



MISURE DI *densità*

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

M. Rescigno

GRUPPO B2.3

Esperienza di laboratorio

27 marzo 2017

Consegna della relazione

3 aprile 2017

Sommario

La densità è definita come il rapporto tra massa e volume, ed è una proprietà intensiva della materia.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

In questa esperienza ci proponiamo di compiere misure di densità di diversi campioni, adottando diversi procedimenti operativi e al fine di determinare il materiale di cui è composto un campione incognito.

Indice

0 Convenzioni e formule	3
1 Scopo e descrizione dell'esperienza	3
2 Apparato Sperimentale	4
2.1 Strumenti	4
2.2 Campioni	4
3 Sequenza Operazioni Sperimentali	4
3.1 Verifica degli strumenti	4
3.2 Misura della densità di un singolo campione	4
3.3 Misura della densità dei campioni A	9
3.4 Misura della densità del campione B	11
3.5 Misura della densità del campione C	13
3.6 Misura della densità dei campioni A con metodo grafico	15
4 Considerazioni finali	16

Elenco delle tabelle

1 Misure sul campione A-9	5
2 Misure di Offset registrate sul Palmer	7
3 Sintesi misure sul campione A-9	7
4 Volume e densità per ogni misura del campione A-9	8
5 Misure sui 30 campioni A	10
6 Sintesi della densità dei 30 campioni A	10
7 Volume e densità dei 30 campioni A	11
8 Dimensioni e massa del campione B	11
9 Dimensioni e massa del campione C	14
10 Misure della variazione del livello dell'acqua in una provetta graduata	17
11 Sintesi delle misure di volume e densità ripetute 30 volte sul campione 9	17

Elenco delle figure

1 Istogramma densità di 30 campioni prodotto a mano.	12
2 Istogramma densità di 30 campioni generato con R	12
3 Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di <i>best fit</i>	18
4 Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di <i>best fit</i> , generato con R.	19

0 Convenzioni e formule

In questa relazione verranno usate le seguenti convenzioni:

1. sarà usata la virgola [,] come separatore decimale;
2. l'approssimazione decimale della cifra 5 sarà fatta per eccesso;
3. al fine di migliorare la qualità dell'elaborazione dei dati, ogni grafico/istogramma prodotto a mano su carta millimetrata sarà riportato insieme al suo equivalente prodotto attraverso un software di analisi dati¹;
4. tutti i conti e i risultati parziali saranno presentati senza tenere cura delle cifre significative, i risultati finali saranno invece presentati correttamente.

Inoltre, si farà riferimento alle seguenti formule:

1. media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (1)$$

2. varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad (2)$$

3. deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (3)$$

1 Scopo e descrizione dell'esperienza

L'esperienza si sviluppa secondo 5 operazioni sperimentali:

1. misura della densità di un singolo campione, al fine di determinare il materiale di cui è costituito;
2. misura di 30 campioni dello stesso materiale, per migliorare la stima precedente della densità;
3. misura di un campione dello stesso materiale dei precedenti, ma con dimensioni differenti, con l'obiettivo di verificare la compatibilità del materiale con quello costitutivo dei 30 campioni;
4. misura della densità di un singolo campione di materiale differente, al fine di identificarne la composizione;
5. determinazione della densità dei campioni già misurati nella seconda fase, utilizzando un metodo grafico.

¹In questo contesto i dati sono stati elaborati con il software di analisi *R*.

2 Apparato Sperimentale

2.1 Strumenti

- Bilancia di precisione [risoluzione 0,001 g, incertezza 0,0003 g, portata 7500 g];
- Calibro a nonio ventesimale [divisione 0,05 mm, incertezza 0,05 mm, portata 20 cm];
- Calibro Palmer [divisione 0,01 mm, incertezza 0,001 mm, portata 25 mm];
- Provetta graduata [divisione 2 mL, incertezza 0,5 mL];

2.2 Campioni

- **A:** 30 cilindri di dimensioni variabili e materiale incognito (colore argento lucido²);
- **B:** cilindro dello stesso materiale dei campioni **A**, ma di diversa dimensione;
- **C:** cilindro con foro prossimo alla base di diverso materiale rispetto ai precedenti (colore dorato lucido³).

3 Sequenza Operazioni Sperimentali

3.1 Verifica degli strumenti

Un primo controllo sugli strumenti di misura ci porta a concludere che il calibro ventesimale è ben tarato e non presenta offset evidenti (come, d'altronde, ci aspettavamo per il modo di costruzione dello strumento); il calibro Palmer risulta invece essere soggetto a un offset di valutazione incerta, approfondiremo il problema nella sezione 3.2. La bilancia di precisione può essere tarata a 0 prima di ogni misurazione; la provetta graduata sarà invece riempita fino a un certo livello e si valuteranno le differenze di indicazioni segnate, permettendo dunque di escludere l'incertezza del valore considerato come 0.

3.2 Misura della densità di un singolo campione

Sceglieremo come campione dal gruppo **A** il cilindro che abbiamo numerato 9, quindi ne misuriamo 30 volte l'altezza con il calibro a nonio e con il calibro Palmer. Scelto il calibro Palmer per proseguire le misurazioni, come argomentato più avanti, misuriamo 30 volte il diametro e poi 30 volte la massa con la bilancia di precisione. Tutti i dati sperimentali raccolti sono riportati nella tabella 1.

²Utilizziamo il colore e l'aspetto dei campioni come *prior* per escludere materiali come legno, vetro o oro, e dunque per escludere eventuali evidenti errori nella misura.

³vedi nota 2

Tabella 1: Misure sul campione A-9

Altezza-Palmer(mm) ($\pm 0,001$)	Altezza-nonio(mm) ($\pm 0,05$)	Diametro-Palmer(mm) ($\pm 0,001$)	Massa(g) ($\pm 0,0003$)
20,018	20,15	11,975	6,1070
20,021	20,05	11,985	6,1080
20,019	20,10	12,018	6,1070
20,020	20,10	11,974	6,1070
20,019	20,10	11,983	6,1080
20,011	20,05	11,985	6,1080
20,021	20,10	11,978	6,1050
20,019	20,10	11,979	6,1080
20,015	20,10	11,986	6,1070
20,011	20,15	11,980	6,1090
20,011	20,10	11,982	6,1090
20,015	20,05	11,979	6,1090
20,011	20,05	11,989	6,1080
20,015	20,10	11,990	6,1090
20,020	20,05	11,981	6,1090
20,012	20,05	11,982	6,1080
20,009	20,05	11,978	6,1070
20,015	20,10	11,984	6,1090
20,015	20,10	11,980	6,1090
20,019	20,05	11,971	6,1080
20,025	20,05	11,989	6,1090
20,019	20,05	11,984	6,1080
20,020	20,10	11,980	6,1070
20,010	20,10	11,991	6,1080
20,010	20,10	11,980	6,1070
20,021	20,05	11,975	6,1080
20,020	20,10	11,992	6,1090
20,025	20,10	11,981	6,1100
20,010	20,10	11,973	6,1080
20,020	20,15	11,978	6,1080

Scelta tra calibro ventesimale e calibro Palmer Per determinare quale tra il calibro ventesimale e il calibro Palmer sia più adatto alla nostra esperienza, e di conseguenza per determinare lo strumento con il quale effettuare il resto delle misure di questa sezione, confrontiamo le incertezze relative all'altezza nei due diversi casi.

Le misure con il calibro a nonio sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,086\,67 \text{ mm} \quad \sigma = 0,031\,98 \text{ mm}$$

dove con \bar{h} intendiamo la media calcolata con (1), mentre con σ intendiamo la deviazione standard calcolata con (3). Per quanto detto nella sezione 3.1, il calibro a nonio non presenta alcun errore di calibrazione nella misura dello 0, non essendo uno strumento tendenzialmente affetto da offset considereremo credibile questo risultato e non propagheremo un'eventuale incertezza nella misura dello 0. L'errore di tipo B stimato per questo strumento è quello riportato nella

sezione 2.1, cioè $u_n = 0,05$ mm. La misura dell'altezza h effettuata con il calibro a nonio è quindi soggetta ad un'incertezza σ_T stimabile come

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_n^2} = 0,05 \text{ mm.}$$

Risultato prevedibile in quanto $\sigma/\sqrt{30}$ è di diversi ordini di grandezza inferiore di u_n . L'incertezza relativa all'altezza misurata con il calibro a nonio è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{h} = 0,25\%. \quad (4)$$

Le misure con il calibro Palmer sono sintetizzate da

$$\bar{h} = 20,016 \text{ 53 mm} \quad \sigma = 0,004 \text{ 68 mm}$$

con le stesse notazioni di prima. A differenza del calibro a nonio, il Palmer è uno strumento meccanicamente predisposto ad errori di offset e in questo caso specifico, facendo 10 misure dello 0⁴, risulta

$$\bar{z} = 0,006 \text{ mm} \quad \sigma_z = 0,0035 \text{ mm},$$

le misure dell'offset sono riportate nella tabella 2. Dovremo quindi tener conto anche della dispersione dell'offset nella propagazione dell'incertezza su questa misura. L'incertezza di tipo B del calibro Palmer può essere stimata come $u_p = 0,001$ mm, propagando l'errore sulla misura otteniamo

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2u_p^2} = 0,0020 \text{ mm}$$

dove abbiamo considerato l'incertezza strumentale sia nella misura dell'altezza che in quella dello 0. L'incertezza relativa è quindi, in percentuale,

$$\frac{\sigma_T}{\bar{h}} = 0,01\%. \quad (5)$$

Appare quindi immediatamente evidente che l'incertezza sulle misure effettuate con il calibro Palmer è nettamente inferiore di quella sulle misure del nonio, abbiamo quindi scelto il calibro Palmer per effettuare (ove possibile) le successive misure di lunghezza.

Dopo aver effettuato tutte le misure necessarie (sintetizzate nella tabella 3), siamo in grado di calcolare la densità relativa ad ogni misura attraverso l'equazione

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{10}} \quad (6)$$

che restituisce la densità in g/cm³, ottenendo i dati riportati nella tabella 4. Di queste 30 misure di densità possiamo ricavarne media ($\bar{\rho}$) e deviazione standard (σ), in particolare:

$$\bar{\rho} = 2,7095 \text{ g/cm}^3 \quad \sigma = 0,004 \text{ g/cm}^3.$$

⁴La scelta di calcolare la dispersione sull'offset effettuando più misure invece di usare quella già trovata misurando le altezze è giustificata dal fatto che non possiamo essere sicuri dell'assoluta linearità della risposta dello strumento, esso potrebbe infatti avere una risposta diversa nei pressi dello 0.

Tabella 2: Misure di Offset registrate sul Palmer

Offset (mm)	
Media:	0,006
σ :	0,004
1	0,005
2	0,009
3	0,009
4	0,005
5	0,005
6	0,001
7	0,000
8	0,009
9	0,010
10	0,009

Tabella 3: Sintesi misure sul campione A-9

	Media	σ	Max	Min
Altezza - Palmer (mm)	20,017	0,005	20,025	20,009
Altezza - nonio (mm)	20,09	0,03	20,15	20,05
Diametro - Palmer (mm)	11,983	0,009	12,018	11,971
Massa (g)	6,1080	0,0010	6,1100	6,1050

L'incertezza su questa media si stima come

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_\rho^2} \quad (7)$$

dove con σ si intende la deviazione standard sulle trenta misure, mentre u_ρ è la media delle incertezze propagate su ciascuna misura di densità, calcolate con la formula

$$u_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} \quad (8)$$

dove σ_m e σ_V sono le incertezze sulla massa e sul volume, la prima è data da

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_m^2} \quad (9)$$

dove σ è la deviazione sulle trenta misure e u_m l'incertezza strumentale sulla bilancia; l'incertezza sul volume è invece data da

$$\sigma_V^2 = \frac{\partial V}{\partial D} \Big|_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_D^2 + \frac{\partial V}{\partial h} \Big|_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_h^2 + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} \Big|_{(D,h,\bar{z}_0)}^2 \sigma_{\bar{z}_0}^2 \quad (10)$$

dove intendiamo con $\sigma_D, \sigma_h, \sigma_{\bar{z}_0}$ le incertezze rispettivamente su diametro, altezza e offset, con D e h intendiamo i valori misurati di diametro e di altezza (quindi senza la correzione dell'offset) su ogni misura e con \bar{z}_0 l'offset medio;

Tabella 4: Volume e densità per ogni misura del campione A-9

	Volume (cm ³)	ρ (g/cm ³)
1	2,255	2,709
2	2,259	2,704
3	2,271	2,689
4	2,254	2,709
5	2,258	2,705
6	2,258	2,706
7	2,256	2,706
8	2,256	2,707
9	2,258	2,704
10	2,256	2,708
11	2,256	2,707
12	2,256	2,708
13	2,259	2,704
14	2,260	2,703
15	2,257	2,707
16	2,257	2,707
17	2,255	2,709
18	2,258	2,706
19	2,256	2,708
20	2,253	2,711
21	2,261	2,702
22	2,258	2,705
23	2,257	2,706
24	2,260	2,703
25	2,256	2,708
26	2,255	2,709
27	2,261	2,702
28	2,258	2,706
29	2,253	2,711
30	2,256	2,708

scrivendo il volume in funzione dei valori misurati di diametro e di altezza (misurati in [mm]) e del valore dell'offset, in modo da rendere le misure scorrelate, e derivando parzialmente otteniamo

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4}(2Dh - 2D\bar{z}_0 - 2h\bar{z}_0 + 2\bar{z}_0^2) \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4}(D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\pi}{4}(-D^2 + 2h\bar{z}_0 - 3\bar{z}_0^2 - 2Dh + 4D\bar{z}_0). \quad (13)$$

Applicando (8) a ciascuna densità e calcolandone la media otteniamo

$$u_\rho = 0,0043 \text{ g/cm}^3, \quad (14)$$

applicando quindi (7) otteniamo un'incertezza

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (15)$$

da cui la densità attesa del campione **A-9**

$$\boxed{\rho = (2,710 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}.$$

Confrontando il risultato ottenuto con una lista di densità note e sfruttando la nostra *prior* per escluderne una parte, concludiamo che il cilindro **A-9** è costituito da *alluminio* ($\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$). Per quanto riguarda le principali sorgenti di errore, riteniamo che possa aver influito sulla misura del volume soprattutto la non simmetria della forma del cilindro, poiché misurandolo in punti diversi abbiamo notato una dispersione dei valori di diametro e altezza.

3.3 Misura della densità dei campioni A

Effettuiamo ora la misura della densità di ognuno dei 30 campioni del gruppo **A**. Dopo averli numerati, ne misuriamo una volta per ognuno il diametro e l'altezza con il calibro Palmer, e la massa con la bilancia di precisione. I risultati delle misure sono riportati nella tabella 5 per ciascun campione numerato; attraverso l'equazione (6) è possibile calcolare volume e densità per ciascun campione ottenendo i risultati della tabella 7; i valori della densità sono sintetizzati nella tabella 6.

Per ottenere la miglior stima dell'incertezza sulla densità media dei trenta campioni, adottiamo gli stessi calcoli discussi nella sezione 3.2 ottenendo, come ha senso che sia, una propagazione media delle incertezze sulla densità data da

$$u_B = 0,0043 \text{ g/cm}^3 \quad (16)$$

identica⁵ (nel limite dell'approssimazione), a quella calcolata nella sezione 3.2, da cui, utilizzando la relazione (7), si calcola l'incertezza sulla densità

$$\sigma_T = 0,0044 \text{ g/cm}^3 \quad (17)$$

da cui la densità attesa dei trenta campioni

$$\boxed{\rho = (2,696 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \quad (18)$$

che, come prima, è assolutamente compatibile con la densità dell'*alluminio* ($2,70 \text{ g/cm}^3$).

⁵Il risultato ha senso se si ricorda che tale valore è la media delle propagazioni delle singole incertezze su massa, diametro e altezza: poiché queste misure sono state fatte con gli stessi strumenti e nelle stesse condizioni, e poiché le misure non si discostano eccessivamente tra di loro, è naturale aspettarsi che le misure coerenti siano affette da incertezze (praticamente) uguali.

Tabella 5: Misure sui 30 campioni A

	Altezza-Palmer(mm)	Diametro-Palmer(mm)	Massa(g)
Incertezza:	0,001	0,001	0,0003
Media:	20,024	10,500	4,7842
1	21,060	11,970	6,0960
2	20,080	11,960	6,0610
3	20,012	7,950	2,6940
4	19,820	11,915	5,9850
5	20,019	9,972	4,2630
6	20,050	11,955	6,1080
7	18,905	8,050	2,6000
8	20,040	7,970	2,7030
9	20,017	11,983	6,1070
10	18,178	9,935	3,8130
11	19,990	7,969	2,6940
12	19,995	11,960	6,0990
13	20,030	9,945	4,2180
14	20,030	11,945	6,1050
15	19,694	11,920	5,9330
16	20,019	9,955	4,2100
17	20,005	11,970	6,1110
18	20,596	9,952	4,3310
19	18,320	11,922	5,5110
20	19,975	7,960	2,6940
21	22,020	8,050	3,0420
22	20,705	9,960	4,3330
23	20,020	11,962	6,1060
24	20,740	11,940	6,2590
25	22,372	9,955	4,7090
26	20,090	9,989	4,0240
27	17,945	8,055	2,4620
28	20,010	11,960	6,0580
29	19,970	11,978	6,0890
30	20,021	11,985	6,1080

Tabella 6: Sintesi della densità dei 30 campioni A

	Media	σ	Max	Min
Volume (cm ³)	1,775	0,5249	2,370	0,915
ρ (g/cm ³)	2,696	0,0371	2,727	2,556

Tabella 7: Volume e densità dei 30 campioni A

	Volume (cm ³)	ρ (g/cm ³)
1	2,370	2,572
2	2,256	2,687
3	0,993	2,712
4	2,210	2,708
5	1,563	2,727
6	2,251	2,714
7	0,962	2,702
8	1,000	2,704
9	2,257	2,705
10	1,409	2,706
11	0,997	2,702
12	2,246	2,715
13	1,556	2,711
14	2,245	2,720
15	2,198	2,700
16	1,558	2,702
17	2,251	2,715
18	1,602	2,703
19	2,045	2,695
20	0,994	2,710
21	1,121	2,714
22	1,613	2,686
23	2,250	2,714
24	2,322	2,695
25	1,741	2,704
26	1,574	2,556
27	0,914	2,692
28	2,248	2,695
29	2,250	2,706
30	2,259	2,704

3.4 Misura della densità del campione B

Il campione B, che mostra lo stesso aspetto dei campioni **A**, è un cilindro con dimensioni maggiori rispetto ai precedenti. Ne misuriamo l'altezza con il calibro a nonio, in quanto essa è fuori dalla portata del Palmer, il diametro con il calibro Palmer e la massa con la bilancia di precisione. I dati ottenuti sono riportati nella tabella 8.

Tabella 8: Dimensioni e massa del campione B

Altezza campione (h)	$73,550 \pm 0,001$	mm
Diametro campione (D)	$14,890 \pm 0,001$	mm
Massa campione (m)	$34,6120 \pm 0,0003$	g

Figura 1: Istogramma densità di 30 campioni prodotto a mano.

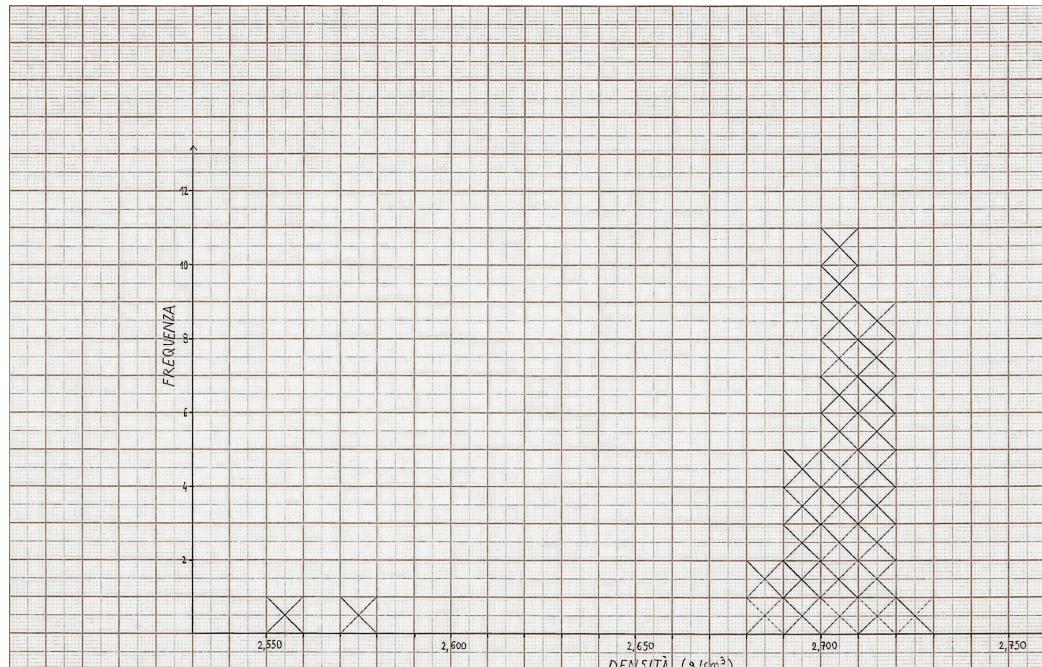
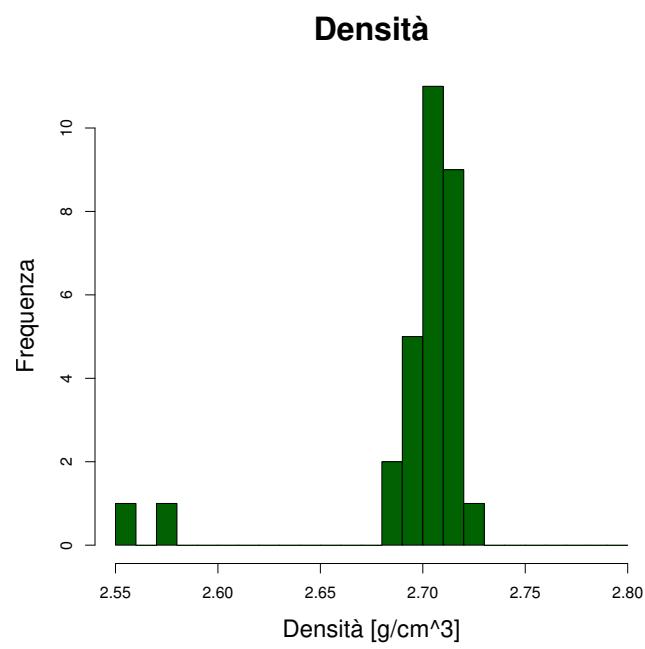


Figura 2: Istogramma densità di 30 campioni generato con R .



L'altezza, a differenza dei due casi precedenti, non è affetta da offset essendo stata misurata con il nonio, il volume è quindi dato da

$$V = \frac{\pi}{4}(D - \bar{z}_0)^2 h \quad (19)$$

in cui si è usata la stessa notazione di sopra. Da (19) si ricavano le derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial D} &= \frac{\pi}{4}(2Dh - 2\bar{z}_0h) = 1719,58 \text{ mm}^2 \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\pi}{4}(D^2 + \bar{z}_0^2 - 2D\bar{z}_0) = 173,99 \text{ mm}^2 \\ \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_0} &= \frac{\pi}{4}(2\bar{z}_0h - 2Dh) = -1719,58 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Inoltre possiamo assumere per diametro, altezza e massa le stesse deviazioni standard ricavate nella sezione 3.2 dato che avevamo misurato l'altezza sia col nonio che col Palmer, applicandole alla singola misura e non ad una media. L'incertezza sulla densità è data dalla formula

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \quad (20)$$

dove σ_m è la semplice somma in quadratura della deviazione standard calcolata nella sezione 3.2 con l'incertezza strumentale della bilancia, mentre σ_V è data dalla formula (10) dove le derivate parziali sono quelle appena calcolate. Svolti i conti, la formula (20) permette di calcolare l'incertezza

$$\sigma_\rho = 0,0038 \text{ g/cm}^3$$

da cui la stima per la densità del campione **B**:

$$\boxed{\rho = (2,702 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}$$

nuovamente in piena compatibilità con l'*alluminio*, da cui concludiamo che il campione **B** sia costituito dello stesso materiale dei campioni **A**. L'incertezza relativa ottenuta è dell'ordine dello 0,15%, simile a quella ottenuta nei due casi precedenti: riteniamo che questo sia dovuto alla nostra scelta di utilizzare come incertezza sulla singola misura quella propagata a partire dalla deviazione standard sulle misure effettuate in precedenza, sommata in quadratura con l'incertezza strumentale.

3.5 Misura della densità del campione **C**

Il campione **C** è un cilindro che presenta un foro in prossimità della base, che approssimiamo a sua volta come un cilindro di altezza pari al diametro del campione, e di cui calcoliamo il diametro con il calibro a nonio; misuriamo invece il diametro e l'altezza del campione con il calibro Palmer, e la massa con la bilancia di precisione. Indichiamo con \bar{z}_0 il valore medio dell'offset del calibro Palmer. I dati ottenuti sono riportati nella tabella 9.

Tabella 9: Dimensioni e massa del campione C

Altezza campione (h)	$15,220 \pm 0,001$	mm
Diametro campione (D)	$12,990 \pm 0,001$	mm
Diametro foro (d)	$0,300 \pm 0,005$	cm
Massa campione (m)	$16,0210 \pm 0,0003$	g

Calcoliamo dunque il volume che avrebbe il campione se non fosse forato

$$V_{\text{lordo}} = \frac{\pi}{4} \cdot (D - z_0)^2 \cdot (h - z_0) = 2014,42 \text{ mm}^3 = 2,014 \text{ cm}^3,$$

quindi il volume del foro, con d espresso in mm ($d = (3,00 \pm 0,05)$ mm),

$$V_{\text{foro}} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot (D - z_0) = 91,78 \text{ mm}^3 = 0,092 \text{ cm}^3;$$

la densità sarà dunque data da

$$\rho = \frac{m}{V_{\text{lordo}} - V_{\text{foro}}} = 8,336 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Propaghiamo ora l'incertezza su tale valore, tenendo conto delle seguenti incertezze sulle singole grandezze, ottenute sommando in quadratura la deviazione standard della media calcolata con i metodi precedenti (indicata con σ , con abuso di notazione) e l'incertezza strumentale (indicata con u_B , con abuso di notazione):

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \sqrt{\sigma^2 + u_B^2} = 9,055 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ \sigma_h &= \sqrt{\sigma^2 + u_B^2} = 5,099 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ \sigma_{z_0} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)^2 + u_B^2} = 1,52 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ \sigma_d &= \sqrt{\sigma^2 + u_B^2} = 58,310 \times 10^{-3} \text{ mm},\end{aligned}$$

L'equazione per calcolare il volume netto del campione è

$$V_{\text{netto}} = \frac{\pi}{4} \left[(D - z_0)^2 (h - z_0) - d^2 (D - z_0) \right],$$

l'incertezza sul volume è dunque data da

$$\sigma_V = \left(\left. \frac{\partial V}{\partial D} \right|_{(D,h,d,z_0)}^2 \sigma_D^2 + \left. \frac{\partial V}{\partial h} \right|_{(D,h,d,z_0)}^2 \sigma_h^2 + \left. \frac{\partial V}{\partial z_0} \right|_{(D,h,d,z_0)}^2 \sigma_{z_0}^2 + \left. \frac{\partial V}{\partial d} \right|_{(D,h,d,z_0)}^2 \sigma_d^2 \right)^{1/2},$$

in cui si ha

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4} (2Dh - 2Dz_0 - 2z_0h + 2z_0^2 - d^2) = 303,22 \text{ mm}^2 = 3,032 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4} (D^2 - 2Dz_0 + z_0^2) = 132,41 \text{ mm}^2 = 1,324 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = \frac{\pi}{4} (-D^2 - 2Dh + 4Dz_0 + 2z_0h - 3z_0^2 + d^2) = -435,63 \text{ mm}^2 = -4,356 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi}{4} (-2dD + 2dz_0) = -61,186 \text{ mm}^2 = -0,612 \text{ cm}^2;$$

sostituendo nell'equazione precedente, l'incertezza sul volume sarà pari a

$$\sigma_V = 4,600 \text{ mm}^3 = 0,005 \text{ cm}^3.$$

L'incertezza sulla densità sarà quindi data dalla somma in quadratura delle incertezze relative di massa e volume, pari a

$$\frac{\sigma_V}{V} = 2,39 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{\sqrt{30}}\right)^2 + u_B^2}}{m} = 2,192 \times 10^{-5},$$

perciò

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \cdot \rho = 0,02 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

La nostra stima della densità del campione **C** è dunque

$$(8,34 \pm 0,02) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Confrontando tale valore con quelli a nostra disposizione in una tabella di densità relative a materiali noti, desumiamo che il campione **C** sia costituito da *ottone* ($\rho = 8,44 \text{ g/cm}^3$). L'incertezza relativa sul valore di densità da noi stimato è dello 0,24%, maggiore di quella ottenuta nei casi precedenti in quanto abbiamo utilizzato il calibro a nonio per misurare il diametro del foro, che ha aumentato nel complesso l'errore. La discrepanza che invece rileviamo tra il valore da noi stimato e quello assunto vero per la densità dell'ottone riteniamo sia dovuta all'approssimazione da noi fatta della forma del foro, assunta cilindrica, del suo posizionamento rispetto alla base e dell'eventuale espansione termica del campione stesso.

3.6 Misura della densità dei campioni **A** con metodo grafico

Adottiamo ora un altro metodo per determinare la densità dei campioni **A**, suddividendoli in 10 gruppi di cui misuriamo in modo integrale massa e volume, quest'ultimo mediante la variazione del livello di acqua in una provetta graduata.

Rappresentando poi i dati su di un grafico, individuiamo la migliore retta che li approssima, il cui coefficiente angolare è legato alla densità dei campioni stessi.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella 10, e nel grafico (figura 3). Per confronto con quanto realizzato a mano in laboratorio, si riporta il grafico (figura 4) generato con R in un secondo momento. Abbiamo scelto di porre sull'asse delle ascisse la massa e su quello delle ordinate la variazione di volume rispetto a quello misurato inizialmente nella provetta, in quanto quest'ultimo è affetto da un'incertezza molto maggiore di quella della massa.

Il coefficiente angolare della retta che approssima meglio i dati è

$$m = \frac{V_2 - V_1}{m_2 - m_1}$$

dove i punti sono stati scelti sulla retta e non sono dati sperimentali, in quanto la retta ne tiene già conto nel complesso. Sono stati scelti quindi i valori

$$\begin{aligned} m_1 &= 14,000 \text{ g}, & V_1 &= 5,0 \text{ mL}; \\ m_2 &= 149,000 \text{ g}, & V_2 &= 55,0 \text{ mL}. \end{aligned}$$

Poiché la densità si ottiene dal rapporto

$$\rho = \frac{m}{V},$$

l'inverso del coefficiente angolare della retta sarà pari alla nostra stima della densità con metodo grafico:

$$\rho = \frac{149,000 - 14,000}{55,0 - 5,0} \frac{\text{g}}{\text{mL}} = 2,700 \frac{\text{g}}{\text{mL}};$$

Per propagare l'errore su tale valore, dunque, sommiamo in quadratura gli errori relativi di massa e volume:

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2}$$

Dove gli errori assoluti su massa e volume sono ottenuti propagando l'incertezza sulla differenza dei valori finale e iniziale

$$\sigma_{\Delta V} = \sqrt{2\sigma_V^2} = 0,7 \text{ mL} \quad \text{ricordando che } \sigma_V = 0,5 \text{ mL}$$

$$\sigma_{\Delta m} = \sqrt{2\sigma_m^2} = 5,7 \times 10^{-4} \text{ g} \quad \text{ricordando che } \sigma_m = 0,0004 \text{ g};$$

Perciò

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0,014 \Rightarrow \sigma_\rho = 0,038 \frac{\text{g}}{\text{mL}}.$$

La stima della densità con metodo grafico è dunque

$$(2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{mL}} = (2,70 \pm 0,04) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

È evidente che l'incertezza su tale stima, che è pari all'1,5%, sia maggiore rispetto a quella ottenuta con i metodi precedenti. Riteniamo che questo sia dovuto alla minore precisione nella misura del volume ottenuta attraverso la variazione del livello di acqua nella provetta rispetto al calcolo indiretto misurando le dimensioni con il più preciso calibro Palmer.

4 Considerazioni finali

In conclusione, possiamo notare che la misura ripetuta 30 volte dello stesso campione **A** o la misura unica di 30 campioni **A** dello stesso materiale permetta di ottenere un'incertezza simile, dovuta anche alla nostra scelta di adottare come incertezza sul singolo dato quella propagata a partire dalla somma in quadratura dell'incertezza strumentale con la deviazione standard della media delle dimensioni del singolo campione misurate in precedenza. Le principali sorgenti

Tabella 10: Misure della variazione del livello dell’acqua in una provetta graduata

	Massa(g)	Volume V (ml)	Variazione volume ΔV (ml)
Incertezza:	0,0003	0,5	0,5
Condizione iniziale ¹ :	0,0000	115,0	0,0
1	11,2620	119,0	4,0
2	29,2920	126,0	11,0
3	44,0600	131,0	16,0
4	58,6300	136,0	21,0
5	69,8700	140,0	25,0
6	86,8000	146,0	31,0
7	101,0500	153,0	38,0
8	119,4800	159,0	44,0
9	134,1300	164,0	49,0
10	143,5400	168,0	53,0

¹ Equivale alla lettura del livello dell’acqua nella provetta prima che alcun campione venisse inserito.

di incertezza di tipo A sono la nostra capacità di interpolare tra le tacche del nonio e del Palmer, che classifichiamo come casuali in quanto abbiamo uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare; allo stesso modo, anche la lettura sulla provetta graduata è influenzata dalla presenza del menisco, che può generare equivoci sul valore indicato. Le incertezze di tipo B derivano principalmente dall’offset del Palmer e da possibili errori sistematici della bilancia.

Per quanto riguarda il metodo grafico, riteniamo che esso sia comunque foriero di una stima accurata, pur essendo da noi condotto cercando “a occhio” la retta che meglio interpolasse i dati.

Le incertezze maggiori si registrano sulle misure relative al campione **B**, che essendo più alto degli altri ha richiesto l’utilizzo di due strumenti diversi, nonio e Palmer, per la misura di altezza e diametro; e su quelle relative al campione **C**, in cui la stima del volume del foro ha influito molto sulla qualità del calcolo della densità.

Tabella 11: Sintesi delle misure di volume e densità ripetute 30 volte sul campione 9

	Media	σ^2	σ	Max	Min
Volume (cm^3)	2,257	1,0386e-05	0,0033	2,271	2,253
ρ ($\frac{g}{cm^3}$)	2,706	1,4833e-05	0,0039	2,711	2,689

Figura 3: Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di *best fit*.

 SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Fisica - Università degli Studi di Roma “La Sapienza” - Laboratorio Bruno Pontecorvo

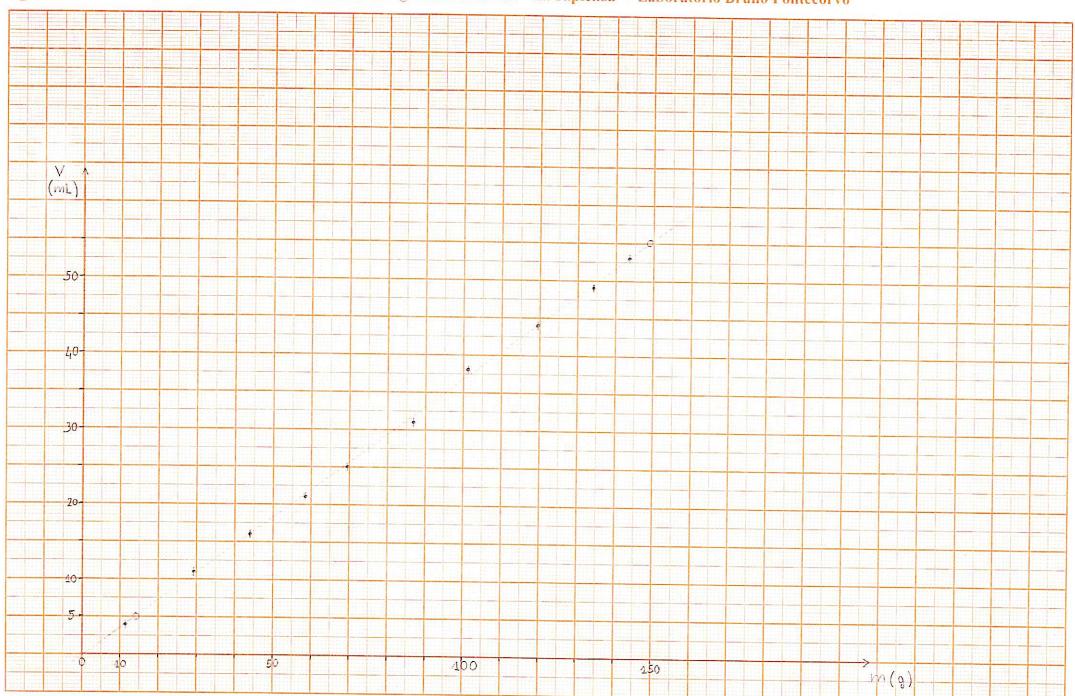


Figura 4: Volume integrale in funzione della massa integrale dei campioni A, con retta di *best fit*, generato con R.

