Aplicações com Pilha

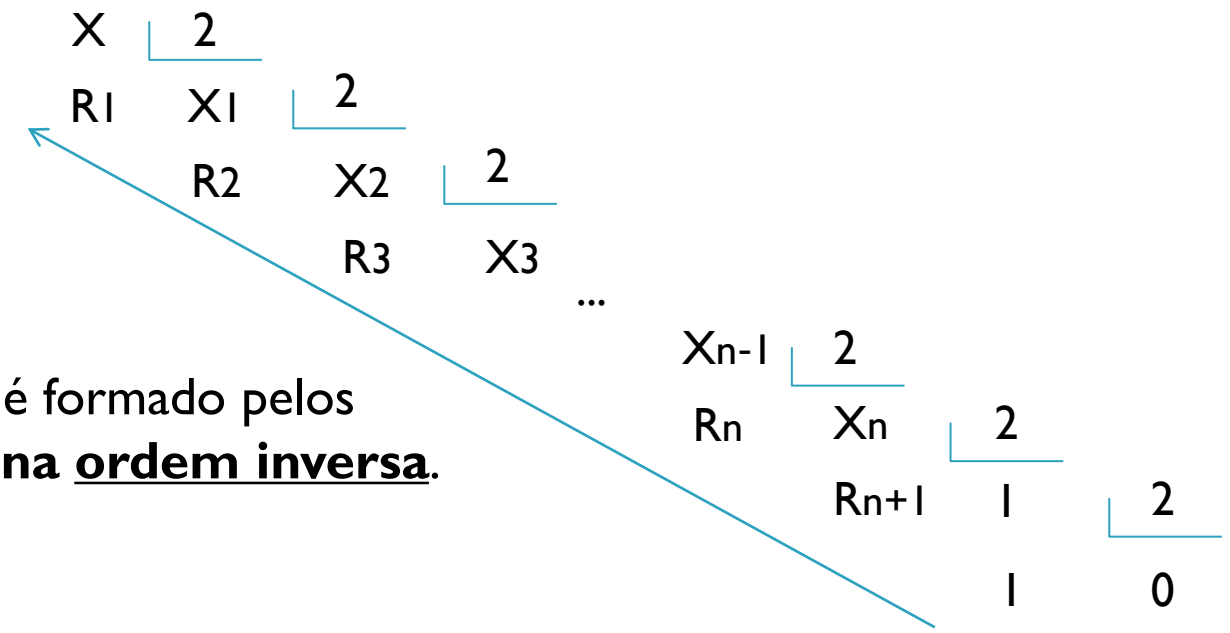
Algoritmos e Estrutura de Dados 1
Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins

1ª Aplicação Clássica de Pilha

- **Conversão decimal para binário:**

Seja ***X*** um número na base 10 (**decimal**), como obter sua representação na base 2 (**binário**)?

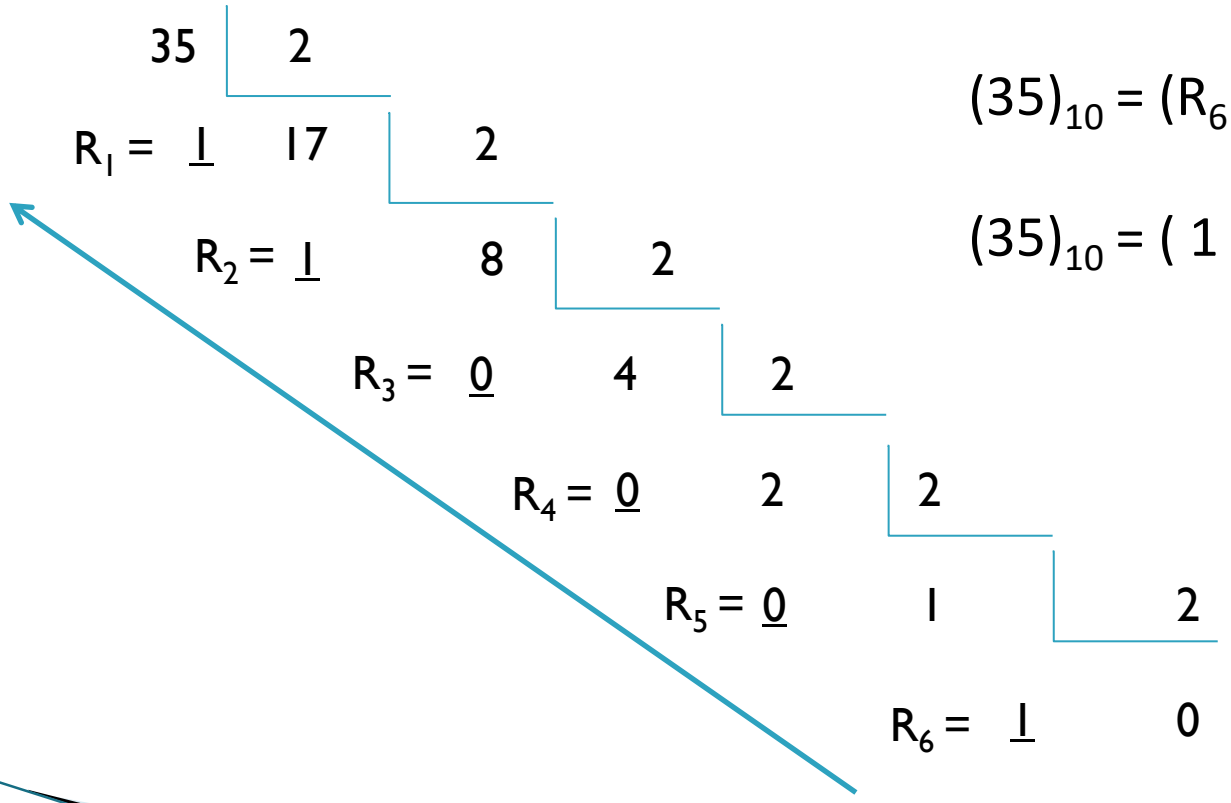
R: Através da aplicação de sucessivas divisões por 2.



Binário é formado pelos **restos na <u>ordem inversa</u>**.

Conversão de Decimal para Binário

- **Exemplo:** $(35)_{10} = (?)_2$



$(35)_{10} = (R_6\, R_5\, R_4\, R_3\, R_2\, R_1)_2$

$(35)_{10} = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)_2$

Conversão de Decimal para Binário

- Como a ordem dos restos posicionados é **inversa à ordem em que os mesmos são obtidos**, a estrutura Pilha pode ser utilizado para resolver

- **Operação** ***converte_dec_bin()*** : recebe um número decimal e imprime o valor correspondente na base binária

2ª Aplicação Clássica de Pilha

- **Validação de agrupamento de escopos:**
  - **Definição de escopo:**
    - **Expressões matemáticas:** parênteses, chaves ou colchetes.
    - **Programas:** *begin-end* (Pascal) ou chaves (C e Java).
  - **Validação de escopo em expressões matemáticas:**
    - Uma expressão matemática que utiliza agrupamento de escopos será valida se:

      a) **Nº de escopos abertos = Nº de escopos fechados.**

      b) **Qualquer fechamento deve ser precedido pelo respectivo escopo de abertura.**

Validação de Escopo

- **Exemplos expressões válidas:**

  6 – (A + (B–2))/(C/(D+5))
  (A+(B+(C–(D*2))))

- **Exemplos expressões inválidas:**

(D–E))	Não obedece ***a*** e ***b***
) A/D (+E	Não obedece ***b***
(A+B*(C–D)	Não obedece ***a***

Validação de Escopo

- **Conceitos e definições**:
  - **Profundidade do agrupamento**: nº de escopos abertos que não foram fechados.
  - **Diferença de escopo**: nº escopos abertos subtraído do nº de escopos fechados.
  - Ambos podem ser calculados em qualquer ponto da expressão (**da esquerda para direita**).
- Se um **ÚNICO delimitador** for usado, pode-se desenvolver um **algoritmo baseado nestes conceitos** para checar validade.
  - **Forma + simples**: uso de uma variável contadora.

Validação de Escopo

- **Uma expressão matemática é válida se:**

a) No final da expressão, **a diferença de escopo for zero.**

b) A qualquer ponto da expressão, **a diferença de escopo for positiva.**

- **Aplicação nos exemplos anteriores:**

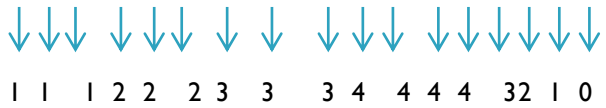
a) 6 - (A + (B – 2)) / (C / (D + 5))

↓↓↓↓ ↓↓↓ ↓↓↓↓↓↓↓ ↓↓↓ ↓↓ ↓↓↓ **Válida**

0 0 1 1 1 2 2 2 2 1 0 0 1 1 1 2 2 2 2 1 0

Validação de Escopo

b) (A + (B + (C - (D * 2))))



Válida

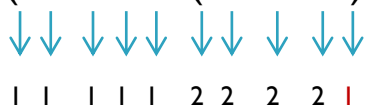
c) (D – E))

Inválida

d)) A / D (+ E

Inválida

e) (A + B * (C – D)



Inválida

Validação de Escopo

- Para **2 ou mais tipos de delimitadores** essa **estratégia de validação NÃO funciona.**
  - **Ex:** (,) , { , } , [e] .
  - É necessário que cada escopo aberto por um delimitador, seja fechado por um delimitador do mesmo tipo.
    - **Ex:** (por); { por }; [por].
    - **Solução:** um contador de diferença para cada tipo de delimitador.
  - Deve-se garantir que a seqüência de fechamento dos delimitadores **seja inversa** a seqüência de abertura.
    - **Contra-exemplo: {[A/2}]** é uma expressão inválida.

Validação de Escopo

- Uma **Pilha** pode ser usada para **validar expressões com vários delimitadores**:
  - **Expressão é lida** da esquerda para direita (1 caractere por vez)
  - Cada **iniciador de escopo é empilhado.**
  - Para cada **finalizador de escopo** encontrado, deve-se **desempilhar o iniciador no topo da pilha para comparação**:
    - **SE** tipo iniciador = tipo finalizador, **OK.**
    - Caso contrário, **expressão INVÁLIDA.**

      (pilha vazia **OU** tipo iniciador ≠ tipo finalizador)
- Ao final da expressão, **a pilha deve estar vazia.**

Validação de Escopo

- **Exemplo:**

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (C – 2)] – 3 } + 4

↑ ↑↑

Empilha

T → {

2 + { [

↑

Empilha

T → [
 {

2 + { [F * 4]

↑↑↑ ↑

Desempilha

T → {

2 + { [F * 4] + [

↑ ↑

Empilha

T → [
 {

Validação de Escopo

- **Exemplo (continuação):**

2 + { [F * 4] + [(

↑

Empilha

T → | (| [| { |

2 + { [F * 4] + [(A – B)

↑↑ ↑↑

Desempilha

T → | [| { |

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (

↑ ↑

Empilha

T → | (| [| { |

Validação de Escopo

- **Exemplo (continuação):**

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (C – 2)

Desempilha

T → [{

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (C – 2)]

Desempilha

T → {

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (C – 2)] – 3 }

Desempilha

T →

2 + { [F * 4] + [(A – B) / (C – 2)] – 3 } + 4

Fim

T →

Pilha é vazia, então **expressão é válida**

Validação de Escopo

- **Operação** ***valida_escopo()*** : verifica se uma expressão matemática é válida do ponto de vista de seus delimitadores de escopo
  - **Entrada:** a string que representa a expressão
  - **Saída:** "1" se a expressão é válida e "0" caso contrário

Validação de Escopo

- **Operação** ***valida_escopo()*** : verifica se uma expressão matemática é válida do ponto de vista de seus delimitadores de escopo
  - **Entrada:** a string que representa a expressão
    - Precisa passar o tamanho da string?
  - **Saída:** "1" se a expressão é válida e "0" caso contrário

Validação de Escopo

- **Operação** ***valida_escopo()*** : verifica se uma expressão matemática é válida do ponto de vista de seus delimitadores de escopo
  - **Entrada:** a string que representa a expressão
    - Precisa passar o tamanho da string? **NÃO (usar o '\0')**
  - **Saída:** "1" se a expressão é válida e "0" caso contrário

Formas de Representação de Expressões Matemáticas

- ∃ 3 tipos de notação para expressões:
  - **Infixa**: operador entre os operandos.
    - **Ex**: A+B
  - **Pré-fixa**: operador precede os operandos.
    - **Ex**: +AB
  - **Pós-fixa**: operador após os operandos.
    - **Ex**: AB+

3ª Aplicação Clássica de Pilha

- **Conversão de notação infixa para pós-fixa:**
  - **Processo manual:**

    Ex: A ^ B * C - D + E / F / (G-H)

    1. Colocar parênteses representando as precedências

       ((((A^B)*C)-D)+((E/F)/(G-H)))

    2. Fazer a conversão dos parênteses + internos (4º nível)

       ((((**AB^**)*C)-D)+((**EF/**)/(**GH-**)))

    3. Fazer a conversão dos parênteses do próximo nível (3º nível)

       ((((**(AB^)C***)-D)+((**EF/**)(**GH-**)**/**))

Conversão da Notação Infixa para Pós-Fixa

- **Processo manual (continuação):**

4. Fazer a conversão dos parênteses do 2º nível

(((**AB^)C*)D-**)+((EF/)(GH-)/))

5. Fazer a conversão dos parênteses do 1º nível

(**(((AB^)C*)D-)((EF/)(GH-)/)+**)

6. Tirar os parênteses

AB^C*D-EF/GH-/+

Conversão da Notação Infixa para Pré-Fixa

- Conversão manual de **infixa para pré-fixa** é feita de forma **SIMILAR**:

Exemplo:

A^B*C-D+E/F/(G-H)

1. Colocar parênteses indicando precedências.
   ((((A^B)*C)-D)+((E/F)/(G-H)))
2. Fazer a conversão nível a nível.
   (+(-(*(^AB)C)D)(/(/EF)(-GH)))
3. Tirar os parênteses.
   +-*^ABCD//EF-GH

Conversão da Notação Infixa para Pós-Fixa e Pré-Fixa

- Notações pré-fixa e pós-fixa **NÃO SÃO imagens refletivas**

EXEMPLOS		
INFIXA	**PRÉ-FIXA**	**PÓS-FIXA**
A*(B-C)	*A-BC	ABC-*
(A-B)/(C+D)	/-AB+CD	AB-CD+/
A+B/(C*D^E)	+A/B*C^DE	ABCDE^*/+

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Notação infixa pré-manipulada:**
  - Colocação **manual** de parênteses.
    - Expressão infixa deve possuir parênteses para determinar a precedência de todas as operações
  - A conversão para a notação pós-fixa pode ser feita a partir da conversão dos parênteses mais internos até chegar no parêntese mais externo
- Um algoritmo que usa **pilha** pode ser elaborado para esse problema

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 1:** Colocar os parênteses manualmente conforme as precedências das operações e inicializar a pilha

- **Passo 2:** Varrer a expressão da esquerda para direita e para cada símbolo **s** lido:
  - SE **'('** ENTÃO **ignorar**
  - SE **operando** ENTÃO **imprimir ou copiar** para uma estrutura de saída
  - SE **operador** ENTÃO colocar na pilha (**empilhar**)
  - SE **')'** ENTÃO **desempilhar** o operador no topo da pilha **e imprimi-lo** (ou copiá-lo para a saída)

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

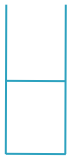
  Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)

Início



((A - (B * C)) + D)

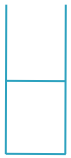
T →

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)

Início



T →

((A - (B * C)) + D)

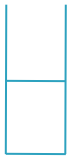
((A - (B * C)) + D)

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)

Início



T →

((A - (B * C)) + D)

((A - (B * C)) + D)

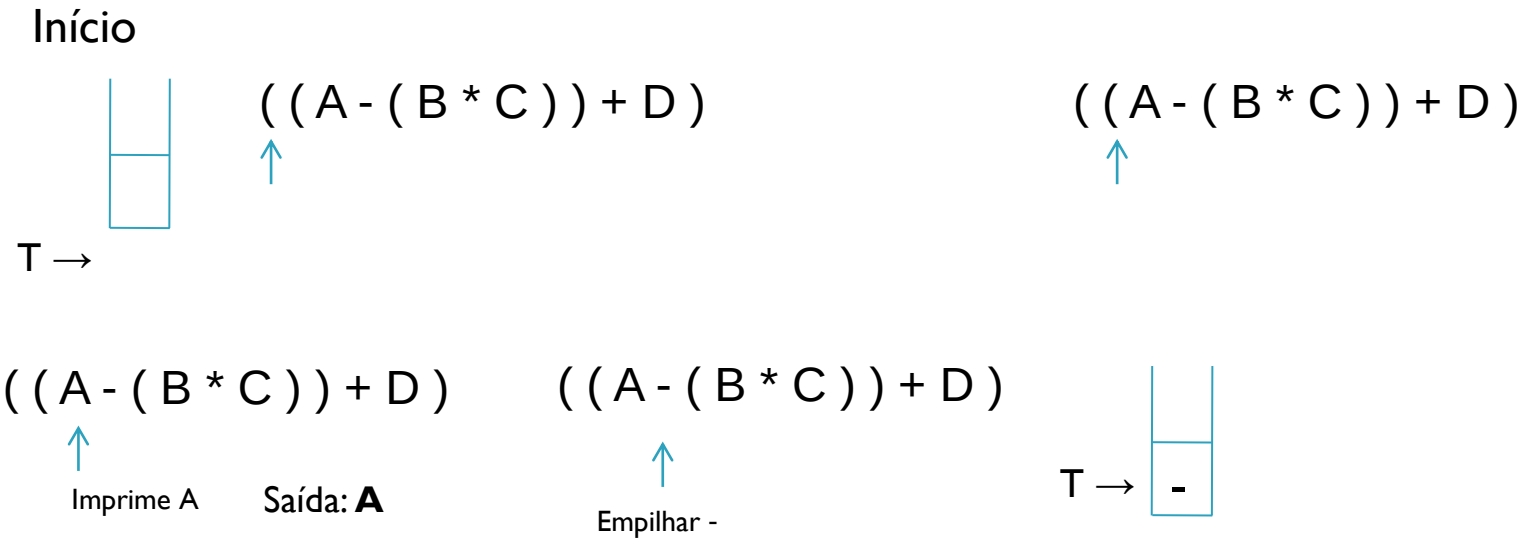
((A - (B * C)) + D)

Imprime A Saída: **A**

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

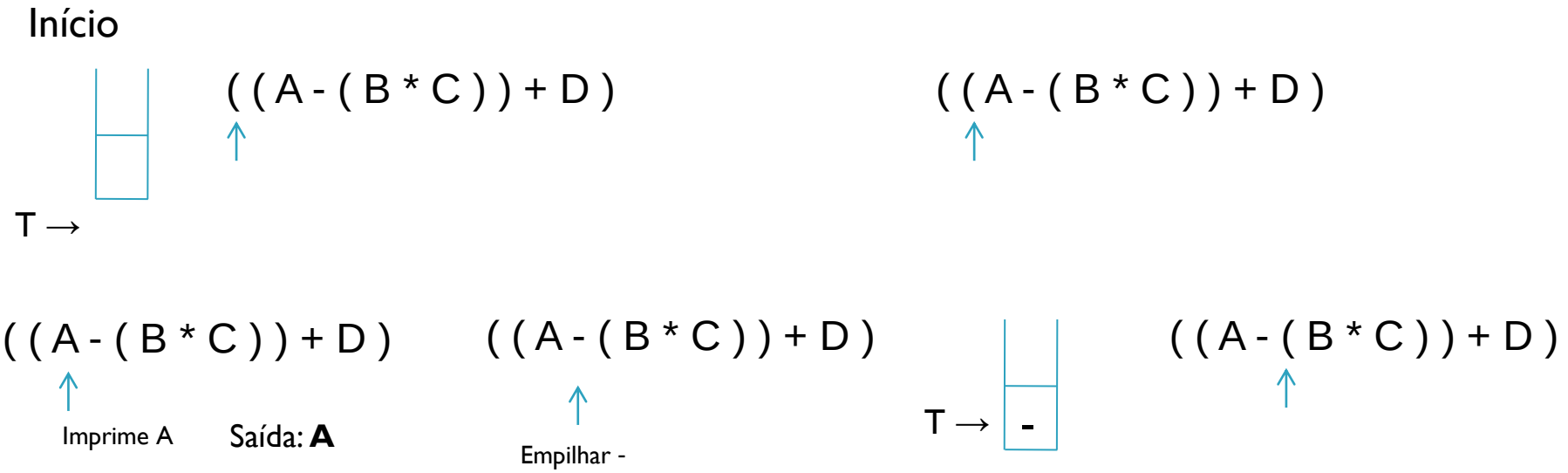
Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)



Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Passo 3:** Ao final da expressão, se a mesma for válida, a **pilha deve estar vazia**

Ex: A-B*C+D → ((A-(B*C))+D)



Conversão da notação infixa para pós-fixa

((A - (B * C)) + D)

Imprime B

Saída: A**B**

Conversão da notação infixa para pós-fixa

((A - (B * C)) + D)

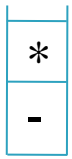
Imprime B

Saída: A**B**

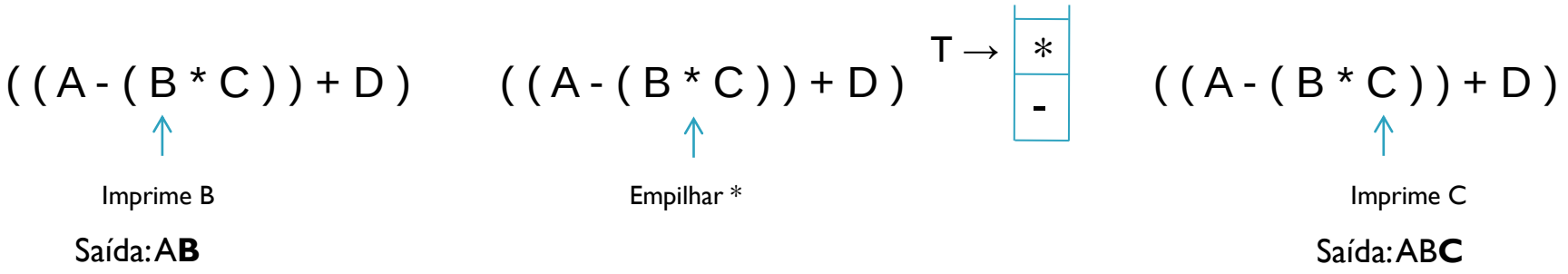
((A - (B * C)) + D)

Empilhar *

T →



Conversão da notação infixa para pós-fixa



Conversão da notação infixa para pós-fixa

((A - (B * C)) + D)

Imprime B

Saída: A**B**

((A - (B * C)) + D) T → *

-

Empilhar *

((A - (B * C)) + D)

Imprime C

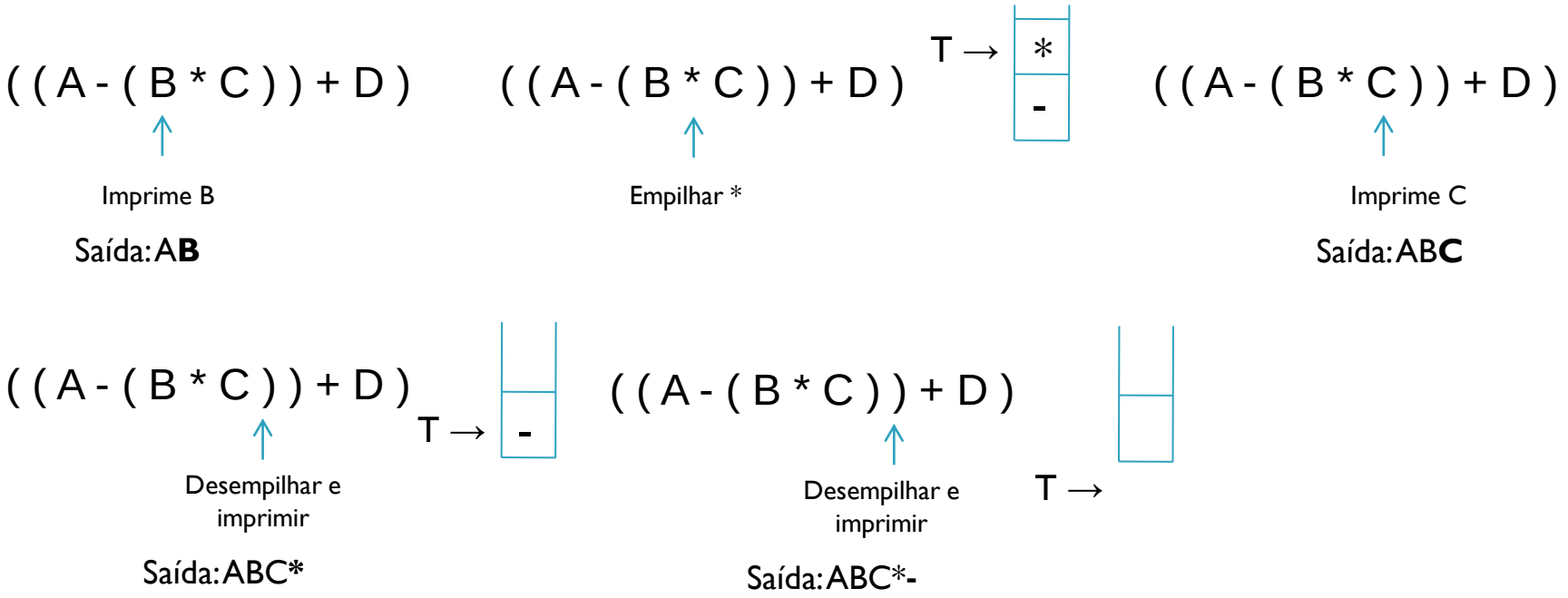
Saída: AB**C**

((A - (B * C)) + D) T → -

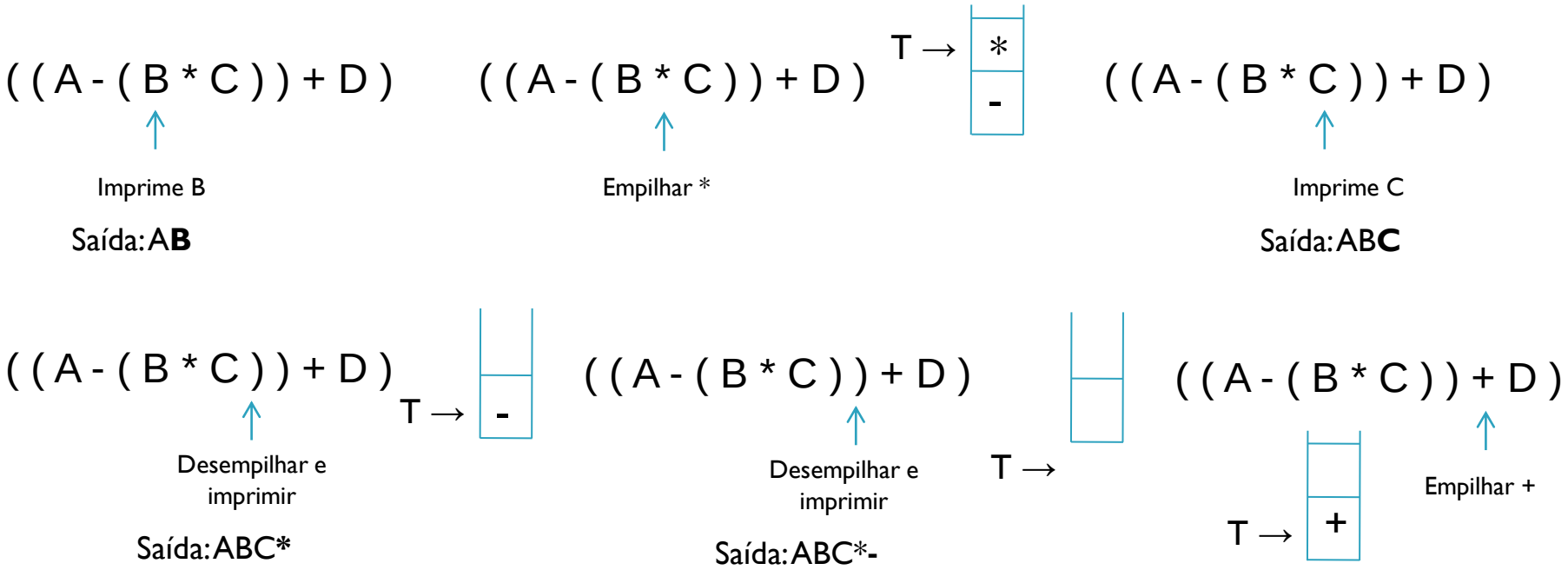
Desempilhar e imprimir

Saída: ABC*

Conversão da notação infixa para pós-fixa



Conversão da notação infixa para pós-fixa



Conversão da notação infixa para pós-fixa

((A - (B * C)) + D)

Imprime B

Saída: A**B**

((A - (B * C)) + D)

Empilhar *

T → | * |
    | - |

((A - (B * C)) + D)

Imprime C

Saída: AB**C**

((A - (B * C)) + D)

Desempilhar e imprimir

Saída: ABC***

T → | - |

((A - (B * C)) + D)

Desempilhar e imprimir

Saída: ABC*-**-**

T →

((A - (B * C)) + D)

Empilhar +

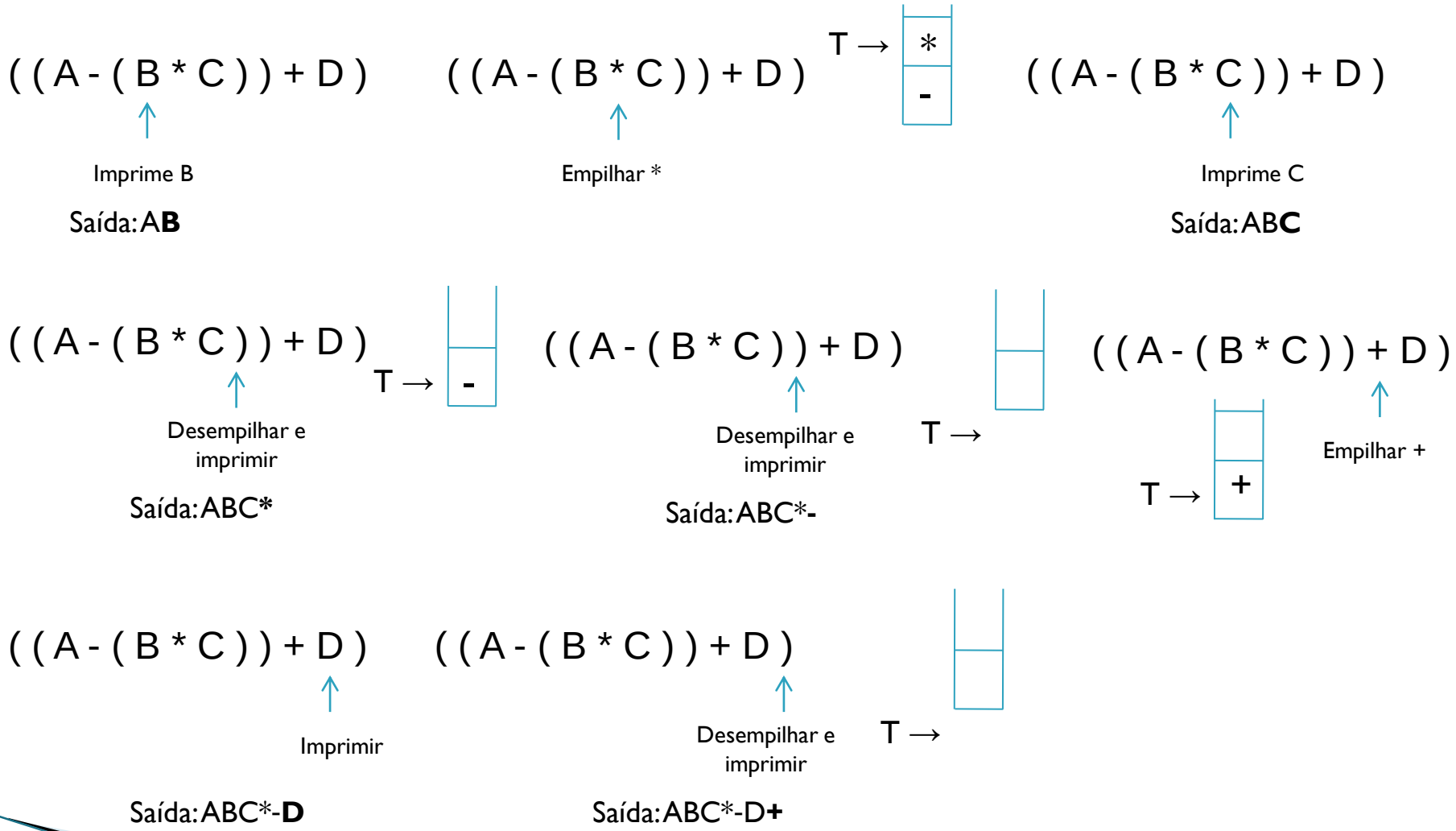
T → | + |

((A - (B * C)) + D)

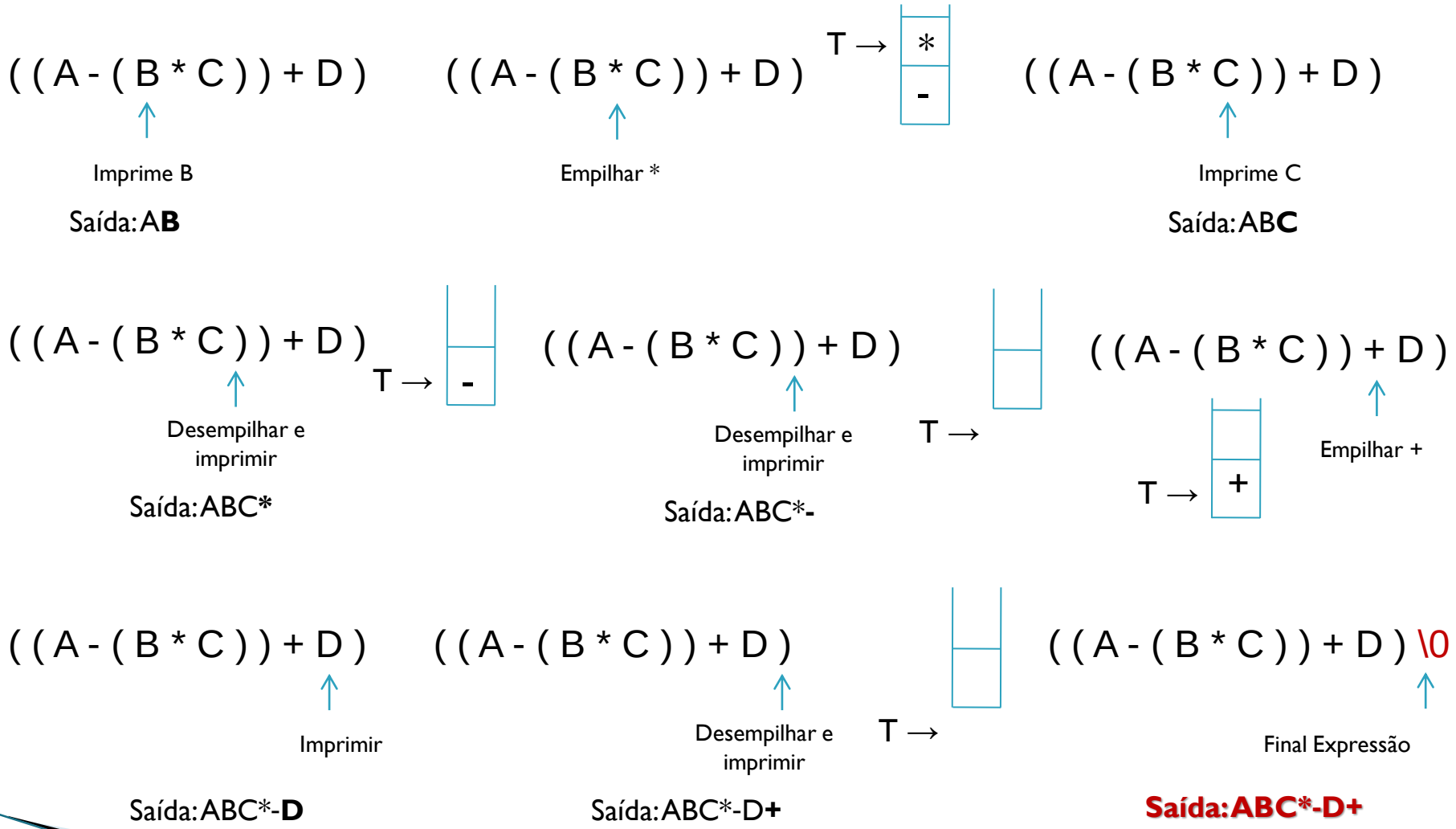
Imprimir

Saída: ABC*-**D**

Conversão da notação infixa para pós-fixa



Conversão da notação infixa para pós-fixa



Conversão da notação infixa para pós-fixa

- Como a **pilha está vazia**, a **expressão é válida** e a conversão está na saída

Saída: ABC*-D+

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- Como a **pilha está vazia**, a **expressão é válida** e a conversão está na saída

Saída: ABC*-D+

- **Desvantagem:**
  - Depende da correta **colocação manual dos parênteses** na expressão infixa.

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **Notação infixa qualquer:**
  - **1º Caso**: sem parênteses
  - **2º Caso**: com parênteses eventuais
    - Usa parênteses somente quando necessário

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **1º caso (sem parênteses):**
  - **Passo 1**: Inicializar a pilha
  - **Passo 2**: Varrer a expressão da esquerda para a direita e para cada símbolo lido ***s***:
    - SE ***s*** é **operando**: imprimir ***s***
    - SE ***s*** é um **operador**:
      - Desempilha e imprime **operadores** com prioridade **maior ou igual** a ***s***
      - Empilha ***s***
  - **Passo 3**: Ao final da expressão, **desempilha e imprime TODOS os operadores** existentes na pilha

Conversão da notação infixa para pós-fixa

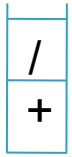
Ex: A + B / C *D ^ E

s: A Ação: Imprime "A"

s: + Ação:

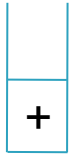
s: B Ação: Imprime "B"

s: / Ação:



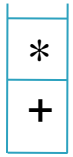
s: C Ação: Imprime "C"

s: * Ação: a) Desempilhar todos de prioridade > ou =



Imprime "/"

b) Empilha *

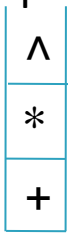


Conversão da notação infixa para pós-fixa

Ex: A + B / C *D ^ E

s: D Ação: Imprime "D"

s: ^ Ação:



s: E Ação: Imprime "E"

s: '\0' Ação: Desempilhar e imprimir **todos** os elementos da pilha

SAÍDA: ABC / DE ^*+

Conversão da notação infixa para pós-fixa

Ex2: A ^ B * C – D + E / F / G

s: A Ação: Imprime "A"

s: ^ Ação: Empilha "^"

s: B Ação: Imprime "B"

s: * Ação: Desempilha e imprime "^" e empilha "*"

Pilha >= s ^

s: C Ação: Imprime "C"

s: - Ação: Desempilha e imprime "*" e empilha "-"

Pilha >= s *

s: D Ação: Imprime "D"

s: + Ação: Desempilha e imprime "-" e empilha "+"

Pilha >= s -

Conversão da notação infixa para pós-fixa

Ex2: A ^ B * C – D + E / F / G

s: E Ação: Imprime "E"

s: / Ação: Prioridade Empilha "/"

Pilha < s

s: F Ação: Imprime "F"

s: / Ação: Prioridade

Pilha >= s Desempilha e imprime "/"

Prioridade

Pilha < s Empilha "/"

s: G Ação: Imprime "G"

s: final Ação: Desempilha e imprime "/"

Desempilha e imprime "+"

SAÍDA: AB ^ C * D-E F / G /+

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **2º caso (com parênteses eventuais):**
  - O que acontece se a expressão infixa permite a utilização de parêntese para modificar a precedência dos operadores?
  - **EX:** (A+B)/(C*D) ^E
  - **Mudança** em relação ao caso anterior (sem parênteses) **ocorre principalmente em relação ao passo 2.**

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **2º caso (com parênteses eventuais):**
  - **Passo 1**: Inicializar a pilha
  - **Passo 2**: Varrer a expressão da esquerda para a direita e para cada símbolo lido ***s***:
    - SE ***s*** é **operando**: imprimir ***s***
    - SE ***s*** é um **operador**:
      - Desempilha e imprime **operadores** com prioridade **maior ou igual** a ***s***.
        - MUDANÇA: nesse caso, deve **considerar a abertura de parêntese como o operador de menor prioridade.**
      - Empilha ***s***.

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- **2º caso (com parênteses eventuais):**
  - **Passo 2 (continuação):**
    - SE ***s*** é um **parêntese de abertura**, empilhar ***s***
    - SE ***s*** é um **parêntese de fechamento**:
      - Desempilha e imprime **operadores** enquanto o topo da pilha for diferente de parêntese de abertura.
        - O parêntese de abertura é **desempilhado e ignorado** (não impresso).
  - **Passo 3**: Ao final da expressão, **desempilha e imprime TODOS os operadores** existentes na pilha.

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- Ex2: (A + B) / (C * D) ^ E

s: (Ação: Empilhar (

s: A Ação: Imprimir "A"

s: + Ação: Topo Pilha Prioridade < s Empilhar +

s: B Ação: Imprimir "B"

s:) Ação: Desempilhar e imprimir "+"

Desempilhar e ignorar "("

s: / Ação: Empilhar /

s: (Ação: Empilhar (

s: C Ação: Imprimir "C"

Conversão da notação infixa para pós-fixa

- Ex2: (A + B) / (C * D) ^ E

s: *	Ação: Pilha < s Empilhar *
s: D	Imprimir "D"
s:)	Ação: Desempilhar e imprimir "*"
	Desempilhar e ignorar "("
s: ^	Ação: Pilha < s Empilhar ^
s: E	Ação: Imprimir "E"
s: final	Ação: Desempilhar e imprimir "^"
	Desempilhar e imprimir "+"

SAÍDA: AB + CD * E ^ /

4ª Aplicação Clássica de Pilha

- **Avaliação de expressões matemáticas pós-fixadas:**
  - Algoritmo usa uma pilha para avaliar expressões na forma pós-fixa:
  - **Passo 1:** Criar uma instância de pilha vazia
  - **Passo 2:** Varrer a expressão da esquerda para a direita e para cada símbolo ***S*** lido:
    - SE ***S*** for um **operando**: empilhar ***S***
    - SE ***S*** for um **operador**:
      - Desempilhar os 2 últimos operandos: $\mathbf{OP_2}$ (1º POP) e $\mathbf{OP_1}$ (2º POP)
      - Efetuar a operação $\mathbf{OP_1}$ ***S*** $\mathbf{OP_2}$ e empilhar o resultado da operação.
  - **Passo 3:** Ao final, o resultado estará no topo da pilha

Avaliação de Expressões Matemáticas na Forma Pós-Fixa

- **Exemplo:**

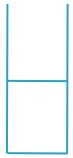
  Avaliar a expressão AB-CD+*E/ sendo:

A	B	C	D	E
6	2	5	3	8

OBS: *operandos são representados por letras cujo os valores são fornecidos pelo usuário e armazenados em uma tabela*

Avaliação de Expressões Matemáticas na Forma Pós-Fixa

A	B	C	D	E
6	2	5	3	8

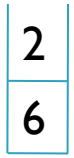
1° 

2° AB-CD+*E/

Push(A)
||
Push(6)

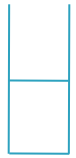
3° AB-CD+*E/

Push(B)
||
Push(2)



4° AB-CD+*E/

X_2=Pop( )=2
X_1=Pop( )=6



r = x_1-x_2 = A-B = 6-2 = 4

Push(4)

5° AB-CD+*E/

Push(C)
||
Push(5)

6° AB-CD+*E/

Push(D)
||
Push(3)

7° AB-CD+*E/

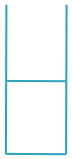
X_2=Pop( )=3
X_1=Pop( )=5

r =x_1-x_2
r =3+5
r =8 -> push(8)

Avaliação de Expressões Matemáticas na Forma Pós-Fixa

A	B	C	D	E
6	2	5	3	8

8° AB-CD+ * E/

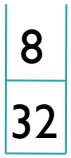


X_2=Pop( )=8
X_1=Pop( )=4

r = x_1*x_2 = 4*8 = 32

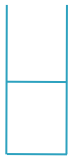
Push(32)

9° AB-CD+*E/



Push(E)
||
Push(8)

10° AB-CD+*E /



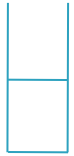
X_2=Pop( )=8
X_1=Pop( )=32

r = 32/8 = 4

Push(4)

- Fim da expressão: *pop()* → Resultado = 4

AB-CD+*E / '\0'



Pilha vazia ⇒ **Expressão válida**