

Contents

1	Foglio 1	2
1.1	Osservatori uniformemente accelerati	2
1.1.1	Particella accelerata	2
1.1.2	Achille e la lepre	3
1.1.3	Tempo proprio	3
1.1.4	10^9 anni-luce	3
1.1.5	Perchè non andiamo su Giove?	4
1.1.6	Razzo relativistico	4
1.1.7	Campo elettrico	5
1.2	Campo elettrico di una particella carica senza massa	5
1.2.1	Quadripotenziale	5
1.2.2	Tensore elettromagnetico	5
1.2.3	Coordinate cono-luce	6
1.2.4	Limite di alte velocità	6
2	Foglio 2	7
2.1	Proiezione stereografica	7
2.2	Rotazioni	8
3	Foglio 3	9
3.1	Metrica bidimensionale	9
3.1.1	Traiettoria circolare	15
4	Foglio 4	15
4.1	Osservatori in Minkowsky	15
4.2	Metrica di Rindler	16
4.3	Schwartzschild per osservatori in moto	16
4.3.1	Osservatori in moto	17
4.3.2	Metrica di Aichelburg-Sexl	18
5	Foglio 5	18
5.0.1	Campo debole	18
5.0.2	Gauge "di Lorenz"	19
5.0.3	Equazioni di Einstein	20
5.0.4	Funzione di Green	20
5.0.5	Polvere	21
5.0.6	Centro di massa nell'origine	21

1 Foglio 1

1.1 Osservatori uniformemente accelerati

Si considera una particella P_0 , uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale \mathcal{I} . Il sistema \mathcal{I} va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

1.1.1 Particella accelerata

Si considera una generica particella P , con velocità u e accelerazione a nel sistema \mathcal{I} . Il boost a velocità inversa dal sistema in movimento \mathcal{I} al sistema terra \mathcal{T} è

$$\begin{cases} dx_T = \gamma(dx + vdt) \\ dt_T = \gamma(dt + vdx) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_T = \frac{dx_T}{dt_T} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

$$du_T = \frac{1 - v^2}{(1 + uv)^2} du$$

$$a_T = \frac{du_T}{dt} = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^3} a \quad (2)$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0 , si utilizza l'equazione 2 e la si specializza: la velocità u va posta nulla perchè si considera la particella P_0 , ferma in \mathcal{I} , e l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema \mathcal{T} ; la velocità della particella rispetto a \mathcal{T} è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{dv(t_T)}{dt_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int d \tan \theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \quad (3)$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} dx_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} dt_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$x_T(t_T) = \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^y \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^z \sinh(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_0} [\cosh \sinh^{-1}(y) - \cosh \sinh^{-1}(y_0)] = \frac{1}{a_0} [\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2}) - 1] \\
&= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} = \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0} \\
&x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{4}
\end{aligned}$$

Se si prende il limite di basse velocità si avrà $a_0 t_T \ll 1$, da cui si ottiene

$$x_t(t_T) \sim \frac{1}{2} a_0 t_T^2$$

che corrisponde alla formula newtoniana.

1.1.2 Achille e la lepre

Uguagliando la posizione di una particella accelerata da ferma a partire da x_0 alla posizione di un raggio luminoso partito dall'origine, si ottiene

$$t_T = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} + x_0$$

$$a_0 t - x_0 a_0 + 1 = \sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1$$

con condizione $a_0 t - x_0 a_0 + 1 > 0$. Procedendo,

$$t = \frac{x_0(x_0 a_0 - 2)}{2(1 - a_0 x_0)}$$

che ha soluzione per $1 < x_0 a_0 < 2$.

1.1.3 Tempo proprio

Con $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$:

$$\begin{aligned}
icd\tau &= ds = icdt_T \sqrt{1 - v^2(t_T)} \\
\tau &= \int_0^{t_T} \sqrt{1 - v^2(t)} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0 t)^2}} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{dz}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

1.1.4 10^9 anni-luce

Utilizzando la formula 4

$$10^9 = \frac{\sqrt{1 + (1.030t)^2} - 1}{1.030}$$

da cui $t_T \sim 10^9$. Utilizzando la formula del tempo proprio,

$$\tau = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0} \sim 20.82y$$

1.1.5 Perchè non andiamo su Giove?

Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{x_{TG}}{g}} = 1025.2h = 42.7 \text{giorni}$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce, Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-g t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo e definendo $\xi = \xi(v_0) = \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$:

$$t = \frac{\sqrt{(a_0 x + \sqrt{1 + \xi^2})^2 - 1} - \xi}{a_0}$$

Nel viaggio Terra-punto medio:

$$t_{TM} = \frac{\sqrt{(a_0 x + 1)^2 - 1}}{a_0} = 0.042y$$

$$v(t) = 0.043c = v_0$$

$$\xi(v_0) = 0.043$$

$$t_{MG} = 0.018y$$

$$t_{TOT} = 1.22y$$

Il tempo impiegato in meccanica classica è inferiore per due ragioni: la prima è che non c'è una velocità limite, la seconda che in relatività speciale è più difficile accelerare un corpo tanto più quanto questo va veloce.

1.1.6 Razzo relativistico

Considero il sistema \mathcal{I} in cui il razzo è fermo e i sistemi \mathcal{E} , in cui è ferma la dm espulsa, e \mathcal{J} , in cui è fermo il razzo propulso con massa $m - dm$. Nel sistema \mathcal{I} :

$$\delta m v_e \gamma(v_e) = (m - dm) dv \gamma(v) \sim m dv$$

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_e)} \frac{dv}{d\tau}$$

Considerando che $\delta m \gamma(v_e) = -dm$ e che $\frac{dv}{dt} = a_0$,

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{\tau}{v_e} = -\frac{a_0}{v_e \sqrt{1-v_e^2}} d\tau$$

da cui infine

$$m(\tau) = e^{-\frac{a_0 \tau}{v_e \sqrt{1-v_e^2}}}$$

Utilizzando i risultati del tempo di volo fino a Giove, per arrivare dalla Terra al punto M il tempo proprio è $\tau = 0.042y$, quindi

$$m_i/m_f = e^{\frac{a_0 \tau}{v_e \sqrt{1-v_e^2}}} = \begin{cases} e^{1.25 \cdot 10^3} & v_e = 10 km/s \\ 75.7 & v_e = c/100 \\ 1.54 & v_e = c/10 \end{cases}$$

1.1.7 Campo elettrico

Preso un campo elettrico costante diretto lungo \hat{x} , le uniche componenti non nulle del tensore elettromagnetico sono

$$F_{01} = -F_{10} = 1$$

che trasformano per boost lungo la medesima direzione nel seguente modo:

$$F'_{01} = \Lambda_1^1 \Lambda_0^0 F_{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 F_{10} = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$$

restando quindi invariati. Una particella carica risulta quindi uniformemente accelerata, secondo l'equazione di Lorentz.

1.2 Campo elettrico di una particella carica senza massa

1.2.1 Quadripotenziale

Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di \tilde{A}^μ sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo), \tilde{A}^0 può essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \propto \int d\Omega \int \frac{r^{D-2}}{r^{n+1}} dr$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di volume (D-2)-dimensionale. Siccome la dipendenza da r deve cancellarsi i

$$E_i = e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}, \text{ quindi}$$

$$\tilde{A} = (-e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-3}}, \vec{0})$$

1.2.2 Tensore elettromagnetico

Le componenti non nulle del tensore $F_{\mu\nu}$ sono le $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$.

1.2.3 Coordinate cono-luce

Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon_\xi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$F_{\xi\varsigma} = \Upsilon_\xi^\mu \Upsilon_\varsigma^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ E_1 & 0 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ -E_2/\sqrt{2} & -E_2/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -E_3/\sqrt{2} & -E_3/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove gli E_i sono i campi trasformati di coordinate, valutati nelle nuove coordinate.

Un boost di $-v$ porta a ($\beta = -v/c$)

$$x^\pm \rightarrow \gamma(1 \mp \beta)x^\pm$$

pertanto al boost corrisponde, in queste coordinate,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma(1 + \beta) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & \gamma(1 - \beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots \\ E_1 & 0 & \gamma(1 + \beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots \\ -\gamma(1 - \beta)E_2/\sqrt{2} & -\gamma(1 + \beta)E_2/\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1.2.4 Limite di alte velocità

Il limite

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{[\gamma^2 a^2 + b^2]^{\frac{D-1}{2}}} = N_D \frac{\delta(a)}{b^{D-2}} \quad (5)$$

si giustifica osservando che per $a \neq 0$ tende a 0, mentre per $a = 0$ tende a ∞ , così come fa la δ di Dirac. Scrivendo

$$\frac{1}{(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2} + 1)^{\frac{D-1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\tau \tau^{\frac{D-1}{2}-1} e^{\tau(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2} + 1)}$$

e integrando tale risultato in da si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\tau \tau^{\frac{D-1}{2}-\frac{3}{2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} \end{aligned}$$

dove si è riconosciuta la Gamma di Eulero. A questo punto, usando $\int da \delta(a) = 1$,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{b^{D-1}} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} = \frac{N_D}{b^{D-2}}$$

Quindi

$$N_D = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$$

Si considera ora che il raggio trasformato è

$$r = \sqrt{(\frac{x_+ - x_-}{\sqrt{2}})^2 + \vec{x}_\perp^2} \rightarrow r' = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} (\frac{(1-\beta)x_+ - (1+\beta)x_-}{\sqrt{2}})^2 + \vec{x}_\perp^2}$$

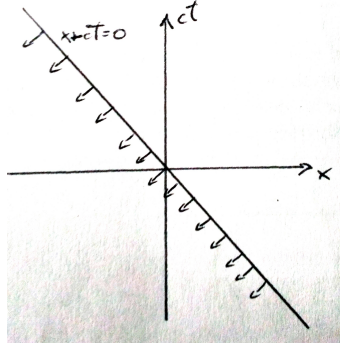
pertanto le componenti F'_{+i} per $i \neq 1$ divengono

$$F'_{+i} = \frac{\gamma(1-\beta)}{\sqrt{2}} e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}} \hat{r}_i = \frac{\gamma(1-\beta)}{\sqrt{2}} e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{(\frac{\gamma^2}{2} (\frac{(1-\beta)x_+ - (1+\beta)x_-}{\sqrt{2}})^2 + \vec{x}_\perp^2)^{\frac{D-1}{2}}} \hat{r}_i$$

dove si tiene conto che per $v \rightarrow c \Rightarrow \beta \rightarrow -1$ le componenti F_{-i} si annullano. Nel limite,

$$F'_{+i} \rightarrow e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} N_D \frac{\delta(x_+)}{x_\perp^{D-2}}$$

In figura ?? il campo disegnato nel piano (x,ct), in figura ?? lo stesso campo, nel piano (x,y), con la particella che lo genera.



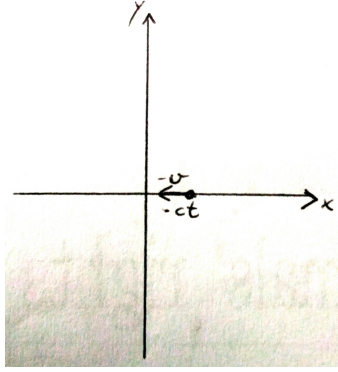
campo nel piano (x,ct): supporto su $x+ct=0$, direzione lungo $x-ct=0$

2 Foglio 2

2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta}$$



campo nel piano (x,y): supporto su $x+ct=0$, nel punto in cui è la particella, diretto come la velocità della particella

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varrà' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine darà' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

$$\bar{z}_{N,S} = \rho_{N,S} e^{-i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$z_N = \frac{1}{z_S}$$

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\bar{z}_S}$$

Tale relazione è olomorfa in $U_N \cap U_S$, cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate $w_{N,S}$, ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive $z_{N,S}$:

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con z_N .

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$L_{\pm} = \pm e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$= \pm e^{\pm i\varphi} R e^{i\varphi} \left(-\frac{1}{1 - \cos \theta} \mp \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i\varphi} R e^{-i\varphi} \left(-\frac{1}{1 - \cos \theta} \pm \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Siccome $z\bar{z} = \frac{1+c}{1-c}$,

$$L_+ = -\frac{z^2}{R} \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad L_- = R \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Usando che $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

Autovalori di F_m

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = (z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z [z^m] f(\rho) + z^m L_z [f(\rho)] = m F_m$$

Forma di Y_l^l

$$\begin{aligned} L_+[f(z\bar{z})] &= (-z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ &= -\frac{z^{m+1}}{R} \left[m f + (|z|^2 + R^2) \frac{\partial f}{\partial \rho^2} \right] \end{aligned}$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$\begin{aligned} L_+ Y_l^m &= 0 \iff m = l \\ L_- Y_l^l &= (\frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R}) Y_l^l \end{aligned}$$

Nelle coordinate (z_S, \bar{z}_S)

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S \bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$

3 Foglio 3

3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = ds^2 = \frac{\epsilon dx^2 + dy^2}{y^2}$$

con $\epsilon = \pm 1$.

Vettore di Killing

Considerando che la metrica non dipende dal modulo di x , ma solo da quello di y , si scrive immediatamente che per

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{\vec{k}}g = 0$$

Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni δx portano a

$$\left(\frac{\epsilon \dot{x}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per δy si ha

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left(\frac{\dot{y}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{\epsilon \dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = 0$$

Confrontando le equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{xx}^x & \Gamma_{xy}^x \\ \Gamma_{yx}^y & \Gamma_{yy}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dy}{y} & -\frac{dx}{y} \\ \frac{\epsilon dx}{y} & -\frac{dy}{y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{dy}{y} \otimes e_x + \frac{\epsilon dx}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{dx}{y} \otimes e_x - \frac{dy}{y} \otimes e_y \end{cases} \quad (7)$$

Tensore curvatura

$$\begin{aligned}
 R &= d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma \\
 (d\Gamma)_j^i &= \partial_\rho \Gamma_{\mu j}^i dx^\rho dx^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \\
 (\Gamma \wedge \Gamma)_j^i &= \Gamma_j^i \wedge \Gamma_k^j
 \end{aligned} \tag{8}$$

e utilizzando il fatto che

$$dx^\mu \wedge dx^\mu = 0 = dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu$$

si trova che $\Gamma \wedge \Gamma = 0$. Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Il tensore di Ricci è

$$\text{Ric}_{j\nu} = \delta_i^\mu R_{j\mu\nu}^i$$

E come matrice

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola g^{ij} come inverso della metrica, da cui

$$||g^{ij}|| = \text{diag}\left(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2\right)$$

e $R = -2$.

Zweibein

Scrivendo

$$V^x = \frac{dx}{y} \quad V^y = \frac{dy}{y} \quad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$ds^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} dV^x = \partial_y \left(\frac{1}{y} \right) dy \wedge dx \\ dV^y = \partial_x \left(\frac{1}{y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{cases}$$

e, considerando $T^i = 0$,

$$dV^i = -\omega_j^i \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega_x^y \wedge V^x = 0$$

$$\omega_y^x \wedge V^y = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } i = x \\ V^i & \text{se } i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega_y^x \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega_y^x = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega_x^y = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega_y^x$$

che verifica la condizione trovata per dV^y . L'antisimmetria di ω_j^i si trasferisce a R_j^i , che avrà non nulli solo

$$R_y^x = d\omega_j^i = -V^x \wedge V^y \quad R_x^y = -\epsilon d\omega_j^i = \epsilon V^x \wedge V^y$$

Pertanto

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y$$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$\text{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} R_{x|yx}^y & R_{x|xy}^x \\ R_{y|yx}^y & R_{y|xy}^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y^x & 0 \\ 0 & R_y^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui lo scalare

$$R = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2$$

Derivate covarianti

I vettori tangenti alle Zweibein sono quelli tali per cui

$$e_i(V^j) = \delta_i^j$$

e sono pertanto

$$e_x = y dx \quad e_y = y dy$$

Se ne calcolano le derivate covarianti, con connessione ω_j^i :

$$\nabla e_x = \omega_x^y e_y = \epsilon e_y \otimes V^x \quad \nabla e_y = \omega_y^x e_x = e_x \otimes V^x \quad (9)$$

Integrali primi

Gli integrali primi

$$\begin{cases} p_x = \frac{\dot{x}}{y^2} \\ \sigma = \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{cases}$$

danno le condizioni

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x y^2 \\ \dot{y}^2 = (\sigma - \epsilon p_x^2 y^2) y^2 \end{cases}$$

Si procede calcolando

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = \left(\frac{2\dot{y}y}{\dot{x}}\right)^2$$

e, sostituendo le condizioni trovate con gli integrali primi, si ottiene

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{4}{p_x^2} (\sigma - \epsilon \dot{x}^2 y^2)$$

Per integrare questa equazione,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{p_x} \sqrt{\sigma - \epsilon p_x^2 v} \Rightarrow \frac{2\sqrt{\sigma}}{p_x} dx = \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}}}$$

Si sostituisce al secondo membro

$$v \rightarrow q = \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon p_x^2} \frac{dq}{\sqrt{1-q}}$$

Un'ulteriore sostituzione porta a

$$q \rightarrow \theta = \arcsin \sqrt{q} \Rightarrow \frac{2\sigma}{\epsilon p_x^2} d\cos \theta$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\cos \arcsin \sqrt{q} = \sqrt{1-q}$$

l'integrazione porta a

$$\frac{p_x \epsilon}{\sqrt{\sigma}} (x - x_0) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}} - c_0$$

che raccogliendo le costanti e riarrangiando porta a

$$(p_x \epsilon x - K)^2 = \sigma - \epsilon p_x^2 v$$

Al variare di ϵ e σ , si ottengono i seguenti grafici:

Derivata di un campo vettoriale

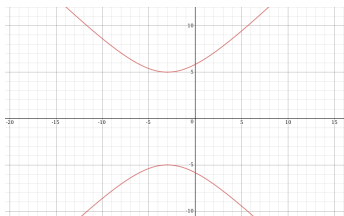
$$\nabla X = (\nabla X^i) \partial_i + X^i \nabla \partial_i$$

dove

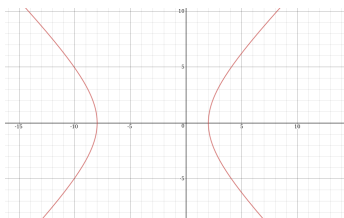
$$\nabla X^i = \partial_j X^i dx^j = dX^i$$

e utilizzando la 9

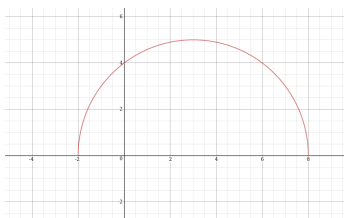
$$\nabla X = (dX^x - X^y V^x) e_x + (dX^y + \epsilon X^x V^x) e_y$$



$$\epsilon = -1, \sigma = -1$$



$$\epsilon = -1, \sigma = +1$$



$$\epsilon = +1, \sigma = +1$$

3.1.1 Traiettoria circolare

Presa la traiettoria

$$\gamma(t) = (x_0 + r \cos \omega t, y_0 + r \sin \omega t)$$

si considera il trasporto parallelo lungo essa, scrivibile come

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \gamma] \nabla X = 0$$

Sviluppando questa condizione si trova (per brevità: i simboli \cos e \sin sottintendono l'argomento ωt ; si scrive y intendendolo valutato su γ , come indicato a pedice))

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^x = \omega r \left[-\sin \partial_x X^x + \cos \partial_y X^x + \frac{\sin X^y - \cos X^x}{y} \right] = 0 \\ \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^y = \omega r \left[-\sin \partial_x X^y + \cos \partial_y X^y + \frac{-\epsilon \sin X^x - \cos X^y}{y} \right]_\gamma = 0 \end{cases}$$

Prendendo $\epsilon = +1$, moltiplicando membro a membro la seconda equazione per i e sommando le due si trova

$$\omega r \left[(-\sin \partial_x + \cos \partial_y)(X^x + iX^y) - \frac{1}{y} \Big|_\gamma (X^x + iX^y) e^{+\omega t} \right] = 0$$

Definendo $Z = X^x + iX^y$, $\dot{Z} = \frac{d\gamma^i}{dt} \nabla_i Z|_\gamma$ e l'equazione diventa

$$\dot{Z} - \omega r \frac{e^{i\omega t}}{y_0 + r \sin \omega t} Z$$

4 Foglio 4

4.1 Osservatori in Minkowsky

Data la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

il cambio di variabili

$$x = x_0 + vt_0; \quad t = t_0$$

porta, in forma canonica, a

$$ds^2 = (v^2 - 1) \left(dt_0 + \frac{v}{v^2 - 1} dx_0 \right)^2 - \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

da cui si identifica facilmente

$$dl^2 = \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

Si può quindi definire una nuova coppia di variabili, separando la parte spaziale e quella temporale: $dX = dl$.

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{x_0}{\sqrt{v^2 - 1}} \quad ; \quad T = \sqrt{v^2 - 1} \left(t_0 + \frac{v}{v^2 - 1} x_0 \right)$$

4.2 Metrica di Rindler

Presa la metrica

$$ds^2 = -\kappa^2 x^2 dt^2 + dx^2$$

si calcolano le geodetiche

$$0 = \ddot{x} + \kappa^2 x \dot{t}^2 = \ddot{x} + \Gamma_{tt}^x \dot{t}^2 \quad ; \quad 0 = \ddot{t} + \frac{2}{x} \dot{x} \dot{t} = \ddot{t} + \Gamma_{xt}^t \dot{x} \dot{t}$$

da cui

$$\Gamma_{tt}^x = \kappa^2 x \quad ; \quad \Gamma_{xt}^t = \frac{1}{x}$$

Per le traiettorie a $x = \bar{x} = \text{cost}$

$$\gamma(t) = (t, \bar{x})$$

si ha

$$\dot{\gamma} = \partial_t \gamma = e_t \Rightarrow \|\dot{\gamma}\|^2 = -\kappa^2 \bar{x}^2$$

da cui

$$u_\mu = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{-\|\dot{\gamma}\|^2}} = \frac{e_t}{\kappa \bar{x}}$$

L'accelerazione è quindi

$$a = \nabla_u = \frac{1}{\kappa^2 \bar{x}^2} \nabla_t e_t = \frac{1}{\kappa^2 \bar{x}^2} \Gamma_{tt}^x e_x = \frac{e_x}{\bar{x}}$$

Nel caso di osservatori che si muovano con moto accelerato, la metrica non è più stazionaria, quindi gli osservatori non sono sincronizzabili e la metrica non è riconducibile alla forma canonica.

4.3 Schwarzschild per osservatori in moto

Data la metrica di Schwarzschild in D dimensioni

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} + r^2(d\theta_{D-2} + \dots)$$

si calcola il limite di campo debole della sua azione: si considera $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ dove η è la metrica piatta e h rappresenta le perturbazioni gravitazionali, tali che siano infinitesime e dello stesso ordine tra loro.

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \dot{t}^2 + g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

dove $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = \mathcal{O}(|h|)$. Prendendo $\lambda = t$ e moltiplicando per $(1 - v^2/c^2)^{1/2} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sim \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$ (dove il quadrato di un vettore indica la sua norma al quadrato) si arriva a

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{2c^2} \cdot |h|\right)\right) \\ &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \\ &= \int dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \end{aligned}$$

Identificando i primi due addendi come il termine di massa e quello cinetico, si può identificare il restante come potenziale gravitazionale, da cui

$$\frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = -m\phi_{grav} \Rightarrow r_s^{D-3} = \frac{2MG_D}{c^2}$$

Si può definire il cambiamento di coordinate

$$r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2 \quad ; \quad \cos \theta_{D-2} = \frac{x_{D-1}}{r} \quad ; \quad \cos \theta_{D-3} = \frac{x_{D-1}}{r \cos \theta_{D-2}} \dots$$

e si vede che

$$\sum dx_i^2 = dx^2 + d\vec{x}_\perp^2 = dr^2 + r^2(d\theta_{D-2} + d\theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-2} + \dots)$$

da cui, raccogliendo dr ,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} dr^2 + dx^2 + d\vec{x}_\perp^2$$

4.3.1 Osservatori in moto

L'analogo di una trasformazione di Lorentz si ha con

$$ct = \gamma \frac{1+\beta}{2} U + \gamma \frac{1-\beta}{2} V \quad ; \quad x = \gamma \frac{1+\beta}{2} U - \gamma \frac{1-\beta}{2} V$$

dove U e V sono le coordinate di cono luce. Siccome si vuole determinare la metrica per un osservatore in moto alla velocità della luce, si pone il limite $\beta \rightarrow 1$. Si scrive la trasformazione dei termini in dt e dx , per poi imporre le condizioni desiderate:

$$\begin{aligned} & -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + dx^2 \\ \rightarrow & \gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV + \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} \left(\gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV \right) \end{aligned}$$

Si nota subito che tutti i coefficienti di dV tendono a zero. Inoltre per $U \neq 0$

$$r = \sqrt{\gamma^2 \left(\frac{(1+\beta)^2}{4} U^2 + \gamma^2 \left(\frac{(1+\beta)^2}{4} V^2 - UV + x_\perp^2\right)\right)}$$

che nel limite tende a infinito a causa del γ davanti a U^2 , per cui tutti i termini $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$ si annullano e rimane

$$ds^2 = -dU dV + d\vec{x}_\perp^2$$

Nel caso in cui $U = 0$, invece,

$$r = \sqrt{x_\perp^2} = x_\perp$$

e

$$ds^2 = \gamma^2 \left(\frac{r_s}{x_\perp}\right)^{D-3} dU^2 + o(dU^2)$$

che diverge nel limite.

4.3.2 Metrica di Aichelburg-Sexl

I termini in dt e dx si possono riscrivere all'ordine di dU^2 , tenendo conto che il termine in V^2 svanisce, come

$$-dUdV + r_s^{D-3} \left[\frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} dU^2 \right]$$

e usando il limite noto 5

$$\left[\frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} \right] = N_D \frac{\delta U}{-UV + x_\perp^{D-4}} = N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}}$$

inoltre si impone

$$\lim M\gamma = M_*$$

che ha il significato di una massa limite, non infinita, in modo che abbia significato fisico; per cui

$$r_s \rightarrow r_{s*}$$

Unendo i risultati

$$ds^2 = -dUdV + N_D r_{s*}^{D-3} N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}} dU^2 + dx_\perp^2$$

cioè tale metrica è analoga a quella piatta, fatta eccezione per il supporto della δ , cioè la bisettrice del II e IV quadrante nel piano (X,cT).

5 Foglio 5

5.0.1 Campo debole

Si considera la metrica D-dimensionale $g_{\mu\nu}$ nell'approssimazione di campo debole. Le Vielbein possono essere scritte come $V^a = (\delta_\mu^a + \frac{1}{2}h_\mu^a)dx^\mu$: si verifica infatti che, al primo ordine in $|h_{\mu\nu}|$,

$$\eta_{ab}V^aV^b = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Si verifica immediatamente che

$$V_a^\mu = (\delta_a^\mu - \frac{1}{2}h_a^\mu)$$

pertanto si può usare la formula

$$\omega_{abc} = V_a^\mu V_b^\nu \partial_\mu V_\nu^c - [cab] + [bca]$$

che, considerando di secondo ordine termini del tipo $(\partial h)h$, porta al primo ordine a

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}[\partial[bh_c]_a - [abc] + [cab]]$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\partial_{[b}h_{a]c}V^c$$

Siccome si trascurano termini del tipo $(\partial h)(\partial h)$,

$$R_{ab} = d\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_i \partial_{[a}h_{b]j}V^i \wedge V^j$$

Lo stesso calcolo si può fare con i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + [\nu\rho\mu] - [\rho\mu\nu]) = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} - \partial^{\sigma}h_{\mu\nu})$$

e

$$R_{\mu\nu} = -\partial_{\alpha}\partial_{[\mu}h_{\nu]\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

Il tensore di Ricci è

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab} + \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\mu}^b + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^b h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial^b h$$

che con la gauge

$$\partial^a \bar{h}_{ab} = 0 \quad ; \quad \bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

diventa

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab}$$

da cui il tensore di Einstein è immediatamente

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}$$

5.0.2 Gauge "di Lorenz"

Presa una variazione

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) \quad \rightarrow \quad dx'^{\mu} = dx^{\mu} + \partial_{\nu}\epsilon^{\mu}dx^{\nu}$$

e considerando che la metrica deve restare invariata

$$g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g'_{\mu\nu}(x')dx'^{\mu}dx'^{\nu}$$

Il primo membro è semplicemente $\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, mentre il secondo può essere espanso al primo ordine come

$$(g'_{\mu\nu}(x) + \partial_{\rho}g'_{\mu\nu}(x)\epsilon^{\rho})dx'^{\mu}dx'^{\nu} = (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) + \partial_{\rho}h'_{\mu\nu}\epsilon^{\rho})dx'^{\mu}dx'^{\nu}$$

Quindi uguagliando le due metriche (trascurando i termini $h\epsilon$ o $\partial h\epsilon$)

$$h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\epsilon^{\rho}dx^{\rho}dx^{\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\epsilon^{\nu}dx^{\mu}dx^{\rho} + h'_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}$$

da cui

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\epsilon_{\nu} - \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} \quad ; \quad \partial^{\mu}h'_{\mu\nu} = \partial^{\mu}h_{\mu\nu} - \partial^2\epsilon_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\epsilon^{\mu} \quad ; \quad h' = h - 2\partial^{\mu}\epsilon_{\mu}$$

e imponendo la gauge

$$\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^2\epsilon_{\nu} = 0$$

Per il potenziale Elettromagnetico, invece,

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon$$

e nella gauge di Lorenz

$$\partial^{\mu}A_{\mu} - \partial^2\epsilon = 0$$

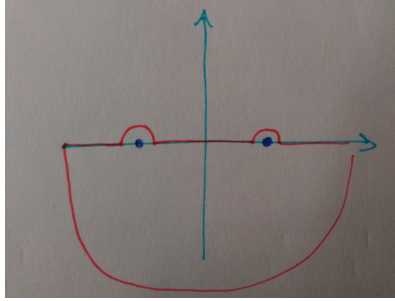
5.0.3 Equazioni di Einstein

In definitiva l'equazione di Einstein diventa

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2\bar{h}_{\mu\nu} \\ \partial^2\bar{h}_{\mu\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{10}$$

5.0.4 Funzione di Green

La funzione di Green del D'Alembertiano, valutata nella sua trasformata di Fourier, risulta essere $\tilde{G} = -1/k^2$. Dovendo integrare questa espressione in k^0 , si nota subito che ha due poli per $k^0 = |\vec{k}|$, per cui sarà necessaria una prescrizione $i\epsilon$, concretizzata in un cambio di variabile $k^0 \rightarrow k^0 \pm i\epsilon$. La richiesta di causalità permette di fissarne il segno, in quanto corrisponde alla richiesta che la funzione sia nulla per $x^0 < 0$: infatti, usando il lemma di Jordan, l'integrale in questo intervallo si annulla chiudendo la circonferenza "sopra" l'asse reale; ma, richiedendo che sia nullo, esso non deve contenere i poli, pertanto si ha una situazione come in ??.



L'integrale risulta quindi

$$G_R = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}$$

che diventa col teorema dei residui, in coordinate sferiche

$$G_R = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\phi \, d\cos\theta \, dk \, k^2 e^{ik|x|\cos\theta} \frac{2\pi i}{2k} \left[e^{-ikx^0} - e^{ikx^0} \right] \theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2|x|} \int dk \left(e^{ik|x|} - e^{-ik|x|} \right) \left(e^{-ikx^0} - e^{ikx^0} \right) \theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{2}{(2\pi)^2 |x|} \int dk \sin(k|x|) \sin(kx^0) \theta(x^0)$$

Alternativamente, sviluppando i prodotti di esponenziali e cambiando variabile per gli esponenti con segno negativo, utilizzando infine la forma integrale della delta di Dirac $2\pi\delta(x) = \int dk e^{ikx}$ si trova

$$G_R = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x^0 - |\vec{x}|)$$

dove la θ è sottintesa dalla δ .

5.0.5 Polvere

Per le proprietà della funzione di Green, la 10 ha soluzione

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \int G_R(x-y) \left[-\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(y) \right] = \frac{4G}{c^4} \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y) \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Preso il tensore energia-impulso della polvere

$$T_{\mu\nu} = (c^2\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p$$

nelle condizioni

$$u^\mu = (1, \vec{0}) \quad ; \quad |p| \ll c^2\rho \quad ; \quad \rho = \rho(\vec{y})$$

Se la materia è confinata in un raggio $|\vec{y}_M|$ e il campo viene valutato a distanze molto maggiori di questo raggio, si può sviluppare

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|}$$

Il tensore energia-impulso si riduce, nelle condizioni date, a

$$T_{00} = c^2\rho \quad ; \quad T_{ii} = p \quad ; \quad T = -T_{00} + 3T_{ii} \sim -T_{00}$$

per cui

$$h_{00} = \bar{h}_{00} + \frac{1}{2}\eta_{00}h = \frac{4G}{c^4|\vec{x}|} \int d^3y (c^2\rho - \frac{1}{2}c^2\rho) = \frac{2GM}{c^2|\vec{x}|}$$

$$h_{ii} = \bar{h}_{ii} + \frac{1}{2}\eta_{ii}h = \frac{4G}{c^4|\vec{x}|} \int d^3y (p + \frac{1}{2}c^2\rho) \sim \frac{2GM}{c^2|\vec{x}|}$$

quindi la metrica diventa

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2r})c^2dt^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2r})(d\vec{x})^2$$

da cui si vede che, perché resti valido il limite di campo debole, dev'essere

$$2GM \ll c^2r \quad \rightarrow \quad M \ll \frac{c^2R}{2G}$$

5.0.6 Centro di massa nell'origine

Si prende il centro di massa nell'origine, con velocità nulla. Si considera $u^\mu \sim (1, \vec{v}/c)$.

$$T_{00} = c^2\rho \quad ; \quad T_{0i} \sim c\rho v_i \sim T_{00}/c \quad ; \quad T_{ij} \sim \rho v_i v_j \sim T_{00}/c^2$$

Usando la conservazione di $T_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \rightarrow \partial_k T^{k0} = -\partial_0 T^{00}$$

e quindi

$$\int_V d^3y \partial_k T^{0k} y_i y_j = - \int_V d^3y \partial_0 T^{00} y_i y_j = - [T^{00} y_i y_j]_\Sigma + \int d^3y c^2 T^{00} (v_i y_j + y_i v_j)$$

$$\partial_0 \rho(\vec{y}) = 0 \Rightarrow \partial_0 T^{00} = 0 \Rightarrow \int d^3 y T^{00} (v_i y_j + y_i v_j) = 0 \quad (11)$$

Dove si è trascurato il termine di bordo in quanto all'infuori del raggio $|\vec{y}_M|$ la densità si annulla.

Si sviluppa in multipoli

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|} + y^i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

da cui

$$\bar{h}_{00}(x^0, \vec{x}) = \frac{2GM}{c^2 r} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

$$\bar{h}_{ii}(x^0, \vec{x}) = \frac{2GM}{c^2 r} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

usando la condizione di massa centrata nell'origine, per cui $\int d^3 y \rho(\vec{y}) y_i = 0$; i termini T_{ij} si trascurano, essendo di ordine T_{00}/c^2 ; infine

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) \sim \frac{4G}{c^3} \int d^3 y \left[\frac{\rho(\vec{y}) v_i}{|\vec{x}|} - \frac{\rho(\vec{y}) v_i y_j x^j}{|\vec{x}|^3} \right]$$

Il primo termine si annulla: la condizione di centro di massa fermo implica infatti $\int d^3 y \rho(\vec{y}) v_i = 0$.

Per quanto riguarda il secondo, grazie a 11, si verifica che

$$\frac{1}{2} \int d^3 y \rho (v_i y_j - y_i v_j) = \int d^3 y \rho v_i y_j$$

pertanto

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) = -\frac{2G x^j}{c^3 |\vec{x}|} \int d^3 y \rho(\vec{y}) (v_i y_j - v_j y_i) + \mathcal{O}(r^{-5})$$

Per cui la metrica diventa, usando $J_{ij} = \int d^3 y \rho(|\vec{y}|) (v_i y_j - v_j y_i)$,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (d\vec{x})^2 + \frac{4G}{c^3 r^3} J_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}(r^{-5})$$

L'effetto di trascinamento, cioè quello per cui lo spazio-tempo è deformato dalla rotazione del corpo massivo, si vede dal termine con J_{ij} , termine che si annulla se il momento angolare è nullo, cioè se il corpo non ruota rispetto all'infinito.