



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

MISURE DI *densità*

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

M. Rescigno

GRUPPO B2.3

Esperienza di laboratorio
27 marzo 2017

Consegna della relazione
3 aprile 2017

Sommario

La densità è definita come il rapporto tra massa e volume, ed è una proprietà intensiva della materia.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

In questa esperienza ci proponiamo di compiere misure di densità di diversi campioni, adottando diversi procedimenti operativi e al fine di determinare il materiale di cui è composto un campione incognito.

Indice

| | | |
|----------|---|----------|
| 0 | Convenzioni e formule | 3 |
| 1 | Scopo e descrizione dell'esperienza | 3 |
| 2 | Apparato Sperimentale | 4 |
| 2.1 | Strumenti | 4 |
| 2.2 | Campioni | 4 |
| 3 | Sequenza Operazioni Sperimentali | 4 |
| 3.1 | Verifica degli strumenti | 4 |
| 3.2 | Misura della densità di un singolo campione | 4 |
| 3.3 | Misura della densità dei campioni A | 7 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4 | Misura della densità del campione B | 8 |
| 3.5 | Misura della densità del campione C | 9 |
| 3.6 | Misura della densità dei campioni A con metodo grafico | 9 |
| 4 | Considerazioni finali | 10 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|---|--|----|
| 1 | 30 misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sul cilindro 9 dei campioni A. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure. | 12 |
| 2 | Riepilogo dei valori di altezza misurata con Palmer e nonio, diametro misurato con Palmer e massa del cilindro 9 dei campioni A. | 12 |
| 3 | Misure della variazione del livello dell'acqua in una provetta graduata in seguito all'inserimento graduale di 10 gruppi di 3 cilindri. | 13 |
| 4 | Singole misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sui 30 cilindri. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure. | 14 |
| 5 | Misure di Offset registrate sul Palmer | 15 |
| 6 | Misure di volume e densità dei 30 campioni | 15 |
| 7 | Considerazioni globali su volume e densità dei 30 campioni | 16 |
| 8 | Misure di volume e densità ripetute 30 volte sul campione 9 | 16 |
| 9 | Considerazioni globali su volume e densità del campione 9 | 16 |

0 Convenzioni e formule

In questa relazione verranno usate le seguenti convenzioni:

1. sarà usata la virgola [,] come separatore decimale;
2. l'approssimazione decimale della cifra 5 sarà fatta per eccesso;
3. al fine di migliorare la qualità dell'elaborazione dei dati, ogni grafico/istogramma prodotto a mano su carta millimetrata sarà riportato insieme al suo equivalente prodotto attraverso un software di analisi dati¹;
4. tutti i conti e i risultati parziali saranno presentati senza tenere cura delle cifre significative, i risultati finali saranno invece presentati correttamente.

Inoltre, si farà riferimento alle seguenti formule:

1. media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (1)$$

2. varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad (2)$$

3. deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (3)$$

1 Scopo e descrizione dell'esperienza

L'esperienza si sviluppa secondo 5 operazioni sperimentali:

1. misura della densità di un singolo campione, al fine di determinare il materiale di cui è costituito;
2. misura di 30 campioni dello stesso materiale, per migliorare la stima precedente della densità;
3. misura di un campione dello stesso materiale dei precedenti, ma con dimensioni differenti, con l'obiettivo di verificare la compatibilità del materiale con quello costitutivo dei 30 campioni;
4. misura della densità di un singolo campione di materiale differente, al fine di identificarne la composizione;
5. determinazione della densità dei campioni già misurati nella seconda fase, utilizzando un metodo grafico.

¹In questo contesto i dati sono stati elaborati con il software di analisi *R*.

2 Apparato Sperimentale

2.1 Strumenti

- Bilancia di precisione [risoluzione 0,001 g, incertezza 0,0003 g, portata 7500 g];
- Calibro a nonio ventesimale [divisione 0,05 mm, incertezza 0,05 mm, portata 20 cm];
- Calibro Palmer [divisione 0,01 mm, incertezza 0,001 mm, portata 25 mm];
- Provetta graduata [divisione 2 mL, incertezza 0,5 mL];

2.2 Campioni

- **A**: 30 cilindri di dimensioni variabili e materiale incognito (colore argentato lucido²);
- **B**: cilindro dello stesso materiale dei campioni **A**, ma di diversa dimensione;
- **C**: cilindro con foro prossimo alla base di diverso materiale rispetto ai precedenti (colore dorato lucido³).

3 Sequenza Operazioni Sperimentali

3.1 Verifica degli strumenti

Un primo controllo sugli strumenti di misura ci porta a concludere che il calibro ventesimale è ben tarato e non presenta offset evidenti (come, d'altronde, ci aspettavamo per il modo di costruzione dello strumento); il calibro Palmer risulta invece essere soggetto di un offset di valutazione incerta, approfondiremo il problema nella sezione 3.2. La bilancia di precisione può essere tarata a 0 prima di ogni misurazione; la provetta graduata sarà invece riempita fino a un certo livello e si valuteranno le differenze di indicazioni segnate, permettendo dunque di escludere l'incertezza del valore considerato come 0.

3.2 Misura della densità di un singolo campione

Scegliamo come campione dal gruppo **A** il cilindro che abbiamo numerato 9. La procedura di misurazione consiste in:

1. misura ripetuta 30 volte dell'altezza del cilindro prima con il calibro a nonio e poi con il calibro Palmer;
2. valutazione dello strumento nel complesso più adatto alle nostre misure; come argomentato nel seguito, il calibro Palmer è⁴ la scelta più adatta;

²Utilizziamo il colore e l'aspetto dei campioni come *prior* per escludere materiali come legno, vetro o oro, e dunque per escludere eventuali evidenti errori nella misura.

³vedi nota 2

⁴Nel limite di questa relazione e delle opinioni dei quattro autori.

3. misura ripetuta 30 volte del diametro del cilindro con il calibro Palmer;
4. misura ripetuta 30 volte della massa del cilindro con la bilancia di precisione;
5. calcolo della densità del campione per ognuna delle misure;
6. stima della densità con relativa incertezza.

Tutti i dati sperimentali raccolti sono riportati nella tabella 1. Per determinare quale tra il calibro ventesimale e il calibro Palmer sia più adatto alla nostra esperienza, e di conseguenza per determinare lo strumento con il quale effettuare il resto delle misure di questa sezione, confrontiamo le incertezze relative all'altezza nei due diversi casi.

Le misure con il calibro a nonio sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,086\,67\text{ mm} \quad \sigma = 0,031\,98\text{ mm}$$

dove con \bar{h} intendiamo la media calcolata con (1), mentre con σ intendiamo la deviazione standard calcolata con (3). Per quanto detto nella sezione 3.1, il calibro a nonio non presenta alcun errore di calibrazione nella misura dello 0, non essendo uno strumento tendenzialmente affetto da offset considereremo credibile questo risultato e non propagheremo un'eventuale incertezza nella misura dello 0. L'errore di tipo B stimato per questo strumento è quello riportato nella sezione 2.1, cioè $u_n = 0,05\text{ mm}$. La misura dell'altezza h effettuata con il calibro a nonio è quindi soggetta ad un'incertezza σ_T stimabile come

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{\sigma}{\sqrt{30}} \oplus u_n \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_n^2} = 0,05\text{ mm}. \end{aligned}$$

Risultato prevedibile in quanto $\sigma/\sqrt{30}$ è di diversi ordini di grandezza inferiore di u_n . L'incertezza relativa all'altezza misurata con il calibro a nonio è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{\bar{h}} = 0,25\%. \quad (4)$$

Le misure con il calibro Palmer sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,016\,53\text{ mm} \quad \sigma = 0,004\,68\text{ mm}$$

con le stesse notazioni di prima. A differenza del calibro a nonio, il Palmer è uno strumento meccanicamente predisposto ad errori di offset e in questo caso specifico, facendo 10 misure dello 0⁵, risulta

$$\bar{z} = 0,006\text{ mm} \quad \sigma_z = 0,0035\text{ mm},$$

le misure dell'offset sono riportate nella tabella 5. Dovremo quindi tener conto anche della dispersione dell'offset nella propagazione dell'incertezza su questa

⁵La scelta di calcolare la dispersione sull'offset effettuando più misure invece di usare quella già trovata misurando le altezze è giustificata dal fatto che non possiamo essere sicuri dell'assoluta linearità della risposta dello strumento, esso potrebbe infatti avere una risposta diversa nei pressi dello 0.

misura. L'incertezza di tipo B del calibro Palmer può essere stimata nell'ordine di $u_p = 0,001$ mm, propagando l'errore sulla misura otteniamo

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \frac{\sigma}{\sqrt{30}} \oplus u_p \oplus \frac{\sigma_z}{\sqrt{10}} \oplus u_p \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2u_p^2} = 0,0020 \text{ mm}\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato l'incertezza strumentale sia nella misura dell'altezza che in quella dello 0. L'incertezza relativa è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{h} = 0,01\%. \quad (5)$$

Appare quindi immediatamente evidente che l'incertezza sulle misure effettuate con il calibro Palmer è nettamente inferiore di quella sulle misure del nonio, abbiamo quindi scelto il calibro Palmer per effettuare (ove possibile) le successive misure di lunghezza.

Dopo aver effettuato tutte le misure necessarie (sintetizzate nella tabella 2), ossia altezza, diametro e massa di ogni cilindro, siamo in grado di calcolare la densità relativa ad ogni misura attraverso l'equazione

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{10}} \quad (6)$$

che restituisce la densità in g/cm³, ottenendo i dati riportati nella tabella 8. Di queste 30 misure di densità possiamo ricavarne media ($\bar{\rho}$) e deviazione standard (σ), in particolare:

$$\bar{\rho} = 2,7095 \text{ g/cm}^3 \quad \sigma = 0,004 \text{ g/cm}^3.$$

L'incertezza su questa media si stima come

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2} \quad (7)$$

dove con σ si intende la deviazione standard sulle trenta misure, mentre u_B è la media delle incertezze propagate su ciascuna misura di densità, calcolate con la formula

$$u_B = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} \quad (8)$$

dove σ_m e σ_V sono le incertezze sulla massa e sul volume, la prima è data da

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B(m)^2} \quad (9)$$

dove σ è la deviazione sulle trenta misure e $u_B(m)$ l'incertezza strumentale sulla bilancia; l'incertezza sul volume è invece data da

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_{\bar{z}_0}^2 \quad (10)$$

dove intendiamo con $\sigma_D, \sigma_h, \sigma_{\bar{z}_0}$ le incertezze rispettivamente su diametro, altezza e offset, con D e h intendiamo i valori misurati di diametro e di altezza (quindi senza la correzione dell'offset) su ogni misura e con \bar{z}_0 l'offset medio; scrivendo il volume in funzione dei valori misurati di diametro e di altezza (misurati in [mm]) e del valore dell'offset, in modo da rendere le misure scorrelate, e derivando parzialmente otteniamo

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4000}(2Dh - 2D\bar{z}_0 - 2h\bar{z}_0 + 2\bar{z}_0^2) \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4000}(D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\pi}{4000}(-D^2 + h - 3\bar{z}_0^2 - 2Dh + 2D\bar{z}_0). \quad (13)$$

Applicando (8) a ciascuna densità e calcolandone la media otteniamo

$$u_B = 0,0043 \text{ g/cm}^3, \quad (14)$$

applicando quindi (7) otteniamo un'incertezza

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (15)$$

da cui la densità attesa del campione **A-9**

$$\rho = (2,710 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Confrontando il risultato ottenuto con una lista di densità note e sfruttando la nostra *prior* per escluderne una parte, concludiamo che il cilindro **A-9** è fatto di *alluminio* ($\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$).

3.3 Misura della densità dei campioni A

Effettuiamo ora la misura della densità di ognuno dei 30 campioni del gruppo **A**, seguendo il procedimento:

1. numerazione dei campioni;
2. misura della altezza e del diametro di ogni cilindro con il calibro Palmer, scelto in quanto presenta incertezza inferiore a quella del nonio, una sola volta per ciascuno;
3. misura della massa di ogni cilindro con la bilancia di precisione;
4. calcolo della densità di ogni campione.

I risultati delle misure sono riportati nella tabella 4 per ciascun campione numerato, attraverso l'equazione (6) è possibile da essi calcolare volume e densità per ciascun campione ottenendo i risultati della tabella 6, i valori della densità sono sintetizzati nella tabella 7.

Per ottenere la miglior stima dell'incertezza sulla densità media dei trenta campioni, adottiamo gli stessi calcoli discussi nella sezione 3.2 ottenendo, come ha senso che sia, una propagazione media delle incertezze sulla densità data da

$$u_B = 0,0043 \text{ g/cm}^3 \quad (16)$$

identica (nel limite dell'approssimazione), a quella calcolata nella sezione 3.2⁶, da cui, utilizzando la relazione (7), si calcola l'incertezza sulla densità

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (17)$$

da cui la densità attesa dei trenta campioni

$$\rho = (2,696 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (18)$$

che, come prima, è assolutamente compatibile con la densità dell'*alluminio* (2,70 g/cm³).

3.4 Misura della densità del campione B

Il campione B, che mostra lo stesso aspetto dei campioni **A**, è un cilindro con dimensioni maggiori rispetto ai precedenti. La procedura seguita per determinarne la densità è la seguente:

1. misura unica dell'altezza con il calibro a nonio (in quanto è al di fuori della portata del calibro Palmer);
2. misura unica del diametro con il calibro Palmer (in quanto più accurato del nonio);
3. misura unica della massa con la bilancia di precisione.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella ???. L'altezza, a differenza dei due casi precedenti, non è affetta da offset essendo stata misurata con il nonio, il volume è quindi dato da

$$V = \frac{\pi}{4000} (D - \bar{z}_0)^2 h \quad (19)$$

in cui si è usata la stessa notazione di sopra, da (19) si ricavano le derivate parziali

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4000} (2Dh - 2\bar{z}_0 h) \quad (20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4000} (D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\pi}{4000} (2\bar{z}_0 h - 2Dh). \quad (22)$$

Inoltre possiamo assumere per diametro, altezza e massa le stesse deviazioni standard ricavate nella sezione 3.2 dato che avevamo misurato l'altezza sia col nonio che col Palmer, applicandole alla singola misura e non ad una media. L'incertezza sulla densità è data dalla formula

$$\sigma_T = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \quad (23)$$

⁶Il risultato ha senso se si ricorda che tale valore è la media delle propagazioni delle singole incertezze su massa, diametro e altezza: poiché queste misure sono state fatte con gli stessi strumenti e nelle stesse condizioni, e poiché le misure non discostano eccessivamente tra di loro, è naturale aspettarsi che le misure coerenti siano affette da incertezze (praticamente) uguali.

dove σ_m è la semplice somma in quadratura della deviazione standard calcolata nella sezione 3.2 con l'incertezza strumentale della bilancia, mentre σ_V è data dalla formula (10) dove le derivate parziali sono quelle di (20). Svolti i conti, la formula (23) permette di calcolare l'incertezza

$$\sigma_T = 0,0041 \text{ g/cm}^3$$

da cui la stima per la densità del campione **B**:

$$\rho = (2,702 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

nuovamente in piena compatibilità con l'*alluminio*.

3.5 Misura della densità del campione C

Il campione **C** è un cilindro che presenta un foro in prossimità della base, che approssimiamo a sua volta come un cilindro di altezza pari al diametro del campione, e di cui calcoliamo il diametro con il calibro a nonio. La procedura seguita per determinarne la densità è la seguente:

1. misura unica del diametro del campione con il calibro Palmer;
2. misura unica dell'altezza del campione con il calibro Palmer;
3. misura unica del diametro del foro con il calibro a nonio;
4. misura unica della massa del campione con la bilancia di precisione;
5. stima della densità con relativa incertezza e determinazione del materiale di cui il campione è costituito.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella ??.

3.6 Misura della densità dei campioni A con metodo grafico

Adottiamo ora un altro metodo per determinare la densità dei campioni **A**, suddividendoli in 10 gruppi di cui misuriamo in modo integrale massa e volume, quest'ultimo mediante la variazione del livello di acqua in una provetta graduata.

Rappresentando poi i dati su di un grafico, individuiamo la migliore retta che li approssima, il cui coefficiente angolare è legato alla densità dei campioni stessi.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella 3, e nel grafico (figura ??). Per confronto con quanto realizzato a mano in laboratorio, si riporta il grafico (figura 1) generato con R in un secondo momento. Abbiamo scelto di porre sull'asse delle ascisse la massa e su quello delle ordinate la variazione di volume rispetto a quello misurato inizialmente nella provetta, in quanto quest'ultimo è affetto da un'incertezza molto maggiore di quella della massa.

Il coefficiente angolare della retta che approssima meglio i dati è

$$m = \frac{V_2 - V_1}{m_2 - m_1}$$

dove i punti sono stati scelti sulla retta e non sono dati sperimentali, in quanto la retta ne tiene già conto nel complesso. Sono stati scelti quindi i valori

$$m_1 = 14,000 \text{ g}, \quad V_1 = 5,0 \text{ mL};$$

$$m_2 = 149,000 \text{ g}, \quad V_2 = 55,0 \text{ mL}.$$

Poiché la densità si ottiene dal rapporto

$$\rho = \frac{m}{V},$$

l'inverso del coefficiente angolare della retta sarà pari alla nostra stima della densità con metodo grafico:

$$\rho = \frac{149,000 - 14,000}{55,0 - 5,0} \frac{\text{g}}{\text{mL}} = 2,700 \frac{\text{g}}{\text{mL}};$$

Per propagare l'errore su tale valore, dunque, sommiamo in quadratura gli errori relativi di massa e volume:

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2}$$

Dove gli errori assoluti su massa e volume sono ottenuti propagando l'incertezza sulla differenza dei valori finale e iniziale

$$\sigma_{\Delta V} = \sqrt{2\sigma_V} = 0,7 \text{ mL} \quad \text{ricordando che } \sigma_V = 0,5 \text{ mL}$$

$$\sigma_{\Delta m} = \sqrt{2\sigma_m} = 5,7 \times 10^{-4} \text{ g} \quad \text{ricordando che } \sigma_m = 0,0004 \text{ g};$$

Perciò

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0,014 \Rightarrow \sigma_\rho = 0,038 \frac{\text{g}}{\text{mL}}.$$

La stima della densità con metodo grafico è dunque

$$\boxed{(2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{mL}} = (2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}.$$

É evidente che l'incertezza su tale stima, che è pari all'1,5%, sia maggiore rispetto a quella ottenuta con i metodi precedenti. Riteniamo che questo sia dovuto alla minore precisione nella misura del volume ottenuta attraverso la variazione del livello di acqua nella provetta rispetto al calcolo indiretto misurando le dimensioni con il più preciso calibro Palmer.

4 Considerazioni finali

Figura 1: Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di *best fit*, generato con R.

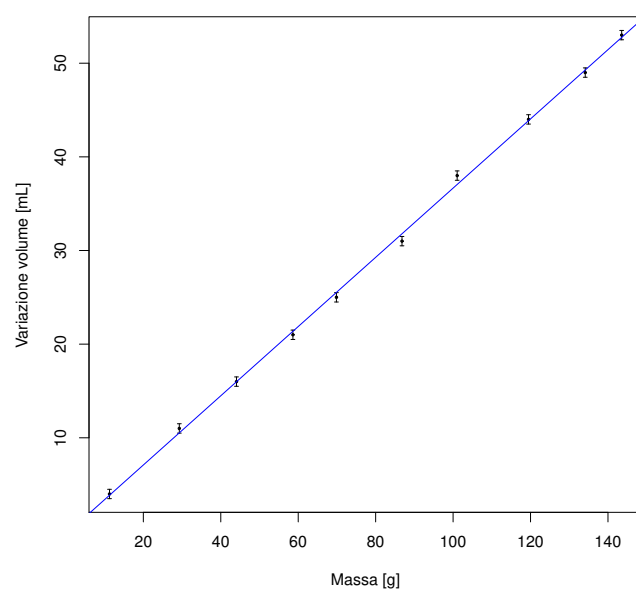


Tabella 1: 30 misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sul cilindro 9 dei campioni A. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure.

| Altezza-Palmer(mm) ($\pm 0,001$) | Altezza-nonio(mm) ($\pm 0,05$) | Diametro-Palmer(mm) ($\pm 0,001$) | Massa(g) ($\pm 0,0003$) |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--|------------------------------|
| 20,018 | 20,15 | 11,975 | 6,1070 |
| 20,021 | 20,05 | 11,985 | 6,1080 |
| 20,019 | 20,10 | 12,018 | 6,1070 |
| 20,020 | 20,10 | 11,974 | 6,1070 |
| 20,019 | 20,10 | 11,983 | 6,1080 |
| 20,011 | 20,05 | 11,985 | 6,1080 |
| 20,021 | 20,10 | 11,978 | 6,1050 |
| 20,019 | 20,10 | 11,979 | 6,1080 |
| 20,015 | 20,10 | 11,986 | 6,1070 |
| 20,011 | 20,15 | 11,980 | 6,1090 |
| 20,011 | 20,10 | 11,982 | 6,1090 |
| 20,015 | 20,05 | 11,979 | 6,1090 |
| 20,011 | 20,05 | 11,989 | 6,1080 |
| 20,015 | 20,10 | 11,990 | 6,1090 |
| 20,020 | 20,05 | 11,981 | 6,1090 |
| 20,012 | 20,05 | 11,982 | 6,1080 |
| 20,009 | 20,05 | 11,978 | 6,1070 |
| 20,015 | 20,10 | 11,984 | 6,1090 |
| 20,015 | 20,10 | 11,980 | 6,1090 |
| 20,019 | 20,05 | 11,971 | 6,1080 |
| 20,025 | 20,05 | 11,989 | 6,1090 |
| 20,019 | 20,05 | 11,984 | 6,1080 |
| 20,020 | 20,10 | 11,980 | 6,1070 |
| 20,010 | 20,10 | 11,991 | 6,1080 |
| 20,010 | 20,10 | 11,980 | 6,1070 |
| 20,021 | 20,05 | 11,975 | 6,1080 |
| 20,020 | 20,10 | 11,992 | 6,1090 |
| 20,025 | 20,10 | 11,981 | 6,1100 |
| 20,010 | 20,10 | 11,973 | 6,1080 |
| 20,020 | 20,15 | 11,978 | 6,1080 |

Tabella 2: Riepilogo dei valori di altezza misurata con Palmer e nonio, diametro misurato con Palmer e massa del cilindro 9 dei campioni A.

| | Media | σ^2 | σ | Max | Min |
|---------------------|--------|------------|----------|--------|--------|
| Altezza-Palmer(mm) | 20,017 | 2,0e-5 | 0,00468 | 20,025 | 20,009 |
| Altezza-nonio(mm) | 20,09 | 9,9e-5 | 0,03198 | 20,15 | 20,05 |
| Diametro-Palmer(mm) | 11,983 | 7,0e-5 | 0,00854 | 12,018 | 11,971 |
| Massa(g) | 6,1080 | 1,0e-06 | 0,00100 | 6,1100 | 6,1050 |

Tabella 3: Misure della variazione del livello dell'acqua in una provetta graduata in seguito all'inserimento graduale di 10 gruppi di 3 cilindri.

| | Massa(g) | Volume V (ml) | Variazione volume ΔV (ml) |
|------------------------------------|----------|-----------------|-----------------------------------|
| Incertezza: | 0,0003 | 0,5 | 0,5 |
| Condizione iniziale ¹ : | 0,0000 | 115,0 | 0,0 |
| 1 | 11,2620 | 119,0 | 4,0 |
| 2 | 29,2920 | 126,0 | 11,0 |
| 3 | 44,0600 | 131,0 | 16,0 |
| 4 | 58,6300 | 136,0 | 21,0 |
| 5 | 69,8700 | 140,0 | 25,0 |
| 6 | 86,8000 | 146,0 | 31,0 |
| 7 | 101,0500 | 153,0 | 38,0 |
| 8 | 119,4800 | 159,0 | 44,0 |
| 9 | 134,1300 | 164,0 | 49,0 |
| 10 | 143,5400 | 168,0 | 53,0 |

¹ Equivale alla lettura del livello dell'acqua nella provetta prima che alcun campione venisse inserito.

Tabella 4: Singole misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sui 30 cilindri. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure.

| | Altezza-Palmer(mm) | Diametro-Palmer(mm) | Massa(g) |
|-------------|--------------------|---------------------|----------|
| Incertezza: | 0,001 | 0,001 | 0,0003 |
| Media: | 20,024 | 10,500 | 4,7842 |
| 1 | 21,060 | 11,970 | 6,0960 |
| 2 | 20,080 | 11,960 | 6,0610 |
| 3 | 20,012 | 7,950 | 2,6940 |
| 4 | 19,820 | 11,915 | 5,9850 |
| 5 | 20,019 | 9,972 | 4,2630 |
| 6 | 20,050 | 11,955 | 6,1080 |
| 7 | 18,905 | 8,050 | 2,6000 |
| 8 | 20,040 | 7,970 | 2,7030 |
| 9 | 20,017 | 11,983 | 6,1070 |
| 10 | 18,178 | 9,935 | 3,8130 |
| 11 | 19,990 | 7,969 | 2,6940 |
| 12 | 19,995 | 11,960 | 6,0990 |
| 13 | 20,030 | 9,945 | 4,2180 |
| 14 | 20,030 | 11,945 | 6,1050 |
| 15 | 19,694 | 11,920 | 5,9330 |
| 16 | 20,019 | 9,955 | 4,2100 |
| 17 | 20,005 | 11,970 | 6,1110 |
| 18 | 20,596 | 9,952 | 4,3310 |
| 19 | 18,320 | 11,922 | 5,5110 |
| 20 | 19,975 | 7,960 | 2,6940 |
| 21 | 22,020 | 8,050 | 3,0420 |
| 22 | 20,705 | 9,960 | 4,3330 |
| 23 | 20,020 | 11,962 | 6,1060 |
| 24 | 20,740 | 11,940 | 6,2590 |
| 25 | 22,372 | 9,955 | 4,7090 |
| 26 | 20,090 | 9,989 | 4,0240 |
| 27 | 17,945 | 8,055 | 2,4620 |
| 28 | 20,010 | 11,960 | 6,0580 |
| 29 | 19,970 | 11,978 | 6,0890 |
| 30 | 20,021 | 11,985 | 6,1080 |

Tabella 5: Misure di Offset registrate sul Palmer

| Offset (mm) | |
|-------------|-------|
| Media: | 0,006 |
| σ : | 0,004 |
| 1 | 0.005 |
| 2 | 0.009 |
| 3 | 0.009 |
| 4 | 0.005 |
| 5 | 0.005 |
| 6 | 0.001 |
| 7 | 0.000 |
| 8 | 0.009 |
| 9 | 0.010 |
| 10 | 0.009 |

Tabella 6: Misure di volume e densità dei 30 campioni

| | Volume (cm^3) | ρ ($\frac{g}{cm^3}$) |
|----|-------------------|-----------------------------|
| 1 | 2,370 | 2,572 |
| 2 | 2,256 | 2,687 |
| 3 | 0,993 | 2,712 |
| 4 | 2,210 | 2,708 |
| 5 | 1,563 | 2,727 |
| 6 | 2,251 | 2,714 |
| 7 | 0,962 | 2,702 |
| 8 | 1,000 | 2,704 |
| 9 | 2,257 | 2,705 |
| 10 | 1,409 | 2,706 |
| 11 | 0,997 | 2,702 |
| 12 | 2,246 | 2,715 |
| 13 | 1,556 | 2,711 |
| 14 | 2,245 | 2,720 |
| 15 | 2,198 | 2,700 |
| 16 | 1,558 | 2,702 |
| 17 | 2,251 | 2,715 |
| 18 | 1,602 | 2,703 |
| 19 | 2,045 | 2,695 |
| 20 | 0,994 | 2,710 |
| 21 | 1,121 | 2,714 |
| 22 | 1,613 | 2,686 |
| 23 | 2,250 | 2,714 |
| 24 | 2,322 | 2,695 |
| 25 | 1,741 | 2,704 |
| 26 | 1,574 | 2,556 |
| 27 | 0,914 | 2,692 |
| 28 | 2,248 | 2,695 |
| 29 | 2,250 | 2,706 |
| 30 | 2,259 | 2,704 |

Tabella 7: Considerazioni globali su volume e densità dei 30 campioni

| | Media | σ^2 | σ | Max | Min |
|-----------------------------|-------|------------|----------|-------|-------|
| Volume (cm^3) | 1,775 | 0,2663 | 0,5249 | 2,370 | 0,915 |
| ρ ($\frac{g}{cm^3}$) | 2,696 | 0,0013 | 0,0371 | 2,727 | 2,556 |

Tabella 8: Misure di volume e densità ripetute 30 volte sul campione 9

| | Volume (cm^3) | ρ ($\frac{g}{cm^3}$) |
|----|-------------------|-----------------------------|
| 1 | 2,255 | 2,709 |
| 2 | 2,259 | 2,704 |
| 3 | 2,271 | 2,689 |
| 4 | 2,254 | 2,709 |
| 5 | 2,258 | 2,705 |
| 6 | 2,258 | 2,706 |
| 7 | 2,256 | 2,706 |
| 8 | 2,256 | 2,707 |
| 9 | 2,258 | 2,704 |
| 10 | 2,256 | 2,708 |
| 11 | 2,256 | 2,707 |
| 12 | 2,256 | 2,708 |
| 13 | 2,259 | 2,704 |
| 14 | 2,260 | 2,703 |
| 15 | 2,257 | 2,707 |
| 16 | 2,257 | 2,707 |
| 17 | 2,255 | 2,709 |
| 18 | 2,258 | 2,706 |
| 19 | 2,256 | 2,708 |
| 20 | 2,253 | 2,711 |
| 21 | 2,261 | 2,702 |
| 22 | 2,258 | 2,705 |
| 23 | 2,257 | 2,706 |
| 24 | 2,260 | 2,703 |
| 25 | 2,256 | 2,708 |
| 26 | 2,255 | 2,709 |
| 27 | 2,261 | 2,702 |
| 28 | 2,258 | 2,706 |
| 29 | 2,253 | 2,711 |
| 30 | 2,256 | 2,708 |

Tabella 9: Considerazioni globali su volume e densità del campione 9

| | Media | σ^2 | σ | Max | Min |
|-----------------------------|-------|------------|----------|-------|-------|
| Volume (cm^3) | 2,257 | 1,0386e-05 | 0,0033 | 2,271 | 2,253 |
| ρ ($\frac{g}{cm^3}$) | 2,706 | 1,4833e-05 | 0,0039 | 2,711 | 2,689 |