Lapostolle

$\boxed{\text{Lapostolle}}$

(1)

(4) внутри на оси: $$V_{in}(0,0,z)=\underbrace{\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcch}\frac{b}{a}}_{=V_0}+\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2 z^2}{b^2-a^2}\left[1-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcch}\frac{b}{a}\right] \qquad b>a$$

(5) внутри пучка: $$V_{in}(x,y,z)= V_0-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2\left(z^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{b^2-a^2}\left[1-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcch}\frac{b}{a}\right] \qquad b>a$$

(6) внутри пучка: $$V_{in}(x,y,z)= V_0-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2\left(z^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{b^2-a^2}\left[1-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}\right] \qquad b<a$$

Объединение (5) и (6), вводя

$$M=\frac{a^2}{b^2-a^2}\left[1-\begin{cases}\dfrac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcch}\dfrac{b}{a} & b>a\\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\dfrac{b}{a} & b<a\end{cases}\right] \qquad (Y1)$$

Можно показать, что при $b=a$ $M=-1/3$ и $M<0$ всегда!

тогда

$$V_{in}(x,y,z)= V_0-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\tau}{2\varepsilon_0}M\cdot\left(z^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)=$$

отсюда

$$\cancel{E_x=-\frac{\partial V_{in}}{\partial x}}=V_0+\frac{\tau M}{2\varepsilon_0}z^2-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+M)\frac{x^2+y^2}{2} \qquad (Y2)$$

$$E_x=-\frac{\partial V_{in}}{\partial x}=\frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+M)x;\quad E_y=-\frac{\partial V_{in}}{\partial y}=\frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+M)y;\quad E_z=-\frac{\partial V_{in}}{\partial z}=-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}2Mz \qquad (Y3)$$

Мои ф-лы (вместо Y1—Y3):

$$V_{in}(x,y,z) = V_0 - \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{\tau}{\varepsilon_0}M\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) =$$

$$= V_0 + \frac{\tau}{\varepsilon_0}M\cdot z^2 - \frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+2M)\frac{x^2+y^2}{2}$$

Тогда

(Y4)

$$E_x = -\frac{\partial V_{in}}{\partial x} = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+2M)x$$

$$E_y = -\frac{\partial V_{in}}{\partial y} = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+2M)y$$

$$E_z = -\frac{\partial V_{in}}{\partial z} = -\frac{\tau}{2\varepsilon_0}4M\cdot z$$

У Lapostolle:

$$E_x = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+M)x$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}(1+M)y$$

$$E_z = -\frac{\tau}{2\varepsilon_0}2Mz$$

Переход к току:

$$\tau = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^2 b} = \frac{I_{beam}\cdot T}{4\pi a^2 b/3} = \frac{3 I_{beam}\cdot \lambda/c}{4\pi a^2 b} \qquad (Y5)$$

$\boxed{\text{Lapostolle}}$

(7) снаружи на оси: $V_{ext}(0,0,z) = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2 b|z|}{b^2-a^2} + \frac{\tau}{2\varepsilon_0}a^2 b\left(1-\frac{z^2}{b^2-a^2}\right)\frac{\operatorname{arcth}\frac{|z|}{\sqrt{b^2-a^2}}}{\sqrt{b^2-a^2}}$ $b>a$

(8) снаружи на оси: $V_{ext}(0,0,z) = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a^2 b|z|}{a^2-b^2} + \frac{\tau}{2\varepsilon_0}a^2 b\left(1-\frac{z^2}{a^2-b^2}\right)\frac{\operatorname{arc\,cot}|z|/\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $b<a$

полный заряд пучка!

(10) снаружи на оси при любом соотношении a и b

$$V_{ext}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2-b^2}{5}\frac{z^2-\frac{x^2+y^2}{2}}{r^5} +$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(a^2-b^2)^2}{35}\frac{z^4-3(x^2+y^2)z^2+\frac{3}{8}(x^2+y^2)^2}{r^9}+\ldots$$

где

(11) $q = \frac{4}{3}\pi a^2 b\tau \longrightarrow \tau = \frac{3q}{4\pi a^2 b} = \frac{3 I_{cur}\cdot\lambda/c}{4\pi a^2 b}$

Моё мнение: я бы в (10) слагаемые ряда удвоил! как и Y5

Кстати, при $a=b$ (круглый пучок) все добавочные слагаемые исчезают!

Поля из Lapostolle (снаружи пучка):

Сначала

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x_i}{r^3} = -\frac{x_i}{r^3}$$

тогда ограничиваясь минимальной степенью r в знаменателях (помимо первого члена с $\frac{1}{r}$) имеем

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial V_{ext}}{\partial x} = \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{x}{r^3} - \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{a^2-b^2}{5}\frac{x}{r^5} \\
E_y &= -\frac{\partial V_{ext}}{\partial y} = \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{y}{r^3} - \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{a^2-b^2}{5}\frac{y}{r^5} \\
E_z &= -\frac{\partial V_{ext}}{\partial z} = \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{z}{r^3} + \frac{a^2 b\tau}{3\varepsilon_0}\frac{a^2-b^2}{5}\frac{2z}{r^5}
\end{aligned}\right\} \quad (Y6)$$

Как в выражениях для E_x, E_y появляется γ^2 в знаменателе.
Это лучше всего понять, если написать силу, действующую на частицы внутри пучка радиуса R

Электрическое поле ~~на~~ на радиусе r: $E_r = \frac{2I}{\beta c}\frac{r}{R^2}$ $\beta = \frac{v}{c}$

Магнитное поле на радиусе r: $H_\theta = \frac{2I}{c}\frac{r}{R^2}$

Тогда полная сила, действующая на частицу:

$$F_r = eE_r - \frac{e}{c}vH_\theta = \frac{2Ie}{\beta c}\frac{r}{R^2} - \frac{e\beta\cdot 2I}{c}\frac{r}{R^2} =$$

$$= \frac{2eIr}{cR^2}\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right) = \frac{2Ier}{cR^2}\,\frac{1-\beta^2}{\beta} = \frac{2eIr}{\beta c\gamma^2 R^2}$$

В 2х работах ф-лы Lapostolle, записанные для $r_x = r_y = a$ и $r_z = b$, (6)

переписаны следующим образом:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3I\lambda/c}{\gamma^2} \frac{1-f}{r_x(r_x+r_y)r_z} x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{\gamma^2} \frac{1-f}{r_x(r_x+r_y)r_z} \cancel{x}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3I\lambda/c}{\gamma^2} \frac{1-f}{r_y(r_x+r_y)r_z} \cancel{y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{\gamma^2} \frac{1-f}{r_y(r_x+r_y)r_z} y$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3I\lambda/c}{1} \frac{f}{r_x r_y r_z} z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{1} \frac{f}{r_x r_y r_z} z$$

где $f = -M$, введенной на стр 1 (ф-ле (41)), но аргументом является $\frac{\gamma r_z}{\sqrt{r_x r_y}} \longrightarrow \frac{\gamma b}{a}$ при $r_x = r_y = a$ и $r_z = b$.

Мне эта γ не нравится!