1°. 3D - гауссовский пучок во всем пространстве

$$V(x,y,z) = \frac{1\ \rho}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x_p^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y_p^2}{2\sigma_y^2}-\frac{z_p^2}{2\sigma_z^2}}}{\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2+(z-z_p)^2}}\,dx_p\,dy_p\,dz_p.$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2+(z-z_p)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\left[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2+(z-z_p)^2\right]}\,dt,$$

тогда

$$V(x,y,z) = \frac{\rho}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\pi}\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x_p^2}{2\sigma_x^2}-(x-x_p)^2t^2}dx_p}_{P(x,\sigma_x,t)}\,\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y_p^2}{2\sigma_y^2}-(y-y_p)^2t^2}dy_p}_{P(y,\sigma_y,t)}\,\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z_p^2}{2\sigma_z^2}-(z-z_p)^2t^2}dz_p}_{P(z,\sigma_z,t)},$$

где

$$P(a,\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-(a-x)^2t^2}\,dx$$

Но

$$\frac{x^2}{2\sigma^2}+(a-x)^2t^2 = \frac{x^2}{2\sigma^2}+a^2t^2-2axt^2+x^2t^2 = a^2t^2+x^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)-2axt^2 =$$

$$= a^2t^2+\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[x^2-2x\frac{at^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right] = a^2t^2+\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[x^2-2x\frac{at^2}{1/2\sigma^2+t^2}+\left(\frac{at^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right)^2-\left(\frac{at^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right)^2\right] =$$

$$= a^2t^2-\frac{a^2t^4}{1/2\sigma^2+t^2}+\cancel{\tfrac{1}{2\sigma^2+t^2}}\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[x-\frac{at^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right]^2 = \frac{\frac{1}{2\sigma^2}a^2t^2+a^2t^4-a^2t^4}{1/2\sigma^2+t^2}+\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[\quad\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\,\frac{a^2t^2}{1/2\sigma^2+t^2}+\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[x-\frac{a^2t^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right]^2,$$

Тогда

$$P(a,\sigma,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-(a-x)^2t^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2t^2/2\sigma^2}{1/2\sigma^2+t^2}}\, e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}+t^2\right)\left[x-\frac{a^2t^2}{1/2\sigma^2+t^2}\right]^2}dx=$$

$$=e^{-\frac{a^2t^2}{1+2\sigma^2t^2}}\frac{1}{\sqrt{1/2\sigma^2+t^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[x\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}+t^2}-\frac{a^2t^2}{\sqrt{1/2\sigma^2+t^2}}\right]^2} d\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}+t^2}\,x\right)=$$

$$=\sqrt{2\pi\sigma^2}\,\frac{e^{-\frac{a^2t^2}{1+2\sigma^2t^2}}}{\sqrt{1+2\sigma^2t^2}}$$

Поэтому

$$V(x,y,z)=\frac{\rho}{\sqrt{(2\pi)^3}\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\;\frac{e^{-\frac{x^2t^2}{1+2\sigma_x^2t^2}}\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}{\sqrt{1+2\sigma_x^2t^2}}\cdot\frac{e^{-\frac{y^2t^2}{1+2\sigma_y^2t^2}}\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}{\sqrt{1+2\sigma_y^2t^2}}\cdot\frac{e^{-\frac{z^2t^2}{1+2\sigma_z^2t^2}}\sqrt{2\pi\sigma_z^2}}{\sqrt{1+2\sigma_z^2t^2}}$$

$$=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\left[\frac{x^2t^2}{1+2\sigma_x^2t^2}+\frac{y^2t^2}{1+2\sigma_y^2t^2}+\frac{z^2t^2}{1+2\sigma_z^2t^2}\right]}}{\sqrt{(1+2\sigma_x^2t^2)(1+2\sigma_y^2t^2)(1+2\sigma_z^2t^2)}}\,dt$$

Это потенциал во всем пространстве, так что поле в любой точке определяется следующим образом:

$$E_{x}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\, x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 e^{-\left[\frac{x^2}{1+2\sigma_x^2 t^2} + \frac{y^2}{1+2\sigma_y^2 t^2} + \frac{z^2}{1+2\sigma_z^2 t^2}\right] t^2}}{\sqrt{(1+2\sigma_x^2 t^2)^3 (1+2\sigma_y^2 t^2)(1+2\sigma_z^2 t^2)}}\, dt$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\, y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 e^{-[\quad] t^2}}{\sqrt{(1+2\sigma_x^2 t^2)(1+2\sigma_y^2 t^2)^3 (1+2\sigma_z^2 t^2)}}\, dt$$

$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\, z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 e^{-[\quad] t^2}}{\sqrt{(1+2\sigma_x^2 t^2)(1+2\sigma_y^2 t^2)(1+2\sigma_z^2 t^2)^3}}\, dt$$

Если в интегралах перейти к $\omega = 1/t^2$, то т.к. $d\omega = -\frac{2dt}{t^3}$, тогда

$$E_x(x,y,z) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\, x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left[\frac{x^2}{2\sigma_x^2+\omega} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2+\omega} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2+\omega}\right]}\, d\omega}{\sqrt{(2\sigma_x^2+\omega)^3 (2\sigma_y^2+\omega)(2\sigma_z^2+\omega)}}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\, y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-[\quad]}\, d\omega}{\sqrt{(2\sigma_x^2+\omega)(2\sigma_y^2+\omega)^3 (2\sigma_z^2+\omega)}}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\, z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-[\quad]}\, d\omega}{\sqrt{(2\sigma_x^2+\omega)(2\sigma_y^2+\omega)(2\sigma_z^2+\omega)^3}}$$

2°. 3D однородный эллипсоид с полуосями a, b, c и плотностью ρ:
(Лагранж → Сретенский → Кондратьев → Калгинский (с ошибками!))

Потенциал внутри эллипсоида:

$$V_{in}(x,y,z) = \pi\rho abc \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

Потенциал снаружи эллипсоида:

$$V_{out}(x,y,z) = \pi\rho abc \int_\lambda^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

где λ — максимальный положительный корень кубического ур-ния:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

тогда поле снаружи:

$$E_x(x,y,z) = -\frac{\partial V_{in}}{\partial x} = 2\pi\rho abc \cdot x \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)^3(b^2+s)(c^2+s)}} = 2\pi\rho\, x \cdot \overline{M_x}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{\partial V_{in}}{\partial y} = 2\pi\rho abc \cdot y \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)^3(c^2+s)}} = 2\pi\rho\, y \cdot \overline{M_y}$$

$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial V_{in}}{\partial z} = 2\pi\rho abc \cdot z \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)^3}} = 2\pi\rho\, z \cdot \overline{M_z}.$$

Здесь

$$\overline{M}_x = abc\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)^3(b^2+s)(c^2+s)}} = \frac{abc}{a^5}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s/a^2)^3\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{s}{a^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{s}{a^2}\right)}} =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)^3\left(b^2/a^2+s\right)\left(c^2/a^2+s\right)}}$$

аналогично

$$\overline{M}_y = \frac{b}{a}\frac{c}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)\left(b^2/a^2+s\right)^3\left(c^2/a^2+s\right)}}$$

$$\overline{M}_z = \frac{b}{a}\frac{c}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)\left(b^2/a^2+s\right)\left(c^2/a^2+s\right)^3}}$$

Поле снаружи:

$$E_x = \frac{\partial V_{out}}{\partial x} = 2\pi\rho abc\cdot x\cdot\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)^3(b^2+s)(c^2+s)}} = \cancel{2\pi\rho}$$

$$= 2\pi\rho\cdot x\cdot\frac{abc}{a^5}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s/a^2)^3\left(b^2/a^2+s/a^2\right)\left(c^2/a^2+s/a^2\right)}} = 2\pi\rho\cdot x\cdot\frac{b}{a}\frac{c}{a}\int_{\lambda/a^2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)^3\left(b^2/a^2+s\right)\left(c^2/a^2+s\right)}} =$$

$$= 2\pi\rho x\, M_x(\lambda),$$ где

$$M_x(\lambda) = \frac{b}{a}\frac{c}{a}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)^3\left(b^2/a^2+s\right)\left(c^2/a^2+s\right)}}$$

и λ есть корень кубического уравнения

$$1 = \frac{x^2/a^2}{1+\lambda} + \frac{y^2/b^2}{1+\frac{a^2}{b^2}\lambda} + \frac{z^2/c^2}{1+\frac{a^2}{c^2}\lambda} = \frac{\bar{x}}{1+\lambda} + \frac{\bar{y}}{1+\bar{b}\lambda} + \frac{\bar{z}}{1+\bar{c}\lambda}$$

$$\bar{x} = (x/a)^2, \quad \bar{y} = (y/b)^2, \quad \bar{z} = (z/c)^2, \quad \bar{b} = (a/b)^2, \quad \bar{c} = (a/c)^2$$

аналогично

$$\underbrace{E_y(x,y,z)}_{-\frac{\partial V_{out}}{\partial y}=} = 2\pi\rho\cdot y \qquad \text{где} \quad M_y(\lambda) = \frac{b}{a}\frac{c}{a}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(b^2/a^2+s)^3(c^2/a^2+s)}}$$

$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial V_{out}}{\partial z} = 2\pi\rho\cdot z\cdot M_z(\lambda), \text{ где } M_z(\lambda) = \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(b^2/a^2+s)(c^2/a^2+s)^3}}$$

Видно, что на поверхности эллипсоида, на которой $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=1$ уравнение для λ имеет нулевой корень и тогда $M_i(\lambda)$ $(i=x,y,z)$ непрерывно переходит в $\overline{M}_i$ $(i=x,y,z)$, т.е. поле не терпит скачка при переходе через поверхность эллипсоида

3°. Lapostolle: