Ricerca operativa → Studia metodologie per la soluzione di problemi decisionali, suddiviso in 5 fasi:

(1) Individuare il problema.
(2) Analisi realtà e raccolta dati.
(3) Costruzione del modello
(4) Determinazione di una o più soluzioni.
(5) Analisi dei risultati ottenuti.

- Data l'istanza di un problema P si definisce un insieme di soluzioni ammissibili → F.

Funzione obbiettivo: $c : F \to \mathbb{R}$, fornisce il costo / beneficio di una determinata soluzione.

(1) **Problema minimo:** $\min \{ c(x) : x \in F \}$
(2) **Problema massimo:** $\max \{ c(x) : x \in F \}$

- Una soluzione $x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$ è detta **soluzione ottima.**

Problema di equipartizione

- Dato un insieme di n numeri naturali $N = \{a_1, \dots a_n\}$ quale è il sottoinsieme S di N tale che la differenza in modulo tra la somma dei numeri in S e quella dei numeri in N/S è la + piccola possibile?

$$\boxed{\min \left\{ c(S) = \left| \sum_{i \in S} a_i - \sum_{i \notin S} a_i \right| : S \subseteq N \right\}}$$

In questo contesto sono possibili 4 casi diversi:

(1) Il problema è vuoto, ossia $F = \emptyset$, in questo caso si assume per convenzione che $z(P) = +\infty$. ($-\infty$ se è un problema di massimo).

(2) Il problema é inferiormente illimitato (/superiormente), ossia scelto un numero reale M esiste una soluzione ammissibile $x \in F$ t.c. $c(x) \leq M$ ($\geq M$), in questo caso il valore ottimo é $z(P) = -\infty$ ($+\infty$).

(3) Il problema ha valore ottimo finito $-\infty < M < +\infty$ ma non ha soluzione ottima, ossia non esiste $x \in F$ t.c. $c(x) = z(P)$.

(4) Il problema ha valore ottimo ed ammette soluzione ottima.

- Un algoritmo di (P) che determina una soluzione ottima x^* viene chiamato algoritmo esatto.

In molti casi un algoritmo esatto ha complessita elevata, in quel caso si accetta un algoritmo che fornisce soluzioni ammissibili. (Algoritmi euristici).

Valore soluzione candidata.

ERRORE ASSOLUTO: $E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) \quad (\geq 0)$

Valore soluzione ottima.

ERRORE RELATIVO: $\dfrac{c(\bar{x}) - z(P)}{|z(P)|}$ => Percentuale errore.

ESEMPIO:

- Nodi: A, B, C
- Archi: A -> B = 5
  B -> C = 3
  A -> C = 10

- Problema: trovare il percorso minimo da A -> C.

Funzione obbiettivo: (1) $c(x_1) = 10$ (A -> C).
(2) $c(x_2) = 8$ (A -> B -> C).

$$\boxed{z(P) = \min\{c(x_1), c(x_2)\} = \min\{10, 8\} = 8}$$

- Supponiamo di scegliere $\bar{x} = x_1$ (A -> C)

$E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) = 10 - 8 = 2 \qquad R_{\bar{x}} = \dfrac{c(x_1) - z(P)}{|z(P)|} = \dfrac{2}{8} = 0.25$ (25%)

• Notiamo che $z(P)$ non è sempre noto, un metodo per stimare $z(P)$ è l'approssimazione del problema RILASSAMENTO.

$$\boxed{(\bar{P}) \quad \min\{\bar{c}(x) : x \in \bar{F}\}}$$

Dove $F \subseteq \bar{F}$ e $\bar{c}(x) \leq c(x) \quad \forall x \in F$.

• Capita che la soluzione del problema rilassato sia anche soluzione di quello originale ($\bar{c}(x) = c(x)$).

MODELLI

• Non ci si può affidare a tecniche standard per costruire un modello, si lascia molto spazio all'immaginazione.

PIANIFICAZIONE DELLA PRODUZIONE

PRODUCT MIX: Azienda che produce processori.

VARIABILI DECISIONALI

- X_P = numero processori pintum prodotti.
- X_C = numero processori colorom prodotti

DATI DEL PROBLEMA

- $X_P \leq 400\cdot000 \wedge X_C \leq 700\cdot000$ PRODUZIONE MASSIMA SETTIMANALE
- Massimo 3000 wafer/settimana
  - Wafer → 300 Pintum (resa 50%) → 150 buoni
  - Wafer → 500 colorom (resa 60%) → 300 buoni

VINCOLO SUI WAFER

$$\frac{\overbrace{X_P}^{\text{n° processori}}}{300 \cdot \underbrace{0.5}_{\text{resa}}} + \frac{X_C}{\underbrace{500}_{\text{Produzione wafer}} \cdot 0.6} \leq \overbrace{3000}^{\text{Max settimanale}}$$

$$\boxed{2X_P + X_C \leq 900\cdot000 \quad \text{LINEARE}}$$

Funzione obbiettivo: Massimizzare i ricavi.

- Ricavo Pintum: 500 \$ / pezzo.
- Ricavo Colorom: 200 \$ / pezzo.

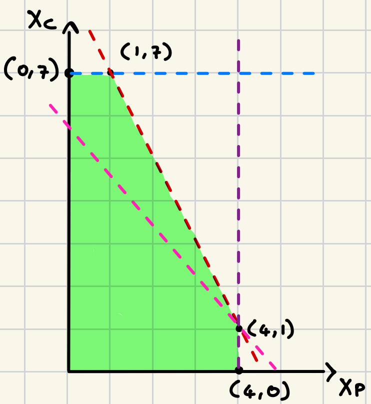
Modello di programmazione lineare

- Max $z = 500\, X_P + 200\, X_C$, soggetto ai seguenti vincoli:

Ricavi

(1) $X_P \leq 400'000$ (2) $X_C \leq 700'000$ (3) $2X_P + X_C \leq 900'000$

Soluzione grafica



Legenda

- $X_P \leq 400'000$
- $X_C \leq 700'000$
- $2X_P + X_C \leq 900'000$

Poliedro = Regione ammissibile.

- La soluzione sta nei vertici del poliedro.
- $500\, X_P + 200\, X_P = z$, al variare di z nel poliedro.

Soluzione ottima:

- Sono presenti due vertici (1,7) (4,1), analizzando i ricavi per ogni processore si scopre che la soluzione ottimale sta in (4,1).

  - $(X_P^*, X_C^*) = (400'000, 100'000)$
  - In termini di wafers corrisponde a $(2666.\bar{6}, 333,\bar{3})$.

Analisi soluzione

- $(2666.\bar{6}, 333,\bar{3}) \notin \mathbb{Z}^+$, bisogna arrotondare!

- $(2666.\overline{6}, 333.\overline{3}) \Rightarrow (2666, 334) \Rightarrow (W_P', W_C') = (399'900, 100'200)$.

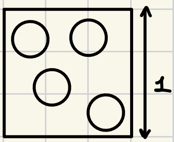
RICAVI SOLUZIONE $\longrightarrow$ $z^* = 500\ x_P^* + 200\ x_C^* = 220'000'000\ \$$ OTTIMA

$\searrow$ $z' = 500\ x_P' + 300\ x_C' = 219'990'000\ \$$ AMMISSIBILE

ERRORE ASSOLUTO: $z^* - z' = 220'000'000 - 219'990'000 = 10'000\ \$$

ERRORE RELATIVO: $\dfrac{z^* - z'}{z^*} = \dfrac{10'000}{220'000'000} \cong 0{,}5\ \%$

PROBLEMA DELL'IMPACCAMENTO



- Dato un quadrato di lato unitario, trovare il massimo raggio che possono avere n cerchi identici inscritti nel quadrato e non sovrapposti.

VARIABILI

- $I = \{1, 2 \dots n\}$ sono gli indici dei cerchi
- $(x_i, y_i) \in [0,1]^2$, $i \in I$ sono gli indicanti del centro dei cerchi.
- r = raggio dei cerchi.

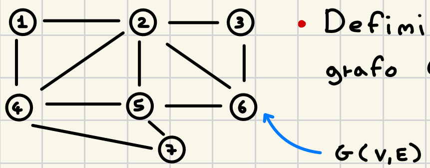
FUNZIONE OBBIETTIVO: Massimizzare il raggio dei cerchi.

VINCOLI:

(1) $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2} \geq 2r \quad i \in I \wedge j \in \{i+1 \dots n\}$, i centri dei cerchi devono avere distanza di almeno $2r$, non sovrapposti.

(2) $r \leq x_i \leq 1 - r \ \wedge\ r \leq y_i \leq 1 - r$, il centro di un cerchio deve essere interno al quadrato.

Problema albero ricorrente



- Definire un albero ricorrente (stessi nodi del grafo $G(V,E)$, senza cicli e con il costo < possibile.

Dati del problema

(1) V = Insieme dei vertici con $|V| = n$.
(2) E = Insieme dei lati con $|E| = m$.
(3) Ad ogni lato $\{i,j\} \in E$ é associato un costo $c_{ij} > 0$.

Funzione obbiettivo: $\min \{ c(T) = \sum_{\{i,j\} \in T} c_{ij} : (N,T) \text{ é un albero} \}$ somma costi lati.

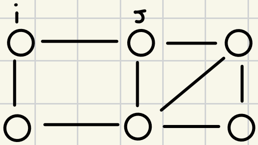
Variabile decisionale binaria

- $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lato } \{i,j\} \text{ viene selezionato.} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Funzione obbiettivo finale:

- $\min \{ \sum_{\{i,j\} \in T} c_{ij} \cdot x_{ij} : (N,T) \text{ é un albero di copertura} \}$.

Problema del commesso viaggiatore



- Si vuole trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo.

Dati del problema

(1) d_{ij} = distanza tra il nodo i e il nodo j (>0).

VARIABILE DECISIONALE BINARIA

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la strada } \{i,j\} \text{ viene percorsa.} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

FUNZIONE OBBIETTIVO: $\min \{ \sum_{\{i,j\} \in E} d_{ij} \cdot x_{ij} \}$

VINCOLI:

(1) $\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} = 2$, vincolo per evitare cicli

(2) Vincolo di connessione identico al "problema albero ricorrente".