



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

MISURE DI *densità*

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

M. Rescigno

GRUPPO B2.3

Esperienza di laboratorio
27 marzo 2017

Consegna della relazione
3 aprile 2017

Sommario

La densità è definita come il rapporto tra massa e volume, ed è una proprietà intensiva della materia.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

In questa esperienza ci proponiamo di compiere misure di densità di diversi campioni, adottando diversi procedimenti operativi e al fine di determinare il materiale di cui è composto un campione incognito.

Indice

Elenco delle tabelle

0 Convenzioni e formule

In questa relazione verranno usate le seguenti convenzioni:

1. sarà usata la virgola [,] come separatore decimale;
2. l'approssimazione decimale della cifra 5 sarà fatta per eccesso;
3. al fine di migliorare la qualità dell'elaborazione dei dati, ogni grafico/istogramma prodotto a mano su carta millimetrata sarà riportato insieme al suo equivalente prodotto attraverso un software di analisi dati¹;
4. tutti i conti e i risultati parziali saranno presentati senza tenere cura delle cifre significative, i risultati finali saranno invece presentati correttamente.

Inoltre, si farà riferimento alle seguenti formule:

1. media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (1)$$

2. varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad (2)$$

3. deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (3)$$

1 Scopo e descrizione dell'esperienza

L'esperienza si sviluppa secondo 5 operazioni sperimentali:

1. misura della densità di un singolo campione, al fine di determinare il materiale di cui è costituito;
2. misura di 30 campioni dello stesso materiale, per migliorare la stima precedente della densità;
3. misura di un campione dello stesso materiale dei precedenti, ma con dimensioni differenti, con l'obiettivo di verificare la compatibilità del materiale con quello costitutivo dei 30 campioni;
4. misura della densità di un singolo campione di materiale differente, al fine di identificarne la composizione;
5. determinazione della densità dei campioni già misurati nella seconda fase, utilizzando un metodo grafico.

¹In questo contesto i dati sono stati elaborati con il software di analisi *R*.

2 Apparato Sperimentale

2.1 Strumenti

- Bilancia di precisione [risoluzione 0,001 g, incertezza 0,0003 g, portata 7500 g];
- Calibro a nonio ventesimale [divisione 0,05 mm, incertezza 0,05 mm, portata 20 cm];
- Calibro Palmer [divisione 0,01 mm, incertezza 0,001 mm, portata 25 mm];
- Provetta graduata [divisione 2 mL, incertezza 0,5 mL];

2.2 Campioni

- **A**: 30 cilindri di dimensioni variabili e materiale incognito (colore argentato lucido²);
- **B**: cilindro dello stesso materiale dei campioni **A**, ma di diversa dimensione;
- **C**: cilindro con foro prossimo alla base di diverso materiale rispetto ai precedenti (colore dorato lucido³).

3 Sequenza Operazioni Sperimentali

3.1 Verifica degli strumenti

Un primo controllo sugli strumenti di misura ci porta a concludere che il calibro ventesimale è ben tarato e non presenta offset evidenti (come, d'altronde, ci aspettavamo per il modo di costruzione dello strumento); il calibro Palmer risulta invece essere soggetto di un offset di valutazione incerta, approfondiremo il problema nella sezione ???. La bilancia di precisione può essere tarata a 0 prima di ogni misurazione; la provetta graduata sarà invece riempita fino a un certo livello e si valuteranno le differenze di indicazioni segnate, permettendo dunque di escludere l'incertezza del valore considerato come 0.

3.2 Misura della densità di un singolo campione

Scegliamo come campione dal gruppo **A** il cilindro che abbiamo numerato 9, quindi ne misuriamo 30 volte l'altezza con il calibro a nonio e con il calibro Palmer. Scelto il calibro Palmer per proseguire le misurazioni, come argomentato più avanti, misuriamo 30 volte il diametro e poi 30 volte la massa con la bilancia di precisione. Tutti i dati sperimentali raccolti sono riportati nella tabella ??.

²Utilizziamo il colore e l'aspetto dei campioni come *prior* per escludere materiali come legno, vetro o oro, e dunque per escludere eventuali evidenti errori nella misura.

³vedi nota ??

Scelta tra calibro ventesimale e calibro Palmer Per determinare quale tra il calibro ventesimale e il calibro Palmer sia più adatto alla nostra esperienza, e di conseguenza per determinare lo strumento con il quale effettuare il resto delle misure di questa sezione, confrontiamo le incertezze relative all'altezza nei due diversi casi.

Le misure con il calibro a nonio sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,086\,67\text{ mm} \quad \sigma = 0,031\,98\text{ mm}$$

dove con \bar{h} intendiamo la media calcolata con (??), mentre con σ intendiamo la deviazione standard calcolata con (??). Per quanto detto nella sezione ??, il calibro a nonio non presenta alcun errore di calibrazione nella misura dello 0, non essendo uno strumento tendenzialmente affetto da offset considereremo credibile questo risultato e non propagheremo un'eventuale incertezza nella misura dello 0. L'errore di tipo B stimato per questo strumento è quello riportato nella sezione ??, cioè $u_n = 0,05\text{ mm}$. La misura dell'altezza h effettuata con il calibro a nonio è quindi soggetta ad un'incertezza σ_T stimabile come

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_n^2} = 0,05\text{ mm}.$$

Risultato prevedibile in quanto $\sigma/\sqrt{30}$ è di diversi ordini di grandezza inferiore di u_n . L'incertezza relativa all'altezza misurata con il calibro a nonio è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{\bar{h}} = 0,25\%. \quad (4)$$

Le misure con il calibro Palmer sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,016\,53\text{ mm} \quad \sigma = 0,004\,68\text{ mm}$$

con le stesse notazioni di prima. A differenza del calibro a nonio, il Palmer è uno strumento meccanicamente predisposto ad errori di offset e in questo caso specifico, facendo 10 misure dello 0⁴, risulta

$$\bar{z} = 0,006\text{ mm} \quad \sigma_z = 0,0035\text{ mm},$$

le misure dell'offset sono riportate nella tabella ??. Dovremo quindi tener conto anche della dispersione dell'offset nella propagazione dell'incertezza su questa misura. L'incertezza di tipo B del calibro Palmer può essere stimata nell'ordine di $u_p = 0,001\text{ mm}$, propagando l'errore sulla misura otteniamo

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2u_p^2} = 0,0020\text{ mm}$$

dove abbiamo considerato l'incertezza strumentale sia nella misura dell'altezza che in quella dello 0. L'incertezza relativa è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{\bar{h}} = 0,01\%. \quad (5)$$

⁴La scelta di calcolare la dispersione sull'offset effettuando più misure invece di usare quella già trovata misurando le altezze è giustificata dal fatto che non possiamo essere sicuri dell'assoluta linearità della risposta dello strumento, esso potrebbe infatti avere una risposta diversa nei pressi dello 0.

Appare quindi immediatamente evidente che l'incertezza sulle misure effettuate con il calibro Palmer è nettamente inferiore di quella sulle misure del nonio, abbiamo quindi scelto il calibro Palmer per effettuare (ove possibile) le successive misure di lunghezza.

Dopo aver effettuato tutte le misure necessarie (sintetizzate nella tabella ??), ossia altezza, diametro e massa di ogni cilindro, siamo in grado di calcolare la densità relativa ad ogni misura attraverso l'equazione

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{10}} \quad (6)$$

che restituisce la densità in g/cm^3 , ottenendo i dati riportati nella tabella ?. Di queste 30 misure di densità possiamo ricavarne media ($\bar{\rho}$) e deviazione standard (σ), in particolare:

$$\bar{\rho} = 2,7095 \text{ g/cm}^3 \quad \sigma = 0,004 \text{ g/cm}^3.$$

L'incertezza su questa media si stima come

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2} \quad (7)$$

dove con σ si intende la deviazione standard sulle trenta misure, mentre u_B è la media delle incertezze propagate su ciascuna misura di densità, calcolate con la formula

$$u_B = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} \quad (8)$$

dove σ_m e σ_V sono le incertezze sulla massa e sul volume, la prima è data da

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B(m)^2} \quad (9)$$

dove σ è la deviazione sulle trenta misure e $u_B(m)$ l'incertezza strumentale sulla bilancia; l'incertezza sul volume è invece data da

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0}\right)_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_{\bar{z}_0}^2 \quad (10)$$

dove intendiamo con $\sigma_D, \sigma_h, \sigma_{\bar{z}_0}$ le incertezze rispettivamente su diametro, altezza e offset, con D e h intendiamo i valori misurati di diametro e di altezza (quindi senza la correzione dell'offset) su ogni misura e con \bar{z}_0 l'offset medio; scrivendo il volume in funzione dei valori misurati di diametro e di altezza (misurati in [mm]) e del valore dell'offset, in modo da rendere le misure scorrelate, e derivando parzialmente otteniamo

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4000} (2Dh - 2D\bar{z}_0 - 2h\bar{z}_0 + 2\bar{z}_0^2) \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4000} (D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\pi}{4000} (-D^2 + h - 3\bar{z}_0^2 - 2Dh + 2D\bar{z}_0). \quad (13)$$

Applicando (??) a ciascuna densità e calcolandone la media otteniamo

$$u_B = 0,0043 \text{ g/cm}^3, \quad (14)$$

applicando quindi (??) otteniamo un'incertezza

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (15)$$

da cui la densità attesa del campione **A-9**

$$\rho = (2,710 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Confrontando il risultato ottenuto con una lista di densità note e sfruttando la nostra *prior* per escluderne una parte, concludiamo che il cilindro **A-9** è fatto di *alluminio* ($\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$).

Tabella 1: 30 misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sul cilindro 9 dei campioni A. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure.

Altezza-Palmer(mm) ($\pm 0,001$)	Altezza-nonio(mm) ($\pm 0,05$)	Diametro-Palmer(mm) ($\pm 0,001$)	Massa(g) ($\pm 0,0003$)
20,018	20,15	11,975	6,1070
20,021	20,05	11,985	6,1080
20,019	20,10	12,018	6,1070
20,020	20,10	11,974	6,1070
20,019	20,10	11,983	6,1080
20,011	20,05	11,985	6,1080
20,021	20,10	11,978	6,1050
20,019	20,10	11,979	6,1080
20,015	20,10	11,986	6,1070
20,011	20,15	11,980	6,1090
20,011	20,10	11,982	6,1090
20,015	20,05	11,979	6,1090
20,011	20,05	11,989	6,1080
20,015	20,10	11,990	6,1090
20,020	20,05	11,981	6,1090
20,012	20,05	11,982	6,1080
20,009	20,05	11,978	6,1070
20,015	20,10	11,984	6,1090
20,015	20,10	11,980	6,1090
20,019	20,05	11,971	6,1080
20,025	20,05	11,989	6,1090
20,019	20,05	11,984	6,1080
20,020	20,10	11,980	6,1070
20,010	20,10	11,991	6,1080
20,010	20,10	11,980	6,1070
20,021	20,05	11,975	6,1080
20,020	20,10	11,992	6,1090
20,025	20,10	11,981	6,1100
20,010	20,10	11,973	6,1080
20,020	20,15	11,978	6,1080

Tabella 2: Misure di Offset registrate sul Palmer

Offset (mm)	
Media:	0,006
σ :	0,004
1	0,005
2	0,009
3	0,009
4	0,005
5	0,005
6	0,001
7	0,000
8	0,009
9	0,010
10	0,009

Tabella 3: Riepilogo dei valori di altezza misurata con Palmer e nonio, diametro misurato con Palmer e massa del cilindro 9 dei campioni A.

	Media	σ	Max	Min
Altezza - Palmer (mm)	20,017	0,005	20,025	20,009
Altezza - nonio (mm)	20,09	0,03	20,15	20,05
Diametro - Palmer (mm)	11,983	0,009	12,018	11,971
Massa (g)	6,1080	0,0010	6,1100	6,1050

Tabella 4: Misure di volume e densità ripetute 30 volte sul campione 9

	Volume (cm^3)	ρ ($\frac{g}{cm^3}$)
1	2,255	2,709
2	2,259	2,704
3	2,271	2,689
4	2,254	2,709
5	2,258	2,705
6	2,258	2,706
7	2,256	2,706
8	2,256	2,707
9	2,258	2,704
10	2,256	2,708
11	2,256	2,707
12	2,256	2,708
13	2,259	2,704
14	2,260	2,703
15	2,257	2,707
16	2,257	2,707
17	2,255	2,709
18	2,258	2,706
19	2,256	2,708
20	2,253	2,711
21	2,261	2,702
22	2,258	2,705
23	2,257	2,706
24	2,260	2,703
25	2,256	2,708
26	2,255	2,709
27	2,261	2,702
28	2,258	2,706
29	2,253	2,711
30	2,256	2,708

3.3 Misura della densità dei campioni A

Effettuiamo ora la misura della densità di ognuno dei 30 campioni del gruppo **A**. Dopo averli numerati, ne misuriamo diametro e altezza una volta con il calibro Palmer, e la massa con la bilancia di precisione. I risultati delle misure sono riportati nella tabella ?? per ciascun campione numerato, attraverso l'equazione (??) è possibile da essi calcolare volume e densità per ciascun campione ottenendo i risultati della tabella ??; i valori della densità sono sintetizzati nella tabella ??.

Per ottenere la miglior stima dell'incertezza sulla densità media dei trenta campioni, adottiamo gli stessi calcoli discussi nella sezione ?? ottenendo, come ha senso che sia, una propagazione media delle incertezze sulla densità data da

$$u_B = 0,0043 \text{ g/cm}^3 \quad (16)$$

identica (nel limite dell'approssimazione), a quella calcolata nella sezione ??⁵, da cui, utilizzando la relazione (??), si calcola l'incertezza sulla densità

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (17)$$

da cui la densità attesa dei trenta campioni

$$\boxed{\rho = (2,696 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \quad (18)$$

che, come prima, è assolutamente compatibile con la densità dell'*alluminio* (2,70 g/cm³).

⁵Il risultato ha senso se si ricorda che tale valore è la media delle propagazioni delle singole incertezze su massa, diametro e altezza: poiché queste misure sono state fatte con gli stessi strumenti e nelle stesse condizioni, e poiché le misure non si discostano eccessivamente tra di loro, è naturale aspettarsi che le misure coerenti siano affette da incertezze (praticamente) uguali.

Tabella 5: Singole misurazioni di altezza con Palmer e nonio, di diametro con Palmer e di massa sui 30 cilindri. Viene riportata in alto l'incertezza degli strumenti e la media delle misure.

	Altezza-Palmer(mm)	Diametro-Palmer(mm)	Massa(g)
Incertezza:	0,001	0,001	0,0003
Media:	20,024	10,500	4,7842
1	21,060	11,970	6,0960
2	20,080	11,960	6,0610
3	20,012	7,950	2,6940
4	19,820	11,915	5,9850
5	20,019	9,972	4,2630
6	20,050	11,955	6,1080
7	18,905	8,050	2,6000
8	20,040	7,970	2,7030
9	20,017	11,983	6,1070
10	18,178	9,935	3,8130
11	19,990	7,969	2,6940
12	19,995	11,960	6,0990
13	20,030	9,945	4,2180
14	20,030	11,945	6,1050
15	19,694	11,920	5,9330
16	20,019	9,955	4,2100
17	20,005	11,970	6,1110
18	20,596	9,952	4,3310
19	18,320	11,922	5,5110
20	19,975	7,960	2,6940
21	22,020	8,050	3,0420
22	20,705	9,960	4,3330
23	20,020	11,962	6,1060
24	20,740	11,940	6,2590
25	22,372	9,955	4,7090
26	20,090	9,989	4,0240
27	17,945	8,055	2,4620
28	20,010	11,960	6,0580
29	19,970	11,978	6,0890
30	20,021	11,985	6,1080

Tabella 6: Misure di volume e densità dei 30 campioni

	Volume (cm^3)	ρ ($\frac{g}{cm^3}$)
1	2,370	2,572
2	2,256	2,687
3	0,993	2,712
4	2,210	2,708
5	1,563	2,727
6	2,251	2,714
7	0,962	2,702
8	1,000	2,704
9	2,257	2,705
10	1,409	2,706
11	0,997	2,702
12	2,246	2,715
13	1,556	2,711
14	2,245	2,720
15	2,198	2,700
16	1,558	2,702
17	2,251	2,715
18	1,602	2,703
19	2,045	2,695
20	0,994	2,710
21	1,121	2,714
22	1,613	2,686
23	2,250	2,714
24	2,322	2,695
25	1,741	2,704
26	1,574	2,556
27	0,914	2,692
28	2,248	2,695
29	2,250	2,706
30	2,259	2,704

3.4 Misura della densità del campione B

Il campione B, che mostra lo stesso aspetto dei campioni **A**, è un cilindro con dimensioni maggiori rispetto ai precedenti. Ne misuriamo l'altezza con il calibro a nonio, in quanto essa è fuori dalla portata del Palmer, il diametro con il calibro Palmer e la massa con la bilancia di precisione. I dati ottenuti sono riportati nella tabella ??.

L'altezza, a differenza dei due casi precedenti, non è affetta da offset essendo stata misurata con il nonio, il volume è quindi dato da

$$V = \frac{\pi}{4000}(D - \bar{z}_0)^2 h \quad (19)$$

in cui si è usata la stessa notazione di sopra, da (??) si ricavano le derivate

parziali

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4000}(2Dh - 2\bar{z}_0h) \quad (20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4000}(D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\pi}{4000}(2\bar{z}_0h - 2Dh). \quad (22)$$

Inoltre possiamo assumere per diametro, altezza e massa le stesse deviazioni standard ricavate nella sezione ?? dato che avevamo misurato l'altezza sia col nonio che col Palmer, applicandole alla singola misura e non ad una media. L'incertezza sulla densità è data dalla formula

$$\sigma_T = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \quad (23)$$

dove σ_m è la semplice somma in quadratura della deviazione standard calcolata nella sezione ?? con l'incertezza strumentale della bilancia, mentre σ_V è data dalla formula (??) dove le derivate parziali sono quelle di (??). Svolti i conti, la formula (??) permette di calcolare l'incertezza

$$\sigma_T = 0,001\,05\,\text{g/cm}^3$$

da cui la stima per la densità del campione **B**:

$$\rho = (2,70 \pm 0,01) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

nuovamente in piena compatibilità con l'*alluminio*.

3.5 Misura della densità del campione C

Il campione **C** è un cilindro che presenta un foro in prossimità della base, che approssimiamo a sua volta come un cilindro di altezza pari al diametro del campione, e di cui calcoliamo il diametro con il calibro a nonio; misuriamo invece il diametro e l'altezza del campione con il calibro Palmer, e la massa con la bilancia di precisione. Indichiamo con z_0 l'offset del calibro Palmer. I dati ottenuti sono riportati nella tabella ??.

Tabella 7: Dimensioni e massa del campione C.

Altezza campione (h)	$15,220 \pm 0,001$	mm
Diametro campione (D)	$12,990 \pm 0,001$	mm
Diametro foro (d)	$0,300 \pm 0,005$	cm
Massa campione (m)	$16,0210 \pm 0,0003$	g

Calcoliamo dunque il volume che avrebbe il campione se non fosse forato

$$V_{\text{lordo}} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D - z_0}{10}\right)^2 \cdot \frac{h - z_0}{10} = 2,014\,\text{cm}^3,$$

quindi il volume del foro

$$V_{\text{foro}} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{D - z_0}{10} = 0,092 \text{ cm}^3;$$

la densità sarà dunque data da

$$\rho = \frac{m}{V_{\text{lordo}} - V_{\text{foro}}} = 8,336 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Propaghiamo ora l'incertezza su tale valore, tenendo conto delle seguenti incertezze sulle singole grandezze, ottenute sommando in quadratura la deviazione standard della media calcolata con i metodi precedenti (indicata con σ , con abuso di notazione) e l'incertezza strumentale (indicata con u_B , con abuso di notazione):

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2} = 1,85 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\sigma_h = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2} = 1,32 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\sigma_{z_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)^2 + u_B^2} = 1,52 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2} = 5,03 \times 10^{-3} \text{ cm} = 50,3 \times 10^{-3} \text{ mm},$$

Esprimiamo d'ora in avanti il diametro del foro come $d = (3,00 \pm 0,05) \text{ mm}$, cambiando unità di misura per semplificare i calcoli. L'equazione per calcolare il volume netto del campione è

$$V_{\text{netto}} = \frac{\pi}{4000} \left[(D - z_0)^2 (h - z_0) - d^2 (D - z_0) \right],$$

l'incertezza sul volume è dunque data da

$$\sigma_V = \left[\left(\left(\frac{\partial V}{\partial D} \right)_{(D,h,d,z_0)} \sigma_D \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)_{(D,h,d,z_0)} \sigma_h \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial V}{\partial z_0} \right)_{(D,h,d,z_0)} \sigma_{z_0} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial V}{\partial d} \right)_{(D,h,d,z_0)} \sigma_d \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

in cui si ha

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4000} (2Dh - 2Dz_0 - 2z_0h + 2z_0^2 - d^2) = 0,303 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4000} (D^2 - 2Dz_0 + z_0^2) = 0,132 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = \frac{\pi}{4000} (-D^2 - 2Dh + 4Dz_0 + 2z_0h - 3z_0^2 + d^2) = -0,435 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi}{4000} (-2dD + 2dz_0) = -0,061 \text{ cm}^2;$$

sostituendo nell'equazione precedente, l'incertezza sul volume sarà pari a

$$\sigma_V = 3,193 \times 10^{-3} \text{ cm}^3,$$

ricordando che nell'equazione citata avevamo diviso tutte le grandezze espresse in millimetri per 10, in modo da esprimere il volume in cm^3 . L'incertezza sulla densità sarà quindi data dalla somma in quadratura delle incertezze relative di massa e volume, pari a

$$\frac{\sigma_V}{V} = 1,66 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2}}{m} = 2,192 \times 10^{-5},$$

perciò

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \cdot \rho = 0,014 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

La nostra stima della densità del campione **C** è dunque

$$\boxed{(8,336 \pm 0,014) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}.$$

3.6 Misura della densità dei campioni A con metodo grafico

Adottiamo ora un altro metodo per determinare la densità dei campioni **A**, suddividendoli in 10 gruppi di cui misuriamo in modo integrale massa e volume, quest'ultimo mediante la variazione del livello di acqua in una provetta graduata.

Rappresentando poi i dati su di un grafico, individuiamo la migliore retta che li approssima, il cui coefficiente angolare è legato alla densità dei campioni stessi.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella ??, e nel grafico (figura ??). Per confronto con quanto realizzato a mano in laboratorio, si riporta il grafico (figura ??) generato con R in un secondo momento. Abbiamo scelto di porre sull'asse delle ascisse la massa e su quello delle ordinate la variazione di volume rispetto a quello misurato inizialmente nella provetta, in quanto quest'ultimo è affetto da un'incertezza molto maggiore di quella della massa.

Il coefficiente angolare della retta che approssima meglio i dati è

$$m = \frac{V_2 - V_1}{m_2 - m_1}$$

dove i punti sono stati scelti sulla retta e non sono dati sperimentali, in quanto la retta ne tiene già conto nel complesso. Sono stati scelti quindi i valori

$$m_1 = 14,000 \text{ g}, \quad V_1 = 5,0 \text{ mL};$$

$$m_2 = 149,000 \text{ g}, \quad V_2 = 55,0 \text{ mL}.$$

Poiché la densità si ottiene dal rapporto

$$\rho = \frac{m}{V},$$

l'inverso del coefficiente angolare della retta sarà pari alla nostra stima della densità con metodo grafico:

$$\rho = \frac{149,000 - 14,000}{55,0 - 5,0} \frac{\text{g}}{\text{mL}} = 2,700 \frac{\text{g}}{\text{mL}};$$

Tabella 8: Misure della variazione del livello dell'acqua in una provetta graduata in seguito all'inserimento graduale di 10 gruppi di 3 cilindri.

	Massa(g)	Volume V(ml)	Variazione volume ΔV (ml)
Incertezza:	0,0003	0,5	0,5
Condizione iniziale ¹ :	0,0000	115,0	0,0
1	11,2620	119,0	4,0
2	29,2920	126,0	11,0
3	44,0600	131,0	16,0
4	58,6300	136,0	21,0
5	69,8700	140,0	25,0
6	86,8000	146,0	31,0
7	101,0500	153,0	38,0
8	119,4800	159,0	44,0
9	134,1300	164,0	49,0
10	143,5400	168,0	53,0

¹ Equivale alla lettura del livello dell'acqua nella provetta prima che alcun campione venisse inserito.

Per propagare l'errore su tale valore, dunque, sommiamo in quadratura gli errori relativi di massa e volume:

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2}$$

Dove gli errori assoluti su massa e volume sono ottenuti propagando l'incertezza sulla differenza dei valori finale e iniziale

$$\sigma_{\Delta V} = \sqrt{2\sigma_V} = 0,7 \text{ mL} \quad \text{ricordando che } \sigma_V = 0,5 \text{ mL}$$

$$\sigma_{\Delta m} = \sqrt{2\sigma_m} = 5,7 \times 10^{-4} \text{ g} \quad \text{ricordando che } \sigma_m = 0,0004 \text{ g;}$$

Perciò

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0,014 \Rightarrow \sigma_\rho = 0,038 \frac{\text{g}}{\text{mL}}.$$

La stima della densità con metodo grafico è dunque

$$\boxed{(2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{mL}} = (2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}.$$

É evidente che l'incertezza su tale stima, che è pari all'1,5%, sia maggiore rispetto a quella ottenuta con i metodi precedenti. Riteniamo che questo sia dovuto alla minore precisione nella misura del volume ottenuta attraverso la variazione del livello di acqua nella provetta rispetto al calcolo indiretto misurando le dimensioni con il più preciso calibro Palmer.

4 Considerazioni finali

Figura 1: Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di *best fit*, generato con R.

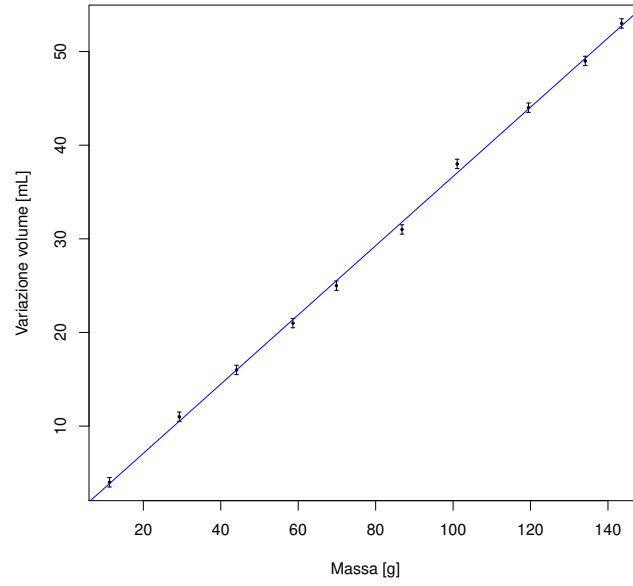


Tabella 9: Considerazioni globali su volume e densità dei 30 campioni

	Media	σ^2	σ	Max	Min
Volume (cm^3)	1,775	0,2663	0,5249	2,370	0,915
ρ ($\frac{g}{cm^3}$)	2,696	0,0013	0,0371	2,727	2,556

Tabella 10: Considerazioni globali su volume e densità del campione 9

	Media	σ^2	σ	Max	Min
Volume (cm^3)	2,257	1,0386e-05	0,0033	2,271	2,253
ρ ($\frac{g}{cm^3}$)	2,706	1,4833e-05	0,0039	2,711	2,689

Figura 2: Istogramma densità di 30 campioni.

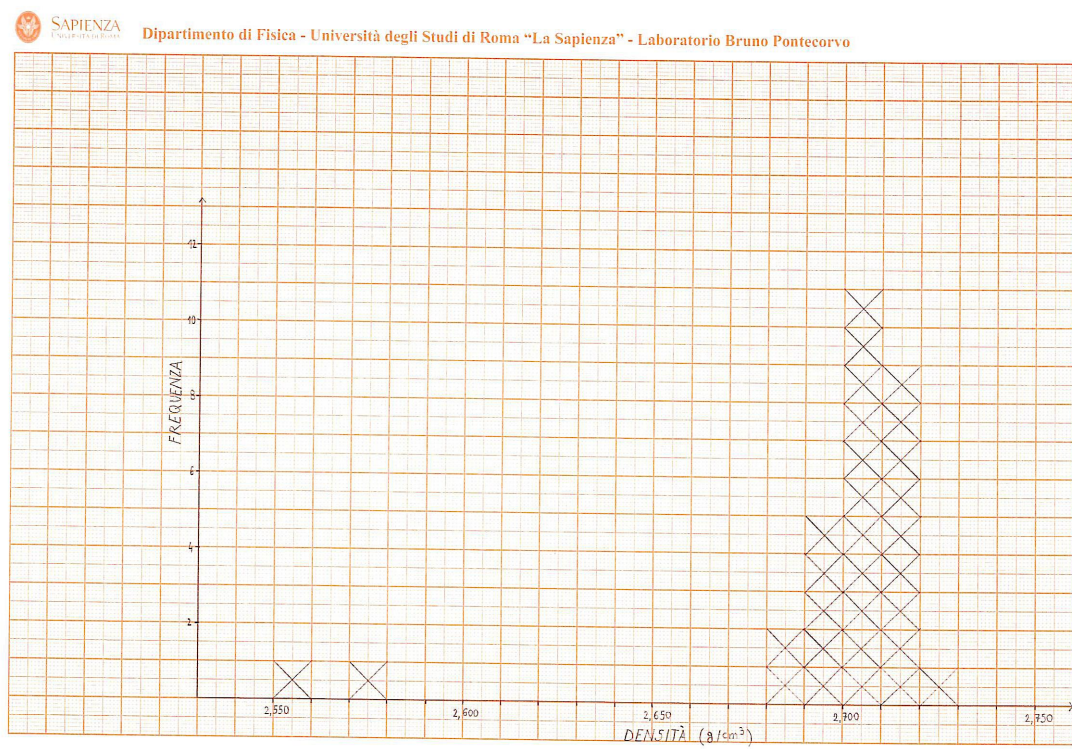


Figura 3: Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di *best fit*.

