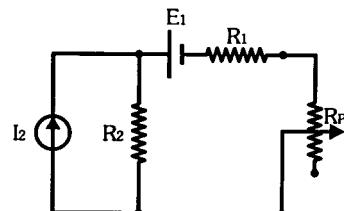


### Método de Norton

- 9.4) Considere o circuito do exercício 9.1 e determine a tensão e a corrente em  $R_x$  pelo método de Norton.

- 9.5) Dado o circuito ao lado, determine a corrente no potenciômetro  $R_P$  pelo método de Norton quando ele assume os seguintes valores:  
 $0\Omega$ ;  $600\Omega$ ;  $1,2k\Omega$ ;  $1,8k\Omega$ ;  $2,2k\Omega$ .

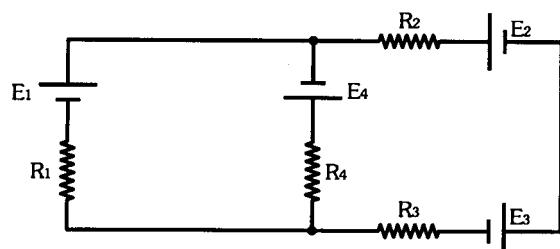
Dados:  $E_1 = 24V$   
 $I_2 = 40mA$   
 $R_1 = 820\Omega$   
 $R_2 = 1k2\Omega$   
 $R_P = 2k2\Omega$



### Método de Maxwell

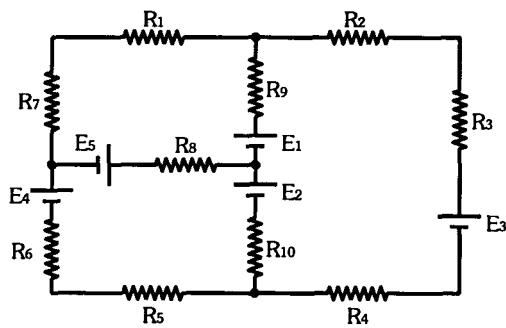
- 9.6) Determine as correntes e as tensões em todos os bipolos do circuito ao lado pelo método de Maxwell.

Dados:  $E_1 = E_3 = 20V$   
 $E_2 = E_4 = 10V$   
 $R_1 = R_2 = 22\Omega$   
 $R_3 = R_4 = 47\Omega$



- 9.7)** Determine as correntes e as tensões em todos os bipolos do circuito ao lado pelo método de Maxwell.

Dados:  $R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = R_9 = 100 \Omega$   
 $R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = R_{10} = 200 \Omega$   
 $E_1 = E_3 = E_5 = 9 V$   
 $E_2 = E_4 = 6 V$



#### **Verificação dos Resultados pelas Leis de Kirchhoff**

- 9.8)** Verifique se os resultados obtidos nos exercícios 9.6 e 9.7 estão corretos por meio das Leis de Kirchhoff.

#### **Balanço Energético de um Circuito**

- 9.9)** Verifique se os resultados obtidos nos exercícios 9.6 e 9.7 estão corretos por meio do Balanço Energético.

**10.1**

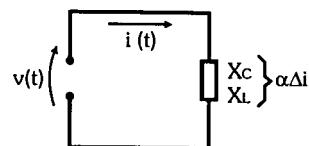
**Conceito de Dispositivos Reativos**

Nos dois próximos capítulos, vamos tratar de dois dispositivos chamados reativos, a saber: o capacitor e o indutor, bem como de suas aplicações em corrente contínua.

Primeiramente, cabe aqui uma rápida explicação sobre a diferença entre os dispositivos resistivo e reativo. Um dispositivo *resistivo*, como, por exemplo, o resistor, é aquele que *resiste à passagem de corrente*, mantendo o seu valor ôhmico constante tanto para a corrente contínua como para a corrente alternada.

Já, o dispositivo *reativo reage às variações de corrente*, sendo que seu valor ôhmico muda conforme a velocidade da variação da corrente nele aplicada.

Essa reação às variações de corrente é denominada *reatância capacitiva*  $X_C$  ou *reatância indutiva*  $X_L$ , cujas unidades de medida é o *ohm* [ $\Omega$ ].

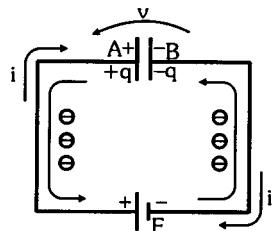
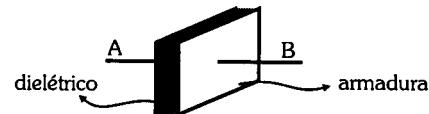


Primeiramente, trataremos do comportamento desse tipo de dispositivo apenas em corrente contínua, incluindo, porém, o período de transição entre a ligação do circuito reativo e a sua estabilização.

**10.2**

**Capacitor e Conceito de Capacitância**

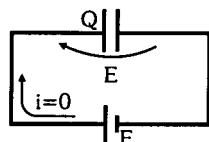
Considere duas placas condutoras paralelas  $A$  e  $B$ , denominadas *armaduras*, separadas por um material isolante denominado *dielétrico*.



Aplicando uma diferença de potencial (tensão) entre as placas, com potencial positivo na placa  $A$  e potencial negativo na placa  $B$ , a placa  $A$  começa a ceder elétrons para o pôlo positivo da fonte, carregando-se positivamente, e a placa  $B$ , simultaneamente, começa a atrair elétrons do pôlo negativo da fonte, carregando-se negativamente, formando um fluxo de elétrons (corrente  $i$ ).

Porém, como entre as placas existe um material isolante, esse fluxo de elétrons não o atravessa, fazendo com que as cargas fiquem armazenadas nas placas.

Conforme aumenta a carga  $q$  armazenada nas placas, aumenta a diferença de potencial  $v$  entre elas, fazendo com que o fluxo de elétrons diminua.

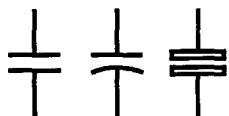


Após um determinado tempo, a carga armazenada atinge o seu valor máximo  $Q$ . Isso ocorre quando a diferença de potencial entre as placas se iguala à tensão da fonte ( $v = E$ ), cessando o fluxo de elétrons ( $i = 0$ ).

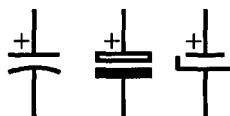
**Nota:** Consulte no Apêndice 1, os tópicos VI e VII.

Esse dispositivo, com capacidade de armazenar cargas elétricas (energia eletrostática), é chamado de *capacitor* ou *condensador*, cujos símbolos mais comuns estão representados abaixo.

Capacitor Não Polarizado



Capacitor Polarizado



Capacitor Variável



Em geral, nos capacitores fabricados com placas condutoras separadas por um dielétrico, a tensão pode ser aplicada aos seus terminais com qualquer polaridade.

Porém, em alguns capacitores, como os eletrolíticos de alumínio ou de tântalo, as placas devem ser polarizadas corretamente; caso contrário, eles podem se danificar. Para isso, o fabricante identifica o terminal positivo ou negativo no próprio encapsulamento, por meio dos sinais + ou -.

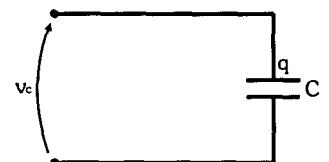
## Capacitância x Características Elétricas

A capacidade de armazenamento de cargas elétricas é chamada de *capacitância*, simbolizada pela letra *C*.

A capacidade é a medida da carga elétrica *q* que o capacitor pode armazenar por unidade de tensão *v<sub>c</sub>*.

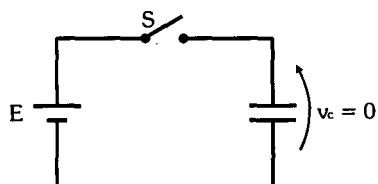
Matematicamente:

$$C = \frac{q}{v_c}$$



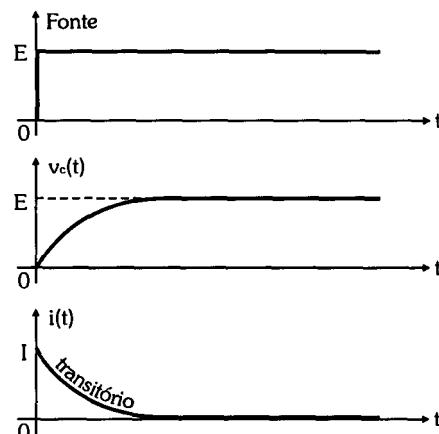
Por esta fórmula, a unidade de capacidade é *coulomb/volt* [C/V] ou, simplesmente, *farad* [F].

## Comportamento Elétrico do Capacitor



Vamos analisar, em detalhes, o comportamento da tensão e da corrente no capacitor.

Considere o circuito ao lado, com a chave *S* aberta e com o capacitor inicialmente descarregado, isto é, *v<sub>c</sub> = 0*.



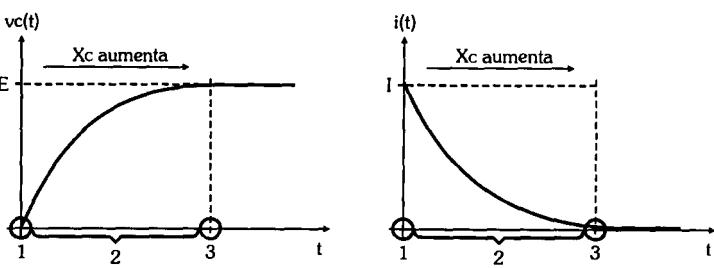
Fechando a chave no instante *t = 0*, a tensão entre as placas do capacitor cresce exponencialmente até atingir o valor máximo, isto é, *v<sub>c</sub> = E*.

Com a corrente acontece o contrário. Inicialmente, com as placas do capacitor descarregadas, a corrente não encontra qualquer resistência para fluir, tendo um valor máximo *i = I*, caindo exponencialmente até cessar, *i = 0*.

O período entre o fechamento da chave e a estabilização da tensão é rápido, mas não instantâneo, sendo denominado *transitório*.

Esse comportamento do capacitor leva-nos às seguintes conclusões:

- 1) Quando o capacitor está totalmente descarregado, a fonte o “enxerga” como um curto-círcuito ( $X_C = 0$ ). Por isso,  $v_c = 0$  e  $i = I$ .
- 2) Conforme as placas se carregam e a tensão  $v_c$  aumenta, a fonte “enxerga” o capacitor como se ele fosse uma reatância  $X_C$  crescente, fazendo com que a corrente  $i$  diminua.
- 3) Quando o capacitor está totalmente carregado, a tensão entre as placas se iguala à da fonte,  $v_c = E$ , que o “enxerga” como um circuito aberto ( $X_C = \infty$ ). Por isso,  $i = 0$ .



A relação entre a tensão  $v_c$  e a corrente  $i$  no capacitor pode ser dada matematicamente por meio das expressões:

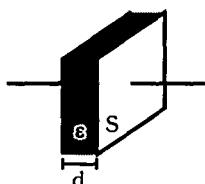
$$v_c = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt + v_{co}$$

e

$$i = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

em que  $v_{co}$  é tensão no capacitor em  $t = 0$ .

### Capacitância x Características Físicas



A capacidade de um capacitor de placas paralelas depende da área  $S [m^2]$  das placas, da distância  $d [m]$  entre elas e do material dielétrico, que é caracterizado por sua *permisividade absoluta*, representada pela letra grega  $\epsilon$  (epsílon), cuja unidade de medida é *farad/metro* [ $F/m$ ].

Matematicamente:

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{d}$$

No vácuo,  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} F/m$ . Para os demais materiais, essa característica pode ser dada em relação à *permisividade do vácuo*, conforme a tabela seguinte:

Dielétrico	Permissividade - $\epsilon$ [F/m]
ar	$\epsilon_0$
polietileno	$2,3 \cdot \epsilon_0$
papel	$3,5 \cdot \epsilon_0$
baquelite	$4,8 \cdot \epsilon_0$
mica	$6 \cdot \epsilon_0$
porcelana	$6,5 \cdot \epsilon_0$

**Michael Faraday (1791 – 1867)**

Cientista inglês, estudou as relações entre a eletricidade estática e a corrente elétrica, e entre a eletricidade e a luz, chegando a formular uma teoria sobre a natureza eletromagnética da luz. Inventou o voltímetro durante suas pesquisas sobre eletrólise.

A unidade de medida de capacidade é farad, em sua homenagem.



Comercialmente, existem diversos tipos de capacitores fixos e variáveis, que abrangem uma ampla faixa de capacitâncias, desde alguns *picofarads* [ $pF$ ] até alguns *milifarads* [ $mF$ ].

### Especificações dos Capacitores

Os fabricantes de capacitores, além de seus valores nominais, fornecem várias outras especificações em seus catálogos e manuais, das quais destacamos as seguintes:

#### Tolerância

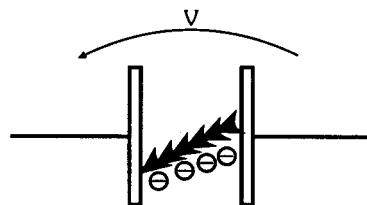
Dependendo da tecnologia de fabricação e do material dielétrico empregado, a tolerância dos capacitores pode variar. Em geral, ela está entre  $\pm 1\%$  e  $\pm 20\%$ .

#### Tensão de Isolação

É a máxima tensão que pode ser aplicada continuamente ao capacitor, indo desde alguns *volts* [ $V$ ] até alguns *quilovolts* [ $kV$ ].

A máxima tensão de isolamento está relacionada, principalmente, com o dielétrico utilizado na fabricação do capacitor.

Isso se justifica pelo fato de que uma tensão muito elevada pode gerar um campo elétrico entre as placas, suficiente para romper o dielétrico, abrindo um caminho de baixa resistência para a corrente.



Quando isso ocorre, dizemos que o capacitor possui uma resistência de fuga, podendo, inclusive, entrar em curto-circuito.

Nos capacitores cerâmicos e plásticos (poliéster, poliestireno e polipropileno), a tensão de isolamento está na faixa de algumas dezenas de volts até alguns quilovolts.

Nos capacitores eletrolíticos (de alumínio e de tântalo), a tensão de isolamento é limitada a algumas dezenas de volts.

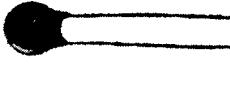
### Capacitores Comerciais

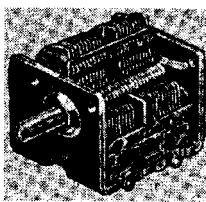
Os valores comerciais de capacitores são diversos, porém os mais comuns são de múltiplos e submúltiplos das décadas mostradas na tabela seguinte:

Capacitores não Eletrolíticos até $1\mu F$												
10	12	15	18	22	27	33	47	56	68	75	82	91

Capacitores Eletrolíticos até $10000\mu F$					
10	22	27	33	47	68

A tabela seguinte mostra alguns tipos de capacitores fixos e variáveis, bem como algumas de suas características.

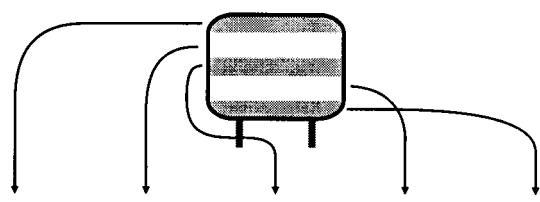
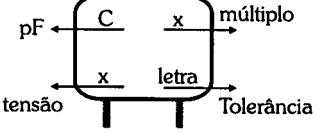
Tipos de Capacitores Fixos				
Cerâmico	Plástico Metalizado	Eletrolítico (alumínio)	Eletrolítico (tântalo)	SMD
 Polaridade: não Capacitância: pF - nF Isolação: V - kV	 Polaridade: não Capacitância: nF - μF Isolação: V - kV	 Polaridade: sim Capacitância: μF - mF Isolação: V	 Polaridade: sim Capacitância: nF - μF Isolação: V	 Polaridade: sim e não Capacitância: pF - μF Isolação: V

Tipos de Capacitores Variáveis	
 Polaridade: não Capacitância: pF - nF Isolação: V	 Polaridade: não Capacitância: pF - nF Isolação: V

Obs.: Estas características podem variar em função do fabricante de capacitores.

### Códigos de Especificação de Capacitores

Em geral, os capacitores não trazem as suas especificações no próprio encapsulamento. Por isso, existem três códigos para expressá-las: *código de cores* (para capacidade nominal, tolerância e tensão de isolamento) é usado principalmente nos capacitores de poliéster metalizado, o *código alfabético* (para tolerância) é usado em diversos tipos de capacitor e o *código numérico* (para capacidade nominal e tensão de isolamento) é usado principalmente nos capacitores cerâmicos.

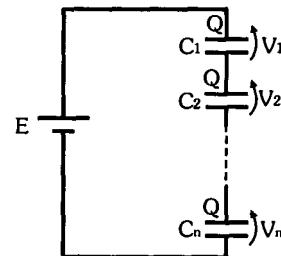
Capacitores de Poliéster Metalizado (Código de Cores)					Capacitores Cerâmicos (Código Alfanumérico)				
									
Cores	1º Díg.	2º Díg.	Múltiplo	± (%)	Tensão	Nº (x)	Múltiplo	Tensão	Tolerância
Preto		0		20		0			C $\pm 0,25\text{pF}$
Marrom	1	1	$\times 10\text{ pF}$		100 a 150 V	1	$\times 10\text{ pF}$	100 V	D $\pm 0,25\%$
Vermelho	2	2	$\times 10^2\text{ pF}$		200 a 250 V	2	$\times 10^2\text{ pF}$	25 V	F $\pm 1\%$
Laranja	3	3	$\times 10^3\text{ pF}$		300 a 350 V	3	$\times 10^3\text{ pF}$		F $\pm 1\%$
Amarelo	4	4	$\times 10^4\text{ pF}$		400 a 450 V	4	$\times 10^4\text{ pF}$		G $\pm 2\%$
Verde	5	5	$\times 10^5\text{ pF}$		500 a 550 V	5	$\times 10^5\text{ pF}$	50 V	J $\pm 5\%$
Azul	6	6			600 a 650 V	6	$\times 10^6\text{ pF}$		K $\pm 10\%$
Violeta	7	7				7	$\times 10^7\text{ pF}$		L $\pm 20\%$
Cinza	8	8	$\times 10^{-2}\text{ pF}$			8	$\times 10^{-2}\text{ pF}$		
Branco	9	9	$\times 10^{-1}\text{ pF}$	10		9	$\times 10^{-1}\text{ pF}$		

Obs.: O logotipo do fabricante pode ser usado para representar a tensão de isolamento, cujo valor depende de código específico.

Num circuito, os capacitores podem estar ligados em série e/ou em paralelo, em função da necessidade de dividir a tensão e/ou a corrente ou de obter uma capacidade diferente dos valores comerciais.

### Associação Série de Capacitores

Na associação série, os capacitores estão ligados de forma que a carga  $Q$  armazenada em cada um deles seja a mesma, e a tensão  $E$  total aplicada aos capacitores se subdivida entre eles de forma inversamente proporcional aos seus valores.



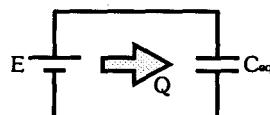
Pela Lei de Kirchhoff para Tensões, a soma das tensões nos capacitores é igual à tensão total  $E$  aplicada:

$$E = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Como  $V_i = \frac{Q}{C_i}$ , tem-se:  $E = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{E}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

O termo  $E/Q$  corresponde ao inverso da capacidade equivalente vista pela fonte de alimentação. Assim:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



Isso significa que, se todos os capacitores dessa associação forem substituídos por uma única capacidade de valor  $C_{eq}$ , a fonte de alimentação  $E$  fornecerá a mesma carga  $Q$  ao circuito.

No caso de  $n$  capacitores iguais a  $C$  em série, tem-se:

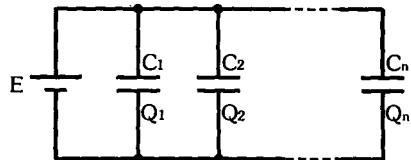
$$C_{eq} = \frac{C}{n}$$

Para *dois* capacitores em série, tem-se:

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

## Associação Paralela de Capacitores

Na associação paralela, os capacitores estão ligados de forma que a tensão total  $E$  aplicada ao circuito seja a mesma em todos os capacitores, e a carga total  $Q$  do circuito se subdivida entre eles proporcionalmente aos seus valores.



Adaptando a Lei de Kirchhoff para a distribuição das cargas, a soma das cargas nos capacitores é igual à carga total  $Q$  fornecida pela fonte:  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$

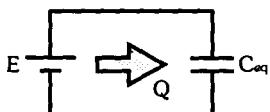
Substituindo as cargas dos capacitores por  $Q_i = E \cdot C_i$ , tem-se:

$$Q = C_1 \cdot E + C_2 \cdot E + \dots + C_n \cdot E \Rightarrow Q = E \cdot (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$$

Dividindo a carga  $Q$  pela tensão  $E$ , chega-se a:  $\frac{Q}{E} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

O resultado  $Q/E$  corresponde à capacidade equivalente  $C_{eq}$  da associação paralela, isto é, a capacidade que a fonte de alimentação entende como sendo a sua carga. Assim:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



Isso significa que se todos os capacitores dessa associação forem substituídos por uma única capacidade de valor  $C_{eq}$ , a fonte de alimentação  $E$  fornecerá a mesma carga  $Q$  ao circuito.

No caso de  $n$  capacitores iguais a  $C$  em paralelo, tem-se:

$$C_{eq} = n \cdot C$$

**Obs.:** Num texto, podemos representar dois capacitores em paralelo por:  $C_1 // C_2$ .

## Associação Mista

A associação mista é formada por capacitores ligados em série e em paralelo, não existindo uma equação geral para a capacidade equivalente, pois ela depende da configuração do circuito. Assim, o cálculo deve ser feito por etapas, conforme as ligações entre os capacitores.

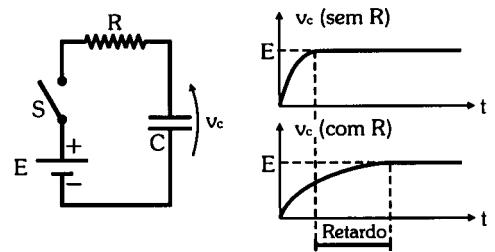
Um circuito temporizador é aquele que executa uma ação após um intervalo de tempo preestabelecido.

Neste tópico, analisaremos o comportamento de um circuito formado por um resistor e um capacitor ligados em série que, como veremos, estabelece uma relação entre níveis de tensão e um intervalo de tempo definido pelos valores do resistor e do capacitor.

### Constante de Tempo

Como vimos no tópico 10.2, o tempo de carga de um capacitor alimentado diretamente por uma fonte de tensão não é instantâneo, embora seja muito pequeno.

Ligando um resistor em série com o capacitor, pode-se retardar o tempo de carga, fazendo com que a tensão entre os seus terminais cresça mais lentamente.



Vamos analisar dimensionalmente o produto entre resistência e capacidade  $[R.C]$ , considerando as seguintes unidades de medida das grandezas envolvidas:

- $[R] = \Omega$  (ohm) =  $V/A$  (volt/ampère)
- $[C] = F$  (farad) =  $C/V$  (coulomb/volt)
- $[I] = A$  (ampère) =  $C/s$  (coulomb/segundo)

$$[R.C] = \Omega.F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = \frac{1}{\frac{C}{A}} = \frac{C.s}{C} \Rightarrow [R.C] = s = \text{segundo}$$

Portanto, o produto  $R.C$  resulta na grandeza *tempo [segundo]*. Esse produto é denominado *constante de tempo*, representado pela letra grega  $\tau$  (tau).

Matematicamente:

$$\boxed{\tau = R.C}$$

Num circuito  $RC$ , quanto maior a constante de tempo, maior é o tempo necessário para que o capacitor se carregue.

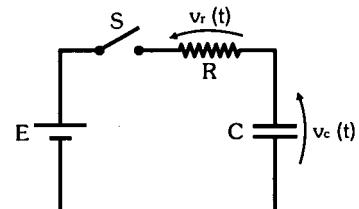
### Carga do Capacitor

Considere um circuito  $RC$  série ligado a uma fonte de tensão contínua  $E$  e a uma chave  $S$  aberta, com o capacitor completamente descarregado.

Pela Lei de Kirchhoff para Tensões, a equação geral desse circuito é ( $S$  fechada):

$$v_c(t) + v_r(t) = E$$

A corrente que flui no circuito durante a carga do capacitor pode ser determinada aplicando a Primeira Lei de Ohm no resistor  $R$ :



$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R}$$

Ligando a chave  $S$  no instante  $t = 0$ , observa-se que as tensões e a corrente do circuito resultam nos seguintes gráficos e expressões:

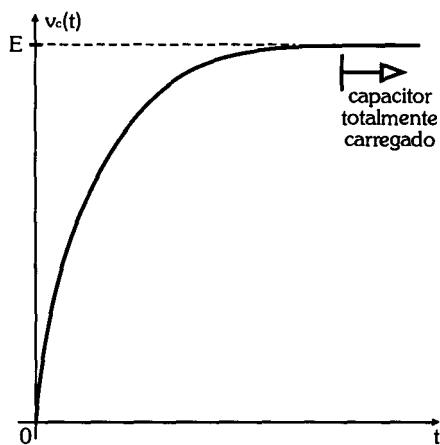
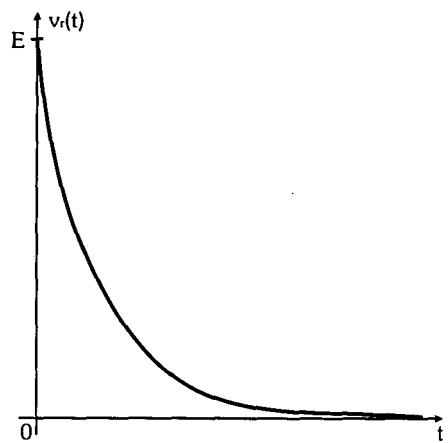
### Tensão no Resistor

A tensão  $v_r$  cai exponencialmente de  $E$  até zero, pois o capacitor descarregado comporta-se como um curto-círcito e totalmente carregado comporta-se como um circuito aberto. Matematicamente:

$$v_r(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Em que:  $e \approx 2,72 =$  algarismo neperiano

Observe que o termo  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  diminui com o aumento do instante  $t$ .



### Tensão no Capacitor

A tensão  $v_c$  no capacitor cresce exponencialmente desde zero até a tensão  $E$ , quando a sua carga é total. Portanto, a tensão no capacitor é uma exponencial crescente, que pode ser deduzida da equação geral do circuito e da expressão de  $v_r$ :

$$v_c(t) + v_r(t) = E \Rightarrow v_c(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$v_c(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Observe que o termo  $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  aumenta com o aumento do instante  $t$ .

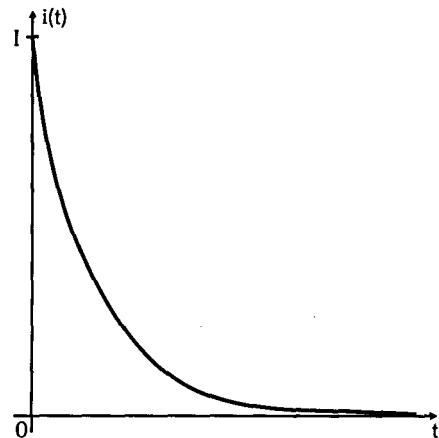
### Corrente no Circuito

A corrente  $i$  inicia com um valor máximo  $I = E / R$  quando o capacitor está descarregado (curto-círcito), caindo até zero quando o capacitor está totalmente carregado (círculo aberto). Matematicamente:

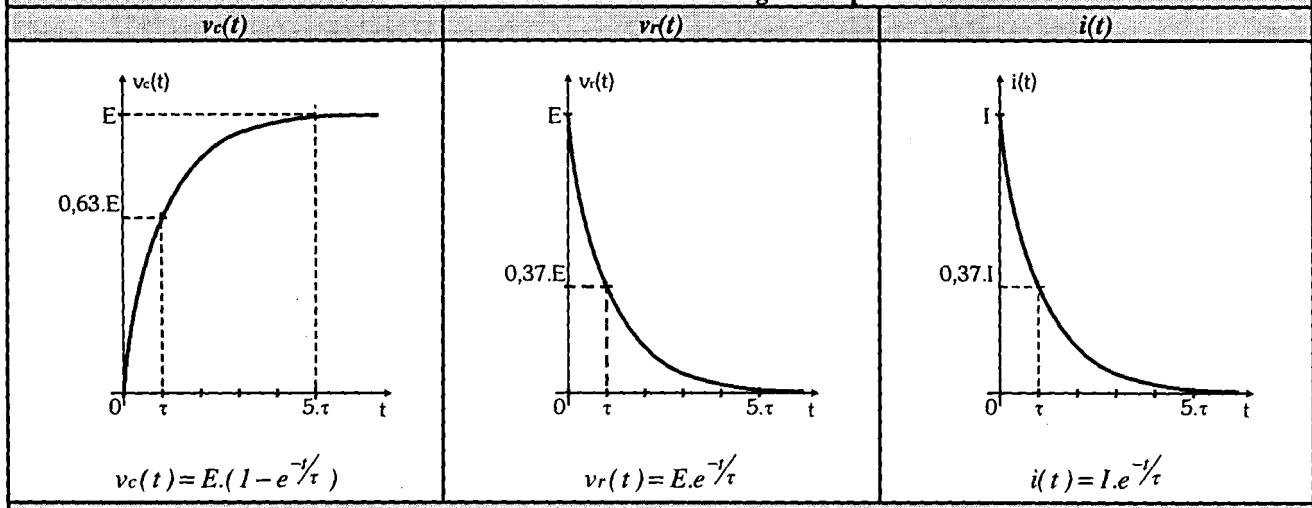
$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R} \Rightarrow$$

$$i(t) = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Observe que o termo  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  diminui com o aumento do instante  $t$ .



**Análise do circuito durante a carga do capacitor:**



No instante  $t = 0$ :

$$v_c(0) = E(1 - e^0) \Rightarrow$$

$$v_c(0) = E(1 - e^0) = E(1 - 1) \Rightarrow$$

$$v_c(0) = 0$$

$$v_r(0) = E e^0 \Rightarrow$$

$$v_r(0) = E e^0 = E \cdot 1 \Rightarrow$$

$$v_r(0) = E$$

$$i(0) = I e^0 \Rightarrow$$

$$i(0) = I \cdot 1 = I \cdot I \Rightarrow$$

$$i(0) = I$$

**Análise:** Em  $t = 0$ , a tensão no capacitor é nula, a tensão no resistor é máxima e a corrente no circuito é máxima.

No instante  $t = \tau$ :

$$v_c(\tau) = E(1 - e^{-\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$v_c(\tau) = E(1 - e^{-1}) = E(1 - 0,37) \Rightarrow$$

$$v_c(\tau) = 0,63 \cdot E$$

$$v_r(\tau) = E e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$v_r(\tau) = E e^{-1} \Rightarrow$$

$$v_r(\tau) = 0,37 \cdot E$$

$$i(\tau) = I e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$i(\tau) = I e^{-1} \Rightarrow$$

$$i(\tau) = 0,37 \cdot I$$

**Análise:** Em  $t = \tau$ , a tensão no capacitor cresce até 63% da tensão da fonte ( $v_c = 0,63 \cdot E$ ), a tensão no resistor cai 63% ( $v_r = 0,37 \cdot E$ ) e a corrente no circuito cai 63% ( $i = 0,37 \cdot I$ ).

No instante  $t = 5\tau$ :

$$v_c(5\tau) = E(1 - e^{-5\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$v_c(5\tau) = E(1 - e^{-5}) = E(1 - 0,01) \Rightarrow$$

$$v_c(5\tau) = 0,99 \cdot E$$

$$v_r(5\tau) = E e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$v_r(5\tau) = E e^{-5} \Rightarrow$$

$$v_r(5\tau) = 0,01 \cdot E$$

$$i(5\tau) = I e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$i(5\tau) = I e^{-5} \Rightarrow$$

$$i(5\tau) = 0,01 \cdot I$$

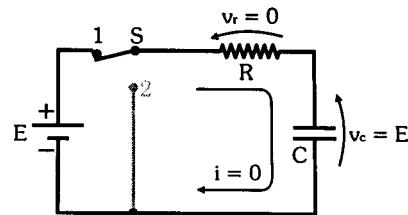
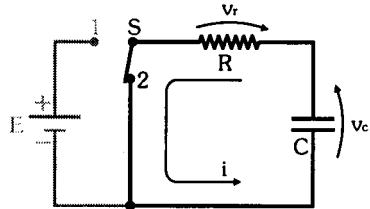
**Análise:** Em  $t = 5\tau$ , a tensão no capacitor cresce até 99% da tensão da fonte ( $v_c = 0,99 \cdot E$ ), a tensão no resistor cai 99% ( $v_r = 0,01 \cdot E$ ) e a corrente no circuito cai 99% ( $i = 0,01 \cdot I$ ). Nesse caso, podemos considerar que o capacitor já se encontra totalmente carregado.

## Descarga do Capacitor

Considere um circuito  $RC$  série ligado a uma fonte de tensão  $E$  e a uma chave  $S$  inicialmente na posição 1, com o capacitor já completamente carregado.

Dessa forma, tem-se:

$$i = 0 ; v_c = E ; v_r = 0$$



Ao mudar a chave  $S$  para a posição 2 no instante  $t = 0$ , a fonte de alimentação é desligada, ficando o circuito  $RC$  em curto.

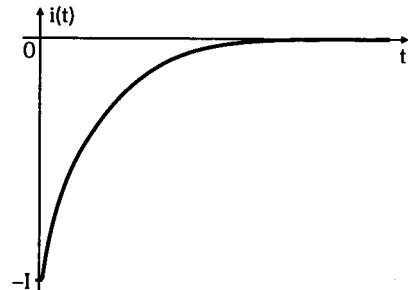
Assim, o capacitor se descarrega sobre o resistor, de forma que sua tensão descreve uma curva exponencial decrescente.

Nesse caso, o capacitor comporta-se como uma fonte de tensão, cuja capacidade de fornecimento de corrente é limitada pelo tempo de descarga.

### Corrente no Circuito

A corrente  $i$  flui agora no sentido contrário, decrescendo exponencialmente desde  $-I = -E/R$  até zero, devido à descarga do capacitor. Assim, a sua expressão é dada por:

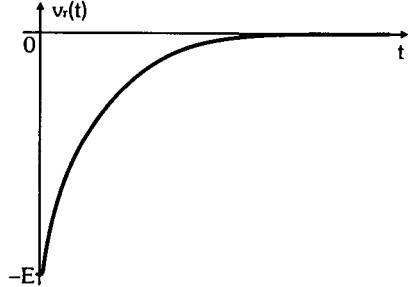
$$i(t) = -I \cdot e^{-t/\tau}$$



### Tensão no Resistor

A tensão  $v_r$  no resistor acompanha a corrente, de forma que a sua expressão é dada por:

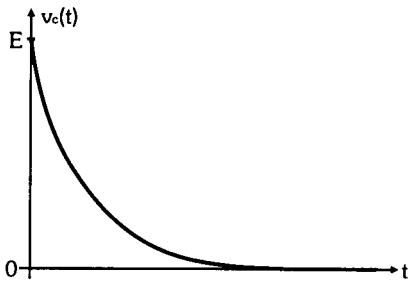
$$v_r(t) = -E \cdot e^{-t/\tau}$$



### Tensão no Capacitor

A expressão da descarga do capacitor é dada por:

$$v_c(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$



Análise do circuito durante a descarga do capacitor:		
$v_c(t)$	$v_r(t)$	$i(t)$
<p><math>v_c(t) = E \cdot e^{-t/\tau}</math></p>	<p><math>v_r(t) = -E \cdot e^{-t/\tau}</math></p>	<p><math>i(t) = -I \cdot e^{-t/\tau}</math></p>
No instante $t = 0$ :		
$v_c(0) = E \cdot e^0 \Rightarrow$ $v_c(0) = E \cdot e^0 = E \cdot I \Rightarrow$ $v_c(0) = E$	$v_r(0) = -E \cdot e^0 \Rightarrow$ $v_r(0) = -E \cdot e^0 = -E \cdot I \Rightarrow$ $v_r(0) = -E$	$i(0) = -I \cdot e^0 \Rightarrow$ $i(0) = -I \cdot e^0 = -I \cdot I \Rightarrow$ $i(0) = -I$
Análise: Em $t = 0$ , as tensões no capacitor e no resistor e a corrente no circuito são máximas.		
No instante $t = \tau$ :		
$v_c(\tau) = E \cdot e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$ $v_c(\tau) = E \cdot e^{-1} \Rightarrow$ $v_c(\tau) = 0,37.E$	$v_r(\tau) = -E \cdot e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$ $v_r(\tau) = -E \cdot e^{-1} \Rightarrow$ $v_r(\tau) = -0,37.E$	$i(\tau) = -I \cdot e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$ $i(\tau) = -I \cdot e^{-1} \Rightarrow$ $i(\tau) = -0,37.I$
Análise: Em $t = \tau$ , a tensão no capacitor cai 63% ( $v_c = 0,37.E$ ), a tensão no resistor cai 63% ( $v_r = -0,37.E$ ) e a corrente no circuito cai 63% ( $i = -0,37.I$ ).		
No instante $t = 5\tau$ :		
$v_c(5\tau) = E \cdot e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$ $v_c(5\tau) = E \cdot e^{-5} \Rightarrow$ $v_c(5\tau) = 0,01.E$	$v_r(5\tau) = -E \cdot e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$ $v_r(5\tau) = -E \cdot e^{-5} \Rightarrow$ $v_r(5\tau) = -0,01.E$	$i(5\tau) = -I \cdot e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$ $i(5\tau) = -I \cdot e^{-5} \Rightarrow$ $i(5\tau) = -0,01.I$
Análise: Em $t = 5\tau$ , a tensão no capacitor cai 99% ( $v_c = 0,01.E$ ), a tensão no resistor cai 99% ( $v_r = -0,01.E$ ) e a corrente no circuito cai 99% ( $i = -0,01.I$ ). Nesse caso, podemos considerar que o capacitor já se encontra totalmente descarregado.		

Neste tópico, analisaremos duas aplicações práticas do circuito *RC*: um circuito gerador de onda quadrada e um circuito de inicialização automática e manual para computador.

Porém, esses dois circuitos utilizam dois dispositivos que não foram objetos de estudo deste livro: a porta lógica inversora e o diodo semicondutor. Caso você não os conheça, não há problema, pois iniciaremos este tópico com uma rápida análise desses dispositivos.

### Porta Lógica Inversora

A eletrônica digital trabalha com apenas dois níveis de tensão, caracterizando, assim, o nível lógico de um “bit”.

O nível lógico “0” corresponde a uma tensão baixa ou *OV*.

O nível lógico “1” corresponde a uma tensão alta cujo valor depende da tensão de alimentação *Vcc* do circuito integrado considerado, sendo *Vcc* igual a 5V se a família for *TTL* e entre 3V e 18V se a família for *CMOS*.

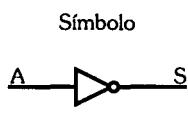
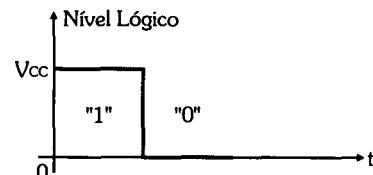


Tabela Verdade

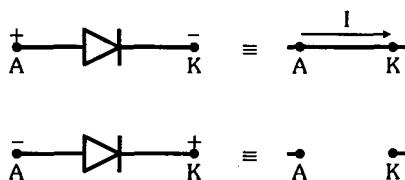
A	S
0	1
1	0

A porta lógica inversora, também denominada porta *NÃO* (*NOT*), caracteriza-se por complementar o nível lógico presente em sua entrada, isto é,  $S = \bar{A}$ , conforme mostra a sua tabela-verdade ao lado.

### Diodo Semicondutor

O diodo é um dispositivo fabricado com material semicondutor, sendo que sua principal característica é permitir a condução da corrente elétrica num único sentido.

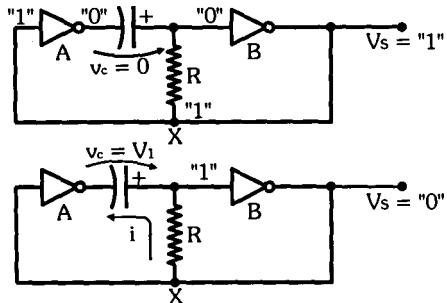
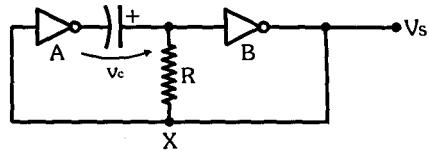
O comportamento do diodo depende de como os seus terminais anodo (*A*) e catodo (*K*) estão polarizados.



Quando o anodo é positivo em relação ao catodo, ele fica polarizado diretamente e comporta-se como um curto-circuito, conduzindo corrente elétrica; caso contrário, ele fica polarizado reversamente e comporta-se como um circuito aberto, não permitindo a condução da corrente elétrica.

## Aplicação I – Gerador de Onda Quadrada

O circuito ao lado é muito utilizado para gerar uma onda quadrada de alta freqüência (MHz), servindo como sinal de relógio (*clock*) em sistemas digitais seqüenciais e microprocessados.



O nível lógico “0” da saída é agora realimentado simultaneamente para a entrada da porta *A* (impondo nível lógico “1” em sua saída) e para a extremidade *X* do resistor *R*.

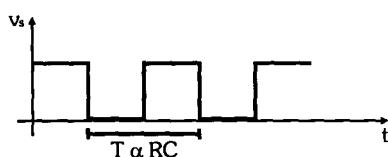
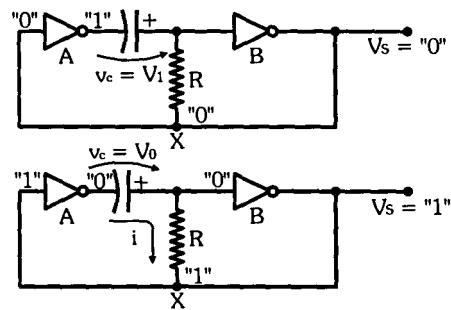
Assim, o capacitor *C* começa a se descarregar por meio de *R*. Quando *v<sub>c</sub>* atinge um nível *V<sub>0</sub>* suficientemente baixo, a porta *B* atua, de forma que a saída do circuito é novamente complementada, voltando a apresentar nível lógico “1”.

Este processo cíclico repete-se continuamente, fazendo com que o sinal de saída tenha a forma de onda quadrada, cujo período *T*, em [s], é diretamente proporcional à constante de tempo *R.C*, sendo a freqüência *f*, em [Hz], dada por:  $f = 1/T$ .

Considerando inicialmente o capacitor descarregado, a entrada da porta *B* encontra-se com nível lógico “0”, de forma que a saída do circuito apresenta nível lógico “1”.

O nível lógico “1” da saída é realimentado simultaneamente para a entrada da porta *A* (impondo nível lógico “0” em sua saída) e para a extremidade *X* do resistor *R*.

Assim, o capacitor *C* começa a se carregar por meio de *R*. Quando *v<sub>c</sub>* atinge um nível *V<sub>1</sub>* suficientemente alto, a porta *B* complementa a saída, que passa a ter nível lógico “0”.



## Aplicação II – Circuito de Inicialização do Computador

Todo computador, ao ser ligado, passa por um processo de inicialização que consiste em: testar a memória, preparar os periféricos da *CPU* e carregar o sistema operacional (*DOS* ou *WINDOWS*). Esse processo denomina-se *boot*.

Para isso, o computador precisa receber um nível lógico determinado no instante em que é ligado, para posicionar a memória *ROM* no endereço em que se encontra o comando de inicialização.

Esse nível lógico pode ser “0” ou “1”, dependendo do tipo de microprocessador da *CPU*, e deve ser dado automaticamente por um circuito de inicialização (*reset*).

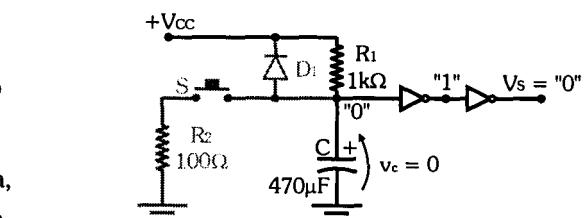
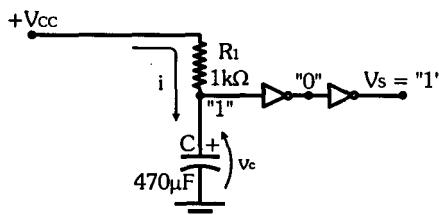
Além disso, todo computador possui um botão de *reset* em seu painel frontal, permitindo que a inicialização possa ser executada manualmente.

### Inicialização Automática

O circuito de inicialização (*reset*) ao lado pode ser utilizado em diversos sistemas microprocessados, como o computador.

No instante em que a alimentação do computador é ligada, todos os circuitos que o compõem são alimentados (*CPU*, memórias e dispositivos de entrada e saída).

Porém, como o capacitor *C* encontra-se descarregado, a saída *V<sub>s</sub>* do circuito envia um nível lógico “0” para a *CPU*, posicionando a memória no endereço em que se encontra o comando de inicialização.



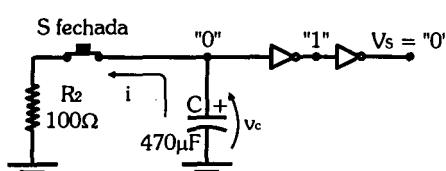
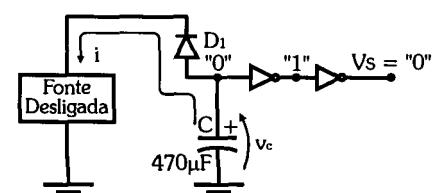
A *CPU* aguarda, então, o capacitor se carregar por meio de *R<sub>1</sub>* até um nível de tensão suficiente para complementar as portas inversoras.

Quando isso ocorre, o nível lógico “1” na saída *V<sub>s</sub>* libera a *CPU* para que a inicialização seja processada, terminando com o sistema operacional já disponível para o usuário.

Portanto, a função do capacitor é atrasar o comando de inicialização, dando tempo para que a memória se posicione no endereço correto, em que esse comando se encontra.

Como o capacitor não tem por onde se descarregar, ele assim permanece até que a alimentação do computador seja desligada.

Nesse caso, como o diodo encontra-se diretamente polarizado, o capacitor descarrega-se rapidamente por ele e pela fonte de alimentação.



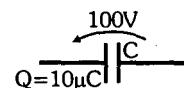
### Inicialização Manual

Outra forma de inicializar o computador, quando ele se encontra em operação, é por meio da chave *S* que fica no seu painel frontal.

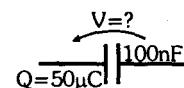
O acionamento manual dessa chave provoca a descarga rápida do capacitor por meio de *R<sub>2</sub>*, de forma que a saída *V<sub>s</sub>* envia novamente o nível lógico “0” para a *CPU*, reinicializando o computador.

**Capacitor e Conceito de Capacitância**

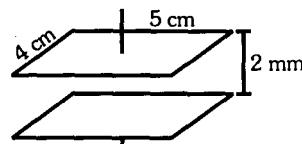
- 10.1) Qual é o valor do capacitor que, submetido a uma tensão de 100V, armazena  $10\mu C$  de carga?



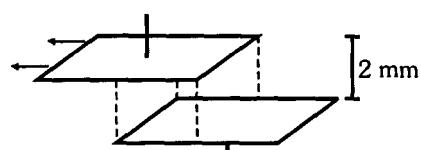
- 10.2) Um capacitor de  $100nF$  está carregado com  $50\mu C$ . Qual é a tensão entre os seus terminais?



- 10.3) Um capacitor de placas paralelas tem as dimensões indicadas na figura ao lado. Determine a sua capacidade se

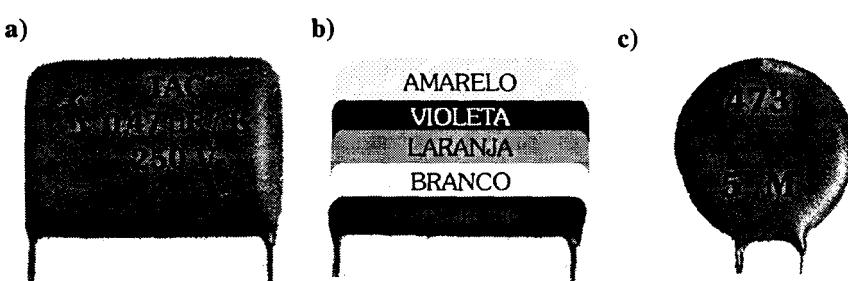


- o dielétrico for de ar;
- o dielétrico for de mica;
- o dielétrico for de ar e a distância  $d$  diminuir para a metade;
- o dielétrico for de ar e uma das placas se deslocar, de modo que a área útil seja a metade, conforme a figura ao lado.



**Capacitores Fixos e Variáveis**

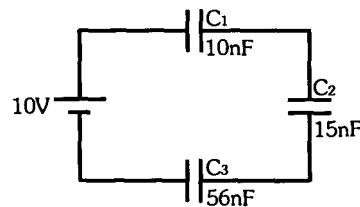
- 10.4) Especifique os capacitores ao lado conforme os dados dos seus encapsulamentos:



**Associação de Capacitores**

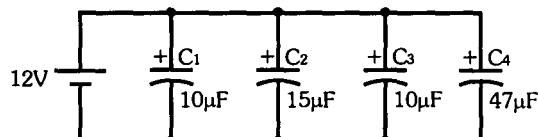
- 10.5) Considerando o circuito ao lado, formado por três capacitores ligados em série, determine:

- a capacidade equivalente do circuito série;
- a carga  $Q$  fornecida pela fonte  $E$  ao circuito;
- a tensão em cada capacitor.



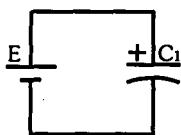
- 10.6) Considerando o circuito ao lado, formado por quatro capacitores ligados em paralelo, determine:

- a capacidade equivalente do circuito paralelo;
- a carga  $Q$  fornecida pela fonte  $E$  ao circuito;
- a carga armazenada em cada capacitor.

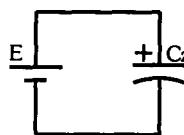


- 10.7) Dois capacitores,  $C_1 = 10 \mu F / 25V$  e  $C_2 = 10 \mu F / 12V$ , são ligados de quatro formas diferentes a uma mesma fonte  $E = 9 V$ , conforme as figuras abaixo:

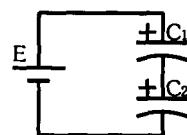
a)



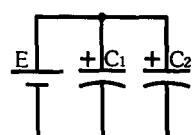
b)



c)



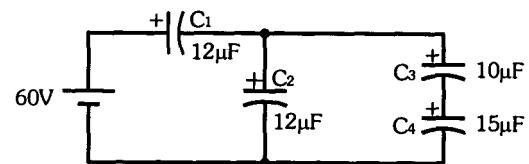
d)



Em qual ou em quais circuitos a fonte de alimentação fornece mais carga elétrica?

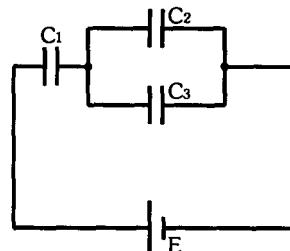
- 10.8) Considerando o circuito ao lado, formado por diversos capacitores ligados em série e em paralelo, determine:

- a capacidade  $C_A = C_3$  séria  $C_4$ ;
- a capacidade  $C_B = C_2 // C_A$ ;
- a capacidade  $C_{eq} = C_1$  séria  $C_B$ ;
- a carga  $Q$  que a fonte de alimentação fornece ao circuito;
- a carga  $Q_1$  e a tensão  $V_1$  no capacitor  $C_1$ ;
- a carga  $Q_2$  e a tensão  $V_2$  no capacitor  $C_2$ .



- 10.9) Considere o circuito ao lado e determine:

- a capacidade equivalente;
- a carga total fornecida pela fonte ao circuito;
- a carga armazenada em cada capacitor.



Dados:

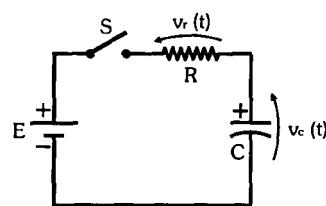
$$E = 6 \text{ V}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 2 \mu\text{F}$$

### Circuito RC de Temporização

- 10.10) Considere o circuito  $RC$  ao lado, no qual o capacitor encontra-se totalmente descarregado.

- Determine a constante de tempo  $\tau$  do circuito;
- A partir do fechamento da chave  $S$ , determine  $v_c(t)$ ,  $v_r(t)$  e  $i(t)$  para os seguintes instantes  $t: 0s; 0,4s; 0,6s; 1,0s; 1,5s; 2,0s; 3,0s; 4,0s; 5,0s; 6,0s$  e  $8,0s$ ;
- Desenhe em folha milimetrada os gráficos de  $v_c(t)$ ,  $v_r(t)$  e  $i(t)$ ;
- Analise os gráficos e tire suas conclusões sobre o comportamento do circuito nos instantes:  $t = 0$ ;  $t = \tau$  e  $t = 5\tau$ ;
- Determine matematicamente o instante em que a tensão no capacitor atinge  $5V$ ;
- Determine graficamente o instante  $t$  do item anterior e compare os resultados obtidos.



Dados:

$$R = 100k\Omega$$

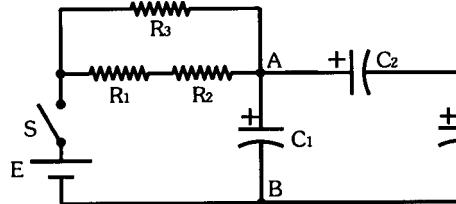
$$C = 10\mu\text{F}$$

$$E = 10V$$

**10.11) Considere o circuito ao lado.**

Fechando a chave  $S$  no instante  $t = 0$  com os capacitores totalmente descarregados, determine:

- a constante de tempo do circuito;
- o tempo mínimo necessário para que a tensão entre os pontos  $A$  e  $B$  seja igual à tensão da fonte de alimentação;
- a tensão entre os pontos  $A$  e  $B$  para um instante igual à metade do tempo encontrado no item anterior;
- o instante em que a tensão entre os pontos  $A$  e  $B$  atinge a metade da tensão da fonte de alimentação.

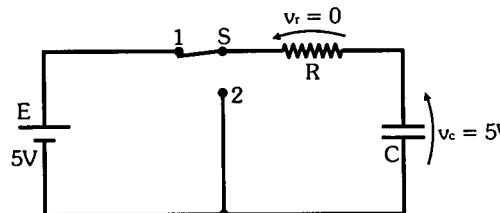


Dados:

$$\begin{aligned}E &= 12 \text{ V} \\R_1 &= R_2 = 10 \text{ k}\Omega \\R_3 &= 20 \text{ k}\Omega \\C_1 &= 10 \mu\text{F} \\C_2 &= C_3 = 20 \mu\text{F}\end{aligned}$$

**10.12) Considere o circuito  $RC$  ao lado, no qual o capacitor encontra-se totalmente carregado com a tensão  $E = 5V$ .**

- Determine a constante de tempo  $\tau$  do circuito;

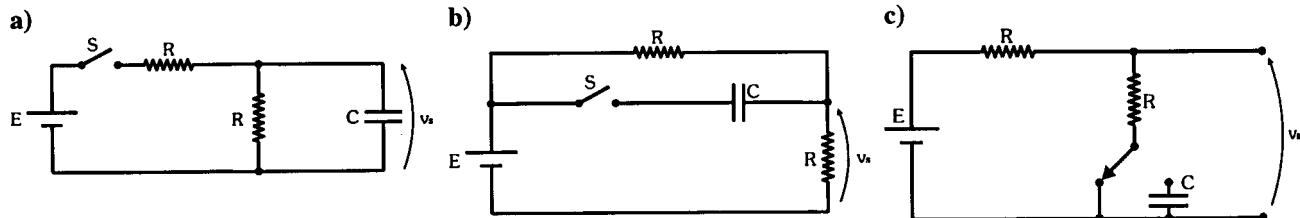


Dados:

$$\begin{aligned}R &= 10 \text{ k}\Omega \\C &= 47 \text{ nF}\end{aligned}$$

- A partir da mudança da chave  $S$  para 2, determine  $v_c$  [V],  $v_r$  [V] e  $i$  [ $\mu\text{A}$ ] para os seguintes instantes  $t$ : 0s; 0,2s; 0,3s; 0,5s; 0,8s; 1,0s; 1,4s; 1,8s; 2,0s; 2,5s e 3,0s;
- Desenhe em folha milimetrada os gráficos de  $v_c(t)$ ,  $v_r(t)$  e  $i(t)$ ;
- Analise os gráficos e tire suas conclusões sobre o comportamento do circuito nos instantes:  $t = 0$ ;  $t = \tau$  e  $t = 5\tau$ ;
- Determine matematicamente o instante em que a tensão no capacitor atinge 2,5V;
- Determine graficamente o instante  $t$  do item anterior e compare os resultados obtidos.

**10.13) Nos três circuitos abaixo, os capacitores encontram-se totalmente descarregados. Esboce as formas de onda das tensões de saída  $v_s$ , considerando que as chaves  $S$  mudam de posição no instante  $t = 0$ .**



## 11.1

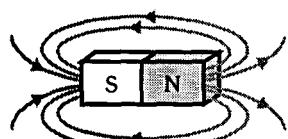
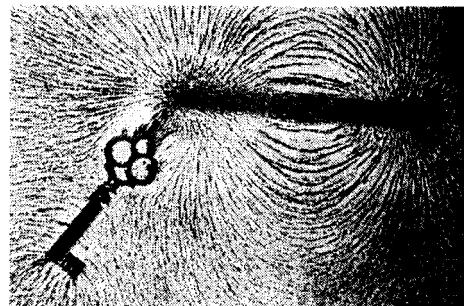
### Princípios do Eletromagnetismo

Este tópico tem como objetivo analisar os conceitos de eletromagnetismo necessários para compreendermos os dispositivos reativos denominados indutor e relé.

#### Campo Magnético

O ímã natural é um minério de ferro chamado *magnetita*, pois foi descoberto na região de Magnésia, ainda na Antigüidade.

Esse material tem a propriedade de atrair pedaços de ferro, sendo que essa força de atração surge devido ao *campo magnético* que ele cria ao seu redor.

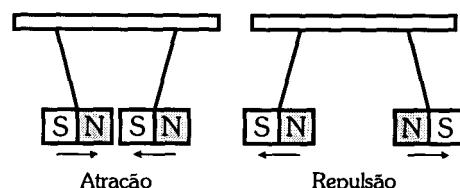


O ímã possui dois pólos inseparáveis, denominados *norte* e *sul*, devido à relação com o campo magnético terrestre.

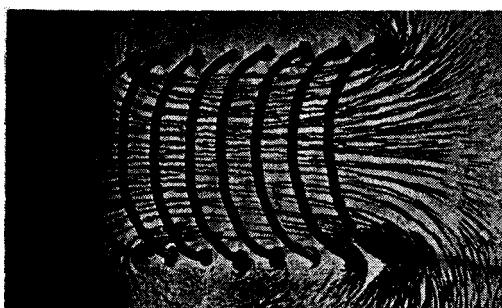
O campo magnético é representado por *linhas de campo* orientadas no sentido do polo norte para o sul.

A *força de interação* entre dois ímãs pode ser de *atração* ou *repulsão*, dependendo dos pólos que encontram-se próximos, podendo ser observada experimentalmente. A lei da força de interação magnética é:

*"Pólos magnéticos diferentes se atraem e pólos magnéticos iguais se repelem."*



Do estudo dos fenômenos causados pelo campo magnético, surgiram duas grandezas básicas: fluxo magnético e indução magnética.



#### Fluxo Magnético

O conjunto das linhas de campo que saem do polo norte ou chegam ao polo sul de um ímã é denominado *fluxo magnético*, representado pela letra grega  $\phi$  (fi), cuja unidade de medida é o *weber* [*Wb*].

A medida do fluxo magnético tem como referência a seguinte relação:

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ linhas de campo}$$

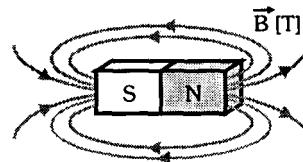
## Indução Magnética

A *indução magnética*  $\vec{B}$  é a medida da densidade de fluxo magnético, isto é, da quantidade de linhas de campo que atravessam uma área perpendicular a elas.

Como as linhas de campo são orientadas, a indução magnética é uma grandeza vetorial.

A unidade de medida da indução magnética é *weber/metro quadrado* [ $\text{Wb}/\text{m}^2$ ] ou, simplesmente, *tesla* [ $\text{T}$ ], e a sua intensidade é dada por:

$$B = \frac{\phi}{S}$$



## Eletromagnetismo

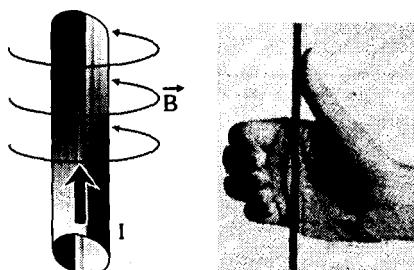
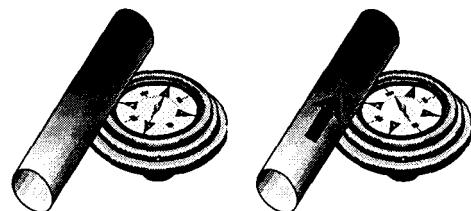
Os fenômenos magnéticos levaram diversos cientistas a se aprofundarem no seu estudo por meio de experimentos. Com isso, várias descobertas foram feitas. A descoberta mais notável foi a de que os fenômenos elétricos e magnéticos atuam sempre juntos, dando início ao estudo denominado eletromagnetismo.

As relações entre os fenômenos elétricos e magnéticos podem ser verificadas experimentalmente, conforme segue:

### I – Campo Magnético Criado por Corrente Elétrica

Quando uma bússola é colocada nas proximidades de um condutor percorrido por uma corrente elétrica, o seu ponteiro, que inicialmente estava orientado para o norte magnético terrestre, muda de direção, mostrando que a corrente elétrica cria um campo magnético.

A interação desses dois campos gera um campo magnético resultante em uma nova direção, alterando a orientação do ponteiro da bússola.



O campo magnético gerado ao redor do condutor percorrido por uma corrente elétrica tem o sentido horário, observando a corrente elétrica convencional entrando no condutor.

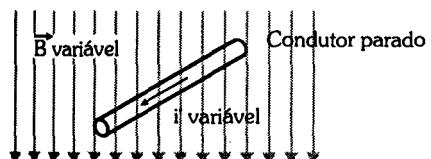
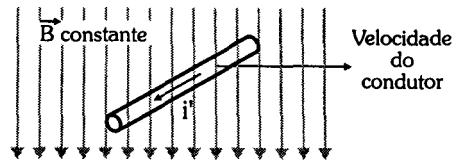
Dessa observação, estabeleceu-se uma regra prática para conhecer o sentido desse campo magnético, denominada regra da mão direita, segundo a qual o "polegar" indica o sentido da corrente e os demais dedos indicam o sentido de campo magnético.

## II – Corrente Elétrica Criada por Campo Magnético

Um condutor parado, imerso num campo magnético  $\vec{B}$  constante, não sofre nenhum efeito.

Porém, se o condutor se movimentar dentro desse campo magnético  $\vec{B}$ , surge nele uma corrente  $i'$  e uma tensão  $v'$  induzidas.

A corrente e a tensão induzidas são proporcionais à velocidade do condutor, podendo ser detectadas por um instrumento de medida.



Se o condutor estiver parado, mas o campo magnético  $\vec{B}$  for variável, o mesmo fenômeno pode ser observado, isto é, surge nele uma corrente  $i'$  e uma tensão  $v'$  induzidas.

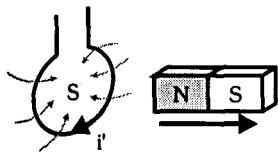
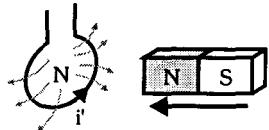
Nesse caso, a corrente e a tensão induzidas são proporcionais à variação do campo magnético, podendo ser detectadas por um instrumento de medida.

O sentido da corrente elétrica induzida obedece à seguinte Lei de Lenz:

*"A corrente elétrica induzida tem um sentido tal que cria um outro campo magnético que se opõe à variação do campo magnético que a produziu."*

A verificação experimental da Lei de Lenz pode ser feita da seguinte forma:

Se o polo norte de um ímã estiver se aproximando de uma das faces de uma espira circular, a corrente induzida  $i'$  terá um sentido tal que cria também um polo norte nessa mesma face, de forma a repelir o ímã.



Se o polo norte desse ímã estiver se afastando dessa face da espira circular, a corrente induzida  $i'$  terá um sentido tal que cria um polo sul nessa mesma face, de forma a atrair o ímã.

Portanto, a corrente induzida cria um campo que tende, no primeiro caso, a repelir o ímã que se aproxima e, no segundo caso, a atrair o ímã que se afasta.

## Onda Eletromagnética

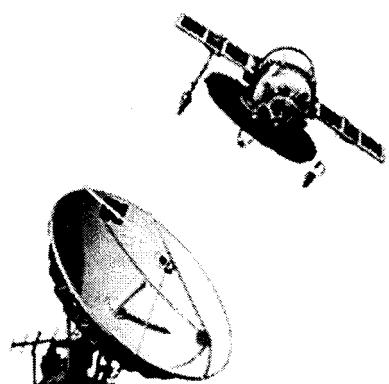
Já vimos, no início do livro, que corrente é carga elétrica em movimento, e que as cargas criam um campo elétrico ao seu redor. Portanto, corrente elétrica variável cria campo elétrico variável.

Neste tópico, vimos que a corrente elétrica cria um campo magnético ao redor do condutor e que variações de campo magnético induzem variações de corrente num condutor.

Portanto, variações de campo elétrico criam variações de campo magnético e variações de campo magnético criam variações de campo elétrico, constituindo o **campo eletromagnético**.

Por causa dessa conversão seqüencial de um campo no outro, o campo eletromagnético tem a propriedade de se *propagar* pelo espaço em forma de *onda eletromagnética*, propiciando as transmissões e recepções a distância sem a utilização de fio.

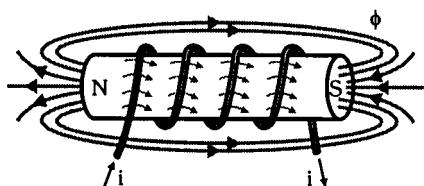
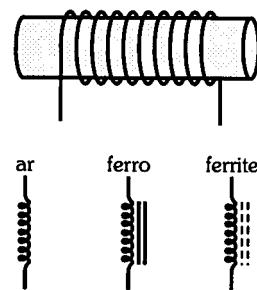
Assim, chegamos a uma conclusão igual à que vários cientistas chegaram há mais de cem anos atrás, resultando na invenção do telégrafo sem fio e do rádio, sendo a antena o elemento responsável pela conversão de sinais elétricos em onda eletromagnética e vice-versa.



### Indutor ou Bobina

O *indutor* ou *bobina* é um dispositivo formado por um fio esmaltado enrolado em torno de um núcleo.

O símbolo do indutor depende do material usado como núcleo, conforme mostra a figura ao lado.



Ao passar uma corrente elétrica pelas espiras, cada uma delas cria ao seu redor um campo magnético, cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

No interior do indutor, as linhas de campo se somam, criando uma concentração do fluxo magnético  $\phi$ .

Os núcleos de ferro e ferrite têm como objetivo reduzir a dispersão das linhas de campo, pois esses materiais apresentam baixa resistência à passagem do fluxo magnético.

Pelo sentido das linhas de campo, o indutor fica polarizado magneticamente, isto é, cria um polo norte por onde sai o fluxo magnético e um polo sul por onde entra o fluxo magnético, comportando-se como um ímã artificial, denominado eletroímã.

### Polaridade Magnética do Indutor

É necessário conhecer a polaridade magnética de um indutor quando ele se encontra próximo a outro indutor, aspecto esse que será destacado mais adiante.

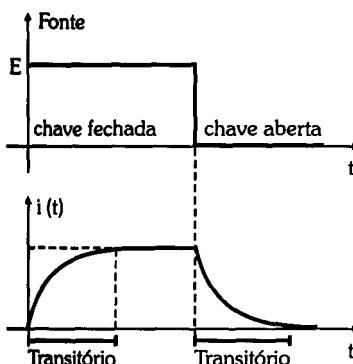
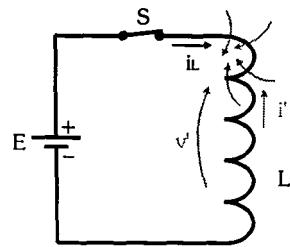
Dois indutores têm a mesma polaridade quando os seus fluxos magnéticos têm sentidos iguais, e polaridades contrárias quando os seus fluxos magnéticos têm sentidos diferentes. Num circuito, essa polaridade é representada por um ponto (•) sobre uma de suas extremidades.

Mesma Polaridade	Polaridades Contrárias
Representação	Representação

## Indutância

Considere um indutor alimentado por uma fonte de tensão constante.

Fechando a chave  $S$ , em  $t = 0$ , surge uma corrente  $i_L$  crescente. Ao passar por uma espira, essa corrente cria um campo magnético ao seu redor. Essas linhas de campo cortam as espiras seguintes, induzindo uma corrente  $i'$  que, segundo a Lei de Lenz, irá se opor à causa que a originou.



Por causa dessa oposição, a corrente  $i_L$  leva um certo tempo, denominado *transitório*, para atingir o seu valor máximo  $i_L = I$ , que é limitado apenas pela resistência ôhmica do fio.

Quando a corrente estabiliza em  $I$ , o campo magnético armazenado passa a ser constante, não havendo mais corrente induzida para criar oposição.

Desligando a chave  $S$ , a corrente  $i_L$  decresce criando uma nova oposição, de forma a evitar a sua diminuição, aparecendo um novo transitório, até que ela chega a zero.

Portanto pode-se dizer que o indutor armazena energia magnética, pois, mesmo sem alimentação, ainda existe corrente.

A *indutância*  $L$  é a capacidade do indutor em armazenar energia magnética por meio do fluxo  $\phi$  criado por uma corrente  $i_L$ . Matematicamente:

$$L = \frac{\phi}{i_L}$$

Por essa fórmula, a unidade de medida de indutância é *weber/ampère [Wb/A]* ou, simplesmente, *henry [H]*.

A oposição às variações de corrente no indutor é denominada *reatância indutiva*  $X_L [\Omega]$ , que, em corrente contínua, comporta-se da seguinte forma:

- 1) Quando o indutor está totalmente desenergizado, a corrente  $i_L = 0$ , isto é, a fonte o “enxerga” como um circuito aberto ( $X_L = \infty$ ).
- 2) Quando o indutor está totalmente energizado, a corrente atinge o seu valor máximo  $I$ , estabilizando-se. Assim, não havendo mais variação nessa corrente, deixa de existir a corrente induzida  $i'$ , de forma que a fonte “enxerga” o indutor como uma resistência baixa (resistência do fio), isto é, praticamente um curto-circuito ( $X_L = 0$ ).

A relação entre a corrente  $i_L$  e a tensão  $v$  no indutor pode ser dada matematicamente por meio das expressões:

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v \cdot dt + i_{LO}$$

e

$$v = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

em que  $i_{LO}$  é a corrente no indutor em  $t = 0$ .

**Joseph Henry (1797 – 1878)**

Cientista norte-americano, inventou a bobina de indução, descobriu a auto-indução e o fenômeno das correntes induzidas.

Aperfeiçoou os eletroímãs e criou o telégrafo magnético.

A unidade de medida de indutância é henry, em sua homenagem.



Comercialmente, existem diversos tipos de indutores fixos e variáveis, que abrangem uma ampla faixa de indutâncias, desde alguns *nanohenrys* [*nH*] até alguns *henrys* [*H*].

### Especificações dos Indutores

Os fabricantes de indutores, além de seus valores nominais, fornecem várias outras especificações em seus catálogos e manuais, das quais destacamos as seguintes:

#### Tolerância

Dependendo da tecnologia de fabricação e do material empregado no núcleo, a tolerância dos indutores pode variar. Em geral, ela está entre  $\pm 1\%$  e  $\pm 20\%$ .

#### Resistência Ôhmica

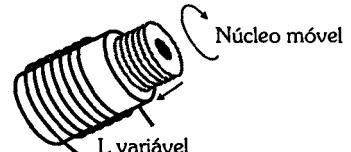
É a resistência ôhmica do enrolamento do indutor, da ordem de unidades de ohms a centenas de ohms, especificada para alimentação em corrente contínua.

### Indutores Comerciais

Os valores comerciais de indutores são diversos, não havendo uma norma rígida, já que, em geral, eles são fabricados para aplicações específicas, como em circuitos de áudio, radiofrequência (*RF*) e circuitos de acionamento e controle.

Os indutores variáveis são, geralmente, constituídos por um núcleo móvel, cuja posição pode ser ajustada externamente.

Quanto mais o núcleo penetra no indutor, maior é a sua indutância.



A tabela seguinte mostra alguns tipos de indutores, bem como algumas de suas características.

Tipos de Indutores			
Radial	Toroidal	Encapsulado	Blindado
 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fixo</li> <li>• Núcleo de ferrite</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fixo</li> <li>• Núcleo de ferrite</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fixo</li> <li>• Núcleo de ferrite</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variável</li> <li>• Núcleo de ferrite</li> </ul>

### Característica Magnética do Núcleo

A característica magnética de um material é determinada por sua *permeabilidade magnética*  $\mu$ , cuja unidade de medida é *tesla.metro/ampère* [*T.m/A*].

A *permeabilidade magnética do vácuo* e do ar vale:  $\mu_0 = 4.\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$ . Para os demais materiais, essa característica pode ser dada em relação à permeabilidade magnética do vácuo.

Quanto maior a permeabilidade magnética do núcleo, maior é o valor da indutância. Na prática, os núcleos de ferro e de ferrite são muito utilizados por terem uma permeabilidade magnética muito superior à do vácuo.

No capítulo 16, que detalha o comportamento do indutor em corrente alternada por meio do seu modelamento, apresentaremos um método prático para o projeto e cálculo da indutância de indutores.

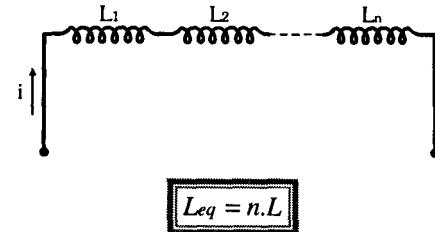
Inicialmente, veremos as expressões das indutâncias equivalentes para indutores afastados entre si, de modo que o fluxo magnético de um indutor não interfira no outro.

### Associação Série de Indutores

Na associação série, os indutores estão ligados de forma que a corrente  $i$  seja a mesma em todos eles, sendo a indutância equivalente dada por:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

Para  $n$  indutores iguais a  $L$  em série, a indutância equivalente vale:

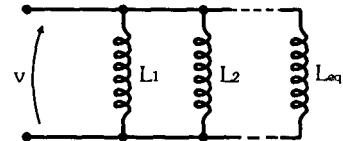


$$L_{eq} = n.L$$

### Associação Paralela de Indutores

Na associação paralela, os indutores estão ligados de forma que a tensão total  $v$  aplicada ao circuito seja a mesma em todos eles, sendo a indutância equivalente dada por:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$



Para  $n$  indutores iguais a  $L$  em paralelo:

$$L_{eq} = \frac{L}{n}$$

Para dois indutores em paralelo:

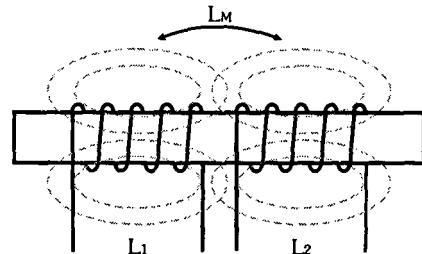
$$L_{eq} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

### Indutância Mútua

Quando dois indutores estão próximos um do outro ou são enrolados num mesmo núcleo, o fluxo magnético de um indutor interfere na indutância do outro e vice-versa, aparecendo uma *indutância mútua*  $L_M$ .

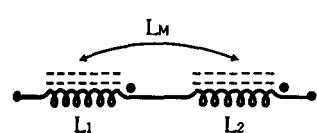
A indutância mútua  $L_M$  entre dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  é dada por:

$$L_M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$



A constante  $k$  é o *coeficiente de acoplamento*, sendo  $0 \leq k \leq 1$ . Quanto mais influência um indutor exerce sobre o outro, mais próximo de 1 é o valor de  $k$ .

A influência da indutância mútua  $L_M$  na indutância equivalente  $L_{eq}$  depende também da polaridade dos indutores.

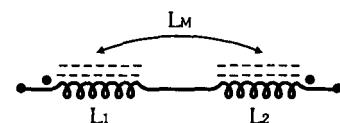


Se os indutores estiverem ligados em série com a mesma polaridade, a indutância mútua aumentará o valor da indutância equivalente, cujo valor será de:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2 \cdot L_M$$

Se os indutores estiverem ligados em série com polaridades contrárias, a indutância mútua reduzirá o valor da indutância equivalente, cujo valor será de:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2 \cdot L_M$$



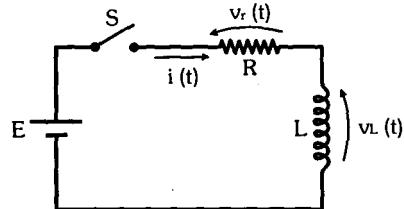
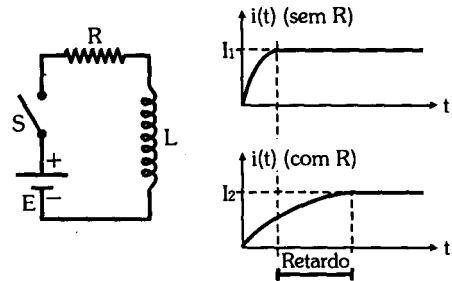
### Constante de Tempo

No tópico 11.2, vimos que o tempo de energização de um indutor alimentado diretamente por uma fonte de tensão não é instantâneo, embora seja muito pequeno.

Ligando um resistor em série com o indutor, pode-se retardar o tempo de energização, fazendo com que a corrente cresça mais lentamente.

A constante de tempo  $\tau$  é dada por:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$



### Energização do Indutor

Considere um circuito  $RL$  série ligado a uma fonte de tensão contínua  $E$  e a uma chave  $S$  aberta, com o indutor completamente desenergizado, sendo a resistência do fio do indutor desprezível em relação a  $R$ .

Pela Lei de Kirchhoff para Tensões, a equação geral desse circuito é ( $S$  fechada):

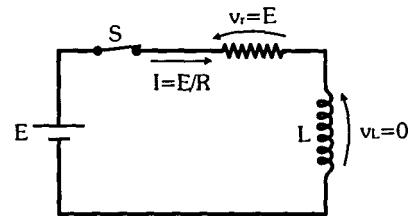
$$v_L(t) + v_r(t) = E$$

A corrente que flui no circuito durante a energização é dada por:

$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R}$$

Ligando a chave  $S$  no instante  $t = 0$ , a corrente  $i$  cresce exponencialmente até o valor máximo  $I = E/R$  e a tensão  $v_r$  no resistor, que acompanha a corrente, cresce até o valor máximo  $E$ . Assim, a tensão  $v_L$  no indutor decresce exponencialmente de  $E$  até zero.

Lembre-se que o retardo no crescimento da corrente  $i$  e da tensão  $v_r$  é provocado pela corrente  $i'$  e pela tensão  $v'$  induzidas em  $L$ .

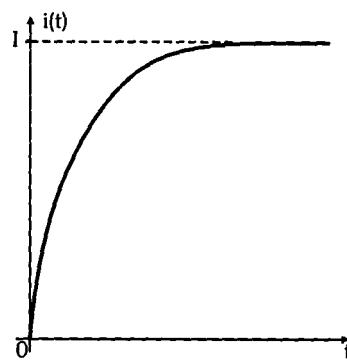


Esse comportamento é expresso matemática e graficamente conforme segue:

### Corrente no Circuito

A expressão da corrente na energização do indutor é dada por:

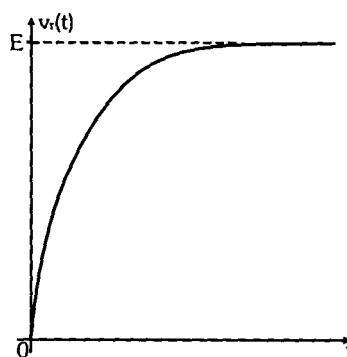
$$i(t) = I \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



### Tensão no Resistor

A tensão no resistor acompanha a corrente, de forma que a sua expressão é dada por:

$$v_r(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

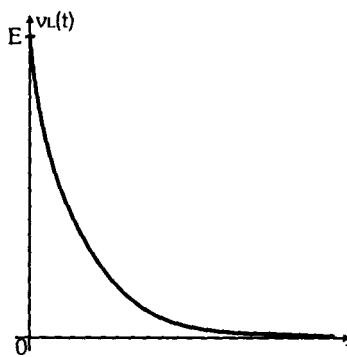


### Tensão no Indutor

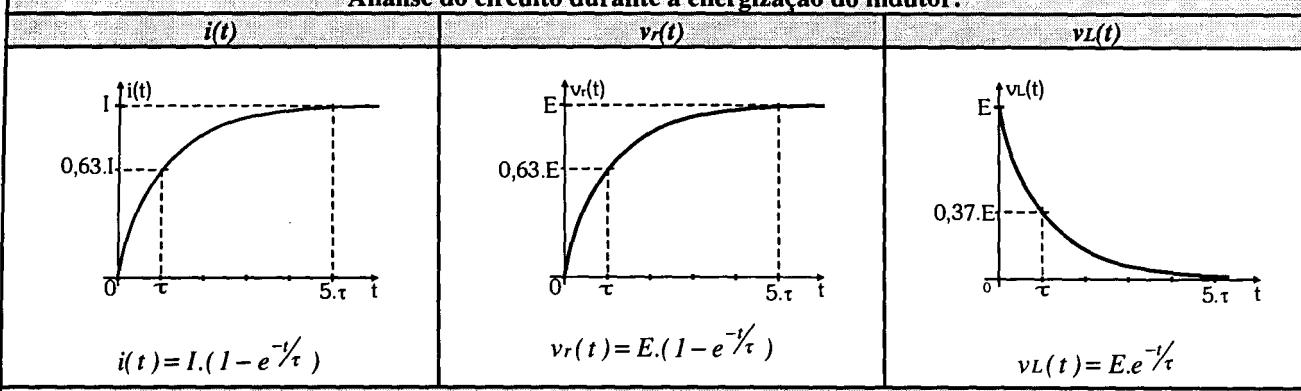
Pela Lei de Kirchhoff para Tensões,  $v_L = E - v_r$ .

Assim, a expressão da tensão no indutor é dada por:

$$v_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



**Análise do circuito durante a energização do indutor:**



**No instante  $t = 0$ :**

$$i(0) = I \cdot (1 - e^{0/\tau}) \Rightarrow$$

$$i(0) = I \cdot (1 - e^0) = I \cdot (1 - 1) \Rightarrow$$

$$i(0) = 0$$

$$v_r(0) = E \cdot (1 - e^{0/\tau}) \Rightarrow$$

$$v_r(0) = E \cdot (1 - e^0) = E \cdot (1 - 1) \Rightarrow$$

$$v_r(0) = 0$$

$$v_L(0) = E \cdot e^{0/\tau} \Rightarrow$$

$$v_L(0) = E \cdot e^0 = E \cdot 1 \Rightarrow$$

$$v_L(0) = E$$

**Análise:** Em  $t = 0$ , a corrente no circuito é nula, a tensão no resistor é nula e a tensão no indutor é máxima.

**No instante  $t = \tau$ :**

$$i(\tau) = I \cdot (1 - e^{-\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$i(\tau) = I \cdot (1 - e^{-1}) = I \cdot (1 - 0,37) \Rightarrow$$

$$i(\tau) = 0,63.I$$

$$v_r(\tau) = E \cdot (1 - e^{-\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$v_r(\tau) = E \cdot (1 - e^{-1}) = E \cdot (1 - 0,37) \Rightarrow$$

$$v_r(\tau) = 0,63.E$$

$$v_L(\tau) = E \cdot e^{-\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$v_L(\tau) = E \cdot e^{-1} \Rightarrow$$

$$v_L(\tau) = 0,37.E$$

**Análise:** Em  $t = \tau$ , a corrente no circuito cresce até 63% do valor máximo ( $i = 0,63.I$ ), a tensão no resistor cresce até 63% da tensão da fonte ( $v_r = 0,63.E$ ) e a tensão no indutor cai 63% da tensão da fonte ( $v_L = 0,37.E$ ).

**No instante  $t = 5\tau$ :**

$$i(5\tau) = I \cdot (1 - e^{-5\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$i(5\tau) = I \cdot (1 - e^{-5}) = I \cdot (1 - 0,01) \Rightarrow$$

$$i(5\tau) = 0,99.I$$

$$v_r(5\tau) = E \cdot (1 - e^{-5\tau/\tau}) \Rightarrow$$

$$v_r(5\tau) = E \cdot (1 - e^{-5}) = E \cdot (1 - 0,01) \Rightarrow$$

$$v_r(5\tau) = 0,99.E$$

$$v_L(5\tau) = E \cdot e^{-5\tau/\tau} \Rightarrow$$

$$v_L(5\tau) = E \cdot e^{-5} \Rightarrow$$

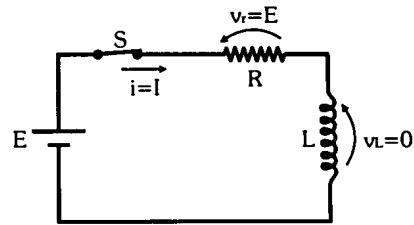
$$v_L(5\tau) = 0,01.E$$

**Análise:** Em  $t = 5\tau$ , a corrente no circuito cresce até 99% do valor máximo ( $i = 0,99.I$ ), a tensão no resistor cresce até 99% da tensão da fonte ( $v_r = 0,99.E$ ) e a tensão no indutor cai 99% da tensão da fonte ( $v_L = 0,01.E$ ). Nesse caso, podemos considerar que o indutor já se encontra totalmente energizado, pois a corrente de magnetização é praticamente a máxima.

## Desenergização do Indutor

Considere um circuito  $RL$  série ligado a uma chave  $S$  fechada, com o indutor já completamente energizado, pelo qual passa uma corrente  $i = I$ , sendo a resistência do fio do indutor desprezível em relação a  $R$ .

Dessa forma, tem-se:  $v_L = 0$  e  $v_r = E$



Ao abrir a chave  $S$  no instante  $t = 0$ , a fonte de alimentação é desligada do circuito.

Porém, a corrente  $i$ , em vez de ser interrompida imediatamente, decresce exponencialmente devido à energia magnética armazenada no indutor e à constante de tempo  $\tau$  do circuito.

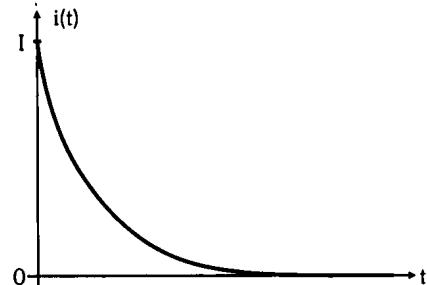
Observe que surge agora uma corrente  $i'$  e uma tensão  $v'$  invertidas, tentando evitar a queda da corrente  $i$ .

Nesse caso, o indutor comporta-se como uma fonte de corrente, cuja capacidade de fornecimento de corrente é limitada pelo tempo de desenergização. Esse comportamento é expresso matematicamente e graficamente conforme segue:

### Corrente no Circuito

Portanto, a expressão da corrente na desenergização do indutor é dada por:

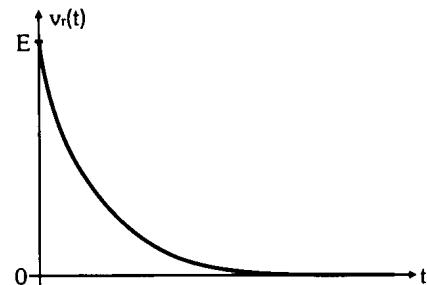
$$i(t) = I \cdot e^{-t/\tau}$$



### Tensão no Resistor

A tensão no resistor acompanha a corrente, de forma que a sua expressão é dada por:

$$v_r(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$



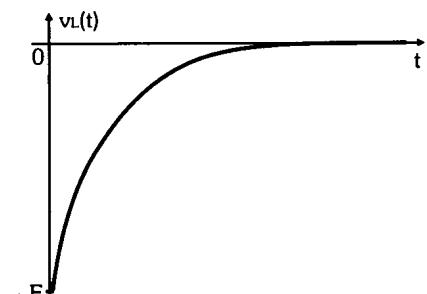
### Tensão no Indutor

Pela Lei de Kirchhoff para Tensões, no instante  $t = 0$ , tem-se  $v_L + v_r = 0$  e, portanto,  $v_L = -v_r$ .

Isso significa que no instante da abertura da chave, a tensão no indutor inverte a sua polaridade, iniciando com tensão  $-E$  até atingir zero.

Nesse caso, a expressão da tensão no indutor é dada por:

$$v_L(t) = -E \cdot e^{-t/\tau}$$



Analogamente às análises anteriores, apresentamos a seguir o que ocorre no circuito.

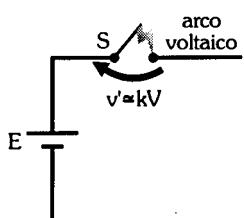
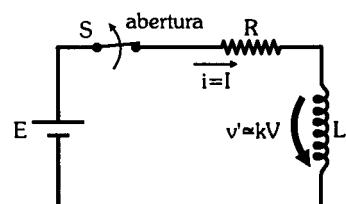
Análise do circuito durante a desenergização do indutor:		
$i(t)$	$v_r(t)$	$v_L(t)$
$i(t) = I \cdot e^{-t/\tau}$	$v_r(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$	$v_L(t) = -E \cdot e^{-t/\tau}$
No instante $t = 0$ :		
$i(0) = I$	$v_r(0) = E$	$v_L(0) = -E$
<b>Análise:</b> Em $t = 0$ , a corrente no circuito é máxima ( $i = I$ ), a tensão no resistor é máxima ( $v_r = E$ ) e a tensão no indutor é máxima com polaridade invertida ( $v_L = -E$ ).		
No instante $t = \tau$ :		
$i(\tau) = 0,37.I$	$v_r(\tau) = 0,37.E$	$v_L(\tau) = -0,37.E$
<b>Análise:</b> Em $t = \tau$ , a corrente no circuito cai 63% do valor máximo ( $i = 0,37.I$ ), a tensão no resistor cai 63% da tensão da fonte ( $v_r = 0,37.E$ ) e a tensão no indutor cai 63% da tensão da fonte com polaridade invertida ( $v_L = -0,37.E$ ).		
No instante $t = 5.\tau$ :		
$i(5\tau) = 0,01.I$	$v_r(5\tau) = 0,01.E$	$v_L(5\tau) = -0,01.E$
<b>Análise:</b> Em $t = 5.\tau$ , a corrente no circuito cai 99% do valor máximo ( $i = 0,01.I$ ), a tensão no resistor cai 99% da tensão da fonte ( $v_r = 0,01.E$ ) e a tensão no indutor cai 99% da tensão da fonte com polaridade invertida ( $v_L = -0,01.E$ ). Nesse caso, podemos considerar que o indutor já se encontra totalmente desenergizado, pois a corrente de esmagmagnetização é praticamente nula.		

## ATENÇÃO!

Ao analisar a desenergização do indutor após a abertura da chave, a propósito não enfocamos um fenômeno que ocorre e pode ser fatal para o operador.

A chave aberta representa uma resistência infinita para o circuito, de forma que a sua constante de tempo  $\tau$  muda de  $L/R$  para  $L/\infty$ , isto é, para praticamente zero.

Como no exato momento da abertura da chave a corrente no indutor é máxima ( $i = I$ ), e sendo a constante de tempo  $\tau = 0$ , pela Lei de Lenz, a tensão induzida  $v'$  deve ter um valor alto para se opor à queda da corrente num intervalo de tempo tão pequeno.

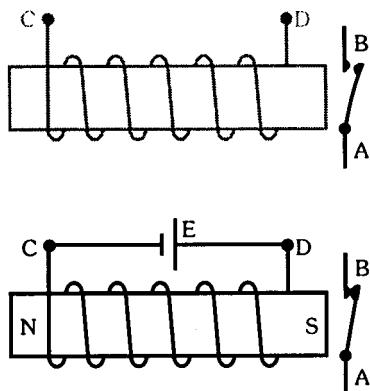
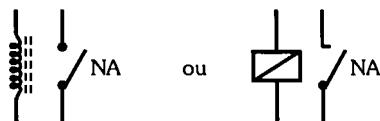


Portanto, ao abrir a chave de um circuito indutivo, pode surgir uma tensão induzida  $v'$  tão elevada (da ordem de milhares de volts) que seria suficiente para produzir um arco voltaico entre os terminais da chave, podendo até matar o seu operador.

Por isso, os sistemas elétricos altamente indutivos possuem circuitos de proteção que entram em ação durante o seu desligamento.

O relé eletromecânico, como o próprio nome diz, é um dispositivo formado por uma parte elétrica e outra mecânica.

A figura ao lado mostra dois símbolos usuais de um relé que possui um único contato normalmente aberto (NA), estado este que corresponde ao relé desenergizado.



### Funcionamento

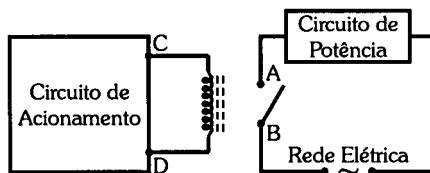
Considere o relé esquematizado ao lado.

A parte mecânica é formada por uma chave, cujo terminal móvel *A* encontra-se desconectado do terminal fixo *B*.

A parte elétrica é formada por um eletroímã, isto é, uma bobina com núcleo de ferro que, uma vez alimentada por uma tensão ou corrente (terminais *C* e *D*), fica polarizada magneticamente, atraindo o terminal móvel, fechando o contato (terminais *A* e *B*).

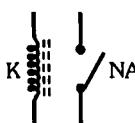
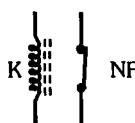
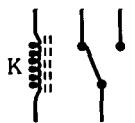
Quando a alimentação da bobina deixa de existir, ela se desmagnetiza, fazendo com que o terminal móvel retorne à sua posição de repouso.

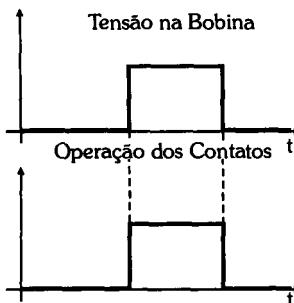
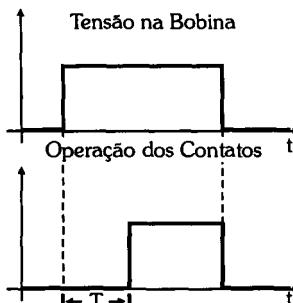
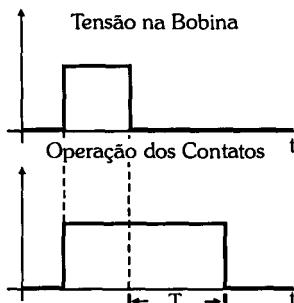
A grande vantagem do relé é poder acionar um circuito elétrico de potência (terminais *A* e *B*) por meio de um outro circuito elétrico, muitas vezes de menor potência (terminais *C* e *D*), estando ambos isolados eletricamente entre si, já que o acoplamento entre eles é apenas magnético.



## Relés Comerciais

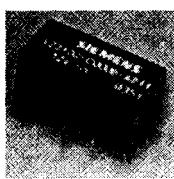
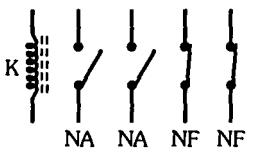
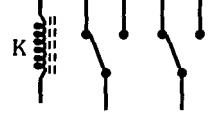
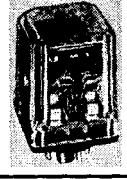
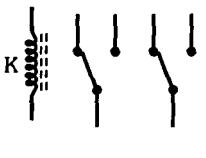
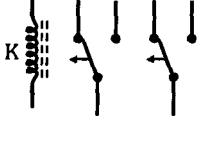
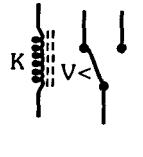
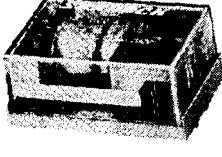
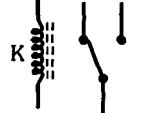
Primeiramente, veremos algumas características importantes dos relés comerciais:

Tipos de Contato		
<b>Normalmente Aberto (NA)</b> O seu estado de repouso é aberto, fechando quando a bobina é alimentada. 	<b>Normalmente Fechado (NF)</b> O seu estado de repouso é fechado, abrindo quando a bobina é alimentada. 	<b>Reversível</b> O seu estado de repouso é fechado com um dos dois pólos da chave, comutando quando a bobina é alimentada. 

Tempos de Fechamento e de Abertura dos Contatos		
<b>Normal</b> Os tempos de fechamento e de abertura são quase instantâneos, impostos apenas pelas limitações elétricas e mecânicas do relé. 	<b>Retardo na Energização</b> O tempo de fechamento é controlado por um ajuste externo. 	<b>Retardo na Desenergização</b> O tempo de abertura é controlado por um ajuste externo. 

Condição de Acionamento		
<b>Normal</b> O açãoamento ocorre quando é satisfeita a sua condição de operação (tensão, corrente ou potência).	<b>Subtensão</b> O açãoamento ocorre quando ele detecta uma variação de tensão abaixo de um valor de referência preestabelecido.	<b>Sobretensão</b> O açãoamento ocorre quando ele detecta uma variação de tensão acima de um valor de referência preestabelecido.

A seguir, mostramos alguns relés comerciais com algumas de suas especificações:

Tipo de Relé	Símbolo	Bobina	Contatos
Relé Reed	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 12 Vcc</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 2 NA + 2 NF</li> <li>Carga máxima: 0,5 A a 200 Vcc</li> </ul>
Relé Miniatura	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 6 Vcc</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 2 reversíveis</li> <li>Carga máxima: 3 A a 200 Vca</li> </ul>
Relé Sensível	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 5,2 Vcc</li> <li>Potência mínima: 60 mW</li> <li>Resistência: 450 Ω</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 2 reversíveis</li> <li>Carga máxima: 2 A a 250 Vca</li> </ul>
Relé com Retardo na Energização	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 24 Vca</li> <li>Temporização: 5 segundos a 12 horas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 2 reversíveis (1 temporizado e 1 instantâneo)</li> <li>Carga máxima: 3 A a 250 Vca</li> </ul>
Relé de Sobretensão	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 75 a 140 Vca</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 1 reversível</li> <li>Carga máxima: 3 A a 250 Vca</li> </ul>
Relé de Circuito Impresso	 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tensão nominal: 6 Vcc</li> <li>Corrente mínima: 135 mA</li> <li>Resistência: 44,5 Ω</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjo: 1 reversível</li> <li>Carga máxima: 6 A a 250 Vca</li> </ul>

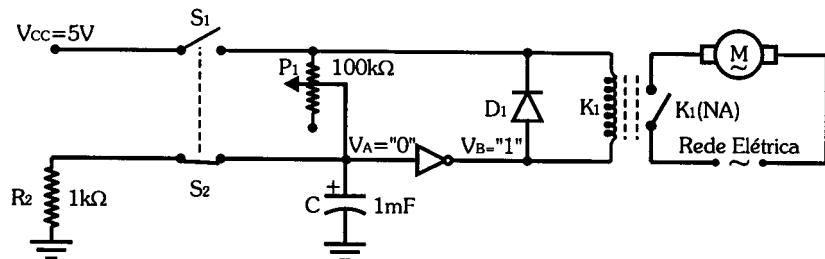
Obs.: Estas características podem variar em função do modelo e do fabricante de relés.

## Aplicação I – Temporizador para Acionamento de Cargas de Potência

O circuito abaixo pode ligar uma carga qualquer após um certo tempo ajustado previamente. Neste exemplo, a carga será um motor de potência, alimentado pela rede elétrica. O circuito possui duas chaves  $S_1$  e  $S_2$  acopladas mecanicamente, de forma que o fechamento de  $S_1$  abre  $S_2$  e a abertura de  $S_1$  fecha  $S_2$ .

Com  $S_1$  aberta,  $S_2$  encontra-se fechada, de modo que o capacitor  $C$  descarregue-se rapidamente por  $R_2$ , sendo a constante de tempo dada por  $\tau_2 = R_2 \cdot C = 1s$ .

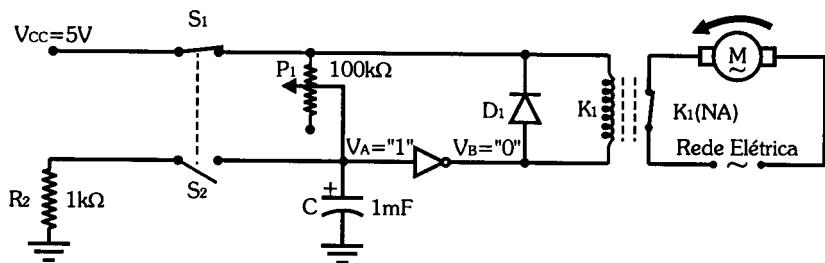
Assim, tem-se nível lógico “0” ( $V_A = 0V$ ) na entrada da porta inversora e, portanto, nível lógico “1” ( $V_B = 5V$ ) em sua saída.



Como a bobina do relé  $K_1$  está ligada entre a tensão da fonte ( $V_{cc} = 5V$ ) e a saída da porta inversora ( $V_B = 5V$ ), a diferença de potencial entre os seus terminais é  $V_{cc} - V_B = 0$ , permanecendo desenergizada.

Fechando  $S_1$ , abre-se  $S_2$ , fazendo com que o capacitor se carregue por meio do potenciômetro  $P_1$ , com uma constante de tempo  $\tau_1$  que pode ser ajustada entre 0 e 100s.

Quando o capacitor atinge a tensão de nível lógico “1” suficiente para comutar a porta inversora, esta impõe nível lógico “0” ( $V_B = 0V$ ) em sua saída.



Assim, a bobina do relé se energiza, comutando a chave  $K_1$  (NA), ligando o motor.

Abrindo novamente a chave  $S_1$ , fecha-se  $S_2$ , e o capacitor descarregue-se novamente por  $R_2$ , desenergizando o relé e desligando o motor.

O diodo  $D_1$  entre os terminais da bobina do relé tem a finalidade de curto-circuitá-la quando da sua desenergização, evitando que a tensão induzida  $v'$  danifique a porta lógica.

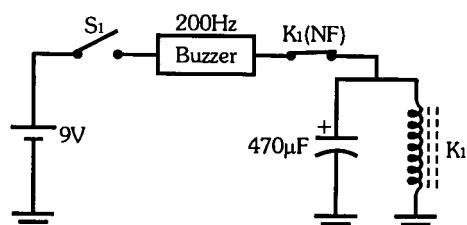
## Aplicação II – Detector de Presença

Esse circuito tem a finalidade de detectar se uma pessoa está tentando entrar num determinado ambiente por meio de uma janela. Quando a janela é aberta, o circuito soa um apito de forma intermitente.

Para isso, utiliza-se uma chave  $S_1$  que pode ser formada por duas pequenas placas metálicas instaladas na janela, de tal forma que a sua abertura feche os contatos da chave.

O dispositivo que emite o som é um *buzzer*, o qual opera numa determinada freqüência sempre que é alimentado por uma tensão especificada pelo fabricante.

Ao fechar a chave  $S_1$ , o capacitor se carrega por meio do *buzzer*, que emite um som. Quando o capacitor atinge uma tensão suficiente para acionar o relé, ele opera abrindo a chave  $K_1$ , que é normalmente fechada, bloqueando o *buzzer*. A abertura de  $K_1$  faz com que o capacitor se descarregue pela bobina do relé, desacionando-o e fechando novamente a chave  $K_1$ . Esse ciclo faz com que o *buzzer* emita um som intermitente.

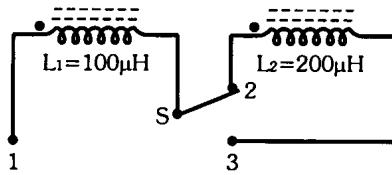


## Exercícios Propostos

### Associação de Indutores

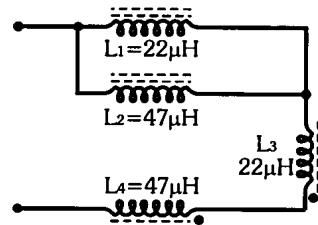
- 11.1)** O esquema ao lado mostra dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  com as suas respectivas polaridades.

Em função da posição da chave  $S$  e do acoplamento entre os indutores, determine a indutância equivalente do circuito nas condições seguintes:



- $L_{eq}$  entre 1 e 3 com  $S$  na posição 2 e indutores alojados em núcleos de ferrite diferentes e afastados entre si;
- $L_{eq}$  entre 1 e 2 com  $S$  na posição 3 e indutores alojados em núcleos de ferrite diferentes e afastados entre si;
- $L_{eq}$  entre 1 e 3 com  $S$  na posição 2 e indutores alojados em núcleos iguais e próximos entre si, com  $k = 0,8$ ;
- $L_{eq}$  entre 1 e 2 com  $S$  na posição 3 e indutores alojados em núcleos iguais e próximos entre si, com  $k = 0,8$ .

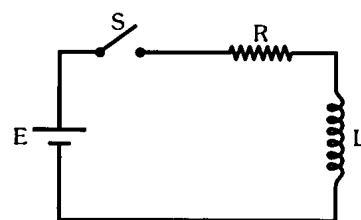
- 11.2)** Determine a indutância equivalente do circuito ao lado, estando  $L_3$  e  $L_4$  próximos entre si, com  $k = 0,5$ .



### Círculo RL de Temporização

- 11.3)** Considere o circuito  $RL$  série ao lado.

- Ao ser fechada a chave, após quanto tempo pode-se considerar que a corrente atingiu o seu valor máximo?
- Qual é o valor máximo da corrente no circuito?



Dados:

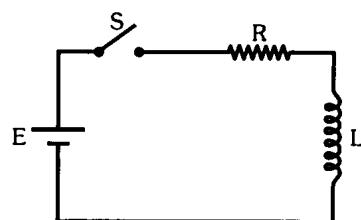
$$R = 100\Omega$$

$$L = 100mH$$

$$E = 10V$$

- 11.4)** Considere o circuito  $RL$  série ao lado.

- Quais são os valores da corrente e das tensões no indutor e no resistor após  $10\mu s$  do fechamento da chave?
- Em que instante a corrente no circuito atinge 80% de seu valor máximo?



Dados:

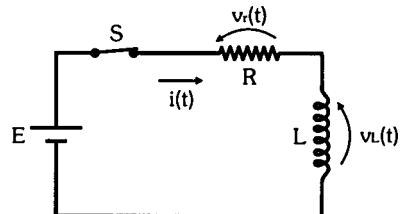
$$R = 1k2\Omega$$

$$L = 47mH$$

$$E = 5V$$

- 11.5) Considere o circuito  $RL$  série ao lado, no qual o indutor encontra-se completamente energizado.

- Da forma como ele se encontra, com a chave  $S$  fechada, quais são os valores da corrente  $i$  e das tensões  $v_L$  e  $v_r$ ?
- No instante da abertura da chave ( $t = 0$ ), quais são os novos valores de  $i$ ,  $v_L$  e  $v_r$ ?
- Qual é a constante de tempo  $\tau$  do circuito?
- Quais são os valores da corrente  $i$  e das tensões  $v_L$  e  $v_r$  após um tempo igual a  $\tau$ ?
- Após quanto tempo, a partir da abertura da chave, pode-se considerar que o indutor esteja desenergizado?



Dados:

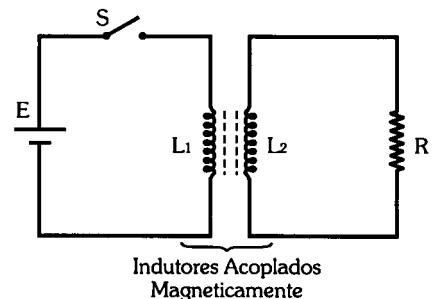
$$R = 20\Omega$$

$$L = 10H$$

$$E = 12V$$

- 11.6) Analise o circuito ao lado, tendo como referência a Lei de Lenz, e responda às seguintes questões:

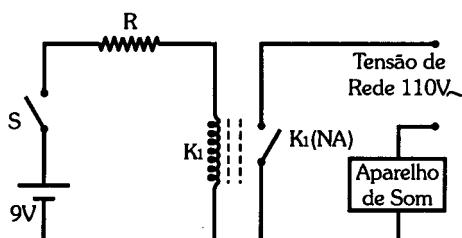
- O que acontece no resistor no instante imediatamente seguinte ao fechamento da chave?
- O que acontece no resistor após alguns instantes do fechamento da chave?
- O que acontece no resistor no instante imediatamente seguinte à abertura da chave?
- O que acontece no resistor após alguns instantes da abertura da chave?



Indutores Acoplados Magneticamente

### Relés Eletromecânicos

- 11.7) Analise o circuito abaixo e determine as especificações do resistor  $R$  (valor nominal e potência) para que o relé possa ser acionado pela bateria de 9V.



Especificações do Relé:

Bobina:

Tensão nominal: 5,2 Vcc  
Potência mínima: 60 mW  
Resistência: 450  $\Omega$

Contatos:

Arranjo: 1 normalmente aberto  
Carga máxima: 2 A a 250 VCA

A proposta didático-pedagógica deste livro consiste, entre outras coisas, na apresentação e análise de circuitos aplicativos relativos aos principais conceitos que fazem parte do seu conteúdo.

Neste capítulo, iniciaremos com uma apresentação geral de um divisor de freqüências de áudio, circuito que servirá como elemento motivador para o estudo dos assuntos que virão nos capítulos seguintes.

A análise detalhada, bem como o procedimento para o desenvolvimento do projeto desse circuito, será apresentada em alguns dos próximos capítulos, conforme a conveniência.

## 12.1

## Círculo Aplicativo em CA - DF-1

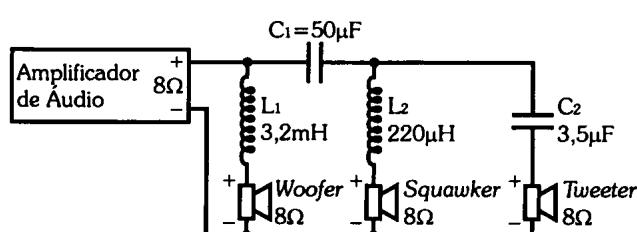
### Divisor de Freqüências de Áudio - Versão DF-1

*DF-1* é o código que daremos à primeira versão do divisor de freqüências de áudio. O amplificador fornece aos alto-falantes de uma caixa acústica freqüências de áudio desde as mais baixas (a partir de 20Hz, aproximadamente), que denominamos sons graves, às mais altas (até 20kHz, aproximadamente), que denominamos sons agudos, passando pelas freqüências intermediárias, que denominamos sons médios.

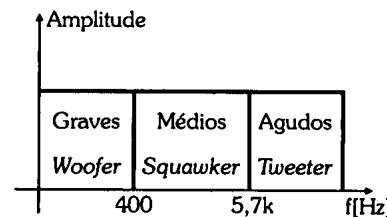
Um sistema acústico completo é composto por três tipos de alto-falante com características construtivas e elétricas diferentes para que cada um reproduza com maior eficiência uma determinada faixa de freqüências. A denominação desses alto-falantes e as suas respectivas faixas de freqüência de reprodução são as seguintes: *woofer* para sons graves, *squawker* ou *mid-range* para sons médios e *tweeter* para sons agudos.

Para melhorar a qualidade de reprodução dos sinais de áudio por esse sistema acústico e evitar que os alto-falantes recebam freqüências indesejáveis com alta amplitude (o que poderia causar sérios danos a eles), é comum a utilização de um circuito divisor de freqüências.

Círculo Elétrico



Modo Ideal de Funcionamento



Este circuito tem a função de selecionar uma faixa de freqüências para cada alto-falante, atenuando os sinais indesejáveis. No *DF-1*, a previsão é de que o *woofer* reproduza sinais até 400Hz, o *squawker* entre 400 e 5,7kHz e o *tweeter* acima de 5,7kHz.

---

**Nota:** Consulte no Apêndice 1, os tópicos VIII, IX, X, XI e XII.

Considere um enrolamento de área  $S$ , em  $[m^2]$ , formado por  $N$  espiras e imerso em um campo magnético  $\vec{B}$ , em  $[Wb/m^2]$ , perpendicular ao eixo de rotação do enrolamento.

O plano  $S$  forma um ângulo  $\theta$ , em  $[^\circ]$  ou  $[rad]$ , com o vetor de referência  $\vec{B}$ .

O fluxo magnético  $\phi$ , em  $[Wb]$ , é o produto do campo  $B$  pela área efetiva do enrolamento, isto é, ele varia segundo o cosseno de  $\alpha$ , que é o ângulo entre o vetor  $\vec{n}$ , normal ao plano  $S$ , e o vetor  $\vec{B}$ .

Portanto, a expressão do fluxo em função de  $\alpha$  é:

$$\phi(\alpha) = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Mas,  $\alpha = 90^\circ + \theta$ , pois  $\vec{n}$  é perpendicular ao plano  $S$ , de forma que:

$$\phi(\theta) = B \cdot S \cdot \cos(90^\circ + \theta)$$

Mas,  $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ , portanto a expressão final do fluxo é:

$$\phi(\theta) = -B \cdot S \cdot \sin \theta$$

Se o enrolamento estiver girando com velocidade angular  $\omega$ , em  $[rad/s]$ , o ângulo  $\theta$  varia com o tempo  $t$ , em  $[s]$ , conforme expressão  $\theta = \omega t$ . Assim, a expressão do fluxo instantâneo também é:

$$\phi(t) = -B \cdot S \cdot \sin \omega t$$

O sinal negativo em  $\phi(t)$  indica a inversão do plano  $S$  em relação ao sentido do fluxo.

Pela Lei de Lenz, o movimento da espira imersa no campo magnético induz uma tensão  $v$ , em  $[V]$ , que tende a se opor à causa que a gerou, sendo proporcional à variação do fluxo magnético no tempo e ao número  $N$  de espiras, ou seja:

$$v(t) = -N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Substituindo  $\phi(t)$  na fórmula de  $v(t)$ , obtemos a expressão da tensão instantânea:

$$v(t) = -N \cdot \frac{d(-B \cdot S \cdot \sin \omega t)}{dt} \Rightarrow v(t) = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Na expressão de  $v(t)$ , o termo  $N \cdot B \cdot S \cdot \omega$  é uma constante que corresponde ao valor máximo da tensão gerada, que denominaremos tensão de pico  $V_p$ . Portanto, concluímos que:

$$V_p = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$$

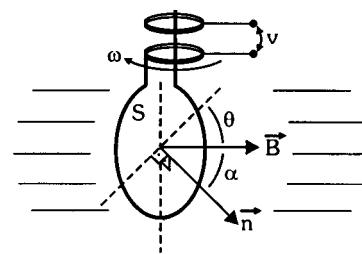
e

$$v(t) = V_p \cdot \cos \omega t$$

ou

$$v(\theta) = V_p \cdot \cos \theta$$

A tensão gerada pode ser analisada pela sua forma de onda ou pelo seu diagrama fasorial, considerando um enrolamento com movimento giratório  $\omega$  no sentido anti-horário imerso em um campo magnético  $B$ , em que  $\theta$  é o ângulo entre o plano  $S$  e as linhas de campo  $B$ . No diagrama fasorial, a amplitude do sinal  $v(t)$  corresponde à projeção do respectivo fasor  $v(\theta)$  no eixo horizontal, pois a tensão é cossenoidal.



Forma de Onda

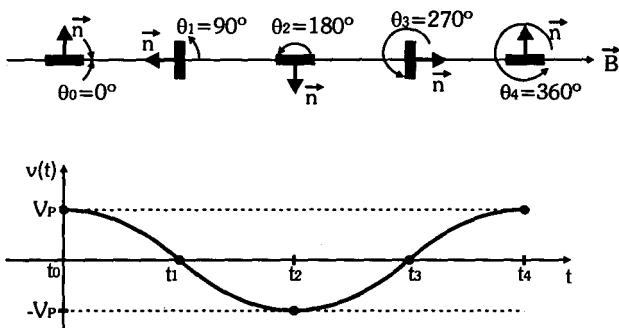
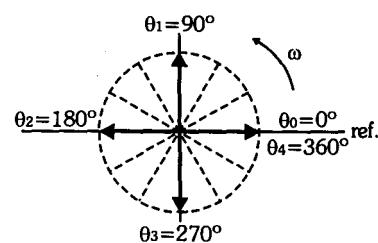


Diagrama Fasorial



No instante  $t_0$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ , a área efetiva do enrolamento é nula, o fluxo magnético é nulo, pois  $\phi(0) = -B.S.\sin 0 = 0$ , e a tensão gerada é máxima e positiva, pois  $v(0) = V_p \cos 0 = V_p$ . Nesse instante, a área do enrolamento está invertendo de posição em relação ao fluxo.

No instante  $t_1$ ,  $\theta_1 = 90^\circ$ , a área efetiva do enrolamento é máxima, o fluxo magnético é máximo e negativo, pois  $\phi(90^\circ) = -B.S.\sin 90^\circ = -B.S$ , e a tensão gerada atinge o valor zero, pois  $v(90^\circ) = V_p \cos 90^\circ = 0$ . Nesse instante, a polaridade da tensão se inverte.

No instante  $t_2$ ,  $\theta_2 = 180^\circ$ , a área efetiva do enrolamento volta a ser nula, o fluxo magnético anula-se novamente, pois  $\phi(180^\circ) = -B.S.\sin 180^\circ = 0$ , e a tensão gerada atinge o valor máximo negativo, pois  $v(180^\circ) = V_p \cos 180^\circ = -V_p$ . Nesse instante, a área do enrolamento inverte de novo a sua posição em relação ao fluxo.

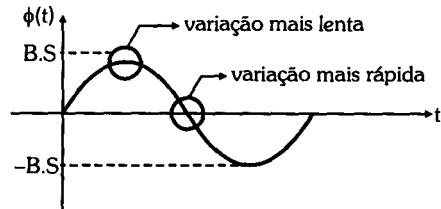
No instante  $t_3$ ,  $\theta_3 = 270^\circ$ , a área efetiva do enrolamento volta a ser máxima, o fluxo magnético atinge o valor máximo positivo, pois  $\phi(270^\circ) = -B.S.\sin 270^\circ = B.S$ , e a tensão gerada atinge o valor zero, pois  $v(270^\circ) = V_p \cos 270^\circ = 0$ . Nesse instante, a polaridade da tensão se inverte.

No instante  $t_4$ ,  $\theta_4 = 360^\circ = 0^\circ$ , ou seja, a situação volta a ser exatamente a mesma que no instante  $t_0$ , reiniciando um novo ciclo de  $360^\circ$  ou  $2\pi rad$ . O intervalo de tempo entre  $t_0$  e  $t_4$  é denominado período  $T$ .

Observe que no instante em que o fluxo é nulo, a tensão induzida é máxima, e quando o fluxo é máximo, a tensão é nula.

Isso pode parecer estranho à primeira vista, mas fisicamente está correto, pois a tensão induzida é proporcional à variação do fluxo, e não ao seu valor.

Como o fluxo varia senoidalmente, a taxa de variação é maior na passagem pelos pontos de zero do que pelos pontos de máximo.



A rigor, tanto faz considerarmos a tensão como sendo cossenoidal ou senoidal, já que a diferença entre elas não está na forma de onda, mas no fato de que a tensão cossenoidal está  $90^\circ$  adiantada em relação à senoidal.

Porém, nós tomaremos como padrão a tensão cossenoidal, já que ela pode ser convertida diretamente em número complexo, conforme veremos no tópico 12.6.

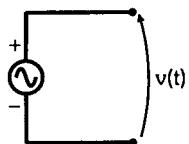
A tensão produzida nos terminais do sistema analisado no tópico anterior é denominada tensão alternada. A denominação alternada é decorrente do fato de a polaridade da tensão induzida sofrer inversão a cada semiciclo.

Conectando uma carga nos terminais desse sistema, surgirá uma corrente alternada com as mesmas características da tensão.

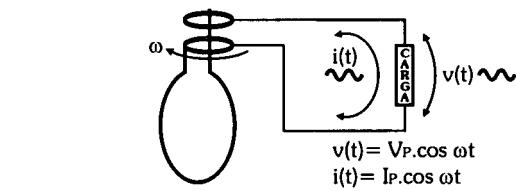
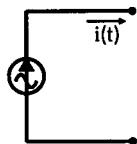
Um sinal alternado (tensão ou corrente) recebe a denominação genérica **CA** (*corrente alternada*) ou **AC** (*alternate current*).

Os sistemas elétricos que produzem um sinal **CA** por meios eletromecânicos são chamados de geradores **CA** ou alternadores. Os equipamentos eletrônicos que produzem um sinal **CA** a partir de um sinal **CC** (corrente contínua) são os geradores de audiofrequência (**AF**) e os geradores de radiofrequência (**RF**).

Gerador de Tensão CA



Gerador de Corrente CA



As figuras ao lado mostram os símbolos de um gerador de tensão **CA** e de um gerador de corrente **CA**.

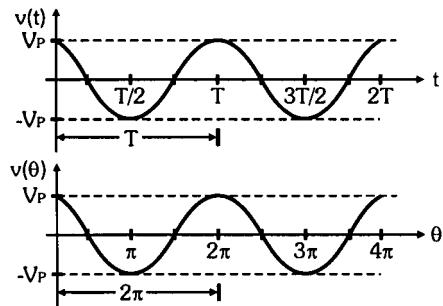
Embora a tensão alterne a sua polaridade e a corrente alterne o seu sentido periodicamente (a cada meio ciclo), é comum representá-las por setas unidirecionais, já que todo circuito possui um ponto de referência para as tensões.

### Período e Freqüência

A forma de onda da tensão cossenoidal pode ser representada no domínio temporal, isto é,  $v(t) = V_p \cos \omega t$ , e no domínio angular, isto é,  $v(\theta) = V_p \cos \theta$ .

Um ciclo angular tem  $2\pi$  rad (ou  $360^\circ$ ).

No domínio temporal, o ciclo demora um *período*  $T$ , cuja unidade de medida é o *segundo [s]*.



A *freqüência angular*  $\omega$  corresponde à velocidade angular do enrolamento do gerador e mede quantos radianos ele se deslocou em um segundo. Por isso, a sua unidade de medida é *radianos/segundo [rad/s]*. Já, o número de ciclos gerados por segundo é a *freqüência*  $f$ , cuja unidade de medida é *ciclos/segundo* ou *hertz [Hz]*.

Assim, podemos relacionar a freqüência angular  $\omega$ , o período  $T$  e a freqüência  $f$  por meio das três fórmulas apresentadas abaixo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

## Amplitudes Características do Sinal Alternado

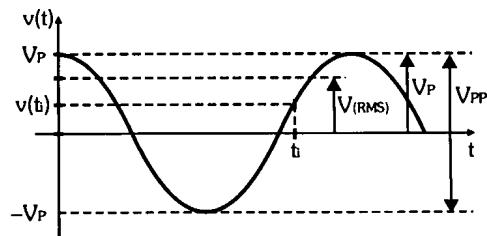
Um sinal CA (tensão ou corrente) pode ser especificado, em termos de amplitude, de várias formas diferentes. Tomemos como referência uma tensão alternada cossenoidal.

### Valor Instantâneo - $v(t)$

O valor instantâneo  $v(t_i)$  é a amplitude do sinal em um determinado instante  $t_i$ .

Matematicamente, ele deve ser calculado pela expressão:

$$v(t) = V_p \cdot \cos \omega t$$



### Valor de Pico - $V_p$

O valor de pico corresponde à amplitude máxima (positiva ou negativa) que o sinal possui.

### Valor de Pico a Pico - $V_{pp}$

O valor de pico a pico corresponde à amplitude total entre os dois pontos máximos (positivo e negativo) e, portanto, ele é o dobro do valor de pico.

$$V_{pp} = 2V_p$$

Os valores  $V_p$  e  $V_{pp}$  são mais significativos que o instantâneo, pois por meio deles é possível comparar a amplitude de sinais diferentes. Além disso, ao analisarmos um sinal com um osciloscópio, esses valores podem ser facilmente medidos.

### Valor Eficaz ou RMS - $V_{ef}$ , $V_{rms}$ ou $V$

O valor eficaz ou RMS (*Root Mean Square* ou Raiz Média Quadrática) corresponde ao valor de uma tensão alternada que, se fosse aplicada a uma resistência, dissiparia uma potência média, em watt, de mesmo valor numérico de uma tensão contínua aplicada à mesma resistência.

Definição: Considere uma função periódica temporal  $f(t)$ , com período  $T$ . O valor eficaz  $F$  dessa função é definido por:

$$F = \left[ \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Para sinais alternados senoidais e cossenoidais, a fórmula de valor eficaz pode ser convertida no domínio angular, considerando o período  $T$  equivalente a  $2\pi$  rad, ou seja:

$$F = \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta \right]^{1/2}$$

Assim, considerando a tensão  $v(\theta) = V_p \cos \theta$ , a fórmula do seu valor eficaz pode ser deduzida facilmente:

$$V = \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} v^2(\theta) d\theta \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} V_p^2 \cdot \cos^2 \theta d\theta \right]^{1/2} = \left[ \frac{V_p^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right]^{1/2} = \left[ \frac{V_p^2}{2\pi} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$V = \left[ \frac{V_p^2}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{2} + \frac{\sin 4\pi}{4} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} \right) \right]^{1/2} = \left[ \frac{V_p^2}{2\pi} \cdot (\pi) \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{V_p}{\sqrt{2}}}$$

O valor eficaz de um sinal alternado é, em termos de amplitude, o mais importante do ponto de vista prático, pois a tensão e a corrente eficazes podem ser medidas diretamente, respectivamente, pelos voltímetros e amperímetros CA.

Nas análises de circuitos por diagramas fasoriais e por números complexos que faremos em seguida, usaremos sempre o valor eficaz como referência. Neste livro, a tensão e a corrente eficazes serão simbolizadas simplesmente por  $V$  e  $I$ .

### Fase Inicial de um Sinal Alternado

Um sinal cosenoidal (tensão ou corrente) não precisa ter, necessariamente, amplitude máxima no instante  $t = 0$ . Isso significa que ele pode iniciar o seu ciclo adiantado ou atrasado de um intervalo de tempo  $\Delta t$  ou de uma fase inicial  $\theta$ .

Portanto, as expressões gerais da tensão e da corrente alternadas passam a ser as seguintes:

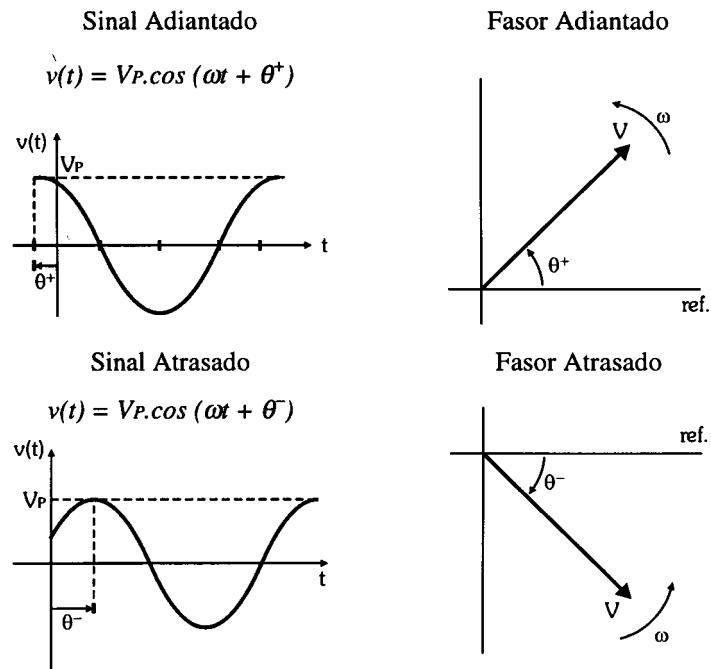
$$\boxed{v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)}$$

$$\boxed{i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta_i)}$$

**Obs.:** Nestas expressões, a amplitude deve ser sempre o valor de pico e a fase inicial  $\theta$  deve estar em radiano, pois a unidade de  $\omega$  é rad/s. A unidade de medida da grandeza representada deve ser escrita após a expressão, e é também um dado importante, pois ela informa a ordem de grandeza do sinal por meio de prefixos métricos, como, por exemplo, [mV], [kV], [mA] e [ $\mu$ A].

Se o sinal está *adiantado*, a fase inicial  $\theta$  é *positiva* na expressão do valor instantâneo e no respectivo diagrama fasorial, conforme mostram as figuras ao lado.

Observe que o sinal cosenoidal adianta-se quando o seu valor máximo ocorre *antes* do instante inicial.



Se o sinal está *atrasado*, a fase inicial  $\theta$  é *negativa* na expressão do valor instantâneo e no respectivo diagrama fasorial, conforme mostram as figuras ao lado.

Observe que o sinal cosenoidal atrasa-se quando o seu valor máximo ocorre *após* o instante inicial.

**Obs.:** O diagrama fasorial é um "retrato" do sinal no instante inicial. Ele é formado por um fasor de módulo igual ao valor eficaz do sinal representado, afastado de um ângulo igual à sua fase inicial e acrescido da informação relativa à sua freqüência angular. Portanto, ele contém todas as informações necessárias para caracterizar completamente o sinal representado.

## Defasagem entre Sinais Alternados

A diferença de fase entre dois sinais de mesma freqüência é chamada de *defasagem*. Para que a defasagem possa ser utilizada matematicamente de um modo mais fácil, é importante estabelecer um dos sinais como referência.

### Defasagem entre Tensão e Corrente

A defasagem entre tensão e corrente é simbolizada por  $\varphi$ , tendo a corrente como referência.

Consideremos uma tensão  $v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)$  e uma corrente  $i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta_i)$ , sendo  $i(t)$  a referência. Nesse caso, a defasagem é dada por  $\varphi = \theta_v - \theta_i$ .

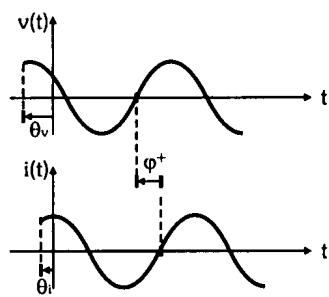
Se  $v(t)$  estiver *adiantado* em relação a  $i(t)$ , a defasagem  $\varphi$  será *positiva*.

No diagrama fasorial, a seta entre os fasores  $V$  e  $I$  tem a mesma orientação que a freqüência angular  $\omega$ , indicando que a defasagem é positiva, isto é, que a tensão está adiantada em relação à corrente.

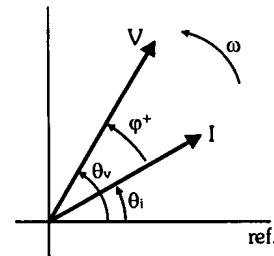
Se  $v(t)$  estiver *atrasado* em relação a  $i(t)$ , a defasagem  $\varphi$  será *negativa*.

No diagrama fasorial, a seta entre os fasores  $V$  e  $I$  tem a orientação oposta à da freqüência angular  $\omega$ , indicando que a defasagem é negativa, isto é, que a tensão está atrasada em relação à corrente.

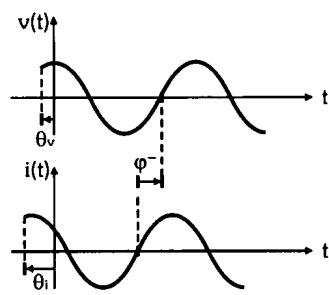
Defasagem Positiva ( $\varphi^+$ )



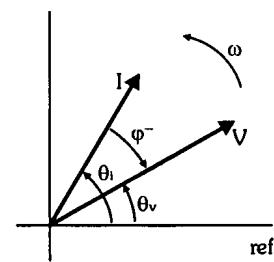
$V$  adiante de  $I$



Defasagem Negativa ( $\varphi^-$ )



$V$  atrás de  $I$

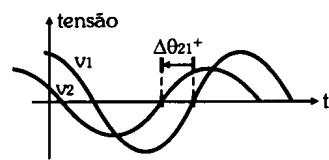


### Defasagem entre Sinais de Mesma Grandeza

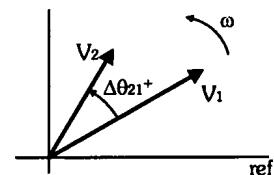
A defasagem entre sinais de mesma grandeza (entre tensões ou entre correntes) será simbolizada por  $\Delta\theta$  ou por uma letra grega qualquer, diferente de  $\varphi$ .

Neste caso, deve-se adotar um dos sinais como referência, como nas figuras ao lado, em que  $v_1(t)$  foi adotado como referência e, portanto,  $v_2(t)$  está adiantado, resultando em uma defasagem positiva.

Defasagem Positiva ( $\Delta\theta_{21}^+$ )



$V_2$  adiante de  $V_1$



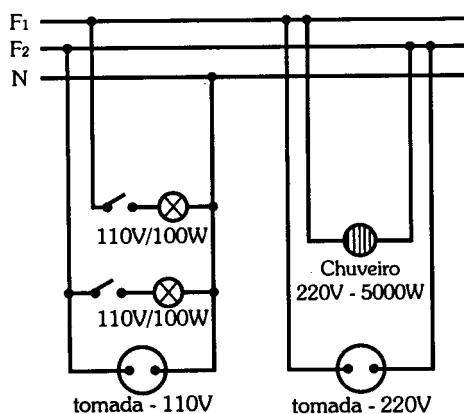
## Rede Elétrica

Uma das formas de obter a tensão alternada é diretamente da rede elétrica.

No Brasil, as usinas geradoras de energia elétrica operam com freqüência de 60Hz, o que corresponde a uma freqüência angular de  $377\text{rad/s}$ .



**Exemplo de Instalação Elétrica**  
(O condutor terra não está representado.)



A rede elétrica de uso residencial é normalmente formada por duas fases e um neutro.

A tensão eficaz entre fase e neutro varia entre 110V e 127V e é utilizada para alimentar circuitos monofásicos compostos por lâmpadas e tomadas de uso geral.

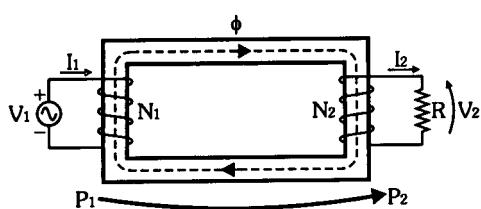
Para os circuitos bifásicos, como os usados para a alimentação de chuveiros e máquinas de lavar roupas, utilizam-se duas fases, obtendo uma tensão que varia entre 220V e 254V.

A rede elétrica de uso industrial é normalmente formada por três fases e um neutro, já que muitas máquinas são constituídas por motores trifásicos.

Dependendo da forma como as fases são utilizadas, é possível obter várias tensões diferentes, conforme veremos no Capítulo 20.

## Transformador Monofásico

O transformador monofásico é formado por um núcleo ferromagnético e pelos enrolamentos primário e secundário. A tensão  $v_1(t)$  no primário gera um fluxo magnético variável no núcleo que corta as espiras do secundário, induzindo uma tensão  $v_2(t)$ .



### Relações de Transformação

Num transformador com carga  $R$ , a tensão eficaz  $V_1$  no primário produz a corrente eficaz  $I_1$ .

No secundário, a tensão eficaz  $V_2$  fará circular pela carga uma corrente eficaz  $I_2$ .

No *transformador ideal*, a potência no primário é toda transferida para o secundário:  $P_2 = P_1$ .

A relação entre o número de espiras  $N_1$  do primário e  $N_2$  do secundário determina a relação entre as tensões  $V_1$  do primário e  $V_2$  do secundário.

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

Portanto, se  $N_2/N_1 > 1$ , trata-se de um transformador elevador de tensão; se  $N_2/N_1 < 1$ , trata-se de um transformador redutor de tensão.

Por meio das potências  $P_1$  e  $P_2$ , deduzimos a relação entre as correntes  $I_1$  e  $I_2$ .

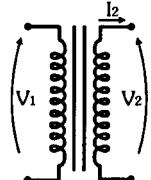
$$P_2 = P_1 \Rightarrow V_2 \cdot I_2 = V_1 \cdot I_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}}$$

Portanto, no transformador elevador de tensão, a corrente no secundário é menor que no primário, isto é, o diâmetro do fio do secundário pode ser menor que o do primário; no transformador redutor de tensão, a corrente no secundário é maior que no primário, isto é, o diâmetro do fio do secundário deve ser maior que o do primário.

### Transformador Real

No transformador real, a potência no secundário é menor que no primário, devido a várias perdas. Por isso, a relação entre as potências é dada por  $P_2 = \eta \cdot P_1$ , em que  $\eta$  representa o *rendimento* do transformador. No transformador ideal,  $\eta = 1$  (ou  $\eta = 100\%$ ), e no transformador real,  $\eta < 1$  (ou  $\eta < 100\%$ ). Os bons transformadores têm  $\eta > 90\%$ .

A tabela abaixo relaciona as principais especificações de um transformador monofásico, bem como o seu símbolo elétrico e o aspecto de um transformador comum.

Especificações	Símbolo	Aspecto
$V_1 \Rightarrow$ tensão primária [RMS] $V_2 \Rightarrow$ tensão secundária [RMS] $I_2 \Rightarrow$ corrente máxima de saída [RMS] $P_{Tr} \Rightarrow$ potência máxima de saída em que: $P_{Tr} = V_2 \cdot I_2$		

**Obs.:** No Capítulo 15 faremos um estudo detalhado das potências em CA.

### Geradores de Audiofreqüência - AF e de Radiofreqüência - RF

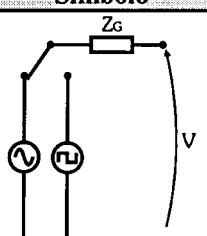
O gerador de audiofreqüência (AF) é um equipamento muito usado em laboratório, pois fornece tensões de vários tipos e numa ampla faixa de freqüências.

Os controles principais são:

- Amplitude  $\Rightarrow$  Varia desde zero até algumas dezenas de volts pico a pico.
- Freqüência  $\Rightarrow$  Varia desde décimos de herz até centenas de quilohertz.
- Forma de Onda  $\Rightarrow$  Senoidal e quadrada. Alguns possuem também a onda triangular.

A faixa audível depende do ouvido de cada ser humano, mas o valor máximo é de aproximadamente 20kHz. Apesar disso, os geradores de áudio produzem freqüências maiores, normalmente até 100kHz, para que possam ser utilizadas no levantamento da resposta em freqüência dos sistemas de áudio, bem como para outras aplicações que envolvam freqüências superiores às de áudio.

A tabela abaixo relaciona as principais especificações, o símbolo elétrico e o aspecto de um gerador de áudio comum.

Especificações	Símbolo	Aspecto
Faixa de freqüências ..... [Hz] Tensão máxima de saída ..... [VPP] Nível CC máximo (+/-) ..... [V] Impedância interna ..... [ $\Omega$ ] Distorção máxima ..... [%]		

A impedância interna (ou resistência interna) de um gerador de áudio é, normalmente, de  $600\Omega$ , pois este é um valor padrão para sistemas de áudio e de telefonia.

O gerador de radiofreqüência (RF) é um equipamento de laboratório similar ao de áudio. As diferenças principais são:

- 1) A faixa de freqüências de operação é muito mais elevada no gerador de RF, podendo chegar a dezenas de gigahertz;
- 2) A impedância interna normalmente é de  $50\Omega$ , por ser um padrão para sistemas de RF na área de telecomunicações.

No tópico 3.6 já apresentamos a forma como o voltímetro e o amperímetro devem ser utilizados para a medida, respectivamente, da tensão e da corrente *CA*. Neste tópico, abordaremos o osciloscópio.

### Osciloscópio

Na prática, as formas de onda das tensões podem ser analisadas diretamente por um osciloscópio, com o qual podemos medir diretamente a tensão de pico a pico ( $V_{PP}$ ) e o período ( $T$ ) e, indiretamente, as tensões de pico ( $V_P$ ) e eficaz ( $V$ ), a freqüência ( $f$ ) e a defasagem ( $\Delta\theta$ ) entre duas tensões.

Ao lado vemos o painel frontal simplificado de um osciloscópio de dois canais *A* e *B*.

Cada canal possui um conjunto de controles verticais manualmente independentes:

- posição  $\uparrow\downarrow$ ;
- tipo de sinal *AC / DC / GND*;
- atenuação *VOLTS / DIV*.

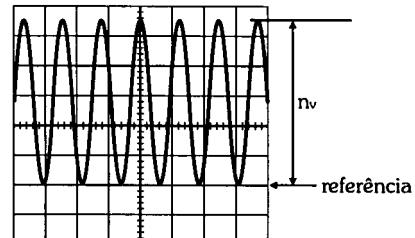
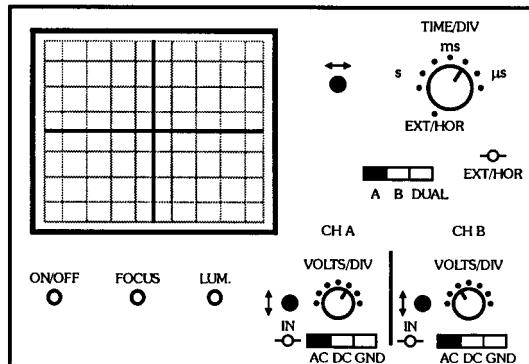
Já, os controles horizontais atuam simultaneamente nos canais *A* e *B*:

- posição  $\leftrightarrow$ ;
- base de tempo *TIME / DIV*.

### Medida de $V_{PP}$ , $V_P$ e $V$

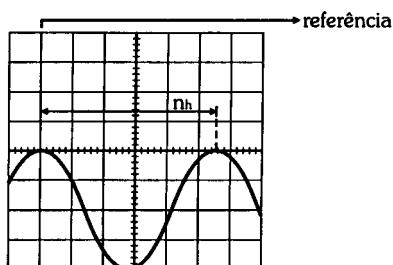
Considere a tensão alternada mostrada na tela do osciloscópio, conforme a figura ao lado.

Por meio do controle de posição vertical do canal usado, o sinal é ajustado na tela de modo que os seus pontos máximos inferiores coincidam com uma das linhas horizontais escolhida como referência.



A tensão de pico a pico  $V_{PP}$  é o produto do número de divisões verticais  $n_v$  pelo valor selecionado no controle de atenuação vertical, ou seja:  $V_{PP} = n_v \cdot VOLTS/DIV$ .

Assim, as tensões de pico  $V_P$  e eficaz  $V$  valem, respectivamente,  $V_P = V_{PP}/2$  e  $V = V_{PP}/2\sqrt{2}$ .



### Medida de $T$ , $f$ e $\omega$

O sinal deve ser ajustado na tela de modo que os pontos máximos superiores ou inferiores coincidam com a linha horizontal graduada, e pelo menos um deles coincida com uma das linhas verticais escolhida como referência.

Isso pode ser feito pelos controles de posição vertical e horizontal.

O período  $T$  é o produto do número de divisões horizontais  $n_h$  pelo valor selecionado no controle de base de tempo, ou seja:  $T = n_h \cdot TIME/DIV$ .

A freqüência  $f$  pode ser obtida indiretamente pela fórmula seguinte:  $f = 1/T$ .

## Medida da Defasagem $\Delta\theta$ entre Duas Tensões de Mesma Freqüência

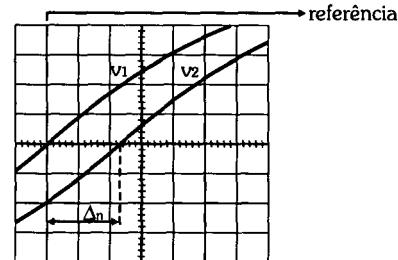
Pelo *método das formas de onda*, as tensões são aplicadas aos canais *A* e *B*, que devem ser centralizados verticalmente na tela por meio das suas teclas *GND* e dos seus controles de posição vertical.

Acionando novamente a tecla *AC* dos dois canais, os sinais devem ser ajustados na tela pelo controle de posição horizontal, de modo que o cruzamento de um deles com a linha horizontal graduada coincida com uma linha vertical escolhida como referência.

Mede-se, então, o  $n_h$  equivalente ao período  $T$  e o  $\Delta n_h$  equivalente à defasagem (se necessário, mudar a base de tempo para medir  $\Delta n_h$  com melhor precisão). Por fim, a defasagem  $\Delta\theta$  pode ser calculada em graus ou radianos pelas fórmulas:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta n}{n_h} \cdot 360 [^\circ] \quad \text{ou} \quad \Delta\theta = \frac{\Delta n}{n_h} \cdot 2\pi [rad]$$

Este método tem a vantagem de mostrar qual dos sinais está mais adiantado.

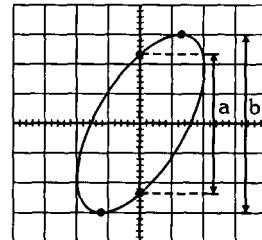


Pelo *método de Lissajous*, uma tensão é aplicada ao canal *A* e a outra à entrada *EXT/HOR*, só que o canal *A* deve ser centralizado verticalmente por meio da sua tecla *GND* e do seu controle de posição vertical, e horizontalmente, colocando o controle de base de tempo na posição *EXT/HOR* e por meio do controle de posição horizontal.

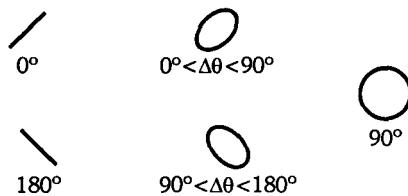
Acionando novamente a tecla *AC* do canal *A* e mantendo o controle de base de tempo em *EXT/HOR*, formará na tela uma elipse (figura de Lissajous) devido à composição dos dois sinais.

Medem-se, então, as amplitudes *a* e *b*. Por fim, a defasagem  $\Delta\theta$  pode ser calculada pela fórmula:

$$\Delta\theta = \arcsen \frac{a}{b} [^\circ \text{ ou } rad]$$



Este método tem a vantagem de propiciar uma maior precisão, mas a desvantagem de não mostrar qual dos sinais está mais adiantado.



Se  $0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$ , a figura de Lissajous estará inclinada à direita, e se  $90^\circ < \Delta\theta < 180^\circ$ , a figura de Lissajous estará inclinada à esquerda.

Se  $\Delta\theta = 0^\circ$  ou  $\Delta\theta = 180^\circ$ , a elipse irá se transformar em uma reta inclinada e, portanto,  $a = 0$ .

Se  $\Delta\theta = 90^\circ$ , a elipse irá se transformar em um círculo e, portanto,  $a = b$ .

No tópico 12.3 nós apresentamos os diversos parâmetros dos sinais alternados: período, freqüência, freqüência angular, valor instantâneo, valor de pico, valor de pico a pico, valor eficaz, fase inicial e defasagem entre sinais de mesma freqüência. Todos esses parâmetros estão presentes em um circuito que opera em corrente alternada (CA).

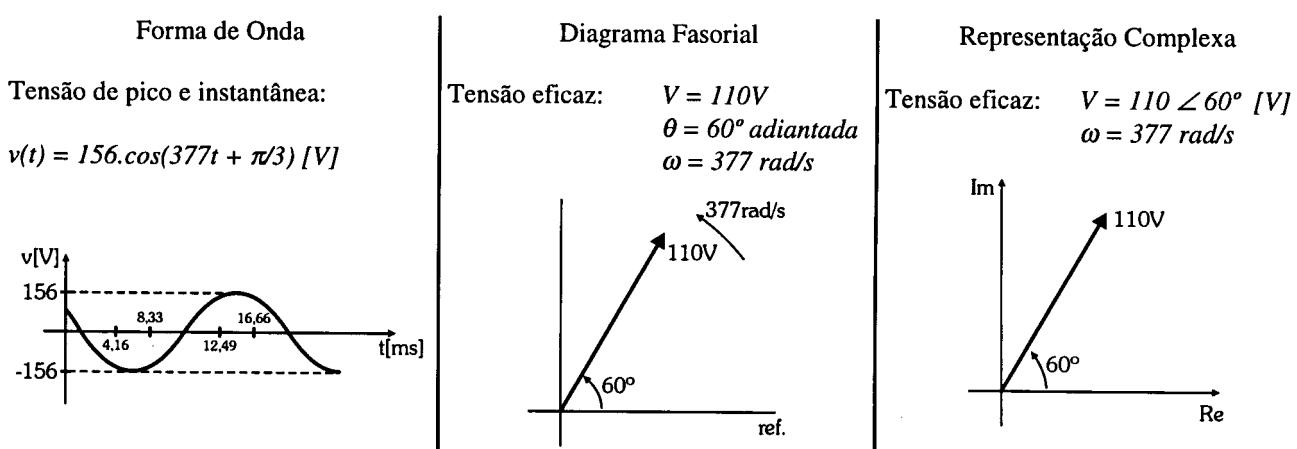
Comparando com os circuitos que operam em corrente contínua (CC), é óbvio que a quantidade de elementos com a qual temos de lidar agora é muito maior. Mas, neste e no próximo capítulo, mostraremos que os circuitos CA podem ser analisados pelas mesmas leis e teoremas válidos para CC, desde que por meios matemáticos adequados.

### Representações Temporal, Fasorial e Complexa do Sinal CA

Um sinal alternado cossenoidal pode ser convertido diretamente nas representações fasorial e complexa equivalentes.

Mas, se a sua expressão for um seno, ela deve ser modificada para cosseno por meio da identidade trigonométrica  $\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$  antes de efetivar as conversões.

Para que possamos fazer uma analogia entre estes três modos de representação de um mesmo sinal alternado, consideremos o exemplo seguinte referente a uma tensão CA:



Observe que nos modos de representação instantânea e fasorial, tanto analítica quanto gráfica, aparecem, pelo menos, três parâmetros básicos: uma amplitude, uma freqüência e a fase, com os quais podem ser determinados todos os demais parâmetros. Já, na representação complexa, a freqüência deve ser fornecida à parte para completar esse conjunto de parâmetros básicos.

Observe também a semelhança entre o diagrama fasorial e a representação complexa no plano cartesiano. Mais adiante, mostraremos que, na prática, podemos trabalhar analiticamente apenas com números complexos, usando o diagrama fasorial apenas como recurso auxiliar.

## Adição e Subtração entre Sinais CA

Para compararmos as operações adição e subtração de sinais alternados nos três modos de representação, consideremos duas tensões cossenoidais de mesma freqüência  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ :

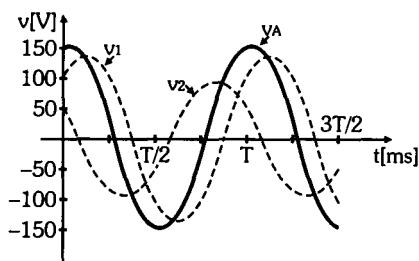
$$v_1(t) = 141 \cdot \cos(377t - \pi/4) [V] \quad \equiv \quad V_1 = 100V; \theta_1 = -45^\circ \quad \equiv \quad \dot{V}_1 = 100\angle -45^\circ [V]$$

$$v_2(t) = 99 \cdot \cos(377t + \pi/3) [V] \quad \equiv \quad V_2 = 70V; \theta_2 = 60^\circ \quad \equiv \quad \dot{V}_2 = 70\angle 60^\circ [V]$$

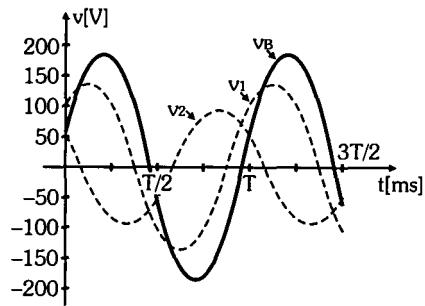
### Resolução Temporal

Para realizar graficamente as operações adição e subtração, é necessário que os gráficos estejam em escala para que as formas de onda resultantes possam ser obtidas pela adição e pela subtração de diversas amplitudes instantâneas, conforme mostram as figuras abaixo:

Adição gráfica:  $v_A(t) = v_1(t) + v_2(t)$



Subtração gráfica:  $v_B(t) = v_1(t) - v_2(t)$



Para realizar essas mesmas operações analiticamente, é necessário utilizar algumas identidades trigonométricas, tornando os cálculos muito trabalhosos. Abaixo, apresentamos apenas os resultados dessas operações e, mais adiante, mostraremos como chegamos a eles.

Adição analítica:  $v_A(t) = v_1(t) + v_2(t)$

$$v_A(t) = v_1(t) + v_2(t) \Rightarrow$$

$$v_A(t) = 141 \cdot \cos(377t - \pi/4) + 99 \cdot \cos(377t + \pi/3) \Rightarrow$$

$$v_A(t) = 150,2 \cdot \cos(377t - 0,1) [V]$$

Subtração analítica:  $v_B(t) = v_1(t) - v_2(t)$

$$v_B(t) = v_1(t) - v_2(t) \Rightarrow$$

$$v_B(t) = 141 \cdot \cos(377t - \pi/4) - 99 \cdot \cos(377t + \pi/3) \Rightarrow$$

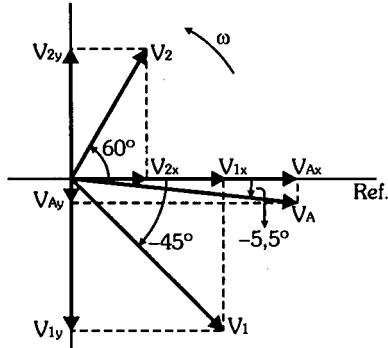
$$v_B(t) = 192,5 \cdot \cos(377t - 1,3) [V]$$

## Resolução Fasorial

Para realizar graficamente as operações adição e subtração, é necessário que os diagramas estejam em escalas linear e angular. A adição é feita diretamente pela regra do paralelogramo. Na subtração, o fasor negativo deve ser defasado em  $180^\circ$  e somado ao fasor positivo pela regra do paralelogramo. As figuras abaixo ilustram essas operações gráficas:

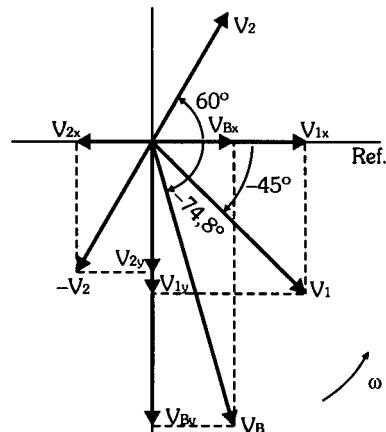
Adição gráfica:

$$V_A = V_1 + V_2$$



Subtração gráfica:

$$V_B = V_1 - V_2$$



Para realizar essas mesmas operações analiticamente, é necessário utilizar as relações trigonométricas do triângulo retângulo para decompor os fatores nos eixos  $x$  (referência) e  $y$  (perpendicular) e o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo do fasor resultante. Porém, tais operações devem ser, pelo menos, acompanhadas de um esboço do diagrama fasorial, sem o qual pode-se incorrer facilmente em erros.

Adição analítica:

$$V_A = V_1 + V_2$$

$$V_{Ax} = V_{1x} + V_{2x} = 100 \cdot \cos(-45^\circ) + 70 \cdot \cos(60^\circ) \Rightarrow \\ V_{Ax} = 70,7 + 35 \Rightarrow V_{Ax} = 105,7V$$

$$V_{Ay} = V_{1y} + V_{2y} = 100 \cdot \sin(-45^\circ) + 70 \cdot \sin(60^\circ) \Rightarrow \\ V_{Ay} = -70,7 + 60,6 \Rightarrow V_{Ay} = -10,1V$$

$$V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2} \Rightarrow V_A = \sqrt{105,7^2 + 10,1^2} \Rightarrow \\ V_A = 106,2V$$

Fasor  $V_A \rightarrow 4^\circ$  quadrante,  $\theta_A$  é dado por:

$$\theta_A = -\arctg \frac{V_{Ay}}{V_{Ax}} = -\arctg \frac{10,1}{105,7} \Rightarrow \theta_A = -5,5^\circ$$

Convertendo a tensão  $V_A$  em  $v_A(t)$ :

$$V_{AP} = 106,2 \cdot \sqrt{2} = 150,2V$$

$$\theta_A [rad] = \frac{-5,5\pi}{180} = -0,1rad$$

Portanto:

$$V_A(t) = 150,2 \cdot \cos(377t - 0,1)[V]$$

Subtração analítica:

$$V_B = V_1 - V_2$$

$$V_{Bx} = V_{1x} - V_{2x} = 100 \cdot \cos(-45^\circ) - 70 \cdot \cos(60^\circ) \Rightarrow \\ V_{Bx} = 70,7 - 35 \Rightarrow V_{Bx} = 35,7V$$

$$V_{By} = V_{1y} - V_{2y} = 100 \cdot \sin(-45^\circ) - 70 \cdot \sin(60^\circ) \Rightarrow \\ V_{By} = -70,7 - 60,6 \Rightarrow V_{By} = -131,3V$$

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{35,7^2 + 131,3^2} \Rightarrow \\ V_B = 136,1V$$

Fasor  $V_B \rightarrow 4^\circ$  quadrante,  $\theta_B$  é dado por:

$$\theta_B = -\arctg \frac{V_{By}}{V_{Bx}} = -\arctg \frac{131,3}{35,7} \Rightarrow \theta_B = -74,8^\circ$$

Convertendo a tensão  $V_B$  em  $v_B(t)$ :

$$V_{BP} = 136,1 \cdot \sqrt{2} = 192,5V$$

$$\theta_B [rad] = \frac{-74,8\pi}{180} = -1,3rad$$

Portanto:

$$V_B(t) = 192,5 \cdot \cos(377t - 1,3)[V]$$

## Resolução por Números Complexos

As operações adição e subtração podem ser feitas graficamente no plano cartesiano complexo da mesma forma que mostramos por meio do diagrama fasorial.

Porém, é analiticamente que a vantagem da utilização dos números complexos supera os procedimentos anteriores.

Isto ocorre porque um número complexo incorpora os dois parâmetros básicos necessários aos cálculos, ou seja, a amplitude e a fase, e porque a possibilidade de conversão entre as formas polar e retangular torna tais operações independentes de qualquer esboço gráfico auxiliar.

Além disso, muitas calculadoras fazem a conversão direta entre as formas polar e retangular e permitem a programação de fórmulas, o que torna este método ainda mais versátil.

Vejamos como  $\dot{V}_A$  e  $\dot{V}_B$  podem ser calculados:

$$\text{Adição analítica: } \dot{V}_A = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_A = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \Rightarrow \dot{V}_A = 100\angle -45^\circ + 70\angle 60^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_A = 70,7 - j70,7 + 35 + j60,6 \Rightarrow \dot{V}_A = 105,7 - j10,1 \Rightarrow$$

$$\dot{V}_A = 106,2\angle -5,5^\circ [V]$$

$$\text{Subtração analítica: } \dot{V}_B = \dot{V}_1 - \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_B = \dot{V}_1 - \dot{V}_2 \Rightarrow \dot{V}_B = 100\angle -45^\circ - 70\angle 60^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_B = 70,7 - j70,7 - 35 - j60,6 \Rightarrow \dot{V}_B = 35,7 - j131,3 \Rightarrow$$

$$\dot{V}_B = 136,1\angle -74,8^\circ [V]$$

Observe que estes resultados já possuem os módulos  $V_A$  e  $V_B$  e as respectivas fases  $\theta_A$  e  $\theta_B$  calculados anteriormente pelo método analítico auxiliado pelo diagrama fasorial.

Convertendo a tensão  $V_A$  em  $v_A(t)$ :

$$V_A(t) = 150,2 \cdot \cos(377t - 0,1)[V]$$

Convertendo a tensão  $V_B$  em  $v_B(t)$ :

$$V_B(t) = 192,5 \cdot \cos(377t - 1,3)[V]$$

Deste último exemplo, observamos que analiticamente as operações podem ser realizadas com muito mais segurança e de modo mais prático por meio dos números complexos, independendo completamente da representação gráfica.

Neste caso, podemos conciliar as vantagens do cálculo por números complexos com a facilidade de visualização do diagrama fasorial, usando este último apenas como recurso auxiliar, mas sem depender dele nem precisar desenhá-lo com precisão geométrica, conforme havíamos adiantado no tópico anterior.

Quanto às formas de onda, elas serão representadas sempre que necessário, tanto para identificar aquilo que podemos obter por meio de um osciloscópio, como para nos auxiliar na compreensão dos circuitos elétricos a serem estudados neste livro.

### IMPORTANTE!

As operações adição e subtração de sinais alternados (tensão e corrente) de mesma freqüência  $\omega$  têm a propriedade de produzir como resultado a mesma grandeza elétrica dos operadores (tensão ou corrente) e com a mesma freqüência  $\omega$ . Portanto, tanto os operadores quanto o resultado da operação podem ser representados em um mesmo diagrama fasorial.

## Exercícios Propostos

### Geração do Sinal Alternado

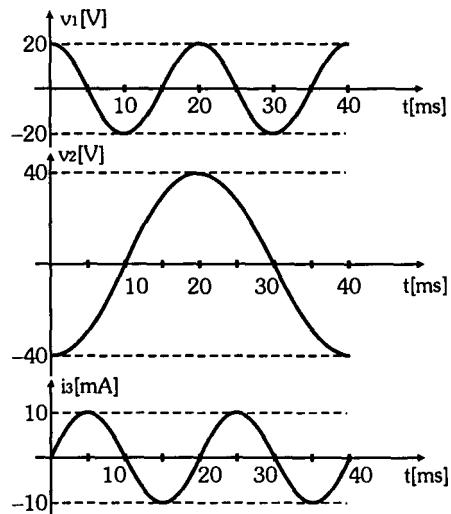
**12.1)** Um alternador é formado por um enrolamento circular de 20 espiras com raio de 20cm. Ele se encontra imerso em um campo magnético constante  $B = 164 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$ , girando com uma velocidade angular  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ .

- Determine a expressão do fluxo  $\phi(t)$ ;
- Determine a expressão da tensão  $v(t)$ ;
- Faça o esboço da forma de onda da tensão gerada pelo alternador.

### Parâmetros do Sinal Alternado

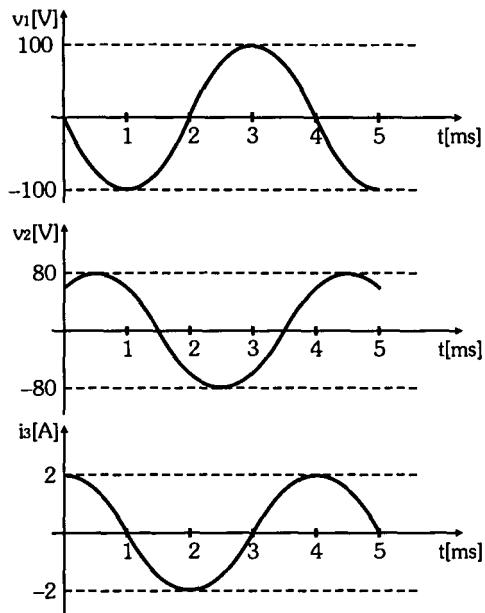
**12.2)** Considere as formas de onda representadas ao lado.

- Determine  $T$ ,  $f$  e  $\omega$  de cada sinal;
- Determine os valores de pico, de pico a pico e eficaz de cada sinal;
- Determine as expressões temporais de cada sinal na forma cossenoidal;
- Esboce o diagrama fasorial de cada sinal;
- Determine os valores instantâneos de cada sinal nos instantes  $t_1 = 8\text{ms}$  e  $t_2 = 12\text{ms}$ .



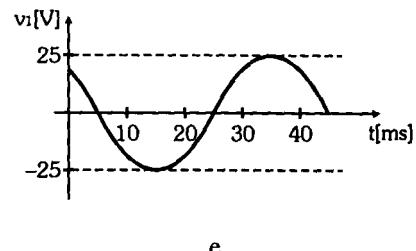
**12.3)** Considere as formas de onda representadas ao lado.

- Determine as expressões temporais de cada sinal na forma cossenoidal;
- Esboce o diagrama fasorial de cada sinal;
- Determine as defasagens seguintes em [°] e em [rad]:  $\Delta\theta_{12}$ ;  $\Delta\theta_{21}$ ;  $\varphi_{13}$  e  $\varphi_{23}$



**12.4)** São dados dois sinais alternados,  $v_1(t)$  e  $i_2$ , mostrados ao lado. Represente:

- a expressão de  $\dot{V}_1$  em número complexo;
- a expressão temporal de  $i_2(t)$ .



e

$$i_2 = 1,41 \angle -60^\circ [A] ; \omega = 200\pi \text{ rad/s}$$

**12.5)** Considere as tensões seguintes:

$$v_1(t) = 10 \cos(377t + \pi/6) [V]$$

$$v_2(t) = 8 \cos(377t + \pi/4) [V]$$

$$v_3(t) = 12 \cos(377t - \pi/3) [V]$$

Determine analiticamente:

$$\text{a)} \quad \dot{V}_A = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 ;$$

$$\text{b)} \quad \dot{V}_B = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 ;$$

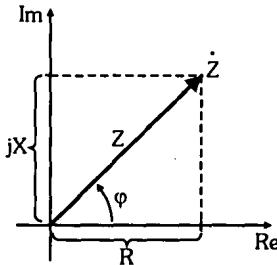
$$\text{c)} \quad \dot{V}_C = \dot{V}_1 - \dot{V}_2 ;$$

$$\text{d)} \quad \dot{V}_D = \dot{V}_3 - \dot{V}_1 .$$

**13.1**

**Conceito de Impedância**

A impedância  $\dot{Z}$ , em ohm ( $\Omega$ ), é um número complexo que caracteriza um dispositivo ou circuito e reflete tanto a oposição total que ela impõe à passagem da corrente alternada quanto a defasagem total entre a tensão e a corrente.



A impedância  $\dot{Z}$  é composta por uma componente real denominada *resistência*  $R$  e por uma componente imaginária denominada *reatância*  $X$ , isto é:

$$\begin{cases} \dot{Z} = R + jX & (\text{forma retangular}) \\ \dot{Z} = Z\angle\varphi & (\text{forma polar}) \end{cases}$$

em que:  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  ⇒ módulo da impedância  $\dot{Z}$

$\varphi = \arctg \frac{X}{R}$  ⇒ fase da impedância  $\dot{Z}$

$$R = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{e} \quad X = Z \cdot \sin \varphi$$

Como veremos no próximo tópico, enquanto o módulo  $Z$  é responsável pela *oposição* à corrente, a fase  $\varphi$  é responsável pela *defasagem* da tensão em relação à corrente. Portanto, conhecer em detalhes uma impedância torna possível prever o comportamento elétrico de um dispositivo ou circuito, bem como do gerador que o alimenta.

Como sabemos, o nome resistência tem origem no verbo resistir, isto é, opor-se à passagem da corrente, sendo uma característica natural dos materiais. Para nós, a resistência se refere, em princípio, aos dispositivos denominados resistores. Analogamente, o nome reatância tem origem no verbo reagir, isto é, opor-se à variação da corrente, sendo uma característica particular das indutâncias e capacitâncias. Para nós, a reatância se refere, em princípio, aos dispositivos denominados indutores e capacitores. Por fim, o nome impedância tem origem no verbo impedir, isto é, opor-se tanto à passagem quanto à variação da corrente, sendo uma característica geral de qualquer circuito elétrico formado, em princípio, por resistores, indutores e capacitores.

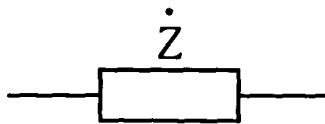
Em relação à componente resistiva  $R$  da impedância, podemos afirmar que ela só pode assumir valores positivos.

Já, em relação à componente reativa  $X$ , a situação é outra. Como a impedância pode adiantar ( $\varphi^+$ ) ou atrasar ( $\varphi^-$ ) a tensão em relação à corrente, é imediato que isso só é possível matematicamente se a reatância puder assumir valor positivo ( $+jX$ ) ou negativo ( $-jX$ ).

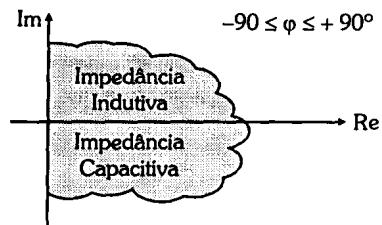
De fato, e como veremos no tópico 13.7, uma indutância comporta-se como uma reatância positiva ( $+jX_L$ ) e uma capacitância como uma reatância negativa ( $-jX_C$ ).

Portanto, concluímos que, no campo dos números complexos, uma impedância pode ocupar apenas o primeiro e o quarto quadrantes do sistema cartesiano.

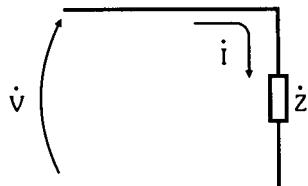
Símbolo Genérico de Impedância



$$\begin{cases} \dot{Z} = R + jX & (\text{forma retangular}) \\ \dot{Z} = Z\angle\varphi & (\text{forma polar}) \end{cases}$$



A Lei de Ohm pode ser aplicada aos circuitos que operam em corrente alternada. Porém, como há a possibilidade de existir defasagem entre tensão e corrente, conclui-se que:



- a relação entre tensão e corrente não resulta necessariamente em uma resistência pura, mas em uma impedância  $\dot{Z}$ , em ohm [ $\Omega$ ];
- a Lei de Ohm pode ser tratada matematicamente no campo dos números complexos.

Para operação em CA, a Lei de Ohm é dada por:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

Considerando uma tensão complexa genérica  $\dot{V} = V\angle\theta_v$  e uma corrente complexa genérica  $\dot{I} = I\angle\theta_i$ , a aplicação da Lei de Ohm resulta em:

$$\dot{Z} = \frac{V\angle\theta_v}{I\angle\theta_i} = \frac{V}{I}\angle(\theta_v - \theta_i) \Rightarrow \dot{Z} = Z\angle\varphi, \quad \text{sendo: } Z = V/I \quad \Rightarrow \text{módulo da impedância } \dot{Z}$$

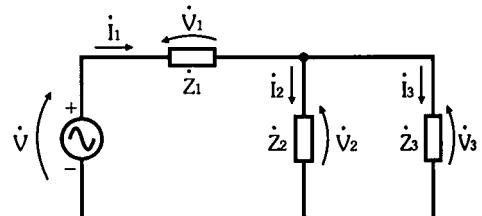
$$\varphi = (\theta_v - \theta_i) \quad \Rightarrow \text{fase da impedância } \dot{Z}$$

As duas Leis de Kirchhoff estudadas no Capítulo 6 podem ser aplicadas em circuitos CA a fim de analisá-los matematicamente.

Porém, para que possamos enunciar essas leis corretamente, é necessário chamarmos a atenção para um detalhe prático relacionado ao sentido das correntes e à polaridade das tensões em circuitos CA.

Embora a polaridade da tensão fornecida por um gerador CA se alterne a cada meio ciclo, do ponto de vista elétrico, um de seus pólos é sempre tomado como referência, o que nos leva a representar a tensão por uma seta unidirecional apontada para o polo "positivo" do gerador.

O exemplo ao lado ilustra esta afirmação.



Definida essa "polaridade", todas as demais tensões e as correntes passam a ter, respectivamente, "polaridades" e "sentidos" também definidos.

Considerando ainda que as impedâncias sejam, em princípio, formadas por um ou mais dispositivos passivos (resistores, indutores e capacitores), do ponto de vista elétrico, elas serão vistas como receptores, de modo que a corrente elétrica deve atravessá-las no sentido do polo "positivo" para o "negativo" das suas tensões.

Portanto, a representação da tensão e da corrente por setas unidireccionais dá a essas grandezas, do ponto de vista matemático, uma dimensão algébrica que deve, necessariamente, ser respeitada nas análises.

## Lei de Kirchhoff para Correntes CA - Lei dos Nós

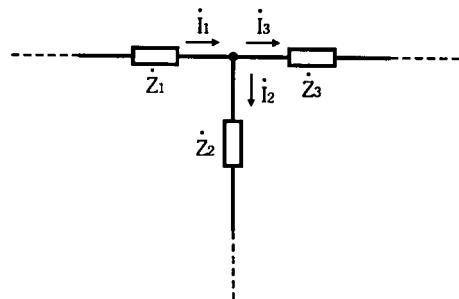
Considere o nó de um circuito genérico e o sentido das correntes a ele relacionadas.

Definindo arbitrariamente as correntes que chegam ao nó como positivas e as que saem do nó como negativas, a *Lei de Kirchhoff para Correntes CA* pode ser enunciada como segue:

"A soma algébrica das correntes complexas em um nó é igual a zero".

Ou

"A soma das correntes complexas que chegam a um nó é igual à soma das correntes complexas que saem desse nó".



$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

## Lei de Kirchhoff para Tensões CA - Lei das Malhas

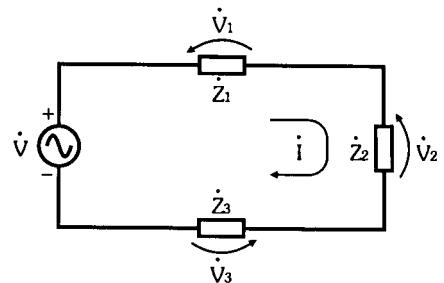
Considere a malha de um circuito genérico composta por vários bipolos e a polaridade das tensões sobre eles.

Definindo arbitrariamente as tensões no sentido horário como positivas e as tensões no sentido anti-horário como negativas, a *Lei de Kirchhoff para Tensões CA* pode ser enunciada como segue:

"A soma algébrica das tensões complexas em uma malha é zero".

Ou

"A soma das tensões complexas com polaridade no sentido horário é igual à soma das tensões complexas com polaridade no sentido anti-horário".



$$\dot{V} - \dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dot{V}_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

## 13.4

## Associação de Impedâncias

Com base nas Leis de Ohm e de Kirchhoff, podemos facilmente chegar às fórmulas gerais para o cálculo da impedância equivalente das associações série e paralela. Porém, gostaríamos de salientar que essas fórmulas valem para qualquer impedância, independente de sua natureza ser resistiva, indutiva ou capacitiva.

Portanto, elas não podem ser confundidas com as fórmulas de indutância e de capacidade equivalentes. Se o leitor tiver dúvidas, consulte os tópicos 10.4 e 11.4.

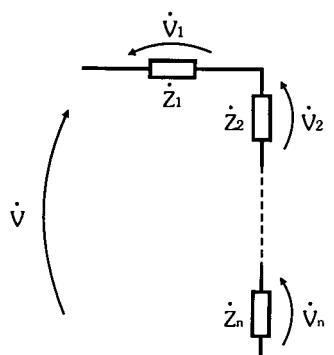
### Associação Série de Impedâncias

Na associação série, a corrente  $\dot{I}$  é a mesma em todas as impedâncias, mas a tensão  $\dot{V}$  se subdivide entre elas, de modo que, pela Lei de Kirchhoff para Tensões CA:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots + \dot{V}_n$$

Assim, a impedância equivalente  $\dot{Z}_{eq}$  vale:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n$$



$$\text{Se } \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dots = \dot{Z}_n = \dot{Z} \Rightarrow \dot{Z}_{eq} = n \cdot \dot{Z}$$

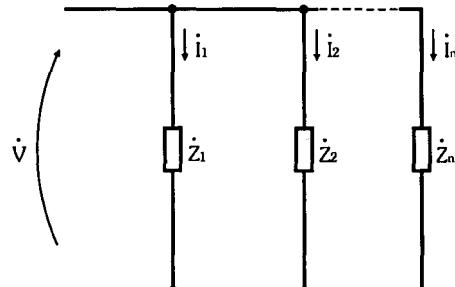
## Associação Paralela de Impedâncias

Na associação paralela, a tensão  $\dot{V}$  é a mesma em todas as impedâncias, mas a corrente  $\dot{I}$  se subdivide entre elas, de modo que, pela Lei de Kirchhoff para Correntes CA:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n$$

Assim, a impedância equivalente  $\dot{Z}_{eq}$  vale:

$$\frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\dot{Z}_n}$$



Se:  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dots = \dot{Z}_n = \dot{Z}$   $\Rightarrow$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}}{n}$$

Se o circuito for formado por duas impedâncias:  $\Rightarrow$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

## 13.5

## Divisores de Tensão e de Correntes Alternadas

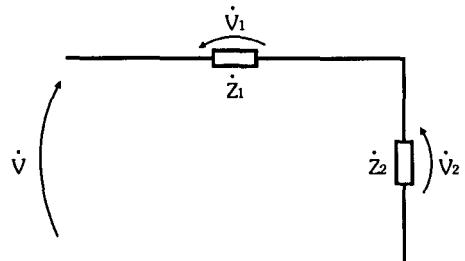
### Divisor de Tensão

Uma associação série de impedâncias tem como característica a subdivisão da tensão total aplicada entre as impedâncias que a constituem.

Para um circuito formado apenas por duas impedâncias  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  em série, são facilmente dedutíveis as fórmulas para o cálculo das respectivas tensões  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$  em função da tensão total  $\dot{V}$ , a saber:

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{V}$$

$$\text{e} \quad \dot{V}_2 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{V}$$



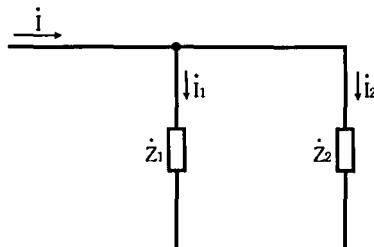
### Divisor de Corrente

Uma associação paralela de impedâncias tem como característica a subdivisão da corrente total aplicada entre as impedâncias que a constituem.

Para um circuito formado apenas por duas impedâncias  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  em paralelo, as fórmulas para o cálculo das respectivas correntes  $\dot{I}_1$  e  $\dot{I}_2$  em função da corrente total  $\dot{I}$  podem também ser facilmente dedutíveis, a saber:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{I}$$

$$\text{e} \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{I}$$

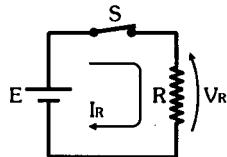


A vantagem de utilizar as fórmulas dos divisores de tensão e de corrente é poder determinar diretamente algumas tensões e correntes em um circuito, sem a necessidade de calcular a sua impedância equivalente.

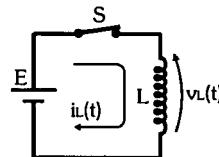
Conforme já vimos em capítulos anteriores, o resistor  $R$ , o indutor  $L$  e o capacitor  $C$  são dispositivos passivos que têm comportamentos distintos em relação à tensão aplicada e à corrente que os atravessa, tanto para corrente contínua como para corrente alternada. Antes do estudo desses dispositivos em CA, faremos um breve resumo de seus comportamentos em CC.

Consideremos que os circuitos abaixo estejam com as chaves  $S$  abertas, estando o indutor desenergizado e o capacitor descarregado. Nesse caso, não há corrente em nenhum dos três circuitos ( $I_R = I_L = I_C = 0$ ) e a tensão inicial nos dispositivos é nula ( $V_R = V_L = V_C = 0$ ).

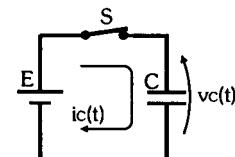
Resistor em CC



Indutor em CC

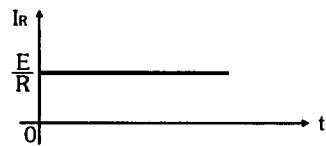


Capacitor em CC

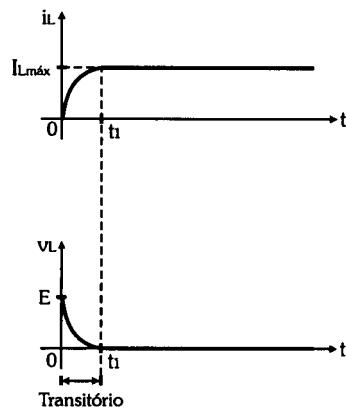


Fechando as chaves  $S$ , observamos que a corrente e a tensão no resistor são contínuas e constantes, isto é,  $I_R = E/R$  e  $V_R = E$ , enquanto no indutor e no capacitor elas variam exponencialmente durante um pequeno transistório, conforme mostram os gráficos abaixo.

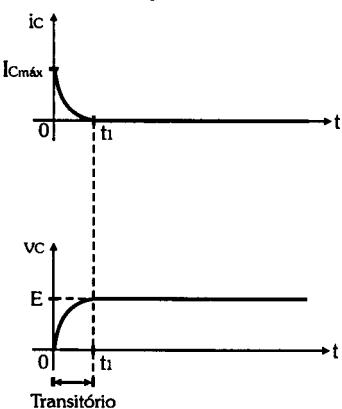
Resistor



Indutor



Capacitor



Analisando estes gráficos, observamos que:

No resistor:

- A tensão e a corrente assumem imediatamente um valor constante e assim permanecem no decorrer do tempo, ou seja, não há transitório.

No indutor:

- No início do transitório a corrente é nula,  $i_L(0) = 0$  (devido à auto-indução) e a tensão é máxima,  $v_L(0) = E$ , como se o indutor fosse um circuito aberto;
- No final do transitório a corrente é máxima,  $i_L(t_f) = I_{L\max}$  (limitada pela resistência do fio do indutor) e a tensão é nula,  $v_L(t_f) = 0$  (ou desprezível), como se o indutor fosse um curto.

No capacitor:

- No início do transitório a corrente é máxima,  $i_C(0) = I_{C\max}$  (devido à possibilidade de armazenamento de cargas) e a tensão é nula,  $v_C(0) = 0$ , como se o capacitor fosse um curto;
- No final do transitório a corrente é nula,  $i_C(t_f) = 0$ , e a tensão é máxima,  $v_C(t_f) = E$  (capacitor carregado), como se o capacitor fosse um circuito aberto.

## 13.7

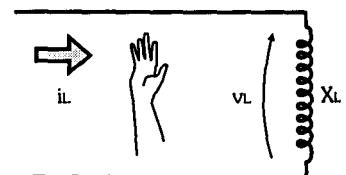
## Reatâncias Indutiva e Capacitiva

A oposição (reação) às variações de corrente no indutor e no capacitor é denominada *reatância X*, cuja unidade de medida é *ohm [ $\Omega$ ]*.

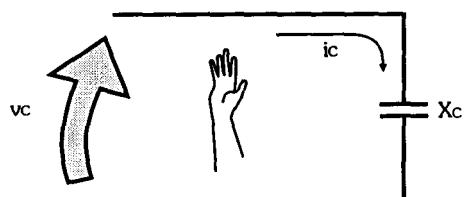
No indutor, a reatância  $X_L$  surge devido à auto-indução, que se opõe às variações da corrente.

Como consequência, a *reatância indutiva atrasa a corrente em relação à tensão*.

Quanto mais brusca for a variação da corrente, maior é a reatância  $X_L$ .



A tensão se propaga instantaneamente, mas a corrente se atrasa!



A corrente se propaga instantaneamente, mas a tensão se atrasa!

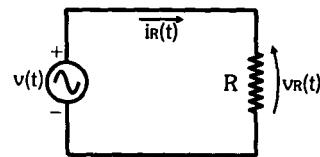
No capacitor, a reatância  $X_C$  surge devido à capacidade de armazenamento de cargas, de modo que a tensão entre as suas placas não atinge o valor máximo instantaneamente.

Como consequência, a *reatância capacitiva atrasa a tensão em relação à corrente*.

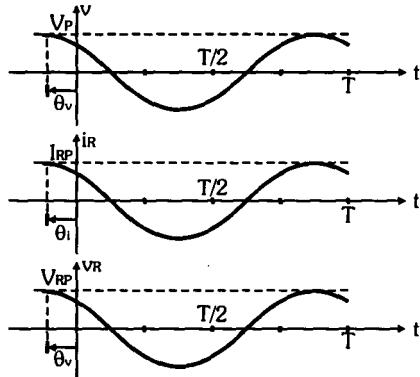
Quanto mais brusca for a variação da corrente, menor é reatância  $X_C$ .

**Obs.:** No tópico 13.9 aprenderemos a calcular as reatâncias  $X_L$  e  $X_C$  em corrente alternada.

O resistor possui um comportamento ôhmico resistivo e não reativo, pois a sua resistência é uma constante  $R$ , em *ohm* [ $\Omega$ ], que independe da velocidade com que a tensão aplicada varia, ou seja, independe da sua freqüência.



### Representação Temporal

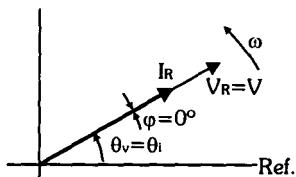


Por causa disso, a tensão e a corrente estão sempre em fase, isto é,  $\theta_v = \theta_i$ .

Graficamente, a corrente  $iR(t)$  que o gerador fornece ao resistor acompanha temporalmente a tensão  $v(t)$  ou  $VR(t)$ , conforme mostram as figuras ao lado.

Portanto, num circuito puramente resistivo, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão do gerador e a corrente que ele fornece é sempre nula, isto é,  $\varphi = \theta_v - \theta_i = 0^\circ$ .

### Representação Fasorial



A representação fasorial da tensão e da corrente no resistor consiste nos dois fasores  $V_R$  e  $I_R$  girando em fase ( $\varphi = 0^\circ$ ) a uma freqüência angular  $\omega$

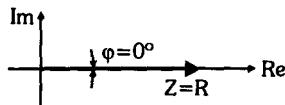
A figura ao lado mostra o comportamento fasorial da tensão e da corrente no resistor.

Aplicando a Lei de Ohm por meio dos valores complexos da tensão  $\dot{V}_R$  e da corrente  $\dot{I}_R$  no resistor, obtemos a sua impedância  $\dot{Z}$ , cuja fase é sempre nula e independente de  $\theta_v$  e de  $\theta_i$ .

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_R}{\dot{I}_R} = \frac{V_R \angle \theta_v}{I_R \angle \theta_i} = \frac{V_R}{I_R} \angle (\theta_v - \theta_i) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{Z} = R \angle 0^\circ = R & \text{(forma polar)} \\ \dot{Z} = R + j0 = R & \text{(forma retangular)} \end{cases}$$

### Representação Complexa



Isso significa que, no plano dos números complexos, a resistência é puramente real, isto é, não possui parte imaginária.

Portanto, o resistor é uma impedância resistiva pura.

O indutor e o capacitor são dispositivos reativos duais, isto é, têm comportamentos opostos em relação à variação da tensão e da corrente.

Para que o leitor possa fixar melhor a forma como eles se comportam em corrente alternada, os dois dispositivos serão analisados simultaneamente no decorrer deste tópico.

Porém, antes de iniciarmos essa análise, faremos uma demonstração matemática apenas do comportamento do capacitor em CA, já que para o indutor o procedimento é análogo.

### Dedução Matemática do Comportamento do Capacitor em CA

No tópico 10.2, vimos que a corrente e a tensão no capacitor relacionam-se conforme a expressão:  $i_c = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$

Consideremos que o capacitor esteja submetido a uma tensão CA cossenoide com fase inicial nula, isto é:

$$v_c(t) = V_{CP} \cos \omega t \quad \text{ou} \quad \dot{V}_C = V_C \angle 0^\circ \quad \text{em que } V_C \text{ é a tensão eficaz.}$$

A expressão  $i_c(t)$  da corrente no capacitor pode ser deduzida da forma seguinte:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(V_{CP} \cos \omega t) = C \cdot V_{CP} \cdot \frac{d}{d\omega t}(\cos \omega t) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t) \Rightarrow i_c(t) = -\omega \cdot C \cdot V_{CP} \cdot \sin \omega t$$

Mas, da trigonometria, sabemos que:  $-\sin \theta = \sin(-\theta) = \cos(\theta + 90^\circ)$ .

Assim:  $i_c(t) = \omega \cdot C \cdot V_{CP} \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$  ou  $\dot{I}_C = I_C \angle 90^\circ$  em que  $I_C = \omega \cdot C \cdot V_{CP}$  é a corrente eficaz. Portanto, no capacitor a corrente está  $90^\circ$  adiantada em relação à tensão ou a tensão está  $90^\circ$  atrasada em relação à corrente, correspondendo a uma defasagem negativa, isto é,  $\varphi = -90^\circ$ .

Conforme já vimos no tópico 13.1, a defasagem  $\varphi$  é a fase da impedância de um dispositivo reativo.

De fato, aplicando a Lei de Ohm ao capacitor, obtemos:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C} = \frac{V_C \angle 0^\circ}{I_C \angle 90^\circ} = \frac{V_C}{\omega \cdot C \cdot V_{CP}} \angle (0^\circ - 90^\circ) \Rightarrow \dot{Z} = \frac{1}{\omega \cdot C} \angle -90^\circ \quad \text{ou} \quad \dot{Z} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Na fórmula da impedância do capacitor, o seu módulo corresponde à reatância capacitiva, isto é:  $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$

### Comportamento do Indutor em CA

Aplicando o mesmo raciocínio matemático ao indutor, podemos chegar facilmente às conclusões seguintes:

No indutor a corrente está  $90^\circ$  atrasada em relação à tensão ou a tensão está  $90^\circ$  adiantada em relação à corrente, correspondendo a uma defasagem positiva, isto é,  $\varphi = +90^\circ$ .

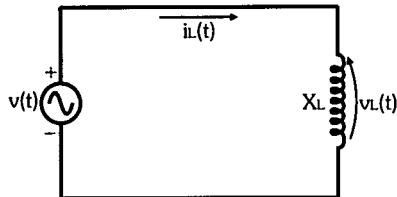
A impedância do indutor é dada por  $\dot{Z} = \omega \cdot L \angle +90^\circ$  ou  $\dot{Z} = j\omega \cdot L$  e, por conseguinte, a sua reatância vale  $X_L = \omega \cdot L$ .

Passemos, então, a uma análise detalhada do comportamento do indutor e do capacitor em CA.

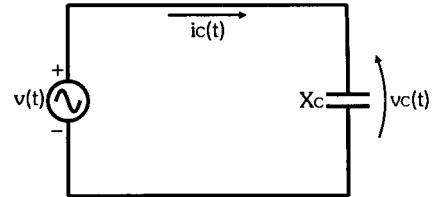
## Reatâncias Indutiva e Capacitiva

O indutor  $L$ , em *henry [H]*, e o capacitor  $C$ , em *farad [F]*, possuem comportamentos reativos, sendo que as suas reatâncias  $X_L$  e  $X_C$ , em *ohm [ $\Omega$ ]*, dependem da velocidade com que a tensão aplicada varia, ou seja, dependem da freqüência.

Indutor em CA



Capacitor em CA



No indutor, a reatância  $X_L$  é diretamente proporcional à freqüência e à indutância:

$$X_L = \omega \cdot L$$

ou

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$$

em que:

$X_L$  = reatância indutiva, em  $[\Omega]$

$L$  = indutância, em  $[H]$

$\omega$  = freqüência angular, em  $[rad/s]$

$f$  = freqüência, em  $[Hz]$

No capacitor, a reatância  $X_C$  é inversamente proporcional à freqüência e à capacitância:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

ou

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$$

em que:

$X_C$  = reatância capacitativa, em  $[\Omega]$

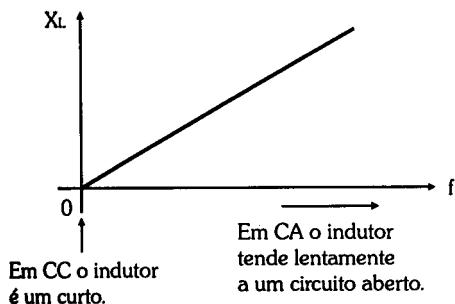
$C$  = capacitância, em  $[F]$

$\omega$  = freqüência angular, em  $[rad/s]$

$f$  = freqüência, em  $[Hz]$

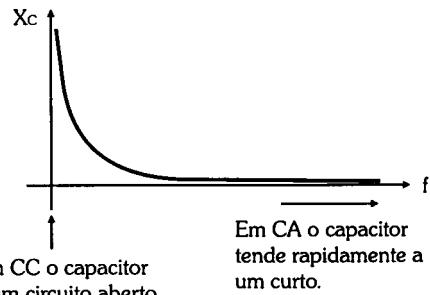
Os gráficos abaixo mostram como variam as reatâncias indutiva  $X_L$  e capacitativa  $X_C$  em função da freqüência  $f$ .

Reatância Indutiva



Em CC o indutor  
é um curto.

Reatância Capacitativa



Em CC o capacitor  
é um curto.

## Tensão, Corrente e Defasagem no Indutor e no Capacitor

Como vimos no tópico 13.6, o indutor e o capacitor provocam um pequeno transitório a partir do instante em que são alimentados por uma fonte CC, até atingirem um estado estável (o indutor passa a ser um curto e o capacitor um circuito aberto).

Agora, porém, eles serão alimentados por um gerador CA, cuja tensão varia continuamente de intensidade e inverte a polaridade a cada meio ciclo. Neste caso, o transitório também ocorre, de modo que o indutor atrasa a corrente e o capacitor atrasa a tensão.

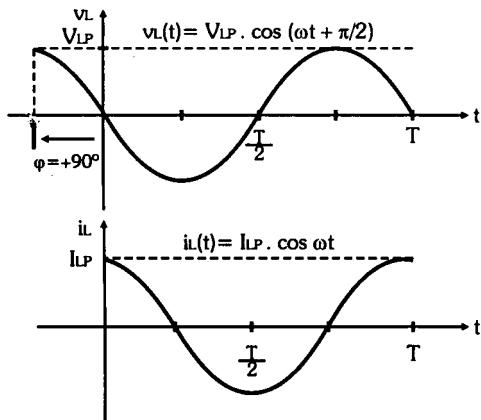
Mas, passado o transitório, que é rápido, dizemos que o indutor e o capacitor entram em *regime permanente senoidal*, ou seja, a tensão e a corrente passam a acompanhar as variações do gerador, mantendo, porém, os respectivos atrasos.

Aplicando uma tensão cossenoidal no indutor e no capacitor, ocorre uma defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente que pode ser de  $\pm 90^\circ$  (ou  $\pm \pi/2$  rad), dependendo da natureza da reatância.

Por facilidade, consideraremos que o indutor e o capacitor sejam ideais e as correntes  $i_L(t)$  e  $i_C(t)$  possuam fases iniciais nulas ( $\theta_i = 0^\circ$ ).

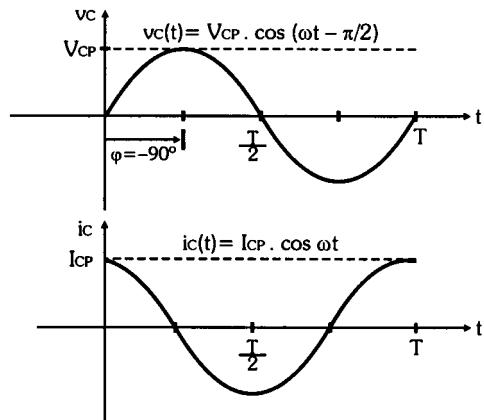
No indutor ideal a tensão adianta  $90^\circ$  em relação à corrente, ou seja,  $\varphi = +90^\circ$ .

Representação Temporal



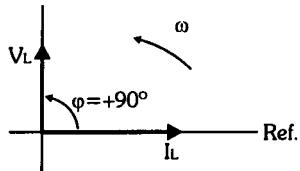
No capacitor ideal a tensão atrasa  $90^\circ$  em relação à corrente, ou seja,  $\varphi = -90^\circ$ .

Representação Temporal

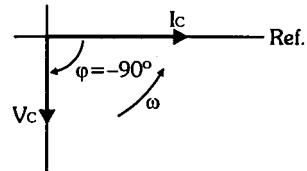


A representação fasorial da tensão e da corrente no indutor e no capacitor ideais consiste nos fasores de tensão e corrente em quadratura, girando com freqüência angular  $\omega$ .

Representação Fasorial



Representação Fasorial



## Impedâncias Reativas Puras

Aplicando a Lei de Ohm por meio da tensão e da corrente complexas no indutor e no capacitor, obtemos as respectivas impedâncias complexas, cujas fases  $\varphi$  são constantes, já que independem de  $\theta_v$  e de  $\theta_i$ , pois  $\varphi = \theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$  (em função da natureza da impedância).

No indutor, obtemos  $\dot{Z}$  por  $\dot{V}_L$  e  $\dot{I}_L$ :

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L} = \frac{V_L \angle \theta_v}{I_L \angle \theta_i} = \frac{V_L}{I_L} \angle(\theta_v - \theta_i) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{Z} = X_L \angle +90^\circ & (\text{forma polar}) \\ \dot{Z} = jX_L & (\text{forma retangular}) \end{cases}$$

No capacitor, obtemos  $\dot{Z}$  por  $\dot{V}_C$  e  $\dot{I}_C$ :

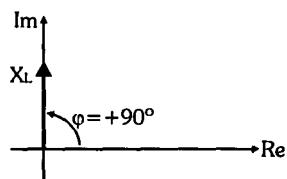
$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C} = \frac{V_C \angle \theta_v}{I_C \angle \theta_i} = \frac{V_C}{I_C} \angle(\theta_v - \theta_i) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{Z} = X_C \angle -90^\circ & (\text{forma polar}) \\ \dot{Z} = -jX_C & (\text{forma retangular}) \end{cases}$$

Isso significa que, no plano dos números complexos, a reatância é uma grandeza puramente imaginária, isto é, não possui parte real. Portanto, o indutor e o capacitor são impedâncias reativas puras.

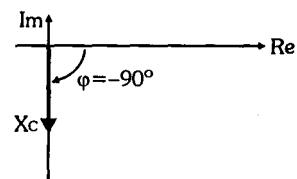
No indutor, a parte imaginária é sempre positiva.

Representação Complexa



No capacitor, a parte imaginária é sempre negativa.

Representação Complexa



Note mais uma vez que a fase das reatâncias indutiva e capacitiva corresponde à defasagem  $\varphi$  que elas provocam entre a tensão e a corrente fornecidas pelo gerador, conforme mostram as representações temporal e fasorial da página anterior.

Um outro fator importante que podemos destacar aqui é o modo diferente como se comportam o indutor e o capacitor em um circuito: enquanto o indutor adianta a tensão, o capacitor a atrasa; as suas reatâncias possuem fases contrárias; a reatância indutiva aumenta com a frequência, enquanto a reatância capacitiva diminui.

Por esses motivos, dizemos que o indutor e o capacitor têm comportamentos *duais*. Essa dualidade é responsável pela enorme quantidade de aplicações do indutor e do capacitor.

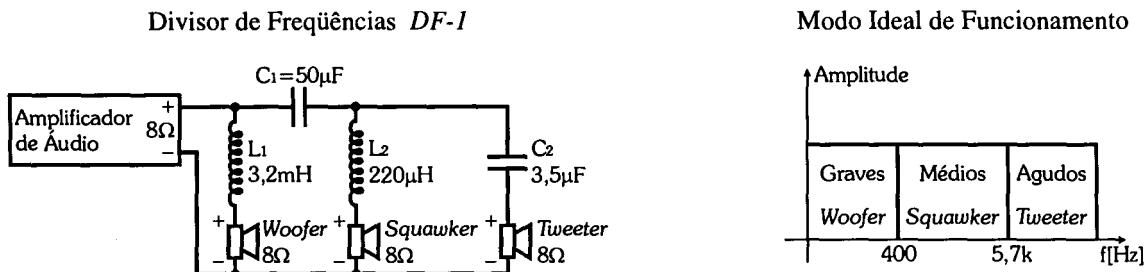
### IMPORTANTE!

No Capítulo 16, nós analisaremos os modelos quase ideal e quase real do indutor e do capacitor, bem como as pequenas variações de seus comportamentos em relação aos dispositivos ideais.

Esta primeira análise do divisor de freqüências *DF-1* está limitada ao cálculo das suas reatâncias em algumas freqüências.

Como sabemos, os amplificadores operam com milhares de freqüências diferentes e simultâneas, mas dentro da faixa de áudio (20Hz a 20kHz, aproximadamente).

Sendo assim, veremos que o levantamento dos valores das reatâncias em determinadas freqüências dar-nos-á os primeiros indícios de como o *DF-1* irá se comportar quando ligado à saída de um amplificador de áudio.



As freqüências escolhidas para esta análise foram as freqüências críticas inferior e superior, isto é,  $f_i = 400Hz$  e  $f_s = 5,7kHz$ , e seus múltiplos e submúltiplos de 2, 5 e 10.

A tabela abaixo mostra o resultado do cálculo das reatâncias nas freqüências consideradas:

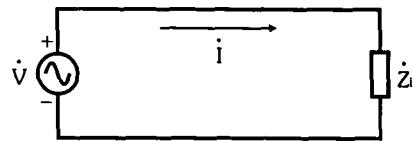
Região da Freqüência Inferior - $f_i = 400Hz$					Região da Freqüência Superior - $f_s = 5,7kHz$				
$f$ [Hz]	$X_{L1}[\Omega]$	$X_{C1}[\Omega]$	$X_{L2}[\Omega]$	$X_{C2}[\Omega]$	$f$ [Hz]	$X_{L1}[\Omega]$	$X_{C1}[\Omega]$	$X_{L2}[\Omega]$	$X_{C2}[\Omega]$
40	0,8	80	0,06	1137	570	11,5	5,6	0,8	80
80	1,6	40	0,11	568	1140	23	2,8	1,6	40
200	4	16	0,28	227	2850	57	1,1	4	16
400	8	8	0,55	114	5700	115	0,56	8	8
800	16	4	1,11	57	11400	229	0,28	16	4
2000	40	1,6	2,8	23	28500	573	0,11	39	1,6
4000	80	0,8	5,5	11	57000	1146	0,06	79	0,8

**Obs.:** No próximo capítulo, nós analisaremos esses resultados por meio do cálculo da impedância equivalente de todo o circuito. No entanto, o Exercício Proposto 13.19 solicitará ao leitor uma primeira análise baseada apenas nos resultados das reatâncias.

## Exercícios Propostos

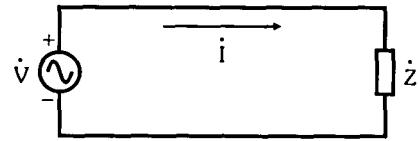
### Lei de Ohm para Circuito CA

- 13.1)** Considere o circuito ao lado, em que o gerador  $\dot{V}$  alimenta uma impedância  $\dot{Z}_i$  com uma corrente  $\dot{i}$ . Determine a defasagem  $\varphi_i$  entre a tensão e a corrente provocada por cada impedância abaixo:



- a)  $\dot{Z}_1 = 50\angle 45^\circ [\Omega]$
- b)  $\dot{Z}_2 = 100\angle -60^\circ [\Omega]$
- c)  $\dot{Z}_4 = 50 + j80 [\Omega]$
- d)  $\dot{Z}_4 = 100 - j30 [\Omega]$
- e)  $\dot{Z}_5 = 20 + j100 [\Omega]$
- f)  $\dot{Z}_6 = 80 [\Omega]$
- g)  $\dot{Z}_7 = j30 [\Omega]$
- h)  $\dot{Z}_8 = -j40 [\Omega]$

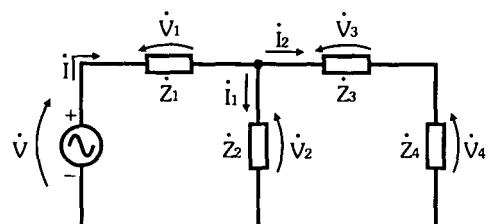
- 13.2)** Considere o circuito ao lado e as três situações abaixo em que são conhecidas duas das três variáveis envolvidas. Para cada situação, determine pela Lei de Ohm a variável desconhecida.



- a)  $\dot{V} = 100\angle 50^\circ [V]$ ;  $\dot{i} = 4\angle 80^\circ [A]$ ;  $\dot{Z} = ?$
- b)  $\dot{V} = 300\angle -60^\circ [V]$ ;  $\dot{Z} = 30 + j40 [\Omega]$ ;  $\dot{i} = ?$
- c)  $\dot{i} = 100\angle 15^\circ [mA]$ ;  $\dot{Z} = 20 - j20 [\Omega]$ ;  $\dot{V} = ?$

- 13.3)** Considere o circuito ao lado e determine:

- a)  $\dot{i}$  e  $\dot{i}_2$  pela Lei de Ohm;
- b)  $\dot{i}_1$  pela Lei dos Nós;
- c)  $\dot{V}_2$  e  $\dot{V}_3$  pela Lei de Ohm;
- d)  $\dot{V}$  pela Lei das Malhas.

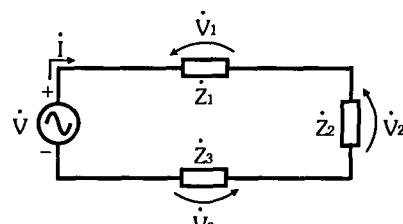


$$\begin{array}{ll} \dot{Z}_1 = 20\angle 45^\circ [\Omega] & \dot{Z}_2 = 10\angle -45^\circ [\Omega] \\ \dot{Z}_3 = 20\angle 60^\circ [\Omega] & \dot{Z}_4 = 10\angle -30^\circ [\Omega] \\ \dot{V}_1 = 90\angle 79^\circ [V] & \dot{V}_4 = 17\angle -53^\circ [V] \end{array}$$

### Associação de Impedâncias

- 13.4)** Considere o circuito ao lado e determine:

- a)  $\dot{Z}_{eq}$ ;
- b)  $\dot{i}$ ;
- c)  $\dot{V}_1, \dot{V}_2$  e  $\dot{V}_3$ .



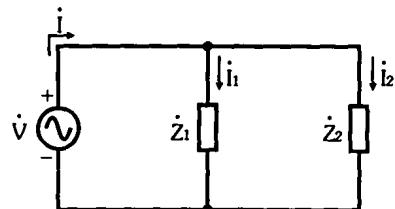
$$\begin{array}{ll} \dot{V} = 20\angle 60^\circ [V] & \dot{Z}_1 = 2\angle 30^\circ [k\Omega] \\ \dot{Z}_2 = 4\angle -20^\circ [k\Omega] & \dot{Z}_3 = 3\angle 70^\circ [k\Omega] \end{array}$$

**13.5)** Considere o circuito ao lado e determine:

a)  $\dot{Z}_{eq}$ ;

b)  $\dot{I}$ ;

c)  $\dot{i}_1$  e  $\dot{i}_2$ .



$$\dot{V} = 110\angle 0^\circ [V] \quad \dot{Z}_1 = 200\angle 60^\circ [\Omega]$$

$$\dot{Z}_2 = 400\angle -30^\circ [\Omega]$$

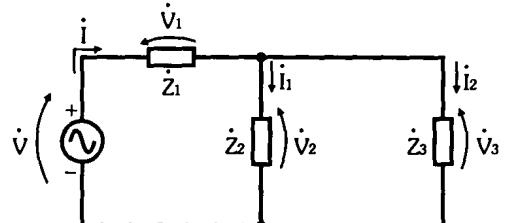
**13.6)** Considere o circuito ao lado e determine:

a)  $\dot{Z}_{eq}$ ;

b)  $\dot{I}$  e  $\dot{V}_1$ ;

c)  $\dot{V}_2$  e  $\dot{V}_3$ ;

d)  $\dot{i}_1$  e  $\dot{i}_2$ .



$$\dot{V} = 40\angle 45^\circ [V] \quad \dot{Z}_2 = 220 - j285 [\Omega]$$

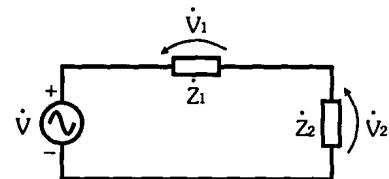
$$\dot{Z}_1 = 22 + j63 [\Omega] \quad \dot{Z}_3 = 150 + j560 [\Omega]$$

### Divisores de Tensão e de Corrente Alternadas

**13.7)** Considere o circuito ao lado.

a) Determine  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$ , usando as fórmulas do divisor de tensão;

b) Confirme os resultados obtidos anteriormente aplicando a Lei de Kirchhoff para Tensões CA.



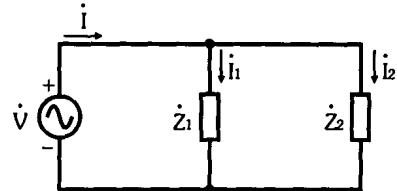
$$\dot{V} = 50\angle 60^\circ [V] \quad \dot{Z}_1 = 100\angle -30^\circ [\Omega]$$

$$\dot{Z}_2 = 80\angle 20^\circ [\Omega]$$

**13.8)** Considere o circuito ao lado.

a) Determine  $\dot{i}_1$  e  $\dot{i}_2$ , usando as fórmulas do divisor de corrente;

b) Confirme os resultados obtidos anteriormente aplicando a Lei de Kirchhoff para Correntes CA.



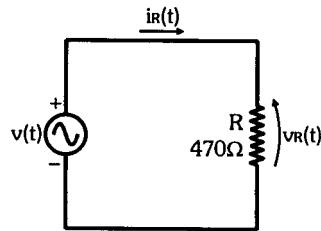
$$\dot{I} = 20\angle 0^\circ [mA] \quad \dot{Z}_1 = 1\angle 45^\circ [k\Omega]$$

$$\dot{Z}_2 = 2\angle -60^\circ [k\Omega]$$

### Resistor em Corrente Alternada

13.9) Considere o circuito ao lado.

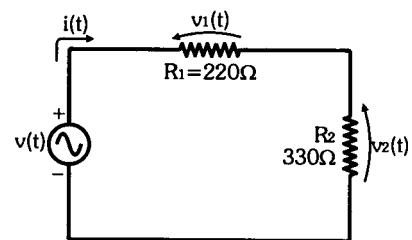
- Determine as freqüências  $\omega$  e  $f$ , a fase inicial  $\theta_v$  e o período  $T$  da tensão do gerador;
- Determine as tensões de pico, pico a pico e eficaz no resistor;
- Determine as correntes de pico, pico a pico e eficaz no resistor e a sua expressão temporal;
- Determine  $\dot{V}$ ,  $\dot{V}_R$  e  $\dot{I}_R$  na forma polar e esboce o diagrama fasorial do circuito por meio dessas grandezas;
- Esboce as formas de onda de  $v(t)$ ,  $v_R(t)$  e  $i_R(t)$ ;
- Se a fase inicial da tensão do gerador fosse  $\theta = 60^\circ$ , isto é,  $v(t) = 40 \cdot \sin(1000\pi t + \pi/3) [V]$ , haveria alteração nos valores encontrados nos itens b e c deste exercício?



$$v(t) = 40 \cdot \cos 1000\pi t [V]$$

13.10) Considere o circuito ao lado.

- Determine as freqüências  $\omega$  e  $f$ , a fase inicial  $\theta_v$  e o período  $T$  da tensão do gerador;
- Determine a impedância  $Z_{eq} = R_{eq}$ , a tensão  $\dot{V}$  do gerador e a corrente  $\dot{I}$  que ele fornece ao circuito;
- Determine as tensões  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$  nos resistores;
- Esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões envolvidas no circuito;
- Esboce as formas de onda de  $v(t)$ ,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  e  $i(t)$ .



$$v(t) = 156 \cdot \cos(377t - \pi/4) [V]$$

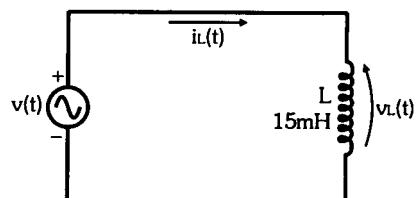
13.11) Um gerador de áudio com resistência interna de  $600\Omega$  foi ajustado para fornecer, em vazio, uma tensão de  $20V_{PP}$  na freqüência de  $40kHz$ . Em seguida, ele foi conectado a dois resistores,  $R_1 = 12k\Omega$  e  $R_2 = 6k8\Omega$ , ligados em paralelo. Considerando a tensão do gerador com fase inicial de  $90^\circ$ , determine:

- as tensões  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$ , respectivamente, nos resistores  $R_1$  e  $R_2$ ;
- as correntes  $\dot{I}_1$  e  $\dot{I}_2$ , respectivamente, nos resistores  $R_1$  e  $R_2$ ;
- a corrente  $\dot{I}$  que o gerador fornece ao circuito.

### Indutor e Capacitor em Corrente Alternada

13.12) Considere o circuito ao lado.

- Determine as freqüências  $\omega$  e  $f$ , a fase inicial  $\theta_v$  e o período  $T$  da tensão do gerador;
- Determine a reatância  $X_L$  e as tensões de pico, pico a pico e eficaz no indutor;
- Determine as correntes de pico, pico a pico e eficaz no indutor e a sua expressão temporal;
- Determine  $\dot{V}$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{I}_L$  na forma polar e esboce o diagrama fasorial do circuito por meio dessas grandezas;
- Esboce as formas de onda de  $v(t)$ ,  $v_L(t)$  e  $i_L(t)$ .



$$v(t) = 50 \cdot \cos 31,4kt [V]$$

- b) Determine a reatância  $X_C$  e as tensões de pico, pico a pico e eficaz no capacitor;

- c) Determine as correntes de pico, pico a pico e eficaz no capacitor e a sua expressão temporal;

- d) Determine  $\dot{V}$ ,  $\dot{V}_C$  e  $\dot{I}_C$  na forma polar e esboce o diagrama fasorial do circuito por meio dessas grandezas;

- e) Esboce as formas de onda de  $v(t)$ ,  $v_C(t)$  e  $i_C(t)$ .

- 13.14)** Considere o circuito ao lado, no qual a indutância mútua é desprezível.

- a) Determine a impedância equivalente  $\dot{Z}_{eq}$ ;

- b) Determine a corrente  $\dot{I}$  e as tensões  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$  nos indutores;

- c) Esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões envolvidas no circuito.



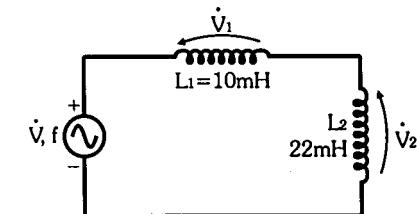
$$v(t) = 180 \cos(377t + \pi/3) [V]$$

- 13.15)** Considere o circuito ao lado.

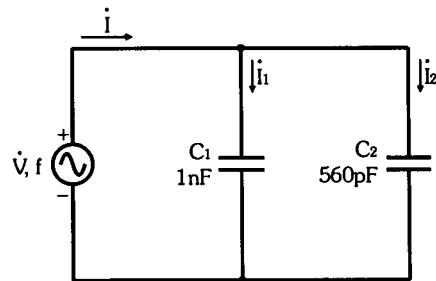
- a) Determine a impedância equivalente  $\dot{Z}_{eq}$ ;

- b) Determine as correntes  $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_1$  e  $\dot{I}_2$ ;

- c) Esboce o diagrama fasorial com a tensão e as correntes envolvidas no circuito.



$$\dot{V} = 200 \angle 30^\circ [V] \text{ e } f = 50 \text{ kHz}$$



$$\dot{V} = 20 \angle 180^\circ [V] \text{ e } f = 1 \text{ MHz}$$

- 13.16)** Dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  são ligados em paralelo e alimentados por um gerador ideal operando em  $25\text{kHz}$ . A tensão nos indutores é  $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 18 \angle 60^\circ [V]$  e a corrente total fornecida pelo gerador é  $\dot{I} = 25 \angle -30^\circ [\text{mA}]$ . Determine  $L_1$  e  $L_2$ , sabendo que  $L_1 = 2L_2$  e a indutância mútua é desprezível.

- 13.17)** Determine a impedância equivalente  $\dot{Z}_{eq}$  de dois capacitores  $C_1 = 10\mu\text{F}$  e  $C_2 = 4,7\mu\text{F}$ , ligados em série e submetidos a uma corrente alternada de  $18\text{kHz}$ .

- 13.18)** Qual deve ser a indutância de um choque usado para limitar em  $10\text{mA}$  uma corrente de  $12\text{MHz}$ , quando ele estiver submetido a uma tensão de  $20\text{V}$ ?

### Análise das Reatâncias do DF-1

- 13.19)** Analise, conforme o seu ponto de vista, os resultados das reatâncias do DF-1 obtidos no tópico 13.10 deste capítulo.

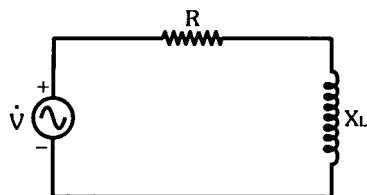
**14.1**

**Circuitos  $RL$  e  $RC$  em Série**

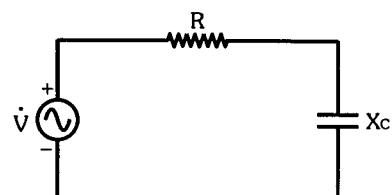
Os circuitos  $RL$  e  $RC$  em série funcionam como divisores de tensão reativos que defasam a tensão do gerador em relação à corrente de um ângulo  $\varphi$ .

**Análise das Impedâncias**

**Círcuito  $RL$  Série**



**Círculo de impedância para o circuito  $RC$  em série.**

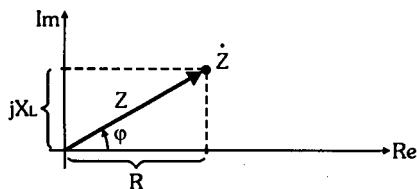


A impedância  $\dot{Z}$  dos circuitos  $RL$  e  $RC$  em série vale:

No circuito  $RL$  série:

$$\dot{Z} = R + jX_L \quad \text{ou} \quad \dot{Z} = Z\angle\varphi^+$$

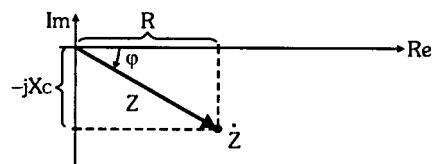
Representação Complexa



No circuito  $RC$  série:

$$\dot{Z} = R - jX_C \quad \text{ou} \quad \dot{Z} = Z\angle\varphi^-$$

Representação Complexa



Dos diagramas complexos acima, concluímos que:

No circuito  $RL$  série:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{Z}$$

$$\varphi^+ = \arctg \frac{X_L}{R} \Rightarrow \text{fase de } \dot{Z}$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi^+ \quad \text{e} \quad X_L = Z \cdot \sin \varphi^+$$

No circuito  $RC$  série:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{Z}$$

$$\varphi^- = -\arctg \frac{X_C}{R} \Rightarrow \text{fase de } \dot{Z}$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi^- \quad \text{e} \quad X_C = -Z \cdot \sin \varphi^-$$

Como já era esperado, a fase  $\varphi$  da impedância indutiva é positiva entre  $0^\circ$  e  $+90^\circ$ , enquanto na impedância capacitiva ela é negativa entre  $0^\circ$  e  $-90^\circ$ . Naturalmente, essa fase corresponde à defasagem entre a tensão  $V$  do gerador e a corrente  $I$  que ele fornece ao circuito.

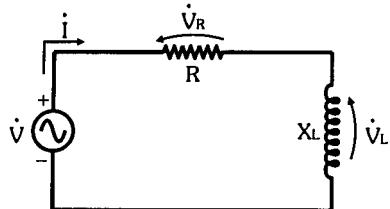
## Análise das Tensões, Correntes e Defasagens

### Análise Fasorial

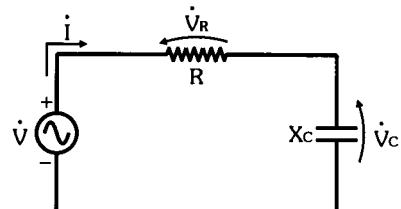
A representação fasorial é um método gráfico de aplicação da Lei de Kirchhoff para Tensões Alternadas nos circuitos em série, isto é, "a soma fasorial das tensões nos dispositivos é igual à tensão fasorial do gerador".

Nos circuitos em série, como só há uma corrente, ela pode ser usada como referência para analisarmos as tensões.

Círculo *RL* Série



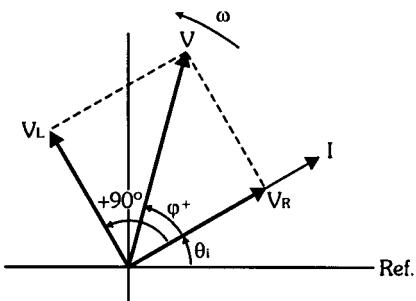
Círculo *RC* Série



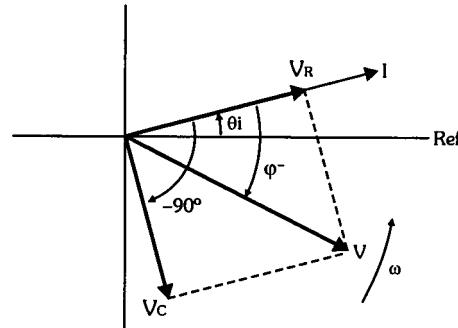
Para que a nossa análise seja a mais geral possível, consideraremos que a corrente tenha uma fase inicial  $\theta_i > 0^\circ$ , isto é,  $\dot{i} = I\angle\theta_i$ .

Nos dois circuitos, a tensão  $V_R$  está em fase com a corrente  $I$ . Porém, no circuito *RL*, a tensão  $V_L$  está adiantada de  $90^\circ$ , enquanto no circuito *RC*, a tensão  $V_C$  está atrasada de  $90^\circ$  em relação à corrente  $I$ .

No circuito *RL* série:



No circuito *RC* série:



A defasagem  $\phi$  entre a tensão  $\dot{V}$  do gerador e a corrente  $\dot{i}$  que ele fornece ao circuito é a mesma que a fase  $\phi$  da impedância  $Z$ , independente da fase inicial  $\theta_i$  adotada para a corrente.

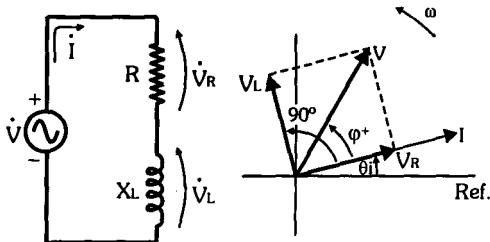
Além disso, as tensões  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_L$  no circuito indutivo e  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_C$  no circuito capacitivo estão sempre em quadratura, possibilitando relacionar matematicamente os seus módulos com o módulo da tensão  $\dot{V}$  do gerador por meio do Teorema de Pitágoras.

## Análise por Números Complexos

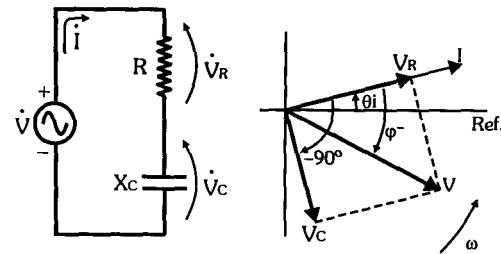
Podemos equacionar os circuitos, aplicando a Lei de Kirchhoff para Tensões Alternadas, isto é, usando valores complexos em conformidade com as suas representações fasoriais.

Em nossa análise, a representação complexa tem como referência a corrente com fase inicial  $\theta_i$ .

No circuito  $RL$  série:  $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$



No circuito  $RC$  série:  $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$



As expressões e fórmulas abaixo são genéricas, isto é, aplicam-se a qualquer circuito  $RL$  ou  $RC$  em série. Por isso, todas as variáveis são positivas. No caso de um valor numérico negativo, como ocorre com  $\varphi^-$  no circuito  $RC$ , o sinal (-) é incorporado automaticamente aos cálculos.

No circuito  $RL$  série:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$$

$$\dot{V}_R = R\angle 0^\circ \cdot I\angle \theta_i = R \cdot I\angle \theta_i$$

$$\dot{V}_L = X_L\angle 90^\circ \cdot I\angle \theta_i = X_L \cdot I\angle(\theta_i + 90^\circ)$$

$$\dot{V} = Z\angle \varphi^+ \cdot I\angle \theta_i = Z \cdot I\angle(\theta_i + \varphi^+)$$

em que:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{V}$$

$$\varphi^+ = \arctg \frac{V_L}{V_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } \dot{V} \text{ e } I$$

$$\text{Sendo: } V_R = V \cdot \cos \varphi^+ \quad \text{e} \quad V_L = V \cdot \sin \varphi^+$$

No circuito  $RC$  série:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_R = R\angle 0^\circ \cdot I\angle \theta_i = R \cdot I\angle \theta_i$$

$$\dot{V}_C = X_C\angle -90^\circ \cdot I\angle \theta_i = X_C \cdot I\angle(\theta_i - 90^\circ)$$

$$\dot{V} = Z\angle \varphi^- \cdot I\angle \theta_i = Z \cdot I\angle(\theta_i + \varphi^-)$$

em que:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{V}$$

$$\varphi^- = -\arctg \frac{V_C}{V_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } \dot{V} \text{ e } I$$

$$\text{Sendo: } V_R = V \cdot \cos \varphi^- \quad \text{e} \quad V_C = -V \cdot \sin \varphi^-$$

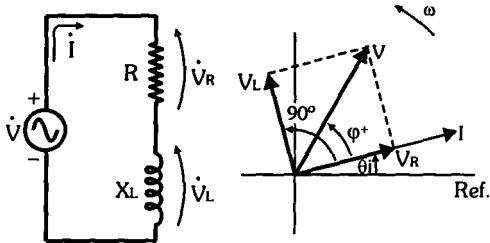
Na prática, caso a fase inicial da tensão ou da corrente do gerador não seja conhecida, a análise dos circuitos reativos em série pode ser realizada com mais facilidade se adotarmos fase inicial nula para a corrente, isto é,  $I = I\angle 0^\circ$ . Neste caso:  $\dot{V} = V_R + jV_L$  ou  $\dot{V} = V_R + jV_C$ .

## Análise por Números Complexos

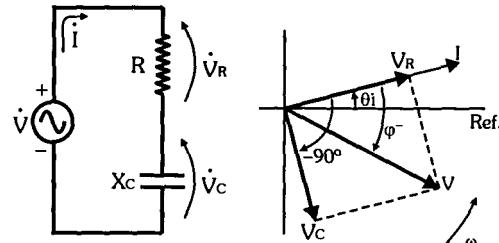
Podemos equacionar os circuitos, aplicando a Lei de Kirchhoff para Tensões Alternadas, isto é, usando valores complexos em conformidade com as suas representações fasoriais.

Em nossa análise, a representação complexa tem como referência a corrente com fase inicial  $\theta_i$ .

No circuito  $RL$  série:  $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$



No circuito  $RC$  série:  $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$



As expressões e fórmulas abaixo são genéricas, isto é, aplicam-se a qualquer circuito  $RL$  ou  $RC$  em série. Por isso, todas as variáveis são positivas. No caso de um valor numérico negativo, como ocorre com  $\phi^-$  no circuito  $RC$ , o sinal (-) é incorporado automaticamente aos cálculos.

No circuito  $RL$  série:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$$

$$\dot{V}_R = R\angle 0^\circ I\angle\theta_i = R.I\angle\theta_i$$

$$\dot{V}_L = X_L\angle 90^\circ I\angle\theta_i = X_L.I\angle(\theta_i + 90^\circ)$$

$$\dot{V} = Z\angle\phi^+ I\angle\theta_i = Z.I\angle(\theta_i + \phi^+)$$

em que:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{V}$$

$$\phi^+ = \arctg \frac{V_L}{V_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } \dot{V} \text{ e } i$$

$$\text{Sendo: } V_R = V \cdot \cos \phi^+ \quad \text{e} \quad V_L = V \cdot \sin \phi^+$$

No circuito  $RC$  série:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_R = R\angle 0^\circ I\angle\theta_i = R.I\angle\theta_i$$

$$\dot{V}_C = X_C\angle -90^\circ I\angle\theta_i = X_C.I\angle(\theta_i - 90^\circ)$$

$$\dot{V} = Z\angle\phi^- I\angle\theta_i = Z.I\angle(\theta_i + \phi^-)$$

em que:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{V}$$

$$\phi^- = -\arctg \frac{V_C}{V_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } \dot{V} \text{ e } i$$

$$\text{Sendo: } V_R = V \cdot \cos \phi^- \quad \text{e} \quad V_C = -V \cdot \sin \phi^-$$

Na prática, caso a fase inicial da tensão ou da corrente do gerador não seja conhecida, a análise dos circuitos reativos em série pode ser realizada com mais facilidade se adotarmos fase inicial nula para a corrente, isto é,  $i = I\angle 0^\circ$ . Neste caso:  $\dot{V} = V_R + jV_L$  ou  $\dot{V} = V_R + jV_L$ .

## Análise Temporal

A corrente e as tensões dos circuitos  $RL$  e  $RC$  em série podem ser expressas, também, no domínio temporal com as suas respectivas representações gráficas. Consideremos a corrente  $i(t)$  com fase inicial  $\theta_i > 0^\circ$ .

No circuito  $RL$  série, a corrente vale:

$$i(t) = I_P \cos(\omega t + \theta_i)$$

A tensão no resistor está em fase com  $i(t)$ , enquanto no indutor ela está adiantada de  $90^\circ$ . Portanto:

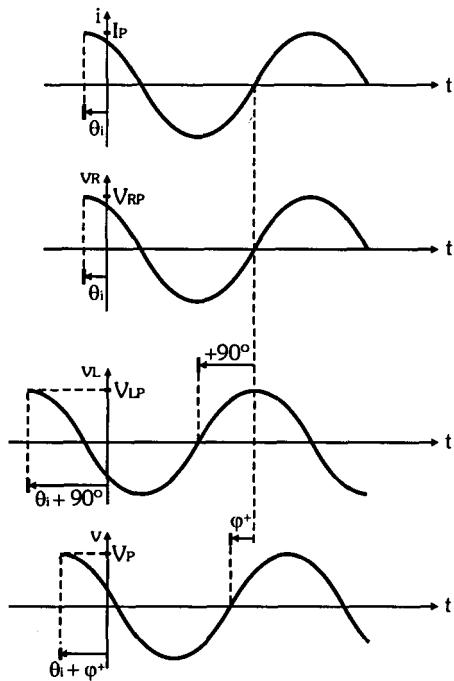
$$v_R(t) = V_{RP} \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v_L(t) = V_{LP} \cos(\omega t + \theta_i + \pi/2)$$

Por fim, a tensão do gerador está adiantada de  $\varphi^+$  em relação à  $i(t)$ :

$$v(t) = V_P \cos(\omega t + \theta_i + \varphi^+)$$

No circuito  $RL$  série:



No circuito  $RC$  série, a corrente vale:

$$i(t) = I_P \cos(\omega t + \theta_i)$$

A tensão no resistor está em fase com  $i(t)$ , enquanto no capacitor ela está atrasada de  $90^\circ$ . Portanto:

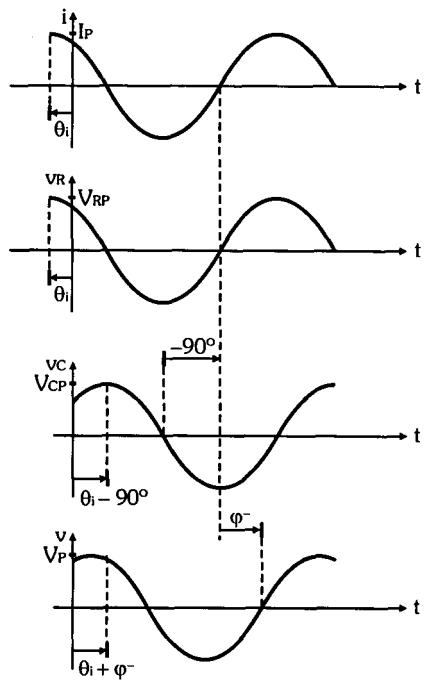
$$v_R(t) = V_{RP} \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v_C(t) = V_{CP} \cos(\omega t + \theta_i - \pi/2)$$

Por fim, a tensão do gerador está atrasada de  $\varphi^-$  em relação à  $i(t)$ :

$$v(t) = V_P \cos(\omega t + \theta_i + \varphi^-)$$

No circuito  $RC$  série:



## Uso dos Instrumentos de Medida

### Medidas com o Multímetro

Do ponto de vista prático, as tensões eficazes  $V$ ,  $V_R$  e  $V_L$  (ou  $V_C$ ) podem ser medidas diretamente por um multímetro na escala de tensão alternada (*AC volt*).

Porém, deve-se verificar se a frequência das tensões a serem medidas é compatível com a faixa de frequências de operação especificada no manual do multímetro.

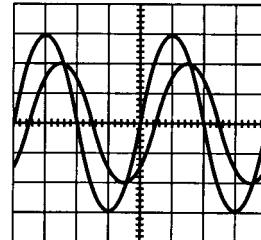
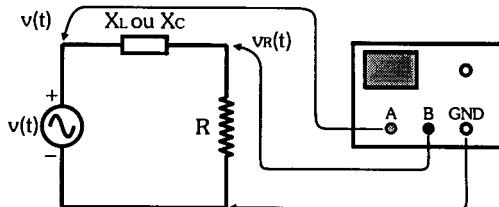
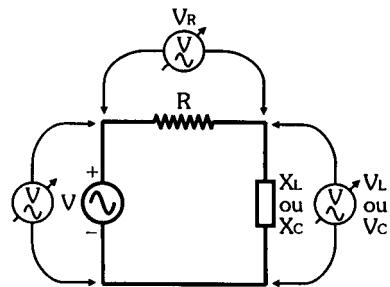
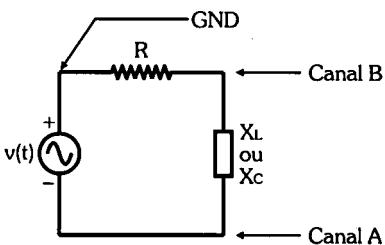
Se o multímetro tiver escala de corrente alternada (*AC ampère*), a corrente eficaz  $I$  pode ser medida diretamente; caso contrário, ela deve ser calculada pela Lei de Ohm.

### Medidas com o Osciloscópio

Do ponto de vista prático, as formas de onda das tensões podem ser analisadas diretamente por um osciloscópio. Nesse caso, podemos medir tanto as tensões pico a pico ( $V_{PP}$ ) como as tensões de pico ( $V_P$ ).

Além disso, podemos medir a defasagem  $\phi$  entre a tensão  $v(t)$  e a corrente  $i(t)$  do gerador por meio das tensões  $v(t)$  e  $v_R(t)$ , já que a tensão no resistor está em fase com a corrente.

A medida da defasagem pode ser feita tanto pelo método temporal quanto pelo método de Lissajous, conforme vimos no Capítulo 12.



Caso os dispositivos estejam invertidos, a defasagem  $\phi$  pode ser medida alterando as conexões das pontas de prova do osciloscópio.

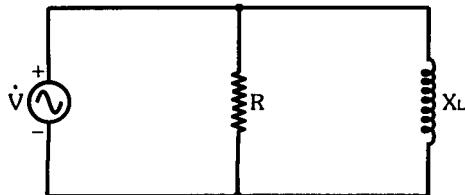
Nesse caso, o ponto de referência para as medidas passa a ser o polo "positivo" do gerador.

A figura ao lado mostra como ficam as conexões do osciloscópio caso isto ocorra.

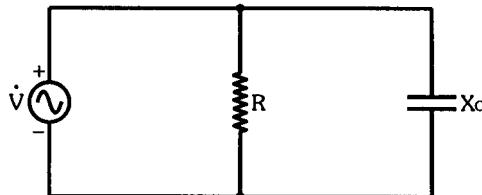
Os circuitos *RL* e *RC* em paralelo funcionam como divisores de corrente reativos que defasam a tensão do gerador em relação à corrente de um ângulo  $\phi$ .

### Análise das Impedâncias

Círcuito *RL* Paralelo



Círcuito *RC* Paralelo



A impedância  $\dot{Z}$  dos circuitos *RL* e *RC* em paralelo pode ser obtida pela fórmula geral de impedâncias em paralelo ou pela fórmula específica para duas impedâncias, como é o caso dos circuitos a serem analisados neste capítulo (considerando  $R$  como uma impedância resistiva pura e  $X_L$  e  $X_C$  como impedâncias reativas puras).

No circuito *RL* paralelo:

$$\frac{I}{\dot{Z}} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{X_L}$$

ou

$$\dot{Z} = \frac{jR \cdot X_L}{R + jX_L}$$

Na forma polar,  $\phi > 0^\circ$  e, portanto:

$$\dot{Z} = Z \angle \varphi^+$$

No circuito *RC* paralelo:

$$\frac{I}{\dot{Z}} = \frac{1}{R} + j \frac{1}{X_C}$$

ou

$$\dot{Z} = \frac{-jR \cdot X_C}{R - jX_C}$$

Na forma polar,  $\phi < 0^\circ$  e, portanto:

$$\dot{Z} = Z \angle \varphi^-$$

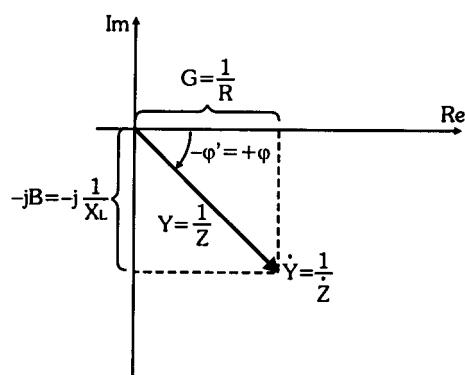
As representações complexas dos circuitos *RL* e *RC* em paralelo devem ser construídas por suas admitâncias ( $\dot{Y} = I / \dot{Z}$ ), condutâncias ( $G = 1 / R$ ) e susceptâncias ( $B = 1 / X$ ), ou seja, respectivamente, pelo inverso das suas impedâncias, resistências e reatâncias.

Por causa da propriedade dos números complexos ( $1/j = -j$ ) e ( $1/\angle\varphi = 1/\angle-\varphi$ ), a fase da admittância  $Y \angle \varphi'$  de cada circuito tem sinal contrário, isto é,  $\varphi'$  é negativo para a admittância indutiva e positivo para a admittância capacitativa.

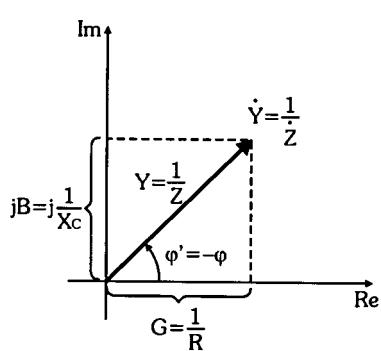
Porém, ao fazer a conversão novamente para impedância ( $\dot{Z} = 1/\dot{Y}$ ), a fase  $\varphi$  volta a ter o seu valor de acordo com a natureza das impedâncias, isto é,  $\varphi$  é positivo para a impedância indutiva e negativo para a impedância capacitativa.

As expressões e fórmulas relativas à impedância dos circuitos *RL* e *RC* em paralelo podem ser obtidas diretamente das suas representações complexas.

No circuito  $RL$  paralelo:



No circuito  $RC$  paralelo:



Dos diagramas complexos das admitâncias e das observações anteriores, concluímos que:

No circuito  $RL$  paralelo:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{I}{Z} = \sqrt{\frac{I}{R^2} + \frac{I}{X_L^2}} \\ \text{ou} \\ Z = \frac{R \cdot X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^+ = \arctg \frac{R}{X_L} \\ \text{ou} \\ \varphi^+ = 90^\circ - \arctg \frac{X_L}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{fase de } \dot{Z}$$

Sendo:  $R = \frac{Z}{\cos \varphi^+}$  e  $X_L = \frac{Z}{\sin \varphi^+}$

No circuito  $RC$  paralelo:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{I}{Z} = \sqrt{\frac{I}{R^2} + \frac{I}{X_C^2}} \\ \text{ou} \\ Z = \frac{R \cdot X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{módulo de } \dot{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^- = -\arctg \frac{R}{X_C} \\ \text{ou} \\ \varphi^- = \arctg \frac{X_C}{R} - 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{fase de } \dot{Z}$$

Sendo:  $R = \frac{Z}{\cos \varphi^-}$  e  $X_C = -\frac{Z}{\sin \varphi^-}$

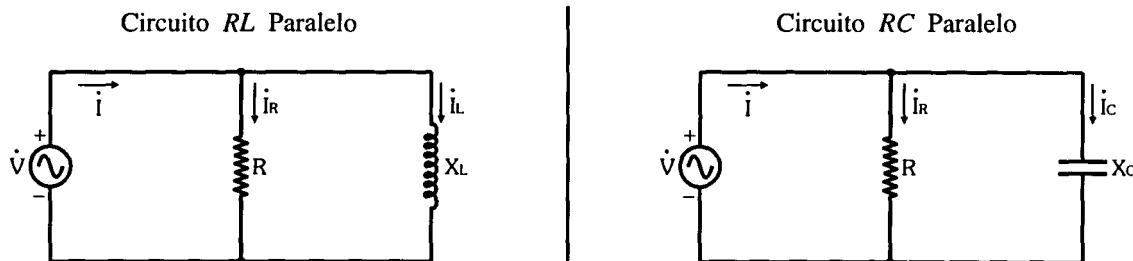
Assim, nos circuitos em paralelo, a impedância indutiva tem fase  $\varphi$  positiva entre  $0^\circ$  e  $+90^\circ$ , enquanto a impedância capacitativa tem fase  $\varphi$  negativa entre  $0^\circ$  e  $-90^\circ$ , correspondendo à defasagem entre a tensão  $\dot{V}$  do gerador e a corrente  $\dot{I}$  que ele fornece ao circuito.

## Análise das Tensões, Correntes e Defasagens

### Análise Fasorial

A representação fasorial é um método gráfico de aplicação da Lei de Kirchhoff para Correntes Alternadas nos circuitos em paralelo, isto é, "a soma fasorial das correntes nos dispositivos é igual à corrente fasorial do gerador".

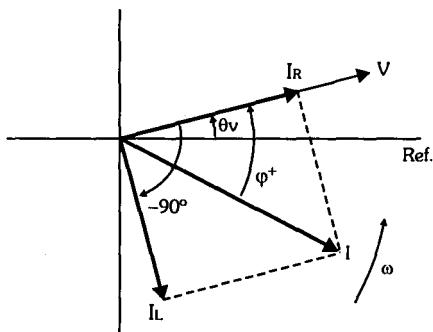
Nos circuitos em paralelo, como só há uma tensão, ela pode ser usada como referência para analisarmos as correntes.



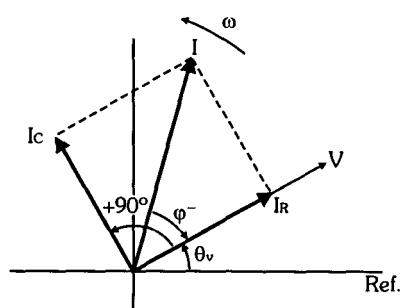
Para que a nossa análise seja a mais geral possível, consideraremos que a tensão tenha uma fase inicial  $\theta_V > 0^\circ$ , isto é,  $\dot{V} = V \angle \theta_V$ .

Nos dois circuitos, a corrente  $i_R$  está em fase com a tensão  $V$ . Porém, no circuito  $RL$ , a corrente  $i_L$  está atrasada de  $90^\circ$ , enquanto no circuito  $RC$ , a corrente  $i_C$  está adiantada de  $90^\circ$  em relação à tensão  $V$ .

No circuito  $RL$  paralelo:



No circuito  $RC$  paralelo:



A defasagem  $\varphi$  entre a tensão  $\dot{V}$  do gerador e a corrente  $i$  que ele fornece ao circuito é a mesma que a fase  $\varphi$  da impedância  $Z$ , independente da fase inicial  $\theta_V$  adotada para a tensão.

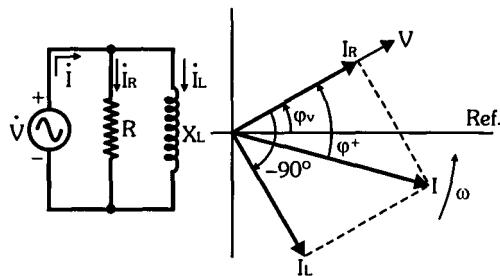
Além disso, as correntes  $i_R$  e  $i_L$  no circuito indutivo e  $i_R$  e  $i_C$  no circuito capacitivo estão sempre em quadratura, possibilitando relacionar matematicamente os seus módulos com o módulo da corrente  $i$  do gerador por meio do Teorema de Pitágoras.

## Análise por Números Complexos

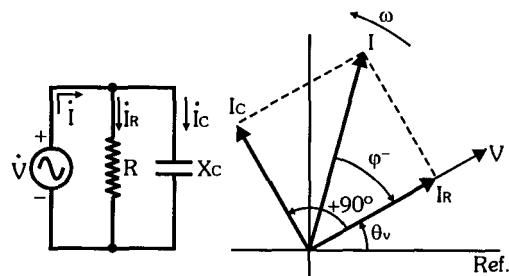
Podemos equacionar os circuitos sem efeito aplicando a Lei de Kirchhoff para Correntes Alternadas, isto é, usando valores complexos em conformidade com as suas representações fasoriais.

Em nossa análise, a representação complexa tem como referência a tensão com fase inicial  $\theta_v$ .

No circuito  $RL$  paralelo:  $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L$



No circuito  $RC$  paralelo:  $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C$



As expressões e fórmulas abaixo são genéricas, isto é, aplicam-se a qualquer circuito  $RL$  ou  $RC$  em paralelo. Por isso, todas as variáveis são positivas. No caso de um valor numérico negativo, como ocorre com  $\varphi^-$  no circuito  $RC$ , o sinal (-) é incorporado automaticamente aos cálculos.

No circuito  $RL$  paralelo:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L$$

$$\dot{I}_R = V\angle\theta_v / R\angle 0^\circ = (V/R)\angle\theta_v$$

$$\dot{I}_L = V\angle\theta_v / X_L\angle 90^\circ = (V/X_L)\angle(\theta_v - 90^\circ)$$

$$\dot{I} = V\angle\theta_v / Z\angle\varphi^+ = (V/Z)\angle(\theta_v - \varphi^+)$$

em que:

$$I = \sqrt{\dot{I}_R^2 + \dot{I}_L^2} \Rightarrow \text{módulo de } I$$

$$\varphi^+ = \operatorname{arctg} \frac{I_L}{I_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } V \text{ e } I$$

$$\text{Sendo: } I_R = I \cos \varphi^+ \quad \text{e} \quad I_L = I \sin \varphi^+$$

No circuito  $RC$  paralelo:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C$$

$$\dot{I}_R = V\angle\theta_v / R\angle 0^\circ = (V/R)\angle\theta_v$$

$$\dot{I}_C = V\angle\theta_v / X_C\angle -90^\circ = (V/X_C)\angle(\theta_v + 90^\circ)$$

$$\dot{I} = V\angle\theta_v / Z\angle\varphi^- = (V/Z)\angle(\theta_v - \varphi^-)$$

em que:

$$I = \sqrt{\dot{I}_R^2 + \dot{I}_C^2} \Rightarrow \text{módulo de } I$$

$$\varphi^- = -\operatorname{arctg} \frac{I_C}{I_R} \Rightarrow \text{defasagem entre } V \text{ e } I$$

$$\text{Sendo: } I_R = I \cos \varphi^- \quad \text{e} \quad I_C = -I \sin \varphi^-$$

Na prática, caso a fase inicial da tensão ou da corrente do gerador não seja conhecida, a análise dos circuitos reativos em paralelo pode ser realizada com mais facilidade se adotarmos fase inicial nula para a tensão, isto é,  $V = V\angle 0^\circ$ . Neste caso:  $\dot{I} = \dot{I}_R - j\dot{I}_L$  ou  $\dot{I} = \dot{I}_R + j\dot{I}_C$ .

## Análise Temporal

A tensão e as corrente dos circuitos  $RL$  e  $RC$  em paralelo podem ser expressas, também, no domínio temporal com as suas respectivas representações gráficas. Consideremos a tensão  $v(t)$  com fase inicial  $\theta_v > 0^\circ$ .

No circuito  $RL$  paralelo, a tensão vale:

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)$$

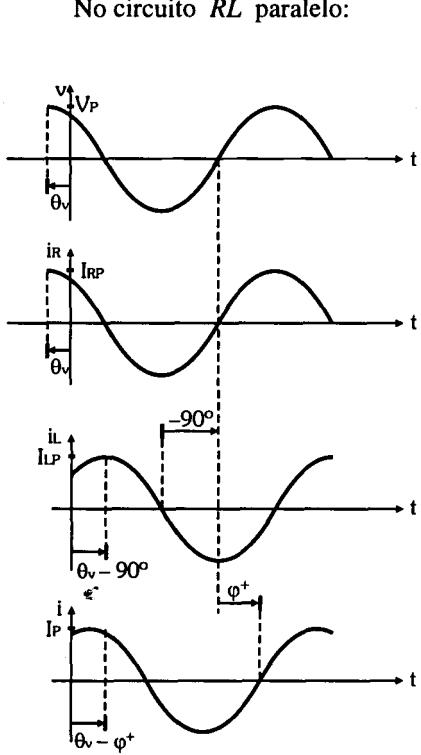
A corrente no resistor está em fase com  $v(t)$ , enquanto no indutor ela está atrasada de  $90^\circ$ . Portanto:

$$i_R(t) = I_{RP} \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i_L(t) = I_{LP} \cos(\omega t + \theta_v - \pi/2)$$

Por fim, a corrente do gerador está atrasada de  $\varphi^+$  em relação à  $v(t)$ :

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta_v - \varphi^+)$$



No circuito  $RC$  paralelo, a tensão vale:

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)$$

A corrente no resistor está em fase com  $v(t)$ , enquanto no capacitor ela está adiantada de  $90^\circ$ . Portanto:

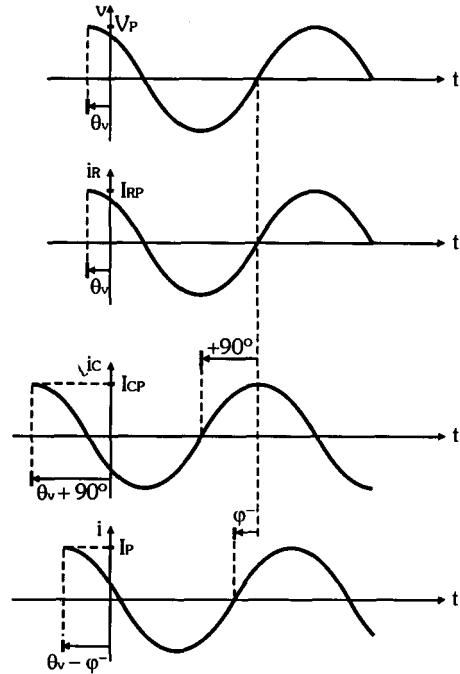
$$i_R(t) = I_{RP} \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i_C(t) = I_{CP} \cos(\omega t + \theta_v + \pi/2)$$

Por fim, a corrente do gerador está adiantada de  $\varphi^-$  em relação à  $v(t)$ :

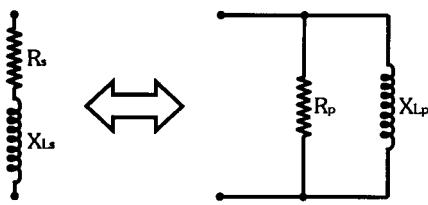
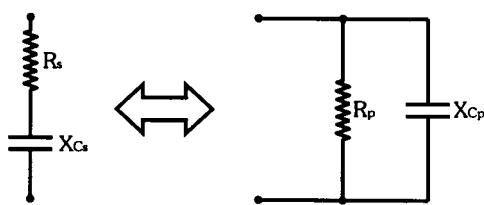
$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta_v - \varphi^-)$$

No circuito  $RC$  paralelo:



Nos circuitos  $RL$  e  $RC$  em série, a impedância  $\dot{Z} = Z\angle\varphi$  convertida na forma retangular traduz-se nos valores dos seus dispositivos em série, isto é,  $\dot{Z} = R_s + jX_{Ls}$  ou  $\dot{Z} = R_s - jX_{Cs}$ , o que não ocorre nos circuitos em paralelo.

Nos circuitos  $RL$  e  $RC$  em paralelo, a impedância  $\dot{Z} = Z\angle\varphi$  convertida na forma retangular traduz-se nos valores dos dispositivos do *círcuito série equivalente*.

Equivalência  $RL$  Série / ParaleloEquivalência  $RC$  Série / Paralelo

A conversão de um circuito série no seu paralelo equivalente e vice-versa pode ser útil durante a análise de alguns circuitos, como os ressonantes, que estudaremos no Capítulo 18.

As fórmulas de conversão estão baseadas nas análises que fizemos das impedâncias dos circuitos  $RL$  e  $RC$  série e paralelo nos tópicos 14.1 e 14.2.

Fórmulas de conversão para o circuito  $RL$ :

$$R_s = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{e} \quad X_{Ls} = Z \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \quad \text{e} \quad X_{Lp} = \frac{Z}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Fórmulas de conversão para o circuito  $RC$ :

$$R_s = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{e} \quad X_{Cs} = -Z \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \quad \text{e} \quad X_{Cp} = -\frac{Z}{\operatorname{sen} \varphi}$$

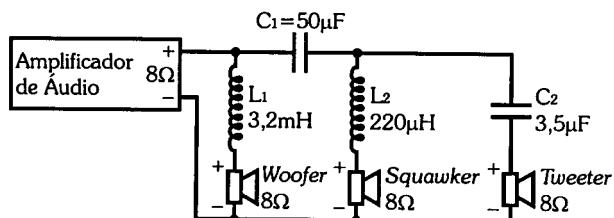
Neste momento, estamos aptos a analisar o *DF-I* do ponto de vista de suas impedâncias. Mas, antes disso, faremos um breve comentário em relação ao alto-falante.

O alto-falante eletromagnético é uma impedância composta por uma componente reativa  $X_L$  relativa à indutância da sua bobina e por uma componente resistiva  $R$  relativa à resistência do fio dessa bobina.

Porém, a indutância da bobina é tão baixa que na faixa das freqüências de áudio a sua retância é bem menor que a resistência do fio ( $X_L \ll R$ ).

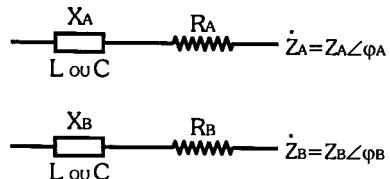
Assim, nessa faixa, podemos considerar o alto-falante como se fosse uma resistência pura com valor igual ao de sua impedância nominal.

No *DF-I*, os três alto-falantes têm impedâncias nominais de  $8\Omega$  e, portanto, eles podem ser considerados resistências puras de  $8\Omega$ .



#### Como analisar, por meio de suas impedâncias, um circuito submetido a múltiplas freqüências ?

Para essa análise, é preciso considerar algumas situações de ordem prática, conforme faremos para as duas impedâncias genéricas mostradas ao lado.



- $\dot{Z}_A$  e  $\dot{Z}_B$  em paralelo:      se  $Z_A \gg Z_B$        $\Rightarrow$        $\dot{Z}_A$  é um circuito aberto;
- $\dot{Z}_A$  e  $\dot{Z}_B$  em série:      se  $Z_A \ll Z_B$        $\Rightarrow$        $\dot{Z}_A$  é um curto;
- $\dot{Z}_A = R_A \pm jX_A$ :
  - se  $X_A > R_A$        $\Rightarrow$        $\varphi_A \approx 90^\circ$  ou  $\varphi_A \approx -90^\circ$ , portanto:  
 $\dot{Z}_A$  é uma reatância  $X_A$  pura e  $R_A$  é um curto;
  - se  $X_A \ll R_A$        $\Rightarrow$        $\varphi_A \approx 0^\circ$ , portanto:  
 $\dot{Z}_A$  é uma resistência  $R_A$  pura e  $X_A$  é um curto;

Para as demais situações, poderá ou não haver predominância da reatância  $X_A$  ou da resistência  $R_A$  em função de seus valores. Tais situações são:  $X_A > R_A$ ;  $X_A < R_A$  e  $X_A \approx R_A$ .

A partir destas considerações, nós analisaremos comportamento do *DF-I* do ponto de vista de suas impedâncias.

## Constituição das Impedâncias do DF-1

Para efeito de análise do circuito, denominaremos o *woofer* de  $R_1$ , o *squawker* de  $R_2$  e o *tweeter* de  $R_3$ .

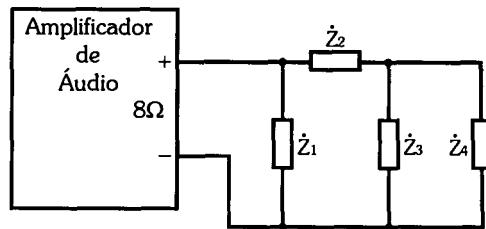
Em primeiro lugar, vamos redesenhar o circuito como se fosse formado pelas impedâncias:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1}$$

$$\dot{Z}_2 = -jX_{C1}$$

$$\dot{Z}_3 = R_3 + jX_{L2}$$

$$\dot{Z}_4 = R_3 - jX_{C2}$$



O circuito será analisado no entorno das suas freqüências críticas:

Inferiores:  $f_i/2 = 200\text{Hz}$

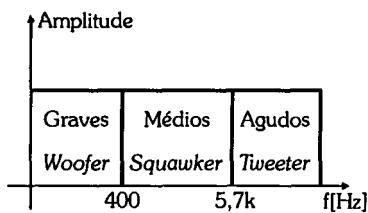
$$f_i = 400\text{Hz}$$

$$2.f_i = 800\text{Hz}$$

Superiores:  $f_s/2 = 2850\text{Hz}$

$$f_s = 5700\text{Hz}$$

$$2.f_s = 11400\text{Hz}$$



A reatância dos dispositivos nessas freqüências nós já calculamos no tópico 13.10.

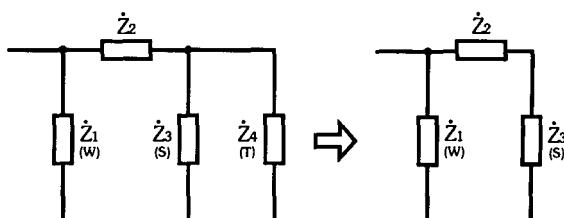
### Impedâncias do DF-1 em 200 Hz

Reatâncias	Impedâncias (retangular)	Impedâncias (polar)
$X_{L1} = 4\Omega$ e $R_1 = 8\Omega$	$\dot{Z}_1 = 8 + j4 \ [\Omega]$	$\dot{Z}_1 = 8,9 \angle 26,6^\circ \ [\Omega]$
$X_{C1} = 16\Omega$	$\dot{Z}_2 = -j16 \ [\Omega]$	$\dot{Z}_2 = 16 \angle -90^\circ \ [\Omega]$
$X_{L2} = 0,28\Omega$ e $R_2 = 8\Omega$	$\dot{Z}_3 = 8 + j0,28 \ [\Omega]$	$\dot{Z}_3 = 8 \angle 2^\circ \ [\Omega]$
$X_{C2} = 227\Omega$ e $R_3 = 8\Omega$	$\dot{Z}_4 = 8 - j227 \ [\Omega]$	$\dot{Z}_4 = 227 \angle -88^\circ \ [\Omega]$

### Análise do DF-1 em 200Hz - Sons Graves

- $\dot{Z}_1$  está ligado diretamente à saída do amplificador. Como  $R_1 > X_{L1}$ , a tensão no *woofer* é maior do que em  $X_{L1}$ . Portanto, o *woofer* reproduz bem os sons graves.
  - $\dot{Z}_4$  está em paralelo com  $\dot{Z}_3$ . Como  $Z_4 \gg Z_3$ , a impedância  $\dot{Z}_4$  é um circuito aberto.
- Portanto, o *tweeter* não reproduz os sons graves.

O circuito resultante do DF-1 em 200Hz pode ser simplificado, conforme mostra a figura ao lado.

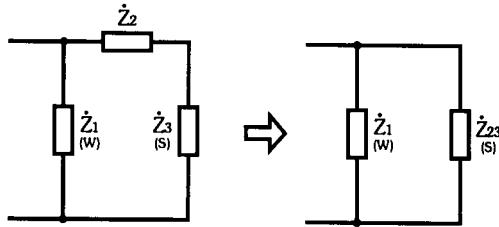


- Em  $\dot{Z}_3$ ,  $R_2 \gg X_{L2}$ . Portanto,  $\dot{Z}_3$  é uma resistência pura e  $X_{L2}$  é um curto-círcuito. Mas  $\dot{Z}_3$  está em série com  $\dot{Z}_2$  e suas impedâncias têm a mesma ordem de grandeza.

A impedância equivalente entre  $\dot{Z}_2$  e  $\dot{Z}_3$  será denominada  $\dot{Z}_{23}$ . Calculando e simplificando o circuito, temos:

$$\dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 \Rightarrow \dot{Z}_{23} = -j16 + 8 + j0,28 \Rightarrow$$

$$\dot{Z}_{23} = 8 - j15,72 \text{ ou } \dot{Z}_{23} = 17,6\angle-63^\circ [\Omega]$$



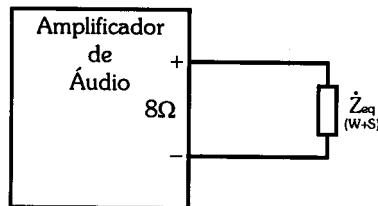
- Em  $\dot{Z}_{23}$ ,  $X_{23} > R_{23}$ . Mas  $R_{23} = R_2$ . Portanto, o *squawker* reproduz os sons graves com intensidade menor que o *woofer*.

Finalmente, vamos analisar a impedância total  $\dot{Z}_{eq}$  do *DF-1* em 200Hz para verificar se na região dos sons graves há *casamento de impedâncias* entre o amplificador ( $8\Omega$ ) e o *DF-1*.

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 // \dot{Z}_{23} \Rightarrow \dot{Z}_{eq} = \frac{(8,9\angle26,6^\circ).(17,6\angle-63^\circ)}{(8+j4)+(8-j15,72)} \Rightarrow$$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{156,64\angle-36,4^\circ}{19,83\angle-36,2^\circ} \Rightarrow \dot{Z}_{eq} \approx 8\angle0^\circ$$

- $\dot{Z}_{eq}$  é praticamente uma resistência pura.



### Conclusões:

Para sons graves, a potência sonora no *woofer* é grande, no *squawker* é média e no *tweeter* é pequena. Além disso, há casamento de impedâncias entre o amplificador e o *DF-1*, pois ambas são iguais.

### ATENÇÃO!

No Exercício Proposto 14.22 deste capítulo, você deverá fazer uma análise semelhante para as demais freqüências tomadas como referência, isto é, 400Hz, 800Hz, 2850Hz, 5700Hz e 11400Hz, conforme colocamos no início desta análise.

Embora essas análises sejam um pouco trabalhosas, elas têm a função tanto de desenvolver a habilidade e o raciocínio de análise de circuitos em CA, como de relacionar os assuntos tratados neste livro com situações técnicas práticas e reais.

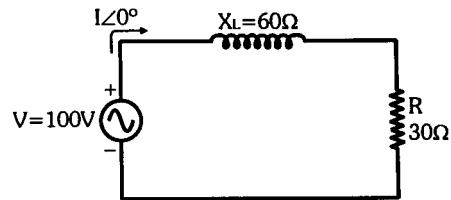
No entanto, a análise do *DF-1* não encerra aqui, pois no Capítulo 19 nós trataremos exclusivamente dos filtros por meio de uma abordagem mais adequada, de modo que voltaremos a analisar o *DF-1*, explorando-o em outros aspectos.

## Exercícios Propostos

### Circuitos RL e RC em Série

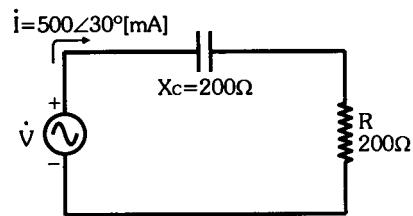
**14.1)** Considere o circuito ao lado.

- Determine  $\dot{Z}$ ,  $\dot{V}$  e  $\dot{I}$  nas formas polar e retangular;
- Determine  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_L$  na forma polar pela Lei de Ohm;
- Esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões envolvidas no circuito;
- Compare os módulos de  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_L$  obtidos no item b com as componentes real e imaginária de  $\dot{V}$  obtidas no item a e justifique os resultados.



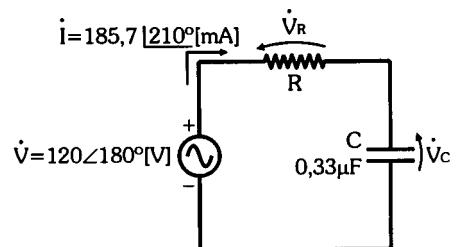
**14.2)** Considere o circuito ao lado.

- Determine  $\dot{Z}$  e  $\dot{V}$  nas formas polar e retangular;
- Determine  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_C$  na forma polar pela Lei de Ohm;
- Esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões envolvidas no circuito;
- Por que os módulos de  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_C$  obtidos no item b são diferentes das componentes real e imaginária de  $\dot{V}$  obtidas no item a?



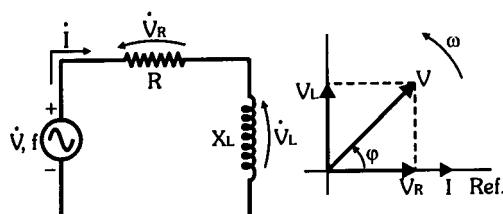
**14.3)** Considere o circuito ao lado.

- Determine a defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente do gerador e esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões do circuito (sem usar valores);
- Determine  $\dot{Z}$ ,  $R$  e  $X_C$ ;
- Determine a freqüência do gerador;
- Determine  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_C$ ;
- Compare os resultados obtidos no item d com o diagrama fasorial esboçado no item a.

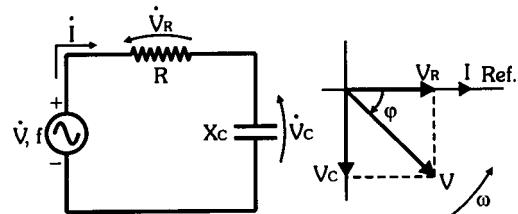


**14.4)** Considere os circuitos abaixo com os seus respectivos diagramas fasoriais e responda como variarão os fasores se a freqüência do gerador aumentar, mantendo a tensão constante.

Círcuito Indutivo:



Círculo de phasor para o circuito capacitivo:

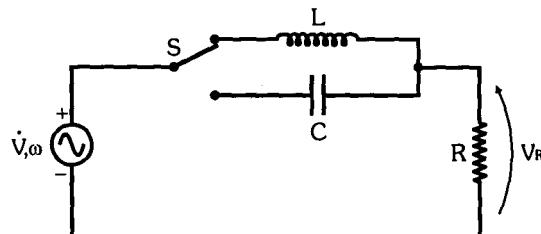


- 14.5) Uma resistência de  $600\Omega$  é ligada em série com um indutor de  $100mH$ . O circuito é alimentado pela tensão  $v(t) = 20\cos 1000\pi t [V]$ . Determine:

- $\omega$ ,  $f$ ,  $X_L$  e  $\dot{Z}$  do circuito;
- a corrente  $\dot{I}$  e as tensões  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_L$ ;
- $\dot{Z}$ ,  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$  e  $\dot{V}_L$  se a freqüência dobrar e se ela cair pela metade.

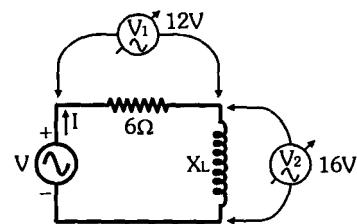
- 14.6) Um gerador de  $127V/60Hz$  alimenta uma impedância  $\dot{Z} = 60\angle -30^\circ [\Omega]$ . Determine, em módulo, a corrente fornecida pelo gerador e a tensão em suas componentes resistiva e reativa.

- 14.7) Considere o circuito ao lado. Qual deve ser a relação entre  $L$  e  $C$  para que a tensão  $V_R$  seja sempre  $V/\sqrt{2}$ , independente da posição da chave  $S$ ?

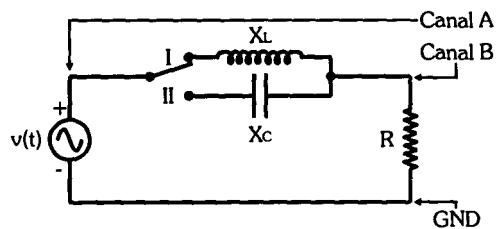


- 14.8) Considere o circuito ao lado com as medidas realizadas pelos voltímetros e determine:

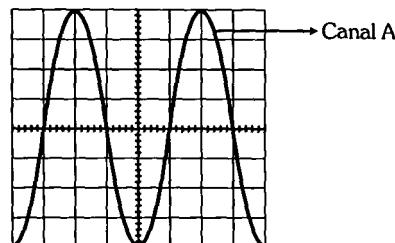
- a tensão  $V$  do gerador;
- a corrente  $I$  e a defasagem  $\varphi$ ;
- a reatância  $X_L$  e a impedância  $Z$ .



- 14.9) Esboce na tela do osciloscópio a forma de onda da tensão no resistor do circuito abaixo, quando a chave estiver nas posições I e II. Dado:  $X_L = X_C = R$

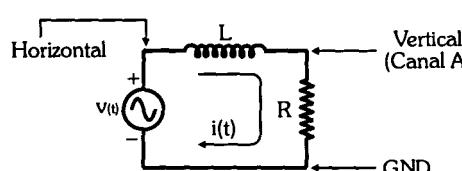


Tela do osciloscópio

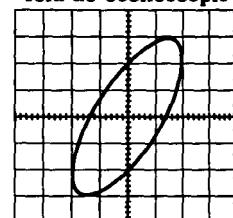


- 14.10) Considere o circuito ao lado e a figura de Lissajous obtida pelo osciloscópio:

- Determine a defasagem  $\varphi$  entre  $v(t)$  e  $i(t)$ ;
- Esboce o diagrama fasorial correspondente, supondo  $i(t)$  com fase inicial nula.



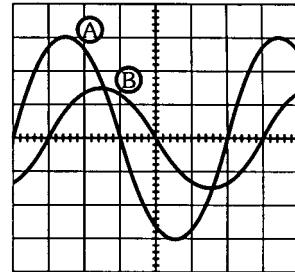
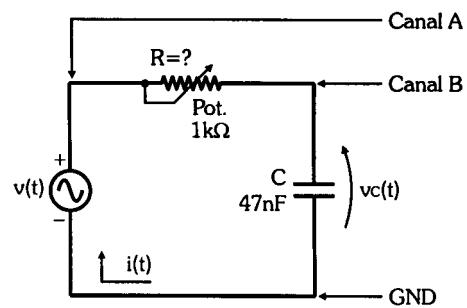
Tela do osciloscópio



- 14.11) Considere o circuito ao lado e os sinais medidos por um osciloscópio.

- Esboce o diagrama fasorial com a corrente e as tensões do circuito (sem usar valores), supondo fase inicial nula para a tensão do gerador;
- Determine as expressões  $v(t)$  e  $vc(t)$ ;
- Determine  $\dot{V}_C$ ,  $\dot{V}_R$  e a expressão  $v_R(t)$ ;
- Determine  $X_C$ ,  $I$ ,  $\phi$  e a expressão  $i(t)$ ;
- Determine a resistência de ajuste do potenciômetro;
- Se a resistência de ajuste do potenciômetro reduzir, o que acontece com a corrente  $I$  e a defasagem  $\phi$ ?

Sugestão: esboce a impedância complexa no plano cartesiano.



Canal A: Atenuador vertical = 5V/DIV  
Canal B: Atenuador vertical = 5V/DIV  
Base de tempo = 20μs

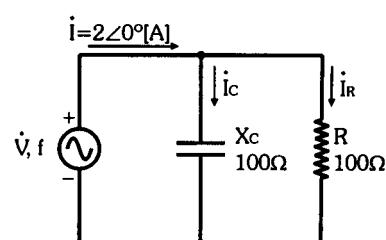
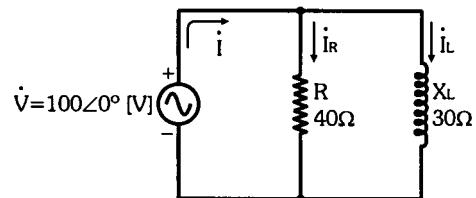
### Circuitos RL e RC em Paralelo

- 14.12) Considere o circuito ao lado.

- Determine  $\dot{Z}$  e  $\dot{I}$  nas formas polar e retangular;
- Determine  $\dot{I}_R$  e  $\dot{I}_L$  na forma polar pela Lei de Ohm;
- Esboce o diagrama fasorial com a tensão e as correntes envolvidas no circuito;
- Compare os módulos de  $\dot{I}_R$  e  $\dot{I}_L$  obtidos no item b com as componentes real e imaginária de  $\dot{I}$  obtidas no item a e justifique os resultados.

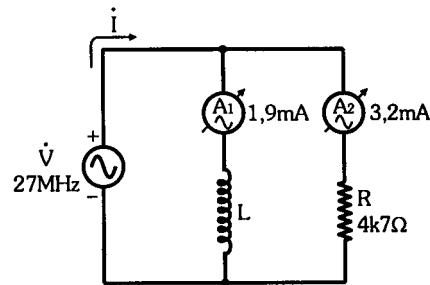
- 14.13) Considere o circuito ao lado.

- Determine  $\dot{I}_C$  e  $\dot{I}_R$  pela fórmula do divisor de corrente;
- Determine  $\dot{V}$  e  $\dot{Z}$ ;
- Esboce o diagrama fasorial com a tensão e as correntes envolvidas no circuito.



- 14.14) Considere o circuito ao lado com as medidas realizadas pelos amperímetros e determine:

- a corrente  $I$ ;
- a defasagem  $\varphi$ ;
- a tensão  $V$ ;
- a impedância  $Z$ , a reatância  $X_L$  e a indutância  $L$ .



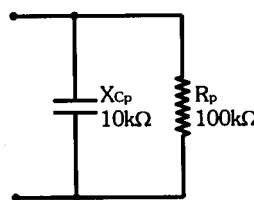
- 14.15) Um gerador  $v(t) = 156 \cdot \cos(377t - 3\pi/4)$  [V] alimenta uma reatância indutiva de  $12\Omega$  em paralelo com um resistor de  $22\Omega$ . Determine a impedância  $\dot{Z}$  do circuito, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente do gerador e a corrente  $\dot{I}$  que o gerador fornece ao circuito.

- 14.16) Considere um circuito  $RC$  paralelo, em que  $C = 120nF$ , a freqüência de operação é de  $100kHz$  e as correntes valem  $I_C = 0,5A$  e  $I_R = 0,8A$ . Determine a tensão  $V$  do gerador, a resistência  $R$ , a impedância  $Z$  do circuito, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente do gerador e a corrente  $I$  que o gerador fornece ao circuito.

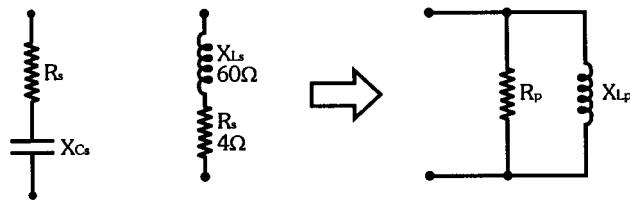
#### *Equivalência Série / Paralela*

- 14.17) Converta os circuitos paralelo e série dados abaixo nos seus respectivos equivalentes série e paralelo:

a)



b)



- 14.18) Converta o circuito do exercício 14.15 no seu equivalente série. Em seguida, determine a impedância  $\dot{Z}$  do circuito, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente do gerador e a corrente  $\dot{I}$  que o gerador fornece ao circuito.

- 14.19) Converta o circuito do exercício 14.16 no seu equivalente série. Em seguida, determine a impedância  $Z$  do circuito, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão e a corrente do gerador e a corrente  $I$  que o gerador fornece ao circuito.

- 14.20) Para um circuito  $RL$  série operando a partir de uma determinada freqüência, é válida a relação  $X_{Ls} = 10.R_s$ . Determine  $X_{Lp}$  e  $R_p$  em função de  $X_{Cs}$ .

- 14.21) Para um circuito  $RC$  paralelo operando a partir de uma determinada freqüência, é válida a relação  $R_p = 10.X_{Cp}$ . Determine  $X_{Cs}$  e  $R_s$  em função de  $X_{Cp}$ .

#### *Análise das Impedâncias do DF - 1*

- 14.22) Considere a análise do *DF-1* realizada no tópico 14.4 e, de forma semelhante e com as devidas adequações em função das freqüências consideradas, continue a sua análise e tire as suas conclusões sobre o seu comportamento quando ele estiver recebendo do amplificador sinais nas seguintes freqüências:  $f_i = 400Hz$  (transição entre a região de sons graves e médios),  $2.f_i = 800Hz$  (sons médios menores),  $f_s/2 = 2850Hz$  (sons médios maiores),  $f_s = 5700Hz$  (transição entre a região de sons médios e agudos),  $2.f_s = 11400Hz$  (sons agudos).

**15.1**

**Potência Instantânea**

Considere um gerador com tensão  $v(t)$  ligado a uma impedância genérica  $Z\angle\varphi$ .

Dependendo da natureza da impedância, a tensão  $v(t)$  pode estar atrasada, ou em fase, ou adiantada de um ângulo  $\varphi$  em relação à corrente  $i(t)$ .

Portanto, podemos considerar as seguintes expressões instantâneas genéricas:

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad i(t) = I_p \cos \omega t$$

A *potência instantânea*  $p(t)$  é o produto dos valores instantâneos da tensão  $v(t)$  e da corrente  $i(t)$ , isto é:

$$p(t) = v(t).i(t)$$

Então:

$$p(t) = v(t).i(t) \Rightarrow p(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi).I_p \cos \omega t \Rightarrow p(t) = V_p I_p \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t$$

Substituindo os valores de pico por seus respectivos valores eficazes, isto é,  $V_p$  por  $\sqrt{2}.V$  e  $I_p$  por  $\sqrt{2}.I$ , e aplicando a identidade trigonométrica  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ , obtemos:

$$p(t) = \frac{\sqrt{2}.V.\sqrt{2}.I}{2} \cdot [\cos(\omega \omega t + \varphi - \omega t) + \cos(\omega \omega t + \varphi + \omega t)] \Rightarrow p(t) = V.I \cos \varphi + V.I \cos(2\omega t + \varphi)$$

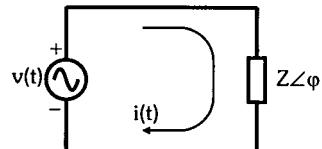
Nesta expressão, distinguimos dois termos: o primeiro,  $V.I \cos \varphi$ , é uma *constante*, pois independe do tempo  $t$ ; o segundo,  $V.I \cos(2\omega t + \varphi)$ , é *variável com o tempo*  $t$  e sua freqüência é o dobro da freqüência  $\omega$  da tensão e da corrente.

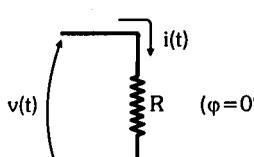
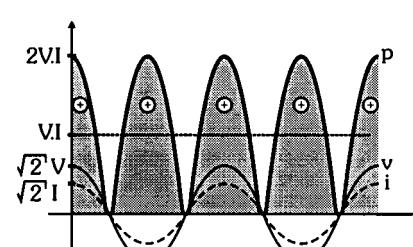
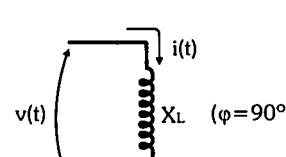
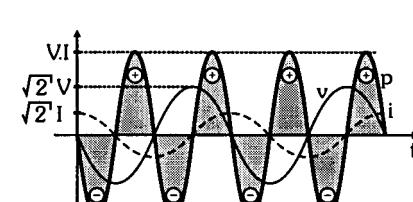
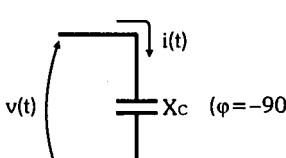
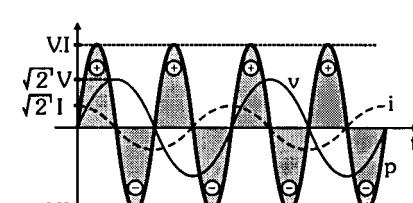
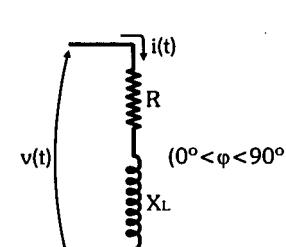
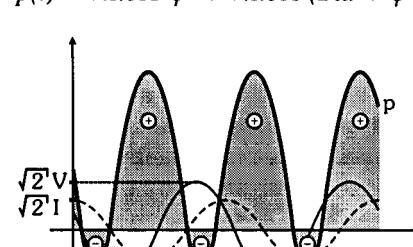
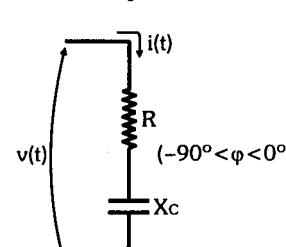
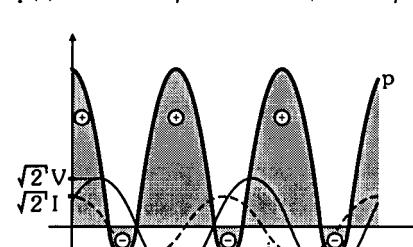
A parcela constante da expressão da potência instantânea, conforme veremos mais adiante, é o seu valor médio.

A potência média, por sua vez, é conhecida como *potência ativa* ou *potência real* de um circuito, sendo simbolizada simplesmente por  $P$ .

Observe que, como  $\varphi$  só pode assumir valores entre  $+90^\circ$  e  $-90^\circ$  (primeiro e quarto quadrantes do diagrama fasorial), o primeiro termo,  $V.I \cos \varphi$ , é sempre positivo, pois  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ , enquanto o segundo,  $V.I \cos(2\omega t + \varphi)$ , pode ser positivo ou negativo, dependendo do instante  $t$  considerado.

Analisemos, pois, o significado destes dois termos, considerando, para isso, os cinco diferentes comportamentos de uma impedância em função de sua fase  $\varphi$  e lembrando que  $\cos 0^\circ = 1$  e  $\cos \pm 90^\circ = 0$ .



Impedância	Representação Temporal	Característica
Resistiva Pura  $v(t)$ $i(t)$ $R$ $(\varphi = 0^\circ)$	$p(t) = V.I + V.I \cos 2\omega t$ 	Toda a potência fornecida pelo gerador é <i>ativa</i> , pois ela é sempre positiva, variando entre 0 e $2V.I$ . Nesse caso, a potência média é $V.I$ .
Indutiva Pura  $v(t)$ $i(t)$ $X_L$ $(\varphi = 90^\circ)$	$p(t) = V.I \cos(2\omega t + \pi/2)$ 	Não há potências ativas, mas <i>reativas</i> , pois a potência fornecida ao indutor e ao capacitor (parcelas positivas) é devolvida ao gerador (parcelas negativas).
Capacitiva Pura  $v(t)$ $i(t)$ $X_C$ $(\varphi = -90^\circ)$	$p(t) = V.I \cos(2\omega t - \pi/2)$ 	Durante a devolução, é como se o dispositivo fosse um gerador. A potência reativa varia entre $-V.I$ e $+V.I$ , de modo que a potência média é nula.
Indutiva  $v(t)$ $i(t)$ $R$ $X_L$ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$	$p(t) = V.I \cos \varphi^+ + V.I \cos(2\omega t + \varphi^+)$ 	Há potência ativa e reativa, sendo, por isso, sempre mais positiva que negativa. Portanto, somente uma parcela da potência é devolvida ao gerador. Nesses casos, a potência média pode estar entre 0 e $V.I$ , dependendo de $\varphi$ .
Capacitiva  $v(t)$ $i(t)$ $R$ $X_C$ $(-90^\circ < \varphi < 0^\circ)$	$p(t) = V.I \cos \varphi^- + V.I \cos(2\omega t + \varphi^-)$ 	Quanto mais próximo de zero for o valor de $\varphi$ , maior será a potência ativa. A potência total (ativa + reativa) é chamada de <i>potência aparente</i> .

A análise matemática da potência em circuitos CA por meio de expressões temporais, conforme foi feita no tópico anterior, serviu apenas para mostrar as possíveis formas de onda da potência instantânea em função da natureza da impedância, e identificar os três tipos de potência: a *ativa*, a *reativa* e a *aparente*.

A partir de agora, migraremos para os números complexos para que possamos chegar a fórmulas mais simples de ser analisadas e aplicadas.

Comecemos, então, por apresentar as duas condições que devem ser satisfeitas para que essa abordagem seja feita corretamente.

Considere a expressão da potência instantânea:  $p(t) = V \cdot I \cdot \cos \varphi + V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$

Nesta expressão, os dois termos utilizam os valores eficazes da tensão e da corrente, isto é,  $V \cdot I$ . Além disso, o termo dependente do tempo  $V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$  mostra que em um diagrama fasorial de potência, esse fasor ficaria circundado ao primeiro e ao quarto quadrantes, pois  $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$ .

Das observações acima, concluímos que:

- a primeira condição para o cálculo da potência por números complexos é a utilização de valores eficazes (*RMS*), isto é,  $V$  para a tensão e  $I$  para a corrente;
- a segunda condição é limitar, matematicamente, o fasor da potência ao primeiro e ao quarto quadrantes.

Porém, se calcularmos a potência complexa diretamente a partir da expressão  $\dot{P} = \dot{V} \cdot \dot{I}$ , considerando que  $\dot{V} = V \angle \theta_v$  e  $\dot{I} = I \angle \theta_i$ , chegaremos a um resultado *errado*, isto é:

$$\dot{P} = \dot{V} \cdot \dot{I} = V \angle (\theta_v) \cdot I \angle (\theta_i) = V \cdot I \angle (\theta_v + \theta_i) \rightarrow \text{ESTE RESULTADO ESTÁ ERRADO!}$$

Por quê? Ora, porque fisicamente o fasor da potência só pode ocupar o primeiro e o quarto quadrantes do diagrama fasorial, o que não ocorre com a fase resultante ( $\theta_v + \theta_i$ ), pois esta pode ocupar qualquer quadrante.

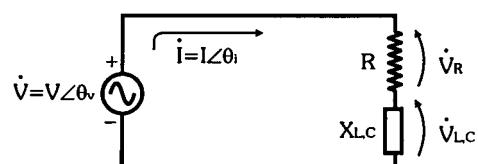
Mas a questão é apenas matemática. De fato, os números complexos desconhecem que a defasagem  $\varphi$  é a diferença entre  $\theta_v$  e  $\theta_i$ , e não a soma, como ocorre no produto  $\dot{V} \cdot \dot{I}$ .

Além disso, a limitação do fasor da potência ao primeiro e ao quarto quadrantes está relacionada ao fato de a componente real da impedância (componente resistiva) poder assumir apenas valores positivos, sendo esta uma imposição puramente física.

Assim sendo, a forma correta de analisar a potência complexa é usando o *conjugado da tensão*, isto é,  $\dot{V}^*$ , já que ele mantém tanto o seu módulo quanto a sua componente real inalterados (veja o tópico X do Apêndice 1).

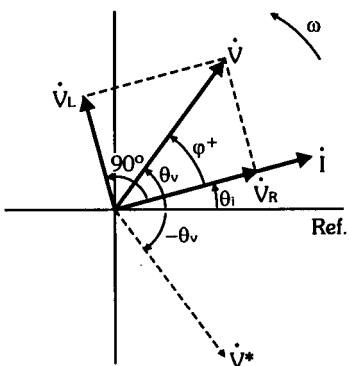
Considere um gerador  $\dot{V} = V \angle \theta_v$  fornecendo uma corrente  $\dot{I} = I \angle \theta_i$  a uma impedância  $\dot{Z}$  dada genericamente por:

$$\dot{Z} = R \pm jX_{L,C} \quad \text{ou} \quad \dot{Z} = Z \angle \varphi^\pm$$

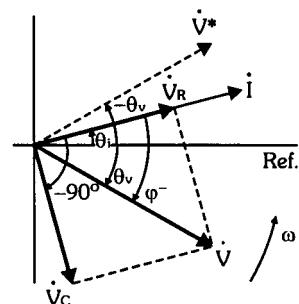


Fasorialmente, temos dois diagramas distintos:

Impedância Indutiva



Impedância Capacitiva



Em cada impedância há uma corrente e três tensões. Portanto, há *três potências* envolvidas.

A potência total é denominada *potência aparente*  $\dot{P}_S$ , dada por:  $\dot{P}_S = \dot{V}^* \cdot \dot{I}$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

$$\dot{P}_S = \dot{V}^* \cdot \dot{I} = V \angle(-\theta_v) \cdot I \angle(\theta_i) = V \cdot I \angle(\theta_i - \theta_v) \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{P}_S = V \cdot I \angle -\varphi}$$

Observe que, agora, a fase da potência aparente é  $-\varphi$ , isto é, situa-se no primeiro ou no quarto quadrante e corresponde numericamente à fase  $\varphi$  da impedância  $Z$  ou à defasagem  $\varphi$  entre a tensão  $\dot{V}$  e a corrente  $\dot{I}$ , a menos de seu sinal, que agora é *invertido*, fato este que será explicado no próximo tópico.

A potência aparente complexa  $\dot{P}_S$  pode ser determinada, também, em função da impedância  $Z$  por:

$$\boxed{\dot{P}_S = \frac{V^2}{Z} \angle -\varphi} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dot{P}_S = Z \cdot I^2 \angle -\varphi}$$

Decompondo a fórmula  $\dot{P}_S = V \cdot I \angle -\varphi$  em suas componentes real e imaginária, temos:

$$\dot{P}_S = V \cdot I \cdot \cos(-\varphi) + jV \cdot I \cdot \sin(-\varphi)$$

Mas,  $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$  e  $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ . Então:

$$\boxed{\dot{P}_S = V \cdot I \cdot \cos\varphi - jV \cdot I \cdot \sin\varphi}$$

ou

$$\boxed{\dot{P}_S = P - jQ}$$

A componente real de  $\dot{P}_S$  é a *potência ativa*  $P$ , sendo exatamente igual ao primeiro termo da expressão instantânea  $p(t)$  obtida no tópico anterior. Portanto:

$$\boxed{P = V \cdot I \cdot \cos\varphi}$$

A componente imaginária de  $\dot{P}_S$  é a *potência reativa*  $Q$ , correspondendo ao termo  $V \cdot I \cdot \cos(2\alpha + \varphi)$  da expressão instantânea  $p(t)$  quando  $\varphi = \pm \pi/2$ . Portanto:

$$\boxed{Q = -V \cdot I \cdot \sin\varphi}$$

### Potência Ativa - $P$

A potência ativa  $P$ , em watt [W], é aquela correspondente ao produto da corrente com a parcela da tensão que está em fase com ela. Portanto:

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Diagrama Esquemático

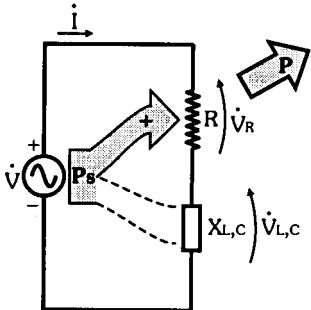
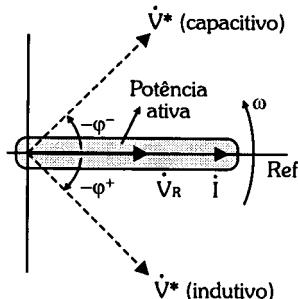
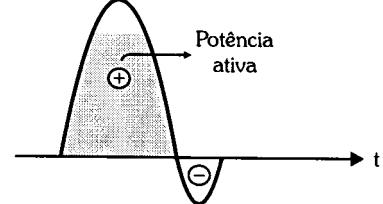


Diagrama Fasorial



Potência Instantânea



Mas, como  $V_R = V \cdot \cos \varphi \Rightarrow$

$$P = V_R \cdot I$$

ou

$$P = R \cdot I^2$$

ou

$$P = \frac{V_R^2}{R}$$

A parcela ativa da potência total é fornecida pelo gerador à componente *resistiva* da impedância, sendo totalmente dissipada por ela. Por isso ela é sempre positiva e corresponde a uma parcela da região positiva do gráfico de  $p(t)$ .

A potência ativa é convertida em calor por efeito Joule. Na prática, essa energia térmica pode ser utilizada para realizar trabalho. É por isso que a potência ativa é denominada também de potência útil, potência de trabalho ou potência real.

Como *energia = potência x tempo*, no gráfico de  $p(t)$  a energia é equivalente à área. Portanto, parte da área positiva do gráfico corresponde à conversão de energia elétrica em térmica.

Quanto mais próximo de zero for a fase  $\varphi$ , ou seja, quanto mais resistiva for a impedância, maior é a potência ativa.

*"Em um circuito, a potência ativa total fornecida pelo gerador é a soma das potências ativas dissipadas pelas componentes resistivas do circuito."*

**Obs.:** Alguns autores representam a potência ativa por  $P_{AT}$ .

### Potência Ativa X Potência Média

Definição:

Considere uma função periódica temporal  $f(t)$ , com período  $T$ . O valor médio  $F_m$  dessa função é definido por:

$$F_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt$$

Aplicando a fórmula de valor médio à potência instantânea  $p(t)$ , obtemos a expressão da potência média:

$$P_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt \Rightarrow P_m = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T V \cdot I \cdot \cos \varphi dt + \int_0^T V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi) dt \right] \Rightarrow P_m = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Como podemos observar, a potência média é exatamente igual à potência ativa, isto é:  $P_m = P$

## Potência Reativa - $P_Q$

A potência reativa  $P_Q$ , em *volt.ampère reativo [VAR]*, é o negativo do produto da corrente com a parcela da tensão que está em quadratura com ela. Portanto:

$$P_Q = -V \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Diagrama Esquemático

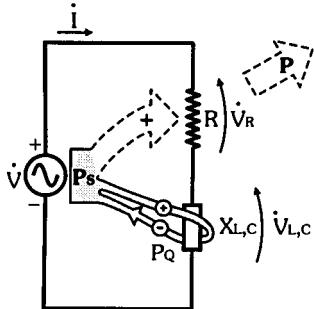
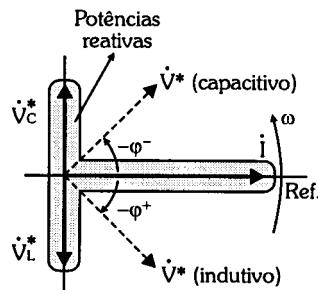
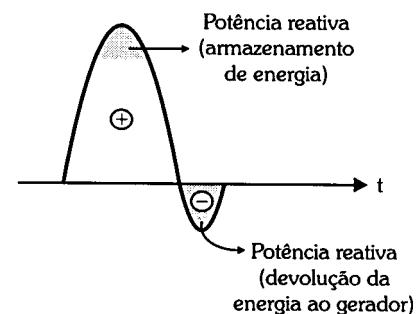


Diagrama Fasorial



Potência Instantânea



Já vimos que uma parcela da região positiva do gráfico de  $p(t)$  é a potência ativa  $P$ . Já, a outra parcela positiva é usada pela impedância para armazenar energia em sua reatância. Assim, a área negativa do gráfico de  $p(t)$  corresponde à devolução dessa energia ao gerador, então concluímos que a potência reativa  $P_Q$  é totalmente perdida, pois não realiza trabalho útil.

Na *reatância indutiva*, a corrente armazena energia na forma de campo magnético. Só que a sua fase  $\varphi$  é positiva, provocando um *atraso na corrente* e, portanto, no armazenamento de energia. É por isso que a potência reativa indutiva é negativa, ou seja:

$$P_Q = -V_L \cdot I_L$$

ou

$$P_Q = -X_L \cdot I_L^2$$

ou

$$P_Q = -\frac{V_L^2}{R}$$

Na *reatância capacitiva*, a corrente armazena energia na forma de campo elétrico. Só que a sua fase  $\varphi$  é negativa, provocando um *avanço na corrente* e, portanto, no armazenamento de energia. É por isso que a potência reativa capacitativa é positiva, ou seja:

$$P_Q = +V_C \cdot I_C$$

ou

$$P_Q = +X_C \cdot I_C^2$$

ou

$$P_Q = -\frac{V_C^2}{R}$$

Novamente, observamos aqui a dualidade de comportamento entre indutância e capacitação.

*"Em um circuito, a potência reativa total fornecida pelo gerador é a soma algébrica das potências reativas desenvolvidas pelas componentes reativas do circuito."*

**Obs.:** Alguns autores representam a potência reativa por *PREAT* ou *Q*.

## Potência Aparente - $P_s$

A potência aparente  $P_s$ , em volt.ampère [VA], é a potência total fornecida pelo gerador à impedância, isto é:

$$P_s = V \cdot I$$

Diagrama Esquemático

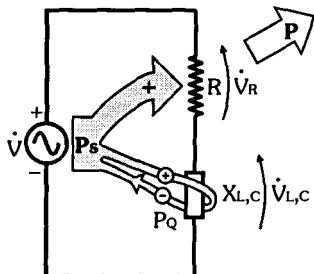
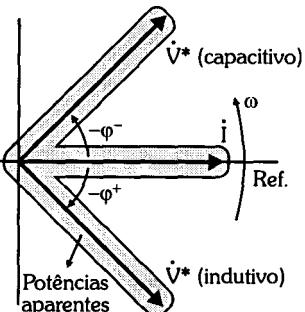
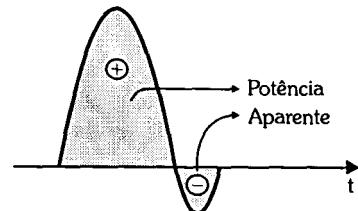


Diagrama Fasorial



Potência Instantânea



A potência aparente pode ser determinada, também, em função do valor da impedância  $Z$ :

$$P_s = Z \cdot I^2$$

ou

$$P_s = \frac{V^2}{Z}$$

Em uma impedância formada pelas componentes resistiva e reativa, a parcela positiva da potência é sempre maior que a negativa, pois a parcela positiva é a soma das potências ativa com a de armazenamento de energia na componente reativa. Já, a parcela negativa corresponde apenas à potência usada pela impedância para devolver ao gerador essa energia armazenada.

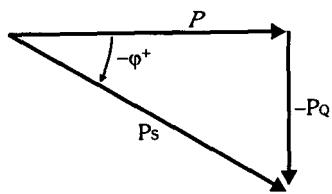
*"Em um circuito, a potência aparente total fornecida pelo gerador é o produto da sua tensão pela corrente fornecida ao circuito."*

**Obs.:** Alguns autores representam a potência aparente por  $P_{AP}$  ou  $S$ .

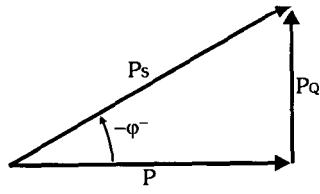
## Triângulo das Potências

Podemos representar as potências em uma impedância por um triângulo de potências.

Na impedância indutiva, temos:



Na impedância capacitativa, temos:



Deste triângulo, tiramos as seguintes relações entre as potências:

$$P_s = \sqrt{P^2 + P_Q^2}$$

e

$$\varphi = -\arctg \frac{P_Q}{P}$$

em que:  $P = P_s \cos \varphi$  e  $P_Q = -P_s \sin \varphi$

Em uma *impedância resistiva pura*,  $\varphi = 0^\circ$ . Nesse caso, toda a potência aparente fornecida pelo gerador é ativa, pois  $P = V \cdot I \cdot \cos 0^\circ = VI$ .

Portanto:  $P_Q = 0$  e  $P = P_S$

Em uma *impedância reativa pura*,  $\varphi = \pm 90^\circ$ . Nesse caso, toda a potência aparente fornecida pelo gerador é reativa e devolvida a ele, pois  $P = V \cdot I \cdot \cos (\pm 90^\circ) = 0$ .

Portanto:  $P_Q = P_S$  e  $P = 0$

### Fator de Potência - FP

A relação entre a potência ativa (consumida) e a potência aparente (fornecida pelo gerador) é denominada *fator de potência FP*, que pode ser dado por:

$$FP = \frac{P}{P_S}$$

ou

$$FP = \cos \varphi$$

O fator de potência é um valor positivo entre 0 e 1 que reflete o quanto da potência aparente fornecida pelo gerador é efetivamente consumido pelo circuito ou pela impedância.

### O Problema dos Circuitos Reativos

Se considerarmos como gerador a tensão da rede, é a potência aparente que as residências e as indústrias recebem da concessionária de energia elétrica, embora ela não seja totalmente utilizada por causa da potência reativa que é devolvida. O fator de potência *FP* é um dado importante a ser analisado em qualquer sistema ou instalação elétrica, pois ele dá a dimensão do aproveitamento da energia fornecida pela rede elétrica, conforme veremos no próximo tópico.

## 15.4

## Wattímetro

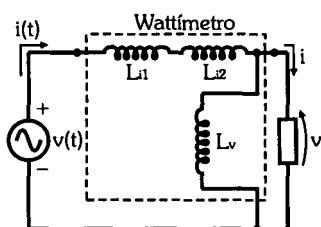
O *wattímetro* é o instrumento de medida de potência. Ele pode ser utilizado tanto em circuitos de corrente contínua como nos de corrente alternada.

Nos circuitos de corrente alternada, o wattímetro mede a potência ativa  $P$  dissipada por um dispositivo ou circuito.

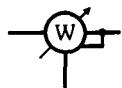
Internamente, o wattímetro é composto por:

- duas bobinas fixas (bobinas de corrente), cujos terminais externos devem ser ligados em série com o dispositivo;
- uma bobina móvel (bobina de tensão), cujos terminais externos devem ser ligados em paralelo com o dispositivo.

Conexões do Wattímetro



Símbolo



O deslocamento da bobina móvel, à qual é ligado o ponteiro, é proporcional ao produto da tensão pela corrente em fase com ela, ou seja, é proporcional à potência ativa  $P$ .

Para utilizar um wattímetro, devem-se observar as suas três especificações máximas: corrente, tensão e potência.

Se uma destas especificações for ultrapassada, o instrumento pode sofrer sérios danos.

## Cargas Resistivas e Reativas

Em nível industrial, a grande maioria das cargas são reativas indutivas ( $\varphi > 0^\circ$ ) ou resistivas ( $\varphi = 0^\circ$ ), embora haja também cargas reativas capacitivas ( $\varphi < 0^\circ$ ).

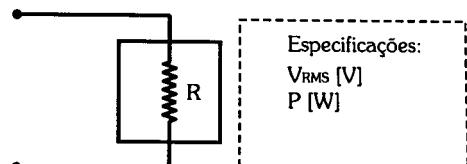
### Cargas Resistivas

As cargas resistivas não provocam defasagem entre tensão e corrente, recebendo do gerador apenas a potência ativa, que é dissipada totalmente.

Essas cargas caracterizam-se, portanto, por terem fator de potência unitário, isto é,  $FP = \cos 0^\circ = 1$ .

Como exemplo de cargas puramente resistivas, podemos citar as lâmpadas incandescentes e os aquecedores elétricos. Geralmente, os dispositivos e equipamentos resistivos são especificados apenas pela tensão de alimentação [ $V_{RMS}$ ] e pela potência ativa que consomem [ $W$ ].

A base de seu funcionamento é o aquecimento de um filamento (lâmpada) ou de uma resistência (aquecedor).



### Cargas Indutivas

As cargas indutivas atrasam a corrente em relação à tensão, recebendo do gerador as potências ativa e reativa. Enquanto a potência ativa é totalmente dissipada, a potência reativa é devolvida ao gerador.

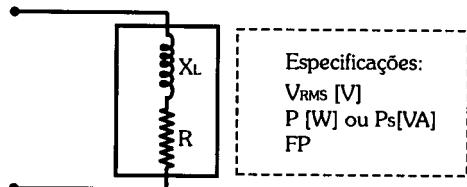
Essas cargas caracterizam-se, portanto, por terem fator de potência menor que a unidade, isto é,  $FP = \cos \varphi^+ < 1$ .

Como exemplo de cargas indutivas, podemos citar os transformadores, as lâmpadas fluorescentes, os motores CA e qualquer máquina que opere por meio de motores e transformadores.

Geralmente, os dispositivos e equipamentos indutivos são especificados pela tensão de alimentação [ $V_{RMS}$ ], pela potência ativa [ $W$ ] ou aparente [ $VA$ ] e pelo fator de potência.

Essas cargas são compostas por enrolamentos que geram fluxo e campo magnéticos. Nos transformadores, o fluxo magnético serve para induzir no secundário uma tensão diferente da aplicada ao primário. Nos motores, o campo magnético serve para produzir uma força capaz de movimentar o rotor. Na lâmpada fluorescente há o reator indutivo que funciona como um choque para limitar a corrente na lâmpada.

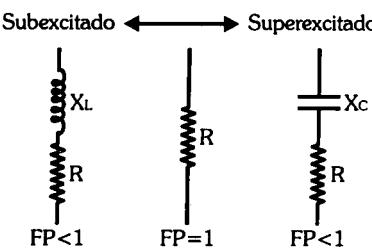
Os enrolamentos são os responsáveis pelo comportamento indutivo dessas cargas, solicitando potência reativa da concessionária de energia elétrica. Porém, eles também dissipam potência ativa, principalmente por causa da resistência dos fios dos enrolamentos.



### Cargas Capacitivas

As cargas capacitivas são aquelas que adiantam a corrente em relação à tensão, recebendo do gerador potências ativa (dissipada) e reativa (devolvida). Essas cargas caracterizam-se também por terem fator de potência menor que a unidade, isto é,  $FP = \cos \varphi^- < 1$ .

Porém, essas cargas não são muito comuns. Uma das exceções é o motor síncrono que, por suas características, pode ter um comportamento indutivo, resistivo ou capacitivo em função da corrente de campo (CC).



Se o motor síncrono estiver *subexcitado* pela corrente de campo, ele se comporta como uma carga indutiva. Se ele estiver *superexcitado*, o seu comportamento é capacitivo. Nos dois casos, o seu fator de potência é menor que a unidade.

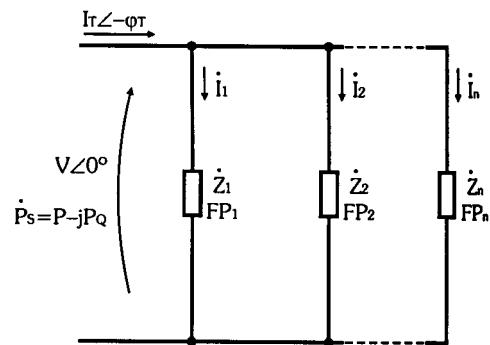
Há ainda um ponto de excitação intermediário em que ele se comporta como uma carga resistiva pura, sendo o seu fator de potência unitário.

## O Problema do Fator de Potência das Instalações Elétricas Industriais

Nas instalações elétricas monofásicas, as cargas  $\dot{Z}_i$  são ligadas em paralelo com a linha de alimentação. Portanto, a corrente fornecida pela concessionária de energia elétrica é a corrente total  $I_T$  defasada de um ângulo total  $\varphi_T$  em relação à tensão  $V$ .

Essa corrente é maior do que a necessária para fornecer potência ativa (útil) às cargas.

A grande maioria das instalações industriais têm a corrente total da linha atrasada, já que a maioria das cargas são indutivas e resistivas.



No entanto, a energia em  $[kW.h]$  cobrada da concessionária refere-se à potência ativa  $P [W]$ , e não à potência aparente  $P_s [VA]$ . Do ponto de vista técnico e econômico, para a concessionária isso não é bom, pois ela é obrigada a gerar mais energia do que o necessário. Por isso, ela sobretaxa os consumidores industriais cujas instalações elétricas operam com fator de potência  $FP < 0,85$ , para incentivá-los a aumentar esse valor.

Para as indústrias, um fator de potência baixo também não é interessante técnica e economicamente, pois além de pagar as multas, a instalação elétrica deve ser feita com condutores de maior diâmetro para suportar a corrente maior solicitada.

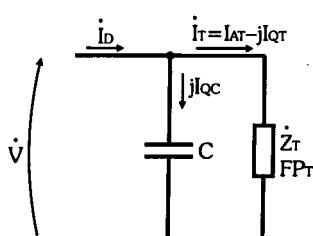
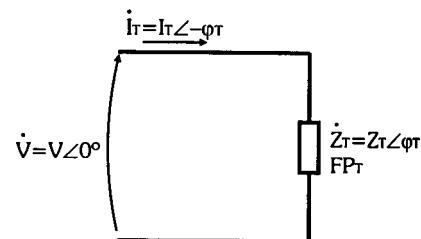
A solução para esse problema é a redução da potência reativa total da instalação, de modo que o fator de potência desejado  $FP_D$  seja igual ou maior que o limite imposto pela concessionária, ou seja,  $FP_D \geq 0,85$ . Esse procedimento técnico é denominado *correção do fator de potência*.

### Correção do Fator de Potência

Para efeito desta análise, consideraremos o caso mais geral que é o de uma instalação elétrica composta por cargas indutivas e resistivas.

As cargas indutivas atrasam a corrente da linha em relação à sua tensão. Essa defasagem total  $\varphi_T$  é tanto maior quanto menor o fator de potência total  $FP_T$ .

A figura ao lado representa uma instalação elétrica com uma carga indutiva equivalente  $\dot{Z}_T = Z_T \angle \varphi_T$  e fator de potência total  $FP_T$ .

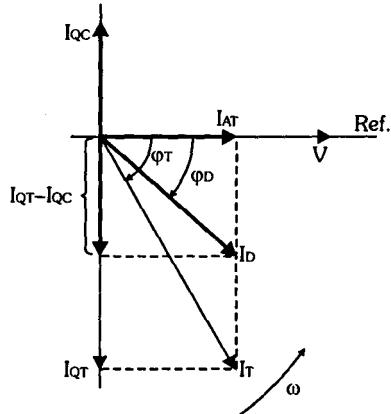


O aumento do fator de potência pode ser obtido pela conexão de um *capacitor* ou de um *banco de capacitores* na entrada da instalação elétrica e em paralelo com as cargas.

A função dessa capacidade é compensar o atraso da corrente, já que a sua propriedade é adiantar a corrente em relação à tensão.

Observe que essa técnica não modifica em nada as cargas instaladas, não acarretando nenhum prejuízo aos seus funcionamentos.

Para calcular o valor desse capacitor (ou da capacidade equivalente do banco), é necessário conhecer o atual fator de potência total da instalação elétrica, isto é,  $FP_T = \cos \varphi_T$ , bem como o fator de potência desejado após a correção, isto é,  $FP_D = \cos \varphi_D$ .



Considere a tensão  $V$  da linha com fase nula. A corrente total  $I_T$  da linha, sem o capacitor  $C$ , está atrasada de  $\varphi_T$  em relação à  $V$ .

A componente da corrente total que está em fase com a tensão  $V$  é a corrente ativa total  $I_{AT}$ , que é responsável pela dissipação da potência ativa total  $P_T$  por parte das componentes resistivas de todas as cargas.

A componente da corrente total que está em quadratura ( $90^\circ$  atrasada) em relação à  $V$  é a corrente reativa total  $I_{QT}$ , que é responsável pela potência reativa total  $P_{QT}$  das cargas reativas.

A potência total que realmente interessa é a ativa, isto é:

$$P_T = V \cdot I_T \cdot \cos \varphi_T = V \cdot I_{AT}$$

Para reduzir a defasagem  $\varphi_T$ , deve-se reduzir  $I_{QT}$  sem alterar  $I_{AT}$ , o que é feito pelo capacitor  $C$  em paralelo. Nele, a corrente reativa  $I_{QC}$  está desfasada de  $180^\circ$  em relação a  $I_{QT}$  da instalação, resultando em uma corrente reativa final ( $I_{QT} - I_{QC}$ ) e na defasagem  $\varphi_D$ , produzindo o fator de potência desejado  $FP_D$ .

A corrente  $I_{QC}$  necessária para reduzir a corrente reativa da instalação pode ser obtida pelo diagrama fasorial:

$$\operatorname{tg} \varphi_D = \frac{I_{QT} - I_{QC}}{I_{AT}} \Rightarrow I_{QT} - I_{QC} = I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_D \Rightarrow I_{QC} = I_{QT} - I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_D$$

$$\text{Mas: } I_{QC} = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\frac{I}{\omega C}} \Rightarrow I_{QC} = \omega C V \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \varphi_T = \frac{I_{QT}}{I_{AT}} \Rightarrow I_{QT} = I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_T$$

$$\text{Assim: } I_{QC} = I_{QT} - I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_D \Rightarrow \omega C V = I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_T - I_{AT} \operatorname{tg} \varphi_D \Rightarrow C = \frac{I_{AT}}{\omega V} \cdot (\operatorname{tg} \varphi_T - \operatorname{tg} \varphi_D)$$

Para que a capacidade  $C$  possa ser calculada a partir da potência ativa, usaremos:  $I_{AT} = \frac{P_T}{V}$ .

Portanto, a capacidade  $C$  necessária para aumentar o fator de potência da instalação para o valor desejado  $FP_D$  pode ser calculada por:

$$C = \frac{P_T}{\omega V^2} \cdot (\operatorname{tg} \varphi_T - \operatorname{tg} \varphi_D)$$

### ATENÇÃO!

- A potência ativa total de uma instalação elétrica é a soma das potências ativas das cargas.
- A potência reativa total de uma instalação elétrica é a soma algébrica das potências reativas das cargas.
- A potência aparente total de uma instalação elétrica NÃO É a soma das potências aparentes das cargas (a exceção é quando todas as cargas têm o mesmo  $FP$ ). Para não incorrer em erros, considere a potência aparente total igual à soma fasorial das potências ativa e reativa totais.

Potência Ativa	Potência Reativa	Potência Aparente
$P = P_S \cdot \cos \varphi$ ou $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$	$P_Q = \pm P_S \cdot \operatorname{sen} \varphi$ ou $P_Q = \pm P \cdot \operatorname{tg} \varphi$	$P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2}$ ou $P_S = V \cdot I$

Obs.: A potência reativa indutiva é negativa e a capacitiva é positiva.

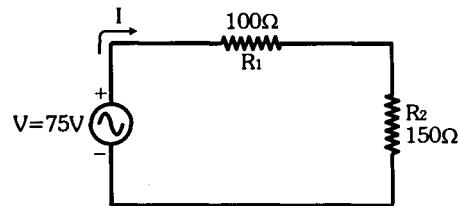
Para finalizar, observamos que o motor síncrono superexcitado (carga capacitativa) ajuda a aumentar o fator de potência de uma instalação elétrica e que, normalmente, os reatores das lâmpadas fluorescentes já têm incorporado um capacitor para aumentar o seu fator de potência.

## Exercícios Propostos

### Análise das Potências Ativa, Reativa e Aparente

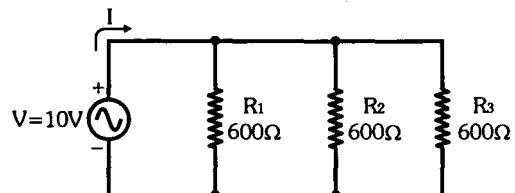
**15.1)** Considere o circuito ao lado.

- Determine a corrente  $I$ , a defasagem  $\phi$  e a potência ativa total  $P$  fornecida pelo gerador ao circuito;
- Determine as potências ativas  $P_1$  e  $P_2$  dissipadas, respectivamente, pelos resistores  $R_1$  e  $R_2$ ;
- Verifique se  $P = P_1 + P_2$ .



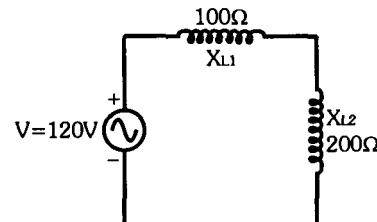
**15.2)** Considere o circuito ao lado.

- Determine a corrente  $I$  e a potência ativa total  $P$  fornecida pelo gerador ao circuito;
- Determine as potências ativas  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  dissipadas, respectivamente, pelos resistores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ ;
- Verifique se  $P = 3.P_1$ .



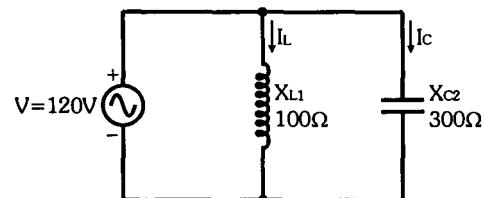
**15.3)** Considere o circuito ao lado.

- Determine a corrente  $I$ , a defasagem  $\phi$  e a potência reativa total  $P_Q$  fornecida pelo gerador ao circuito;
- Determine as potências reativas  $P_{Q1}$  e  $P_{Q2}$  desenvolvidas, respectivamente, pelas reatâncias  $X_{L1}$  e  $X_{L2}$  e verifique se  $P_Q = P_{Q1} + P_{Q2}$ ;
- Determine a potência ativa total  $P$  dissipada pelas reatâncias do circuito.



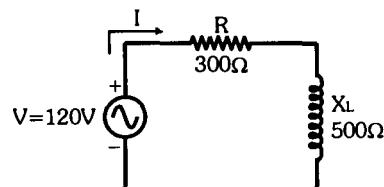
**15.4)** Considere o circuito ao lado.

- Determine as correntes  $I_L$  e  $I_C$ ;
- Determine as potências reativas  $P_{Q1}$  e  $P_{Q2}$  desenvolvidas, respectivamente, pelas reatâncias  $X_{L1}$  e  $X_{C2}$  e a potência reativa total  $P_Q$  fornecida pelo gerador;
- Considerando que a potência reativa fornecida pelo gerador é potência perdida, a presença de dispositivos duais no circuito aumenta ou reduz a perda? Justifique!



**15.5)** Considere o circuito ao lado e determine:

- $Z$ ,  $\phi$  e  $FP$ ;
- $I$  e  $P_s$ ;
- $P$  e  $P_Q$ .

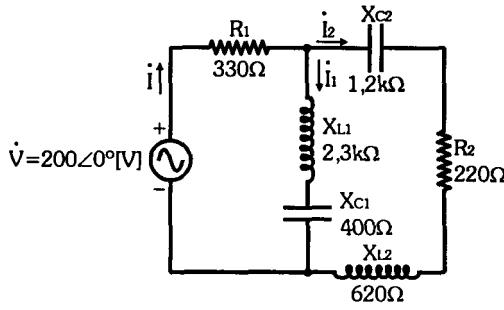


**15.6)** Um circuito  $RC$  série ligado à rede de  $127V/60Hz$  dissipava  $1200W$ , com fator de potência de  $0,8$ . Determine:

- o valor do resistor  $R$  e do capacitor  $C$ ;
- a potência aparente do circuito;
- a potência reativa do circuito.

15.7) Considere o circuito ao lado e determine:

- $\dot{Z}_{eq}$ ,  $\dot{I}$  e as potências  $P_s$ ,  $P$  e  $P_Q$  fornecidas pelo gerador ao circuito;
- as potências ativas ou reativas em cada dispositivo;
- as potências totais  $P_T$  e  $P_{Q_T}$  pela soma algébrica das potências individuais e compare com os resultados obtidos no item a.



15.8) Um gerador  $V = 110V/60Hz$  alimenta um circuito  $RL$  paralelo formado por uma resistência de  $200\Omega$  e por uma reatância indutiva de  $30\Omega$ . Determine:

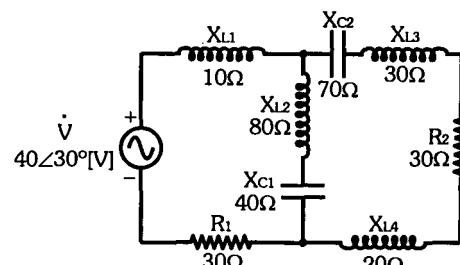
- as potências aparente, reativa e ativa do circuito;
- o fator de potência do circuito;
- a corrente total fornecida pelo gerador.

15.9) No circuito do exercício 15.8 foi ligado um capacitor de  $100\mu F$  em paralelo.

- Determine as potências aparente, reativa e ativa do circuito;
- Determine o fator de potência do circuito;
- Determine a corrente total fornecida pelo gerador;
- Considerando os resultados obtidos nos exercícios 15.8 e 15.9, qual foi a consequência da inclusão do capacitor?

15.10) Considere o circuito ao lado e determine:

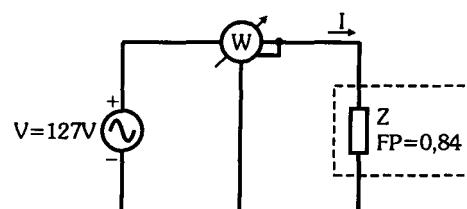
- a impedância  $\dot{Z}$  do circuito;
- as potências aparente, reativa e ativa totais fornecidas pelo gerador ao circuito;
- o fator de potência do circuito;
- as potências reativa ou ativa em cada dispositivo do circuito;
- a soma de todas as potências ativas dos dispositivos e compare este resultado com o obtido no item b;
- a soma de todas as potências reativas dos dispositivos e compare este resultado com o obtido no item b.



### Wattímetro

15.11) Um dispositivo indutivo de impedância  $Z$  e fator de potência  $FP = 0,84$  é alimentado por um gerador e conectado a um wattímetro, que indica a potência de  $3,2kW$ , conforme a figura ao lado. Determine:

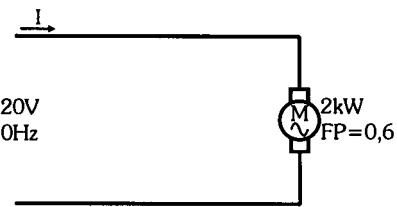
- $I$  e  $\phi$ ;
- $P_s$  e  $P_Q$ ;
- $Z$ ,  $R$  e  $X_L$ .



### Correção do Fator de Potência

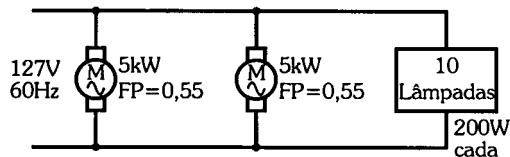
- 15.12) Um motor monofásico de  $220V/60Hz$  consome  $2,4kW$  com  $FP = 0,6$  (indutivo).

- Determine a potência aparente do motor, a corrente  $I$  e a defasagem  $\varphi$  na linha de alimentação;
- Determine o capacitor  $C$  que corrige o fator de potência da instalação para  $0,9$ ;
- Qual é a nova potência aparente da instalação e a nova corrente na linha após a correção do fator de potência?



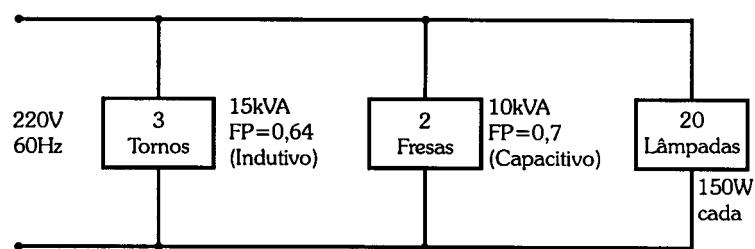
- 15.13) Uma instalação de  $127V/60Hz$  possui dois motores iguais de  $5kW$  e  $FP = 0,55$  (indutivo) e dez lâmpadas incandescentes de  $200W$ , conforme mostra o esquema ao lado. Determine:

- $P_T$ ,  $P_{QT}$ ,  $P_{ST}$  e  $FPT$  da instalação;
- $P'_T$ ,  $P'_{QT}$ ,  $P'_{ST}$  e  $F'PT$  dessa instalação se um motor síncrono de  $4kW$  com  $FP = 0,8$  (capacitivo) for ligado em paralelo com as demais cargas;
- o capacitor  $C$  que corrige o fator de potência dessa instalação para  $0,85$ .



- 15.14) Considere a instalação elétrica de uma oficina mecânica, conforme o esquema ao lado.

Determine o capacitor que corrige o seu fator de potência para  $0,85$ , conforme exigência da concessionária de energia elétrica.

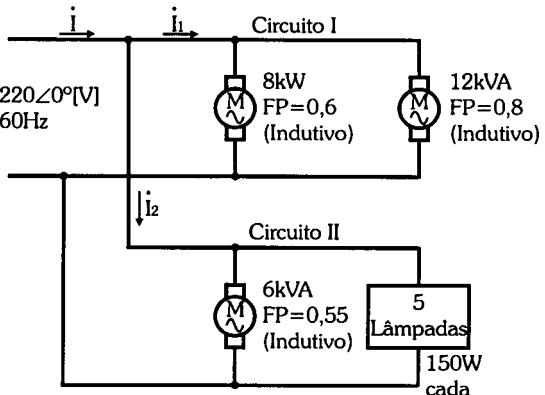


- 15.15) Uma máquina tem a seguinte especificação:  $220V/60Hz$  -  $12kVA$  -  $\cos\varphi = 0,62$ . Ela foi instalada em paralelo com um capacitor de  $270\mu F$ . A proteção dessa instalação foi feita por meio de dois disjuntores de  $50A$  (um para cada fase). Determine a corrente total e o fator de potência total dessa instalação.

- 15.16) O que aconteceria na instalação elétrica do exercício 15.15 se o terminal do capacitor rompesse?

- 15.17) Considere a instalação elétrica ao lado e determine:

- as correntes  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  e  $\dot{I}$ ;
- o fator de potência dos circuitos  $I$  e  $II$  e o fator de potência total da instalação;
- o capacitor que, instalado na entrada da linha, corrige o fator de potência para  $0,85$ ;
- a corrente  $\dot{I}$  após a correção do fator de potência.



- 15.18) Um motor síncrono de  $127V/5kVA$  e  $FP = 0,58$  (capacitivo) e um motor assíncrono de  $127V/6kW$  e  $FP = 0,72$  estão ligados em paralelo. Determine a corrente total e o fator de potência total da instalação.

- 15.19) O que aconteceria com o fator de potência da instalação elétrica do exercício 15.18 caso fossem acrescentadas, em paralelo com os motores, vinte lâmpadas incandescentes de  $100W$  cada?

**16.1**

**Definições**

Até este momento, analisamos os circuitos CA, considerando o indutor e o capacitor como dispositivos ideais, isto é, o indutor como uma reatância indutiva pura  $X_L$  e o capacitor como uma reatância capacitiva pura  $X_C$ . Porém, para determinadas condições de operação, esses dispositivos apresentam desvios de comportamento que devem ser considerados em algumas aplicações, como as que envolvem dispositivos fortemente indutivos (motores e transformadores) e as que operam com elevadas freqüências (circuitos da área de telecomunicações).

Por isso, estabeleceremos três modelos elétricos para eles, a saber: *modelo ideal*, *modelo quase ideal* e *modelo quase real*.

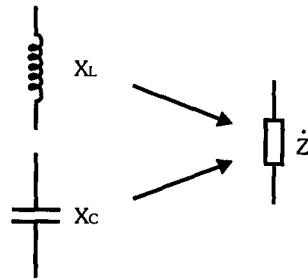
A principal característica elétrica desses dispositivos é denominada *parâmetro principal*, e corresponde à indutância  $L$  para o indutor e à capacidade  $C$  para o capacitor.

Os fatores que determinam a mudança de seus comportamentos são denominados *parâmetros espúrios*, e surgem devido a características construtivas, físicas e elétricas.

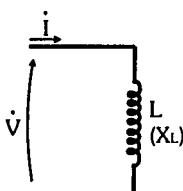
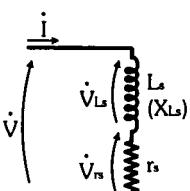
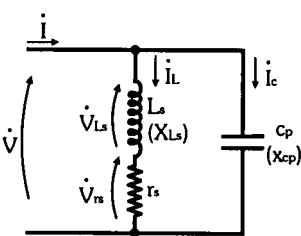
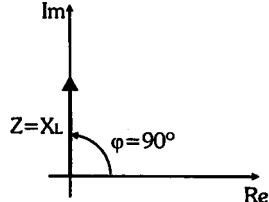
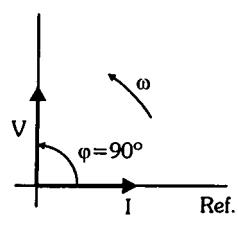
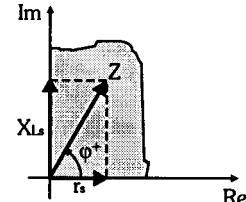
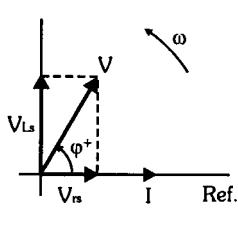
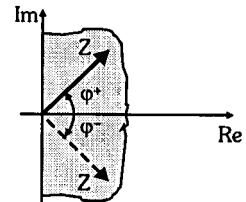
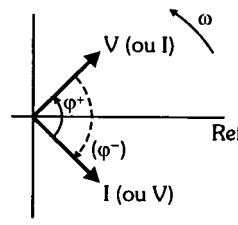
- O *modelo ideal* é formado apenas pelo parâmetro principal de cada dispositivo, de modo que ele se comporta como reatância pura, tal como o consideramo nos capítulos anteriores.
- O *modelo quase real* é formado pelo parâmetro principal e por dois parâmetros espúrios, de modo que o comportamento do indutor e do capacitor chega a ser muito próximo do comportamento real.
- O *modelo quase ideal* é formado pelo parâmetro principal e apenas pelo parâmetro espúrio de maior relevância. Por isso, podemos chamá-lo, também, de *modelo simplificado*.

Adotando os modelos quase real e quase ideal, o indutor e o capacitor comportam-se não mais como reatâncias puras, mas como impedâncias mistas, isto é, com componentes real e imaginária.

Desses três modelos, o ideal já foi bastante detalhado nos capítulos anteriores, de forma que nos aplicaremos mais à análise dos modelos quase ideal e quase real do indutor e do capacitor.



A tabela abaixo mostra os modelos ideal, quase ideal e quase real do indutor, bem como a representação complexa de suas impedâncias equivalentes.

Modelo Ideal	Modelo Quase Ideal (Modelo Simplificado)	Modelo Quase Real
 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>L \rightarrow</math> indutância</p>	 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>L_s \rightarrow</math> indutância série  <b>Parâmetro Espúrio:</b>  <math>r_s \rightarrow</math> resistência CA do fio</p>	 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>L_s \rightarrow</math> indutância série  <b>Parâmetros Espúrios:</b>  <math>r_s \rightarrow</math> resistência CA do fio  <math>c_p \rightarrow</math> capacidade das espiras</p>
$\dot{Z} = jX_L$ $(\varphi = +90^\circ)$  	$\dot{Z} = r_s + jX_{Ls}$ $(0^\circ < \varphi < +90^\circ)$  	$\dot{Z} = (r_s + jX_{Ls}) // (-jX_{cp})$ $(-90^\circ < \varphi < +90^\circ)$  

No indutor ideal, a corrente  $I$  está atrasada de  $90^\circ$  em relação à tensão  $V$ , pois a fase  $\varphi$  da impedância vale  $+90^\circ$ .

Segundo o modelo quase ideal (simplificado),  $r_s$  atua reduzindo o atraso da corrente  $I$ , pois a fase da impedância pode assumir qualquer valor entre  $0^\circ$  e  $+90^\circ$ .

Por fim, se a capacidade  $c_p$  atua, conforme o modelo quase real, a corrente  $I$  não só pode estar atrasada, como também entrar em fase ou adiantar-se em relação à tensão  $V$ , pois a fase da impedância pode assumir qualquer valor entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ .

## Análise dos Modelos Quase Real e Quase Ideal

A capacidade  $c_p$  do modelo quase real surge devido ao comportamento capacitivo das espiras, que funcionam como as placas paralelas separadas por um isolante (ar ou esmalte do fio), sendo, portanto, muito vulnerável às condições ambientais. Mas é possível medi-la experimentalmente, submetendo o indutor às mesmas condições elétricas e ambientais em que ele irá operar no circuito em que será utilizado. Essa capacidade tem um valor muito baixo, geralmente na faixa de unidades a dezenas de picofarad.

Nas freqüências baixas, a reatância  $x_{cp}$  é extremamente elevada, podendo ser desprezada por estar em paralelo. Neste caso, o modelo passa a ser o quase ideal (simplificado).

Assim, o modelo quase real é utilizado apenas quando a freqüência de operação do circuito for muito elevada, como nas faixas de *HF - high frequencies* (3 MHz a 30 MHz), de *VHF - very high frequencies* (30 MHz a 300 MHz) e de *UHF - ultra high frequencies* (300 MHz a 3 GHz).

Nas faixas de *SHF - super high frequencies* (3 GHz a 30 GHz) e de *EHF - extra high frequencies* (30 GHz a 300 GHz), um modelo mais sofisticado deve ser utilizado, já que outros parâmetros espúrios podem passar a atuar de forma relevante.

A resistência  $r_s$  dos modelos quase real e quase ideal corresponde à resistência *CA* do fio do indutor, ou seja, sob influência de uma corrente alternada.

Em baixas freqüências, o valor de  $r_s$  é praticamente constante, podendo ser medido diretamente por um ohmímetro. A partir de uma determinada freqüência ocorre o fenômeno denominado *efeito pelicular* (ou skin), isto é, a corrente alternada tende a se concentrar na periferia da seção transversal do fio, reduzindo a sua área útil e, consequentemente, aumentando a sua resistência.

Neste caso, a resistência  $r_s$  deve ser medida experimentalmente, submetendo o indutor à mesma freqüência em que ele irá operar no circuito em que será utilizado, ou estimada por meio de um método matemático empírico, conforme mostraremos na página seguinte.

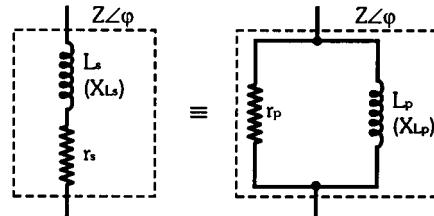
Em freqüências baixas, a resistência  $r_s$  tem um valor pequeno, na faixa de unidades a centenas de ohm, mas pode assumir um valor elevado em altas freqüências por causa do efeito pelicular.

O modelo quase ideal pode ser modificado, substituindo o ramo *RL* série por seu equivalente paralelo por meio das fórmulas:

$$r_p = \frac{Z}{\cos \varphi}$$

e

$$X_{Lp} = \frac{Z}{\sin \varphi}$$

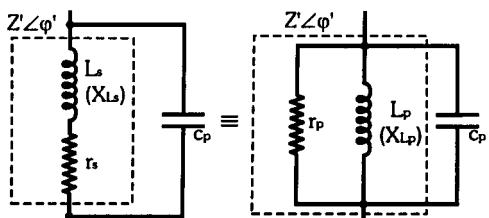


O equivalente paralelo do modelo quase real pode ser obtido por meio das seguintes fórmulas:

$$r_p = \frac{Z'}{\cos \varphi'}$$

e

$$X_{Lp}' = \frac{Z'}{\sin \varphi'}$$



No modelo quase real,  $Z'$  e  $\varphi'$  correspondem, respectivamente, ao módulo e à fase da impedância referente apenas ao ramo *RL*.

## Método Empírico para a Determinação da Resistência CA do Fio do Indutor

Há vários métodos empíricos para a determinação da resistência CA do fio de um indutor. O grau de complexidade desses métodos depende do nível de precisão desejado e da aplicação do indutor. É certo que os projetos eletrônicos da área de telecomunicações, principalmente aqueles que operam em altíssimas freqüências, são os que exigem maior grau de precisão.

Para os nossos propósitos, apresentaremos um método relativamente fácil, válido apenas para fios de cobre à temperatura ambiente, cujos resultados têm um nível razoável de precisão.

### 1) Cálculo da resistência CC do fio do indutor ( $r_{cc}$ ):

Conforme já vimos, a Segunda Lei de Ohm estabelece a relação entre a resistência de um material com a sua natureza e suas dimensões. A fórmula para calcular a resistência  $r_{cc}$  de um condutor é:

$$r_{cc} = \frac{\rho \cdot L_c}{S}$$

em que:  $\rho$  = resistividade (para o cobre a 20°C:  $\rho \approx 0,017 \Omega \cdot mm^2/m$ )  
 $L_c$  = comprimento do condutor, em [m]  
 $S$  = área da seção transversal do condutor, em [ $mm^2$ ]

A tabela seguinte fornece uma relação de condutores de cobre esmaltais com as especificações de área  $S$  [ $mm^2$ ] e de diâmetro  $D$  [mm] (valores aproximados) segundo as normas brasileira (NBR) e americana (AWG).

Instalações Elétricas Residenciais		Confecção de Bobinas		
NBR (*) / AWG	S [mm <sup>2</sup> ]	D [mm]	NBR (*) / AWG	S [mm <sup>2</sup> ]
5	16,77	4,62	18	0,82
6	13,30	4,11	(*)	0,75
7	10,55	3,67	19	0,65
8	8,37	3,26	20	0,52
9	6,63	2,91	(*)	0,50
(*)	6,00	2,76	21	0,41
10	5,26	2,59	22	0,33
11	4,17	2,30	23	0,26
(*)	4,00	2,26	24	0,20
12	3,31	2,05	25	0,16
13	2,62	1,83	26	0,13
(*)	2,50	1,78	27	0,10
14	2,08	1,63	(*)	0,10
15	1,65	1,45	28	0,08
(*)	1,50	1,38	29	0,06
16	1,31	1,29	30	0,05
17	1,04	1,15	31	0,04
(*)	1,00	1,13	32	0,03

### 2) Cálculo da constante $k_1$ :

$$k_1 = 0,0133 \cdot \sqrt{S \cdot f}$$

em que:  $S$  ⇒ área da seção transversal do fio, em [ $mm^2$ ]  
 $f$  ⇒ freqüência de operação, em [Hz]

3) Determinação da constante  $k_2$ :

Entre com o valor  $k_1$  na tabela de conversão dada abaixo e obtenha a constante  $k_2$ .

**Obs.:** Na maioria dos casos, é necessário adotar o  $k_1$  mais próximo do calculado e estimar o valor de  $k_2$  baseado nos valores imediatamente acima e abaixo do encontrado na tabela.

4) Cálculo da resistência  $CA$  do fio do indutor ( $r_s$ ):

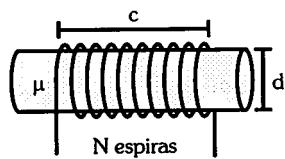
$$r_s = k_2 \cdot r_{cc}$$

em que:  $r_s \Rightarrow$  resistência  $CA$ , em  $[\Omega]$   
 $r_{cc} \Rightarrow$  resistência  $CC$ , em  $[\Omega]$

Tabela de Conversão - $k_1 / k_2$							
$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$
$\leq 0,6$	1,000	2,1	1,094	4,2	1,752	10,0	3,799
0,7	1,001	2,2	1,111	4,4	1,823	11,0	4,151
0,8	1,002	2,3	1,131	4,6	1,899	12,0	4,504
0,9	1,003	2,4	1,152	4,8	1,971	13,0	4,853
1,0	1,005	2,5	1,175	5,0	2,043	14,0	5,210
1,1	1,008	2,6	1,201	5,3	2,149	16,0	5,915
1,2	1,011	2,7	1,228	5,7	2,289	18,0	6,621
1,3	1,015	2,8	1,256	6,0	2,394	20,0	7,330
1,4	1,020	2,9	1,286	6,5	2,560	25,0	9,097
1,5	1,026	3,0	1,318	7,0	2,743	30,0	10,867
1,6	1,033	3,2	1,385	7,5	2,884	35,0	12,221
1,7	1,042	3,4	1,456	8,0	3,095	40,0	14,395
1,8	1,052	3,6	1,529	8,5	3,271	45,0	16,163
1,9	1,064	3,8	1,603	9,0	3,446	50,0	17,930
2,0	1,078	4,0	1,678	9,5	3,622	60,0	21,406

### Projeto de uma Bobina Cilíndrica de uma Camada

As fórmulas seguintes servem para calcular a indutância  $L$  de uma bobina cilíndrica de uma camada e o comprimento  $L_c$  do condutor. O resultado da indutância é mais preciso quando o comprimento  $c$  da bobina é pelo menos *dez vezes* maior que o seu diâmetro  $d$ , e o resultado do comprimento do condutor é mais preciso quando as espiras estiverem próximas uma da outra.



$$L = \frac{0,785 \cdot \mu \cdot N^2 \cdot d^2}{c}$$

e

$$L_c = N \pi \cdot d$$

em que:  
 $L$  = indutância, em  $[H]$   
 $L_c$  = comprimento do condutor, em  $[m]$   
 $N$  = número de espiras  
 $c$  = comprimento da bobina, em  $[m]$   
 $d$  = diâmetro da bobina, em  $[m]$   
 $\mu$  = permeabilidade magnética do núcleo

A permeabilidade magnética do vácuo vale:

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \times 10^{-7} T.m/A$ . Para os demais materiais, a permeabilidade magnética  $\mu$  é um múltiplo de  $\mu_0$ , conforme a tabela ao lado:

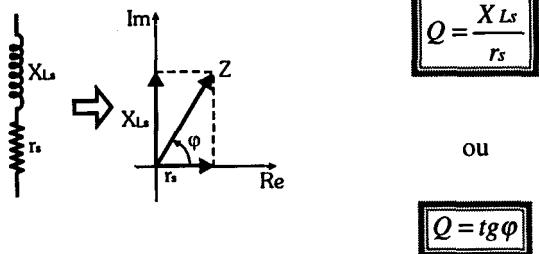
Núcleo	Permeabilidade - $\mu$ [ $T.m/A$ ]
Ar	$\mu_0$
Materiais diversos	$\mu_0$
Ferro	10. $\mu_0$ a 8000. $\mu_0$
Ferrite	10. $\mu_0$ a 5000. $\mu_0$

## Fator de Qualidade do Indutor - $Q$

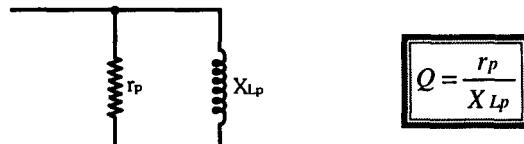
O fator de qualidade  $Q$  (ou índice de mérito) de um indutor mostra a relação entre a energia armazenada (potência reativa) e a energia dissipada (potência ativa), isto é,  $Q = X_L I^2 / r_s I^2$ .

O  $Q$  do indutor pode ser determinado, também, em função da sua reatância a uma determinada freqüência e da sua resistência  $CA$ , considerando tanto o modelo série quanto o seu equivalente paralelo.

**Modelo Quase Ideal - Série**



**Modelo Quase Ideal – Paralelo**



No caso particular em que  $Q > 10$ , os parâmetros  $X_{Lp}$  e  $r_p$  do modelo equivalente paralelo podem ser determinados mais facilmente por:

$$X_{Lp} \approx X_{Ls}$$

e

$$r_p \approx \frac{X_{Ls}^2}{r_s}$$

ou

$$r_p \approx Q \cdot X_{Ls}$$

Se o indutor estiver conectado a outros resistores, eventualmente necessitaremos determinar o fator de qualidade total do circuito, que denominamos  $Qt$ . Para isso, basta usar o modelo que for mais conveniente, calculando  $Qt$  pelas fórmulas acima, só que substituindo  $r_s$  ou  $r_p$  pela resistência equivalente do circuito ( $R_s$  ou  $R_p$ ).

Neste caso, a conversão série / paralelo pode facilitar a análise desses circuitos.

Em geral, o indutor precisa ter um  $Q$  elevado para não comprometer o comportamento dos circuitos, conforme veremos em algumas aplicações nos módulos seguintes.

É considerado um fator de qualidade bom quando  $Q > 10$  e ótimo quando  $Q > 20$ . As bobinas de RF de muitos sistemas de comunicação têm um  $Q$  entre 20 e 400.

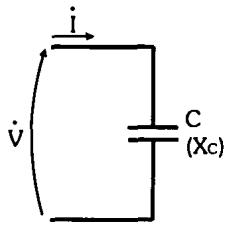
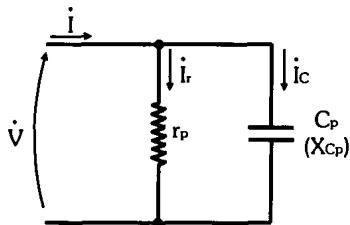
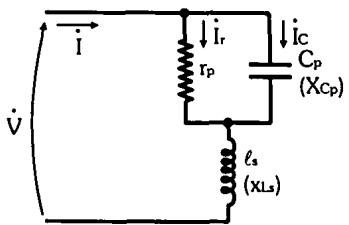
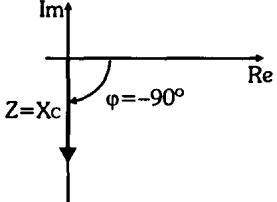
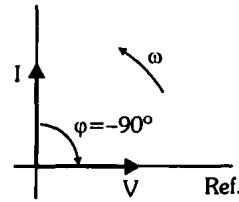
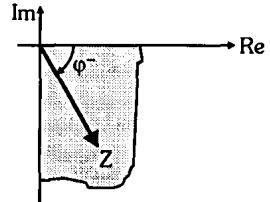
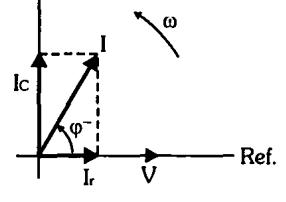
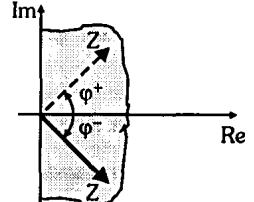
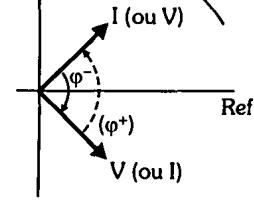
Uma das exceções é o alto-falante, cujo  $Q$  é extremamente baixo nas freqüências de áudio, sendo a sua impedância resistiva e praticamente constante nessa faixa de freqüências.

## Choque

*Choque* ou *bobina de choque* são denominações muito comuns para o indutor quando a sua função é apenas se opor à passagem da corrente alternada. Em sistemas de radiofreqüência, é comum também utilizar a denominação *choque de RF*.

É considerado um choque o indutor com um fator de qualidade  $Q > 10$ .

A tabela abaixo mostra os modelos ideal, quase ideal e quase real do capacitor, bem como a representação complexa de suas impedâncias equivalentes.

Modelo Ideal	Modelo Quase Ideal (Modelo Simplificado)	Modelo Quase Real
 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>C \rightarrow</math> capacidade</p>	 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>C_p \rightarrow</math> capacidade</p> <p><b>Parâmetro Espúrio:</b>  <math>r_p \rightarrow</math> resistência do dielétrico</p>	 <p><b>Parâmetro Principal:</b>  <math>C_p \rightarrow</math> capacidade</p> <p><b>Parâmetro Espúrio:</b>  <math>r_p \rightarrow</math> resistência do dielétrico  <math>\ell_s \rightarrow</math> indutância dos elementos do capacitor</p>
$\dot{Z} = -jX_c$ $(\varphi = -90^\circ)$  	$\dot{Z} = r_p // (-jX_{C_p})$ $(-90^\circ < \varphi < 0^\circ)$  	$\dot{Z} = [r_p // (-jX_{C_p})] + jX_{L_s}$ $(-90^\circ < \varphi < +90^\circ)$  

No capacitor ideal, a corrente  $I$  está adiantada de  $90^\circ$  em relação à tensão  $V$ , pois a fase  $\varphi$  da impedância vale  $-90^\circ$ .

Segundo o modelo quase ideal (simplificado),  $r_p$  atua reduzindo o avanço da corrente  $I$ , pois a fase da impedância pode assumir qualquer valor entre  $0^\circ$  e  $-90^\circ$ .

Por fim, se a indutância  $\ell_s$  atua, conforme o modelo quase real, a corrente  $I$  não só pode estar adiantada, como também entrar em fase ou atrasar-se em relação à tensão  $V$ , pois a fase da impedância pode assumir qualquer valor entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ .

## Análise dos Modelos Quase Real e Quase Ideal

A indutância  $\ell_s$  do modelo quase real surge devido à influência dos elementos construtivos do capacitor, isto é, placas, terminais, eletrodos, etc. Os elementos internos estão imersos ou em contato com substâncias químicas e os terminais têm seus comprimentos alterados para serem soldados na placa de circuito impresso. Tudo isto torna difícil prever o valor de  $\ell_s$ , mas é possível medi-lo experimentalmente, submetendo o capacitor às mesmas condições elétricas e físicas em que ele irá operar no circuito em que será utilizado. Essa indutância tem um valor muito baixo, geralmente de nanohenry a microhenry.

Nas freqüências baixas, a reatância  $X_{Ls}$  é extremamente baixa, podendo ser desprezada por estar em série. Neste caso, o modelo passa a ser o quase ideal (simplificado).

Assim, o modelo quase real é utilizado apenas quando a freqüência de operação do circuito for muito elevada, como nas faixas de *HF - high frequencies* (3 MHz a 30 MHz), de *VHF - very high frequencies* (30 MHz a 300 MHz) e de *UHF - ultra high frequencies* (300 MHz a 3 GHz).

Nas faixas de *SHF - super high frequencies* (3 GHz a 30 GHz) e de *EHF - extra high frequencies* (30 GHz a 300 GHz), outros parâmetros espúrios podem atuar de forma relevante, como a resistência de absorção dielétrica. Neste caso, é necessário utilizar um modelo mais sofisticado.

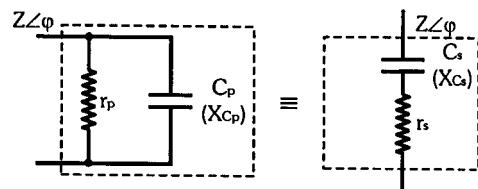
A resistência  $r_p$  dos modelos quase real e quase ideal corresponde à resistência do dielétrico do capacitor. O seu valor é extremamente elevado, geralmente acima de centenas de megaohm, podendo chegar até a teraohm, de modo que a corrente de fuga é normalmente desprezível.

No entanto, um capacitor envelhecido pode apresentar um aumento na corrente de fuga pela diminuição de  $r_p$ , a ponto de comprometer o funcionamento do circuito do qual ele faz parte. Isso é muito comum em fontes de alimentação de alta tensão de televisores, osciloscópios, monitores de computador e circuitos de acionamento de laser *He-Ne*.

Se houver realmente fuga, o valor aproximado de  $r_p$  pode ser medido por um ohmímetro, embora o instrumento mais adequado seja o megômetro.

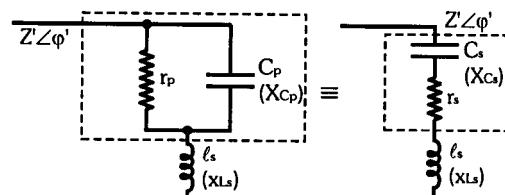
O *modelo quase ideal* pode ser modificado, substituindo o ramo *RC* paralelo por seu equivalente série por meio das fórmulas:

$$r_s = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{e} \quad X_{Cs} = Z \cdot \operatorname{sen} \varphi$$



O equivalente série do *modelo quase real* pode ser obtido por meio das seguintes fórmulas:

$$r_s' = Z' \cdot \cos \varphi' \quad \text{e} \quad X_{Cs}' = Z' \cdot \operatorname{sen} \varphi'$$



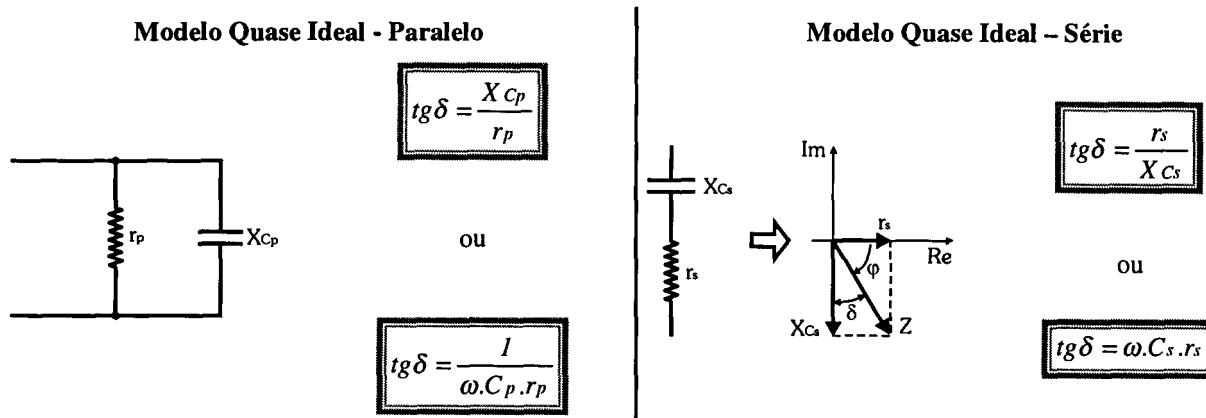
No modelo quase real,  $Z'$  e  $\varphi'$  correspondem, respectivamente, ao módulo e à fase da impedância referente apenas ao ramo *RC*.

## Fator de Perda do Capacitor - $\operatorname{tg} \delta$

O fator de perda  $\operatorname{tg} \delta$  (ou de dissipação) de um capacitor é análogo ao fator de qualidade  $Q$  do indutor, só que toma como referência o ângulo  $\delta$  (delta minúsculo), que é o complemento da fase  $\varphi$  da impedância.

Esse fator é fornecido pelos fabricantes de capacitores por meio de seus catálogos e manuais, sendo uma especificação importante nos projetos de alta tensão, pois ele dá a dimensão da corrente de fuga e da potência ativa que poderá ser consumida pelo capacitor.

O  $\operatorname{tg} \delta$  do capacitor pode ser determinado em função da sua reatância a uma determinada freqüência e da resistência de seu dielétrico, considerando tanto o modelo paralelo quanto o seu equivalente série.



No caso particular em que  $\operatorname{tg} \delta < 0,1$  (o que ocorre na maioria dos casos, dado o elevado valor de  $r_p$ ), os parâmetros  $X_{Cs}$  e  $r_s$  do modelo equivalente série podem ser determinados mais facilmente por:

$$X_{Cs} \cong X_{Cp}$$

e

$$r_s \cong \frac{X_{Cp}^2}{r_p}$$

ou

$$r_s \cong X_{Cp} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

Se o capacitor estiver conectado a outros resistores, eventualmente necessitaremos determinar o fator de perda total do circuito, que denominamos  $\operatorname{tg} \delta_T$ .

Para isso, basta usar o modelo que for mais conveniente, calculando  $\operatorname{tg} \delta_T$  pelas fórmulas acima, só que substituindo  $r_s$  ou  $r_p$  pela resistência equivalente do circuito ( $R_s$  ou  $R_p$ ).

Neste caso, a conversão série / paralelo pode facilitar a análise desses circuitos.

Na prática, o capacitor precisa ter um fator  $\operatorname{tg} \delta$  muito pequeno para não comprometer o comportamento dos circuitos.

É considerado um fator de perda *bom* quando  $\operatorname{tg} \delta < 0,01$  e *ótimo* quando  $\operatorname{tg} \delta < 0,001$ .

As pontes de impedâncias são largamente empregadas para a medida de impedâncias, indutâncias e capacitâncias com grande precisão.

Essas medidas são feitas por comparação com valores previamente conhecidos. Por isso, são utilizados padrões de resistências, indutâncias e capacitâncias.

Os padrões mais comuns são as décadas resistivas e capacitivas, devido à precisão e à variedade de modelos comerciais.

Por isso, é muito comum implementar pontes usando apenas padrões de resistências e capacitâncias, inclusive para medir indutâncias.

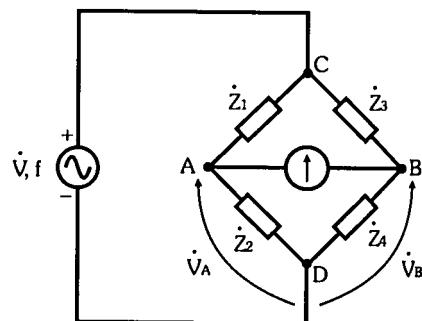
Para detectar o equilíbrio da ponte, pode ser utilizado um osciloscópio, um galvanômetro de vibração ou um transdutor eletroacústico, sendo este último limitado a pontes que operam nas freqüências de áudio.

### Condições de Equilíbrio

Considere a ponte ao lado, formada por quatro impedâncias alimentadas por um gerador  $CA$  entre os pontos  $C$  e  $D$  com um instrumento detector conectado entre os pontos  $A$  e  $B$ .

As duas impedâncias da esquerda ( $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ ) e as duas da direita ( $\dot{Z}_3$  e  $\dot{Z}_4$ ) formam dois divisores de tensão, sendo que:

$$\dot{V}_A = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{V} \quad \text{e} \quad \dot{V}_B = \frac{\dot{Z}_4}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_4} \cdot \dot{V}$$



No equilíbrio,  $\dot{V}_{AB} = 0$ , isto é,  $\dot{V}_A = \dot{V}_B$ . Igualando as suas respectivas expressões, temos:

$$\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \cdot \dot{V} = \frac{\dot{Z}_4}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_4} \cdot \dot{V} \Rightarrow \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4 = \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_4 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4 \Rightarrow \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_4}$$

Como cada impedância é um valor complexo  $\dot{Z}_i = Z_i \angle \varphi_i$ , no equilíbrio deve haver igualdade entre as relações dos módulos e entre as diferenças das fases, definindo as condições de equilíbrio da ponte.

1ª Condição de Equilíbrio:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

(Relação entre Módulos)

2ª Condição de Equilíbrio:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4$$

(Diferença entre Fases)

Teoricamente as expressões acima são válidas para qualquer tipo de ponte.

Porém, na prática, há outros fatores a serem considerados:

- Esse tipo de ponte deve operar com freqüências de no máximo algumas dezenas de quilohertz, já que em freqüências elevadas, a inexistência de um "terra" comum entre o gerador e o instrumento de medida pode causar vários problemas de ordem prática.
- Em geral, as pontes são implementadas substituindo duas impedâncias por padrões de resistências, sendo um variável e outro fixo.
- Uma terceira impedância é constituída por um padrão capacitivo em paralelo com um padrão resistivo, ambos variáveis.
- A quarta impedância é aquela a ser determinada. A posição desses dispositivos na ponte depende da natureza da impedância desconhecida.

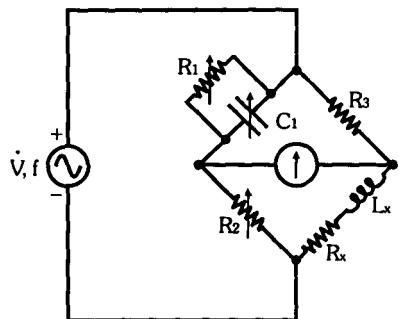
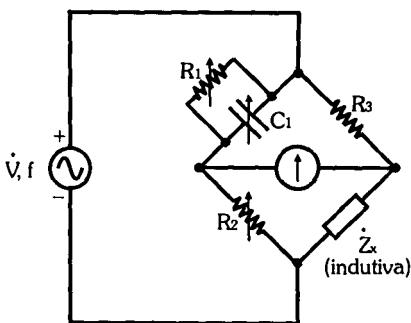
A ponte de impedâncias ao lado pode ser implementada para medir uma indutância desconhecida  $\dot{Z}_x$ .

Nesse caso:

$$\dot{Z}_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{Z_1}$$

e

$$\varphi_x = -\varphi_I$$



Se considerarmos o equivalente série da impedância indutiva desconhecida  $\dot{Z}_x$ , isto é, formada por uma indutância  $L_x$  em série com uma resistência  $R_x$ , as fórmulas para o cálculo das componentes de  $\dot{Z}_x$  tornam-se bastante simples:

$$L_x = C_1 \cdot R_2 \cdot R_3$$

e

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_1}$$

O equilíbrio da ponte é obtido por meio do ajuste de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C_1$ .

Adotando padrões adequados para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $C_1$ , é possível medir indutâncias desde microhenry até henry.

A resistência  $R_x$  pode ser a própria resistência  $CA$  do fio do indutor no modelo série ( $r_s$ ) na freqüência de operação da ponte.

Porém, para medi-la, é necessário ajustar  $R_1$  e  $R_2$  com valores baixos, a fim de que a ponte entre em equilíbrio.

No caso de se desejar medir apenas a indutância  $L_x$  do indutor desconhecido, pode-se colocar em série com ele um resistor  $R_x$  bem maior do que a ordem de grandeza de  $r_s$ , facilitando o equilíbrio da ponte.

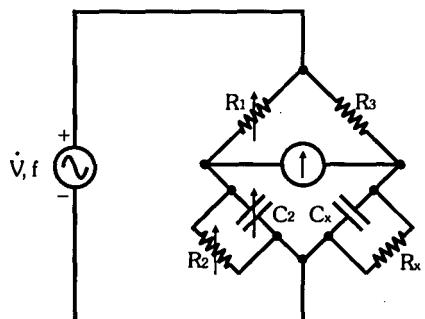
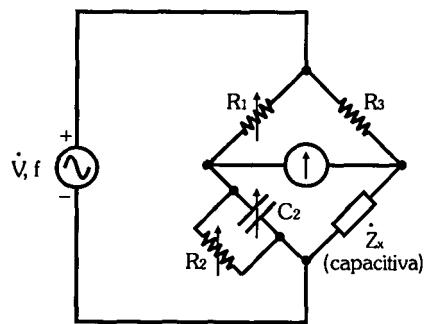
A ponte de impedâncias ao lado pode ser implementada para medir uma capacidade desconhecida  $\dot{Z}_x$ .

Nesse caso:

$$Z_x = Z_2 \cdot \frac{R_3}{R_1}$$

e

$$\varphi_x = \varphi_2$$



Se considerarmos o equivalente paralelo da impedância capacitiva desconhecida  $\dot{Z}_x$ , isto é, formada por uma capacidade  $C_x$  em paralelo com uma resistência  $R_x$ , as fórmulas para o cálculo das componentes de  $\dot{Z}_x$  tornam-se bastante simples:

$$C_x = C_2 \cdot \frac{R_1}{R_3}$$

e

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_1}$$

O equilíbrio da ponte é obtido por meio do ajuste de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C_2$ .

Adotando padrões adequados para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $C_2$ , é possível medir capacidades desde nanofarad até microfarad.

A resistência  $R_x$  pode ser a própria resistência do dielétrico do capacitor no modelo paralelo ( $r_p$ ).

Porém, para medi-la, é necessário ajustar  $R_2$  com um valor elevado e  $R_1$  com um valor baixo, a fim de que a ponte entre em equilíbrio.

No caso de se desejar medir apenas a capacidade  $C_x$  do capacitor desconhecido, pode-se colocar em paralelo com ele um resistor  $R_x$  bem menor do que a ordem de grandeza de  $r_p$ , facilitando o equilíbrio da ponte.

## Exercícios Propostos

### Modelamento do Indutor

**16.1)** Considere o circuito ao lado:

- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  usando o modelo ideal;
- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  considerando o modelo quase ideal, com  $r_s = 10\Omega$  em  $20kHz$ ;
- Nessas condições de operação, que modelo é o mais adequado, considerando a precisão dos resultados e a simplicidade de análise?

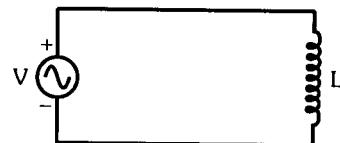


**16.2)** Considere o circuito ao lado:

- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  usando o modelo ideal;
- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  considerando o modelo quase ideal, com  $r_s = 200\Omega$  em  $400kHz$ ;
- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  considerando o modelo quase real, com  $r_s = 200\Omega$  e  $c_p = 2pF$  em  $400kHz$ ;
- Nessas condições de operação, que modelo é o mais adequado, considerando a precisão dos resultados e a simplicidade de análise?
- Se na freqüência de  $4MHz$  a capacitância  $c_p$  se mantiver em  $2pF$  e a resistência  $r_s$  aumentar para  $450\Omega$ , quais são os novos valores de  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$ ? Adote o modelo que considerar mais adequado.



**16.3)** No circuito ao lado, a bobina de  $RF$  de  $47\mu H$  é ligada a um gerador com freqüência de  $1MHz$ . Nesta freqüência,  $r_s = 70\Omega$ .



- Determine o  $Q$  da bobina e classifique-o como ruim, bom ou ótimo;
- Determine o novo  $Q$  da bobina se a freqüência aumentar para  $10MHz$ , causando a elevação de  $r_s$  para  $100\Omega$ , e classifique-o como ruim, bom ou ótimo;
- Se um resistor de  $22k\Omega$  for ligado em paralelo com essa bobina (operando em  $10MHz$ ), o que acontece com o fator de qualidade  $Q_T$  do circuito?

**Sugestão:** Substitua a bobina pelo equivalente paralelo do seu modelo quase ideal.

**16.4)** Uma bobina de  $10mH$  foi feita de um fio de cobre com  $S = 0,5mm^2$ . Com um ohmímetro, mediu-se a resistência do fio, obtendo  $r_{cc} = 42\Omega$ . Determine:

- a resistência  $r_s$  e fator  $Q$  da bobina na freqüência de  $50kHz$ ;
- a resistência  $r_s$  e fator  $Q$  da bobina na freqüência de  $100kHz$ .

**16.5)** Deseja-se caracterizar o modelo quase ideal de um indutor com valor nominal de  $100\mu H$ , bem como verificar o seu comportamento na freqüência de  $10kHz$ . Para isso, ele foi submetido a uma tensão de  $400mV / 10kHz$ . Um miliampérmetro CA detectou uma corrente de  $59,2mA$  nesse indutor. Determine  $r_s$  e  $Q$  do indutor na freqüência  $10kHz$ .

**16.6)** Qual é a potência ativa dissipada pelo indutor do exercício 16.5 nas condições do teste?

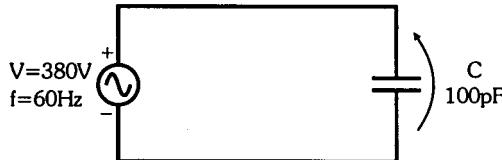
- 16.7) Um técnico confeccionou uma bobina de 80 espiras usando um fio esmaltado 28 AWG, enrolando-o em um cilindro de papelão com diâmetro de 1cm (núcleo de ar). As espiras ficaram encostadas uma na outra. Determine:

- o comprimento  $c$  da bobina e o comprimento  $L_c$  do condutor;
- a resistência  $r_{cc}$  do condutor e a indutância  $L$  da bobina;
- a resistência  $r_s$  e o  $Q$  da bobina na freqüência de 10kHz.

### Modelamento do Capacitor

- 16.8) Considere o circuito ao lado:

- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  usando o modelo ideal;
- Determine  $Z$ ,  $I$  e  $\varphi$  considerando o modelo quase ideal, com  $r_p = 1G\Omega$ ;
- Nessas condições de operação, que modelo é o mais adequado, considerando a precisão dos resultados e a simplicidade de análise?



- 16.9) Considere que o capacitor do exercício anterior, por causa do envelhecimento, tenha a resistência do dielétrico reduzida para  $100M\Omega$ . Nesta condição, determine o fator de perda, a corrente de fuga e a potência ativa dissipada pelo capacitor.

- 16.10) Um capacitor de  $47pF$  com  $\tg \delta = 50 \times 10^{-4}$  atua em um circuito recebendo um sinal de  $250kHz$ . Sabe-se que nas suas condições de operação ele possui uma indutância espúria de  $125nH$ .

- Determine a resistência  $r_p$  do dielétrico;
- Determine o módulo e a fase da impedância do capacitor nesse circuito usando o modelo quase real;
- Os parâmetros espúrios  $r_p$  e  $l_s$  têm influência relevante no comportamento desse capacitor?
- Em que condições de operação os parâmetros espúrios  $r_p$  e  $l_s$  poderiam comprometer o comportamento do capacitor?

- 16.11) Deseja-se caracterizar o modelo quase ideal de um capacitor com valor nominal de  $470nF$ , bem como verificar o seu comportamento na freqüência de  $1kHz$ . Para isso, ele foi submetido a uma tensão de  $20V / 1kHz$ . Um miliamperímetro CA detectou uma corrente de  $59,2mA$  nesse capacitor. Determine  $r_p$  e  $\tg \delta$  do capacitor, na freqüência de  $1kHz$ .

- 16.12) O capacitor em teste no exercício 16.11 encontra-se em bom estado? Justifique!

### Ponte para Medir Indutância

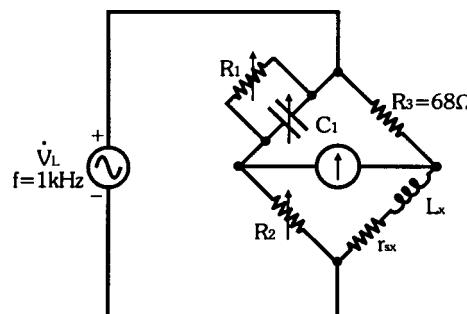
- 16.13) Considere a ponte ao lado. No equilíbrio, as décadas resistivas e a capacitativa marcaram:

$$R_1 = 39\Omega$$

$$R_2 = 16\Omega$$

$$C_1 = 230nF$$

- Determine o valor de  $L_x$ ;
- Determine o valor da resistência  $r_{sx}$  do fio do indutor na freqüência de operação da ponte.



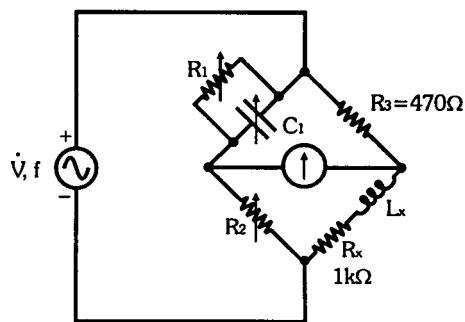
- 16.14) Com a ponte abaixo, deseja-se medir a indutância de um indutor confeccionado por um técnico. Para facilitar o equilíbrio, ele conectou um resistor de  $1k\Omega$  em série.

No equilíbrio, as décadas resistivas e a capacitiva marcaram:

$$R_1 = 798\Omega$$

$$R_2 = 1698\Omega$$

$$C_1 = 173nF$$



Determine o valor da indutância  $L_x$ .

- 16.15) Com uma ponte para medir impedância indutiva operando em  $1kHz$ , deseja-se obter o módulo e a fase de uma impedância desconhecida  $\dot{Z}_x$ . Determine esses valores, considerando que  $R_3 = 220\Omega$  e no equilíbrio as décadas resistivas e a capacitiva marcaram  $R_1 = 653\Omega$ ,  $R_2 = 3148\Omega$  e  $C_1 = 1\mu F$ .

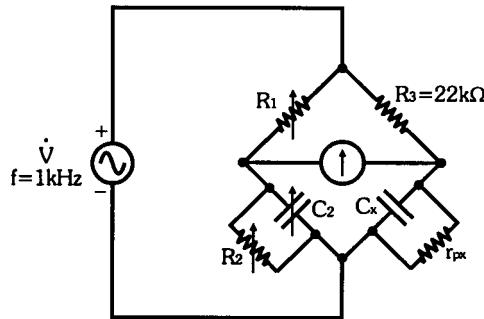
#### Ponte para Medir Capacitância

- 16.16) Considere a ponte ao lado. No equilíbrio, as décadas resistivas e a capacitiva marcaram:

$$R_1 = 12310\Omega$$

$$R_2 = 5659k\Omega$$

$$C_2 = 84nF$$



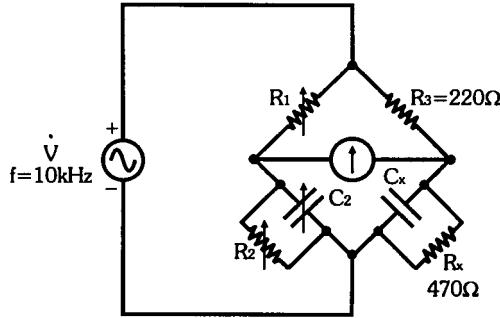
- a) Determine o valor comercial de  $C_x$ ;  
b) Determine o valor da resistência  $r_{px}$  do dielétrico do capacitor.

- 16.17) Com a ponte abaixo, deseja-se medir a capacidade de um capacitor  $C_x$ . Para facilitar o equilíbrio, conectou-se um resistor de  $470\Omega$  em paralelo. No equilíbrio, as décadas resistivas e a capacitiva marcaram:

$$R_1 = 1746\Omega$$

$$R_2 = 3730\Omega$$

$$C_2 = 126nF$$



Determine o valor comercial de  $C_x$ .

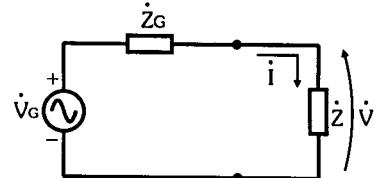
- 16.18) Com uma ponte para medir impedância capacitativa operando em  $10kHz$ , deseja-se obter o módulo e a fase de uma impedância desconhecida  $\dot{Z}_x$ . Determine esses valores, considerando que  $R_3 = 680\Omega$  e no equilíbrio as décadas resistivas e a capacitiva marcaram  $R_1 = 937\Omega$ ,  $R_2 = 628\Omega$  e  $C_2 = 46nF$ .

**17.1**

**Gerador de Tensão CA Real**

Um gerador de tensão CA real produz internamente uma tensão  $\dot{V}_G$  e possui uma impedância interna  $\dot{Z}_G$ .

Consideremos o caso em que esse gerador alimenta uma carga  $\dot{Z}$ .



Para entender o que ocorre com a corrente  $I$  e com a tensão  $V$  que chegam à carga, é necessário considerar a relação entre as impedâncias  $\dot{Z}_G$  e  $\dot{Z}$ , bem como as suas naturezas, ou seja, os seus módulos e as suas fases.

A corrente  $I$  e a tensão  $V$  na carga  $Z$  são dadas pelas fórmulas ao lado:

$$I = \frac{\dot{V}_G}{\dot{Z}_G + \dot{Z}}$$

$$V = \frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_G + \dot{Z}} \cdot \dot{V}_G$$

Como o módulo e a fase das impedâncias mudam com a freqüência, a análise do comportamento do gerador em função da relação entre  $\dot{Z}_G$  e  $\dot{Z}$  deve valer apenas para uma pequena faixa de freqüências de operação, em que a ordem de grandeza do módulo das impedâncias não sofre grandes alterações. De fato, há três condições a serem analisadas:

**1ª Condição** - Em módulo,  $Z$  é muito maior que  $Z_G$ , isto é,  $Z \gg Z_G$ .

O gerador comporta-se como um gerador de tensão ideal, de modo que a tensão  $V$  é praticamente constante e igual a  $\dot{V}_G$  e a corrente  $I$  é função da impedância  $Z$  da carga. Matematicamente:

$$\dot{V} \cong \dot{V}_G \cong cte \quad \text{e} \quad I \cong \frac{\dot{V}_G}{Z}$$

**2ª Condição** - Em módulo,  $Z$  é muito menor que  $Z_G$ , isto é,  $Z \ll Z_G$ .

O gerador comporta-se como um gerador de corrente ideal, de modo que a corrente  $I$  é praticamente constante e a tensão  $V$  é função da impedância  $Z$  da carga. Matematicamente:

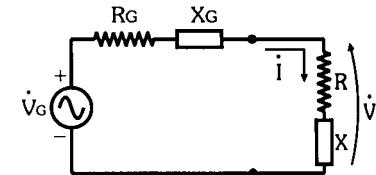
$$I \cong \frac{\dot{V}_G}{\dot{Z}_G} \cong cte \quad \text{e} \quad \dot{V} = \dot{Z} \cdot I$$

**3ª Condição** - Em módulo,  $Z$  é da mesma ordem de grandeza de  $Z_G$ .

Neste caso, tanto a tensão  $V$  quanto a corrente  $I$  na carga são funções de  $Z$  e de  $Z_G$ , conforme as expressões apresentadas inicialmente.

## Máxima Transferência de Potência Ativa

Consideremos que a impedância interna do gerador seja dada por  $\dot{Z}_G = R_G + jX_G$  e a impedância da carga seja dada por  $\dot{Z} = R + jX$ , em que as reatâncias  $X_G$  e  $X$  podem ser tanto indutivas como capacitivas.

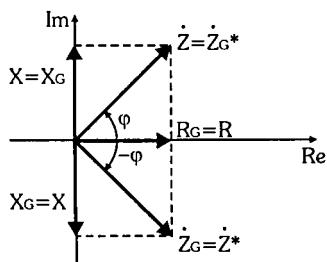


Da potência aparente disponível no gerador, uma parcela reativa vai para a componente reativa  $X_G$  da sua impedância interna e a outra segue para a componente reativa  $X$  da carga. Conforme já analisamos no Capítulo 15, essa potência é devolvida ao gerador.

Assim, do ponto de vista do rendimento do gerador, o ideal é que essas potências reativas se anulem. Como a corrente é única para as duas impedâncias, as duas potências reativas irão se anular apenas quando as reatâncias  $X_G$  e  $X$  tiverem valores iguais e naturezas opostas, ou seja, se  $\dot{Z}_G$  é indutiva,  $\dot{Z}$  deve ser capacitiva, ou vice-versa.

Nesse caso, o gerador "enxerga" uma impedância equivalente  $\dot{Z}_G + \dot{Z}$  puramente resistiva, cujo valor é  $R_G + R$ .

Caímos, então, na mesma análise de máxima transferência de potência que é realizada para circuitos resistivos em corrente contínua, isto é, a máxima transferência de potência ativa do gerador à carga ocorre quando  $R = R_G$ .



Matematicamente, a condição de máxima transferência de potência ativa em circuitos CA ocorre quando a impedância da carga é o conjugado da impedância interna do gerador, ou seja:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_G^*$$

Esta condição é denominada de *casamento de impedâncias*.

A máxima potência ativa transferida do gerador à carga vale:

$$P_{\max} = \frac{V_G^2}{4.R_G}$$

Os bons geradores de áudio e de RF possuem uma impedância interna puramente resistiva na faixa de freqüências de operação.

O mesmo ocorre com a impedância dos diversos circuitos e dispositivos utilizados em sistemas de áudio e de telecomunicações, como amplificadores, antenas, microfones, alto-falantes, etc.

### Parâmetros de um Circuito CA

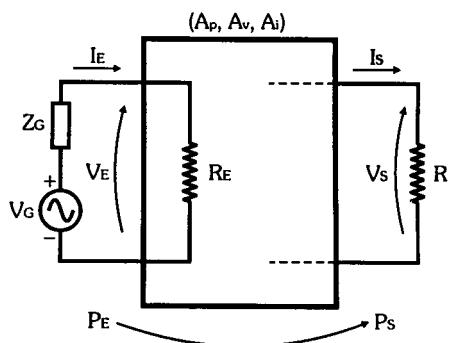
Antes de analisarmos o conceito da unidade decibel, apresentaremos alguns parâmetros que servem para caracterizar um circuito elétrico CA.

Considere um circuito CA alimentado por um gerador de tensão real.

A resistência de entrada  $R_E$  do circuito CA é a resistência equivalente vista pelo gerador real.

Na entrada do circuito CA são aplicadas, em módulo, a tensão  $V_E$  e a corrente  $I_E$ , resultando em uma potência  $P_E$ .

O circuito CA tem em sua saída uma carga  $R$  que recebe, em módulo, a tensão  $V_s$  e a corrente  $I_s$ , resultando em uma potência  $P_s$ .



Os ganhos de potência  $A_p$ , de tensão  $A_v$  e de corrente  $A_i$  são as relações entre essas grandezas presentes na saída e na entrada do circuito CA, isto é:

$$A_p = \frac{P_s}{P_E}$$

$$A_v = \frac{V_s}{V_E}$$

$$A_i = \frac{I_s}{I_E}$$

### Decibel

O Bel [B] é a unidade básica de medida de relação entre potências, tendo sido desenvolvida pelos engenheiros da *Bell Telephone System*, empresa americana criada por Graham Bell, o inventor do telefone.

Essa unidade de medida baseia-se no logaritmo de uma relação, tendo como característica a *compressão* do resultado da relação.

Um Bell é dividido em 10 decibéis [dB], sendo esta a unidade padrão de medida de relações entre grandezas, considerando apenas os seus módulos.

#### Ganho de Potência em Decibel

O ganho de potência em decibel  $A_p[dB]$  é dado pelas fórmulas:

$$A_p(dB) = 10 \log \frac{P_s}{P_E}$$

ou

$$A_p(dB) = 10 \log A_p$$

A tabela abaixo mostra alguns valores de relações entre potências, os seus ganhos de potência em [dB] correspondentes e os seus respectivos significados:

$P_s / P_E$	$A_p[dB]$	Significado
1	0	A potência na carga é igual à potência de entrada.
2	+3	A potência na carga é o dobro da potência de entrada. Há amplificação de 3dB.
10	+10	A potência na carga é dez vezes maior que a potência de entrada. Há amplificação de 10dB.
1/2	-3	A potência na carga é a metade da potência de entrada. Há atenuação de 3dB.
1/10	-10	A potência na carga é dez vezes menor que a potência de entrada. Há atenuação de 10dB.

## Ganho de Tensão em Decibel

Na prática, é mais comum medirmos tensões no circuito com o voltímetro e o osciloscópio, e não potências, de forma que precisamos da relação entre tensões, dada em decibel.

No circuito genérico anterior, podemos substituir as potências na entrada e na carga por relações entre tensões e resistências, conforme segue:

$$A_{P(dB)} = 10 \cdot \log \frac{P_S}{P_E} = 10 \cdot \log \frac{\frac{V_S^2}{R}}{\frac{V_E^2}{R_E}} = 10 \cdot \log \left[ \left( \frac{V_S}{V_E} \right)^2 \cdot \frac{R_E}{R} \right] \Rightarrow A_{P(dB)} = 20 \cdot \log \frac{V_S}{V_E} + 10 \cdot \log \frac{R_E}{R}$$

Nesta expressão, podemos destacar o ganho de tensão dado em decibel, isto é:

$$A_{V(dB)} = 20 \cdot \log \frac{V_S}{V_E} \quad \text{ou} \quad A_{V(dB)} = 20 \cdot \log A_V$$

No caso de resistências iguais ( $R_E = R$ ), os ganhos de potência e de tensão em decibel se igualam, isto é,  $A_{P(dB)} = A_{V(dB)}$ .

No caso de resistências diferentes, é necessário fazer a correção por meio da relação logarítmica entre as resistências de entrada e da carga.

A tabela abaixo mostra alguns valores de relações entre tensões, os seus ganhos de tensão em [dB] correspondentes e os seus respectivos significados:

V <sub>S</sub> / V <sub>E</sub>	A <sub>V</sub> [dB]	Significado
1	0	A tensão na carga é igual à tensão de entrada.
$\sqrt{2}$	+3	A tensão na carga é aproximadamente 1,41 maior que a tensão de entrada. Há amplificação de 3dB.
2	+6	A tensão na carga é o dobro da tensão de entrada. Há amplificação de 6dB.
10	+10	A tensão na carga é dez vezes maior que a tensão de entrada. Há amplificação de 20dB.
$1/\sqrt{2}$	-3	A tensão na carga é aproximadamente 0,707 vezes menor que a tensão de entrada. Há atenuação de 3dB.
$1/2$	-6	A tensão na carga é a metade da tensão de entrada. Há atenuação de 6dB.
$1/10$	-10	A tensão na carga é dez vezes menor que a tensão de entrada. Há atenuação de 20dB.

## Ganho de Corrente em Decibel

Do mesmo modo que definimos o ganho de tensão em decibel, podemos fazê-lo com a corrente, substituindo as potências na entrada e na carga por relações entre correntes e resistências, conforme segue:

$$A_{P(dB)} = 10 \cdot \log \frac{P_S}{P_E} = 10 \cdot \log \frac{I_S^2 \cdot R}{I_E^2 \cdot R_E} \Rightarrow A_{P(dB)} = 20 \cdot \log \frac{I_S}{I_E} + 10 \cdot \log \frac{R}{R_E}$$

Nesta expressão, podemos destacar o ganho de corrente dado em decibel, ou seja:

$$A_{i(dB)} = 20 \cdot \log \frac{I_S}{I_E} \quad \text{ou} \quad A_{i(dB)} = 20 \cdot \log A_i$$

No caso de resistências iguais ( $R_E = R$ ), os ganhos de potência e de corrente em decibel se igualam, isto é,  $A_{P(dB)} = A_{I(dB)}$ .

No caso de resistências diferentes, é necessário fazer a correção por meio da relação logarítmica entre as resistências de entrada e da carga.

As relações entre as correntes e os correspondentes ganhos de corrente em [dB] resultam em uma tabela semelhante à de tensão, de modo que achamos desnecessário repeti-la.

No entanto, você deve ter observado que nestas tabelas foram destacadas as linhas em que a amplificação e a atenuação valem, respectivamente,  $+3dB$  e  $-3dB$ .

O motivo é que essas relações têm um significado especial para a eletrônica e para as telecomunicações. No próximo tópico, exploraremos adequadamente esta condição.

### Medida de Potência em $dBm$

Como vimos, o decibel é a unidade de medida de uma relação. Por exemplo: afirmar que a potência de saída de um circuito é  $20 dB$  não tem o menor significado, mas afirmar que ela é  $+20 dB$  em relação à potência de entrada significa que a potência de saída é cem vezes maior, pois:

$$A_{P(dB)} = 10 \log \frac{P_S}{P_E} \Rightarrow +20 = 10 \log \frac{P_S}{P_E} \Rightarrow 2 = \log \frac{P_S}{P_E} \Rightarrow \frac{P_S}{P_E} = 10^2 \Rightarrow P_S = 100.P_E$$

Assim, para medir níveis absolutos de potência, é necessário adotar um *valor de referência*. A potência de referência mais utilizada é  $1mW$ , de forma que, agora, podemos medir a potência de um sinal em [ $dBm$ ]:

$P(dBm) = 10 \log \frac{P}{P_{ref}}$

em que:  $P_{ref} = 1mW$

Neste caso, as potências de entrada  $P_E$  e de saída  $P_S$  de um sistema se relacionam por:  $P_{S(dBm)} = P_{E(dBm)} + A_{P(dB)}$

### Medida de Tensão em $dBu$

Para medir níveis absolutos de tensão, é necessário, também, adotar um *valor de referência*. Uma tensão de referência muito utilizada é  $0,775V$ , que corresponde à potência de  $1mW$  aplicada a uma resistência de  $600\Omega$ . Assim, a tensão é dada em  $dBu$  (ou  $dBV$ ):

$V(dBu) = 20 \log \frac{V}{V_{ref}}$

em que:  $V_{ref} = 0,775V$

Neste caso, as tensões de entrada e de saída de um sistema se relacionam por:

$$V_{S(dBu)} = V_{E(dBu)} + A_{V(dB)}$$

**Obs.:** O valor de  $600\Omega$  é usado justamente por ser um padrão de resistência de diversos sistemas de comunicação. Como já afirmamos anteriormente, este é valor padronizado para a resistência interna dos geradores de áudio.

### Conversão de $dBu$ em $dBm$

Se a resistência na qual é medida a tensão for igual a  $600\Omega$ , a relação é:  $dBm = dBu$ .

Se a resistência for diferente de  $600\Omega$ , a relação é:  $P(dBm) = V(dBu) + 10 \log \frac{600}{R}$ .

Um sistema que opera em corrente alternada tem um comportamento variável em função da freqüência de operação, principalmente aqueles formados por dispositivos reativos.

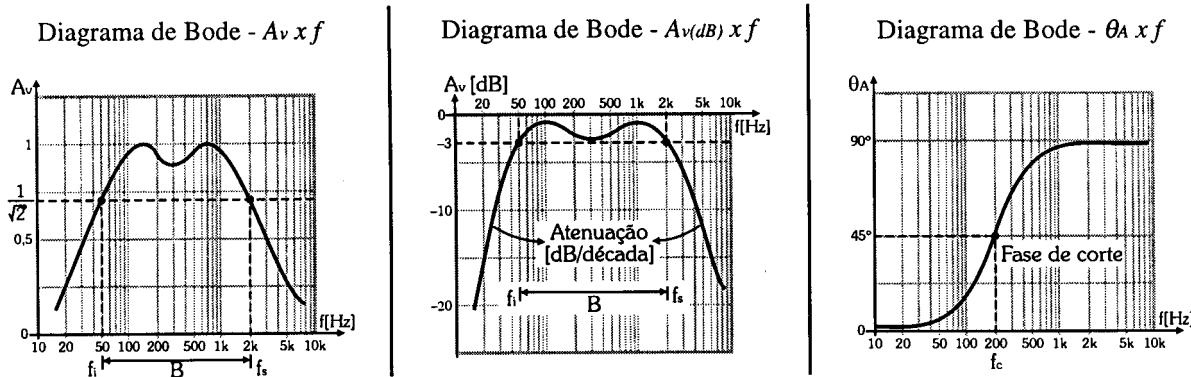
Este comportamento é chamado de *resposta em freqüência* do circuito, e pode ser expresso graficamente, relacionando um determinado ganho (potência, tensão ou corrente) em função da freqüência. Na maioria das aplicações, o ganho de tensão  $A_v$  é o mais utilizado.

### Diagramas de Bode de Módulo e de Fase

Denomina-se *Diagrama de Bode* o gráfico que relaciona o ganho de tensão de um circuito em função da freqüência de operação. A característica do ganho a ser representada pode ser tanto o módulo quanto a sua fase.

O módulo do ganho informa o quanto a tensão de saída é maior ou menor do que a tensão de entrada. A fase do ganho informa o quanto a tensão de saída é defasada em relação à tensão de entrada.

Nas figuras abaixo, apresentamos, como exemplo, dois Diagramas de Bode de Módulo (um adimensional e outro em decibel) e um Diagrama de Bode de Fase.



Observe que o eixo vertical do ganho e da fase é graduado linearmente. Já, o eixo horizontal em que estão locadas as freqüências é graduado logaritmicamente, tornando possível a representação do comportamento do circuito em uma ampla faixa de freqüências.

O eixo em logaritmo causa a *compressão* das freqüências.

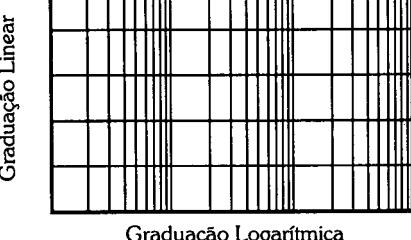
A folha padronizada para este tipo de representação é denominada *monolog*.

Ela é encontrada em qualquer papelaria, ou pode ser confeccionada facilmente por computador.

Nestes gráficos, podemos observar três outros tipos de parâmetros importantes de um circuito: a *banda passante* (ou *largura de faixa*), as *freqüências de corte* e a *taxa de atenuação*.

Estes parâmetros baseiam-se na forma como o ser humano relaciona-se com os sinais audíveis.

O ouvido humano só é sensível às variações da potência sonora se ela, no mínimo, dobrar de valor ou cair pela metade. Quaisquer variações menores do que estas não afetam a percepção do ouvido humano.



Como vimos anteriormente, em decibel, o dobro e a metade do ganho de potência correspondem, respectivamente, ao aumento e à diminuição do ganho de tensão e de corrente a uma razão de  $\sqrt{2}$ , pois estas variações são equivalentes, para os três ganhos, a  $\pm 3dB$ .

### Banda Passante - $B$

A faixa de freqüências em que um circuito opera com um ganho aproximadamente constante é denominada banda passante ( $B$ ) (ou *largura de faixa*).

É considerado um ganho aproximadamente constante aquele cujas variações não ultrapassam o limite de  $\pm 3dB$ , independente de o ganho ser de potência, tensão ou corrente.

### Freqüências de Corte - $f_c$

A freqüência em que o ganho de um circuito atinge o limite de variação de  $\pm 3dB$  é denominada freqüência de corte  $f_c$ .

No exemplo anterior, o circuito possui duas freqüências de corte, denominadas freqüências de corte inferior  $f_i$  e superior  $f_s$ .

### Taxa de Atenuação - $dB/década$ ou $dB/oitava$

Uma *década* de freqüência corresponde à sua variação de um *múltiplo de 10 (dez)*. A taxa de atenuação representa o quanto o ganho em decibel varia cada vez que a freqüência aumenta ou diminui em dez vezes.

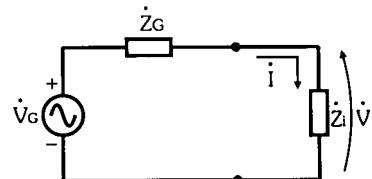
A taxa de atenuação dada em  $dB/década$  é a mais utilizada, mas também é possível encontrá-la em  $dB/oitava$ .

Uma *oitava* de freqüência corresponde à sua variação de um *múltiplo de 2 (dois)*, isto é, representa o quanto o ganho em decibel varia cada vez que a freqüência dobra ou cai pela metade.

## Exercícios Propostos

### *Gerador de Tensão CA Real*

- 17.1) Um gerador possui impedância interna de  $\dot{Z}_G = 600\angle 30^\circ [\Omega]$  na freqüência de  $1MHz$ . Ele foi ajustado em aberto para a tensão  $\dot{V}_G = 50\angle 0^\circ [V]$ . Esse gerador será alimentado por três cargas diferentes, conforme mostra a figura ao lado. Determine:



- a)  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}$  e  $P$  na carga  $\dot{Z}_1$  e analise os resultados;
- b)  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}$  e  $P$  na carga  $\dot{Z}_2$  e analise os resultados;
- c)  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}$  e  $P$  na carga  $\dot{Z}_3$  e analise os resultados.

$$\dot{Z}_1 = 20\angle -60^\circ [k\Omega]$$

$$\dot{Z}_2 = 10\angle 45^\circ [\Omega]$$

$$\dot{Z}_3 = 600\angle -30^\circ [\Omega]$$

- 17.2) Considere o gerador do exercício 17.1. Determine:

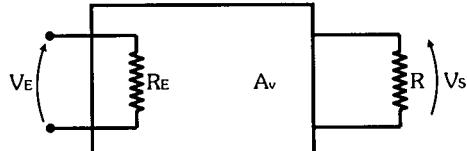
- a) a sua impedância interna na freqüência de  $10MHz$ ;
- b) a impedância da carga (nas formas polar e retangular) que possibilitaria receber a máxima potência desse gerador;
- c) a potência ativa máxima que o gerador transfere para essa carga.

- 17.3) Uma fonte de sinal de *RF* possui impedância interna de  $\dot{Z}_G = 50\angle -60^\circ [\Omega]$  na freqüência de  $20MHz$  e produz uma tensão em vazio de  $\dot{V}_G = 20\angle 0^\circ [mV]$ . Determine:

- a) a impedância da carga (nas formas polar e retangular) que possibilitaria receber a máxima potência da fonte de sinal;
- b) a potência máxima que a fonte de sinal transfere para a carga nas condições do item a.

### *Decibel*

- 17.4) Considere o sistema ao lado, que representa um circuito *CA* cuja resistência de entrada vale  $R_E = 600\Omega$  e cuja carga vale  $R = 8\Omega$ .



- a) Se em uma determinada freqüência de operação o ganho de tensão do sistema for  $A_v = 1$ , determine  $V_s$ ,  $P_E$ ,  $P_s$  e  $A_p$  quando é aplicada na entrada uma tensão  $V_E = 5V$ .
- b) Na condição do exercício anterior, determine  $A_v(dB)$ ,  $V_E(dBu)$ ,  $P_E(dBm)$ ,  $V_s(dBu)$ ,  $P_s(dBm)$  e  $A_p(dB)$ .
- c) Se em uma outra freqüência de operação o ganho de tensão do sistema cair para  $A_v = 0,707$ , determine  $V_s$ ,  $P_E$ ,  $P_s$  e  $A_p$  quando é aplicada na entrada a mesma tensão  $V_E = 5V$ .
- d) Na condição do exercício anterior, determine  $A_v(dB)$ ,  $V_E(dBu)$ ,  $P_E(dBm)$ ,  $V_s(dBu)$ ,  $P_s(dBm)$  e  $A_p(dB)$ .

- 17.5) O ganho de um circuito é  $A_v = \frac{jX_L}{R + jX_L}$ . Determine as expressões do módulo  $A_v$  e da fase  $\theta_A$  deste ganho.

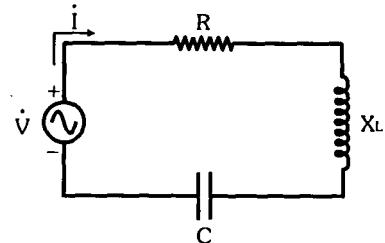
- 17.6) No circuito do exercício 17.5, a indutância vale  $L = 15,92mH$  e a resistência vale  $R = 1k\Omega$ . Determine:

- a) os valores do módulo  $A_v$  do ganho nas freqüências  $100Hz$ ,  $1kHz$ ,  $10kHz$  e  $100kHz$ ;
- b) os valores do módulo  $A_v(dB)$  do ganho nas mesmas freqüências do item a;
- c) os valores da fase  $\theta_A$  do ganho nas mesmas freqüências do item a;
- d) a freqüência de corte do circuito, baseando-se nos resultados obtidos nos itens a e b;
- e) a taxa de atenuação desse circuito, baseando-se nos resultados obtidos nos itens a e b.

Considere o círculo RLC série ao lado formado por dispositivos ideais.

As reatâncias  $X_L$  e  $X_C$  estão, fasorialmente, sempre defasadas de  $180^\circ$  entre si, de modo que a reatância predominante elimina o efeito da outra, reduzindo ou anulando o efeito reativo total do círculo.

No círculo RLC série, a reatância predominante é a de *maior* valor.



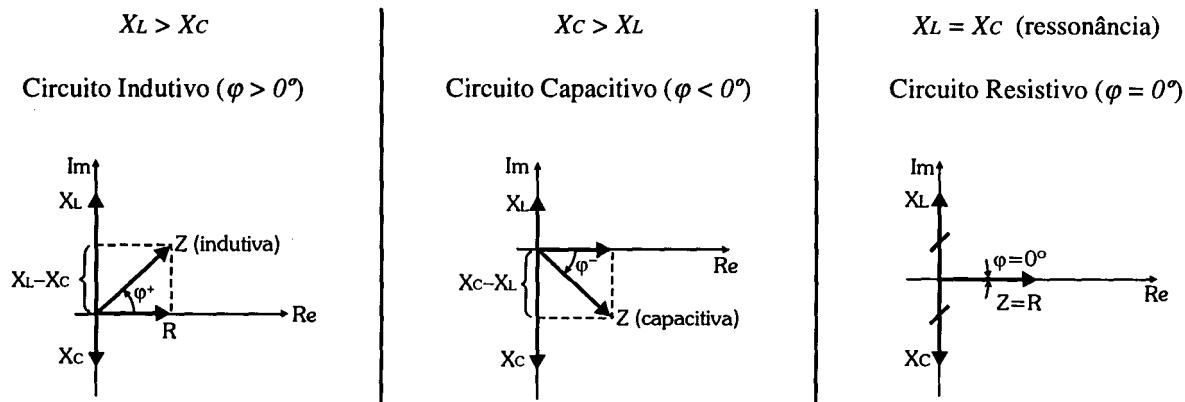
### Análise da Impedância

A impedância  $\dot{Z}$  do círculo é a soma complexa da resistência  $R$  com as reatâncias indutiva  $jX_L$  e capacitativa  $-jX_C$ , ou seja:

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad \text{ou} \quad \dot{Z} = Z\angle\varphi$$

Na impedância  $\dot{Z}$ , a resistência é a parte real e a resultante das reatâncias é a parte imaginária, de forma que a fase  $\varphi$  pode ser positiva, nula ou negativa (entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ ), dependendo dos valores das reatâncias  $X_L$  e  $X_C$  na freqüência de operação do círculo.

Portanto, o círculo RLC série pode ter três comportamentos distintos em relação à impedância.



Da representação complexa e dos diagramas fasoriais acima, obtemos facilmente as fórmulas para o cálculo do módulo e da fase da impedância do círculo RLC série:

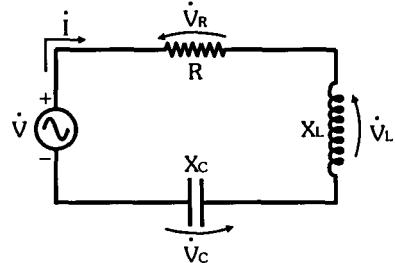
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow \text{Módulo de } \dot{Z}$$

$$\varphi = \arctg \frac{(X_L - X_C)}{R} \Rightarrow \text{Fase de } \dot{Z}$$

## Análise das Tensões

A tensão  $\dot{V}$  do gerador é a soma complexa das tensões na resistência  $R$  e nas reatâncias  $X_L$  e  $X_C$ , ou seja:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$$

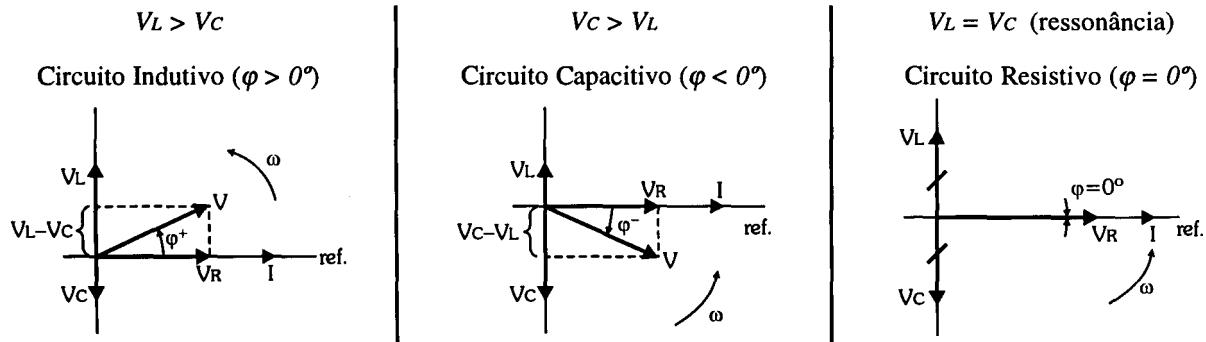


Em relação a essas tensões, a análise é similar. Supondo que a corrente  $I$  tenha fase inicial nula, isto é,  $I = I\angle\theta_i = I\angle0^\circ$ , podemos usá-la como um fasor de referência. Assim,  $\dot{V}_R$  está sempre em fase com  $I$ , sendo a componente real da tensão  $\dot{V}$ .

Porém, em relação à corrente  $I$ , a tensão  $\dot{V}_L$  está adiantada de  $90^\circ$  e a tensão  $\dot{V}_C$  está atrasada de  $90^\circ$ , de modo que a resultante entre elas é a componente imaginária da tensão  $\dot{V}$ .

Portanto, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão do gerador e a corrente que ele fornece ao circuito pode ser positiva, nula ou negativa (entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ ), dependendo dos valores das tensões  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$  na freqüência de operação.

Abaixo, representamos os três comportamentos distintos do circuito  $RLC$  série.



Na freqüência  $f_0$  de ressonância,  $X_L = X_C$ ,  $V_L = V_C$ ,  $\varphi = 0^\circ$  e o circuito é resistivo. Essa condição especial será analisada a partir do tópico 18.3.

Da representação complexa e dos diagramas fasoriais acima, obtemos facilmente as fórmulas para o cálculo do módulo e da fase da tensão do gerador:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \Rightarrow \text{Módulo de } \dot{V}$$

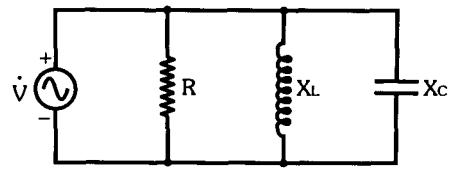
$$\varphi = \arctg \frac{V_L - V_C}{V_R} \Rightarrow \text{Fase de } \dot{V}$$

Generalizando a fase  $\theta_i$  da corrente ( $I = I\angle\theta_i$ ), e aplicando a Lei de Ohm aos dispositivos do circuito  $RLC$  série, teremos:

Gerador	Resistor	Indutor	Capacitor
$\dot{V} = Z \cdot I \angle(\theta_i + \varphi)$	$\dot{V}_R = R \cdot I \angle\theta_i$	$\dot{V}_L = X_L \cdot I \angle(\theta_i + 90^\circ)$	$\dot{V}_C = X_C \cdot I \angle(\theta_i - 90^\circ)$

Considere o circuito RLC paralelo ao lado formado por dispositivos ideais.

As reatâncias  $X_L$  e  $X_C$  estão, fasorialmente, sempre defasadas de  $180^\circ$  entre si, de modo que a reatância predominante elimina o efeito da outra, reduzindo ou anulando o efeito reativo total do circuito.



No circuito RLC paralelo, a reatância predominante é a de menor valor.

### Análise da Impedância

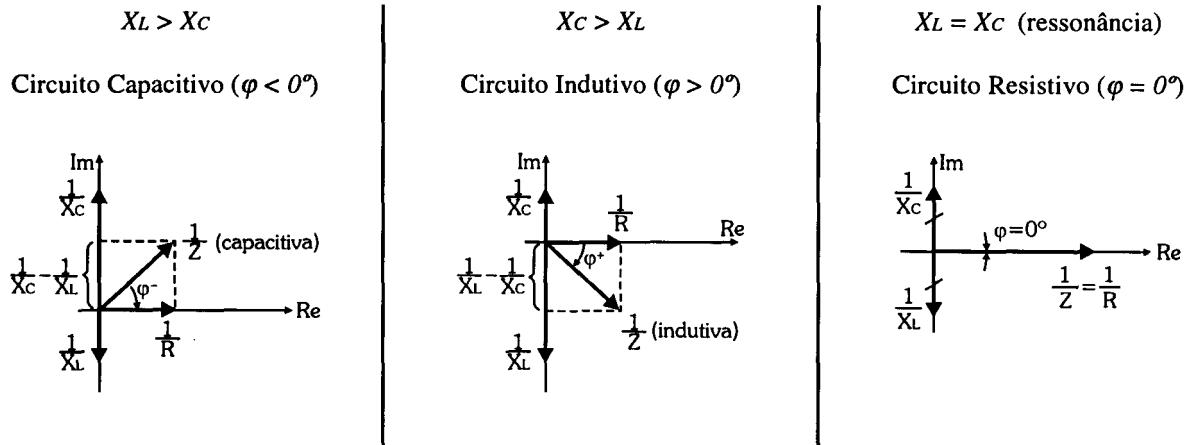
O inverso da impedância  $\dot{Z}$  do circuito é a soma complexa do inverso da resistência  $R$  com o inverso das reatâncias indutiva  $jX_L$  e capacitativa  $-jX_C$ , ou seja:

$$\frac{I}{\dot{Z}} = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$

$$\dot{Z} = Z \angle \varphi$$

Na admitância  $1/\dot{Z}$ , a condutância  $1/R$  é a parte real e a resultante das susceptâncias  $1/X_L$  e  $1/X_C$  é a parte imaginária, de forma que a fase  $\varphi$  pode ser positiva, nula ou negativa (entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ ), dependendo dos valores das reatâncias  $X_L$  e  $X_C$  na frequência de operação do circuito.

Portanto, o circuito RLC paralelo pode ter três comportamentos distintos em relação à impedância.



Da representação complexa e dos diagramas fasoriais acima, obtemos facilmente as fórmulas para o cálculo do módulo e da fase da impedância (ou admitância) do circuito RLC paralelo:

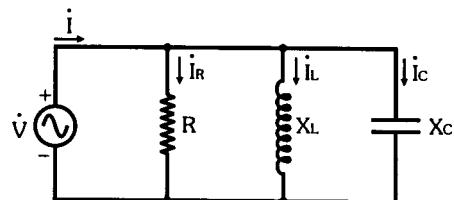
$$\frac{I}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Módulo de } I/\dot{Z}$$

$$\varphi = \arctg \frac{R \cdot (X_C - X_L)}{X_L \cdot X_C} \quad \Rightarrow \quad \text{Fase de } \dot{Z}$$

## Análise das Correntes

A corrente  $\dot{I}$  do gerador é a soma complexa das correntes na resistência  $R$  e nas reatâncias  $X_L$  e  $X_C$ , ou seja:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

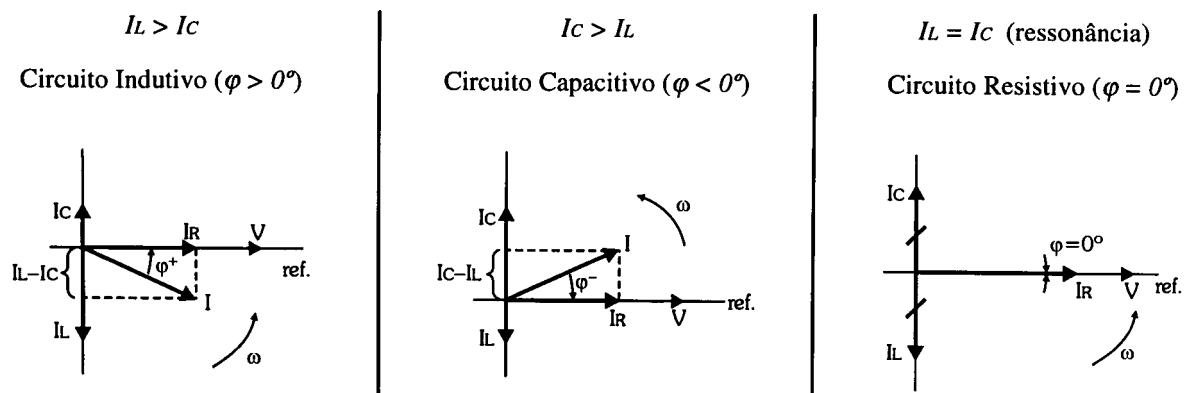


Em relação a essas correntes, a análise é similar. Supondo que a tensão  $\dot{V}$  tenha fase inicial nula, isto é,  $\dot{V} = V\angle\theta_v = V\angle0^\circ$ , podemos usá-la como um fasor de referência. Assim,  $\dot{I}_R$  está sempre em fase com  $\dot{V}$ , sendo a componente real da corrente  $\dot{I}$ .

Porém, em relação à tensão  $\dot{V}$ , a corrente  $\dot{I}_L$  está atrasada de  $90^\circ$  e a corrente  $\dot{I}_C$  está adiantada de  $90^\circ$ , de modo que a resultante entre elas é a componente imaginária da corrente  $\dot{I}$ .

Portanto, a defasagem  $\varphi$  entre a tensão do gerador e a corrente que ele fornece ao circuito pode ser positiva, nula ou negativa (entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ ), dependendo dos valores das correntes  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$  na freqüência de operação.

Abaixo, representamos os três comportamentos distintos do circuito  $RLC$  paralelo.



Na freqüência  $f_0$  de ressonância,  $X_L = X_C$ ,  $I_L = I_C$ ,  $\varphi = 0^\circ$  e o circuito é resistivo. Essa condição especial, conforme já afirmamos anteriormente, será analisada a partir do tópico 18.3.

Da representação complexa e dos diagramas fasoriais acima, obtemos facilmente as fórmulas para o cálculo do módulo e da fase da corrente do gerador:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \Rightarrow \text{Módulo de } \dot{I}$$

$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} \Rightarrow \text{Fase de } \dot{I}$$

Generalizando a fase  $\theta_v$  da corrente ( $\dot{V} = V\angle\theta_v$ ), e aplicando a Lei de Ohm aos dispositivos do circuito  $RLC$  paralelo, teremos:

Gerador	Resistor	Indutor	Capacitor
$\dot{I} = \frac{V}{Z} \angle(\theta_v - \varphi)$	$\dot{I}_R = \frac{V}{R} \angle\theta_v$	$\dot{I}_L = \frac{V}{X_L} \angle(\theta_v - 90^\circ)$	$\dot{I}_C = \frac{V}{X_C} \angle(\theta_v + 90^\circ)$

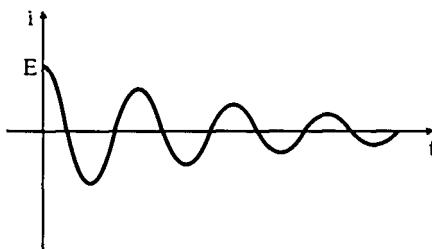
Considere o circuito  $LC$  ao lado, alimentado por uma tensão contínua  $E$ .

As únicas resistências do circuito são, em princípio, a do fio do indutor ( $r_s$ ) e a do dielétrico do capacitor ( $r_p$ ).

Analisaremos esse circuito supondo que a chave  $S$  seja ligada à posição  $B$  e depois volte à posição  $A$ .

Na posição  $B$ , o capacitor carrega-se quase que instantaneamente com a tensão  $E$  da fonte, armazenando energia eletrostática.

Na posição  $A$ , o capacitor descarrega-se sobre o indutor, convertendo a energia eletrostática em energia magnética, auto-induzindo uma tensão com polaridade contrária ao sentido da corrente.



Novamente, essa tensão é armazenada no capacitor, que converte a energia magnética em eletrostática, e assim sucessivamente.

O resultado é uma corrente *oscilatória* cuja freqüência depende apenas dos valores de  $L$  e de  $C$ . Porém, devido às resistências espúrias, cujo valor equivalente série denominaremos  $R_s$ , há dissipação de potência e, portanto, perda de energia, de modo que a oscilação reduzirá a sua amplitude até desaparecer.

A célula  $LC$  é, portanto, um oscilador natural com uma freqüência natural de oscilação.

Um oscilador eletrônico nada mais é do que uma célula  $LC$  ligada a um amplificador que repõe a energia perdida pelas resistências, de modo a manter a amplitude da oscilação constante.

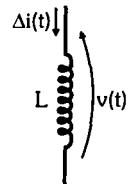
### Resistência Natural de Ressonância - $\rho_0$

Consideremos as expressões que relacionam a corrente e a tensão com a indutância e a capacitância.

No indutor, a tensão  $v(t)$  é proporcional à  $L$  e à variação da corrente  $i(t)$  em relação ao tempo  $t$ .

Conforme já vimos, matematicamente essa relação é dada por:

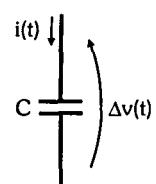
$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$



Análoga e dualmente, no capacitor, a corrente  $i(t)$  é proporcional à  $C$  e à variação da tensão  $v(t)$  em relação ao tempo  $t$ .

Conforme já vimos, matematicamente essa relação é dada por:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$



Dividindo  $v(t)$  por  $i(t)$ , obtemos:

$$\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{L}{C} \cdot \frac{di}{dv} \Rightarrow \frac{v(t) \cdot dv}{i(t) \cdot di} = \frac{L}{C}$$

Mas,  $v(t)$  e  $dv$  são a mesma grandeza elétrica, ou seja, uma tensão  $v$ , o mesmo ocorrendo com  $i(t)$  e  $di$ , cuja grandeza elétrica é uma corrente  $i$ .

Assim, para analisarmos o significado da expressão anterior, podemos reduzi-la para:  $\frac{v^2}{i^2} = \frac{L}{C} \Rightarrow \frac{v}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

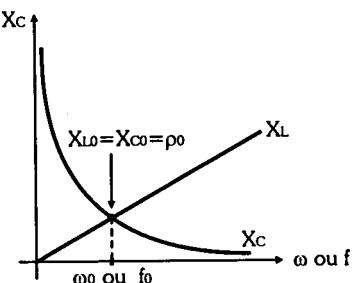
A relação entre tensão e corrente, segundo a Lei de Ohm, é uma resistência. Portanto, dessa última expressão, chegamos à seguinte fórmula:

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Essa grandeza é denominada *resistência natural de ressonância*  $\rho_0$ . "Curiosamente", essa resistência tem o mesmo valor numérico que as reatâncias  $X_{L0}$  e  $X_{C0}$  na *frequência natural de oscilação* do circuito *LC*.

### Frequência Natural de Ressonância - $f_0$ ou $\omega_0$

A *frequência natural de oscilação* de um circuito *LC* é uma característica sua, independendo de qualquer parâmetro externo. É a frequência em que o circuito *ressonâa* naturalmente. Por isso, ela é denominada *frequência de ressonância*, sendo simbolizada por  $f_0$  ou  $\omega_0$ .



Na frequência de ressonância  $f_0$ , as reatâncias do indutor e do capacitor se igualam à  $\rho_0$  e, portanto, são iguais entre si.

Como  $X_L$  é diretamente proporcional à frequência e  $X_C$  é inversamente proporcional, a frequência de ressonância corresponde à interseção de seus gráficos:  $X_{L0} = X_{C0} = \rho_0$ .

Dessa relação, deduzimos a fórmula de  $\omega_0$  e de  $f_0$ :

$$X_{L0} = X_{C0} \Rightarrow \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

ou

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

As fórmulas de  $f_0$  (ou  $\omega_0$ ) e de  $\rho_0$  são válidas tanto para circuitos *LC* em série quanto para *LC* em paralelo. Quanto à frequência, por questões práticas, trabalharemos mais com  $f_0$ , isto é, em *hertz [Hz]*.

### Aplicações da Ressonância e os Circuitos de Sintonia

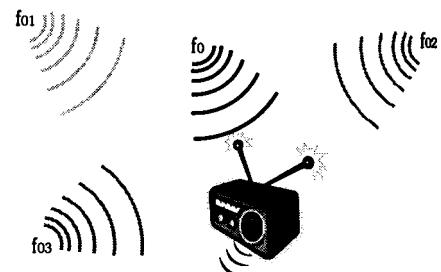
Pelas características naturais do circuito *LC*, veremos mais adiante que, se aplicarmos nele um sinal externo com frequência igual à de sua ressonância natural, o circuito entrará em *sintonia* com esse sinal, comportando-se eletricamente de uma forma bastante diferente em relação a outras frequências.

Portanto, se aplicarmos muitos sinais de diversas frequências, o sinal na frequência de ressonância será selecionado (ou sintonizado) pelo circuito *LC*, que rejeitará os demais. É claro que, na prática, haverá mais de uma frequência sintonizada, pois os dispositivos não são ideais.

Além disso, um circuito de sintonia ideal teria muito pouca aplicação, já que os sistemas de transmissão convencionais operam sob o processo de modulação de uma frequência central  $f_0$ , que é a frequência de transmissão, resultando em um sinal composto por diversas frequências em torno dela, constituindo o que denominamos de canal.

Esse é caso, por exemplo, dos receptores de rádio *AM* e *FM* em que cada estação transmissora opera em uma frequência central  $f_0$  com uma margem inferior e superior, constituindo o seu canal.

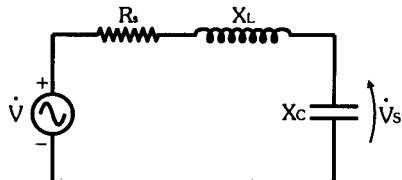
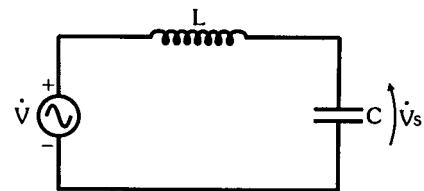
Por meio de um circuito de sintonia, o receptor pode selecionar apenas uma estação para que, nos blocos seguintes, seja extraída das frequências de seu canal o sinal de áudio que modula a frequência central  $f_0$ .



### Círculo Físico

Um círculo série de sintonia é composto apenas por um indutor em série com um capacitor e alimentado por uma fonte de sinal externa, conforme mostra a figura ao lado.

Para efeito de análise, o sinal externo será representado por um gerador CA e a saída  $V_s$  será a tensão no capacitor.



### Círculo Elétrico Real

Na prática, o circuito LC série deve ser tratado como um circuito RLC série, sendo  $R_s$  o equivalente série das resistências espúrias do circuito. Nesse circuito,  $R_s$  é basicamente a resistência série do fio do indutor ( $r_s$ ). Assim:

$$R_s = r_s$$

Nesse caso, estamos desprezando diversas resistências que poderiam interferir no circuito, como a do dielétrico do capacitor, dos terminais dos componentes, das soldas e das trilhas de cobre da placa de circuito impresso.

Além disso, há a indutância espúria do capacitor e a capacitância espúria dos fios do indutor. Porém, esses fatores só são relevantes nas freqüências extremamente elevadas.

Na prática, a capacitância espúria de uma bobina é minimizada enrolando-a com as espiras bem separadas.

### Impedância em Função da Freqüência

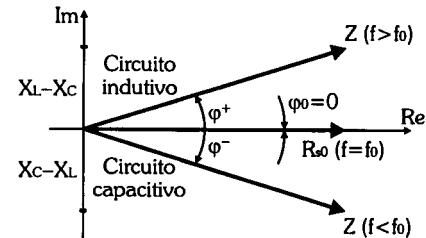
O módulo e a fase da impedância  $\dot{Z}$  do circuito série de sintonia são dados por:

$$Z = \sqrt{R_s^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{(X_L - X_C)}{R_s}$$

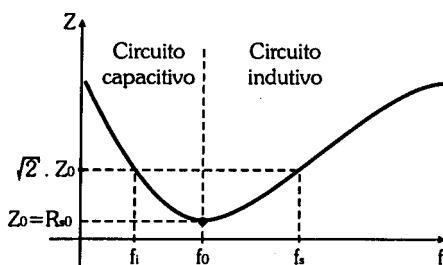
Na freqüência de ressonância  $f_0$  e no seu entorno o circuito tem o comportamento seguinte:

- Se  $f = f_0 \Rightarrow X_{L0} = X_{C0} = \rho_0 \Rightarrow Z_0 = R_{s0} \therefore$  o circuito é resistivo ( $\varphi_0 = 0^\circ$ );
- Se  $f < f_0 \Rightarrow X_C > X_L \Rightarrow \dot{Z} = Z \angle \varphi^- \therefore$  o circuito é capacitivo ( $\varphi < 0^\circ$ );
- Se  $f > f_0 \Rightarrow X_L > X_C \Rightarrow \dot{Z} = Z \angle \varphi^+ \therefore$  o circuito é indutivo ( $\varphi > 0^\circ$ ).

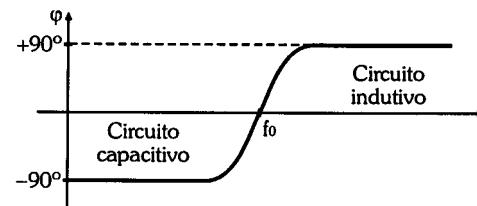


Esse comportamento pode ser observado graficamente pelas figuras abaixo:

Módulo da Impedância x Freqüência



Fase da Impedância x Freqüência



Portanto, na ressonância, a impedância  $Z_0$  atinge o valor mínimo  $R_{s0}$  e a fase  $\varphi_0$  é nula, isto é:

$$Z_0 = R_{s0} \quad \text{e} \quad \varphi_0 = 0^\circ$$

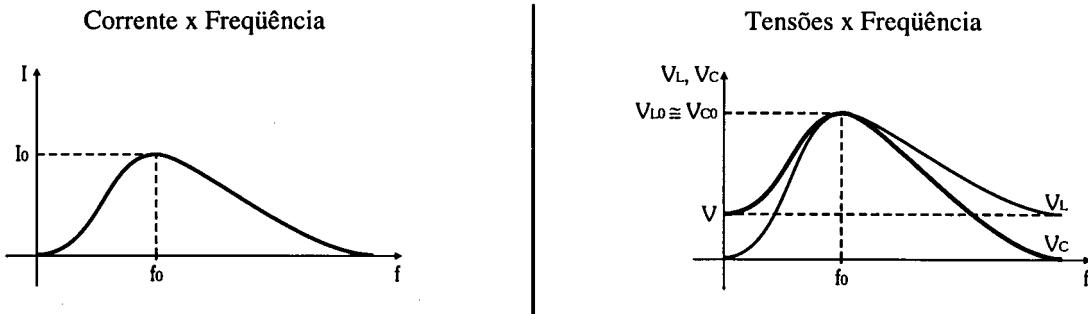
## Corrente e Tensões em Função da Freqüência

A corrente  $I$  do gerador atinge o valor máximo  $I_0$  na ressonância, pois a impedância atinge o valor mínimo  $R_{s0}$ . O valor de  $I_0$  é dado por:

$$I_0 = \frac{V}{Z_0}$$

Consideremos, agora, os seguintes aspectos:

- Nas freqüências muito baixas,  $X_L$  tende a zero (curto) e  $X_C$  tende ao infinito (circuito aberto). Neste caso,  $I$  tende a zero,  $V_L$  tende a zero e  $V_C$  tende a  $V$  (tensão do gerador).
- Nas freqüências muito altas,  $X_L$  tende ao infinito (circuito aberto) e  $X_C$  tende a zero (curto). Neste caso,  $I$  tende a zero,  $V_L$  tende a  $V$  (tensão do gerador) e  $V_C$  tende a zero.
- Na freqüência de ressonância, como  $I$  atinge o valor máximo  $I_0$ , as tensões  $V_{L0}$  e  $V_{C0}$  assumem, também, o valor máximo. Graficamente, temos:



Se  $R_{s0}$  for muito baixo em relação a  $\rho_0$  (ou  $X_{L0}$ ), as tensões  $V_{L0}$  e  $V_{C0}$  serão praticamente iguais, isto é,  $V_{L0} \equiv V_{C0}$ .

Porém, se  $R_{s0}$  não for suficientemente baixo,  $V_{L0} > V_{C0}$ , pois a tensão na resistência do fio do indutor passa a ser relevante.

## Fator de Qualidade do Circuito - $Q_T$

O indutor possui um fator de qualidade  $Q$  que é a relação entre a sua reatância  $X_L$  e a sua resistência  $r_s$  a uma determinada freqüência, isto é,  $Q = X_L / r_s$ . Porém, o circuito de sintonia pode apresentar outras resistências, cujo valor equivalente é  $R_s$ . Na ressonância, a resistência vale  $R_{s0}$  (pois, devido ao efeito pelicular,  $r_s$  varia com a freqüência) e a reatância indutiva vale  $X_{L0} = X_{C0} = \rho_0$ .

Neste caso, o fator de qualidade  $Q_T$  do circuito na freqüência de ressonância  $f_0$  será menor que o fator de qualidade  $Q$  do indutor, sendo o seu valor dado por:

$$Q_T = \frac{X_{L0}}{R_{s0}} \quad \text{ou} \quad Q_T = \frac{\rho_0}{R_{s0}}$$

Se a única resistência relevante do circuito for  $r_s$  do indutor,  $Q_T \equiv Q$ .

Aplicando a fórmula do divisor de tensão no circuito  $LC$  série real na freqüência de ressonância e considerando o  $Q_T$  com valor elevado, chegamos à conclusão matemática ao lado:

$$V_{L0} \equiv V_{C0} \equiv Q_T \cdot V$$

Isso significa que o fator de qualidade  $Q_T$  do circuito informa o quanto a tensão nas reatâncias é maior do que a tensão  $V$  do gerador na freqüência de ressonância.

Esse efeito "amplificador" da tensão da fonte de sinal é usado para selecionar a freqüência de ressonância  $f_0$  das demais. Portanto, a saída do circuito  $LC$  série pode ser tanto a tensão sobre o indutor quanto sobre o capacitor.

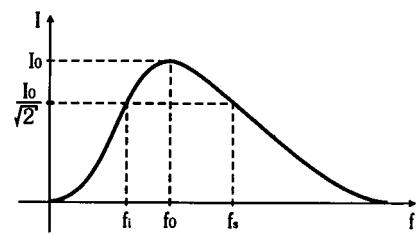
## Freqüências de Corte Inferior e Superior - $f_i$ e $f_s$

O módulo da corrente  $I$  é função da tensão  $V$  do gerador e da impedância  $Z$  do circuito:  $I = \frac{V}{Z}$ .

Observando a curva da corrente  $I$  em função da freqüência  $f$ , vemos que há duas freqüências em que a amplitude da corrente cai ao nível de corte, isto é:

$$I_i = I_s = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad I_i \equiv I_s \equiv 0,707 \cdot I_0$$

Nessas freqüências, a potência ativa dissipada por  $R_{so}$  é a metade da sua potência  $P_o$  em  $f_0$ .



Na curva da impedância mostrada na página 213, esta condição ocorre, teoricamente, quando:  $Z_i = Z_s = \sqrt{2} \cdot Z_0$

Na prática, essas freqüências são consideradas a *freqüência de corte inferior*  $f_i$  e a *freqüência de corte superior*  $f_s$  do circuito de sintonia, e definem a *banda passante* (ou *largura de faixa*) do circuito de sintonia.

## Banda Passante – $B$

A banda passante  $B$  (ou largura de faixa), em *hertz [Hz]*, corresponde à faixa de freqüências entre os cortes superior e inferior. Assim:

$$B = f_s - f_i$$

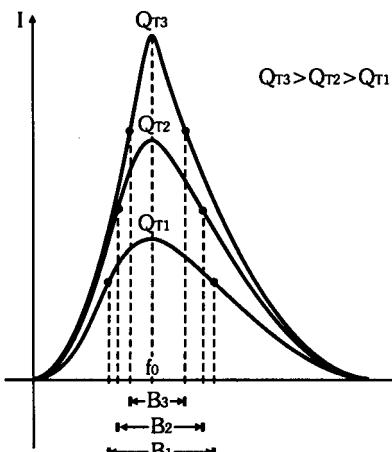
Devido à natureza dos dispositivos reativos, as taxas de atenuação da corrente  $I$  nas freqüências abaixo e acima do corte não são exatamente iguais, ou seja,  $f_0$  não é a freqüência média entre  $f_i$  e  $f_s$ .

Na realidade,  $f_0$  está mais próximo de  $f_i$  do que de  $f_s$ , e essa diferença é de pelo menos 10%. Sendo assim, uma estimativa bastante razoável de  $f_i$  e de  $f_s$  a partir de  $B$  pode ser:

$$f_i \approx f_0 - 0,9 \cdot \frac{B}{2}$$

e

$$f_s \approx f_0 + 1,1 \cdot \frac{B}{2}$$



A banda passante  $B$  define o *grau de seletividade* do circuito de sintonia.

Quanto menor é o valor de  $B$ , mais seletivo é o circuito.

Mas a sua qualidade é também dada por  $Q_T$ . Quanto maior é o valor de  $Q_T$ , mais seletivo é o circuito.

Essa relação inversa entre  $B$  e  $Q_T$  é dada matematicamente por:

$$B = \frac{f_0}{Q_T}$$

ou

$$B = \frac{f_0 \cdot R_{so}}{\rho_o}$$

## Considerações Práticas

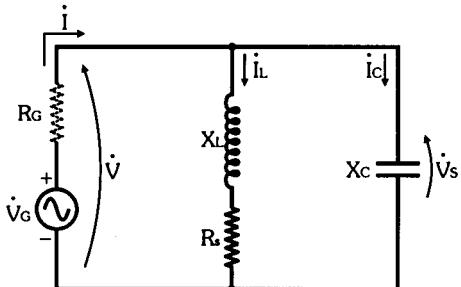
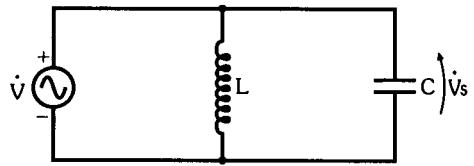
Para finalizar este tópico, apresentamos algumas considerações de ordem prática que devem ser levadas em conta no projeto e na utilização de um circuito série de sintonia:

- 1) Para um circuito de sintonia de faixa estreita, deve-se usar um indutor de ótima qualidade, de modo que  $Q_T \geq 100$ ;
- 2) O indutor deve suportar a corrente máxima  $I_0$  e o capacitor deve suportar a tensão máxima  $V_{co}$ ;
- 3) O circuito série de sintonia é usado quando a fonte de sinal tiver baixa resistência interna, pois só assim a corrente máxima  $I_0$  atingirá um valor suficientemente maior do que as correntes abaixo e acima das freqüências de corte.

### Círculo Físico

Um circuito paralelo de sintonia é composto apenas por um indutor em paralelo com um capacitor e alimentado por uma fonte de sinal externa, conforme mostra a figura ao lado.

Para efeito de análise, o sinal externo será representado por um gerador CA e a saída  $V_s$  será a tensão no capacitor.



### Círculo Elétrico Real

Na prática, o circuito  $LC$  paralelo deve ser tratado como um circuito  $RL$  série em paralelo com  $C$ , sendo  $R_s$  o equivalente das resistências espúrias do circuito. Em geral, a resistência mais relevante é a do fio do indutor ( $r_s$ ). Assim:

$$R_s = r_s$$

Do mesmo modo como fizemos na análise do sintonizador série, desprezaremos diversas resistências que poderiam interferir no circuito, como a do dielétrico do capacitor, dos terminais dos componentes, das soldas e das trilhas de cobre da placa de circuito impresso, além da indutância espúria do capacitor e a capacidade espúria dos fios do indutor, já que estes fatores só são relevantes nas freqüências extremamente altas.

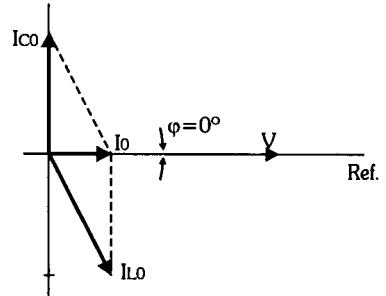
No circuito  $LC$  paralelo real, a resistência interna  $R_G$  do gerador é de fundamental importância, pois, como veremos, ela pode alterar completamente o comportamento do circuito do ponto de vista da seletividade.

Nesse sentido, e apenas por uma questão de método, ignoraremos inicialmente a influência de  $R_G$  para analisarmos o circuito  $LC$  paralelo real isoladamente.

### Freqüência de Ressonância

Por princípio, quando o circuito encontra-se na ressonância  $f_0$ , a impedância equivalente  $Z_0$  é puramente resistiva, de modo que a corrente  $I_0$  entra em fase com a tensão  $V$ , isto é,  $\varphi = 0^\circ$ .

Neste caso,  $I_{L0} > I_{C0}$ , pois a corrente do ramo indutivo não se encontra a  $180^\circ$  da corrente do capacitor.



Se isto ocorre, é porque  $X_{L0} < X_{C0}$ . Portanto, a condição natural de ressonância de um circuito de sintonia, que é dada por  $X_{L0} = X_{C0} = \rho_0$ , só é satisfeita no circuito ideal, em que  $R_s = 0$  (ou  $R_{s0} \ll X_{L0}$ ).

O ramo indutivo do circuito real possui uma impedância com módulo  $Z_L = \sqrt{R_s^2 + X_L^2}$  e fase  $\varphi_L = \arctg(X_L/R_s)$ .

Na ressonância, ocorre que  $X_{L0} < \rho_0 < X_{C0}$ . No entanto, a impedância do ramo indutivo na ressonância se iguala a  $\rho_0$ , ou seja,  $X_{L0} < Z_{L0} = \rho_0 < X_{C0}$ .

Este comportamento do ramo indutivo provoca uma redução na freqüência de ressonância em relação ao seu valor ideal.

Vejamos:  $\rho_0 = Z_{L0} \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{R_{s0}^2 + X_{L0}^2} \Rightarrow \frac{L}{C} = R_{s0}^2 + (2\pi f_0 L)^2 \Rightarrow$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_{s0}}{L}\right)^2}$$

Observe que, quanto maior for o valor de  $R_{s0}$ , menor será a freqüência de ressonância real em relação ao valor ideal.

Porém, se  $R_{s0} \ll X_{L0}$ , a freqüência de ressonância será praticamente igual à ideal, podendo ser calculada pela fórmula característica do circuito  $LC$ , ou seja:

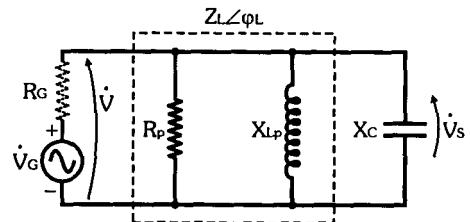
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

## Análise da Impedância

Uma forma bastante apropriada de analisar o circuito  $LC$  paralelo real é por meio da conversão do ramo indutivo  $RL$  série no seu equivalente paralelo.

Conforme vimos no Capítulo 14 (tópico 14.3), esta conversão pode ser feita a partir dos valores de  $Z_L$  e  $\phi_L$  em uma determinada freqüência, sendo:

$$R_p = \frac{Z_L}{\cos \phi_L} \quad \text{e} \quad X_{Lp} = \frac{Z_L}{\sin \phi_L}$$



Cabe aqui, no entanto, uma consideração de ordem prática: na maioria dos circuitos de sintonia,  $R_s \ll X_L$ , o que torna mais simples o cálculo de  $R_p$  e de  $X_{Lp}$ . De fato:

$$R_p \equiv \frac{X_L^2}{R_s}$$

e

$$X_{Lp} \cong X_L$$

A vantagem desta conversão é que o circuito torna-se igual ao  $RLC$  paralelo analisado no tópico 18.2. Além disso, e conforme veremos adiante, esta conversão facilitará a análise da influência da resistência interna do gerador sobre esse circuito de sintonia.

## Impedância em Função da Freqüência

Da análise que acabamos de realizar, é fácil concluir que o módulo e a fase da impedância  $\dot{Z}$  do circuito paralelo de sintonia podem ser obtidos de duas formas diferentes, mas cujos resultados matemáticos serão praticamente iguais.

A primeira forma é a partir do circuito com ramo indutivo série e a segunda forma é a partir do circuito com ramo indutivo paralelo.

Círcuito com Ramo Indutivo Série:

$$Z = \frac{X_C \sqrt{R_s^2 + X_L^2}}{\sqrt{R_s^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{X_C - X_L}{R_s} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{R_s}{X_L} \right)$$

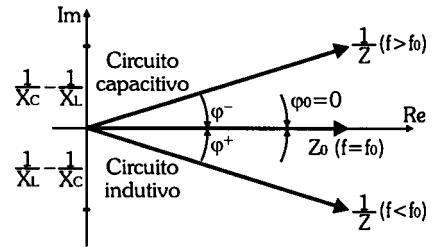
Círcuito com Ramo Indutivo Paralelo:

$$\frac{I}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{Lp}} \right)^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{R_p \cdot (X_C - X_{Lp})}{X_C \cdot X_{Lp}}$$

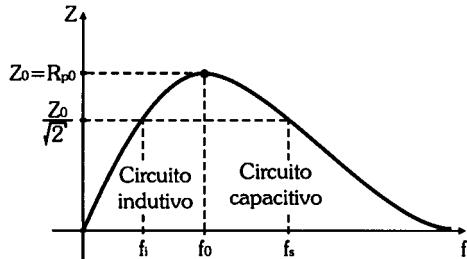
Na freqüência de ressonância real e no seu entorno, o circuito tem o comportamento seguinte:

- Se  $f = f_0 \Rightarrow X_{L0} < Z_{L0} = p_0 < X_{C0} \Rightarrow \dot{Z}_0 = Z_0 \angle 0^\circ \therefore$  o circuito é resistivo ( $\varphi_0 = 0^\circ$ );
- Se  $f < f_0 \Rightarrow X_C > X_L \Rightarrow \dot{Z} = Z \angle \varphi^+ \therefore$  o circuito é indutivo ( $\varphi > 0^\circ$ );
- Se  $f > f_0 \Rightarrow X_L > X_C \Rightarrow \dot{Z} = Z \angle \varphi^- \therefore$  o circuito é capacitivo ( $\varphi < 0^\circ$ ).

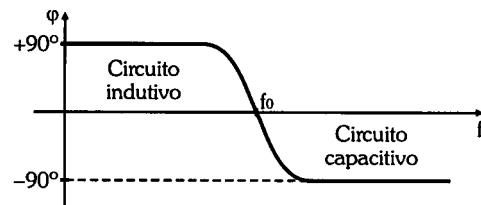


Este comportamento pode ser observado graficamente pelas figuras abaixo:

Módulo da Impedância x Freqüência



Fase da Impedância x Freqüência



Na ressonância, a impedância  $Z_0$  atinge o valor *máximo* e a fase  $\varphi_0$  é *nula*. O valor de  $Z_0$  pode ser dado de duas formas diferentes, conforme mostramos ao lado:

$$Z_0 \cong \frac{L}{C.R_{s0}} \cong R_{p0}$$

e

$$\varphi_0 = 0^\circ$$

## Corrente em Função da Freqüência

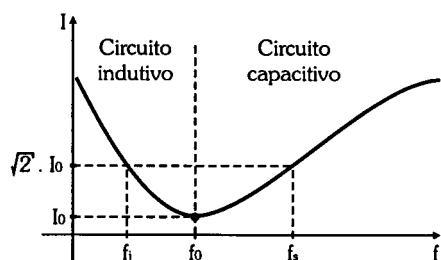
A corrente  $I$  do gerador atinge o valor *mínimo*  $I_0$  na ressonância, pois a impedância atinge o valor *máximo*  $Z_0$ . O valor de  $I_0$  é dado por:

$$I_0 = \frac{V}{Z_0}$$

Consideremos, agora, os seguintes aspectos:

- Nas freqüências muito baixas,  $X_L$  tende a zero (curto) e  $X_C$  tende ao infinito (circuito aberto). Neste caso,  $I$  tende a um valor máximo limitado apenas por  $R_s$  e pela resistência interna  $R_G$  do gerador.
- Nas freqüências muito altas,  $X_L$  tende ao infinito (circuito aberto) e  $X_C$  tende a zero (curto). Neste caso,  $I$  tende a um valor máximo limitado apenas pela resistência interna  $R_G$  do gerador.
- Na *freqüência de ressonância*,  $I$  atinge o valor *mínimo*  $I_0$ .

Corrente x Freqüência



Graficamente, temos:

Nesta análise, não levamos em consideração a tensão, pois, em princípio, ela é sempre igual à do gerador, já que o circuito  $LC$  está em paralelo com ele.

É neste momento que temos de analisar a influência da resistência interna  $R_G$  do gerador tanto na tensão  $V_s$  de saída do circuito de sintonia, como no seu fator de qualidade  $Q_T$  e na sua banda passante  $B$ , ou seja, no seu comportamento seletivo.

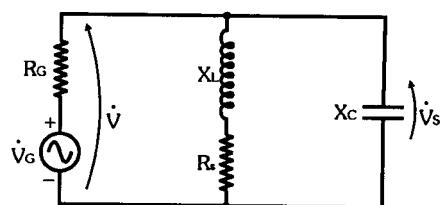
## Comportamento Seletivo do Circuito LC Paralelo Real em Função de RG

Vamos considerar o gerador com uma tensão em vazio  $V_G$  e uma resistência interna  $R_G$ .

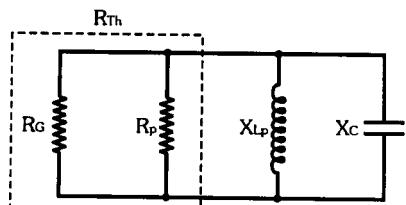
A saída do circuito de sintonia é a tensão  $V_s$  no capacitor.

Nesse circuito, fica difícil visualizar como  $R_G$  interfere no seu fator de qualidade.

Circuito com Ramo Indutivo Série



Circuito com Ramo Indutivo Paralelo



Consideremos, agora, o mesmo circuito, só que substituindo o ramo indutivo série pelo seu equivalente paralelo.

Neste caso, o indutor e o capacitor enxergam uma resistência equivalente Thévenin  $R_{Th}$  dada por  $R_p$  em paralelo com  $R_G$  quando o gerador está em curto.

O fator de qualidade total do circuito sofre, portanto, influência de  $R_G$ . Se considerarmos que o circuito isoladamente tem um fator de qualidade  $Q_T = \rho_0 / R_{s0}$ , em que  $R_{s0}$  é o equivalente das resistências espúrias do circuito (principalmente  $r_s$  do indutor), denominaremos  $Q'T$  o fator de qualidade total do circuito sob influência de  $R_G$ .

Para o cálculo de  $Q'T$ , há também duas fórmulas, ambas obtidas do circuito equivalente Thévenin, conforme mostramos ao lado:

$$Q'T = \frac{R_{Th}}{\rho_0} \quad \text{ou}$$

$$Q'T = \frac{Q_T}{1 + \frac{Z_0}{R_G}}$$

em que:  $Q_T = \frac{\rho_0}{R_{s0}}$  e  $R_{Th} = R_p // R_G$

As freqüências de corte inferior  $f_i$  e superior  $f_s$  desse circuito de sintonia, bem como a sua banda passante  $B$ , podem ser observadas na curva da impedância analisada na página 218.

No corte, temos:  $Z_i \equiv Z_s \equiv \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$  (\*)

(\*) Válida apenas quando  $R_G \gg Z_0$ .

Porém, é importante analisarmos qual é o comportamento seletivo desse circuito em termos de tensão e de corrente.

Para isso, temos de considerar as três condições possíveis de relação entre  $R_G$  e  $Z_0$ .

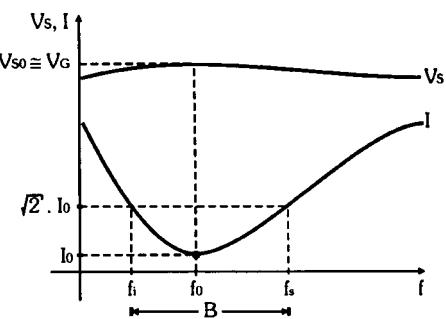
**1ª Condição:** Se  $R_G \ll Z_0$ , a tensão de saída  $V_s$  é praticamente constante e igual a  $V_G$ , mas a corrente  $I$  é função da impedância  $Z$  do circuito de sintonia, atingindo o valor mínimo  $I_0$  na ressonância. Assim:

$$I_0 \equiv \frac{V_G}{Z_0} \quad \text{e} \quad I_i \equiv I_s \equiv \frac{\sqrt{2} \cdot V_G}{Z_0}$$

e

$$V_{so} \equiv V_{Si} \equiv V_{Ss} \equiv V_G \equiv cte$$

Corrente e Tensão x Freqüência



Nesta condição,  $Q'r \rightarrow 0$ , de modo que o circuito de sintonia perde a seletividade de tensão. Há seletividade apenas de corrente. A banda passante  $B$  da curva de corrente é, então, definida pelas freqüências de corte inferior e superior quando as respectivas correntes assumem o valor:  $I_i = I_s = \sqrt{2} \cdot I_0$ .

Esta condição tem aplicação prática no caso do circuito de sintonia estar acoplado indutivamente a um outro estágio.

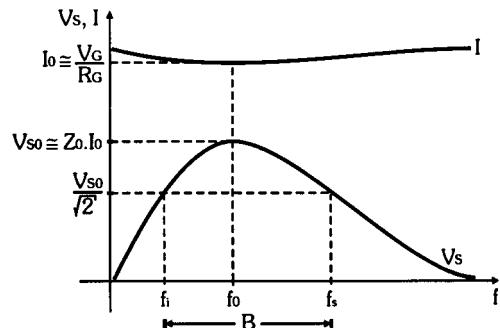
**2ª Condição:** Se  $R_G \gg Z_0$ , a corrente  $I$  é praticamente constante e definida pelo gerador, mas a tensão de saída  $V_s$  é função da impedância  $Z$  do circuito de sintonia, atingindo o valor máximo  $V_{so}$  na ressonância. Assim:

$$V_{so} \equiv Z_0 \cdot I_0 \quad \text{e} \quad V_{Si} \equiv V_{Si} \equiv \frac{V_{so}}{\sqrt{2}}$$

e

$$I_0 \equiv I_i \equiv I_s \equiv \frac{V_G}{R_G} \equiv cte$$

Corrente e Tensão x Freqüência



Nesta condição,  $Q'r \rightarrow Qr$ , de modo que o circuito de sintonia perde a seletividade de corrente, mas passa a ser seletivo em tensão. A banda passante  $B$  da curva de tensão é definida pelas freqüências de corte inferior e superior quando as respectivas tensões assumem o valor:  $V_{Si} \equiv V_{Si} \equiv V_{so} / \sqrt{2}$ .

Neste caso, a banda passante e as freqüências de corte inferior e superior são dadas por:

$$B = \frac{f_0}{Qr}$$

$$f_l \equiv f_0 - 0,9 \cdot \frac{B}{2}$$

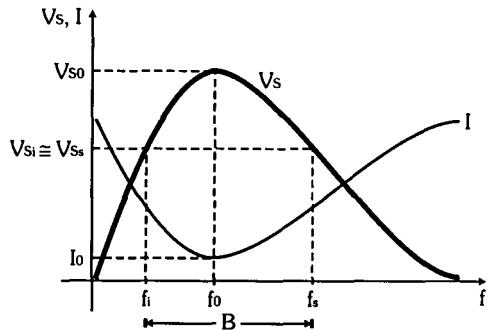
$$f_s \equiv f_0 + 1,1 \cdot \frac{B}{2}$$

Esta condição tem aplicação prática quando o circuito de sintonia atua como carga de um amplificador de alta freqüência.

**3ª Condição:** Se  $R_G$  e  $Z_0$  tiverem a mesma ordem de grandeza, tanto a corrente  $I$  como a tensão  $V_s$  dependerão de  $R_G$  e da impedância  $Z$  do circuito de sintonia. Assim:

$$I = \frac{V_G}{Z_T} \quad \text{e} \quad V_s = Z \cdot I$$

em que:  $Z_T \Rightarrow$  impedância equivalente entre  $R_G$  e  $Z$   
 $Z \Rightarrow$  impedância do circuito de sintonia



Na freqüência de ressonância, como a impedância do circuito de sintonia é puramente resistiva, o módulo de  $Z_{T0}$  é dado por:  $Z_{T0} = R_G + Z_0$ .

Nas freqüências de corte inferior e superior,  $Z_{Ti}$  e  $Z_{Ts}$  têm módulos praticamente iguais, cuja fórmula mostrada ao lado pode ser deduzida facilmente:

$$Z_{Ti} \equiv Z_{Ts} \equiv \sqrt{R_G^2 + R_G \cdot Z_0 + \frac{Z_0^2}{2}}$$

Nesta condição,  $Q'r < Q_T$ . O circuito de sintonia tem seletividade de corrente e de tensão, cujas bandas passantes não são iguais. Na prática, considera-se apenas a sua banda de tensão.

Neste caso, a banda passante e as freqüências de corte inferior e superior são dadas por:

$$B = \frac{f_0}{Q'r} \quad \text{e} \quad f_i \equiv f_0 - 0,9 \cdot \frac{B}{2} \quad \text{e} \quad f_s \equiv f_0 + 1,1 \cdot \frac{B}{2}$$

## 18.6

## Circuitos Práticos de Sintonia

Na prática, podem ser encontrados diversos tipos de circuitos de sintonia em função de suas aplicações. O objetivo deste tópico é apresentar alguns exemplos desses circuitos, bem como as suas principais características.

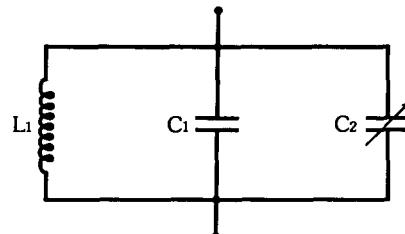
### Circuitos de Sintonia Fixa

O circuito de sintonia fixa é aquele que opera com uma única freqüência de ressonância. No entanto, os seus dispositivos não têm, necessariamente, valores fixos. Na prática, é comum utilizar como capacitor ou como indutor um dispositivo ajustável, permitindo que o circuito possa ser calibrado na freqüência de ressonância desejada.

O circuito ao lado é um exemplo, sendo que a indutância  $L_1$  é fixa, mas a capacitância equivalente pode ser ajustada por  $C_2$ .

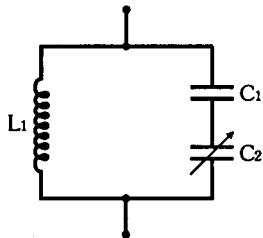
Os capacitores em paralelo resultam em uma capacitância total dada por:  $C_T = C_1 + C_2$ . Portanto, a freqüência de ressonância  $f_0$  é:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 \cdot C_T}}$$



O capacitor  $C_1$ , de maior valor, define a ordem de grandeza de  $f_0$ , e o capacitor  $C_2$ , de menor valor e ajustável (*trimmer*), faz o ajuste fino da freqüência de ressonância.

Assim,  $C_T$  varia entre  $C_{Tmín} = C_1 + C_{2mín}$  e  $C_{Tmáx} = C_1 + C_{2máx}$ , podendo ajustar a freqüência de ressonância entre  $f_{0máx}$  (para  $C_{Tmín}$ ) e  $f_{0mín}$  (para  $C_{Tmáx}$ ).



Para melhorar a precisão do ajuste fino pode-se optar pela associação série entre os capacitores, conforme mostra a figura ao lado.

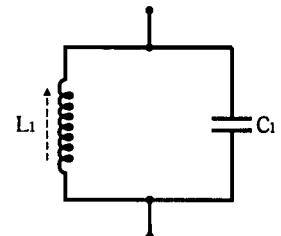
Neste circuito,  $C_{Tmín} = C_1 // C_{2mín}$  define  $f_{0máx}$  e  $C_{Tmáx} = C_1 // C_{2máx}$  define  $f_{0mín}$ .

A vantagem deste circuito em relação ao anterior é reduzir o valor de  $C_{Tmáx}$  sem alterar muito o valor de  $C_{Tmín}$ .

Um outro exemplo de circuito de sintonia fixa é aquele formado por uma bobina ajustável e por um capacitor fixo.

A variação da indutância é obtida por meio de um parafuso externo acoplado ao núcleo de ferrite da bobina.

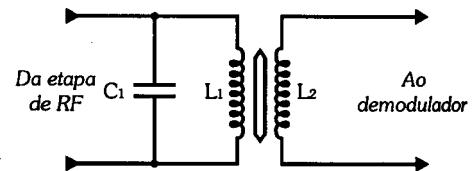
A alteração da posição do núcleo relativa ao enrolamento da bobina muda a sua indutância.



Este último tipo de circuito de sintonia fixa é amplamente usado na etapa de freqüência intermediária (*FI*) de receptores *AM* - amplitude modulada - que opera com  $FI = 455\text{kHz}$  e com banda passante  $B = 10\text{kHz}$  e de receptores *FM* - freqüência modulada - que opera com  $FI = 10,7\text{MHz}$  e banda passante  $B = 150\text{kHz}$ .

Só que, em vez de uma bobina ajustável, é mais comum a utilização de um transformador de *RF* com núcleo variável, sendo a sintonia feita no primário.

O transformador, neste caso, tem a função de casar a impedância da saída da etapa de *RF* com a entrada da etapa demoduladora.



## Circuitos de Sintonia Variável

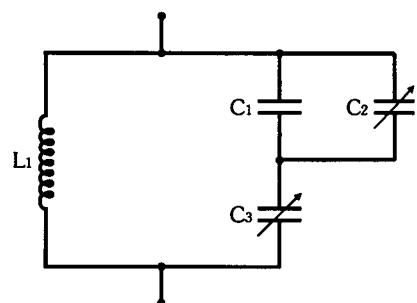
O circuito de sintonia variável é usado para selecionar uma entre diversas freqüências disponíveis, sendo a freqüência de ressonância ajustada externamente pelo próprio usuário.

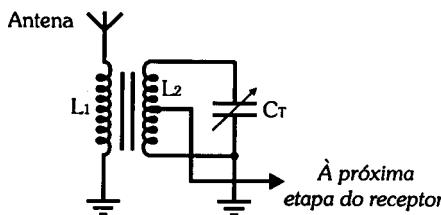
Este é o caso do circuito de sintonia da etapa de *RF* dos receptores *AM* ( $535\text{kHz}$  a  $1650\text{kHz}$ ) e *FM* ( $88\text{MHz}$  a  $108\text{MHz}$ ).

Para que a faixa de freqüências ( $f_{0mín}$  a  $f_{0máx}$ ) fique bem determinada, é comum utilizar três capacitores associados, conforme a figura ao lado.

$C_1$  é um capacitor fixo que define a ordem de grandeza de  $f_0$ .  $C_2$  é variável e acessível externamente, sendo usado para sintonizar a freqüência desejada.  $C_3$  é ajustável (*trimmer*) e não acessível externamente, servindo apenas para calibrar a faixa de freqüências de operação.

Assim, a capacidade total é dada por  $C_T = (C_1 + C_2) // C_3$ . O ajuste externo de  $C_2$  define  $C_{Tmín}$  e  $C_{Tmáx}$  e, consequentemente,  $f_{0máx}$  e  $f_{0mín}$ .





Nos receptores *AM* e *FM*, o circuito de sintonia variável está acoplado à antena.

Como exemplo, apresentamos o circuito ao lado, em que a antena é ligada ao primário do transformador, sendo a freqüência de ressonância determinada pela indutância  $L_2$  do secundário e pela capacitância  $C_1$ .

Neste circuito, é comum que o acoplamento à próxima etapa seja feito por uma derivação do secundário do transformador. O motivo é que o circuito  $LC$  paralelo apresenta uma alta impedância na ressonância, enquanto a impedância de entrada de estágios transistorizados não é tão elevada, de modo que a derivação é feita para casar a impedância entre essas etapas.

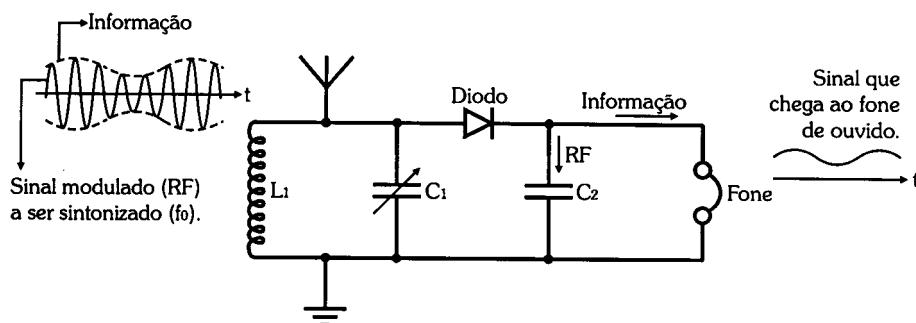
## Considerações Finais sobre o Projeto de um Circuito de Sintonia

Para finalizar este capítulo, é importante ressaltarmos que o projeto de um circuito de sintonia deve prever não apenas o  $LC$  que determina a freqüência de ressonância, já que esses dispositivos podem ter infinitos valores para uma mesma  $f_0$ . É necessário, também, que a sua impedância  $Z_0$  seja compatível com a impedância do circuito do qual o sintonizador fará parte e o seu fator de qualidade seja adequado à banda passante desejada.

### Exemplo de Aplicação: Rádio Galena

O primeiro rádio surgiu no final do século *XIX*, quando ainda não existiam os dispositivos ativos, como a válvula e o transistor. Ele era chamado de rádio galena, pois o elemento básico era um cristal de galena, cujas propriedades são muito semelhantes à do diodo semicondutor.

Basicamente, ele é formado por uma antena conectada a um circuito ressonante  $L_1 // C_1$  que sintoniza apenas um dos sinais transmitidos. Essa freqüência é ajustada por meio do capacitor variável  $C_1$ .



O cristal, que hoje pode ser substituído por um diodo de germânio, como o *IN34*, *IN60* ou equivalente, deixa passar apenas a parte positiva do sinal modulado.

Esses pulsos de alta freqüência são filtrados pelo capacitor  $C_2$ , de modo que no fone de ouvido sobra apenas a envoltória do sinal modulado, que corresponde à informação.

A curiosidade desse circuito está no fato de que ele não precisa de fonte de alimentação, pois toda a energia do circuito é proveniente do sinal captado pela antena.

Para que ele tenha um desempenho razoável na captação das estações mais fortes, é necessário que a antena seja grande, com pelo menos *10m* de extensão e com isolamento nas pontas. Ela pode ser feita com fio nu *16* ou *18 AWG*. A bobina  $L_1$  pode ser feita enrolando um fio esmaltado *28* ou *30 AWG* (aproximadamente *100* espiras) em um cabo de vassoura.

O capacitor variável  $C_1$  deve ser de uma seção com capacidade máxima de *410pF*. O capacitor  $C_2$  deve ter valor baixo e depende tanto da freqüência da estação captada como da impedância do fone de ouvido. Este, por sua vez, deve ser de alta impedância (magnético ou de cristal).

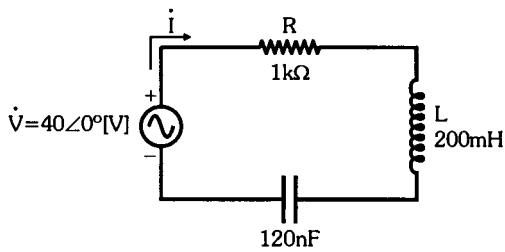
Por fim, o terra do circuito deve ser conectado a uma barra de metal de *40* a *50cm* enterrada no chão.

## Exercícios Propostos

### Círculo RLC Série

**18.1)** Considere o circuito ao lado:

- Determine  $\dot{Z}$  quando o gerador estiver operando na freqüência de  $800\text{Hz}$ ;
- Determine  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$ ;
- Esboce o diagrama fasorial e responda se o circuito é indutivo, capacitivo ou resistivo.



**18.2)** Considere o mesmo circuito do exercício anterior.

- Determine  $\dot{Z}$  quando o gerador estiver operando na freqüência de  $1200\text{Hz}$ ;
- Determine  $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$ ;
- Esboce o diagrama fasorial e responda se o circuito é indutivo, capacitivo ou resistivo.

**18.3)** Considerando os resultados de  $\dot{Z}$  nas freqüências de  $800\text{Hz}$  e  $1200\text{Hz}$  (obtidos nos exercícios 18.1 e 18.2), estime o valor da freqüência de ressonância  $f_0$  do circuito.

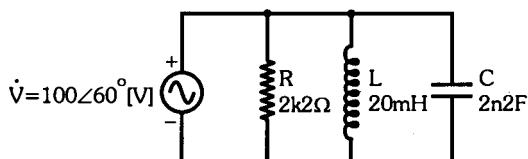
**18.4)** Um circuito  $RLC$  série é formado por  $R = 220\Omega$ ,  $L = 3,3\text{mH}$  e  $C = 4,7\text{nF}$  e é alimentado por um gerador de tensão com  $\dot{V} = 60\angle 45^\circ [\text{V}]$ . Determine:

- $\dot{Z}$  na freqüência de  $30\text{kHz}$ ;
- $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$  na freqüência de  $30\text{kHz}$ ;
- $\dot{Z}$  na freqüência de  $50\text{kHz}$ ;
- $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$  na freqüência de  $50\text{kHz}$ ;
- $\dot{Z}$  na freqüência de  $40,4\text{kHz}$ ;
- $\dot{I}$ ,  $\dot{V}_R$ ,  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$  na freqüência de  $40,4\text{kHz}$ .

### Círculo RLC Paralelo

**18.5)** Considere o circuito ao lado:

- Determine  $\dot{Z}$  quando o gerador estiver operando na freqüência de  $20\text{kHz}$ ;
- Determine  $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$ ;
- Esboce o diagrama fasorial e responda se o circuito é indutivo, capacitivo ou resistivo.



**18.6)** Considere o mesmo circuito do exercício anterior.

- Determine  $\dot{Z}$  quando o gerador estiver operando na freqüência de  $30\text{kHz}$ ;
- Determine  $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$ ;
- Esboce o diagrama fasorial e responda se o circuito é indutivo, capacitivo ou resistivo.

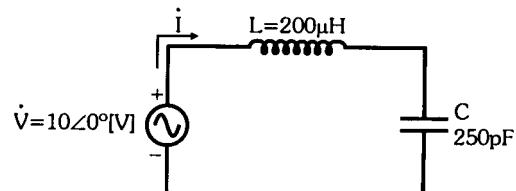
- 18.7) Considerando os resultados de  $\dot{Z}$  nas freqüências de  $20kHz$  e  $30kHz$  (obtidos nos exercícios 18.1 e 18.2), estime o valor da freqüência de ressonância  $f_0$  do circuito.
- 18.8) Um circuito RLC paralelo é formado por  $R = 56k\Omega$ ,  $L = 1\mu H$  e  $C = 33pF$  e é alimentado por um gerador de tensão com  $\dot{V} = 60\angle 45^\circ [V]$ . Determine:
- $\dot{Z}$  na freqüência de  $20MHz$ ;
  - $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$  na freqüência de  $20MHz$ ;
  - $\dot{Z}$  na freqüência de  $40MHz$ ;
  - $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$  na freqüência de  $40MHz$ ;
  - $\dot{Z}$  na freqüência de  $27,7MHz$ ;
  - $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  e  $\dot{I}_C$  na freqüência de  $27,7MHz$ .

#### Conceito Físico de Ressonância

- 18.9) Considere o circuito do exercício 18.1.
- Determine  $f_0$  e compare com o valor estimado no exercício 18.3.
  - Determine  $\rho_0$ ,  $X_{L0}$  e  $X_{C0}$  e compare-os entre si.
- 18.10) Considere o circuito do exercício 18.5.
- Determine  $f_0$  e compare com o valor estimado no exercício 18.7;
  - Determine  $\rho_0$ ,  $X_{L0}$  e  $X_{C0}$  e compare-os entre si.

#### Circuito Série de Sintonia

- 18.11) O circuito de sintonia ao lado é alimentado por um gerador de RF com baixa resistência interna. A bobina foi enrolada com um fio de  $0,5mm^2$ , cuja resistência  $CC$ , medida por um ohmímetro, vale  $r_{cc} = 5\Omega$ . São desprezíveis as demais resistências do circuito.
- Determine a freqüência  $f_0$  e a resistência  $\rho_0$  de ressonância do circuito;
  - Determine  $X_{L0}$ ,  $X_{C0}$ ,  $R_{s0}$ ,  $Z_0$ ,  $\varphi_0$  e  $Q_T$ ;
  - Por meio da Lei de Ohm, determine  $I_0$ ,  $V_{L0}$  e  $V_{C0}$  que seriam medidos no circuito com o gerador ajustado na freqüência de ressonância;
  - Determine  $V_{L0}$  e  $V_{C0}$  pelo valor de  $Q_T$  e compare com os resultados obtidos no item c;
  - Determine  $B$ ,  $f_i$  e  $f_s$ ;
  - Determine a potência ativa  $P_0$  dissipada por  $R_{s0}$ .



**18.12)** Considere que o gerador do exercício anterior foi ajustado na freqüência de corte inferior.

- Determine  $X_{Li}$ ,  $X_{Ci}$  e  $R_{si}$  na freqüência  $f_i$ ;
- Determine  $Z_i$ ,  $I_i$ ,  $V_{Li}$  e  $V_{Ci}$ ;
- Determine a potência ativa  $P_i$  dissipada por  $R_{si}$ ;
- Verifique se  $I_i / I_o \approx 0,707$ ,  $Z_i / Z_o \approx 1,41$  e se  $P_i / P_o \approx 0,5$ .

**18.13)** Usando o indutor do exercício 18.11, deseja-se projetar um circuito série de sintonia para operar com freqüência de ressonância de  $3,25\text{MHz}$ . Determine:

- o valor do capacitor que viabilize esse circuito;
- a resistência de ressonância  $\rho_0$ ;
- o fator de qualidade do circuito;
- a banda passante e estime as freqüências de corte inferior e superior.

**18.14)** Um circuito série de sintonia é formado por um indutor de  $12\mu\text{H}$ , enrolado com um fio  $26\text{AWG}$  e cuja resistência  $CC$  vale  $36\Omega$ . Deseja-se implementar um circuito que opere com freqüência de ressonância de aproximadamente  $100\text{kHz}$ , com uma tolerância máxima de  $\pm 20\%$ . Determine:

- o valor de um capacitor comercial que pode ser conectado em série com esse indutor;
- a freqüência real de ressonância em função do capacitor adotado e se ela está dentro da margem desejada;
- o fator de qualidade, a banda passante e as freqüências de corte inferior e superior do circuito;
- uma solução para resolver o problema da banda passante desse circuito.

### Círculo Paralelo de Sintonia

**18.15)** Um circuito  $LC$  paralelo é formado por uma bobina de  $13\mu\text{H}$  e por um capacitor de  $120\text{pF}$ . O fio usado na bobina é o  $28\text{AWG}$  e a sua resistência  $CC$  vale  $8,7\Omega$ . Determine:

- a freqüência de ressonância ideal  $f_0$  e a resistência de ressonância  $\rho_0$ ;
- $R_{s0}$  e o  $Q_T$  do circuito na freqüência  $f_0$ , considerando como relevante apenas a resistência do fio da bobina;
- a freqüência de ressonância real  $f_0$  e compare-a com o valor ideal calculado no item a;
- a impedância  $Z_0$ ;
- $R_{p0}$  (pela conversão do equivalente  $R_{s0}$ ) e compare o seu valor com  $Z_0$  calculado no item d.

**18.16)** Considere que o circuito de sintonia do exercício anterior esteja sendo analisado por um gerador com resistência interna  $R_G = 60\text{k}\Omega$  e ajustado com  $V_G = 20\text{V}$ . Determine:

- o fator de qualidade total resultante  $Q'_T$ , a banda passante definida pela curva da tensão e as freqüências de corte inferior e superior;
- as correntes  $I_0$ ,  $I_i$  e  $I_s$ ;
- as tensões  $V_{s0}$ ,  $V_{si}$  e  $V_{ss}$ .

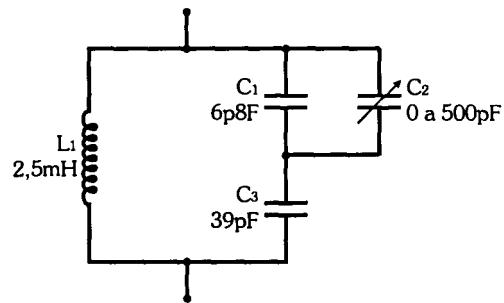
- 18.17)** Retome o exercício 18.15. Considere que o circuito de sintonia deste exercício esteja sendo analisado por um gerador com resistência interna  $R_G = 50\Omega$  e ajustado com tensão  $V_G = 20V$ . Determine:
- o fator de qualidade  $Q't$  e a banda passante definida pela curva da tensão;
  - as correntes  $I_o$ ,  $I_i$  e  $I_s$ ;
  - as tensões  $V_{S0}$ ,  $V_{Si}$  e  $V_{Ss}$ .
- 18.18)** Retome o exercício 18.5. Considere que o circuito de sintonia deste exercício esteja sendo analisado por um gerador com resistência interna  $R_G = 600\Omega$  e ajustado com tensão  $V_G = 20V$ . Determine:
- o fator de qualidade  $Q't$ , a banda passante definida pela curva da tensão e as freqüências de corte inferior e superior;
  - as correntes  $I_o$ ,  $I_i$  e  $I_s$ ;
  - as tensões  $V_{S0}$ ,  $V_{Si}$  e  $V_{Ss}$ .
- 18.19)** Um indutor de  $25\mu H$ , enrolado com um fio 32AWG, tem resistência  $CC$  de  $36\Omega$ . As suas espiras apresentam uma capacidade de  $4pF$ . Adotando o modelo quase real para esse indutor, determine:
- a freqüência ideal de auto-resonância desse indutor;
  - a sua freqüência real de auto-resonância em função da influência que a sua resistência  $CA$  exerce sobre ele;
  - o fator de qualidade, a banda passante e as freqüências de corte inferior e superior do indutor se ele estiver sendo alimentado por um gerador de elevadíssima resistência interna.

### Circuitos Práticos de Sintonia

- 18.20)** Uma bobina de  $250\mu H$  é ligada em paralelo com um capacitor fixo de  $470pF$  que, por sua vez, está em paralelo com um *trimmer* que varia entre  $10$  e  $50pF$ . Determine:
- as freqüências mínima e máxima de ressonância;
  - o valor de ajuste do *trimmer* para que esse circuito sintonize a freqüência intermediária de um receptor *AM* comercial;
  - a impedância  $Z_0$  do circuito, considerando que a sua resistência  $R_s$  na freqüência de ressonância do item b é de  $45\Omega$ ;
  - o fator de qualidade e a banda passante do circuito, sabendo que a etapa da qual ele receberá o sinal tem uma impedância de saída maior que  $100k\Omega$ .
- 18.21)** Usando a bobina de  $250\mu H$  e o capacitor fixo de  $470pF$  do circuito do exercício 18.20, deseja-se implementar um circuito de sintonia *LC* paralelo, só que o capacitor fixo deve estar em série com um outro capacitor variável. Determine a faixa de operação do capacitor variável para que as freqüências mínima e máxima sejam as mesmas. Analise o resultado e encontre uma solução para o problema surgido.
- 18.22)** Deseja-se um circuito de sintonia que opere com freqüência de ressonância de  $10MHz$  e com banda passante de  $200kHz$ . O ideal é que esse circuito tenha uma impedância  $Z_0$  entre  $70k\Omega$  e  $120k\Omega$ . A etapa que lhe fornecerá o sinal tem uma impedância de saída de  $50k\Omega$ . Projete esse circuito usando todos os recursos disponíveis neste livro.

**18.23)** Considere o circuito abaixo e determine:

- a) as capacitâncias totais mínima e máxima;
- b) as freqüências de ressonância mínima e máxima.

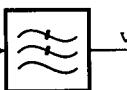
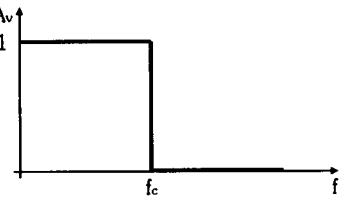
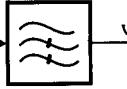
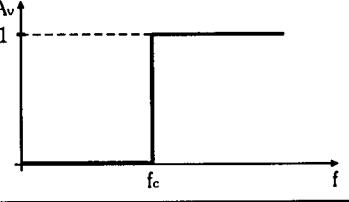
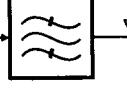
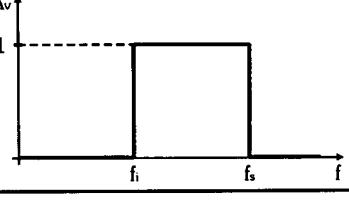
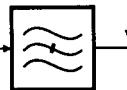
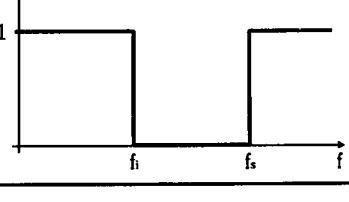


**19.1**

**Conceitos e Tipos de Filtro**

Ideialmente, a função de um filtro é *permitir ou rejeitar* a passagem de uma faixa de freqüências presente em sua entrada, impondo forte atenuação às freqüências rejeitadas e nenhuma atenuação às freqüências permitidas. Neste livro, nós analisaremos os filtros passivos, pois são compostos apenas por resistores, indutores e capacitores.

A tabela seguinte apresenta os quatro tipos de *filtros ideais*:

Tipo de Filtro (Símbolo)	Característica Ideal	Curva de Resposta em Freqüência Ganho x Freqüência
<b>FPB</b> 	<b>Filtro Passa Baixas</b> Permite a passagem de todas as freqüências abaixo da freqüência de corte $f_c$ , rejeitando as demais.	
<b>FPA</b> 	<b>Filtro Passa Altas</b> Permite a passagem de todas as freqüências acima da freqüência de corte $f_c$ , rejeitando as demais.	
<b>FPF</b> 	<b>Filtro Passa Faixa</b> Permite a passagem de todas as freqüências acima da freqüência de corte inferior $f_{ci}$ e abaixo da freqüência de corte superior $f_{cs}$ , rejeitando as demais.	
<b>FRF</b> 	<b>Filtro Rejeita Faixa</b> Rejeita a passagem de todas as freqüências acima da freqüência de corte inferior $f_{ci}$ e abaixo da freqüência de corte superior $f_{cs}$ , permitindo a passagem das demais.	

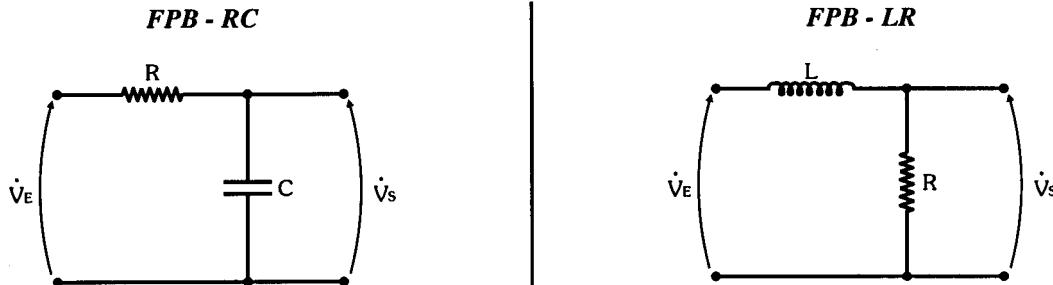
Nos *filtros reais* mais simples, isto é, formados apenas por dois dispositivos, as expressões do módulo  $A_v$  e da fase  $\theta_A$  do ganho de tensão podem ser deduzidas a partir da expressão do divisor de tensão. No filtros que possuem mais de dois dispositivos, essas fórmulas devem ser deduzidas de acordo com o modo como os dispositivos estão ligados entre si. A fórmula da freqüência de corte de um filtro pode se deduzida a partir da expressão do seu ganho. Há dois métodos simples para isso:

**1º Método** - Na freqüência de corte  $f_c$ , o módulo  $A_{vc}$  do ganho vale  $A_{vc} = -3dB$  ou  $A_{vc} = 1/\sqrt{2}$ . Nesse caso, a freqüência de corte é determinada igualando a expressão do módulo do ganho ao valor de  $A_{vc}$ .

**2º Método** - Na freqüência de corte  $f_c$ , a fase  $\theta_{Ac}$  do ganho vale  $\theta_{Ac} = \pm 45^\circ$ . O sinal da fase depende do tipo de filtro. Nesse caso, a freqüência de corte é determinada igualando a expressão da fase do ganho ao valor de  $\theta_{Ac}$ .

Há, ainda, um terceiro método que se aplica à impedância equivalente do filtro. O que importa é que a aplicação desses métodos a um mesmo filtro resulta na mesma fórmula da sua freqüência de corte.

Os filtros passa baixas (ou *FPB*) mais simples são formados por um dispositivo resistivo  $R$  e por um dispositivo reativo  $L$  ou  $C$ . A disposição desses dispositivos determina o comportamento dos filtros, conforme mostram as figuras abaixo:



### Ganho dos Filtros

As fórmulas do módulo  $A_v$  e da fase  $\theta_A$  do ganho de tensão dos filtros podem ser deduzidas a partir da expressão do divisor de tensão aplicada em suas saídas.

No *FPB - RC*, temos:

$$\dot{V}_S = \frac{-jX_C}{R - jX_C} \cdot \dot{V}_E \Rightarrow \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}_E} = \frac{-jX_C}{R - jX_C} \Rightarrow$$

$$A_v = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle -90^\circ + \arctg \frac{X_C}{R}$$

No *FPB - LR*, temos:

$$\dot{V}_S = \frac{R}{R + jX_L} \cdot \dot{V}_E \Rightarrow \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}_E} = \frac{R}{R + jX_L} \Rightarrow$$

$$A_v = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \angle -\arctg \frac{X_L}{R}$$

### Comportamento Geral

No *FPB - RC*, a saída é a tensão  $\dot{V}_S$  sobre o capacitor.

Se a freqüência de entrada tende a zero ( $f \rightarrow 0$ ), a reatância do capacitor tende a um curto-circuito ( $X_C \rightarrow \infty$ ) e o sinal de entrada passa totalmente para a saída ( $V_S \rightarrow V_E$ ).

Nos dois filtros, o módulo do ganho tende à unidade ( $A_v \rightarrow 1$ ) e a fase do ganho tende a se anular ( $\theta_v \rightarrow 0^\circ$ ), pois a defasagem na tensão de saída é imposta, nos dois circuitos, apenas pelo resistor.

No *FPB - RC*, se a freqüência de entrada tende ao infinito ( $f \rightarrow \infty$ ), a reatância do capacitor tende a zero ( $X_C \rightarrow 0$ ), de modo que o sinal de entrada fica no resistor e a tensão de saída tende a zero ( $V_S \rightarrow 0$ ).

No *FPB - LR*, se a freqüência de entrada tende ao infinito ( $f \rightarrow \infty$ ), a reatância do indutor tende a um curto-circuito ( $X_L \rightarrow \infty$ ), de modo que o sinal de entrada fica no indutor e a tensão de saída tende a zero ( $V_S \rightarrow 0$ ).

Nos dois filtros, o módulo do ganho tende a zero ( $A_v \rightarrow 0$ ) e a fase do ganho tende à quadratura ( $\theta_v \rightarrow -90^\circ$ ), pois no *FPB - RC*, a defasagem na tensão de saída é imposta apenas pelo atraso que o capacitor de saída provoca na tensão e no *FPB - LR*, a defasagem na tensão de saída é imposta apenas pelo atraso que o indutor de entrada provoca na corrente.

Portanto, nos dois circuitos as freqüências baixas passam para a saída e as altas são aterradas pelo capacitor ou retidas pelo indutor, que nesse caso funciona como um choque.

Substituindo  $X_C$  por  $1/(2\pi f \cdot C)$  na expressão de  $A_V$  do filtro  $RC$  e substituindo  $X_L$  por  $2\pi f \cdot L$  na expressão de  $A_V$  do filtro  $LR$ , obtemos as expressões do módulo e da fase dos seus respectivos ganhos em função dos seus dispositivos.

No  $FPB - RC$ , obtemos:

$$A_V = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f \cdot R \cdot C)^2 + 1}} \quad \text{e} \quad \theta_A = -\arctg(2\pi f \cdot R \cdot C)$$

No  $FPB - LR$ , obtemos:

$$A_V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f \cdot L}{R}\right)^2 + 1}} \quad \text{e} \quad \theta_A = -\arctg \frac{2\pi f \cdot L}{R}$$

## Freqüência de Corte dos Filtros

A freqüência de corte desses filtros passa baixas pode ser determinada por um dos métodos descritos no tópico anterior. Apenas por questão didática, usaremos um método diferente para cada um dos filtros em análise.

No  $FPB - RC$ , obteremos  $f_c$  pelo módulo do ganho:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi f_c \cdot R \cdot C)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$(2\pi f_c \cdot R \cdot C)^2 + 1 = 2 \Rightarrow 2\pi f_c \cdot R \cdot C = 1 \Rightarrow$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

No  $FPB - LR$ , obteremos  $f_c$  pela fase do ganho:

$$-\arctg \frac{2\pi f_c \cdot L}{R} = -45^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi f_c \cdot L}{R} = \tan 45^\circ \Rightarrow \frac{2\pi f_c \cdot L}{R} = 1 \Rightarrow$$

$$f_c = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$

## Expressões Gerais do Módulo e da Fase do Ganco

As expressões gerais do ganho desses filtros são funções apenas de uma freqüência  $f$  qualquer e da freqüência de corte  $f_c$ , eliminando as variáveis relativas aos valores dos dispositivos.

Nas expressões de  $A_V$  e de  $\theta_A$ , podemos substituir o termo  $2\pi \cdot R \cdot C$  por  $1/f_c$  para o  $FPB - RC$ , e podemos substituir o termo  $2\pi \cdot L/R$  por  $1/f_c$  para o  $FPB - LR$ .

Como resultado, obtemos as mesmas expressões de  $A_V$  e  $\theta_A$  em função de  $f$  e de  $f_c$ , conforme mostramos abaixo:

$$A_V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + 1}}$$

e

$$\theta_A = -\arctg \frac{f}{f_c}$$

## Curvas de Respostas em Freqüência dos Filtros Passa Baixas

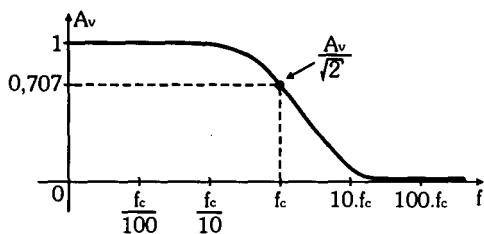
Por meio dos *diagramas de Bode*, podemos representar graficamente o comportamento do ganho e da fase dos filtros passa baixas *RC* e *LR*.

A região de atenuação será analisada em *dB* para uma variação de uma *década* e de uma *oitava* em relação à freqüência de corte  $f_c$ .

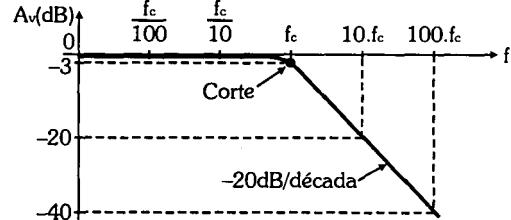
Atenuação	$f$	$A_v$	$A_v [dB]$	$\theta_A$
	$f_c / 100$	1	0	$0^\circ$
	$f_c / 10$	0,995	0	$-6^\circ$
	$f_c / 5$	0,981	0	$-11^\circ$
	$f_c$	0,707	-3	$-45^\circ$
<b>oitava: de <math>5.f_c</math> para <math>10.f_c</math></b>		0,196	-14	$-79^\circ$
<b>década: de <math>10.f_c</math> para <math>100.f_c</math></b>		0,100	-20	$-84^\circ$
<b>atenuação: 6 dB</b>		0,010	-40	$-90^\circ$

### Diagramas de Bode do Módulo do Ganho

Resposta em Freqüência do Módulo  $A_v$

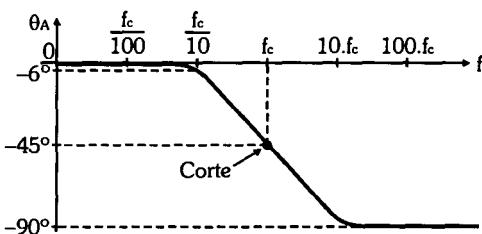


Resposta em Freqüência do Módulo  $A_v [dB]$



### Diagrama de Bode da Fase do Ganho

Resposta em Freqüência da Fase  $\theta_A$



Portanto, os filtros passa baixas *RC* e *LR* têm uma atenuação de *20dB/década* ou de *6dB/oitava*.

## Condições para o Projeto e Análise dos Filtros Passa Baixas *RC* e *LR*

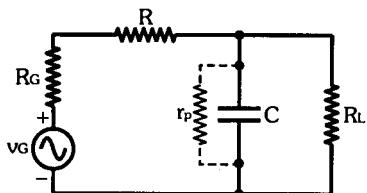
Consideramos como *projeto* de um filtro a determinação dos valores dos dispositivos que provocam o corte na freqüência desejada.

Consideramos como *análise* de um filtro, a determinação da freqüência de corte a partir dos dispositivos que o compõem.

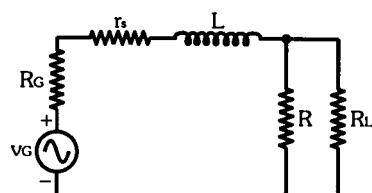
Em ambos os casos devemos considerar a resistência interna  $R_G$  da fonte de sinal, o valor da carga  $R_L$  e, eventualmente, o valor da resistência  $r_s$  do fio do indutor. No caso do capacitor, a sua resistência  $r_p$  pode ser desprezada na grande maioria das aplicações por ter um valor elevado.

As figuras abaixo mostram como ficam os circuitos equivalentes dos filtros passa baixas *RC* e *LR*, quando consideramos a resistência interna da fonte de sinal, a carga e, no caso do filtro *LR*, a resistência do fio do indutor.

Círculo Equivalente do *FPB - RC*



Círculo Equivalente do *FPB - LR*

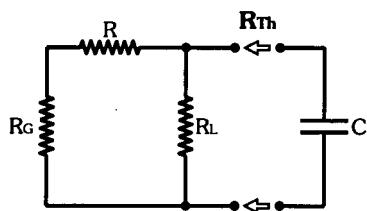


### Simplificação pelo Equivalente Thévenin

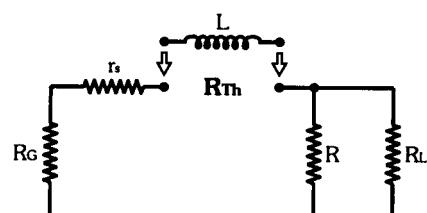
Para facilitar o projeto ou a análise de um filtro, os circuitos equivalentes acima podem ser simplificados pela determinação das resistências equivalentes Thévenin  $R_{Th}$  vistas pelo capacitor do *FPB - RC* e pelo indutor do *FPB - LR*.

Para isso, basta substituir o gerador de tensão por um curto-círcuito e determinar a resistência equivalente entre os pontos em que estão conectados o capacitor e o indutor.

Círculo Simplificado do *FPB - RC*



Círculo Simplificado do *FPB - LR*



No *FPB - RC*, a carga  $R_L$  fica em paralelo com  $R_G + R$ .

Portanto:

$$R_{Th} = \frac{(R + R_G) \cdot R_L}{R + R_G + R_L}$$

$$\text{e } f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R_{Th} \cdot C}$$

No *FPB - LR*, as resistências  $R_G$  e  $r_s$  estão em série com o equivalente paralelo de  $R // R_L$ .

Portanto:

$$R_{Th} = \frac{R \cdot R_L}{R + R_L} + R_G + r_s$$

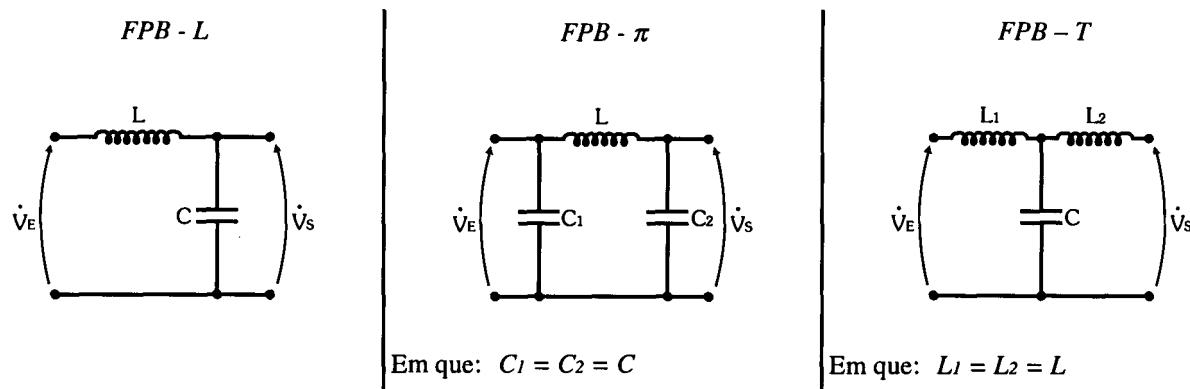
$$\text{e } f_c = \frac{R_{Th}}{2\pi \cdot L}$$

Assim, concluímos que a freqüência de corte real desses filtros pode ser maior ou menor do que a ideal, dependendo da influência maior ou menor que  $R_G$ ,  $R_L$  e  $r_s$  exercem nos circuitos.

## Filtros Passa Baixas - $L$ , $\pi$ e $T$

Uma forma de forçar uma atenuação mais brusca nos filtros passa baixas acima da freqüência de corte é por meio da associação dos dois elementos reativos ( $L$  e  $C$ ) em um mesmo circuito.

As figuras abaixo mostram esses circuitos nas configurações denominadas  $L$ ,  $\pi$  e  $T$ .



Estes três filtros têm um comportamento ressonante, de modo que as freqüências de corte  $f_c$  são um pouco superiores às suas freqüências de ressonância  $f_0$ .

Ao lado, apresentamos a fórmula da freqüência de ressonância  $f_0$  e o fator que, multiplicado por  $f_0$ , resulta em uma estimativa da freqüência de corte  $f_c$  desses filtros, desde que os capacitores do filtro  $\pi$  sejam iguais, o mesmo ocorrendo com os indutores do filtro  $T$ .

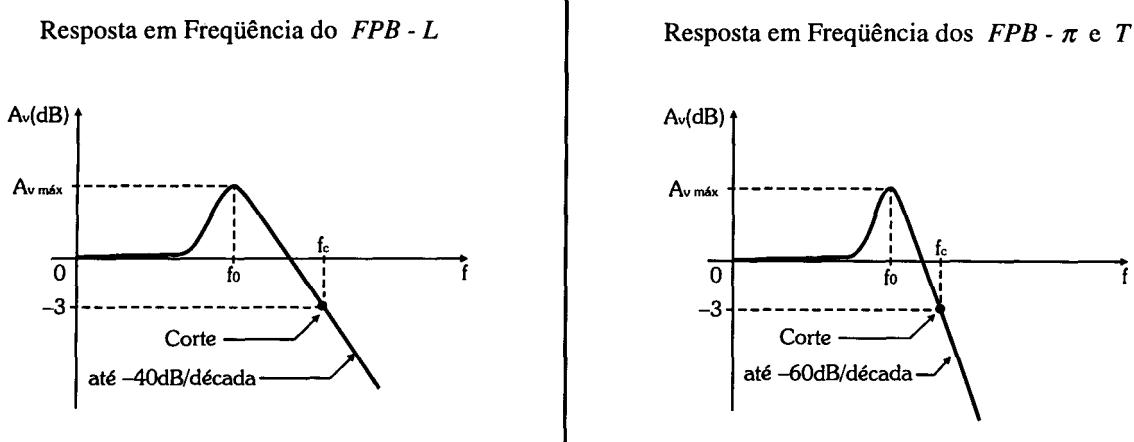
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_c = 1,55.f_0$$

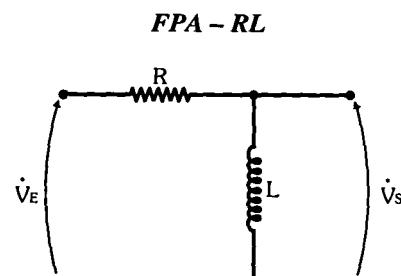
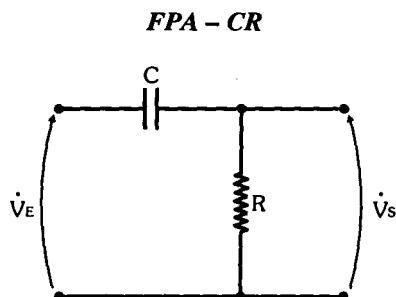
No filtro  $L$ , a atenuação chega a  $40\text{dB/década}$ , enquanto nos filtros  $\pi$  e  $T$  ela é maior, podendo chegar até a  $60\text{dB/década}$ .

Na freqüência de ressonância  $f_0$ , esses filtros apresentam um ganho *acima de 0dB*, limitado pelas resistências do circuito. Idealmente, o ganho em  $f_0$  tenderia ao infinito.

As figuras abaixo mostram as curvas de respostas em freqüência desses filtros.



Os filtros passa altas (ou *FPA*) mais simples são formados por um dispositivo resistivo *R* e por um dispositivo reativo *L* ou *C*. A colocação desses dispositivos determina o comportamento dos filtros, conforme mostram as figuras abaixo:



### Ganho dos Filtros

As fórmulas do módulo  $A_v$  e da fase  $\theta_v$  do ganho de tensão dos filtros podem ser deduzidas a partir da expressão do divisor de tensão aplicada em suas saídas.

No *FPA - CR*, temos:

$$\dot{V}_S = \frac{R}{R - jX_C} \cdot \dot{V}_E \Rightarrow \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}_E} = \frac{R}{R - jX_C} \Rightarrow$$

$$A_v = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle \arctg \frac{X_C}{R}$$

No *FPA - RL*, temos:

$$\dot{V}_S = \frac{jX_L}{R + jX_L} \cdot \dot{V}_E \Rightarrow \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}_E} = \frac{jX_L}{R + jX_L} \Rightarrow$$

$$A_v = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \angle 90^\circ - \arctg \frac{X_L}{R}$$

### Comportamento Geral

No *FPA - CR*, a saída é a tensão  $\dot{V}_S$  sobre o resistor.

Se a freqüência de entrada tende a zero ( $f \rightarrow 0$ ), a reatância do capacitor tende a um curto-circuito ( $X_C \rightarrow \infty$ ), de modo que o sinal de entrada fica no capacitor e a tensão de saída tende a zero ( $V_S \rightarrow 0$ ).

Nos dois filtros, o módulo do ganho tende a zero ( $A_v \rightarrow 0$ ) e a fase do ganho tende à quadratura ( $\theta_v \rightarrow 90^\circ$ ), pois no *FPA - CR*, a defasagem na tensão de saída é imposta apenas pelo avanço que o capacitor de entrada provoca na corrente e no *FPA - RL*, a defasagem na tensão de saída é imposta pelo avanço que o indutor de saída provoca na tensão.

No *FPA - CR*, se a freqüência de entrada tende ao infinito ( $f \rightarrow \infty$ ), a reatância do capacitor tende a um curto-circuito ( $X_C \rightarrow 0$ ) e o sinal de entrada passa totalmente para a saída ( $V_S \rightarrow V_E$ ).

No *FPA - RL*, a saída é a tensão  $\dot{V}_S$  sobre o indutor.

Se a freqüência de entrada tende a zero ( $f \rightarrow 0$ ), a reatância do indutor tende a um curto-circuito ( $X_L \rightarrow 0$ ), de modo que o sinal de entrada fica no resistor e a tensão de saída tende a zero ( $V_S \rightarrow 0$ ).

No *FPA - RL*, se a freqüência de entrada tende ao infinito ( $f \rightarrow \infty$ ), a reatância do indutor tende a um curto-circuito ( $X_L \rightarrow \infty$ ) e o sinal de entrada passa totalmente para a saída ( $V_S \rightarrow V_E$ ).

Nos dois filtros, o módulo do ganho tende à unidade ( $A_v \rightarrow 1$ ) e a fase do ganho tende a se anular ( $\theta_v \rightarrow 0^\circ$ ), pois a defasagem na tensão de saída é imposta, nos dois circuitos, apenas pelo resistor.

Portanto, nos dois circuitos as freqüências altas passam para a saída e as baixas são retidas pelo capacitor ou aterradas pelo indutor.

Substituindo  $X_C$  por  $1/(2\pi f \cdot C)$  na expressão de  $A_v$  do filtro  $CR$  e substituindo  $X_L$  por  $2\pi f \cdot L$  na expressão de  $A_v$  do filtro  $RL$ , obtemos as expressões do módulo e da fase dos seus respectivos ganhos em função dos seus dispositivos.

No FPA - CR, obtemos:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f \cdot R \cdot C}\right)^2 + 1}} \quad \text{e} \quad \theta_A = \arctg \frac{1}{2\pi f \cdot R \cdot C}$$

No FPA - RL, obtemos:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{2\pi f \cdot L}\right)^2 + 1}} \quad \text{e} \quad \theta_A = \arctg \frac{R}{2\pi f \cdot L}$$

## Freqüência de Corte dos Filtros

A freqüência de corte desses filtros passa altas pode ser determinada por um dos métodos descritos no tópico 19.1. Apenas por questão didática, usaremos um método diferente para cada um dos filtros em análise.

No FPA - CR, obteremos  $f_c$  pelo módulo do ganho:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f_c \cdot R \cdot C}\right)^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \frac{1}{(2\pi f_c \cdot R \cdot C)^2} + 1 &= 2 \Rightarrow 2\pi f_c \cdot R \cdot C = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

No FPA - RL, obteremos  $f_c$  pela fase do ganho:

$$\begin{aligned} \arctg \frac{R}{2\pi f_c \cdot L} &= 45^\circ \Rightarrow \\ \frac{R}{2\pi f_c \cdot L} &= \tg 45^\circ \Rightarrow \frac{R}{2\pi f_c \cdot L} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_c = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$

Observe que as fórmulas são iguais às dos respectivos filtros passa baixas.

## Expressões Gerais do Módulo e da Fase do Ganco

As expressões gerais do ganho desses filtros são funções apenas de uma freqüência  $f$  qualquer e da freqüência de corte  $f_c$ , eliminando as variáveis relativas aos valores dos dispositivos.

Nas expressões de  $A_v$  e de  $\theta_A$ , podemos substituir o termo  $1/(2\pi R \cdot C)$  por  $f_c$  para o FPA - CR, e podemos substituir o termo  $R/(2\pi L)$  por  $f_c$  para o FPA - RL.

Como resultado, obtemos as mesmas expressões de  $A_v$  e  $\theta_A$  em função de  $f$  e de  $f_c$ , conforme mostramos abaixo:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + 1}}$$

e

$$\theta_A = \arctg \frac{f_c}{f}$$

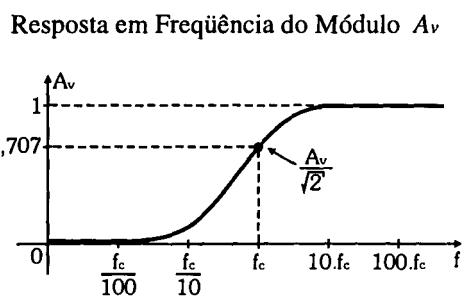
## Curvas de Respostas em Freqüência dos Filtros Passa Altas

Por meio dos *diagramas de Bode*, podemos representar graficamente o comportamento do ganho e da fase dos filtros passa altas *CR* e *RL*.

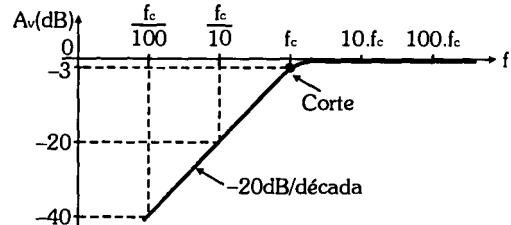
A região de atenuação será analisada em *dB* para uma variação de uma *década* e de uma *oitava* em relação à freqüência de corte  $f_c$ .

Atenuação	$f$	$A_v$	$A_v [dB]$	$\theta_A$
<b>década:</b> de $f_c/100$ para $f_c/10$	$f_c/100$	0,010	-40	90°
<b>atenuação: 20 dB</b>	$f_c/10$	0,100	-20	84°
<b>oitava:</b> de $f_c/10$ para $f_c/5$	$f_c/5$	0,196	-14	79°
<b>atenuação: 6 dB</b>	$f_c$	0,707	-3	45°
	$5.f_c$	0,981	0	11°
	$10.f_c$	0,995	0	6°
	$100.f_c$	1	0	0°

### Diagramas de Bode do Módulo do Ganho

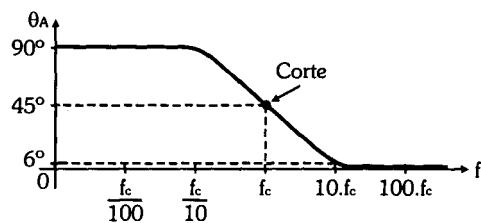


Resposta em Freqüência do Módulo  $A_v [dB]$



### Diagrama de Bode da Fase do Ganho

Resposta em Freqüência da Fase  $\theta_A$



Portanto, os filtros passa altas *CR* e *RL* têm uma atenuação de *20dB/década* ou de *6dB/oitava*.

## Condições para o Projeto e Análise dos Filtros Passa Altas CR e RL

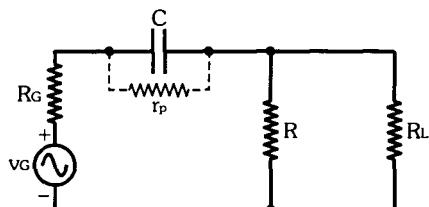
Consideramos como *projeto* de um filtro a determinação dos valores dos dispositivos que provocam o corte na freqüência desejada.

Consideramos como *análise* de um filtro, a determinação da freqüência de corte a partir dos dispositivos que o compõem.

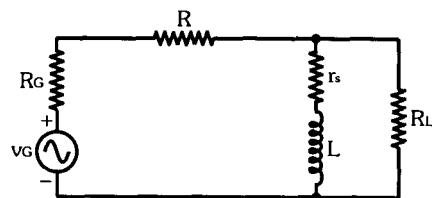
Em ambos os casos devemos considerar a resistência interna  $R_G$  da fonte de sinal, o valor da carga  $R_L$  e, eventualmente, o valor da resistência  $r_s$  do fio do indutor. No caso do capacitor, a sua resistência  $r_p$  pode ser desprezada na grande maioria das aplicações por ter um valor elevado.

As figuras abaixo mostram como ficam os circuitos equivalentes dos filtros passa altas CR e RL, quando consideramos a resistência interna da fonte de sinal, a carga e, no caso do filtro RL, a resistência do fio do indutor.

Círculo Equivalente do FPA - CR



Círculo Equivalente do FPA - RL

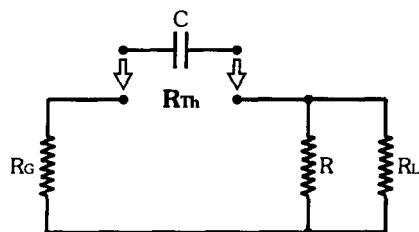


### Simplificação pelo Equivalente Thévenin

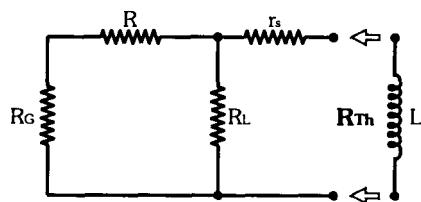
Para facilitar o projeto ou a análise de um filtro, os circuitos equivalentes acima podem ser simplificados pela determinação das resistências equivalentes Thévenin  $R_{Th}$  vistas pelo capacitor do FPA - CR e pelo indutor do FPA - RL.

Para isso, basta substituir o gerador de tensão por um curto-círcuito e determinar a resistência equivalente entre os pontos em que estão conectados o capacitor e o indutor.

Círculo Simplificado do FPA - CR



Círculo Simplificado do FPA - RL



No FPA - CR, a resistência  $R_G$  fica em série com o equivalente paralelo de  $R // R_L$ .

Portanto:

$$R_{Th} = \frac{R.R_L}{R + R_L} + R_G \quad \text{e} \quad f_c = \frac{1}{2\pi.R_{Th}.C}$$

No FPA - RL, a resistência  $r_s$  fica em série com o equivalente paralelo de  $(R+R_G) // R_L$ .

Portanto:

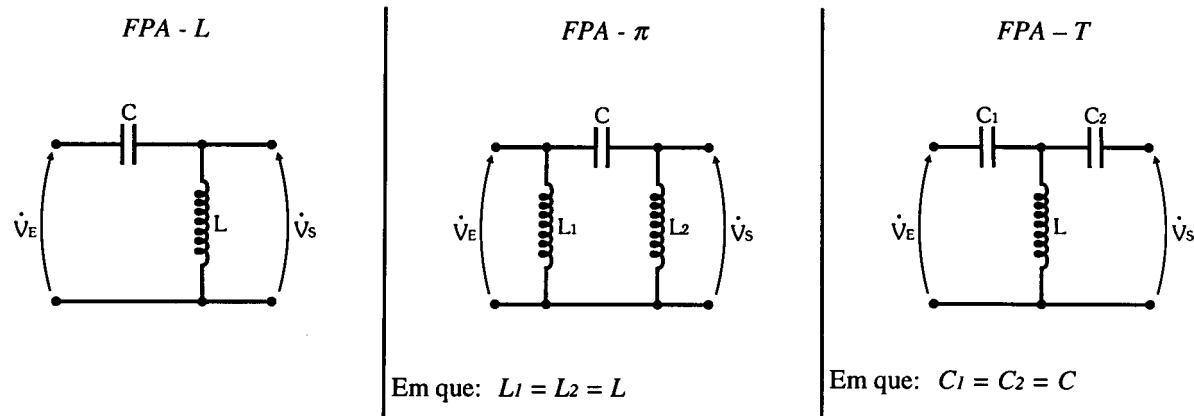
$$R_{Th} = \frac{(R_G + R).R_L}{R_G + R + R_L} + r_s \quad \text{e} \quad f_c = \frac{R_{Th}}{2\pi.L}$$

Assim, concluímos que a freqüência de corte real desses filtros pode ser maior ou menor do que a ideal, dependendo da influência maior ou menor que  $R_G$ ,  $R_L$  e  $r_s$  exercem nos circuitos.

## Filtros Passa Altas - $L$ , $\pi$ e $T$

Uma forma de forçar uma atenuação mais brusca nos filtros passa altas abaixo da freqüência de corte é por meio da associação dos dois elementos reativos ( $L$  e  $C$ ) em um mesmo circuito.

As figuras abaixo mostram esses circuitos nas configurações denominadas  $L$ ,  $\pi$  e  $T$ .



Estes três filtros têm um comportamento ressonante, de modo que as freqüências de corte  $f_c$  são um pouco inferiores às suas freqüências de ressonância  $f_0$ .

Ao lado, apresentamos a fórmula da freqüência de ressonância  $f_0$  e o fator que, multiplicado por  $f_0$ , resulta em uma estimativa da freqüência de corte  $f_c$  desses filtros, desde que os indutores do filtro  $\pi$  sejam iguais, o mesmo ocorrendo com os capacitores do filtro  $T$ .

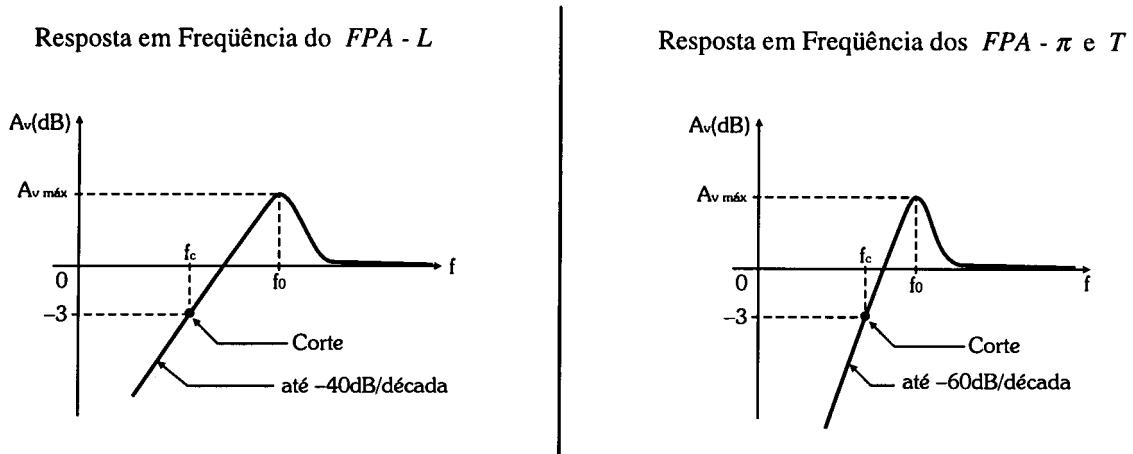
$$f_0 = \frac{I}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_c = 0,65 \cdot f_0$$

No filtro  $L$ , a atenuação chega a  $40\text{dB/década}$ , enquanto nos filtros  $\pi$  e  $T$  ela é maior, podendo chegar até a  $60\text{dB/década}$ .

Na freqüência de ressonância  $f_0$ , esses filtros apresentam um ganho *acima de 0dB*, limitado pelas resistências do circuito. Idealmente, o ganho em  $f_0$  tenderia ao infinito.

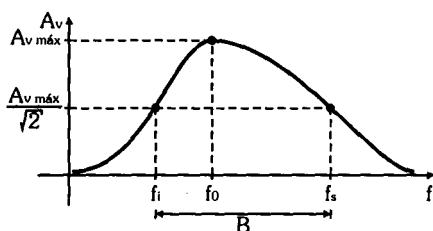
As figuras abaixo mostram as curvas de respostas em freqüência desses filtros.



Há uma quantidade muito grande de circuitos que se comporta como filtros passa faixa (*FPF*) e rejeita faixa (*FRF*), pois eles são compostos basicamente pela associação de um ou mais filtros passa baixas e passa altas. Neste tópico, apresentaremos um exemplo de *FPF* e um de *FRF*, sem nos estendermos em suas análises, pois a base é a mesma dos filtros analisados anteriormente e dos circuitos de sintonia analisados no Capítulo 19.

### Filtro Passa Faixa

O filtro passa faixa (*FPF*) mais simples é formado por duas células dispostas de tal modo que funcionam como um *FPA* para a faixa de freqüências na região do corte inferior ( $f_i$ ) e como um *FPB* para a faixa de freqüências na região do corte superior ( $f_s$ ).



Isso significa que o *FPF* tem um comportamento similar ao de um circuito de sintonia, ou seja, ele possui uma freqüência de ressonância  $f_0$ .

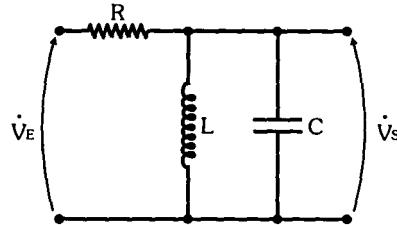
Só que, para o filtro, é importante que a banda passante  $B$  dependa de uma resistência  $R$  que possa ser alterada conforme a necessidade, e não das resistências espúrias do circuito.

Dizendo de outra forma, para o filtro, é importante que o fator de qualidade  $Q_r$  do circuito possa ser controlado por uma resistência  $R$ .

#### Filtro Passa Faixa - *LC*

No filtro passa faixa - *LC* ao lado, a saída é a tensão  $\dot{V}_s$  sobre o capacitor  $C$  (ou sobre o indutor  $L$ ).

O resistor  $R$  forma um divisor de tensão com o circuito de sintonia *LC* paralelo.



O resistor  $R$  controla o fator de qualidade  $Q_r$  do circuito, ou seja, a sua banda passante  $B$ . Quanto menor o valor de  $R$ , maior a banda passante  $B$  do filtro.

As duas células desse filtro têm o resistor como elemento comum.

A célula *RL* funciona como um filtro passa altas, pois as baixas freqüências são aterradas pelo indutor e as altas freqüências passam para a saída. Portanto, a freqüência de corte inferior  $f_i$  é determinada predominantemente pela célula *RL*, sob influência do capacitor.

A célula *RC* funciona como um filtro passa baixas, pois as altas freqüências são aterradas pelo capacitor e as baixas freqüências passam para a saída. Portanto, a freqüência de corte superior  $f_s$  é determinada predominantemente pela célula *RC*, sob influência do indutor.

Entre as freqüências de corte inferior e superior está a freqüência de ressonância  $f_0$  do filtro. A freqüência de ressonância e a banda passante do filtro são dadas pelas fórmulas ao lado:

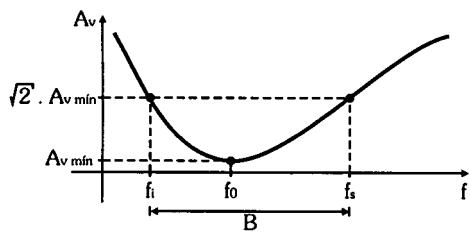
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C}}$$

e

$$B = f_s - f_i$$

## Filtro Rejeita Faixa

O filtro rejeita faixa (*FRF*) mais simples é formado por duas células dispostas de tal modo que funcionam como um *FPB* para a faixa de freqüências na região do corte inferior ( $f_i$ ) e como um *FPA* para a faixa de freqüências na região do corte superior ( $f_s$ ).



Isso significa que o *FRF* também tem uma freqüência de ressonância  $f_0$ , sendo que a sua banda passante  $B$  deve ser controlada por uma resistência  $R$  que possa ser alterada conforme a necessidade, ou seja, essa banda não pode depender apenas das resistências espúrias do circuito.

Isso significa que o fator de qualidade  $Q_T$  do circuito pode ser ajustado por essa resistência  $R$ .

## Filtro Rejeita Faixa - LC

No filtro rejeita faixa - *LC* ao lado, a saída é a tensão  $\dot{V}_s$  sobre o capacitor  $C$  em série com o indutor  $L$ .

O resistor  $R$  forma um divisor de tensão com o circuito de sintonia *LC* série.

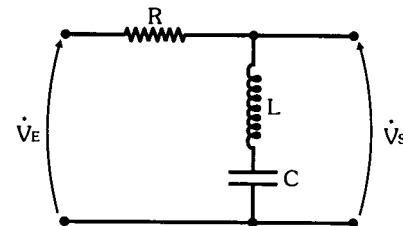
O resistor  $R$  controla o fator de qualidade  $Q_T$  do circuito, ou seja, a sua banda passante  $B$ . Quanto maior o valor de  $R$ , maior a banda passante  $B$  do filtro.

As duas células desse filtro têm o resistor como elemento comum.

A célula *RC* funciona como um filtro passa baixas, pois as baixas freqüências são bloqueadas pelo capacitor, passando para a saída, e as altas freqüências são aterradas por esse capacitor. Portanto, a freqüência de corte inferior  $f_i$  é determinada predominantemente pela célula *RC*, sob influência do indutor.

A célula *RL* funciona como um filtro passa altas, pois as baixas freqüências são aterradas pelo indutor e as altas freqüências são bloqueadas por ele, passando para a saída. Portanto, a freqüência de corte superior  $f_s$  é determinada predominantemente pela célula *RL*, sob influência do capacitor.

Entre as freqüências de corte inferior e superior está a freqüência de ressonância  $f_0$  do filtro. A freqüência de ressonância e a banda passante do filtro são dadas pelas fórmulas ao lado:

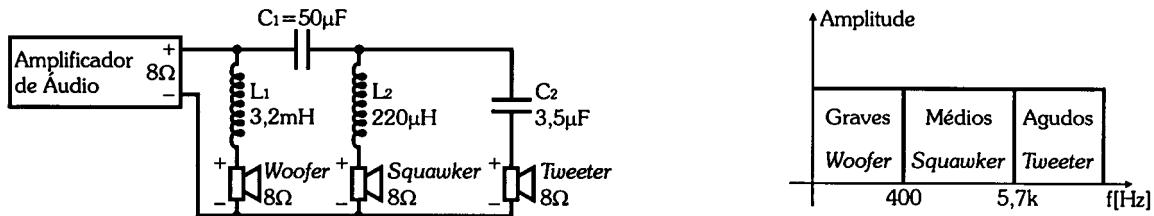


$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$$

e

$$B = f_s - f_i$$

Nas análises do **DF-1** feitas anteriormente, procuramos identificar como se comporta o circuito do ponto de vista das suas reatâncias e impedâncias. Para essa última análise, tomaremos como referência as conclusões obtidas no tópico 14.4 e no Exercício Proposto 14.22.



### Identificação e Característica dos Blocos do **DF-1** em Função das Faixas de Freqüência

Para começarmos, consideraremos os alto-falantes como se fossem resistências puras na faixa de áudio, cujos valores são iguais aos de suas impedâncias nominais, isto é,  $8\Omega$ . Assim, o *woofer* é  $R_1$ , o *squawker* é  $R_2$  e o *tweeter* é  $R_3$ . Desprezaremos, também, o efeito da impedância de saída do amplificador.

Basicamente, o **DF-1** é composto por três células que operam como filtros:

- Célula  $L_1R_1$

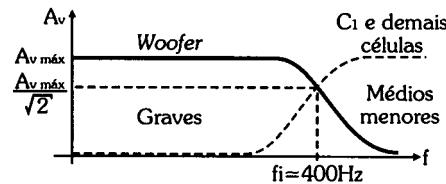
A célula  $L_1R_1$ , da forma como está ligada, funciona como um *filtro passa baixas*, considerando o *woofer* ( $R_1$ ) como carga, pois o indutor  $L_1$  permite que as baixas freqüências (sons graves) cheguem ao *woofer* e bloqueia as altas freqüências (sons médios e agudos), que seguem para o resto do circuito.

Portanto, essa célula também é um *filtro passa altas* se considerarmos como carga o capacitor  $C_1$  e as demais células.

A freqüência de corte dessa célula define a freqüência de corte inferior do **DF-1**:

$$f_i = \frac{R_1}{2\pi L_1} \Rightarrow f_i = \frac{8}{2\pi \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow f_i \cong 398\text{Hz}$$

Esse resultado é praticamente igual ao valor previsto inicialmente para o **DF-1** (400Hz). Só que a atenuação que o filtro impõe às freqüências acima de  $f_i$  não é a ideal, pois, como já vimos, ela é da ordem de  $20\text{dB/década}$ , conforme mostra a figura ao lado.



A função do capacitor  $C_1$  é fundamental para que as outras células não interfiram demasiadamente no comportamento dessa primeira célula. A reatância desse capacitor é alta para freqüências muito baixas, isolando as células seguintes. À medida que a freqüência se aproxima do corte inferior, a sua reatância diminui para que esses sinais excitem o *squawker*.

### • Célula $L_2R_2$

A célula  $L_2R_2$ , da forma como está ligada, funciona como um *filtro passa baixas*, considerando o *squawker* ( $R_2$ ) como carga, pois o indutor  $L_2$  permite que as baixas freqüências (sons médios menores e maiores) cheguem ao *squawker* e bloqueia as altas freqüências (sons agudos) que seguem para a última célula.

Portanto, essa célula também é um *filtro passa altas* se considerarmos como carga a última célula.

A freqüência de corte dessa célula define a freqüência de corte superior do *DF-1*:

$$f_s = \frac{R_2}{2\pi \cdot L_2} \Rightarrow f_s = \frac{8}{2\pi \times 220 \times 10^{-6}} \Rightarrow f_s \cong 5787 \text{ Hz}$$

Esse resultado é muito próximo do valor previsto inicialmente para o *DF-1* (5700Hz).

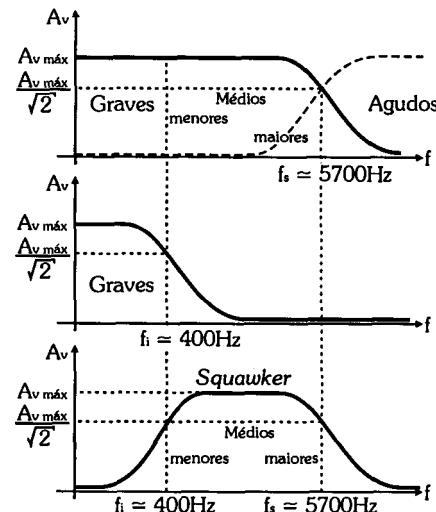
Ao lado apresentamos a curva de resposta em freqüência dessa célula como se ela estivesse operando sozinha no circuito (gráfico superior).

Abaixo dela, apresentamos novamente a curva de resposta em freqüência da célula  $L_1R_1$  operando como filtro passa altas, pois a carga considerada nesse caso é o restante do circuito.

É fácil observar que as freqüências abaixo de  $f_i$  são atenuadas pela célula  $L_1R_1$ , de modo que na célula  $L_2R_2$  esses sinais chegam muito fracos.

Além disso, abaixo de  $f_i$  o capacitor  $C_1$  também retém esses sinais.

Se sobrepuermos as duas curvas, obteremos a curva de resposta resultante para essa faixa de freqüências (gráfico inferior).



A atenuação na região de  $f_i$  para as duas curvas de respostas em freqüência já não é exatamente de 20dB/década, devido à influência mútua que as células exercem entre si e devido à influência do capacitor  $C_1$ .

Analizando sob outro aspecto, as células  $L_1R_1$  e  $L_2R_2$  acopladas por  $C_1$  lembram o *filtro π* operando como um *filtro passa altas*.

Só que neste, os indutores não são iguais. De fato, o indutor  $L_1$ , que tem maior valor, atenua as freqüências médias inferiores, enquanto  $L_2$ , que tem menor valor, atenua as freqüências médias superiores que passam por  $C_1$ .

O resultado é que essa composição de células funciona como um *filtro passa faixas*.

Por fim, as freqüências mais elevadas que não chegam ao *woofer* e ao *squawker* seguem até a última célula à qual está ligado o *tweeter*.

• Célula  $C_2R_3$

A célula  $C_2R_3$  funciona como um *filtro passa altas*, cuja carga é o *tweeter* ( $R_3$ ), pois o capacitor  $C_2$  permite que as altas freqüências (sons agudos) cheguem até ele.

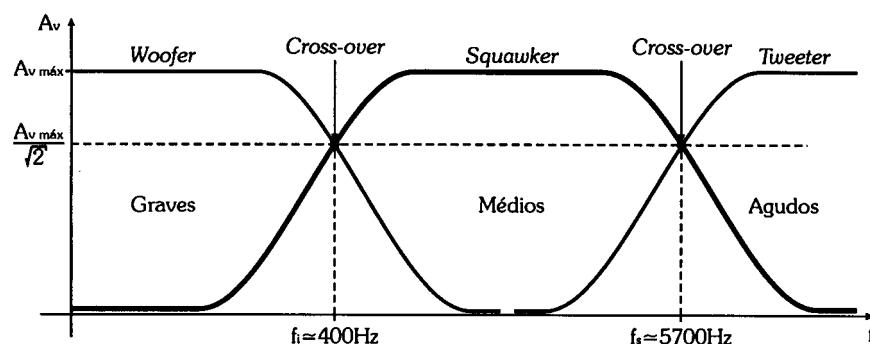
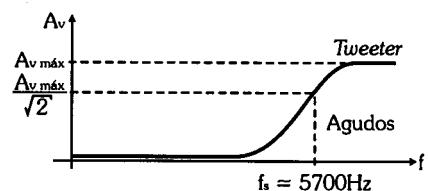
A freqüência de corte dessa célula define também a freqüência de corte superior do *DF-1*:

$$f_s = \frac{1}{2\pi R_3 C_2} \Rightarrow f_s = \frac{1}{2\pi \times 8 \times 3,5 \times 10^{-6}} \Rightarrow f_s \cong 5684 \text{ Hz}$$

Esse resultado é também muito próximo do valor previsto inicialmente para o *DF-1* (5700Hz).

Ao lado, apresentamos a curva de resposta em freqüência dessa célula.

A curva de resposta em freqüência completa do *DF-1* está representada a seguir, dando-nos uma noção clara do funcionamento desse circuito.



As freqüências  $f_i$  e  $f_s$  que coincidem com o cruzamento das curvas de respostas são denominadas *cross-over*.

Se o divisor de freqüências possui duas freqüências de *cross-over*, isto é, divide os sinais em três faixas, uma para cada alto-falante específico, o circuito é especificado por *three way*.

Caso ele tenha apenas uma freqüência de *cross-over*, isto é, dividindo os sinais em apenas duas faixas, uma para o *squawker* e outra para o *tweeter*, por exemplo, o circuito é especificado por *two way*.

## Divisor de Freqüências - Versão *DF-2*

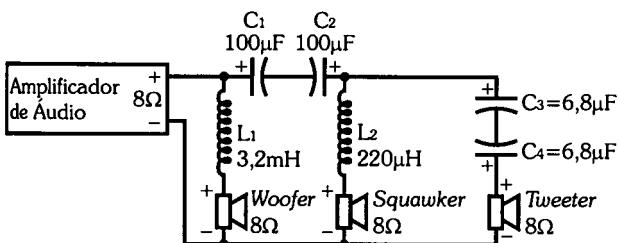
No *DF-1*, há dois indutores e dois capacitores.

Os indutores podem ser confeccionados manualmente. É importante que, ao confeccioná-los, eles sejam medidos experimentalmente.

Na placa, os indutores devem ser ligados em lados opostos, para minimizar o efeito da indutância mútua.

Quanto aos capacitores, em função da ordem de grandeza de seus valores, eles devem ser eletrolíticos.

Porém, há o problema da polaridade desse tipo de capacitor. Nesse caso, podem-se associar dois capacitores de mesmo valor em série, cuja capacidade equivalente, que é a metade, resulte em um valor próximo do previsto.



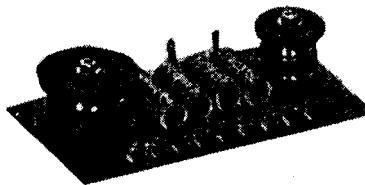
Além disso, esses capacitores devem ser conectados entre si pelos seus pólos negativos, eliminando o problema da polaridade.

Sendo assim, em vez de usarmos um capacitor de  $50\mu F$  como  $C_1$ , usaremos dois capacitores de  $100\mu F$  em série e, em vez de usarmos um capacitor de  $3,5\mu F$  como  $C_2$ , usaremos dois capacitores de  $6,8\mu F$  em série (ou dois de  $10\mu F$ , que é mais fácil de ser encontrado).

Esse novo circuito do divisor de freqüências será denominado de *DF-2*, e corresponde à nossa versão final, conforme mostra a figura ao lado.

É claro que essas pequenas variações de valores provocam pequenas mudanças no comportamento do circuito, mas elas são quase que imperceptíveis aos nossos ouvidos.

A figura seguinte mostra uma foto do *DF-2* montado em placa de circuito impresso.



### ATENÇÃO!

No tópico seguinte, você encontrará as informações necessárias para desenvolver o projeto de um divisor de freqüências *three way*, isto é, com duas freqüências de *cross-over*.

O projeto do divisor de freqüências *three way* consiste basicamente no cálculo dos dois indutores e dos dois capacitores das células do filtro, conforme o circuito apresentado ao lado.

Só que a determinação dos valores desses componentes não pode ser feita sem um critério adequado, pois devem ser garantidas as seguintes condições:

- A impedância equivalente do circuito deve ser muito próxima da impedância de saída do amplificador em qualquer faixa de freqüências;
- As reatâncias dos indutores e a dos capacitores devem ser tais que as suas relações garantam a operação correta de cada tipo de alto-falante nas suas respectivas faixas de freqüência.

Embora essas condições pareçam difíceis de ser alcançadas, os critérios a serem seguidos são relativamente simples:

- Os alto-falantes  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  devem ter uma impedância igual à impedância  $Z_s$  de saída do amplificador;
- Devem ser escolhidas duas freqüências de *cross-over* localizadas nas regiões de transição do grave ( $f_i$ ) e de transição do agudo ( $f_s$ );

- Calcula-se o fator  $k$ , que é a relação entre  $f_s$  e  $f_i$ : 
$$k = \frac{f_s}{f_i}$$

- As reatâncias  $X_{L1}$ ,  $X_{L2}$ ,  $X_{C1}$  e  $X_{C2}$  devem satisfazer as seguintes condições:

I - Na freqüência de *cross-over* inferior  $f_i$ : 
$$X_{L1} = X_{C1} = Z_s \quad X_{L2} = \frac{Z_s}{k} \quad X_{C2} = k.Z_s$$

II - Na freqüência de *cross-over* superior  $f_s$ : 
$$X_{L1} = k.Z_s \quad X_{C1} = \frac{Z_s}{k} \quad X_{L2} = X_{C2} = Z_s$$

Para que todas estas condições sejam satisfeitas, basta usar a fórmula da reatância do indutor e do capacitor e calcular os seus valores, adotando as relações descritas em I ou em II, ou seja:

$$L_1 = \frac{Z_s}{2\pi.f_i} \quad \text{ou} \quad L_1 = \frac{k.Z_s}{2\pi.f_s} \quad ; \quad L_2 = \frac{Z_s}{2\pi.k.f_i} \quad \text{ou} \quad L_2 = \frac{Z_s}{2\pi.f_s}$$

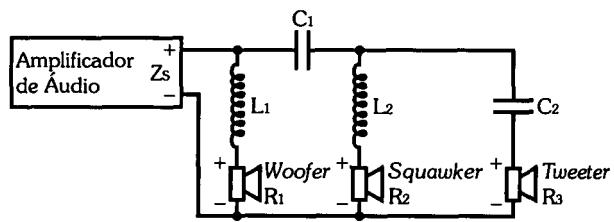
$$C_1 = \frac{1}{2\pi.f_i.Z_s} \quad \text{ou} \quad C_1 = \frac{k}{2\pi.f_s.Z_s} \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{2\pi.f_i.k.Z_s} \quad \text{ou} \quad C_2 = \frac{1}{2\pi.f_s.Z_s}$$

Esse fator  $k$  é importante, pois ele define o quanto uma reatância será maior ou menor que a impedância do alto-falante nas freqüências críticas.

Por exemplo, no *cross-over* inferior, a reatância associada ao *tweeter* deve ser muito maior que as reatâncias associadas ao *woofer* e ao *squawker*, para que os sinais dessa faixa de freqüências não cheguem ao *tweeter*. Nesse sentido, quanto maior o valor do fator  $k$ , melhor será a separação dos sinais.

Por outro lado, quanto maior o valor do fator  $k$ , menor o *cross-over* inferior e maior o *cross-over* superior, reduzindo muito a faixa de reprodução do *woofer* e do *tweeter*.

No *DF-1*, foi usado um fator  $k = 14,25$ . Comercialmente, há divisores de freqüência iguais a esse com fatores que variam de 3 a 20 aproximadamente.



### Características da Onda Quadrada

Os circuitos *diferenciador* e *integrador* são filtros passivos iguais aos estudos nos tópicos anteriores deste capítulo, mas aqui eles serão analisados quando estiverem operando com sinais quadrados e sob condições específicas.

O motivo é que os sinais que esses circuitos produzem a partir de uma onda quadrada são a base de funcionamento de muitos aplicativos nas áreas de eletrotécnica e de eletrônica.

A figura ao lado mostra um sinal quadrado (ou trem de pulsos) com freqüência  $f$ . O período  $T$  é a soma dos intervalos  $T_1 + T_2$ .

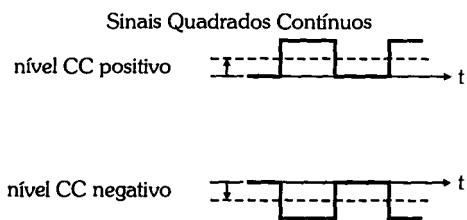
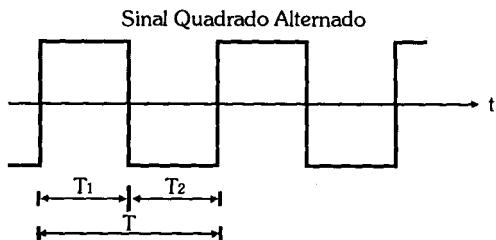
Se  $T_1 = T_2$ , o sinal é temporalmente simétrico; caso contrário, ele é assimétrico.

Do ponto de vista da amplitude, o sinal quadrado é alternado se houver inversão de polaridade; caso contrário, ele é contínuo.

Basicamente, a diferença entre os sinais quadrados alternado e contínuo é um nível  $CC$ , que pode ser positivo ou negativo.

Em geral, os geradores de áudio e de *RF* produzem esses sinais, permitindo o controle do nível  $CC$ .

Os geradores mais sofisticados permitem também o controle de simetria temporal do sinal.

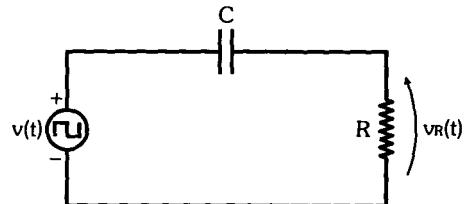


A análise dos circuitos diferenciador e integrador será feita tomando como base um sinal quadrado alternado e temporalmente simétrico, fazendo referências ao sinal contínuo conforme a necessidade.

### Circuito Diferenciador

O circuito diferenciador é um filtro passa altas (*FPA*) operando em uma freqüência  $f$  muito menor que a sua freqüência de corte, isto é,  $f \ll f_c$ .

No diferenciador ao lado, o capacitor  $C$  e o resistor  $R$  formam um divisor de tensão. A saída do circuito é a tensão sobre o resistor.



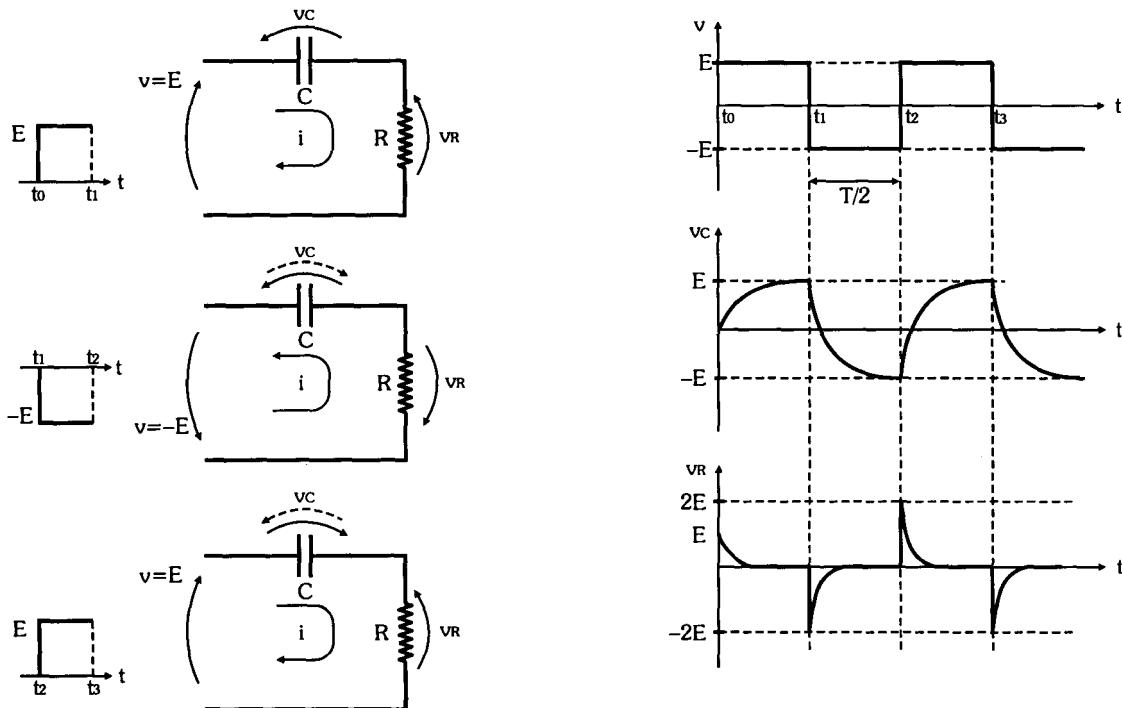
Lembrando que a constante de tempo de um circuito  $RC$  é dada por  $\tau = R.C$  e que um capacitor pode ser considerado completamente carregado após um tempo  $5.\tau$ , o filtro passa altas funciona como diferenciador apenas se cada semiperíodo da onda quadrada tiver duração bem maior que  $5.\tau$ .

Na prática, deve-se usar um sinal em que  $T/2 \geq 10.\tau$  ou  $T \geq 20.\tau$ .

Supondo o capacitor inicialmente descarregado, no início do primeiro semiperíodo ( $t_0$ ), como a variação da tensão  $v$  é muito rápida, o capacitor é um curto e a tensão no resistor é  $v_R = E$ .

Mas o capacitor carrega-se rapidamente, pois  $T/2 \gg 5\tau$ . Assim, quando a tensão no capacitor atinge o valor  $v_C = E$ , no resistor ela chega a zero ( $v_R = 0$ ).

Esse primeiro semiperíodo é denominado *transitório*, pois o capacitor encontrava-se inicialmente descarregado.



No segundo semiperíodo, a tensão de entrada muda instantaneamente para  $v = -E$  em  $t_1$ . Mas a tensão no capacitor é  $v_C = E$ . Essas duas tensões têm nesse instante a mesma polaridade, de modo que a tensão no resistor cai abruptamente para  $v_R = -2E$ .

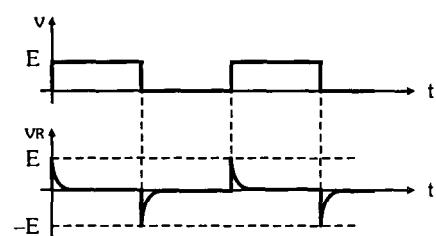
Então, o capacitor descarregue-se até zero e carrega-se rapidamente com polaridade invertida, até atingir a tensão  $v_C = -E$ . Simultaneamente, a tensão no resistor volta a se anular, permanecendo assim até o semiperíodo seguinte, que começa em  $t_2$ .

Daí em diante, os ciclos se repetem, entrando em *regime permanente*, tendo a tensão de saída  $v_R$  uma amplitude de pico  $V_{RP} = 2E$ .

O resultado prático desse circuito é a geração de um sinal denominado *impulso*. Os impulsos são muito utilizados como sinais de disparo em diversos circuitos e dispositivos eletrônicos.

Caso seja aplicado um sinal quadrado contínuo de amplitude  $E$ , o resultado é praticamente igual, pois o capacitor bloqueia o nível  $CC$ , de modo que no resistor o sinal é impulsivo, ora positivo, ora negativo.

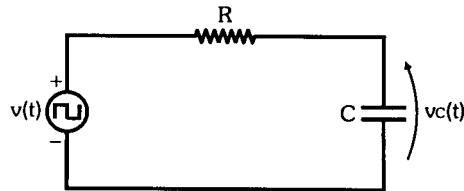
A única diferença é que a amplitude de pico é  $V_{RP} = E$  em regime permanente.



## Círculo Integrador

O circuito integrador é um filtro passa baixas (*FPB*) operando em uma freqüência  $f$  muito maior que a sua freqüência de corte, ou seja,  $f \gg f_c$ .

No integrador ao lado, o resistor  $R$  e o capacitor  $C$  formam um divisor de tensão. A saída do circuito é a tensão sobre o capacitor.

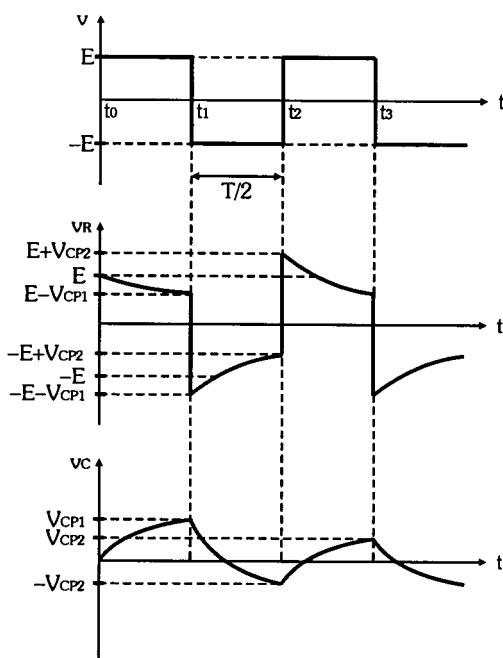
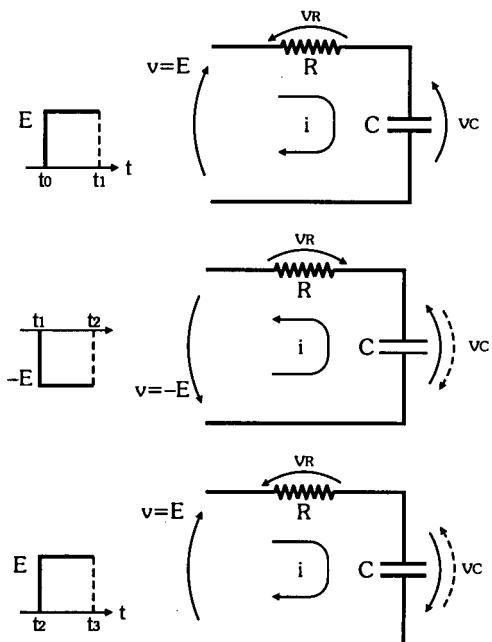


O integrador deve operar com um sinal quadrado com semiperíodos bem menores que  $5\tau$ . Na prática, deve-se usar um sinal em que  $T/2 \leq \tau/10$  ou  $T \leq \tau/5$ .

Supondo o capacitor inicialmente descarregado, no primeiro semiperíodo ( $t_0$ ), ele inicia o processo de carga.

Mas como o intervalo de tempo é pequeno, a tensão  $vc$  atinge um valor de pico que é apenas uma parcela da tensão  $E$ , isto é,  $vc = V_{CP1}$ . No resistor, a tensão decresce de  $E$  até  $E - V_{CP1}$ .

Esse primeiro semiperíodo é o de *transitório*, pois o capacitor encontrava-se inicialmente descarregado.



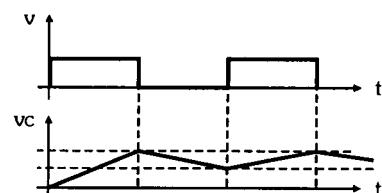
No segundo semiperíodo, a tensão de entrada muda instantaneamente para  $v = -E$  em  $t_1$ . Essa tensão é somada à  $V_{CP1}$ , cuja resultante é aplicada ao resistor com polaridade invertida, isto é,  $VR = -(E + V_{CP1})$ .

Conforme o capacitor se descarrega, a tensão negativa no resistor diminui, até que em  $t_2$  o capacitor atinge o valor de pico negativo  $vc = -V_{CP2}$  e o resistor atinge o valor  $VR = -E + V_{CP2}$ , sendo  $V_{CP2} < V_{CP1}$ .

Daí em diante, os ciclos se repetem, entrando em *regime permanente*.

O resultado prático desse circuito é a geração de uma onda praticamente *triangular*. Quanto menor o semiperíodo da onda quadrada, mais linear é a onda triangular, embora a sua amplitude seja menor.

O sinal triangular é comumente usado como base de tempo em sistemas temporizados.



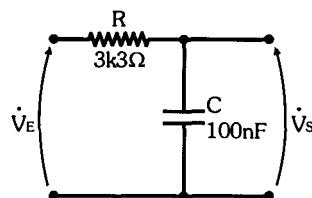
Caso seja aplicado um sinal quadrado contínuo, a onda triangular gerada será acrescida do nível *CC* do sinal de entrada. Nesse caso, o capacitor permanecerá sempre carregado.

## Exercícios Propostos

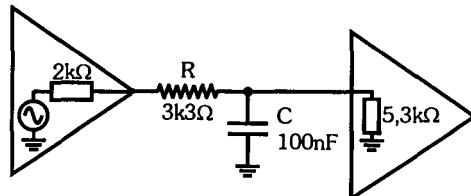
### Filtros Passa Baixas - RC e LR

- 19.1)** Considere que o filtro passa baixas mostrado ao lado esteja operando em condições ideais.

Determine a freqüência de corte ideal.

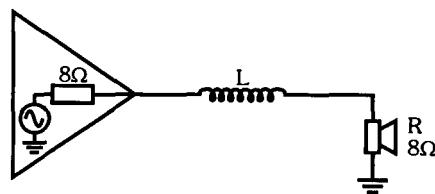


- 19.2)** O filtro do exercício anterior foi ligado na saída de um estágio amplificador de áudio com  $2k\Omega$  de impedância de saída, tendo como carga um estágio amplificador de potência com  $5,3k\Omega$  de impedância de entrada, conforme mostra a figura ao lado. Essas impedâncias têm comportamento resistivo em toda a faixa de áudio.



- Determine a freqüência de corte real do filtro;
- Qual deve ser o novo valor comercial de  $R$  para que a freqüência de corte real seja aproximadamente a mesma que a do exercício 19.1?

- 19.3)** Deseja-se projetar um filtro passa baixas com freqüência de corte de  $300Hz$  para ser conectado na saída de um amplificador de áudio com impedância de  $8\Omega$ . Um alto-falante de  $8\Omega$  será a própria resistência  $R$  do filtro, conforme mostra ao lado.



- Determine o valor da indutância do filtro;
- Se a resistência do fio do indutor for  $r_s = 12\Omega$  (valor médio na faixa de  $100Hz$  a  $600Hz$ ), qual será a freqüência de corte real do filtro?

- 19.4)** Retome o filtro projetado no exercício anterior. Para fazer com que a freqüência de corte real volte a ser a desejada, é necessário aumentar o valor de  $L$ , acarretando o aumento proporcional de  $r_s$ . Considere um indutor  $L' = k \cdot L$ , com  $r_s' = k \cdot r_s$ , em que o fator  $k$  é um multiplicativo para o ajuste da indutância. Determine  $k$ ,  $L'$  e  $r_s'$  da nova indutância do filtro para que a sua freqüência de corte volte a ser de  $300Hz$ .

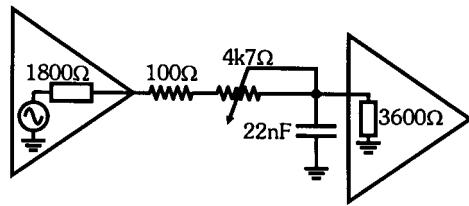
- 19.5)** Um filtro passa baixas  $RC$  é composto por  $R = 6k8\Omega$  e  $C = 820pF$ .

- Determine a freqüência de corte ideal;
- Se esse filtro for ligado a uma carga de  $10k\Omega$  e for alimentado por uma fonte de sinal com resistência de saída de  $5k\Omega$ , qual será a sua nova freqüência de corte?
- Qual deve ser o novo valor comercial de  $R$  para que a freqüência de corte real seja aproximadamente a mesma do item a nas condições do item b?

- 19.6)** Um amplificador com impedância de saída de  $8\Omega$  foi ligado a um alto-falante de  $8\Omega$  por meio de uma bobina de  $3,2mH$ . Determine a freqüência de corte desse circuito.

- 19.7) O circuito ao lado funciona como um controle de agudos. Ele recebe os sinais de um estágio amplificador com impedância de saída de  $1800\Omega$  e deve enviá-los a um estágio de potência com impedância de entrada de  $3600\Omega$ .

Determine as freqüências de corte mínima e máxima e faça o esboço da curva de resposta em freqüência do módulo do ganho em [dB], mostrando a região de atuação do circuito.

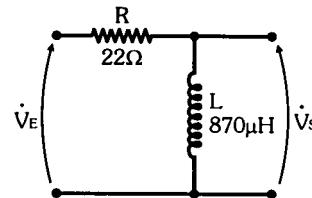


- 19.8) Quais são as freqüências  $f_0$  e  $f_c$  de um  $FPA-\pi$  se  $C_1 = C_2 = 120\text{pF}$  e  $L = 470\mu\text{H}$ ?
- 19.9) Quais são as freqüências  $f_0$  e  $f_c$  de um  $FPA-T$  se  $L_1 = L_2 = 100\mu\text{H}$  e  $C = 330\text{pF}$ ?

#### Filtros Passa Altas - CR e RL

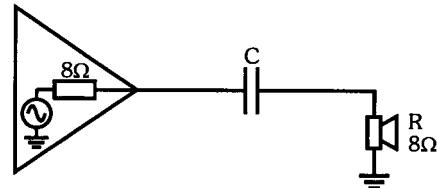
- 19.10) Considere que o filtro passa altas mostrado ao lado esteja operando em condições ideais.

Determine a freqüência de corte ideal.



- 19.11) O filtro do exercício anterior foi ligado na saída de um estágio amplificador de áudio com  $4\Omega$  de impedância de saída, tendo como carga um tweeter de  $4\Omega$ . A resistência média do fio do indutor é de  $14\Omega$ .
- Determine a freqüência de corte real do filtro;
  - Qual deve ser o novo valor de  $R$  para que a freqüência de corte real seja aproximadamente a mesma que a do exercício 19.10?
  - Analise os resultados obtidos nos itens a e b.

- 19.12) Deseja-se projetar um filtro passa altas para ser conectado na saída de um amplificador de áudio com impedância de  $8\Omega$ . O alto-falante, também de  $8\Omega$ , será a própria resistência  $R$  do filtro, conforme mostra a figura abaixo. A freqüência de corte desejada é de  $4\text{kHz}$ .



Determine o valor do capacitor do filtro.

- 19.13) Um filtro passa altas  $RL$  é composto por  $R = 4k7\Omega$  e  $L = 220\mu\text{H}$ .
- Determine a freqüência de corte ideal;
  - Se esse filtro for ligado a uma carga de  $6k\Omega$  e for alimentado por uma fonte de sinal com resistência de saída de  $8k\Omega$ , qual será a sua nova freqüência de corte?
  - Qual deve ser o novo valor comercial de  $R$  para que a freqüência de corte real seja aproximadamente a mesma do item a nas condições do item b?

- 19.14) Quais são as freqüências  $f_0$  e  $f_c$  de um  $FPA-\pi$  se  $L_1 = L_2 = 15\mu\text{H}$  e  $C = 47\text{pF}$ ?

- 19.15) Quais são as freqüências  $f_0$  e  $f_c$  de um  $FPA-T$  se  $C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$  e  $L = 25\text{mH}$ ?

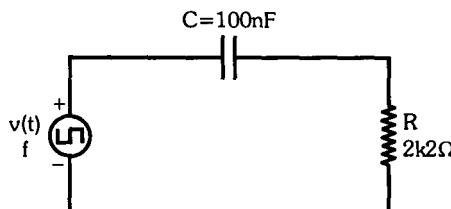
### Projeto do Divisor de Freqüências Three Way

- 19.16) Considere um divisor de freqüências como o *DF-1*, mas com os seguintes dispositivos:  $L_1 = 4,2mH$ ,  $L_2 = 530\mu H$ ,  $C_1 = 66\mu F$  e  $C_2 = 8,3\mu F$ . Os alto-falantes *woofer*, *squawker* e *tweeter* têm impedâncias de  $8\Omega$ . Determine as freqüências de *cross-over* ( $f_1$  e  $f_2$ ) desse circuito, as reatâncias dos dispositivos nas freqüências de *cross-over*, a impedância equivalente do circuito nas freqüências de *cross-over* e a especificação da impedância de saída do amplificador a que se destina esse divisor de freqüências.

### Circuitos de Pulso - Diferenciador e Integrador

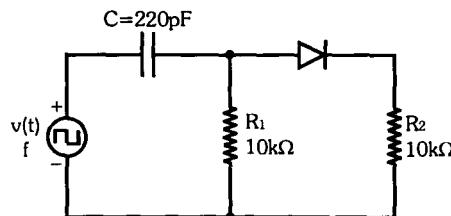
- 19.17) Considere o circuito ao lado:

- Determine a constante de tempo  $\tau$ ;
- Determine a freqüência máxima da onda quadrada que pode ser aplicada ao circuito para que ele funcione como um diferenciador;
- Se a onda quadrada tiver amplitude variando entre  $+5V$  e  $-5V$ , qual será a amplitude de pico do trem de impulsos?



- 19.18) Projete um circuito diferenciador para gerar um trem de impulsos de  $10kHz$ . Utilize o critério  $T = 20 \cdot \tau$ .

- 19.19) Explique o funcionamento do circuito ao lado e determine a freqüência máxima da onda quadrada ( $+10V$  a  $-10V$ ) que pode ser aplicada para que ele funcione como um diferenciador. Considere o diodo ideal.



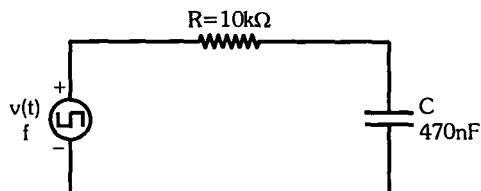
- 19.20) Projete um circuito diferenciador para produzir um trem de impulsos a partir de uma onda quadrada assimétrica temporalmente, com  $T_1 = 10\mu s$  e  $T_2 = 40\mu s$  e com tensão de pico variando entre  $-5V$  e  $+5V$ . Faça o esboço de sua forma de onda.

- 19.21) Projete um circuito diferenciador para produzir um trem de impulsos a partir de uma onda quadrada simétrica temporalmente, com freqüência de  $1MHz$  e com tensão de pico variando entre  $0V$  e  $12V$ . Faça o esboço de sua forma de onda.

- 19.22) Um filtro passa altas é formado por  $R = 12k\Omega$  e  $C = 330pF$ . Ele será usado para gerar impulsos a partir de um sinal quadrado contínuo, cuja amplitude de pico vale  $-15V$ . Qual deve ser a freqüência máxima desse sinal e como ficaria a sua forma de onda?

- 19.23) Considere o circuito ao lado:

- Determine a constante de tempo  $\tau$ ;
- Determine a freqüência mínima da onda quadrada que pode ser aplicada ao circuito para que ele funcione como um integrador.



- 19.24) Projete um circuito integrador para gerar uma onda triangular de  $250kHz$ . Utilize o critério  $T = \tau / 5$ .

- 19.25) Projete um circuito integrador para produzir uma onda triangular de  $60kHz$ .

- 19.26) Um filtro passa baixas é formado por  $R = 150k\Omega$  e  $C = 1nF$ . Ele será usado para gerar uma onda triangular a partir de um sinal quadrado alternado, cuja amplitude de pico varia entre  $-12V$  e  $+12V$ . Qual deve ser a freqüência mínima desse sinal e como ficaria a sua forma de onda?

- 19.27) Um integrador é formado por  $R = 47k\Omega$  e  $C = 68nF$ . Faça o esboço do sinal de saída quando em sua entrada é aplicado um sinal quadrado alternado com as seguintes freqüências:

- $f_1 = 1kHz$ ;
- $f_2 = 10kHz$ ;
- $f_3 = 100kHz$ .

**20.1**

**Características Gerais**

O sistema trifásico (ou  $3\phi$ ) possui três tensões defasadas de  $120^\circ$  (ou  $2\pi/3$  rad) entre si. Se essas tensões tiverem a mesma amplitude, o gerador é *balanceado*. Neste livro, nós abordaremos apenas os geradores平衡ados, mas analisaremos o comportamento das cargas *equilibradas* (impedâncias iguais) e *desequilibradas* (impedâncias diferentes).

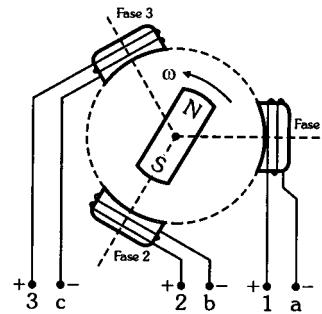
Entre as vantagens do sistema trifásico em relação ao monofásico, citamos as principais:

- a corrente na linha é menor, reduzindo o diâmetro dos condutores da instalação;
- permite alterar a tensão na carga pela mudança da configuração do gerador e/ou da carga;
- pode ser utilizado, também, para alimentar cargas monofásicas;
- os motores trifásicos têm menores dimensões que os monofásicos de mesma potência.

### Gerador Trifásico

A figura ao lado mostra de forma esquemática um gerador trifásico. Ele é composto por três enrolamentos fixos, denominados *fases*, posicionados geometricamente de modo que a tensão induzida em cada fase encontra-se atrasada de  $120^\circ$  em relação a uma e adiantada de  $120^\circ$  em relação à outra fase.

Se o número de espiras é o mesmo nos três enrolamentos, o gerador é *balanceado*, ou seja, o módulo das três tensões é igual.



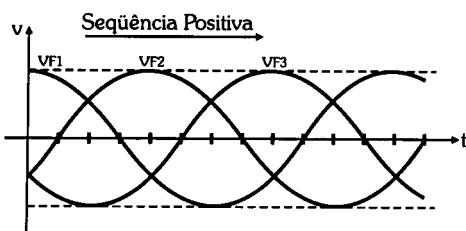
Denominemos as tensões de fase geradas de  $v_{F1}(t)$ ,  $v_{F2}(t)$  e  $v_{F3}(t)$ , todas com tensão de pico  $V_{FP}$  e geradas na *seqüência positiva* de operação, conforme indicam as figuras abaixo.

Modo Temporal:

$$v_{F1}(t) = V_{FP} \cos \omega t$$

$$v_{F2}(t) = V_{FP} \cos (\omega t - 2\pi/3)$$

$$v_{F3}(t) = V_{FP} \cos (\omega t + 2\pi/3)$$

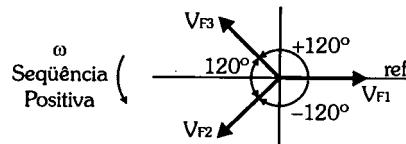


Modo Fasorial e Complexo:

$$\dot{V}_{F1} = V_F \angle 0^\circ \Rightarrow \dot{V}_{F1} = V_F$$

$$\dot{V}_{F2} = V_F \angle -120^\circ \Rightarrow \dot{V}_{F2} = V_F \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\dot{V}_{F3} = V_F \angle 120^\circ \Rightarrow \dot{V}_{F3} = V_F \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

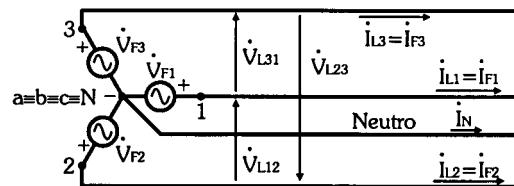


Dependendo da forma como os terminais do gerador são conectados entre si, podemos identificar duas configurações de operação denominadas *estrela* (ou hipsilo -  $Y$ ) e *triângulo* (ou delta -  $\Delta$ ).

### Configuração Estrela

Na configuração estrela, os terminais  $a$ ,  $b$  e  $c$  dos enrolamentos estão conectados a um ponto comum denominado *neutro*.

Os terminais 1, 2, 3 e neutro ficam acessíveis para a conexão das cargas ( $3\phi$  - 4 fios).



### Tensões de Fase e de Linha

As tensões entre os terminais 1, 2 ou 3 em relação ao neutro correspondem às *tensões de fase* do gerador, ou seja,  $\dot{V}_{F1}$ ,  $\dot{V}_{F2}$  e  $\dot{V}_{F3}$ .

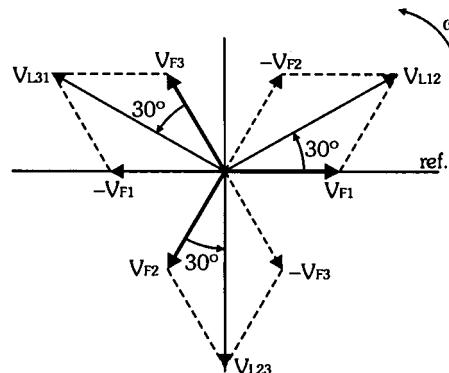
As tensões entre dois terminais 1-2, 2-3 e 3-1 correspondem às *tensões de linha* do gerador, ou seja,  $\dot{V}_{L12}$ ,  $\dot{V}_{L23}$  e  $\dot{V}_{L31}$ .

A configuração estrela caracteriza-se por ter tensões de linha diferentes das tensões de fase.

Cada tensão de linha é a diferença fasorial entre as suas duas tensões de fase. Se a carga é equilibrada, tem-se:

$$\dot{V}_{L12} = \dot{V}_{F1} - \dot{V}_{F2} = V_F - V_F \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{V}_{L12} = V_F \left( \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \dot{V}_{L12} = \sqrt{3} \cdot V_F \angle 30^\circ$$



Analogamente:

$$\dot{V}_{L23} = \dot{V}_{F2} - \dot{V}_{F3} \Rightarrow \dot{V}_{L23} = \sqrt{3} \cdot V_F < -90^\circ \quad \text{e} \quad \dot{V}_{L31} = \dot{V}_{F3} - \dot{V}_{F1} \Rightarrow \dot{V}_{L31} = \sqrt{3} \cdot V_F < -150^\circ$$

Estes resultados nos mostram que na configuração estrela os módulos das tensões de linha são sempre  $\sqrt{3}$  vezes maiores que os módulos das tensões de fase, e que as tensões de linha estão sempre adiantadas de  $30^\circ$  em relação às tensões de fase (se o gerador inverter o seu sentido de rotação, a sequência será negativa e as tensões de linha ficarão atrasadas de  $30^\circ$ ).

Portanto:

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

e

$$\theta_{VL} = \theta_{VF} + 30^\circ$$

A vantagem do fio neutro é que o gerador trifásico em estrela envia duas tensões diferentes para a carga ( $V_L$  e  $V_F$ ).

## Correntes de Fase e de Linha

Se uma carga trifásica é ligada na saída do gerador, cada fase fornece uma corrente de linha. A configuração estrela caracteriza-se por ter corrente de linha igual à corrente de fase, ou seja:

$$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_{F1}$$

$$\dot{I}_{L2} = \dot{I}_{F2}$$

$$\dot{I}_{L3} = \dot{I}_{F3}$$

A corrente no fio neutro é a soma fasorial das correntes de linha. Matematicamente:  $\dot{I}_N = \dot{I}_{L1} + \dot{I}_{L2} + \dot{I}_{L3}$

Se a carga é *equilibrada*, a corrente no fio neutro é nula, pois:

$$\dot{I}_N = I_L \angle 0^\circ + I_L \angle -120^\circ + I_L \angle +120^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{I}_N = I_L - 0,5.I_L - 0,866.I_L - 0,5.I_L + 0,866.I_L \Rightarrow$$

$$\dot{I}_N = 0$$

Nesse caso particular, não é necessário instalar o fio neutro.

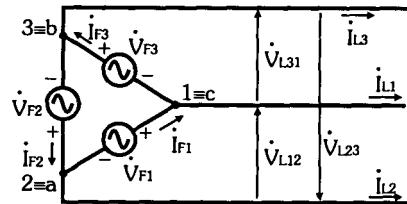
Se a carga é *desequilibrada*, há corrente no fio neutro, isto é,  $\dot{I}_N = I_N \angle \theta_{IN} \neq 0$ .

## Configuração Triângulo

Na configuração triângulo, os terminais dos enrolamentos estão conectados na seguinte ordem:

(1 ≡ c), (2 ≡ a), (3 ≡ b)

Os terminais 1, 2 e 3 ficam acessíveis para a conexão das cargas ( $3\phi$  - 3 fios).



## Tensões de Fase e de Linha

As tensões entre dois terminais 1-2, 2-3 e 3-1 correspondem às *tensões de fase e de linha*. A configuração triângulo caracteriza-se por ter tensões de linha iguais às tensões de fase, isto é:

$$\dot{V}_{L12} = \dot{V}_{F1}$$

$$\dot{V}_{L23} = \dot{V}_{F2}$$

$$\dot{V}_{L31} = \dot{V}_{F3}$$

## Correntes de Fase e de Linha

A configuração estrela caracteriza-se por ter correntes de linha diferentes das correntes de fase.

Cada corrente de linha é a diferença fasorial entre as suas duas correntes de fase, ou seja:

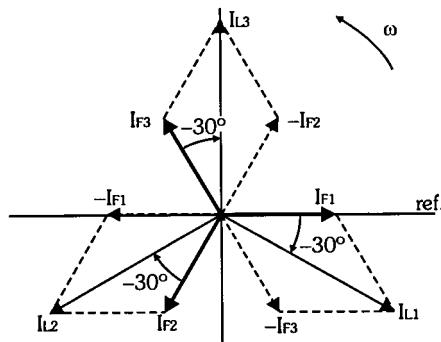
$$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_{F1} - \dot{I}_{F3}$$

$$\dot{I}_{L2} = \dot{I}_{F2} - \dot{I}_{F1}$$

$$\dot{I}_{L3} = \dot{I}_{F3} - \dot{I}_{F2}$$

Se não houver nenhuma carga, as correntes de fase dos enrolamentos do gerador serão nulas, não havendo consumo de potência.

Se a carga é *equilibrada*, as correntes de fase defasam-se entre si em  $120^\circ$ , o mesmo ocorrendo com as correntes de linha. Só que as correntes de linha estão sempre atrasadas de  $30^\circ$  em relação às de fase e seus módulos serão sempre  $\sqrt{3}$  vezes maiores que os módulos das correntes de fase.



$$\text{Nesse caso: } I_{L1} = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -30^\circ$$

$$I_{L2} = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -150^\circ$$

$$I_{L3} = \sqrt{3} \cdot I_F \angle 90^\circ$$

Portanto:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

e

$$\theta_{iL} = \theta_{iF} - 30^\circ$$

Aqui também vale a observação já feita anteriormente quanto ao sentido de rotação do gerador. Em caso de inversão, a seqüência de fases será negativa e as correntes de linha ficarão adiantadas de  $30^\circ$  em relação às correntes de fase.

Se a carga é *desequilibrada*, as correntes de linha serão diferentes em módulo e/ou em fase.

## 20.3

## Sistema Trifásico com Carga Equilibrada

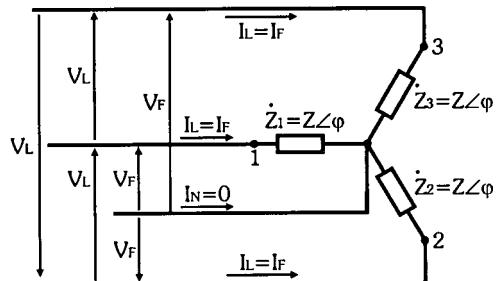
A carga trifásica *equilibrada* é formada por três impedâncias iguais em módulo e fase, isto é:  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = Z \angle \varphi$ .

Tal como o gerador, uma carga trifásica pode estar nas configurações *estrela* (ou hipsilo - Y) ou *triângulo* (ou delta - Δ).

### Configuração Estrela

A figura ao lado mostra uma carga trifásica equilibrada na configuração estrela.

Essa carga tem quatro terminais acessíveis, mas o terminal central só é utilizado caso o gerador esteja também na configuração estrela. Nesse caso, ele é ligado ao fio neutro do gerador e a carga é chamada de  $3\phi - 4$  fios.



Como a corrente no fio neutro é *nula* para uma carga estrela equilibrada, ele não precisa ser conectado. Porém, a sua função é proteger a instalação elétrica em caso de desequilíbrio das cargas, conforme veremos mais adiante.

Na carga configurada em estrela, as relações entre as tensões e as correntes de fase e de linha são as mesmas que no gerador na configuração estrela e na seqüência de fase de operação.

Relação entre Tensões de Linha e de Fase:

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

e

$$\theta_{vL} = \theta_{vF} + 30^\circ$$

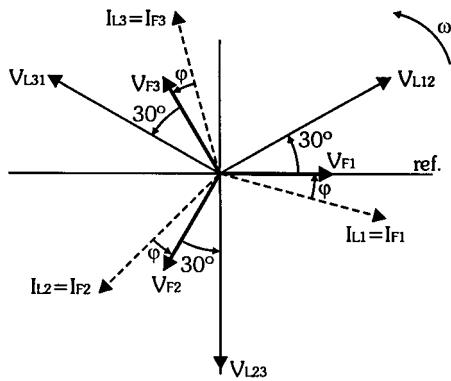
Relação entre Correntes de Linha e de Fase:

$$I_L = I_F$$

e

$$\theta_{iL} = \theta_{iF}$$

A defasagem entre  $V_F$  e  $I_F$  na carga é:  $\theta_{vF} - \theta_{iF} = \varphi$

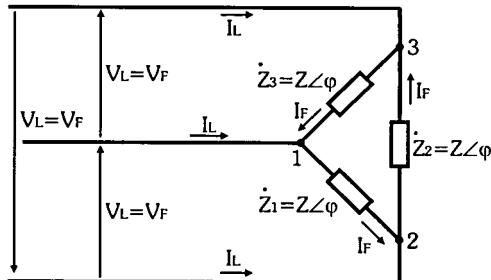


## Configuração Triângulo

A figura ao lado mostra uma carga trifásica equilibrada na configuração triângulo.

Essa carga tem apenas três terminais acessíveis.

Isso significa que se o gerador estiver na configuração estrela, o fio neutro não poderá ser utilizado.



Na carga em triângulo, as relações entre as tensões e as correntes de fase e de linha são também as mesmas que no gerador na configuração triângulo e na seqüência de fase de operação.

Relação entre Tensões de Linha e de Fase:

$$V_L = V_F$$

e

$$\theta_{vL} = \theta_{vF}$$

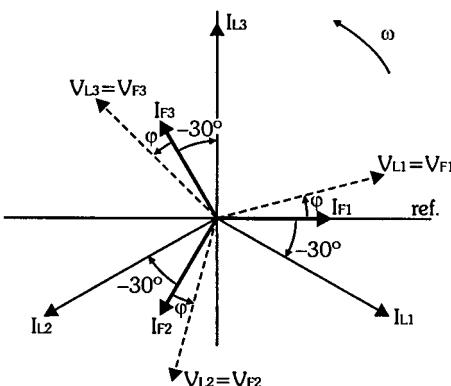
Relação entre Correntes de Linha e de Fase:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

e

$$\theta_{iL} = \theta_{iF} + 30^\circ$$

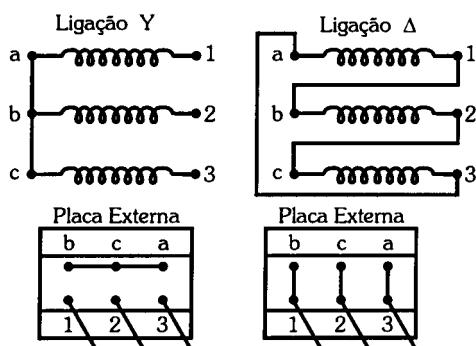
A defasagem entre  $V_F$  e  $I_F$  na carga é:  $\theta_{vF} - \theta_{iF} = \varphi$



## Motores Trifásicos

Muitos motores trifásicos são construídos com três enrolamentos iguais e independentes, de modo que os seus terminais ficam acessíveis para conexão externa na configuração desejada. A vantagem desse motor é que ele pode ser alimentado por duas tensões diferentes sem alterar as suas condições de operação.

Suponha que cada enrolamento tenha uma impedância  $Z$  que opera sempre com uma corrente de fase nominal  $I_F$ .



Se o motor estiver conectado em  $\Delta$ , a tensão de linha necessária para alimentá-lo deve ser  $V_L1 = V_F = Z \cdot I_F$ . Se o motor estiver conectado em  $Y$ , a tensão de linha necessária para que ele opere nas mesmas condições deve ser

$$V_L2 = \sqrt{3} \cdot V_L1, \text{ garantindo a mesma corrente de fase } I_F.$$

Esses terminais acessíveis para conexão externa são montados em uma placa na carcaça do motor.

A carga trifásica *desequilibrada* é formada por três impedâncias cujos módulos e/ou fases são diferentes, isto é:

$$\dot{Z}_1 = Z_1 \angle \varphi_1$$

$$\dot{Z}_2 = Z_2 \angle \varphi_2$$

$$\dot{Z}_3 = Z_3 \angle \varphi_3$$

Quando a carga é desequilibrada, as relações  $V_L = \sqrt{3}V_F$  para a configuração  $Y$  e  $I_L = \sqrt{3}I_F$  para a configuração  $\Delta$  não são mais válidas. Nesse caso, é necessário determinar as tensões e correntes de linha pela *diferença fasorial* entre as respectivas tensões e correntes de fase.

### Configuração Estrela

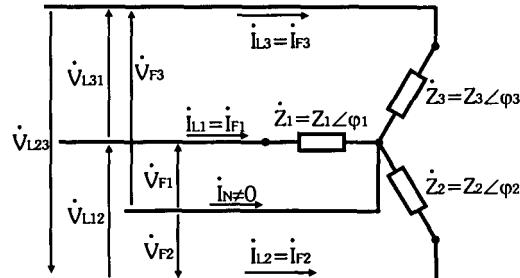
A figura ao lado mostra uma carga trifásica desequilibrada na configuração estrela.

Essa carga tem quatro terminais acessíveis.

Nesse caso, se o fio neutro estiver conectado, a corrente  $I_N$  não é nula, pois a soma fasorial das correntes de linha é diferente de zero.

Por outro lado, a presença do fio neutro garante o balanceamento do gerador.

Na carga desequilibrada configurada em estrela, as relações entre as tensões e as correntes de fase e de linha são diferentes para cada impedância, devendo ser calculadas individualmente.

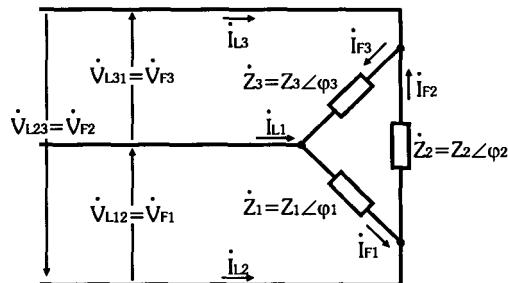


### Configuração Triângulo

A figura ao lado mostra uma carga trifásica desequilibrada na configuração triângulo.

Essa carga tem apenas três terminais acessíveis.

Nessa carga, as relações entre as tensões e as correntes de fase e de linha também são diferentes para cada impedância, devendo ser calculadas individualmente.



## Desequilíbrio em Instalações Elétricas

Em uma instalação elétrica trifásica, é comum utilizar cargas monofásicas ligadas entre a linha e o neutro (gerador  $Y$ ).

Se todas as linhas forem ligadas a cargas monofásicas iguais, o equilíbrio da carga trifásica total será mantido. Porém, se as cargas monofásicas forem diferentes em cada linha, a carga trifásica total será desequilibrada.

Vamos analisar dois casos críticos que podem ocorrer. Para isso, consideremos um sistema trifásico balanceado com carga  $Y$  equilibrada. Nesse caso, temos:

$$V_L = \sqrt{3} V_F$$

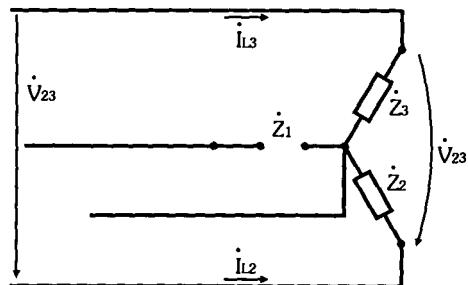
$$I_L = I_F = \frac{V_F}{Z} = \frac{V_L}{\sqrt{3}Z}$$

$$I_N = 0$$

### Carga em Aberto

Se  $\dot{Z}_1$  abrir, a tensão de linha  $\dot{V}_{L23}$  passa a "enxergar" as duas impedâncias  $\dot{Z}_2$  e  $\dot{Z}_3$  em série, de forma que nas linhas 2 e 3 e, consequentemente, nessas impedâncias, a corrente será menor do que a de operação normal, pois:

$$\dot{I}_{L2} = \dot{I}_{L3} = \frac{\dot{V}_{L23}}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}$$

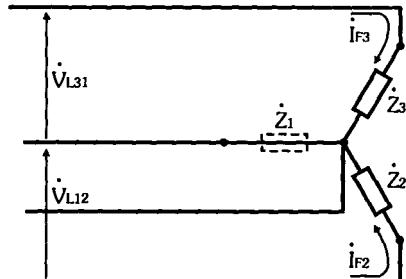


### Carga em Curto

Se  $\dot{Z}_1$  entrar em curto, as tensões de linha  $\dot{V}_{L12}$  e  $\dot{V}_{L31}$  tornam-se tensões de fase.

Nesse caso, a corrente nas impedâncias  $\dot{Z}_2$  e  $\dot{Z}_3$  aumenta para um valor  $\sqrt{3}$  maior, pois:

$$I_{F2} = I_{F3} = \frac{V_L}{Z}$$



Dependendo da carga, esse aumento de corrente pode causar danos.

Uma carga trifásica é geralmente especificada pela sua potência total, isto é, pela potência desenvolvida nas suas três impedâncias. Porém, uma instalação elétrica trifásica pode conter diversas cargas monofásicas, de modo que é necessário identificar cada tipo de carga por sua potência e tensão de alimentação.

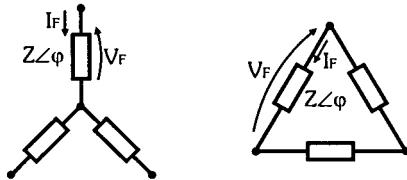
As potências ativa, reativa e aparente, desenvolvidas nas cargas monofásicas, já foram analisadas no Capítulo 15. Resta-nos agora, analisá-las em sistemas trifásicos formados por cargas configuradas em estrela e triângulo.

Apenas para lembrar, as cargas indutivas possuem potência reativa negativa, enquanto as cargas capacitivas possuem potência reativa positiva.

### Potências Ativa e Reativa em $3\phi$

Cada impedância da carga trifásica possui uma fase  $\varphi$  e está submetida a uma tensão de fase  $V_F$  e a uma corrente de fase  $I_F$ .

Assim, as potências ativa e reativa das fases ou nas impedâncias são dadas por:



$$P = V_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi \quad \text{e} \quad P_Q = -V_F \cdot I_F \cdot \sin \varphi$$

As potências ativa e reativa totais em uma carga  $3\phi$  são dadas pela soma das respectivas potências nas impedâncias:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_{QT} = P_{Q1} + P_{Q2} + P_{Q3}$$

Finalmente, a potência aparente total e o fator de potência total da carga  $3\phi$  são dados por:

$$P_{ST} = \sqrt{P_T^2 + P_{QT}^2}$$

$$FPr = \frac{P_T}{P_{ST}}$$

### Carga $3\phi$ Equilibrada

Se a carga é *equilibrada*, o módulo e a fase das impedâncias são iguais, o mesmo ocorrendo com as tensões e as correntes de fase. Então, as potências ativa e reativa totais podem ser:

$$P_T = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi$$

e

$$P_{QT} = -3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \sin \varphi$$

Na configuração  $Y$ , a tensão de linha vale  $V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$  e a corrente de linha vale  $I_L = I_F$ . Por outro lado, na configuração  $\Delta$ , a tensão de linha vale  $V_L = V_F$  e a corrente de linha vale  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$ . Isso significa que, se substituirmos a tensão e a corrente de fase pela tensão e pela corrente de linha nas fórmulas das potências ativa e reativa, chegaremos às mesmas fórmulas, ou seja, que são válidas tanto para cargas em estrela como para cargas em triângulo.

$$\text{Portanto: } P_T = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \Rightarrow$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

$$P_{QT} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi \Rightarrow$$

$$P_{QT} = -\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

## Exercícios Propostos

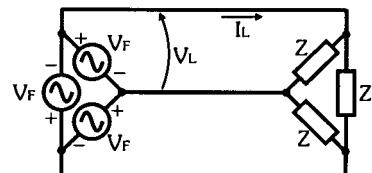
### Configurações do Gerador Trifásico

- 20.1)** Um gerador trifásico balanceado produz uma tensão de  $127V$  em cada fase. Desenhe esse gerador na configuração estrela e determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva), considerando que uma das tensões é  $127\angle 0^\circ [V]$ .
- 20.2)** Desenhe o gerador do exercício 20.1 na configuração triângulo e determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva).
- 20.3)** Desenhe o gerador do exercício 20.1 na configuração estrela e determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva), considerando que uma das tensões é  $127\angle 45^\circ [V]$ .
- 20.4)** Desenhe o gerador do exercício 20.3 na configuração triângulo e determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva).
- 20.5)** Um gerador trifásico balanceado na configuração estrela produz uma tensão de linha de  $380V$ . Determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva), considerando que uma das tensões é  $380\angle 0^\circ [V]$ .
- 20.6)** Se o gerador do exercício 20.5 passar para a configuração triângulo, quais serão as suas novas tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva)?
- 20.7)** Um gerador trifásico balanceado na configuração estrela produz uma tensão de linha de  $380V$ . Determine as três tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva), considerando que uma das tensões é  $380\angle -30^\circ [V]$ .
- 20.8)** Se o gerador do exercício 20.7 passar para a configuração triângulo, quais serão as suas novas tensões de fase e de linha (em valores complexos e seqüência positiva)?

### Sistema Trifásico com Carga Equilibrada

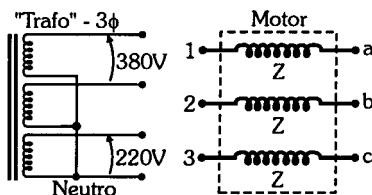
- 20.9)** Um gerador trifásico balanceado produz uma tensão de  $127V$  em cada fase. A carga trifásica é equilibrada e as impedâncias são de  $10\Omega$ . O sistema encontra-se na configuração  $\Delta - \Delta$ , conforme mostra a figura ao lado.

Determine a tensão e a corrente na linha.

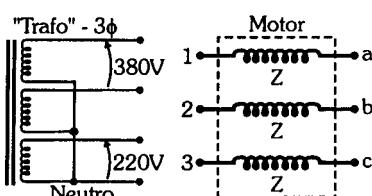


- 20.10)** Um transformador trifásico converte as tensões de um gerador de alta tensão em  $380V$  de linha. Pretende-se alimentar um motor trifásico com as especificações seguintes:  $220V / 380V - 10A$ .

Represente na figura ao lado a configuração do motor para que ele opere em  $380V$  e determine a impedância dos seus enrolamentos.

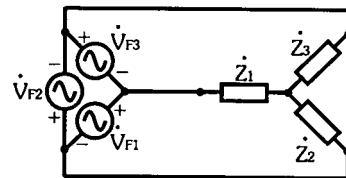


- 20.11)** Represente na figura ao lado a configuração do motor do exercício anterior para que ele opere em  $220V$  e determine a corrente de fase em seus enrolamentos.



- 20.12) Um gerador em  $\Delta$  produz as seguintes tensões:

$\dot{V}_{F1} = 220\angle 0^\circ [V]$ ,  $\dot{V}_{F2} = 220\angle -120^\circ [V]$  e  $\dot{V}_{F3} = 220\angle 120^\circ [V]$ . Ele deve alimentar uma carga trifásica equilibrada na configuração  $Y$ , sendo:  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = 15\angle 60^\circ [\Omega]$ .



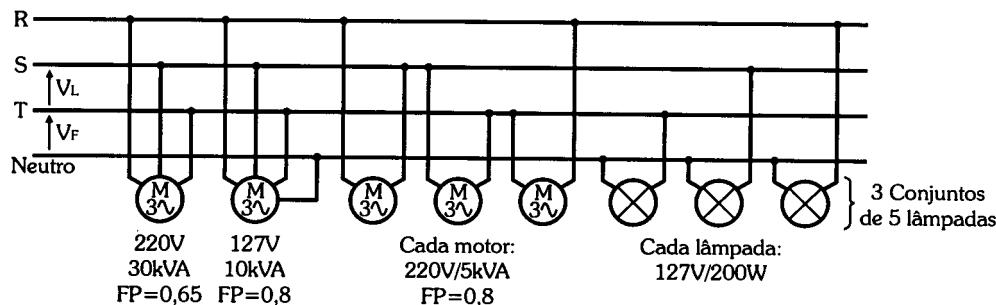
Determine todas as tensões e correntes de linha.

#### Sistema Trifásico com Carga Desequilibrada

- 20.13) Um gerador  $Y$  balanceado de  $220V$  de linha operando em seqüência positiva de fases alimenta uma carga  $Y$  - 4 fios formada pelas impedâncias  $\dot{Z}_1 = 12\angle 30^\circ [\Omega]$ ,  $\dot{Z}_2 = 6\angle 60^\circ [\Omega]$  e  $\dot{Z}_3 = 10\angle -45^\circ [\Omega]$ . Determine, em valores complexos, as tensões de linha e de fase, as correntes de linha e a corrente do fio neutro.
- 20.14) Um gerador  $\Delta$  balanceado de  $380V$  de linha operando em seqüência positiva de fases alimenta uma carga  $\Delta$  com as seguintes impedâncias:  $\dot{Z}_1 = 14\angle -40^\circ [\Omega]$ ,  $\dot{Z}_2 = 10\angle 30^\circ [\Omega]$  e  $\dot{Z}_3 = 10\angle -60^\circ [\Omega]$ . Determine as correntes complexas nas impedâncias e na linha.

#### Potência em Sistemas Trifásicos

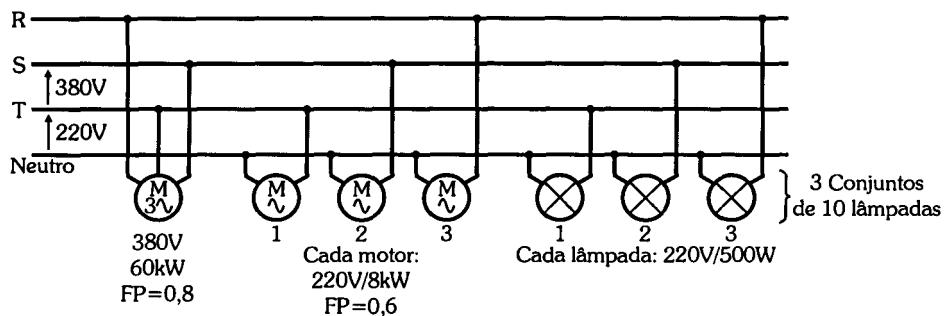
- 20.15) Um gerador  $Y$  balanceado de  $220V$  de linha operando em seqüência positiva de fases alimenta uma carga  $Y$  - 4 fios equilibrada formada por impedâncias de  $12\angle 45^\circ [\Omega]$ . Determine as potências ativa, reativa e aparente totais da instalação, bem como o fator de potência total.
- 20.16) Considere a instalação elétrica abaixo composta por cargas trifásicas e monofásicas. Determine as potências ativa, reativa e aparente totais da instalação, bem como o fator de potência total e a corrente total na linha.



- 20.17) Um gerador  $\Delta$  balanceado de  $380V$  de linha operando em seqüência positiva de fases alimenta dois motores trifásicos, sendo um de  $60kW$  com  $FP$  de  $0,76$  (indutivo) e outro de  $75kVA$  com  $FP$  de  $0,8$  (indutivo). Determine:
- as potências ativa, reativa e aparente totais da instalação;
  - o fator de potência total da instalação;
  - a corrente de linha total da instalação.
- 20.18) Um gerador  $Y$  balanceado de  $127V$  de linha alimenta uma carga  $Y$  - 4 fios equilibrada formada por resistências de  $25\Omega$ . Determine a potência ativa dissipada pela carga e a corrente de linha.
- 20.19) O que acontece com a corrente de linha se uma das resistências da carga do exercício 20.18 romper um de seus terminais?

**20.20)** O que acontece com a corrente de linha se uma das resistências da carga do exercício 20.18 entrar em curto?

**20.21)** Considere a instalação elétrica abaixo composta por cargas trifásicas e monofásicas. Determine as potências ativa, reativa e aparente totais da instalação, bem como o fator de potência total e a corrente total na linha.



## I - Potência de Dez

A potência de dez é um recurso matemático utilizado para representar, de forma simplificada, quantidades muito grandes ou muito pequenas por meio da multiplicação do *algarismo significativo* pela *base dez* elevada a um *expoente* positivo ou negativo. Em eletricidade, é importante que o expoente seja um múltiplo de três.

**Exemplos:** 1)  $2540 = 2,54 \times 1000 = 2,54 \times 10^3$

2)  $0,00834 = 8,34 \times 10^{-3}$

**Adição e Subtração com Potências de Dez:** Ajustar as potências de dez dos operandos para um mesmo expoente e somar ou subtrair os seus algarismos significativos, conforme a operação desejada.

**Exemplos:** 1)  $35 \times 10^{-5} + 8,6 \times 10^{-3} = 0,35 \times 10^{-3} + 8,6 \times 10^{-3} = (0,35 + 8,6) \times 10^{-3} = 8,95 \times 10^{-3}$

2)  $95 \times 10^4 - 3,8 \times 10^5 = 9,5 \times 10^5 - 3,8 \times 10^5 = (9,5 - 3,8) \times 10^5 = 5,7 \times 10^5 = 570 \times 10^3$

**Multiplicação e Divisão com Potências de Dez:** Multiplicar ou dividir os algarismos significativos dos operandos e, respectivamente, somar ou subtrair os expoentes das potências de dez, conforme a operação desejada.

**Exemplos:** 1)  $6,7 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^4 = 6,7 \times 2 \times 10^{-3+4} = 13,4 \times 10^1 = 134$       2)  $\frac{48 \times 10^6}{1,2 \times 10^4} = \frac{48}{1,2} \times 10^{6-4} = 40 \times 10^2 = 4 \times 10^3$

**Potenciação e Radiciação com Potências de Dez:** Na potenciação, aplicar a potência ao algarismo significativo e multiplicar o expoente da base dez pela potência. Na radiciação, extrair a raiz do algarismo significativo e dividir o expoente da base dez pelo índice da raiz.

**Exemplos:** 1)  $(-2 \times 10^{-2})^3 = (-2)^3 \times 10^{(-2) \times 3} = -8 \times 10^{-6}$

2)  $\sqrt[3]{27 \times 10^9} = 3 \times 10^{9/3} = 3 \times 10^3$

## II - Prefixos Métricos

Os prefixos métricos são símbolos que substituem determinadas potências de dez, simplificando ainda mais a representação de quantidades muito grandes ou muito pequenas. Em eletricidade, os prefixos métricos são utilizados, particularmente, para representar potências de dez com expoentes múltiplos de três. Abaixo, segue uma tabela contendo os prefixos métricos múltiplos de três, desde  $-18$  até  $+18$ .

Tabela de Prefixos Métricos					
Submúltiplos			Múltiplos		
Prefixo	Símbolo	Valor	Prefixo	Símbolo	Valor
atto	a	$10^{-18}$	quilo	k	$10^3$
femto	f	$10^{-15}$	mega	M	$10^6$
pico	p	$10^{-12}$	giga	G	$10^9$
nano	n	$10^{-9}$	tera	T	$10^{12}$
micro	μ	$10^{-6}$	peta	P	$10^{15}$
mili	m	$10^{-3}$	exa	E	$10^{18}$

**Exemplos:** 1)  $1000\text{ g} = 10^3\text{ g} = 1\text{ kg}$  (um quilograma)

2)  $0,005\text{ g} = 5 \times 10^{-3}\text{ g} = 5\text{ mg}$  (5 miligramas)

### **III - Teoria do Arredondamento**

O arredondamento é um recurso adotado para abreviar quantidades com muitas casas decimais, desde que o erro inserido não comprometa o resultado do que está sendo avaliado.

Critérios para o Arredondamento	Exemplos:
Após determinar o número desejado de casas decimais, o <i>último algarismo desejado</i> deve:	(para duas casas decimais)
a) ser <i>conservado</i> se o seguinte for inferior a 5;	$35,762 = 35,76$ $4,914 = 4,91$
b) ser <i>acrescido de uma unidade</i> se o seguinte for superior a 5 ou igual a 5 seguido de outros algarismos;	$68,937 = 68,94$ $334,78539 = 334,79$
c) ser <i>conservado</i> se ele for par e se o seguinte for igual a 5, apenas;	$83,325 = 83,32$ $44,445 = 44,44$
d) ser <i>acrescido de uma unidade</i> se ele for ímpar e se o seguinte for igual a 5, apenas.	$2,775 = 2,78$ $55,555 = 55,56$

**Obs.:** Em muitos livros, os itens c e d desses critérios de arredondamento são invertidos. O importante é adotar um critério e segui-lo sem modificá-lo.

### **IV - Métodos para Solução Analítica de Sistemas de Equações**

**Método das Substituições:** Partindo de uma das equações do sistema, isola-se uma das incógnitas, substituindo-a em outras equações até que se chegue a uma equação com uma única incógnita, possibilitando a determinação dessa e das demais incógnitas.

**Exemplo:**  $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Da equação *I*, tem-se:  $x_1 = -3 + x_2$

Substituindo  $x_1$  na equação *II*:  $2.(-3 + x_2) + 3.x_2 = 4 \Rightarrow -6 + 2.x_2 + 3.x_2 = 4 \Rightarrow 5.x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 2$

Substituindo  $x_2$  na equação *I*:  $x_1 - 2 = -3 \Rightarrow x_1 = -1$

Portanto, a solução do sistema é:  $(x_1 ; x_2) = (-1 ; 2)$

**Método das Adições:** Multiplica-se uma ou mais equações por valores tais que a adição delas resulte em novas equações até que uma delas tenha uma única incógnita, possibilitando a determinação dessa e das demais incógnitas.

**Exemplo:**  $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \ . \ (-2) & (III) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2.x_1 + 2.x_2 = 6 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Somando as equações *I* e *II*, tem-se:  $\begin{cases} 5.x_2 = 10 & (III) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Da equação *III*, tem-se:  $5.x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 2$

Substituindo  $x_2$  na equação *II*:  $2.x_1 + (3.2) = 4 \Rightarrow 2.x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -1$

Portanto, a solução do sistema é:  $(x_1 ; x_2) = (-1 ; 2)$

## V - Métodos para Solução Matricial de Sistemas de Equações

### Matrizes de Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear genérico:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1j}.x_j = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2j}.x_j = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + \dots + a_{ij}.x_j = b_i \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & | & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & | & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & | & x_j \\ \hline \text{matriz I} & \text{matriz II} & & & & \text{matriz III} \end{array} = \begin{array}{c|c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{array}$$

Além dessa representação, interessa-nos também a **matriz completa** que corresponde à matriz incompleta acrescida de uma coluna com os termos independentes, conforme mostramos ao lado:

Em que:

$a_{ij}$  = coeficiente das equações

$b_1, b_2, \dots, b_i$  = termos independentes

$x_1, x_2, \dots, x_j$  = incógnitas

Em que:

matriz I  $\Rightarrow$  matriz de coeficientes ou matriz incompleta

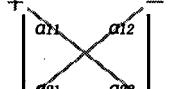
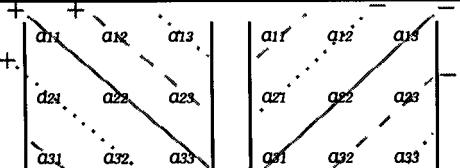
matriz II  $\Rightarrow$  matriz de variáveis ou matriz de incógnitas

matriz III  $\Rightarrow$  matriz de termos independentes

$$\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & b_i \end{array} \Rightarrow \text{matriz completa}$$

### Método de Solução por Determinantes

Calcula-se o determinante  $D$  da matriz incompleta:

Matriz 2 x 2		$\Rightarrow D = + a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$
Matriz 3 x 3	 Produtos Positivos      Produtos Negativos	$\Rightarrow D = + a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

Calculam-se os determinantes  $D_{xj}$  das matrizes incompletas, substituindo cada coluna de índice  $j$  pela matriz de termos independentes. Vejamos, como exemplo, esse procedimento para uma matriz 2 x 2:

Matriz 2 x 2	$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$	$\Rightarrow D_{x1} = + b_1.a_{22} - a_{12}.b_2$
	$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$	$\Rightarrow D_{x2} = + a_{11}.b_2 - b_1.a_{21}$

Calculam-se as variáveis  $x_j$  por meio da seguinte expressão:

$$x_j = \frac{D_{xj}}{D}$$

**Exemplo:** Sistema de Equações

$$\begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 = 0 \\ x_1 + 4.x_2 = 1 \end{cases}$$

Sistema matricial

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Determinante da matriz incompleta:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (3)(4) - (-2)(1) = 12 + 2 \Rightarrow D = 14$$

Determinante de  $x_1$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow Dx_1 = (0)(4) - (-2)(1) = 0 + 2 \Rightarrow Dx_1 = 2$$

Determinante de  $x_2$ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Dx_2 = (3)(1) - (0)(1) = 3 - 0 \Rightarrow Dx_2 = 3$$

Cálculo de  $x_1$  e  $x_2$ :

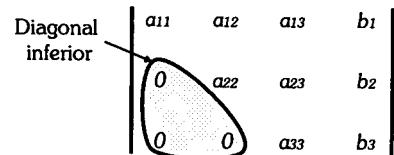
$$x_1 = \frac{Dx_1}{D} = \frac{2}{14} = 0,143 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D} = \frac{3}{14} = 0,214$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$(x_1 ; x_2) = (0,143 ; 0,214)$$

### Método de Solução por Escalonamento

Multiplica-se uma ou mais linhas da matriz completa por valores tais que a adição delas resulte em uma matriz incompleta cuja *diagonal superior* ou *inferior* tenha apenas *coeficientes nulos*, possibilitando a determinação direta das incógnitas.



**Exemplo:** Sistema de Equações

$$\begin{cases} 3.x_1 + 3.x_2 + 6.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 3.x_2 + 5.x_3 = -3 \\ 2.x_1 - 2.x_2 - 6.x_3 = 0 \end{cases}$$

Matriz Completa

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \cdot (-1) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

Somando  $II$  com  $III$ :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \cdot (2) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \cdot (-3) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ -6 & -9 & -15 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

Somando  $I$  com  $II$ :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \cdot (5) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \cdot (3) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & -3 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 45 \\ 0 & 15 & 33 & -9 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

Somando  $II$  com  $III$ :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 45 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 45 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array} \right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

Da linha  $III$ , tem-se:

$$18.x_3 = 36 \Rightarrow x_3 = 2$$

Da linha  $II$ , tem-se:

$$-15.x_2 - 15.2 = 45 \Rightarrow -15.x_2 = 75 \Rightarrow x_2 = -5$$

Da linha  $I$ , tem-se:

$$6.x_1 + 6.x_2 + 12.x_3 = 0 \Rightarrow 6.x_1 + 6.(-5) + 12.2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$(x_1 ; x_2 ; x_3) = (1 ; -5 ; 2)$$

## VI - Função Exponencial

A função exponencial é uma função não linear. O expoente da função pode ser qualquer número real. Das diversas funções exponenciais, interessa-nos, nesse momento, as seguintes:

$$y = e^{-x}$$

e

$$y = 1 - e^{-x}$$

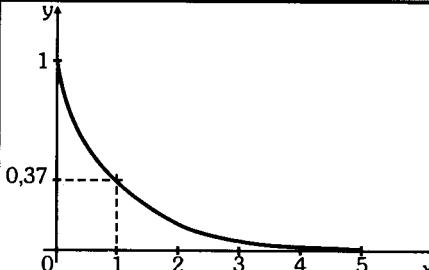
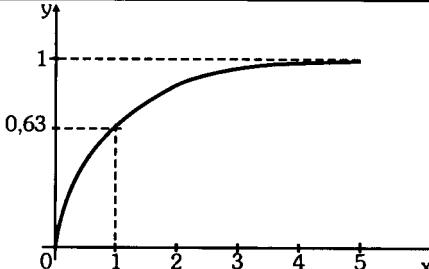
Em que:  
 $y$  = variável dependente de  $x$   
 $x$  = expoente  
 $e$  = base neperiana

A base da função exponencial pode ser qualquer número real positivo.

Em eletricidade, no entanto, usamos principalmente o *algarismo neperiano*  $e = 2,718281828\dots$ , que será arredondado para duas casas decimais, isto é,  $e = 2,72$ .

### Gráficos da Função Exponencial

O aspecto gráfico dessas funções exponenciais está mostrado em seguida:

Função Decrescente	Gráfico	Comentários
$y = e^{-x}$		Para $x$ variando de zero a 5:  1) Se $x = 0$ , $y$ inicia em 1.  2) Se $x = 1$ , $y$ cai 63%, isto é, $y = 0,37$ .  3) Se $x = 5$ , $y$ cai 99%, isto é, $y = 0,01$ , podendo ser considerado zero.
Função Crescente	Gráfico	Comentários
$y = 1 - e^{-x}$		Para $x$ variando de zero a 5:  1) Se $x = 0$ , $y$ inicia em 0.  2) Se $x = 1$ , $y$ chega a 63% de 1, isto é, $y = 0,63$ .  3) Se $x = 5$ , $y$ chega a 99% de 1, isto é, $y = 0,99$ , podendo ser considerado 1.

### Uso da Calculadora

Nas calculadoras, as funções exponencial genérica e exponencial de base neperiana aparecem, normalmente, da seguinte forma:

Função	Teclas Alternativas	Campo
exponencial genérica.....	$X^Y$ ..... ↑ .....	válida para qualquer base
exponencial base neperiana.....	$e^X$	

## VII - Função Logarítmica

A função logarítmica é uma função não linear, podendo ser representada genericamente por:

$$\boxed{\log_a y = x}$$

Em que:  
 $x$  = logaritmo  
 $y$  = logaritmado ( $y > 0$ )  
 $a$  = base da função ( $a > 1$ )

Se a base da função logarítmica é 10, a função é representada simplesmente por  $\log y$ , e se a base da função logarítmica é o algarismo neperiano  $e = 2,72$ , a função é denominada *logaritmo neperiano*, sendo representada por  $\ln y$ .

A função logarítmica se relaciona com a função exponencial da seguinte forma:  $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$

Essa relação é importante quando desejamos calcular o expoente  $x$  da função exponencial para um valor de  $y$  conhecido. Nesse caso, determina-se  $x$  por meio do logaritmo de  $y$ .

### Propriedades Básicas dos Logaritmos

Produto	Matematicamente
O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores desse produto.	$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$
Divisão	Matematicamente
O logaritmo de uma divisão é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.	$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$
Potência no Logaritmado	Matematicamente
O logaritmo de um valor elevado a um expoente é igual ao produto do expoente pelo logaritmo desse valor.	$\log_a A^B = B \cdot \log_a A$

### Uso da Calculadora

Nas calculadoras, as funções logaritmo *base 10* e o logaritmo *neperiano* aparecem, normalmente, da seguinte forma:

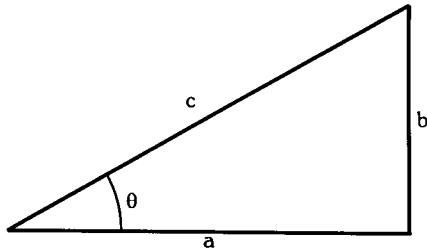
Função	Teclas Alternativas	Campo
logaritmo base 10.....	LOG ..... LOG X .....	..... logaritmado $> 0$
logaritmo neperiano.....	LN ..... LN X .....	..... logaritmado $> 0$

## VIII - Identidades Trigonométricas

### Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

No triângulo retângulo, o ângulo  $\theta$  relaciona-se trigonométricamente com os catetos  $a$  e  $b$  e com a hipotenusa  $c$  por:

$$\cos \theta = \frac{a}{c} ; \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{c} ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$



Dessas relações, deduzimos que:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$  e  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

As funções trigonométricas inversas *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente* são muito utilizadas em eletricidade, e servem para determinar o ângulo  $\theta$  a partir, respectivamente, do seu *cosseno*, *seno* ou *tangente*. As fórmulas são:

$$\theta = \operatorname{arccos} \frac{a}{c} ; \quad \theta = \operatorname{arcsen} \frac{b}{c} ; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

A tabela seguinte apresenta as identidades trigonométricas mais usadas em eletricidade:

Principais Identidades Trigonométricas	
Conjugado do Ângulo:	Adição e Subtração de Ângulos:
$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$ $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$ $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha$
Complemento e Suplemento do Ângulo:	Conversão para Produto:
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ $\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ $\operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\operatorname{sen} \alpha \pm \cos \beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$
Dobro e Metade do Ângulo:	Conversão para Adição:
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (*)$ $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (*)$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$
(*) O sinal é + ou - em função do quadrante do ângulo.	

## Uso da Calculadora

Nas calculadoras eletrônicas, antes de executarmos uma operação trigonométrica, é necessário escolhermos em que unidade de medida desejamos trabalhar, isto é, em grau ou radiano.

Muitas calculadoras apresentam as funções em inglês. Neste caso, você encontrará, por exemplo, SIN (*sinus*) para seno e DEG (*degree*) para grau.

### ATENÇÃO!

Cuidado para não confundir DEG (*degree*) ≡ grau com GRAD (*grad*) ≡ grado. O grado é uma unidade de ângulo pouco utilizada em eletricidade e equivale a  $1/400$  da circunferência, enquanto o grau equivale a  $1/360$ .

A tabela seguinte apresenta as teclas referentes às principais funções trigonométricas:

Função	Teclas Alternativas	Campo
cosseno .....	<b>COS</b>	
arco cosseno .....	<b>ACOS</b> ..... <b>ACS</b> ..... <b>COS<sup>-1</sup></b> ..	$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
seno .....	<b>SIN</b>	
arco seno .....	<b>ASIN</b> ..... <b>ASN</b> ..... <b>SIN<sup>-1</sup></b> ..	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
tangente .....	<b>TG</b> ..... <b>TAN</b> .....	$\theta = n.90^\circ \rightarrow \text{erro}$
arco tangente .....	<b>ATG</b> ..... <b>ATAN</b> ..... <b>TG<sup>-1</sup></b> ..	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
grau .....	<b>DEG</b>	
radiano.....	<b>RAD</b>	

Ao executar as operações inversas *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente*, a calculadora fornecerá resultados limitados aos campos descritos na tabela acima. Isso acontece porque sempre há dois ângulos cujo cosseno, seno e tangente resultam em um mesmo valor.

Assim, caso o ângulo desejado nessas operações esteja fora desses campos, é necessário fazer a correção baseada nas identidades seguintes:

- $\cos \theta = \cos (-\theta)$
- $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$
- $\tan \theta = \tan (180^\circ + \theta)$

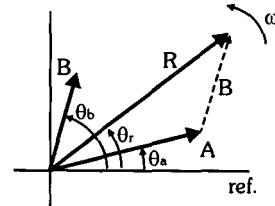
## **IX - Operações Fasoriais**

### **Adição de Fasores**

A adição gráfica de dois fasores é feita por meio da regra do paralelogramo.

**Exemplo:**  $R(\theta_r) = A(\theta_a) + B(\theta_b)$

- 1) Desloca-se paralelamente o fator  $B$  até a ponta do fator  $A$ ;
- 2) O módulo do fator resultante  $R$  é igual ao tamanho da seta que liga o início da fator  $A$  à ponta do fator  $B$ ;
- 3) O ângulo do fator resultante é  $\theta_r$ .

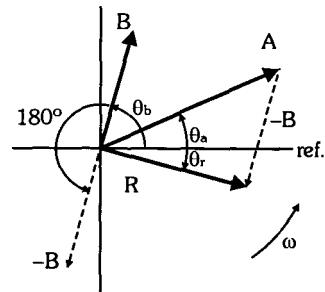


### **Subtração de Fasores**

A subtração gráfica de dois fasores é feita também pela adição por meio da regra do paralelogramo, só que o fator subtraendo deve ser defasado em  $180^\circ$ .

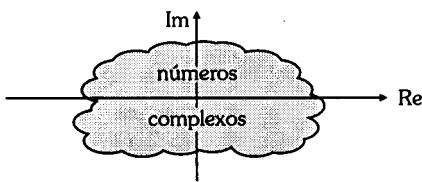
**Exemplo:**  $R(\theta_r) = A(\theta_a) - B(\theta_b)$

- 1) Defasa-se o fator  $B$  em  $180^\circ$ , obtendo o fator  $-B$ ;
- 2) Desloca-se paralelamente o fator  $-B$  até a ponta do fator  $A$ ;
- 3) O módulo do fator resultante  $R$  é igual ao tamanho da seta que liga o início da fator  $A$  à ponta do fator  $-B$ ;
- 4) O ângulo do fator resultante é  $\theta_r$ .



## X - Números Complexos

### Definição de Número Complexo



Um número complexo tem duas dimensões, sendo uma *real* e outra *imaginária*.

Por isso, eles devem ser representados num plano cartesiano formado por um eixo horizontal real *Re* e por um eixo vertical imaginário *Im*.

Define-se unidade imaginária o número  $j$ , tal que:

$$j = \sqrt{-1}$$

ou

$$j^2 = -1$$

Assim, pode-se obter resultados positivos e negativos (*Re* ou *Im*) a partir de um número imaginário elevado a uma potência, como também pode-se extrair a raiz de números negativos (*Re*).

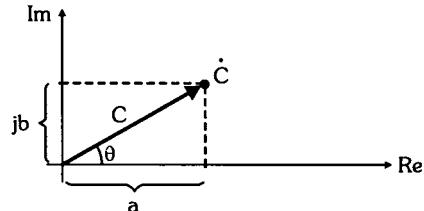
#### Exemplos:

- $j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j$
- $1/j = j^{-1} = -j$
- $\sqrt{-4} = \sqrt{j^2 \cdot 4} = j\sqrt{4} = j2$
- $j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $1/-j = -(j^{-1}) = j$
- $\sqrt{-9} = \sqrt{j^2 \cdot 9} = j\sqrt{9} = j3$
- $j^5 = j^4 \cdot j = 1 \cdot j = j$
- $1/j^2 = 1/-1 = -1$
- $\sqrt{-30} = \sqrt{j^2 \cdot 30} = j\sqrt{30} = j5,48$

Considere um número complexo  $\dot{C}$  locado num ponto qualquer do plano cartesiano.

Há duas formas de representar analiticamente esse mesmo número complexo:

$$\begin{cases} \dot{C} = a + jb & (\text{forma retangular}) \\ \dot{C} = C\angle\theta & (\text{forma polar}) \end{cases}$$



- em que:  $\dot{C}$   $\Rightarrow$  número complexo (o ponto . caracteriza-o como número complexo)  
 $a$   $\Rightarrow$  componente real (positiva ou negativa)  
 $b$   $\Rightarrow$  componente imaginária (positiva ou negativa)  
 $C$   $\Rightarrow$  (ou  $|C|$ ) módulo do número complexo (sempre positivo)  
 $\theta$   $\Rightarrow$  fase do número complexo (positiva ou negativa, a partir da referência  $Re^+$ )

## Conversão entre as Formas Retangular e Polar

Várias expressões entre os elementos que compõem um número complexo podem ser obtidas por meio do Teorema de Pitágoras e das relações trigonométricas aplicadas ao triângulo retângulo formado no plano cartesiano:

Elementos da Forma Retangular:

$$\text{Componente real} \Rightarrow a = C \cdot \cos \theta$$

$$\text{Componente imaginária} \Rightarrow b = C \cdot \sin \theta$$

Elementos da Forma Polar:

$$\text{Módulo de } \dot{C} \Rightarrow C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Fase de } \dot{C} \Rightarrow \theta = \arctg \frac{b}{a}$$

Por meio destas expressões, é possível converter um número complexo da forma retangular na polar e vice-versa.

### CUIDADO!

Nas calculadoras, as funções *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente* operam, cada uma, apenas em dois quadrantes específicos. Para mais informações, consulte o tópico VIII deste apêndice.

## Operações com Números Complexos

Considere os números complexos seguintes:  $\dot{C}_1 = a_1 + jb_1 \equiv \dot{C}_1 = C_1 \angle \theta_1$

e

$\dot{C}_2 = a_2 + jb_2 \equiv \dot{C}_2 = C_2 \angle \theta_2$

### Adição e Subtração com Números Complexos

Para realizar as operações adição e subtração com números complexos, a melhor opção é convertê-los primeiramente na *forma retangular*. Assim, tais operações tornam-se bastante simples, conforme mostramos em seguida.

Na *adição*, determina-se a soma algébrica das componentes reais e das imaginárias, obtendo o número complexo resultante.

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Na *subtração*, determina-se a subtração algébrica das componentes reais e das imaginárias, obtendo o número complexo resultante.

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

### Multiplicação e Divisão com Números Complexos

Para realizar as operações multiplicação e divisão com números complexos, a melhor opção é convertê-los primeiramente na *forma polar*. Assim, tais operações tornam-se bastante simples, conforme mostramos em seguida.

Na *multiplicação*, determinam-se o produto dos módulos e a soma algébrica das fases, obtendo o número complexo resultante.

$$\dot{C}_1 \cdot \dot{C}_2 = (C_1 \cdot C_2) \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Na *divisão*, determinam-se o quociente entre os módulos e a subtração algébrica das fases, obtendo o número complexo resultante.

$$\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{C_1}{C_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

## Conjugado de um Número Complexo

Considere o número complexo  $\dot{C} = a + jb \equiv C\angle\theta$ .

Por definição, o seu conjugado é:

$$\dot{C}^* = a - jb \quad = \quad \dot{C}^* = C\angle -\theta$$

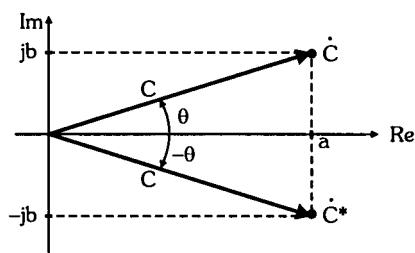
Assim, no conjugado do número complexo, a componente imaginária da forma retangular e a fase da forma polar têm os seus sinais trocados, mas a componente real e o módulo permanecem inalterados.

As principais propriedades do conjugado são:

- 1) Os módulos de  $\dot{C}$  e de  $\dot{C}^*$  são iguais, pois:  $C = C^* = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- 2) O produto  $\dot{C}\dot{C}^*$  resulta sempre em um *número real* igual ao quadrado do módulo, pois:

$$\dot{C}\dot{C}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - jab + jab - j^2b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \dot{C}\dot{C}^* = C^2 \quad \text{ou}$$

$$\dot{C}\dot{C}^* = (C\angle\theta)(C\angle-\theta) = C^2\angle0^\circ \Rightarrow \dot{C}\dot{C}^* = C^2$$



## ATENÇÃO!

- 1) Cuidado para não confundir  $\dot{C}$  (número complexo) com  $C$  (módulo do número complexo).
- 2) Ao realizar análises com números complexos, deve-se adotar um número de casas decimais para as componentes real e imaginária e para módulo e fase de acordo com a precisão desejada, usando as regras de arredondamento (veja tópico III deste apêndice). Levando em consideração que a análise teórica de um circuito é feita geralmente a partir de valores nominais, enquanto a análise experimental do mesmo circuito trabalha com valores reais, a utilização de duas casas decimais em cálculos é mais do que suficiente e, na maioria dos casos, desnecessária.

## XI - Regras de Derivação e Derivadas Elementares

### Regras Elementares de Derivação:

Considere as funções genéricas:  $y(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  e a constante  $k$ .

As principais regras de derivação são as seguintes:

- 1)  $y(x) = k \cdot u(x)$   $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = k \cdot \frac{du(x)}{dx}$
- 2)  $y(x) = u(x) + v(x)$   $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx}$
- 3)  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$   $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx}$
- 4)  $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$   $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx}}{[v(x)]^2}$
- 5)  $y = f[u(x)]$   $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy[u(x)]}{d[u(x)]} \cdot \frac{d[u(x)]}{dx}$

A tabela seguinte apresenta as derivadas elementares que atendem às necessidades deste livro:

Derivadas Elementares		
1) $y(x) = k$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = 0$
2) $y(x) = k \cdot x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = k$
3) $y(x) = x^k$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = k \cdot x^{(k-1)}$
4) $y(x) = k^x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = k^x \cdot \ln k$ para $(k > 0)$
5) $y(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = e^x$
6) $y(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{x}$
7) $y(x) = \log_k x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln k}$ para $(k > 0)$
8) $y(x) = \operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = \cos x$
9) $y(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$
10) $y(x) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$\frac{dy(x)}{dx} = \sec^2 x$

## XII - Regras de Integração e Integrais Elementares

### Regras Elementares de Integração:

Considere as funções genéricas:  $y(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  e a constante  $k$ .

As principais regras de integração são as seguintes:

$$1) \int \frac{dy(x)}{dx} dx = y(x)$$

$$2) \int k \cdot y(x) dx = k \int y(x) dx$$

$$3) \int [u(x) + v(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$$

$$4) \int u(x) d[v(x)] = u(x)v(x) - \int v(x) d[u(x)]$$

$$5) \int y(kx) dx = \frac{1}{k} \int y(kx) d(kx)$$

A tabela seguinte apresenta as integrais elementares que atendem às necessidades deste livro:

Integrais Elementares	
1) $\int k dx = kx$	6) $\int \sin x dx = -\cos x$
2) $\int x^k dx = \frac{x^{(k+1)}}{k+1}$	7) $\int \cos x dx = \sin x$
3) $\int \frac{1}{x} dx =  \ln x $	8) $\int \tan x dx = -\ln(\cos x)$
4) $\int e^x dx = e^x$	9) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
5) $\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k}$ para $(k > 0)$	10) $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

**Atenção!**

**As respostas numéricas deste apêndice são valores aproximados. Dependendo do procedimento adotado na resolução dos exercícios, pode haver variação de valor, mas não de ordem de grandeza.**

**Capítulo 2**

(2.1)  $n = -200 \times 10^{12}$  elétrons retirados - (2.2)  $n = 500 \times 10^9$  elétrons inseridos - (2.3)  $Q = +0,16\text{pC}$

(2.4)  $Q_f = +0,84\text{pC}$  - (2.5)  $n = -87,5 \times 10^{12}$  elétrons retirados - (2.6) Por meio de outro corpo carregado com carga positiva. (2.7) Após a polarização do corpo neutro por meio de outro corpo carregado positiva ou negativamente, deve-se aterrizar o seu polo negativo para que os elétrons sejam transferidos para a Terra. (2.8)  $E_1 = 180\text{N/C}$ ; sentido: divergente - (2.9)  $E_2 = 45\text{N/C}$ ; sentido: divergente - (2.10) A intensidade do campo reduz para um quarto.

(2.11)  $F_1 = 1,8 \times 10^{-6}\text{N}$ ; sentido: mesmo do campo - (2.12)  $F_2 = 0,45 \times 10^{-6}\text{N}$ ; sentido: mesmo do campo

(2.13) A intensidade da força reduz para um quarto. (2.14)  $F = 0,2\text{N}$ ; sentido: repulsão - (2.15)  $F = 5,0625\text{N}$ ; sentido: atração - (2.16)  $V_1 = 180\text{V}$  - (2.17)  $V_2 = 90\text{V}$  - (2.18) O potencial elétrico cai para a metade. (2.19) positiva; repulsão; mesmo sentido; diminuiu; maior; menor. (2.20) - a)  $E_A = 187,2\text{kN/C}$ ; sentido: direita para esquerda;  $E_B = 40\text{kN/C}$ ; sentido: direita para esquerda;  $E_C = 187,2\text{kN/C}$ ; sentido: direita para esquerda - b)  $V_A = -144\text{kV}$ ;  $V_B = 0$ ;  $V_C = 144\text{kV}$

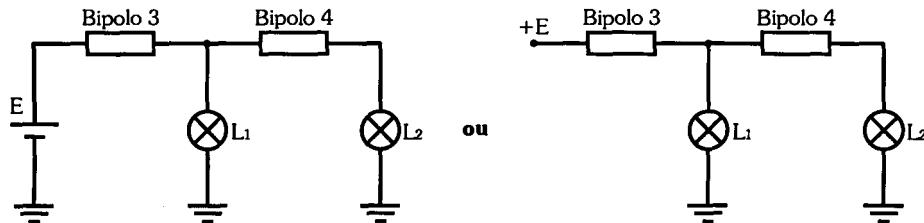
c) Uma carga negativa imersa num campo move-se no sentido contrário do campo. Portanto,  $Q_3$  movimenta-se de  $Q_1$  para  $Q_2$ . Chega-se a essa mesma conclusão analisando o movimento de  $Q_3$  pela repulsão entre ela e  $Q_1$  e pela atração entre ela e  $Q_2$ . - d)  $F_A = 1,872\text{N}$ ; sentido: esquerda para direita;  $F_B = 0,4\text{N}$ ; sentido: esquerda para direita;  $F_C = 1,872\text{N}$ ; sentido: esquerda para direita - e) menor; maior - (2.21) - a)  $Q_1$  e  $Q_2$  devem ter a mesma intensidade e o mesmo sinal.

b) Isso não ocorre, independente de intensidade e sinal das cargas. Teoricamente, isso só acontecerá quando  $d = \infty$ .

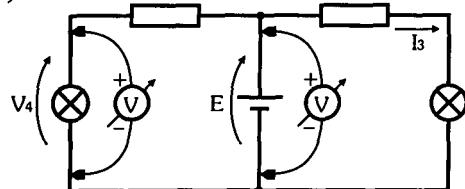
**Capítulo 3**

(3.1)  $I = 300\mu\text{A}$  - (3.2)  $n = 562,5 \times 10^{15}$  elétrons

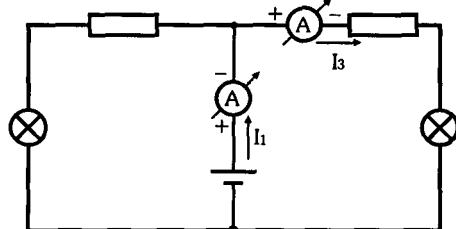
(3.3)



(3.4) - a)



(3.4) - b)



(3.5)  $V = 112\text{V}$ ;  $I = 28\text{mA}$  - (3.6) I-d; II-a; III-e; IV-b; V-c

## Capítulo 4

(4.1)  $I = 12\text{mA}$  - (4.2)  $V = 9\text{V}$  - (4.3)  $R = 12\text{k}\Omega$  - (4.4) - a)  $R_{exp} = 250\Omega$ ;  $R_N = 270\Omega$  - b)  $-7,41\%$  - (4.5)  $G = 100\mu\text{S}$  (4.6)  $G = 1\text{S}$  - (4.7)  $R_L = 22,5\Omega$  - (4.8)  $19,8\text{k}\Omega \leq R \leq 24,2\text{k}\Omega$  - (4.9) - a)  $56\text{k}\Omega \pm 5\%$  - b)  $1\text{k}\Omega \pm 10\%$  - c)  $64,9\Omega \pm 1\%$  d)  $267\text{k}\Omega \pm 2\%$  - (4.10) - a) laranja - laranja - vermelho - ouro - b) amarelo - violeta - marrom - prata - c) cinza - azul - azul - vermelho - marrom - d) verde - marrom - marrom - prata - vermelho - (4.11) - 1%:  $R_{B1} = 5230\Omega$ ;  $R_{B2} = 1070\Omega$ ;  $R_C = 332\Omega$ ;  $R_E = 102\Omega$  - 5%:  $R_{B1} = 5100\Omega$ ;  $R_{B2} = 1100\Omega$ ;  $R_C = 330\Omega$ ;  $R_E = 100\Omega$  - 10%:  $R_{B1} = 5600\Omega$ ;  $R_{B2} = 1000\Omega$ ;  $R_C = 330\Omega$ ;  $R_E = 100\Omega$  - (4.12) - a)  $665\Omega \pm 1\%$  - b)  $I_M = 18,23\text{mA}$ ;  $I_m = 17,87\text{mA}$  - (4.13)  $R_1$ : cinza - vermelho - vermelho - ouro;  $R_2$ : laranja - verde - violeta - preto - marrom - (4.14) - a)  $X 1\text{k}$  - b)  $15\text{k}\Omega$  - c) ohmímetro digital:  $e\% = +2,33\%$ ; ohmímetro analógico:  $e\% = -3,33\%$  - d) Os ohmímetros digitais são, em geral, mais precisos que os analógicos, além de não existir erro de paralaxe. (4.15)  $R = 13,54\Omega$  - (4.16)  $L = 1,735\text{m}$  - (4.17)  $\rho = 6000 \times 10^{-8}\Omega.\text{m}$  grafite - (4.18) - a)  $R_{esp} = 6\Omega$  - b)  $R_{12} = 300\Omega$  - c)  $R_{13} = 150\Omega$  - (4.19) - a)  $R'1 = 96,8\Omega$  - b)  $R'2 = 101,36\Omega$  - Observe que a resistência da grafite diminui com o aumento da temperatura, enquanto a do níquel-cromo aumenta. (4.20)  $60\text{mA} \equiv 3961^\circ\text{C}$ ;  $100\text{mA} \equiv 20^\circ\text{C}$ ;  $140\text{mA} \equiv -1686^\circ\text{C}$ .

## Capítulo 5

(5.1) - a)  $I = 200\text{mA}$  - b)  $R_L = 22,5\Omega$  - (5.2) - a)  $I_{máx} = 22,36\text{mA}$ ;  $V_{máx} = 22,36\text{V}$  - b)  $P' = 125\text{mW}$  - c)  $P_{máx}/P' = 4$ ; A potência dissipada divide-se por quatro quando a tensão aplicada divide-se por dois. (5.3)  $R_I$ :  $V_{máx} = 5\text{V}$ ;  $I_{máx} = 50\text{mA}$ ;  $R_{II}$ :  $V_{máx} = 22,36\text{V}$ ;  $I_{máx} = 223,61\text{mA}$  - (5.4) - a)  $\tau = 15\text{kW.h}$  - b)  $R\$ = 2,65$  - (5.5) 500 000 lâmpadas.

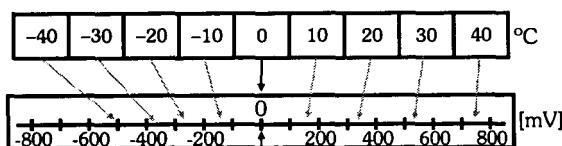
## Capítulo 6

(6.1) Nós: c, g; Ramos: c-b-a-i-h-g; c-d-e-f-g; c-g; Malhas: c-b-a-i-h-g-c; c-d-e-f-g-c; a-b-c-d-e-f-g-h-i-a - (6.2)  $I_3 = 4\text{A}$ ;  $I_5 = 3\text{A}$ ;  $I_6 = 1\text{A}$  - (6.3)  $V_1 = 3\text{V}$ ;  $V_2 = 7\text{V}$  - (6.4)  $E_2 = 10\text{V}$ ;  $V_3 = 22\text{V}$  - (6.5)  $V_1 = 1,00\text{V}$ ;  $V_2 = -7,00\text{V}$ ;  $V_3 = -4,00\text{V}$ ;  $A_1 = 100\text{mA}$  (6.6) O sentido da corrente e a polaridade da tensão em  $R_1$  estão invertidos. (6.7) - a)  $R_{eq} = 5,26\text{k}\Omega$  b)  $I = 4,56\text{mA}$  - c)  $V_1 = 4,56\text{V}$ ;  $V_2 = 10,03\text{V}$ ;  $V_3 = 2,55\text{V}$ ;  $V_4 = 6,84\text{V}$  - (6.8) - a)  $\sum V_i = 23,98\text{V}$ ;  $E = 24\text{V}$ ; portanto:  $\sum V_i \equiv E$  - b)  $P_E = 109,44\text{mW}$ ;  $P_{eq} = 109,51\text{mW}$ ;  $\sum P_i = 109,37\text{mW}$ ; portanto:  $P_E \equiv \sum P_i \equiv P_{eq}$  (6.9) - a)  $R_{eq} = 659,72\Omega$  b)  $I = 18,19\text{mA}$  - c)  $I_1 = 3,64\text{mA}$ ;  $I_2 = 12\text{mA}$ ;  $I_3 = 2,55\text{mA}$  - (6.10) - a)  $\sum I_i = 18,19\text{mA}$ ; portanto:  $\sum I_i = I$  b)  $P_E = 218,28\text{mW}$ ;  $P_{eq} = 218,28\text{mW}$ ;  $\sum P_i = 218,27\text{mW}$ ; portanto:  $P_E \equiv \sum P_i \equiv P_{eq}$  - (6.11) - a)  $R_A = 824,56\Omega$  b)  $R_B = 3584,56\Omega$  - c)  $R_C = 781,88\Omega$  - d)  $R_D = 1001,88\Omega$  - e)  $R_{eq} = 688,39\Omega$  - (6.12)  $R_{AB} = 30\Omega$  (6.13) - a)  $R_{AB} = 50\Omega$  b)  $R_{CD} = 37,5\Omega$  (6.14) - a)  $E = 12\text{V}$  - b)  $R_{eq} = 600\Omega$  - c)  $R_4 = 1067\Omega$  - (6.15)  $V_1 = 2\text{V}$ ;  $V_2 = V_3 = 18\text{V}$ ;  $I_1 = 4\text{mA}$ ;  $I_2 = 2,20\text{mA}$ ;  $I_3 = 1,80\text{mA}$ ;  $P_1 = 8\text{mW}$ ;  $P_2 = 39,60\text{mW}$ ;  $P_3 = 32,40\text{mW}$  - (6.16)  $V = 6\text{V}$ ;  $I = 2,5\text{mA}$  - (6.17)  $P_5 = 360\text{mW}$  (6.18) - a) Os três resistores são iguais a  $3R$ . b) Os três resistores são iguais a  $R/3$ . c)  $R_{12} = 6,6\text{k}\Omega$ ;  $R_{13} = 4,4\text{k}\Omega$ ;  $R_{23} = 13,2\text{k}\Omega$  - (6.19)  $R_{eq} \equiv 140\Omega$ ;  $I \equiv 100\text{ mA}$ . (6.20) - a)  $R_{eq} = 75\Omega$  - b)  $I = 0,33\text{A}$ .

## Capítulo 7

(7.1)  $V_2 = 8,25\text{V}$  - (7.2)  $R_s = 8750\Omega$  - (7.3)  $R_2 \equiv 72\Omega$  (valor adotado =  $75\Omega$ ) - (7.4)  $R_1 = 120\Omega$ ;  $R_2 = 83,7\Omega$  (7.5)  $I_1 = 2,55\text{mA}$ ;  $I_2 = 21,44\text{mA}$  - (7.6)  $I_1 = 1,0\text{A}$ ;  $I_2 = 1,5\text{A}$ ;  $I_3 = 3,0\text{A}$ ;  $I_4 = 6,0\text{A}$  - (7.7)  $R_x = 9\text{k}\Omega$  - (7.8) - a) O ideal é adotar  $R_2 = R_3 = R_4 = 2\text{k}\Omega$ , pois esse é o valor de  $R_t$  a  $0^\circ\text{C}$ . As respostas seguintes foram obtidas a partir da adoção desses valores. b) Na ordem, de  $-40$  a  $+40^\circ\text{C}$ :  $-500\text{mV}$ ;  $-390\text{mV}$ ;  $-270\text{mV}$ ;  $-140\text{mV}$ ;  $0\text{mV}$ ;  $+160\text{mV}$ ;  $+330\text{mV}$ ;  $+530\text{mV}$ ;  $+750\text{mV}$ .

c)



d) A escala não é linear. e) O milivoltímetro indicaria tensão negativa para temperatura positiva e tensão positiva para temperatura negativa.

## Capítulo 8

(8.1) a)  $I = 20\text{mA}$  - b)  $V_i = 1\text{V}$  - c)  $R_i = 50\Omega$  - d)  $I_{cc} = 200\text{mA}$  - e)  $\eta = 90\%$  - f)  $V_s = 10 - 50.I$  - (8.2) - a)  $I_{CC1} = 2\text{A}$ ;  $I_{CC2} = 600\text{mA}$  - b)  $V_s = 22 - 25.I$  - c) O gerador equivalente tem um rendimento menor que o gerador 1, pois a sua tensão cai mais rapidamente com o aumento da corrente. Porém, o gerador equivalente é melhor que o gerador 2, pois as suas curvas características são quase paralelas, sendo que o gerador equivalente pode fornecer maior tensão e corrente. (8.3) - a)  $V = 4,22\text{V}$  - b)  $\eta = 93,78\%$  - c)  $V = 2,11\text{V}$  - d)  $\eta = 93,78\%$  - (8.4) - a) Na ordem, de 0 a 2A: 20V; 17,5V; 15V; 12,5V; 10V; 7,5V; 5V; 2,5V; 0V - b) Na ordem, de 0 a 2A: 0W; 4,375W; 7,5W; 9,375W; 10W; 9,375W; 7,5W; 4,375W; 0W - c)  $P_M = 10\text{W}$ ;  $I = 1\text{A}$ ;  $V_s = 10\text{V}$ ;  $R_L = 10\Omega$  - d)  $P_M = 10\text{W}$ ;  $R_L = 10\Omega$ ;  $\eta = 50\%$  - (8.5) - a)  $I = 250\text{mA}$ ;  $V_s = 23,75\text{V}$ ;  $\eta = 95\%$  - b)  $I_G = 5\text{A}$ ;  $R_i = 5\Omega$  - c)  $I_s = 250\text{mA}$ ;  $V_s = 23,75\text{V}$ ;  $\eta = 5\%$  - d) As correntes e tensões são iguais, porém o rendimento do gerador de tensão é muito maior que o do gerador de corrente. e)  $I_G$  tem de ser uma corrente elevada em relação à que é fornecida à carga. (8.6)  $R_i = 1,5\Omega$ ;  $I_G = 3\text{A}$ .

## Capítulo 9

(9.1)  $I_x = 116,66\text{mA}$  (para baixo);  $V_x = 23,33\text{V}$  (para cima) - (9.2)  $I_x = 116,66\text{mA}$  (para baixo);  $V_x = 23,33\text{V}$  (para cima) - (9.3)  $E_{Th} = 20,82\text{V}$ ;  $R_{Th} = 319,73\Omega$ ;  $R_{L1}$ :  $V_{L1} = 4,96$ ;  $I_{L1} = 49,60\text{mA}$ ;  $R_{L2}$ :  $V_{L2} = 12,70$ ;  $I_{L2} = 25,40\text{mA}$ ;  $R_{L3}$ :  $V_{L3} = 17,16$ ;  $I_{L3} = 11,44\text{mA}$  - (9.4)  $I_x = 116,66\text{mA}$  (para baixo);  $V_x = 23,33\text{V}$  (para cima) - (9.5)  $I_N = 11,88\text{mA}$ ;  $R_N = 2020\Omega$ ;  $R_P = 0\Omega$ :  $I_P = 11,88\text{mA}$ ;  $R_P = 600\Omega$ :  $I_P = 9,16\text{mA}$ ;  $R_P = 1,2\text{k}\Omega$ :  $I_P = 7,45\text{mA}$ ;  $R_P = 1,8\text{k}\Omega$ :  $I_P = 6,28\text{mA}$ ;  $R_P = 2,2\text{k}\Omega$ :  $I_P = 5,69\text{mA}$  - (9.6)  $I_1 = 276,10\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_1$ );  $I_2 = 232,96\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_3$ );  $I_3 = 509,06\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_4$ );  $V_1 = 6,07\text{V}$ ;  $V_2 = 5,13\text{V}$ ;  $V_3 = 10,95\text{V}$ ;  $V_4 = 23,93\text{V}$  - (9.7)  $I_1 = 23,92\text{mA}$  (de  $R_1$  para  $R_7$ );  $I_2 = 14,81\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_4$ );  $I_3 = 30,72\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_3$ );  $I_4 = 54,64\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_1$ );  $I_5 = 15,91\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_2$ );  $I_6 = 38,73\text{mA}$  (saindo do positivo de  $E_5$ );  $V_1 = 2,39\text{V}$ ;  $V_2 = 6,14\text{V}$ ;  $V_3 = 3,07\text{V}$ ;  $V_4 = 6,14\text{V}$ ;  $V_5 = 1,48\text{V}$ ;  $V_6 = 2,96\text{V}$ ;  $V_7 = 2,39\text{V}$ ;  $V_8 = 7,75\text{V}$ ;  $V_9 = 5,46\text{V}$ ;  $V_{10} = 3,18\text{V}$  - (9.8) As Leis de Kirchhoff comprovam a correção dos resultados em todas as malhas e nós dos circuitos dos exercícios 9.6 e 9.7. - (9.9) Exercício 9.6: Geradores:  $E_1, E_2, E_3, E_4$ ; Receptor Ativo: nenhum; Receptores Passivos:  $R_1, R_2, R_3, R_4$ ;  $P_G - P_A - P_P \equiv 0$ . Exercício 9.7: Geradores:  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ ; Receptor Ativo: nenhum; Receptores Passivos:  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}$ ;  $P_G - P_A - P_P \equiv 0$ .

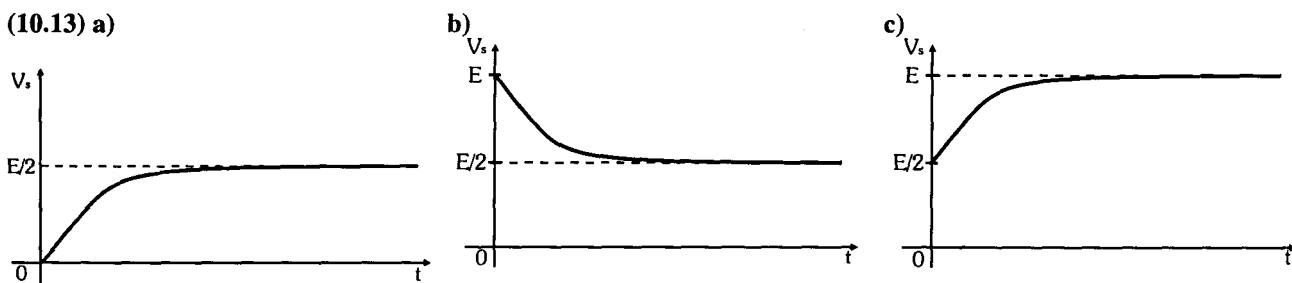
## Capítulo 10

(10.1)  $C = 100\text{nF}$  - (10.2)  $V = 500\text{V}$  - (10.3) - a)  $C = 8,9\text{pF}$  - b)  $C = 53,4\text{pF}$  - c)  $C = 17,8\text{pF}$  - d)  $C = 4,45\text{pF}$  - (10.4) - a)  $C = 0,47\mu\text{F} \pm 10\% / 250\text{V}$  - b)  $C = 47\text{nF} \pm 10\% / 250\text{V}$  - c)  $C = 47\text{nF} \pm 20\% / 50\text{V}$  - (10.5) - a)  $C_{eq} = 5,42\text{nF}$  - b)  $Q = 54,2\text{nC}$  - c)  $V_1 = 5,42\text{V}$ ;  $V_2 = 3,61\text{V}$ ;  $V_3 = 0,97\text{V}$  - (10.6) - a)  $C_{eq} = 82\mu\text{F}$  - b)  $Q = 984\mu\text{C}$  - c)  $Q_1 = 120\mu\text{C}$ ;  $Q_2 = 180\mu\text{C}$ ;  $Q_3 = 120\mu\text{C}$ ;  $Q_4 = 564\mu\text{C}$  - (10.7) Circuito d, pois a capacidade equivalente é maior. - (10.8) - a)  $C_A = 6\mu\text{F}$  - b)  $C_B = 18\mu\text{F}$  - c)  $C_{eq} = 7,2\mu\text{F}$  - d)  $Q = 432\mu\text{C}$  - e)  $Q_1 = 432\mu\text{C}$ ;  $V_1 = 36\text{V}$  - f)  $Q_2 = 288\mu\text{C}$ ;  $V_2 = 24\text{V}$  - (10.9) - a)  $C_{eq} = 1,33\mu\text{F}$  - b)  $Q = 7,98\mu\text{C}$  - c)  $Q_1 = 7,98\mu\text{C}$ ;  $Q_2 = 3,99\mu\text{C}$ ;  $Q_3 = 3,99\mu\text{C}$  - (10.10) - a)  $\tau = 1\text{s}$  - b) Na ordem, de 0 a 8,0s - para vc: 0V; 3,3V; 4,5V; 6,3V; 7,8V; 8,6V; 9,5V; 9,8V; 9,9V; 10,0V; 10,0V; na ordem, de 0 a 8,0s - para vr: 10,0V; 6,7V; 5,5V; 3,7V; 2,2V; 1,4V; 0,5V; 0,2V; 0,1V; 0V; 0V; na ordem, de 0 a 8,0s - para i: 100,0 $\mu\text{A}$ ; 67,0 $\mu\text{A}$ ; 54,9 $\mu\text{A}$ ; 36,8 $\mu\text{A}$ ; 22,3 $\mu\text{A}$ ; 13,5 $\mu\text{A}$ ; 5,0 $\mu\text{A}$ ; 1,8 $\mu\text{A}$ ; 0,7 $\mu\text{A}$ ; 0,2 $\mu\text{A}$ ; 0 $\mu\text{A}$  - d)  $t = 0$ : o capacitor encontra-se descarregado e comporta-se como um curto-círculo, ficando a tensão toda no resistor, com a máxima corrente.;  $t = \tau = 1\text{s}$ : o capacitor encontra-se com 63% de sua carga máxima, enquanto a tensão no resistor e a corrente no circuito caem 63% de seus valores máximos.;  $t = 5\tau = 5\text{s}$ : o capacitor encontra-se praticamente carregado, enquanto a tensão no resistor e a corrente no circuito são praticamente nulas. e)  $t = 0,69\text{s}$  - f) Os dois resultados devem ser próximos de  $t = 0,7\text{s}$ , embora o resultado obtido graficamente tenha menor precisão. (10.11) - a)  $\tau = 0,2\text{s}$  - b)  $t = 1\text{s}$  - c)  $V_{AB} = 11\text{V}$  - d)  $t = 0,14\text{s}$

## Capítulo 10 (continuação)

(10.12) - a)  $\tau = 0,47\text{ms}$  - b) Na ordem, de 0 a 3,0ms - para  $v_c$ : 5,0V; 3,3V; 2,6V; 1,7V; 0,9V; 0,6V; 0,3V; 0,1V; 0,1V; 0V; 0V; na ordem, de 0 a 3,0ms - para  $v_r$ : -5,0V; -3,3V; -2,6V; -1,7V; -0,9V; -0,6V; -0,3V; -0,1V; -0,1V; 0V; 0V; na ordem, de 0 a 3,0ms - para  $i$ : -500,0 $\mu\text{A}$ ; -326,7 $\mu\text{A}$ ; -264,1 $\mu\text{A}$ ; -172,6 $\mu\text{A}$ ; -91,1 $\mu\text{A}$ ; -59,6 $\mu\text{A}$ ; -25,4 $\mu\text{A}$ ; -10,9 $\mu\text{A}$ ; -7,1 $\mu\text{A}$ ; -2,4 $\mu\text{A}$ ; -0,8 $\mu\text{A}$  - d)  $t = 0$ : o capacitor encontra-se totalmente carregado, fornecendo corrente máxima ao circuito, de forma que a tensão no resistor passa a ter o valor máximo invertido.;  $t = \tau = 0,47\text{ms}$ : o capacitor já perdeu 63% de sua carga máxima, de forma que a tensão no resistor e a corrente no circuito caem 63% de seus valores máximos.;  $t = 5\tau = 2,35\text{ms}$ : o capacitor encontra-se praticamente descarregado, de forma que a tensão no resistor e a corrente no circuito são praticamente nulas. e)  $t = 0,32\text{ms}$  - f) Os dois resultados devem ser próximos de  $t = 0,32\text{ms}$ , embora o resultado obtido graficamente tenha menor precisão.

(10.13) a)



## Capítulo 11

(11.1) - a)  $L_{eq13} = 300\mu\text{H}$  - b)  $L_{eq12} = 300\mu\text{H}$  - c)  $L_{eq13} = 526\mu\text{H}$  - d)  $L_{eq12} = 74\mu\text{H}$  - (11.2) -  $L_{eq} = 52\mu\text{H}$

(11.3) - a) Após 5ms - b)  $I = 0,1\text{A}$  - (11.4) - a)  $i = 0,94\text{mA}$ ;  $v_L = 3,87\text{V}$ ;  $v_r = 1,13\text{V}$  - b)  $t = 63,03\mu\text{s}$

(11.5) - a)  $i = 0,60\text{A}$ ;  $v_L = 0\text{V}$ ;  $v_r = 12\text{V}$  - b)  $i = 0,60\text{A}$ ;  $v_L = -12\text{V}$ ;  $v_r = 12\text{V}$  - c)  $\tau = 0,5\text{s}$  - d)  $i = 0,22\text{A}$ ;  $v_L = -4,44\text{V}$ ;  $v_r = 4,44\text{V}$  - e) Após 2,5s - (11.6) - a) A corrente no indutor  $L_1$  começa crescendo rapidamente até que a sua variação se anule com a completa energização. Portanto, em  $L_2$  é induzida uma tensão positiva que é maior inicialmente, decrescendo até zero. No resistor, a corrente acompanha essa tensão induzida. b) Como a corrente em  $L_1$  permanece constante (variação nula), nenhuma tensão é induzida em  $L_2$ , não havendo corrente no resistor. c) A corrente no indutor  $L_1$  começa decrescendo rapidamente até que a sua variação se anule com a completa desenergização. Portanto, em  $L_2$  é induzida uma tensão contrária que é maior inicialmente, decrescendo até zero. No resistor, a corrente acompanha essa tensão induzida. d) Como a corrente em  $L_1$  é zero (variação nula), nenhuma tensão é induzida em  $L_2$ , não havendo corrente no resistor. (11.7) Valor comercial:  $R = 330\Omega$  -  $1/8\text{W}$ .

## Capítulo 12

(12.1) - a)  $\phi(t) = 20,7 \cdot \text{sen } 377t[\text{mWb}]$  - b)  $v(t) = 156 \cdot \cos 377t[\text{V}]$  - (12.2) - a)  $T_1 = 20\text{ms}$ ;  $f_1 = 50\text{Hz}$ ;  $\omega_1 = 314\text{rad/s}$ ;

$T_2 = 40\text{ms}$ ;  $f_2 = 25\text{Hz}$ ;  $\omega_2 = 157\text{rad/s}$ ;  $T_3 = 20\text{ms}$ ;  $f_3 = 50\text{Hz}$ ;  $\omega_3 = 314\text{rad/s}$  - b)  $V_{1P} = 20\text{V}$ ;  $V_{1PP} = 40\text{V}$ ;  $V_1 = 14,14\text{V}$ ;

$V_{2P} = 40\text{V}$ ;  $V_{2PP} = 80\text{V}$ ;  $V_2 = 28,28\text{V}$ ;  $I_{3P} = 10\text{mA}$ ;  $I_{3PP} = 20\text{mA}$ ;  $I_3 = 7,07\text{mA}$  - c)  $v_1(t) = 20 \cdot \cos 314t[\text{V}]$ ;

$v_2(t) = 40 \cdot \cos(157t + \pi)[\text{V}]$ ;  $i_3(t) = 10 \cdot \cos(314t - \pi/2)[\text{mA}]$  - e)  $v_1(t_1) = -16,17\text{V}$ ;  $v_1(t_2) = -16,20\text{V}$ ;  $v_2(t_1) = -12,38\text{V}$ ;

$v_2(t_2) = 12,32\text{V}$ ;  $i_3(t_1) = 5,89\text{mA}$ ;  $i_3(t_2) = -5,86\text{mA}$  - (12.3) - a)  $v_1(t) = 100 \cdot \cos(1571t + \pi/2)[\text{V}]$ ;

$v_2(t) = 80 \cdot \cos(1571t - \pi/4)[\text{V}]$ ;  $i_3(t) = 2 \cdot \cos 1571t[\text{A}]$  - c)  $\Delta\theta_{12} = 3\pi/4\text{rad}$  ou  $135^\circ$ ;  $\Delta\theta_{21} = -3\pi/4\text{rad}$  ou  $-135^\circ$ ;

$\phi_{13} = \pi/2\text{rad}$  ou  $90^\circ$ ;  $\phi_{23} = -\pi/4\text{rad}$  ou  $-45^\circ$ . (12.4) - a)  $\dot{V}_1 = 17,7 \angle 45^\circ[\text{V}]$  - b)  $i_2(t) = 2 \cdot \cos(200\pi t - \pi/3)[\text{A}]$

(12.5) - a)  $\dot{V}_A = 10,12 + j7,54 = 12,62 \angle 36,7^\circ[\text{V}]$  - b)  $\dot{V}_B = 8,25 - j3,25 = 8,87 \angle -21,5^\circ[\text{V}]$

c)  $\dot{V}_C = 2,12 - j0,46 = 2,17 \angle -12,2^\circ[\text{V}]$  - d)  $\dot{V}_D = -1,87 - j10,89 = 11 \angle -100^\circ[\text{V}]$

## Capítulo 13

- (13.1) - a)  $\varphi_1 = 45^\circ$  - b)  $\varphi_2 = -60^\circ$  - c)  $\varphi_3 = 58^\circ$  - d)  $\varphi_4 = -16,7^\circ$  - e)  $\varphi_5 = 78,7^\circ$  - f)  $\varphi_6 = 0^\circ$  - g)  $\varphi_7 = 90^\circ$  - h)  $\varphi_8 = -90^\circ$
- (13.2) - a)  $\dot{Z} = 25\angle -30^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 6\angle -113^\circ [A]$  - c)  $\dot{V} = 2,8\angle -30^\circ [V]$  - (13.3) - a)  $\dot{I} = 4,5\angle 34^\circ [A]$ ;  $\dot{I}_2 = 1,7\angle -23^\circ [A]$  - b)  $\dot{I}_1 = 2,1 + j3,2 = 3,8\angle 57^\circ [A]$  - c)  $\dot{V}_2 = 38\angle 12^\circ = 37 + j8[V]$ ;  $\dot{V}_3 = 27 + j20 = 34\angle 37^\circ [V]$
- d)  $\dot{V} = 54 + j96 = 110\angle 61^\circ [V]$  - (13.4) - a)  $\dot{Z}_{eq} = 6,97\angle 20,6^\circ [k\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 2,87\angle 39,4^\circ [mA]$  - c)  $\dot{V}_1 = 5,74\angle 69,4^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_2 = 11,48\angle -19,4^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_3 = 8,61\angle 109,4^\circ [V]$  - (13.5) - a)  $\dot{Z}_{eq} = 178,9\angle 33,4^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 0,61\angle -33,4^\circ [A]$
- c)  $\dot{I}_1 = 0,55\angle -60^\circ [A]$ ;  $\dot{I}_2 = 0,28\angle 30^\circ [A]$  - (13.6) - a)  $\dot{Z}_{eq} = 464\angle -6^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 86\angle 51^\circ [mA]$ ;  $\dot{V}_1 = 5,8\angle 122^\circ [V]$
- c)  $\dot{V}_3 = \dot{V}_2 = 39,2\angle 37^\circ [V]$  - d)  $\dot{I}_1 = 109\angle 89^\circ [mA]$ ;  $\dot{I}_2 = 68\angle -38^\circ [mA]$  - (13.7) - a)  $\dot{V}_1 = 30,6\angle 38^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_2 = 24,5\angle 88^\circ [V]$
- b)  $\dot{V} \equiv \dot{V}_1 + \dot{V}_2$  - (13.8) - a)  $\dot{I}_1 = 20,1\angle -29,2^\circ [mA]$ ;  $\dot{I}_2 = 10,1\angle 75,8^\circ [mA]$  - b)  $\dot{I} \equiv \dot{I}_1 + \dot{I}_2$  - (13.9) - a)  $\omega = 1000\pi \text{rad/s}$ ;  $f = 500\text{Hz}$ ;  $\theta_v = 0^\circ$ ;  $T = 2\text{ms}$  - b)  $V_{RP} = 40V$ ;  $V_{RPP} = 80V$ ;  $V_R = 28,3V$  - c)  $I_{RP} = 85\text{mA}$ ;  $I_{RPP} = 170\text{mA}$ ;  $I_R = 60\text{mA}$ ;  $i_R(t) = 85.\cos(1000\pi t)[\text{mA}]$  - d)  $\dot{V} = 28,3\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_R = 28,3\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{I}_R = 60\angle 0^\circ [\text{mA}]$  - f) A única alteração seria na expressão do valor instantâneo da corrente, ou seja,  $i_R(t) = 85.\cos(1000\pi t + \pi/3)[\text{mA}]$  - (13.10) - a)  $\omega = 377\text{rad/s}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $\theta_v = -\pi/4\text{rad}$  ou  $-45^\circ$ ;  $T = 16,7\text{ms}$  - b)  $\dot{Z}_{eq} = R_{eq} = 550\Omega$ ;  $\dot{V} = 110\angle -45^\circ [V]$ ;  $\dot{I} = 200\angle -45^\circ [\text{mA}]$
- c)  $\dot{V}_1 = 44\angle -45^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_2 = 66\angle -45^\circ [V]$  - (13.11) - a)  $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 6,2\angle 90^\circ [V]$  - b)  $\dot{I}_1 = 517\angle 90^\circ [\mu\text{A}]$ ;  $\dot{I}_2 = 912\angle 90^\circ [\mu\text{A}]$  - c)  $\dot{I} = 1,43\angle 90^\circ [\text{mA}]$  - (13.12) - a)  $\omega = 31,4\text{krad/s}$ ;  $f = 5\text{kHz}$ ;  $\theta_v = 0^\circ$ ;  $T = 200\mu\text{s}$  - b)  $X_L = 471\Omega$ ;  $V_{LP} = 50V$ ;  $V_{LPP} = 100V$ ;  $V_L = 35,4V$  - c)  $I_{LP} = 106\text{mA}$ ;  $I_{LPP} = 212\text{mA}$ ;  $I_L = 75\text{mA}$ ;  $i_L(t) = 106.\cos(31,4kt - \pi/2)[\text{mA}]$
- d)  $\dot{V} = 35,4\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_L = 35,4\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{I}_L = 75\angle -90^\circ [\text{mA}]$  - (13.13) - a)  $\omega = 377\text{rad/s}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $\theta_v = 60^\circ$ ;  $T = 16,7\text{ms}$
- b)  $X_C = 3901\Omega$ ;  $V_{CP} = 180V$ ;  $V_{CPP} = 360V$ ;  $V_C = 127V$  - c)  $I_{CP} = 46\text{mA}$ ;  $I_{CPP} = 92\text{mA}$ ;  $I_C = 33\text{mA}$ ;  $i_C(t) = 46.\cos(377t + 5\pi/6)[\text{mA}]$  - d)  $\dot{V} = 127\angle 60^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_C = 127\angle 60^\circ [V]$ ;  $\dot{I}_C = 33\angle 150^\circ [\text{mA}]$
- (13.14) - a)  $\dot{Z}_{eq} = j10054 = 10054\angle 90^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 20\angle -60^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_1 = 62,8\angle 30^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_2 = 138,2\angle 30^\circ [V]$
- (13.15) - a)  $\dot{Z}_{eq} = -j102 = 102\angle -90^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 196\angle 270^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_1 = 126\angle 270^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_2 = 70\angle 270^\circ [\text{mA}]$
- (13.16)  $L_1 = 13,8\text{mH}$ ;  $L_2 = 6,9\text{mH}$  - (13.17)  $\dot{Z}_{eq} = 2,8\angle -90^\circ [\Omega]$  - (13.18)  $L = 26,5\mu\text{H}$

## Capítulo 14

- (14.1) - a)  $\dot{Z} = 30 + j60 = 67,1\angle 63,4^\circ [\Omega]$ ;  $\dot{V} = 100\angle 63,4^\circ = 44,8 + j89,4[V]$ ;  $\dot{I} = 1,5\angle 0^\circ = 1,5[A]$  - b)  $\dot{V}_R = 45\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_L = 90\angle 90^\circ [V]$  - d)  $\dot{V} \equiv \dot{V}_R + j\dot{V}_L$  - (14.2) - a)  $\dot{Z} = 200 - j200 = 282,8\angle -45^\circ [\Omega]$ ;  $\dot{V} = 136,6 - j36,6 = 141,4\angle -15^\circ [V]$
- b)  $\dot{V}_R = 100\angle 30^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_C = 100\angle -60^\circ [V]$  - d) Porque a fase da corrente não é nula. (14.3) - a)  $\varphi = -30^\circ$
- b)  $\dot{Z} = 646\angle -30^\circ [\Omega]$ ;  $R = 560\Omega$ ;  $X_C = 323\Omega$  - c)  $f = 1,5\text{kHz}$  - d)  $\dot{V}_R = 104\angle 210^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_C = 60\angle 120^\circ [V]$
- (14.4) Circuito indutivo:  $X_L$  e  $Z$  aumentam. Portanto,  $\varphi$  aumenta,  $I$  e  $V_R$  diminuem e  $V_L$  aumenta e tende a V. Circuito capacitivo:  $X_C$  e  $Z$  diminuem. Portanto,  $\varphi$  diminui,  $I$  aumenta,  $V_C$  diminui e  $V_R$  aumenta e tende a V.
- (14.5) - a)  $\omega = 1000\pi \text{rad/s}$ ;  $f = 500\text{Hz}$ ;  $X_L = 314\Omega$ ;  $\dot{Z} = 600 + j314 = 677\angle 27,6^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 20,7\angle -27,6^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 12,4\angle -27,6^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_L = 6,5\angle 62,4^\circ [V]$  - c) dobro da freqüência:  $\dot{Z} = 600 + j628 = 869\angle 46,3^\circ [\Omega]$ ;  $\dot{I} = 16,1\angle -46,3^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 9,7\angle -46,3^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_L = 10,1\angle 43,7^\circ [V]$ ; metade da freqüência:  $\dot{Z} = 600 + j157 = 620\angle 14,7^\circ [\Omega]$ ;  $\dot{I} = 22,6\angle -14,7^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 13,6\angle -14,7^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_L = 3,5\angle 75,3^\circ [V]$  - (14.6)  $I = 2,1A$ ;  $V_R = 109V$ ;  $V_C = 63V$
- (14.7)  $L.C = 1/\omega^2$  (14.8) - a)  $V = 20V$  - b)  $I = 2A$ ;  $\varphi = 53^\circ$  - c)  $X_L = 8\Omega$ ;  $Z = 10\Omega$  - (14.10) - a)  $\varphi = 41,8^\circ$  - (14.11) - b)  $v(t) = 15.\cos(52,2kt)[V]$ ;  $v_C(t) = 7,5.\cos(52,2kt - \pi/3)[V]$  - c)  $\dot{V} = 10,6\angle 0^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_C = 5,3\angle -60^\circ [V]$ ;  $\dot{V}_R = 9,2\angle 30^\circ [V]$ ;  $v_R(t) = 8,8.\cos(52,2kt + \pi/6)[V]$  - d)  $X_C = 408\Omega$ ;  $\dot{I} = 13\angle 30^\circ [\text{mA}]$ ;  $\varphi = -30^\circ$ ;  $i(t) = 18,4.\cos(52,2kt + \pi/6)[\text{mA}]$
- e)  $R = 708\Omega$  - f) I e  $\varphi$  aumentam, pois  $Z$  diminui; o circuito torna-se cada vez mais capacitivo. (14.12) - a)  $\dot{Z} = 24\angle 53^\circ = 14,4 + j19,2 [\Omega]$ ;  $\dot{I} = 4,2\angle -53^\circ = 2,5 - j3,4 [A]$  - b)  $\dot{I}_R = 2,5\angle 0^\circ [A]$ ;  $\dot{I}_L = 3,3\angle -90^\circ [A]$  - d)  $\dot{I} = \dot{I}_R - j\dot{I}_L$ , pois V tem fase nula. (14.13) - a)  $\dot{I}_R = 1,4\angle -45^\circ [A]$ ;  $\dot{I}_C = 1,4\angle 45^\circ [A]$  - b)  $\dot{V} = 141\angle -45^\circ [V]$ ;  $\dot{Z} = 70\angle -45^\circ [\Omega]$
- (14.14) - a)  $I = 3,7\text{mA}$  - b)  $\varphi = 31^\circ$  - c)  $V = 15V$  - d)  $Z = 4054\Omega$ ;  $X_L = 7895\Omega$ ;  $L = 47\mu\text{H}$  - (14.15)  $\dot{Z} = 10,5\angle 61,4^\circ [\Omega]$ ;  $\varphi = 61,4^\circ$ ;  $\dot{I} = 10,5\angle -196,4^\circ [A]$  - (14.16)  $V = 6,6V$ ;  $R = 8,2\Omega$ ;  $Z = 7\Omega$ ;  $\varphi = -32^\circ$ ;  $I = 0,94A$

---

## Capítulo 14 (continuação)

(14.17) - a)  $R_s = 1\text{k}\Omega$ ;  $X_{Cs} = 10\text{k}\Omega$  - b)  $R_p = 907\Omega$ ;  $X_{Lp} = 60\Omega$  - (14.18)  $\dot{Z} = 5 + j9,2 = 10,5\angle 61,5^\circ [\Omega]$ ;  $\phi = 61,5^\circ$ ;

$\dot{I} = 10,5\angle -196,5^\circ [\text{A}]$  - (14.19)  $Z = 7\Omega$ ;  $\phi = -31,7^\circ$ ;  $I = 0,94\text{A}$  - (14.20)  $X_{Lp} = X_{Ls}$ ;  $R_p = 10 \cdot X_{Ls}$

(14.21)  $X_{Cs} = X_{Cp}$ ;  $R_s = X_{Cp} / 10$  - (14.22) Em 400Hz,  $\dot{Z}_{eq} \approx 8\Omega$ ; o *woofer* e o *squawker* reproduzem com média intensidade e o *tweeter* não reproduz. Em 800Hz,  $\dot{Z}_{eq} \approx 8\Omega$ ; o *woofer* não reproduz, o *squawker* reproduz com grande intensidade e o *tweeter* não reproduz. Em 2850Hz,  $\dot{Z}_{eq} \approx 8\Omega$ ; o *woofer* não reproduz, o *squawker* reproduz com grande intensidade e o *tweeter* não reproduz. Em 5700Hz,  $\dot{Z}_{eq} \approx 8\Omega$ ; o *woofer* não reproduz, o *squawker* e o *tweeter* reproduzem com média intensidade. Em 11400Hz,  $\dot{Z}_{eq} \approx 8\Omega$ ; o *woofer* e o *squawker* não reproduzem e o *tweeter* reproduz com grande intensidade.

---

## Capítulo 15

(15.1) - a)  $I = 0,3\text{A}$ ;  $\phi = 0^\circ$ ;  $P = 22,5\text{W}$  - b)  $P_1 = 9\text{W}$ ;  $P_2 = 13,5\text{W}$  - c) Sim,  $P = P_1 + P_2$ . (15.2) - a)  $I = 50\text{mA}$ ;  $P = 0,5\text{W}$  b)  $P_1 = P_2 = P_3 = 0,167\text{W}$  - c) Sim,  $P = 3 \cdot P_1$ . (15.3) - a)  $I = 0,4\text{A}$ ;  $\phi = 90^\circ$ ;  $P_Q = -48\text{VAR}$  - b)  $P_{Q1} = -16\text{VAR}$ ;  $P_{Q2} = -32\text{VAR}$ ; Sim,  $P_Q = P_{Q1} + P_{Q2}$ . c)  $P = 0\text{W}$  - (15.4) - a)  $I_L = 1,2\text{A}$ ;  $I_C = 0,4\text{A}$  - b)  $P_{Q1} = -144\text{VAR}$ ;  $P_{Q2} = 48\text{VAR}$ ;  $P_Q = -96\text{VAR}$  c) Reduz, pois, enquanto a reatância capacitativa avança a corrente, a indutiva a atrasa. (15.5) - a)  $Z = 583\Omega$ ;  $\phi = 59^\circ$ ;  $FP = 0,515$  b)  $I = 206\text{mA}$ ;  $P_s = 24,7\text{VA}$  - c)  $P = 12,7\text{W}$ ;  $P_Q = -21,2\text{VAR}$  - (15.6) - a)  $R = 8,64\Omega$ ;  $C = 409\mu\text{F}$  - b)  $P_s = 1500\text{VA}$  c)  $P_Q = 900,6\text{VAR}$  - (15.7) - a)  $\dot{Z}_{eq} = 1083\angle -45^\circ [\Omega]$ ;  $\dot{I} = 0,2\angle 45^\circ [\text{A}]$ ;  $P_s = 44\text{VA}$ ;  $P = 31\text{W}$ ;  $P_Q = 31\text{VAR}$  - b)  $P_{R1} = 13,2\text{W}$ ;  $P_{R2} = 19,8\text{W}$ ;  $P_{QL1} = -23\text{VAR}$ ;  $P_{QL2} = -55,8\text{VAR}$ ;  $P_{QC1} = 4\text{VAR}$ ;  $P_{QC2} = 108\text{VAR}$  - c)  $P_T = 33\text{W}$ ;  $P_{QT} = 33,2\text{VAR}$  (15.8) - a)  $P = 60,5\text{W}$ ;  $P_Q = -403,3\text{VAR}$ ;  $P_s = 407,8\text{VA}$  - b)  $FP = 0,15$  - c)  $I = 3,7\text{A}$  - (15.9) - a)  $P = 60,5\text{W}$ ;  $P_Q = 53,3\text{VAR}$ ;  $P_s = 80,6\text{VA}$  - b)  $FP = 0,66$  - c)  $I = 1,4\text{A}$  - d) A potência ativa permaneceu igual, mas a reativa e a aparente diminuíram, pois o FP aumentou. Por fim, a corrente diminuiu, mantendo o mesmo consumo de potência ativa. (15.10) - a)  $\dot{Z} = 66,9 + j25,4 = 71,6\angle 20,8^\circ [\Omega]$  - b)  $P_s = 22,4\text{VA}$ ;  $P = 20,9\text{W}$ ;  $P_Q = -8\text{VAR}$  - c)  $FP = 0,93$  d)  $P_{QL1} = -3,14\text{VAR}$ ;  $P_{QL2} = -25,09\text{VAR}$ ;  $P_{QC1} = 12,54\text{VAR}$ ;  $P_{QC2} = 26,91\text{VAR}$ ;  $P_{QL3} = -11,53\text{VAR}$ ;  $P_{QL4} = -7,69\text{VAR}$ ;  $P_{R1} = 9,41\text{W}$ ;  $P_{R2} = 11,53\text{W}$  - e)  $P = 20,94\text{W}$ ; resultado igual ao obtido no item b. - f)  $P_Q = -8\text{VAR}$ ; resultado igual ao obtido no item b. (15.11) - a)  $I = 30\text{A}$ ;  $\phi = 33^\circ$  - b)  $P_s = 3810\text{VA}$ ;  $P_Q = -2075\text{VAR}$  - c)  $Z = 4,2\Omega$ ;  $R = 3,5\Omega$ ;  $X_L = 2,3\Omega$  (15.12) - a)  $P_s = 4\text{kVA}$ ;  $I = 18,2\text{A}$ ;  $\phi = 53,1^\circ$  - b)  $C = 112\mu\text{F}$  - c)  $P = 2,7\text{kVA}$ ,  $I = 12,3\text{A}$  (15.13) - a)  $P_T = 12\text{kW}$ ;  $P_{QT} = -15,2\text{kVAR}$ ;  $P_{ST} = 19,4\text{kVA}$ ;  $FP_T = 0,62$  - b)  $P_T' = 16\text{kW}$ ;  $P_{QT}' = -12,2\text{kVAR}$ ;  $P_{ST}' = 20,1\text{kVA}$ ;  $FP_T' = 0,80$  - c)  $C = 344\mu\text{F}$  - (15.14)  $C = 730\mu\text{F}$  - (15.15)  $I = 39,5\text{A}$ ;  $FP = 0,86$  - (15.16) A corrente aumentaria para 54,5A, desarmando o disjuntor, que teria de ser trocado, pois foi mal dimensionado. Além disso, o fator de potência voltaria a ser igual ao da máquina, isto é,  $FP = 0,62$ , ficando a instalação sujeita à multa pelo baixo fator de potência. (15.17) - a)  $\dot{I}_1 = 114\angle -45,4^\circ [\text{A}]$ ;  $\dot{I}_2 = 29,3\angle -51,1^\circ [\text{A}]$ ;  $\dot{I} = 143,2\angle -46,6^\circ [\text{A}]$  - b)  $FP_I = 0,70$ ;  $FP_{II} = 0,63$ ;  $FP_T = 0,69$  - c)  $C = 524\mu\text{F}$  - d)  $\dot{I} = 116,3\angle -31,8^\circ [\text{A}]$  - (15.18)  $I = 71,3\text{A}$ ;  $FP_T = 0,98$  - (15.19) O fator de potência praticamente atinge a unidade.

---

## Capítulo 16

(16.1) - a)  $Z = 2765\Omega$ ;  $I = 36,2\text{mA}$ ;  $\phi = 90^\circ$  - b)  $Z = 2765\Omega$ ;  $I = 36,2\text{mA}$ ;  $\phi = 90^\circ$  - c) Ideal - (16.2) - a)  $Z = 628,3\Omega$ ;  $I = 159,2\text{mA}$ ;  $\phi = 90^\circ$  - b)  $Z = 659,4\Omega$ ;  $I = 151,7\text{mA}$ ;  $\phi = 72,3^\circ$  - c)  $Z = 661,4\Omega$ ;  $I = 151,2\text{mA}$ ;  $\phi = 72,2^\circ$  - d) Quase ideal - e) Quase real, pois em 4MHz a capacidade exerce forte influência;  $Z = 9201\Omega$ ;  $I = 10,9\text{mA}$ ;  $\phi = 84^\circ$  (16.3) - a)  $Q = 4,2$ ; ruim - b)  $Q = 29,5$ ; ótimo - c)  $Q_T = 6$ ; volta a ser ruim. (16.4) - a)  $r_s = 45,9\Omega$ ;  $Q = 68,4$  b)  $r_s = 54,6\Omega$ ;  $Q = 115$  - (16.5)  $r_s = 2,5\Omega$ ;  $Q = 2,5$  - (16.6)  $P = 8,76\text{mW}$  - (16.7) - a)  $c = 25,6\text{mm}$ ;  $L_c = 2,5\text{m}$  b)  $r_{cc} = 0,53\Omega$ ;  $L = 2,5\text{mH}$  - c)  $r_s = 0,53\Omega$ ;  $Q = 296$  - (16.8) - a)  $Z = 26,5\text{M}\Omega$ ;  $I = 14,34\mu\text{A}$ ;  $\phi = -90^\circ$  - b)  $Z = 26,5\text{M}\Omega$ ;  $I = 14,34\mu\text{A}$ ;  $\phi = -90^\circ$  - c) Ideal - (16.9)  $\tan \delta = 0,265$ ;  $I_r = 3,8\mu\text{A}$ ;  $P = 1,44\text{mW}$  - (16.10) - a)  $r_p = 2,7\text{M}\Omega$  - b)  $Z = 13,6\text{k}\Omega$ ;  $\phi = -89,7^\circ$  - c) Não. d) Com frequência muito elevada, pois  $X_{Ls}$  aumenta e  $X_{Cp}$  diminui. A resistência  $r_p$  interfere menos por ter um valor muito elevado. (16.11)  $r_p = 4949\Omega$ ;  $\tan \delta = 0,0684$  - (16.12) Não, pois  $r_p$  é muito baixo. O capacitor está com alta corrente de fuga. (16.13) - a)  $L_x = 250\mu\text{H}$  - b)  $r_{sx} = 28\Omega$  - (16.14)  $L_x = 138\text{mH}$  - (16.15)  $Z_x = 4447\Omega$ ;  $\phi_x = -76,3^\circ$  - (16.16) - a)  $C_x = 47\text{nF}$  - b)  $r_{px} = 10\text{M}\Omega$  - (16.17)  $C_x = 1\mu\text{F}$  - (16.18)  $Z_x = 220\Omega$ ;  $\phi_x = -61^\circ$ .

---

## Capítulo 17

- (17.1) - a)  $\dot{I} = 2,5 \angle 60^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V} = 50 \angle 0^\circ [\text{V}]$ ;  $P = 62,5 \text{mW}$ ; A impedância interna do gerador não exerce influência na carga, pois  $Z_1 \gg Z_G$ . b)  $\dot{I} = 83,3 \angle -30^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V} = 0,83 \angle 15^\circ [\text{V}]$ ;  $P = 48,9 \text{mW}$ ; A impedância interna do gerador é a maior responsável pela limitação da corrente, já que  $Z_2 \ll Z_G$ . c)  $\dot{I} = 48,1 \angle 0^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V} = 28,9 \angle -30^\circ [\text{V}]$ ;  $P = 1,2 \text{W}$ ; Esta é a condição de máxima transferência de potência ativa. (17.2) - a)  $\dot{Z}_G = 519,6 + j3000 = 3045 \angle 80,2^\circ [\Omega]$   
b)  $\dot{Z} = 519,6 - j3000 = 3045 \angle -80,2^\circ [\Omega]$  - c)  $P_{\max} = 1,2 \text{W}$  - (17.3) - a)  $\dot{Z} = 25 + j43,3 = 50 \angle 60^\circ [\Omega]$  - b)  $P = 4 \mu\text{W}$   
(17.4) - a)  $V_s = V_E = 5 \text{V}$ ;  $P_E = 41,7 \text{mW}$ ;  $P_s = 3,125 \text{W}$ ;  $A_p = 74,94$  - b)  $A_v(\text{dB}) = 0 \text{dB}$ ;  $V_E(\text{dBu}) = 16,2 \text{dBu}$ ;  $P_E(\text{dBm}) = 16,2 \text{dBm}$ ;  $V_s(\text{dBu}) = 16,2 \text{dBu}$ ;  $P_s(\text{dBm}) = 34,9 \text{dBm}$ ;  $A_p(\text{dB}) = 18,7 \text{dB}$  - c)  $V_s = 3,54 \text{V}$ ;  $P_E = 41,7 \text{mW}$ ;  $P_s = 1,57 \text{W}$ ;  $A_p = 37,65$  - d)  $A_v(\text{dB}) = -3 \text{dB}$ ;  $V_E(\text{dBu}) = 16,2 \text{dBu}$ ;  $P_E(\text{dBm}) = 16,2 \text{dBm}$ ;  $V_s(\text{dBu}) = 13,2 \text{dBu}$ ;  $P_s(\text{dBm}) = 32 \text{dBm}$ ;  $A_p(\text{dB}) = 15,8 \text{dB}$  - (17.5)  $A_v = X_L / \sqrt{R^2 + X_L^2}$ ;  $\theta_A = \arctg(R / X_L)$   
(17.6) - a)  $A_v = 0,01$ ;  $A_v = 0,1$ ;  $A_v = 0,707$ ;  $A_v = 1$  - b)  $A_v(\text{dB}) = -40 \text{dB}$ ;  $A_v(\text{dB}) = -20 \text{dB}$ ;  $A_v(\text{dB}) = -3 \text{dB}$ ;  $A_v(\text{dB}) = 0 \text{dB}$  - c)  $\theta_A = 89,4^\circ$ ;  $\theta_A = 84,3^\circ$ ;  $\theta_A = 45^\circ$ ;  $\theta_A = 5,7^\circ$  - d)  $f_c = 10 \text{kHz}$  - e)  $-20 \text{dB/década}$ .

## Capítulo 18

- (18.1) - a)  $\dot{Z} = 1000 - j653 = 1194 \angle -33^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 33,5 \angle 33^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 33,5 \angle 33^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_L = 33,7 \angle 123^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_C = 55,5 \angle -57^\circ [\text{V}]$  - c) Capacitivo, pois  $\varphi$  é negativo ( $X_C > X_L$  e  $V_C > V_L$ ). (18.2) - a)  $\dot{Z} = 1000 + j403 = 1078 \angle 22^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 37,1 \angle -22^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 37,1 \angle -22^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_L = 55,9 \angle 68^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_C = 41,0 \angle -112^\circ [\text{V}]$  - c) Indutivo, pois  $\varphi$  é positivo ( $X_L > X_C$  e  $V_L > V_C$ ). (18.3) Valor estimado:  $f_0 \approx 1000 \text{Hz}$ . (18.4) - a)  $\dot{Z} = 220 - j507 = 552,7 \angle -66,5^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 108,6 \angle 111,5^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 23,9 \angle 111,5^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_L = 67,5 \angle 201,5^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_C = 122,6 \angle 21,5^\circ [\text{V}]$  c)  $\dot{Z} = 220 + j360 = 421,9 \angle 58,6^\circ [\Omega]$  - d)  $\dot{I} = 142,2 \angle -13,6^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 31,3 \angle -13,6^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_L = 147,5 \angle 76,4^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_C = 96,3 \angle -103,6^\circ [\text{V}]$  - e)  $\dot{Z} = 220 + j0 = 220 \angle 0^\circ [\Omega]$  - f)  $\dot{I} = 272,7 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{V}_R = 60 \angle 45^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_L = 228,5 \angle 135^\circ [\text{V}]$ ;  $\dot{V}_C = 228,5 \angle -45^\circ [\text{V}]$  - (18.5) - a)  $\dot{Z} = 2125 \angle 15^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 47,1 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_R = 45,5 \angle 60^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_L = 39,8 \angle -30^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_C = 27,6 \angle 150^\circ [\text{mA}]$  - c) Indutivo, pois  $\varphi$  é positivo ( $X_C > X_L$  e  $I_L > I_C$ ). (18.6) - a)  $\dot{Z} = 2090 \angle -18^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 47,8 \angle 78^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_R = 45,5 \angle 60^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_L = 26,5 \angle -30^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_C = 41,5 \angle 150^\circ [\text{mA}]$  - c) Capacitivo, pois  $\varphi$  é negativo ( $X_L > X_C$  e  $I_C > I_L$ ). (18.7) Valor estimado:  $f_0 \approx 25 \text{kHz}$ . (18.8) - a)  $\dot{Z} = 169 \angle 39,8^\circ [\Omega]$  - b)  $\dot{I} = 355 \angle 5,2^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_R = 272,7 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_L = 476,2 \angle -45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_C = 249,0 \angle 135^\circ [\text{mA}]$  - c)  $\dot{Z} = 160 \angle -43,2^\circ [\Omega]$  - d)  $\dot{I} = 375 \angle 88,2^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_R = 272,7 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_L = 239,0 \angle -45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_C = 495,9 \angle 135^\circ [\text{mA}]$  - e)  $\dot{Z} = 220 \angle 0^\circ [\Omega]$  - f)  $\dot{I} = 272,7 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_R = 272,7 \angle 45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_L = 344,8 \angle -45^\circ [\text{mA}]$ ;  $\dot{I}_C = 344,8 \angle 135^\circ [\text{mA}]$  - (18.9) - a)  $f_0 = 1027 \text{Hz}$ ; próximo ao valor estimado. b)  $\rho_0 = X_{L0} = X_{C0} = 1291 \Omega$  - (18.10) - a)  $f_0 = 24 \text{kHz}$ ; próximo ao valor estimado. b)  $\rho_0 = X_{L0} = X_{C0} = 3015 \Omega$  (18.11) - a)  $f_0 = 711,8 \text{kHz}$ ;  $\rho_0 = 894,4 \Omega$  - b)  $X_{L0} = X_{C0} = 894,4 \Omega$ ;  $R_{s0} = Z_0 = 15,5 \Omega$ ;  $\varphi_0 = 0^\circ$ ;  $Q_T = 57,7$  - c)  $I_0 = 0,65 \text{A}$ ;  $V_{L0} = V_{C0} = 581,4 \text{V}$  - d)  $V_{L0} = V_{C0} = 577 \text{V}$  - e)  $B = 12,3 \text{kHz}$ ;  $f_i = 706,3 \text{kHz}$ ;  $f_s = 718,6 \text{kHz}$  - f)  $P_0 = 6,55 \text{W}$  (18.12) - a)  $X_{L1} = 887,6 \Omega$ ;  $X_{C1} = 901,3 \Omega$ ;  $R_{s1} = 15,5 \Omega$  - b)  $Z_i = 20,7 \Omega$ ;  $I_i = 0,48 \text{A}$ ;  $V_{L1} = 426$ ;  $V_{C1} = 432,6 \text{V}$  c)  $P_i = 3,57 \text{W}$  - d)  $I_i/I_0 = 0,738$ ;  $Z_i/Z_0 = 1,34$ ;  $P_i/P_0 = 0,55$  - (18.13) - a)  $C = 12 \text{pF}$  - b)  $\rho_0 = 4082 \Omega$  - c)  $Q_T = 131,7$  d)  $B = 24,7 \text{kHz}$ ;  $f_i = 3,239 \text{MHz}$ ;  $f_s = 3,264 \text{MHz}$  - (18.14) - a)  $C = 220 \text{nF}$  - b)  $f_0 = 98 \text{kHz}$  (tolerância de  $-2\%$ ) c)  $Q_T = 0,2$ ;  $B = 490 \text{kHz}$ ;  $f_i = -122,5 \text{kHz}$ ;  $f_s = 367,5 \text{kHz}$  - d) O  $Q_T$  é muito baixo, pois  $\rho_0$  é muito baixo. O resultado é uma banda muito grande e maior que a freqüência  $f_0$ . A solução é aumentar  $L$  e reduzir  $C$  de modo a manter a mesma freqüência de ressonância, mas aumentando  $\rho_0$ . (18.15) - a)  $f_0 = 4 \text{MHz}$ ;  $\rho_0 = 329 \Omega$  - b)  $R_{s0} = 25 \Omega$ ;  $Q_T = 13,2$  c)  $f_0 = 4 \text{MHz}$  - d)  $Z_0 = 4333 \Omega$  - e)  $r_{p0} = 4271 \Omega$  - (18.16) - a)  $Q'T = 13,2$  (desprezando o efeito de  $R_G$ );  $B = 303 \text{kHz}$ ;  $f_i = 3,86 \text{MHz}$ ;  $f_s = 4,17 \text{MHz}$  - b)  $I_0 = I_i = I_s = 333 \mu\text{A}$  - c)  $V_{s0} = 1,4 \text{V}$ ;  $V_{si} = V_{ss} = 1 \text{V}$  - (18.17) - a)  $Q'T \approx 0$ ; a banda passante tende ao infinito (não há seletividade por tensão). b)  $I_0 = 4,6 \text{mA}$ ;  $I_i = I_s = 6,5 \text{mA}$  - c)  $V_{s0} = V_{si} = V_{ss} \approx 20 \text{V}$  (18.18) - a)  $Q'T = 1,6$ ;  $B = 2,5 \text{MHz}$ ;  $f_i = 2,875 \text{MHz}$ ;  $f_s = 5,375 \text{MHz}$  - b)  $I_0 = 4 \text{mA}$ ;  $I_i = I_s = 5,7 \text{mA}$  - c)  $V_{s0} = 17,3 \text{V}$ ;  $V_{si} = 2,7 \text{V}$ ;  $V_{ss} = 3,2 \text{V}$  - (18.19) - a)  $f_0 = 15,9 \text{MHz}$  - b)  $f_0 = 15,9 \text{MHz}$  - c)  $Q_T = 20,2$ ;  $B = 787 \text{kHz}$ ;  $f_i = 15,5 \text{MHz}$ ;  $f_s = 16,3 \text{MHz}$  - (18.20) - a)  $f_{0\min} = 441,4 \text{kHz}$ ;  $f_{0\max} = 459,4 \text{kHz}$  - b)  $C_T = 19,4 \text{pF}$  - c)  $Z_0 = 11352 \Omega$  - d)  $Q_T = 15,9$  (desprezando o efeito de  $R_G$ );  $B = 28,6 \text{kHz}$  - (18.21) O exercício, tal como foi proposto, não tem solução, pois a capacidade equivalente é sempre menor que  $470 \text{pF}$ . As soluções surgem alterando o circuito: aumentando o valor da indutância; associando outro capacitor em paralelo com o de  $470 \text{pF}$ ; substituindo o capacitor de  $470 \text{pF}$  por outro de maior valor. (18.22) Projeto livre. (18.23) - a)  $C_{T\min} = 5,79 \text{pF}$ ;  $C_{T\max} = 36,2$  - b)  $f_{0\min} = 529 \text{kHz}$ ;  $f_{0\max} = 1323 \text{kHz}$

---

## Capítulo 19

- (19.1)  $f_c = 482\text{Hz}$  - (19.2) - a)  $f_c = 600,6\text{Hz}$  - b)  $R = 6745\Omega$  (valor comercial:  $R = 6k8\Omega$ ) - (19.3) - a)  $L = 8,5\text{mH}$   
b)  $f_c = 524\text{Hz}$  - (19.4)  $k = 4$ ;  $L' = 34\text{mH}$ ;  $r_s = 48\Omega$  - (19.5) - a)  $f_c = 28,5\text{kHz}$  - b)  $f_c = 35,9\text{kHz}$  - c)  $R = 16k\Omega$   
(19.6)  $f_c = 796\text{Hz}$  - (19.7)  $f_{c\min} = 3,1\text{kHz}$ ;  $f_{c\max} = 5,8\text{kHz}$  - (19.8)  $f_0 = 670\text{kHz}$ ;  $f_c = 1038\text{kHz}$  - (19.9)  $f_0 = 876\text{kHz}$ ;  
 $f_c = 1358\text{kHz}$  - (19.10)  $f_c = 4025\text{Hz}$  - (19.11) - a)  $f_c = 3201\text{Hz}$  - b)  $R = -12\Omega$  (impossível) - c) A freqüência de corte diminui principalmente por causa da impedância do *tweeter*, pois ela sobrecarrega o filtro. Esta sobrecarga é tanta que torna impossível elevar a freqüência de corte até o valor ideal. Neste caso, a solução é alterar o valor do indutor.  
(19.12)  $C = 2,5\mu\text{F}$  - (19.13) - a)  $f_c = 3,4\text{MHz}$  - b)  $f_c = 2,9\text{MHz}$  - c)  $R = 6,2\text{k}\Omega$  - (19.14)  $f_0 = 6\text{MHz}$ ;  $f_c = 3,9\text{MHz}$   
(19.15)  $f_0 = 1\text{kHz}$ ;  $f_c = 650\text{Hz}$  - (19.16)  $f_1 = 300\text{Hz}$ ;  $f_2 = 2,4\text{kHz}$ . Em  $f_1$ :  $X_{L1} = 8\Omega$ ;  $X_{L2} = 1\Omega$ ;  $X_{C1} = 8\Omega$ ;  
 $X_{C2} = 64\Omega$ . Em  $f_2$ :  $X_{L1} = 63\Omega$ ;  $X_{L2} = 8\Omega$ ;  $X_{C1} = 1\Omega$ ;  $X_{C2} = 8\Omega$ .  $Z_i = Z_s = 8\Omega$  (puramente resistivas). O amplificador deve ter impedância de saída de  $8\Omega$ . (19.17) - a)  $\tau = 220\mu\text{s}$  - b)  $f_{\max} = 227\text{Hz}$  - c)  $V_{RP} = 10\text{V}$   
(19.18) Exemplo: adotando  $C = 10\text{nF}$ , obtém-se  $R = 500\Omega$  - (19.19) A carga do capacitor é mais rápida que a descarga, pois o diodo põe  $R_2$  em paralelo com  $R_1$ . Em  $R_2$  só aparecem os pulsos positivos. (19.20) Condição de projeto:  $\tau \leq 4\mu\text{s}$  (referente ao maior semiperíodo, que é  $T_2$ ). Exemplo: adotando  $C = 10\text{nF}$ , obtém-se  $R = 400\Omega$ . (19.21) Condição de projeto:  $\tau \leq 50\text{ns}$ . Exemplo: adotando  $C = 100\text{pF}$ , obtém-se  $R = 500\Omega$ . (19.22)  $f_{\max} = 12,6\text{kHz}$  - (19.23) - a)  $\tau = 4,7\text{ms}$   
b)  $f_{\min} = 1064\text{Hz}$  - (19.24) Exemplo: adotando  $C = 1\text{nF}$ , obtém-se  $R = 20\text{k}\Omega$ . (19.25) Condição de projeto:  $\tau \geq 83,3\mu\text{s}$ . Exemplo: adotando  $C = 2,2\text{nF}$ , obtém-se  $R = 38\text{k}\Omega$ . (19.26)  $f_{\min} = 33,3\text{kHz}$  - (19.27)  $f_{\min} = 1,5\text{kHz}$ . Portanto: a) o sinal não tem o aspecto de uma onda triangular linear, mas a sua amplitude é maior; b) o sinal tem o aspecto de uma onda triangular quase linear e a sua amplitude é maior que a anterior; c) o sinal é praticamente uma onda triangular linear, mas a sua amplitude é muito pequena.
- 

## Capítulo 20

- (20.1)  $\dot{V}_{F1} = 127\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 127\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 127\angle 120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L12} = 220\angle 30^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L23} = 220\angle -90^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L31} = 220\angle 150^\circ[\text{V}]$  - (20.2) -  $\dot{V}_{F1} = \dot{V}_{L12} = 127\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = \dot{V}_{L23} = 127\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = \dot{V}_{L31} = 127\angle 120^\circ[\text{V}]$   
(20.3) -  $\dot{V}_{F1} = 127\angle 45^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 127\angle -75^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 127\angle 165^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L12} = 220\angle 75^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L23} = 220\angle -45^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L31} = 220\angle 195^\circ[\text{V}]$  - (20.4) -  $\dot{V}_{F1} = \dot{V}_{L12} = 127\angle 45^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = \dot{V}_{L23} = 127\angle -75^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = \dot{V}_{L31} = 127\angle 165^\circ[\text{V}]$   
(20.5) -  $\dot{V}_{F1} = 220\angle -30^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 220\angle -150^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 220\angle 90^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L12} = 380\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L23} = 380\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L31} = 380\angle 120^\circ[\text{V}]$  - (20.6)  $\dot{V}_{F1} = \dot{V}_{L12} = 220\angle -30^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = \dot{V}_{L23} = 220\angle -150^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = \dot{V}_{L31} = 220\angle 90^\circ[\text{V}]$   
(20.7)  $\dot{V}_{F1} = 220\angle -60^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 220\angle -180^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 220\angle 60^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L12} = 380\angle -30^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L23} = 380\angle -150^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L31} = 380\angle 90^\circ[\text{V}]$  - (20.8)  $\dot{V}_{F1} = \dot{V}_{L12} = 220\angle -60^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = \dot{V}_{L23} = 220\angle -180^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = \dot{V}_{L31} = 220\angle 60^\circ[\text{V}]$   
(20.9)  $V_L = 127$ ;  $I_L = 22\text{A}$  - (20.10) Para operar em 380V, o motor deve estar na configuração estrela.  $Z = 22\Omega$   
(20.11) Para operar em 220V o motor deve estar na configuração triângulo.  $I_F = 10\text{A}$  - (20.12)  $\dot{V}_{F1} = \dot{V}_{L12} = 220\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = \dot{V}_{L23} = 220\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = \dot{V}_{L31} = 220\angle 120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{I}_{L1} = 14,7\angle -90^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L2} = 14,7\angle -210^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L3} = 14,7\angle 30^\circ[\text{A}]$  - (20.13) Considerando:  $\dot{V}_{F1} = 127\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 127\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 127\angle 120^\circ[\text{V}]$ , obtém-se:  $\dot{V}_{L12} = 220\angle 30^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L23} = 220\angle -90^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{L31} = 220\angle 150^\circ[\text{V}]$  e  $\dot{I}_{L1} = 10,6\angle -30^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L2} = 10,6\angle -180^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L3} = 10,6\angle 165^\circ[\text{A}]$  e  $\dot{I}_N = 24,4\angle -165^\circ[\text{A}]$  - (20.14) Considerando:  $\dot{V}_{F1} = 380\angle 0^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F2} = 380\angle -120^\circ[\text{V}]$ ;  $\dot{V}_{F3} = 380\angle 120^\circ[\text{V}]$ , obtém-se:  $\dot{I}_{F1} = 27,1\angle -40^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{F2} = 27,1\angle -150^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{F3} = 27,1\angle 180^\circ[\text{A}]$  e  $\dot{I}_{L1} = 53,7\angle 1,7^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L2} = 19,7\angle -75^\circ[\text{A}]$ ;  $\dot{I}_{L3} = 61,3\angle 163,5^\circ[\text{A}]$  - (20.15)  $P_T = 2850\text{W}$ ;  $P_{QT} = -2850\text{VAR}$ ;  $P_{ST} = 4031\text{VA}$ ;  $F_P T = 0,71$   
(20.16)  $P_T = 42,5\text{kW}$ ;  $P_{QT} = -37,8\text{kVAR}$ ;  $P_{ST} = 56,9\text{kVA}$ ;  $I_{LT} = 258,6\text{A}$ ;  $F_P T = 0,75$  - (20.17) - a)  $P_T = 120\text{kW}$ ;  $P_{QT} = -96,2\text{kVAR}$ ;  $P_{ST} = 153,8\text{kVA}$  - b)  $F_P T = 0,78$  - c)  $I_{LT} = 404,7\text{A}$  - (20.18)  $I_L = 2,93\text{A}$ ;  $P_T = 644,5\text{W}$   
(20.19) A corrente de linha cai para  $I_L = 2,54\text{A}$  - (20.20) A corrente de linha aumenta para  $I_L = 5,08\text{A}$   
(20.21)  $P_T = 99\text{kW}$ ;  $P_{QT} = -76,8\text{kVAR}$ ;  $P_{ST} = 125,3\text{kVA}$ ;  $F_P T = 0,79$ ;  $I_{LT} = 329,7\text{A}$ .
-

# Referências Bibliográficas

## *Livros de Eletricidade*

- Aiub, J. E., Filoni, E. - Eletrônica. - São Paulo: Editora Érica, 1992.
- Albuquerque, R. O. - Análise de Circuitos em Corrente Contínua. - São Paulo: Editora Érica, 1987.
- Albuquerque, R. O. - Análise de Circuitos em Corrente Alternada. - São Paulo: Editora Érica, 1989 – 10<sup>a</sup> Edição.
- Albuquerque, R. O. - Circuitos em Corrente Alternada – Estude Use. - São Paulo: Editora Érica, 1997 – 4<sup>a</sup> Edição.
- Capuano, F. G.; Marino, M. A. M. - Laboratório de Eletricidade e Eletrônica. - São Paulo: Editora Érica, 1988 – 16<sup>a</sup> Edição.
- Cipelli, M.; Markus, O. - Eletricidade - Circuitos em Corrente Contínua – Ensino Modular. São Paulo: Editora Érica, 1999 – 2<sup>a</sup> Edição.
- Cruz, E. C. A.; Choueri Júnior, S.; Lourenço, A. C. - Circuitos em Corrente Contínua – Estude Use. - São Paulo: Editora Érica, 1996 – 4<sup>a</sup> Edição.
- Gomes, A. T. G. - Telecomunicações - Transmissão e Recepção. - São Paulo: Editora Érica, 1998 – 14<sup>a</sup> Edição.
- Gozzi, G. G. M. - Circuitos Magnéticos – Estude Use. - São Paulo: Editora Érica, 1996.
- Gussow, M. - Eletricidade Básica. - São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.
- Markus, O. - Eletricidade – Circuitos em Corrente Alternada – Ensino Modular. - São Paulo: Editora Érica, 2000.
- Markus, O. - Sistemas Analógicos – Circuitos com Diodos e Transistores – Ensino Modular. São Paulo: Editora Érica, 2000.
- Martins, N. - Introdução à Teoria da Eletricidade e do Magnetismo. - São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1973.
- Moretto, V. P. - Eletricidade. - São Paulo: Editora Ática, 1978.
- Orsini, L.Q. - Circuitos Elétricos. - São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1975 – 5<sup>a</sup> Edição.
- Pruslin, Z.; Smirnova, M. - Radio Engineering and Electronics. - Moscou: Mir Publishers, 1971.
- Siemens – Components. Technical Descriptions and Characteristics for Students. - Munique: Siemens, 1986.
- Soares Neto, V. - Telecomunicações - Redes de Alta Velocidade – Cabeamento Estruturado. São Paulo: Editora Érica, 1999.

# CIRCUITOS ELÉTRICOS

**Corrente Contínua e  
Corrente Alternada**

**Teoria e Exercícios**

Este livro envolve os principais conceitos de eletricidade e métodos de análise de circuitos elétricos passivos, isto é, implementados a partir de resistores, indutores e capacitores, e operando em C.C. e C.A.

Os capítulos são estruturados de forma que os seus tópicos e exercícios propostos correlatos facilitem o planejamento do processo ensino-aprendizagem.

Foi elaborado para atender a diversos cursos de engenharia e técnicos da área elétrica que adotam um plano de ensino estruturado.

**Publicações Érica, Clareza e Objetividade.**



**EDITORA ÉRICA LTDA.**

Rua São Gil, 159 • Tatuapé  
CEP: 03401-030 • São Paulo • SP  
Fone: (11) 295-3066 • Fax: (11) 217-4060  
*Home Page: [www.erica.com.br](http://www.erica.com.br)*

ISBN: 85-7194-768-6



9 788571 947689

**Invista em você.**  
  
**Visite uma livraria.**