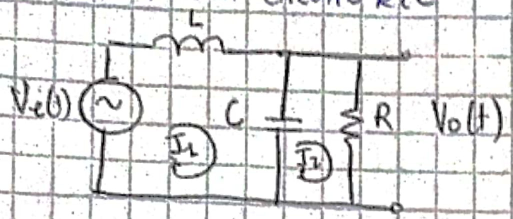
Demostración Circuito RLC



$V_o(t) = V_R(t)$

$$V_i(t) = V_L(t) + V_C(t) \quad ; \quad V_C(t) = V_R(t)$$

$$= L \cdot \frac{dI_L(t)}{dt} + V_C(t)$$

Teniendo en cuenta que la corriente del inductor se divide en los otros dos componentes:

$$I_L(t) = I_C(t) + I_R(t)$$

Entonces: $V_i(t) = L \cdot \dfrac{d\left(I_C(t) + I_R(t)\right)}{dt} + V_C(t)$

Teniendo en cuenta leyes de corrientes:

$$I_C(t) = C\,\frac{dV_C(t)}{dt} \quad ; \quad I_R(t) = \frac{V_R(t)}{V_R}$$

Y reemplazando: $V_i(t) = L \cdot \dfrac{d\left(C \cdot dV_C(t)/dt + V_R(t)/R\right)}{dt} + V_C(t)$

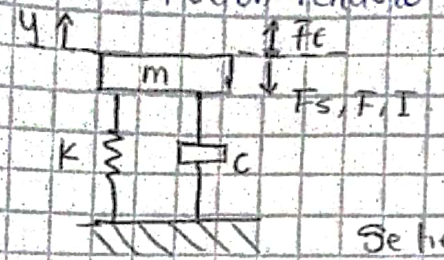
Resolviendo: $V_i(t) = LC\,\dfrac{d^2V_C(t)}{dt} + \dfrac{L}{R}\,\dfrac{dV_R(t)}{dt} + V_C(t)$; $V_C(t) = V_R(t)$ se reemplaza

Aplicando Laplace: $V_i(S) = V_R(s) \cdot LCS^2 + V_R(s)\,\dfrac{L}{R}\,s + V_R(s)$

Y la función de transferencia queda:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \qquad H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Demostración Péndulo



Planteamos una sumatoria de fuerzas para el sistema:

$$F_E(t) = F_S(t) + F_F(t) + F_I(t)$$

Se tienen en cuenta los siguientes aspectos de un sistema masa-resorte con amortiguación:

$F_E(t) \rightarrow$ Fuerza aplicada a la masa (m)

$F_S(t) \rightarrow$ Fuerza inducida por el resorte $= K \cdot y(t)$

$F_F(t) \rightarrow$ Fuerza de fricción inducida por el amortiguador $= c \cdot \dfrac{dy(t)}{dt}$

$F_I(t) \rightarrow$ Fuerza de inercia por aceleración de la masa $= m \cdot \dfrac{d^2y(t)}{dt}$

Volviendo a la ecuación original, entonces:

$$F_E(t) = Ky(t) + c\frac{dy(t)}{dt} + m\frac{d^2y(t)}{dt} = m\frac{d^2y(t)}{dt} + c\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t)$$

Transformando laplace:

$$F_E(s) = Y(s)\,ms^2 + Y(s) \cdot cs + Y(s) \cdot K = Y(s)\,[ms^2 + cs + K)$$

Entonces la función de transferencia $Y(s)/F_E(s)$ es:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \quad \text{ó} \quad H(s) = \frac{1/m}{s^2 + c/m \cdot s + K/m}$$

Primera Parte = Lazo Abierto

Sistema masa-resorte:

→ Subamortiguado.

Tomando la función de transferencia del sistema masa-resorte en su forma no canónica, hallamos los valores necesarios para que el sistema sea subamortiguado, tomando en cuenta que

ξ = factor de amortiguamiento $0 < \xi < 1$: SLIT subamortiguado

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$m = a_2$
$c = a_1$
$k = a_0$

Para hallar

W_n = frecuencia natural no amortiguada
W_d = frecuencia natural amortiguada
T_p = tiempo pico
T_s = Tiempo de establecimiento
k = constante.

Tenemos en cuenta que:

$$k = \frac{1}{a_0}, \quad W_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \qquad W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$T_p = \frac{\pi}{W_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad T_s = \frac{3}{\xi W_n}$$

Entonces, si tomamos:

$m = a_2 = 4$
$c = a_1 = 2$
$k = a_0 = 1$

$$\xi = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 4}} = 0.5 \rightarrow 0 < \xi < 1 \; ; \; k = \frac{1}{1} = 1$$

$$W_n = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 \; ; \; W_d = 0.5\sqrt{1 - 0.5^2} = 0.4330$$

$$T_p = \frac{\pi}{W_d} = \frac{\pi}{0.433} = 7.2554 \, , \; T_s = \frac{3}{(0.5)(0.43)} = 13.8508$$

RLC

→ Subamortiguado:

Haciendo la comparación con la función de transferencia del sistema masa-resorte:

$$G(S) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Se tiene que: $LC = m = 4$ Despejando: $L = 40H$ Entonces $G(s)$ es:

$\frac{1}{R} = C = 2$ $C = 100mF$

$K = 1 = 1$ $R = 20\Omega$

$$G(S) = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}$$

Con esto es posible encontrar los valores ω_n, ω_d, t_p, t_s, ξ:

$$\xi = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 4}} = 0.5 \rightarrow \text{Subamortiguado} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$$

$$\omega_d = 0.5\sqrt{1 - 0.5^2} = 0.4330 \quad T_p = \frac{\pi}{0.433} \quad T_s = \frac{3}{(0.5)(0.43)} = 13.85.$$

Sistema masa-resorte:

→ Sobreamortiguado:

Para que un sistema sea sobreamortiguado su factor de amortiguamiento debe ser mayor a 1, por eso se toman los valores de:

$m = 1$
$C = 4$
$k = 1$

Por lo tanto, la ecuación: $\xi = \frac{4}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 2$

Teniendo este dato, es posible calcular las frecuencias y tiempos:

$$k = \frac{1}{1} = 1 \quad \omega_d = 1\sqrt{4-1} \approx 1.732 \quad T_s = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

$$T_p = \frac{\pi}{1\sqrt{4-1}} \approx 1.8137$$

RLC:

→ Sobreamortiguado:

Haciendo la comparación con la función de transferencia del sistema masa-resorte, encontramos los valores del sistema RLC.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Entonces $CL = m = 1$ Despejando: $L = 10H$ Función de Transferencia

$\frac{L}{R} = c = 4$ $R = 2.5\Omega$

$C = 100mF$ $G(s) = \frac{1}{1s^2 + 4s + 1}$

$k = 1 = 1$

Por lo tanto, las frecuencias y los tiempos, teniendo en cuenta las formulas son:

$k = \frac{1}{1} = 1$ $W_d = 1\sqrt{4-1} \approx 1.732$ $T_s = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$ $W_n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ $T_p = \frac{\pi}{1\sqrt{4-1}} \approx 1.8137$

Sistema masa-resorte

→ Amortiguamiento crítico

Para que un sistema tenga amortiguamiento crítico su factor de amortiguamiento debe ser igual a 1. Se toman los siguientes valores teniendo en cuenta esta condición

$m = a_2 = 1$ Por lo tanto, $\xi = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 1$

$c = a_1 = 2$

$k = a_0 = 1$

Teniendo este valor, entonces: $W_n \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ $W_d = 1\sqrt{1-1} = 0$ $T_p = \frac{\pi}{0\sqrt{1-1}}$ = indefinido

$T_s = \frac{3}{1} = 3$ En este sistema la W_d es cero ya que el sistema no exhibe oscilaciones, resultando en una respuesta donde el sistema retorna a su posición de equilibrio sin oscilaciones debido al amortiguamiento crítico que disipa la energía del sistema sin generación de oscilaciones posteriores

RLC

→ Amortiguamiento Crítico:

Si hacemos la comparación con el sistema masa-resorte podemos encontrar los valores del RLC, siendo:

$CL = m = L$ Despejando $L = 10H$ Por lo tanto,

$\frac{L}{R} = c = 2$ $C = 100mF$

$R = 5\Omega$ $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$

$k = 1 = 1$

Encontramos las frecuencias naturales y los tiempos de pico máximo y establecimiento

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 1 \qquad W_n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \qquad W_d = 1\sqrt{1-1} = 0 \qquad T_s = \frac{3}{1} = 3 \qquad T_p = \frac{\pi}{0} = \text{indefinido}$$

Segunda Parte: Lazo Cerrado

Para encontrar la función de transferencia en un sistema lazo cerrado se usa la siguiente ecuación:

$$H_{lc}(s) = \frac{H(s)}{1 + A(s)H(s)}$$

siendo $H(s)$ la función de transferencia en lazo abierto, $A(s)$ valor que se toma como 1, es la función de transferencia de la retroalimentación

la función $H_{lc}(s)$ está dada por:

→ Sistema masa-resorte ⇒ $H_{lc}(s) = \dfrac{\dfrac{1}{ms^2+cs+K}}{1 + \dfrac{1}{ms^2+cs+K}} = \dfrac{\dfrac{1}{ms^2+cs+K}}{\dfrac{ms^2+cs+K+1}{ms^2+cs+K}}$

$$= \frac{1}{ms^2+cs+K+1}$$

→ sistema RLC ⇒ $H_{lc}(s) = \dfrac{\dfrac{1}{LCs^2+L/R\,s+1}}{1 + \dfrac{1}{LCs^2+\frac{L}{R}s+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\cancel{LCs^2+L/R\,s+1}}}{\dfrac{LCs^2+L/R\,s+1+1}{\cancel{LCs^2+\frac{L}{R}s+1}}}$

$$H_{lc}(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 2}$$