Algoritmi e Strutture Dati – 24/08/22

Esercizio A1 – Punti ≥ 8

È facile vedere che $T(n)$ è $\Omega(n)$, per via della parte non ricorsiva. È possibile fare un passo in più e osservare che

$$T(n) = 2T(n/2) + 2T(n/3) + n \geq 2T(n/2) + n = \Theta(n \log n)$$

Per via del $\geq$, possiamo dedurne che $T(n) = \Omega(n \log n)$.
In alternativa, possiamo osservare che

$$T(n) = 2T(n/2) + 2T(n/3) + n \geq 4T(n/3) + n = \Theta(n^{\log_3 4})$$

Per via del $\geq$, possiamo dedurne che $T(n) = \Omega(n^{\log_3 4}) \approx \Omega(n^{1.26})$.
Per via dei limiti inferiori, non perdiamo tempo a provare che $T(n) = O(n)$. Notiamo invece che

$$T(n) = 2T(n/2) + 2T(n/3) + n \leq 4T(n/2) + n = \Theta(n^2)$$

Per via del $\geq$, possiamo dedurne che $T(n) = O(n^2)$.
Questo è perfettamente dimostrabile anche con il metodo di sostituzione.

Esercizio A2 – DAG massimale – Punti ≥ 11

Si consideri un ordinamento topologico del grafo. Qualunque esso sia, il primo nodo può avere al massimo $n - 1$ archi; il secondo $n - 2$, fino all'ultimo, che ne ha 0. Quindi, il numero massimo di archi che possono essere contenuti in un grafo orientato che sia anche aciclico, è pari a:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Il grafo in input ha m archi già presenti; quindi il numero totale di archi che possono essere aggiunti è pari a:

$$\frac{n(n-1)}{2} - m$$

Poichè l'API del libro non fornisce il numero di archi del grafo, siamo costretti a contarli in tempo $O(n)$; se questa informazione fosse memorizzata nella struttura dati, l'algoritmo opererebbe in tempo costante.

```
int maxDag(GRAPH G)
    int n = 0
    int m = 0
    for u ∈ G.V() do
        n = n + 1
        m = m + |G.adj(u)|
    return (n · (n − 1)/2) − m
```

Esercizio A3 – Somma su albero – Punti ≥ 11

Il problema può essere risolto utilizzando un insieme di supporto S, implementato tramite tabella hash. Si effettua una visita in profondità dell'albero, e per ogni nodo con valore x si verifica se $k - x$ è presente nell'insieme. Se non è presente, si inserisce x in S.

```
boolean containsSum(TREE T, int k)
    SET S = Set()
    return visit(T, S, k)
```

boolean visit(TREE T, SET S, **int** k)

```
if T == nil then
    return false
else
    if S.contains(k − T.value) then
        return true
    else
        S.insert(T.value)
        return visit(T.left) or visit(T.right)
```

La complessità è quella di una visita in profondità, $O(n)$.

Esercizio B1 – Esami – Punti ≥ 8

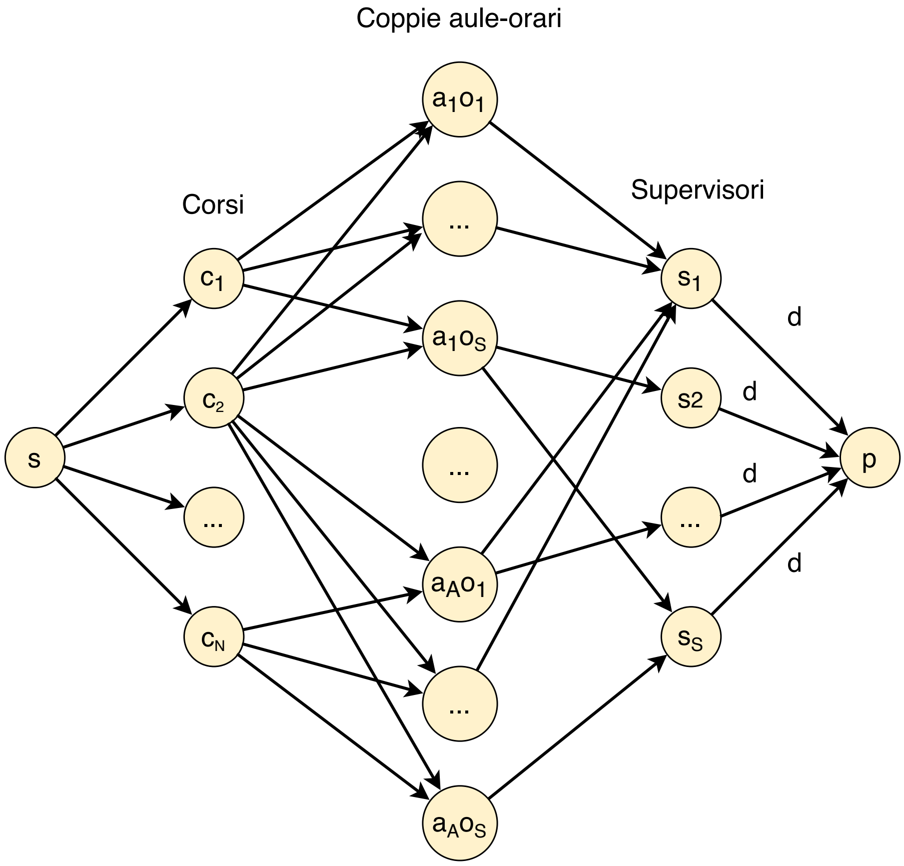
È possibile risolvere il problema tramite una rete di flusso appositamente progettata.
Costruiamo un insieme V di nodi così organizzato:

- Una sorgente s;
- C nodi corsi;
- $A \cdot O$, uno per ogni coppia (aula, orario);
- S nodi supervisori;
- un pozzo t.

La dimensione dell'insieme dei nodi è $|V| = C + A \cdot O + S + 2$.
Costruiamo un insieme E così organizzato:

- Per ogni corso c_i, un arco (s, a_i); vengono creati C archi
- Per ogni coppia corso c_i e aula-orario (a_j, o_k), si crea un arco $(c_i, (a_j, o_k))$ se $cs_i > as_j$, con peso 1; vengono creati al più $A \cdot C \cdot O$ archi;
- Per ogni coppia aula aula-orario (a_j, o_k) e supervisore s_l tale che $o_k \in T_l$ (lo slot è fra quelli accettabili dal supervisore), si crea un arco $((a_j, o_k), s_l)$; vengono creati al più $A \cdot O \cdot S$ archi.
- Per ogni supervisore s_l, si crea un arco (s_l, t), per un totale di S archi.

La dimensione dell'insieme degli archi è $|E| = O(C + AO(C + S) + S) = O(AO(C + S))$.
Tutti gli archi hanno peso 1 tranne quelli fra supervisori e pozzo, che hanno peso d.
Poichè il flusso massimo è limitato da C, il costo computazionale totale è $O(AOC(C + S))$, utilizzando il limite di Ford-Fulkerson.
La figura seguente illustra, a grandi linee, la costruzione del grafo.



Esercizio B2 – Permutazioni eleganti – Punti ≥ 10

È possibile risolvere il problema utilizzando la tecnica backtrack, modificando opportunamente l'algoritmo di generazione delle permutazioni che abbiamo visto a lezione.

```
printElegant(int n)
----------------------------------------
    SET A = Set()
    for i = 1 to n do
        A.insert(i)
    int[] S = newint[1 ... n]
    return printElegantRec(A, S, 1)
```

```
printElegantRec(SET A, ITEM[] S, int i)
----------------------------------------
    % Se A è vuoto, S è ammissibile
    if A.isEmpty() then
        print S
    else
        % Copia A per il ciclo foreach
        SET C = copy(A)
        foreach c ∈ C do
            if c mod i == 0 or i mod c == 0 then
                S[i] = c
                A.remove(c)
                permRec(A, S, i + 1)
                A.insert(c)
```

Il costo computazionale è $O(n^2 n!)$, per via delle copie del vettore.
È possibile anche modificare la versione più efficiente, sempre presentata a lezione, ottenendo una complessità $O(nn!)$.

```
printElegantRec(ITEM[] S, int i)
  % Caso base, un elemento
  if i == 1 then
  |  print S
  else
  |  for j = 1 to i do
  |  |  if (S[i] mod i == 0 or i mod S[i] == 0) and (S[j] mod i == 0 or i mod S[j] == 0) then
  |  |  |  swap(S, i, j)
  |  |  |  permRec(S, i − 1)
  |  |  |  swap(S, i, j)
```

Esercizio B3 – Connessioni – Punti ≥ 12

Il problema non è altro che il problema delle sottosequenze comuni massimali, dove una connessione rappresenta un'associazione fra caratteri e la mancanza di intersezioni significa che l'ordine dei caratteri deve essere rispettato nella sottosequenza.

```
int maxConnections(int[] X, int[] Y, int n)
  int[][] DP = new int[0...n][0...n]
  for i = 0 to n do
  |  DP[i][0] = 0
  |  DP[0][i] = 0
  for i = 1 to n do
  |  for j = 1 to m do
  |  |  if X[i] == Y[j] then
  |  |  |  DP[i][j] = DP[i − 1][j − 1] + 1
  |  |  else
  |  |  |  DP[i][j] = max(DP[i − 1][j], DP[i][j − 1])
  return DP[n][m]
```

La complessità è quella della LCS, $O(n^2)$.