Modulación

Se puede hallar la transformada de Fourier de la señal modulada de la siguiente forma:

$$Y(\omega) = F\{y(t)\} = F\left\{\left(1+\frac{m(t)}{A_c}\right)c(t)\right\} = F\{c(t)\} + \frac{1}{A_c}F\{m(t)c(t)\}$$

Usando las tablas de Fourier:

$$C(\omega) = F\{c(t)\} = F\{A_c\cos(2\pi F_c t)\} = A_c F\left\{\frac{e^{j2\pi F_c t} + e^{-j2\pi F_c t}}{2}\right\}$$

$$F\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$$

Entonces:

$$C(\omega) = A_c\pi\left(\delta(\omega - 2\pi F_c) + \delta(\omega + 2\pi F_c)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_c}F\{m(t)c(t)\} = \frac{1}{A_c}F\{m(t)A_c\cos(2\pi F_c t)\} = F\{m(t)\cos(2\pi F_c t)\}$$

$$= F\left\{\frac{m(t)e^{j2\pi F_c t} + m(t)e^{-j2\pi F_c t}}{2}\right\}$$

Teniendo en cuenta: $F\{x(t)e^{\mp j\omega_0 t}\} = X(\omega \pm \omega_0)$

Entonces: $\frac{1}{A_c}F\{m(t)c(t)\} = \frac{1}{2}\left(M(\omega - 2\pi F_c) + M(\omega + 2\pi F_c)\right)$

Entonces, el espectro de la señal modulada es:

$$Y(\omega) = A_c\pi\left(\delta(\omega - 2\pi F_c) + \delta(\omega + 2\pi F_c)\right) + \frac{1}{2}\left(M(\omega - 2\pi F_c) + M(\omega + 2\pi F_c)\right)$$

Demodulación

Teniendo en cuenta que la señal modulada se expresa como $Y(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$, primero se debe multiplicar la $Y(t)$ con la portadora:

$$Y_d(t) = Y(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$
$$Y_d(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$ y de esta forma:

$$Y_d(t) = \frac{1}{2}Am(t) + \frac{1}{2}Am(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

La salida del filtro pasa bajos se obtiene mediante la convolución

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_d(\tau)\, h(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Am(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Am(\tau)\cos(4\pi f_0 \tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau)$$

Dada la simetría de $\cos(4\pi f_0 t)$, la expresión se reduce a:

$$s(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Am(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

Suponiendo que $h(t)$ es una función adecuada y que el término relacionado con la componente de frecuencia doble $\cos(4\pi f_0 t)$ se anula. También suponiendo que $Am(t)$ tiene una transformada de fourier $Am(\omega)$.

Entonces $S(\omega) = \frac{1}{2}Am(\omega)\cdot H(\omega)$. Donde $H(\omega)$ es la función de transferencia del filtro.

Aplicando transformada inversa a $S(\omega)$, es decir, $F^{-1}\left\{\frac{1}{2}Am(\omega)H(\omega)\right\}$

Obtenemos $\frac{1}{2}Am(t)$

Para obtener $m(t)$ se multiplica el valor obtenido con el pasa bajos con una constante $\frac{2}{A}$ de esta forma

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}Am(t)\cdot\frac{\cancel{2}}{A} = \frac{1}{A}Am(t) = \boxed{m(t)}$$

La constante A se cancela con la amplitud de la señal original, dejándonos con la señal de información (mensaje) $m(t)$.