Характеристическое уравнение для λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

$$\frac{x^2/a^2}{1+\lambda/a^2}+\frac{y^2/b^2}{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{\lambda}{a^2}}+\frac{z^2/c^2}{1+\frac{a^2}{c^2}\frac{\lambda}{a^2}}=1$$

переобозначения для упрощения

$\bar{\lambda}=\frac{\lambda}{a^2}$ $\qquad \bar{x}=x^2/a^2 \quad \bar{y}=y^2/b^2 \quad \bar{z}=z^2/c^2$

и два параметра $\quad \bar{b}=\frac{a^2}{b^2} \quad \bar{c}=\frac{a^2}{c^2}$

тогда ур-ние переходит в (знаки „$-$" опускаем):

$$\frac{x}{1+\lambda}+\frac{y}{1+b\lambda}+\frac{z}{1+c\lambda}=1$$

$$(1+\lambda)(1+b\lambda)(1+c\lambda)=x(1+b\lambda)(1+c\lambda)+y(1+\lambda)(1+c\lambda)+z(1+\lambda)(1+b\lambda)$$

$$(1+\lambda)\left[1+\lambda(b+c)+bc\lambda^2\right]=x\left[1+\lambda(b+c)+bc\lambda^2\right]+$$
$$+y\left[1+\lambda(1+c)+c\lambda^2\right]+z\left[1+\lambda(1+b)+b\lambda^2\right]$$

$$bc\lambda^3+\underline{\lambda^2(b+c)}+\lambda+\underline{bc\lambda^2}+\lambda(b+c)+1=$$
$$x\left[1+\lambda(b+c)+\underline{bc\lambda^2}\right]+y\left[1+\lambda(1+c)+\underline{c\lambda^2}\right]+z\left[1+\lambda(1+b)+\underline{b\lambda^2}\right]$$

$$bc\lambda^3+\lambda^2\left[bc+b+c-xbc-yc-zb\right]+$$
$$+\lambda\left[1+b+c-x(b+c)-y(1+c)-z(1+b)\right]+$$
$$\left[1-(x+y+z)\right]=0$$

На поверхности

$$1-(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0 \text{ и}$$

ур-ние имеет один корень $\lambda=0$.

Итак, ур-ние

$$A\lambda^3+B\lambda^2+C\lambda+D=0$$

Вводим

$$p=\frac{C}{A}-\frac{B^2}{3A^2}=\frac{3AC-B^2}{3A}$$

$$q=\frac{2B^3}{27A^3}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{D}{A}=\frac{2B^3-9ABC+27A^2D}{27A^3}$$

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Если $Q>0$, то ур-ние имеет 1 вещ. и 2 компл. корня

$Q=0$, то 2 ~~корня~~ вещ. корня, один из которых кратный; если же $p=q=0$, то 1 вещ. корень 3х кратный

$Q<0$, то все три корня вещественные

~~Введём~~

Если $Q>0$, то единственный вещественный корень равен

(3)

$$\lambda = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{Q}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{Q}-q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{Q}+q/2}$$

Если $Q=0$, то корень $\lambda_1 = -2\sqrt[3]{q/2}$ однократный и корень $\lambda_{2,3} = 2\sqrt[3]{q/2}$ — 2кратный

(для этого должно быть $p<0$!)

Если $Q<0$, то переходим к переменным

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{-p^3/27} \\ \cos\varphi = -\dfrac{q}{2\rho} \end{cases}$$

(напоминаю! $p<0$ в этом случае)

Тогда

$$\bar{\lambda}_i = y_i - \frac{D}{A} = \frac{\lambda_i}{a^2}$$

где

$$\begin{cases} y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3) \\ y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right) \\ y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Теперь коэффициенты A, B, C, D в „родных" переменных:

$$A = \bar{b}\bar{c} = \frac{a^4}{b^2c^2}$$

$$B = (\bar{b}\bar{c} + \bar{b} + \bar{c}) - (\bar{x}\bar{b}\bar{c} + \bar{y}\bar{c} + \bar{z}\bar{b}) =$$

$$= \left(\frac{a^4}{b^2c^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2}\frac{a^4}{b^2c^2} + \frac{y^2}{b^2}\frac{a^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2}\frac{a^2}{b^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{b^2c^2}(a^2+b^2+c^2) - \frac{a^2}{b^2c^2}(x^2+y^2+z^2) =$$

$$= \frac{a^2}{b^2c^2}\left[(a^2+b^2+c^2) - (x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$C = 1 + \bar{b} + \bar{c} - \bar{x}(\bar{b}+\bar{c}) - \bar{y}(1+\bar{c}) - \bar{z}(1+\bar{b})\,] =$$

$$= 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) - \frac{z^2}{c^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2} - \frac{x^2(b^2+c^2)}{b^2c^2} - \frac{y^2(a^2+c^2)}{b^2c^2} - \frac{z^2(a^2+b^2)}{b^2c^2} =$$

$$= 1 + \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2} - \frac{1}{b^2c^2}\left[x^2(b^2+c^2) + y^2(a^2+c^2) + z^2(a^2+b^2)\right]$$

$$D = 1 - (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$