

# Contents

<b>1</b>	<b>Foglio 1</b>	<b>2</b>
1.1	1 - Osservatori uniformemente accelerati . . . . .	2
	Particella accelerata . . . . .	2
	Achille e la lepre . . . . .	3
	Tempo proprio . . . . .	3
	$10^9$ anni-luce . . . . .	3
	Perchè non andiamo su Giove? . . . . .	3
	Razzo relativistico . . . . .	4
	Campo elettrico . . . . .	4
1.2	2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa . . . . .	4
	Quadripotenziale . . . . .	4
	Tensore elettromagnetico . . . . .	4
	Coordinate cono-luce . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Foglio 2</b>	<b>5</b>
2.1	Proiezione stereografica . . . . .	5
2.2	Rotazioni . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Foglio 3</b>	<b>6</b>
3.1	Metrica bidimensionale . . . . .	6
3.1.1	Traiettoria circolare . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Foglio 4</b>	<b>12</b>
4.1	Osservatori in Minkowsky . . . . .	12
4.2	manca . . . . .	13
4.3	Schwartzschild per osservatori in moto . . . . .	13
4.3.1	Osservatori in moto . . . . .	13
4.3.2	Metrica di Aichelburg-Sexl . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Foglio 5</b>	<b>15</b>
5.1	Campo debole . . . . .	15
5.2	Funzione di Green . . . . .	16

# 1 Foglio 1

## 1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella  $P_0$ , uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale  $\mathcal{I}$ . Il sistema  $\mathcal{I}$  va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella  $P_0$  è istantaneamente ferma.

**Particella accelerata** Considero una generica particella  $P$ , con velocità  $u$  e accelerazione  $a$  nel sistema  $\mathcal{I}$ . Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento  $\mathcal{I}$  al sistema terra  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{cases} dx_T = \gamma(dx + vdt) \\ dt_T = \gamma(dt + vdx) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_T = \frac{dx_T}{dt_T} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

$$du_T = \frac{1 - v^2}{(1 + uv)^2} du$$

$$a_T = \frac{du_T}{dt} = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^3} a \quad (2)$$

Volendo trovare la velocità della particella  $P_0$ , utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità  $u$  va posta nulla perchè considero la particella  $P_0$ , ferma in  $\mathcal{I}$ , e considero l'evoluzione temporale di  $v(t_T)$ , rispetto al sistema  $\mathcal{T}$ ; la velocità della particella rispetto a  $\mathcal{T}$  è adesso  $v$  e  $a = a_0$ :

$$a_T = \frac{dv(t_T)}{dt_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

sostituisco  $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int d \tan \theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \quad (3)$$

Per trovare la legge oraria, considerando che  $x_T(0) = v_T(0) = 0$ ,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} dx_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} dt_T$$

Sostituendo prima  $y = a_0 t_T$  e poi  $y = \sinh(z)$  si ottiene

$$\begin{aligned} x_T(t_T) &= \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^y \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^z \sinh(z) dz \\ &= \frac{1}{a_0} [\cosh \sinh^{-1}(y) - \cosh \sinh^{-1}(y_0)] = \frac{1}{a_0} [\cosh(\ln(y + \sqrt{1 + y^2})) - 1] \end{aligned}$$

$$= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} = \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0}$$

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \quad (4)$$

**TODO** limite di basse velocità

**Achille e la lepre** Uguagliando  $c \cdot t$  a  $x_T$  dovrei trovare qualcosa, ma se metto  $c=1$  si cancella  $t$  e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

**Tempo proprio** Con  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$ :

$$icd\tau = ds = icdt_T \sqrt{1 - v^2(t_T)}$$

$$\tau = \int_0^{t_T} \sqrt{1 - v^2(t)} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0 t)^2}} dt$$

Sostituendo  $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{dz}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

$10^9$  **anni-luce** **TODO** udm di  $c$  Per percorrere una distanza di  $10^9 ly$  con accelerazione da fermo di  $g = 9.8 m/s^2 = 1.030 ly/y^2$ , usando la formula 4, occorrono

$$\sqrt{\frac{d^2}{c^2} + 2\frac{d}{g}} \simeq 2.998 \cdot 10^1 8y$$

cui corrisponde un tempo proprio  $\tau \simeq 41.972y$ .

**Perchè non andiamo su Giove?** Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.99999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-gt_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)^2 - 2gx\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)^2}}}{g}$$

**TODO** risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

**Razzo relativistico** Considero il sistema  $\mathcal{I}$  in cui il razzo è fermo e i sistemi  $\mathcal{E}$ , in cui è ferma la  $dm$  espulsa, e  $\mathcal{J}$ , in cui è fermo il razzo propulso con massa  $m - dm$ . Nel sistema  $\mathcal{I}$ :

$$dm v_e \gamma(v_e) = (m - dm) dv \gamma(v) \sim m dv$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_e)} \frac{dv}{d\tau}$$

$$m = m_0 e^{\frac{dv}{v_e \gamma(v_e)}}$$

$$m = m_0 e^{\frac{a_0 \tau}{v_e \gamma(v_e)}}$$

**Campo elettrico**

## 1.2 2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa

**Quadripotenziale** Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di  $A^\mu$  sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo),  $A^0$  può essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = (cost) \cdot \frac{r^{D-1}}{r^k} \Omega$$

E siccome la dipendenza da  $r$  deve cancellarsi  $E_i = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}$ , quindi

$$A = \left( -\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0} \right)$$

**Tensore elettromagnetico** Le componenti non nulle del tensore  $F_{\mu\nu}$  sono le  $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$ .

**Coordinate cono-luce** Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon_{\xi}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$\tilde{F}_{\xi\varsigma} = \Upsilon_{\xi}^{\mu} \Upsilon_{\varsigma}^{\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambio la velocità:

$$x^{\pm} = \gamma(1 - \beta)x^{\pm} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

## 2 Foglio 2

### 2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varra' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine dara' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

$$\bar{z}_{N,S} = \rho_{N,S} e^{-i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$z_N = \frac{1}{z_S}$$

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\bar{z}_S}$$

Tale relazione è olomorfa in  $U_N \cap U_S$ , cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate  $w_{N,S}$ , ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive  $z_{N,S}$ :

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

### 2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con  $z_N$ .

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$L_{\pm} = \pm e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$= \pm e^{\pm i\varphi} R e^{i\varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \mp \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i\varphi} R e^{-i\varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \pm \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{Siccome } z\bar{z} = \frac{1+c}{1-c},$$

$$L_+ = -\frac{z^2}{R} \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad L_- = R \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{Usando che } \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

### Autovalori di $F_m$

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = (z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z [z^m] f(\rho) + z^m L_z [f(\rho)] = m F_m$$

### Forma di $Y_l^l$

$$\begin{aligned} L_+[f(z\bar{z})] &= (-z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ &= -\frac{z^{m+1}}{R} \left[ m f + (|z|^2 + R^2) \frac{\partial f}{\partial \rho^2} \right] \end{aligned}$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$L_+ Y_l^m = 0 \iff m = l$$

$$L_- Y_l^l = (\frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R}) Y_l^l$$

Nelle coordinate  $(z_S, \bar{z}_S)$

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S \bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$

## 3 Foglio 3

### 3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = ds^2 = \frac{\epsilon dx^2 + dy^2}{y^2}$$

con  $\epsilon = \pm 1$ .

### Vettore di Killing

**TODO** Considerando che la metrica non dipende dal modulo di  $x$ , ma solo da quello di  $y$ , si scrive immediatamente che per

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{\vec{k}} g &= 0 \end{aligned}$$

### Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni  $\delta x$  portano a

$$\left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per  $\delta y$  si ha

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left( \frac{\dot{y}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{y} + \left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = 0$$

Confrontando le equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{xx}^x & \Gamma_{yy}^x \\ \Gamma_{xy}^y & \Gamma_{yx}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dy}{y} & -\frac{dx}{y} \\ \frac{\epsilon dx}{y} & -\frac{dy}{y} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{dy}{y} \otimes e_x + \frac{\epsilon dx}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{dx}{y} \otimes e_x - \frac{dy}{y} \otimes e_y \end{cases} \quad (6)$$

### Tensore curvatura

$$R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$$

$$(d\Gamma)_j^i = \partial_\rho \Gamma_{\mu j}^i dx^\rho dx^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \quad (7)$$

$$(\Gamma \wedge \Gamma)_j^i = \Gamma_j^i \wedge \Gamma_k^j$$

e utilizzando il fatto che

$$dx^\mu \wedge dx^\mu = 0 = dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu$$

si trova che  $\Gamma \wedge \Gamma = 0$ . Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Il tensore di Ricci è

$$\text{Ric}_{j\nu} = \delta_i^\mu R_{j\mu\nu}^i$$

E come matrice

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola  $g^{ij}$  come inverso della metrica, da cui

$$||g^{ij}|| = \text{diag}\left(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2\right)$$

e  $R = -2$ .

### **Zweibein**

Scrivendo

$$V^x = \frac{dx}{y} \quad V^y = \frac{dy}{y} \quad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$ds^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} dV^x = \partial_y \left( \frac{1}{y} \right) dy \wedge dx \\ dV^y = \partial_x \left( \frac{1}{y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{cases}$$

e, considerando  $T^i = 0$ ,

$$dV^i = -\omega_j^i \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega_x^y \wedge V^x = 0$$

$$\omega_y^x \wedge V^y = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } i = x \\ V^i & \text{se } i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega_y^x \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega_y^x = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega_x^y = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega_y^x$$



che verifica la condizione trovata per  $dV^y$ . L'antisimmetria di  $\omega_j^i$  si trasferisce a  $R_j^i$ , che avrà non nulli solo

$$R_y^x = d\omega_j^i = -V^x \wedge V^y \quad R_x^y = -\epsilon d\omega_j^i = \epsilon V^x \wedge V^y$$

Pertanto

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y$$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$\text{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} R_{x|yx}^y & R_{x|xy}^x \\ R_{y|yx}^y & R_{y|xy}^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y^x & 0 \\ 0 & R_y^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui lo scalare

$$R = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2$$

### Derivate covarianti

I vettori tangenti alle Zweibein sono quelli tali per cui

$$e_i(V^j) = \delta_i^j$$

e sono pertanto

$$e_x = y dx \quad e_y = y dy$$

Se ne calcolano le derivate covarianti, con connessione  $\omega_j^i$ :

$$\nabla e_x = \omega_x^y e_y = \epsilon e_y \otimes V^x \quad \nabla e_y = \omega_y^x e_x = e_x \otimes V^x \quad (8)$$

### Integrali primi

Gli integrali primi

$$\begin{cases} p_x = \frac{\dot{x}}{y^2} \\ \sigma = \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{cases}$$

danno le condizioni

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x y^2 \\ \dot{y}^2 = (\sigma - \epsilon p_x^2 y^2) y^2 \end{cases}$$

Si procede calcolando

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \left( \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} \right)^2 = \left( \frac{2\dot{y}y}{\dot{x}} \right)^2$$

e, sostituendo le condizioni trovate con gli integrali primi, si ottiene

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{4}{p_x^2} (\sigma - \epsilon \dot{x}^2 y^2)$$

Per integrare questa equazione,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{p_x} \sqrt{\sigma - \epsilon p_x^2 v} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{\sigma}}{p_x} dx = \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}}}$$

Si sostituisce al secondo membro

$$v \rightarrow q = \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon p_x^2} \frac{dq}{\sqrt{1-q}}$$

Un'ulteriore sostituzione porta a

$$q \rightarrow \theta = \arcsin \sqrt{q} \Rightarrow \frac{2\sigma}{\epsilon p_x^2} d\cos \theta$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\cos \arcsin \sqrt{q} = \sqrt{1-q}$$

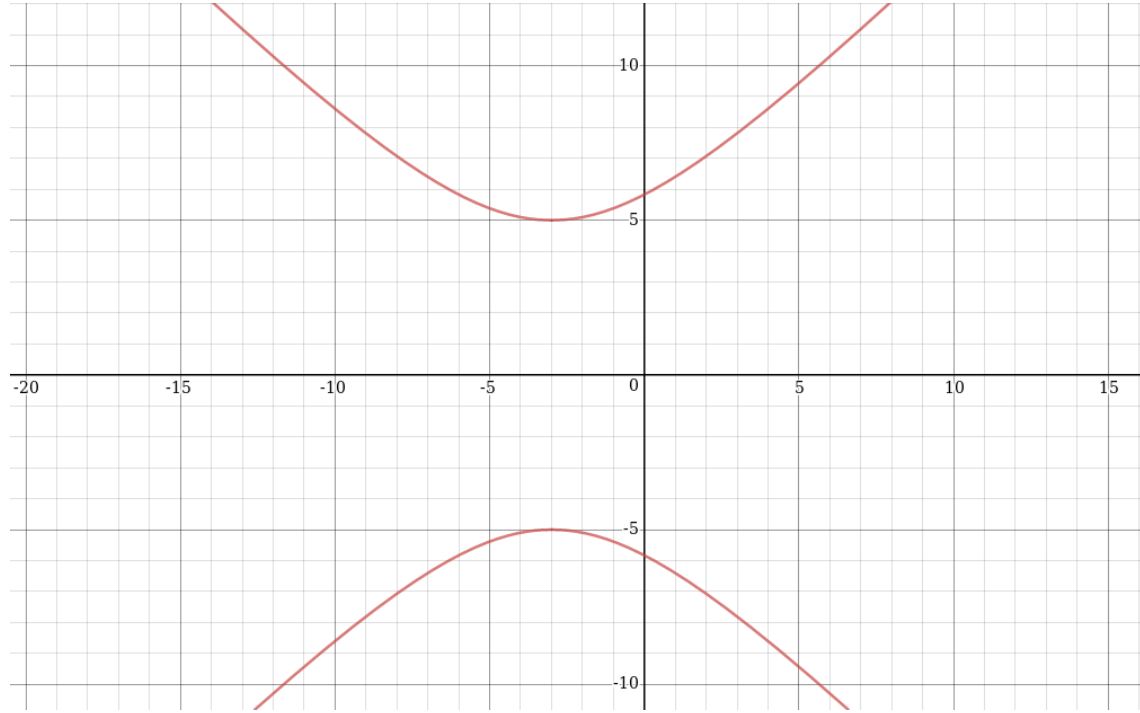
l'integrazione porta a

$$\frac{p_x \epsilon}{\sqrt{\sigma}} (x - x_0) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}} - c_0$$

che raccogliendo le costanti e riarrangiando porta a

$$(p_x \epsilon x - K)^2 = \sigma - \epsilon p_x^2 v$$

Al variare di  $\epsilon$  e  $\sigma$ , si ottengono i seguenti grafici:



$$\epsilon = -1, \sigma = -1$$

### Derivata di un campo vettoriale

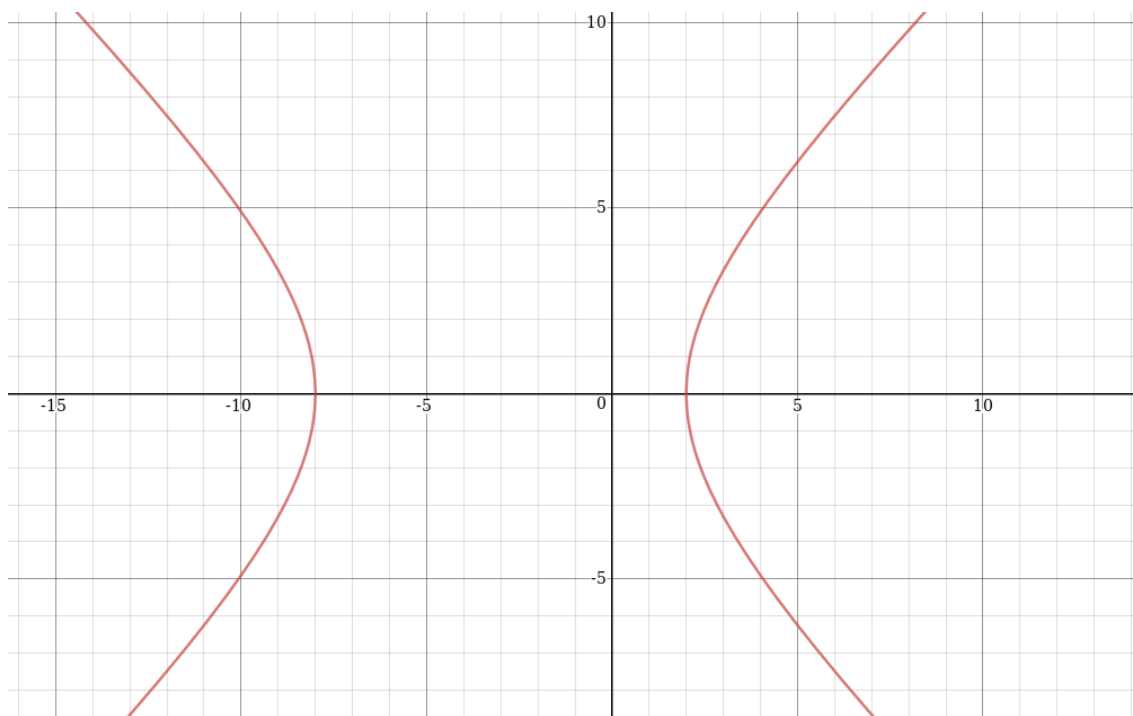
$$\nabla X = (\nabla X^i) \partial_i + X^i \nabla \partial_i$$

dove

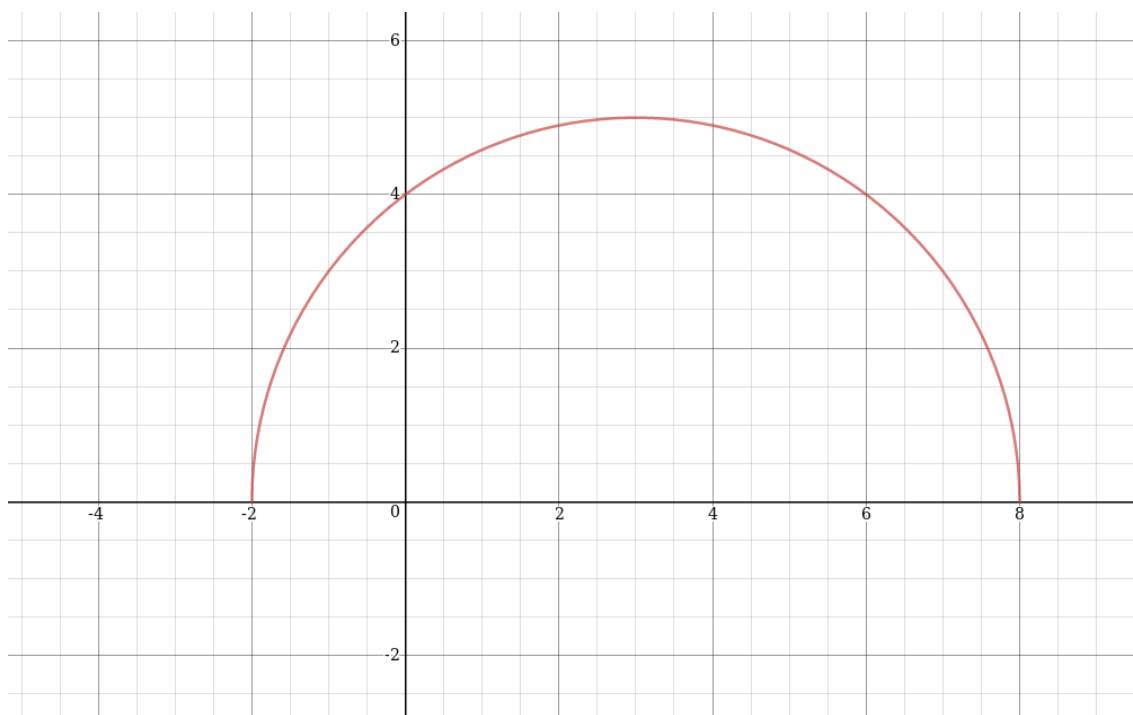
$$\nabla X^i = \partial_j X^i dx^j = dX^i$$

e utilizzando la 8

$$\nabla X = (dX^x - X^y V^x) e_x + (dX^y + \epsilon X^x V^x) e_y$$



$$\epsilon = -1, \sigma = +1$$



$$\epsilon = +1, \sigma = +1$$

### 3.1.1 Traiettoria circolare

Presa la traiettoria

$$\gamma(t) = (x_0 + r \cos \omega t, y_0 + r \sin \omega t)$$

si considera il trasporto parallelo lungo essa, scrivibile come

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \gamma| \nabla X = 0$$

Sviluppando questa condizione si trova (per brevità: i simboli  $\cos$  e  $\sin$  sottintendono l'argomento  $\omega t$ ; si scrive  $y$  intendendolo valutato su  $\gamma$ , come indicato a pedice))

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^x = \omega r \left[ -\sin \partial_x X^x + \cos \partial_y X^x + \frac{\sin X^y - \cos X^x}{y} \right] = 0 \\ \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^y = \omega r \left[ -\sin \partial_x X^y + \cos \partial_y X^y + \frac{-\epsilon \sin X^x - \cos X^y}{y} \right]_\gamma = 0 \end{cases}$$

Prendendo  $\epsilon = +1$ , moltiplicando membro a membro la seconda equazione per  $i$  e sommando le due si trova

$$\omega r \left[ (-\sin \partial_x + \cos \partial_y)(X^x + iX^y) - \frac{1}{y} \Big|_\gamma (X^x + iX^y) e^{+\omega t} \right] = 0$$

Definendo  $Z = X^x + iX^y$ ,  $\dot{Z} = \frac{d\gamma^i}{dt} \nabla_i Z|_\gamma$  e l'equazione diventa

$$\dot{Z} - \omega r \frac{e^{i\omega t}}{y_0 + r \sin \omega t} Z$$

## 4 Foglio 4

### 4.1 Osservatori in Minkowsky

Data la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

il cambio di variabili

$$x = x_0 + vt_0; \quad t = t_0$$

porta, in forma canonica, a

$$ds^2 = (v^2 - 1) \left( dt_0 + \frac{v}{v^2 - 1} dx_0 \right)^2 - \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

da cui si identifica facilmente

$$dl^2 = \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

Si può quindi definire una nuova coppia di variabili, separando la parte spaziale e quella temporale:  $dX = dl$ .

## 4.2 manca

## 4.3 Schwarzschild per osservatori in moto

Data la metrica di Schwarzschild in D dimensioni

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} + r^2(d\theta_{D-2} + \dots)$$

si calcola il limite di campo debole della sua azione: si considera  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  dove  $\eta$  è la metrica piatta e  $h$  rappresenta le perturbazioni gravitazionali, tali che siano infinitesime e dello stesso ordine tra loro.

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \dot{t}^2 + g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

dove  $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = \mathcal{O}(|h|)$ . Prendendo  $\lambda = t$  e moltiplicando per  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sim \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$  (dove il quadrato di un vettore indica la sua norma al quadrato) si arriva a

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{2c^2} \cdot |h|\right)\right) \\ &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \\ &= \int dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \end{aligned}$$

Identificando i primi due addendi come il termine di massa e quello cinetico, si può identificare il restante come potenziale gravitazionale, da cui

$$\frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = -m\phi_{grav} \Rightarrow r_s^{D-3} = \frac{2MG_D}{c^2}$$

Si può definire il cambiamento di coordinate

$$r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2 \quad ; \quad \cos \theta_{D-2} = \frac{x_{D-1}}{r} \quad ; \quad \cos \theta_{D-3} = \frac{x_{D-1}}{r \cos \theta_{D-2}} \quad \dots$$

e si vede che

$$\sum dx_i^2 = dx^2 + d\vec{x}_\perp^2 = dr^2 + r^2(d\theta_{D-2} + d\theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-2} + \dots)$$

da cui, raccogliendo  $dr$ ,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} dr^2 + dx^2 + d\vec{x}_\perp^2$$

### 4.3.1 Osservatori in moto

L'analogo di una trasformazione di Lorentz si ha con

$$ct = \gamma \frac{1+\beta}{2} U + \gamma \frac{1-\beta}{2} V \quad ; \quad x = \gamma \frac{1+\beta}{2} U - \gamma \frac{1-\beta}{2} V$$

dove  $U$  e  $V$  sono le coordinate di cono luce. Siccome si vuole determinare la metrica per un osservatore in moto alla velocità della luce, si pone il limite  $\beta \rightarrow 1$ . Si scrive la trasformazione dei termini in  $dt$  e  $dx$ , per poi imporre le condizioni desiderate:

$$-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + dx^2$$

$$\rightarrow \gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV + \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} \left( \gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV \right)$$

Si nota subito che tutti i coefficienti di  $dV$  tendono a zero. Inoltre per  $U \neq 0$

$$r = \sqrt{\gamma^2 \left(\frac{(1+\beta)^2}{4} U^2 + \gamma^2 \left(\frac{(1+\beta)^2}{4} V^2 - UV + x_\perp^2\right)\right)}$$

che nel limite tende a infinito a causa del  $\gamma$  davanti a  $U^2$ , per cui tutti i termini  $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$  si annullano e rimane

$$ds^2 = -dU dV + dx_\perp^2$$

Nel caso in cui  $U = 0$ , invece,

$$r = \sqrt{x_\perp^2} = x_\perp$$

e

$$ds^2 = \gamma^2 \left(\frac{r_s}{x_\perp}\right)^{D-3} dU^2 + o(dU^2)$$

che diverge nel limite.

#### 4.3.2 Metrica di Aichelburg-Sexl

I termini in  $dt$  e  $dx$  si possono riscrivere all'ordine di  $dU^2$ , tenendo conto che il termine in  $V^2$  svanisce, come

$$-dU dV + r_s^{D-3} \left[ \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} dU^2 \right]$$

e usando il limite noto **TODO** RIFERIMENTO

$$\left[ \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} \right] = N_D \frac{\delta U}{-UV + x_\perp^{D-4}} = N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}}$$

inoltre si impone **TODO** perche'?

$$\lim M \gamma = M_*$$

per cui

$$r_s \rightarrow r_{s*}$$

Unendo i risultati **TODO** e gli altri termini in  $dr$ ?

$$ds^2 = -dU dV + N_D r_{s*}^{D-3} N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}} dU^2 + dx_\perp^2$$

## 5 Foglio 5

### 5.1 Campo debole

Si considera la metrica D-dimensionale  $g_{\mu\nu}$  nell'approssimazione di campo debole. Le Vielbein possono essere scritte come  $V^a = (\delta_\mu^a + \frac{1}{2}h_\mu^a)dx^\mu$ : si verifica infatti che, al primo ordine in  $|h_{\mu\nu}|$ ,

$$\eta_{ab}V^aV^b = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Si verifica immediatamente che

$$V_a^\mu = (\delta_a^\mu - \frac{1}{2}h_a^\mu)$$

pertanto si può usare la formula

$$\omega_{abc} = V_a^\mu V_b^\nu \partial_\mu V_\nu^c - [cab] + [bca]$$

che, considerando di secondo ordine termini del tipo  $(\partial h)h$ , **TODO** porta al primo ordine a

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}[\partial[bh_c]_a - [abc] + [cab]]$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\partial_{[b}h_{a]c}V^c$$

Siccome si trascurano termini del tipo  $(\partial h)(\partial h)$ ,

$$R_{ab} = d\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_i\partial_{[a}h_{b]j}V^i \wedge V^j$$

Lo stesso calcolo si può fare con i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + [\nu\rho\mu] - [\rho\mu\nu]) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\nu^\sigma + \partial_\nu h_\mu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu})$$

e

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\alpha\partial_{[\mu}h_{\nu]\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Il tensore di Ricci è

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab} + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial^\mu h_\mu^b + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^b h_\nu^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial^b h$$

che con la gauge

$$\partial^a \bar{h}_{ab} = 0 \quad ; \quad \bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

diventa

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab}$$

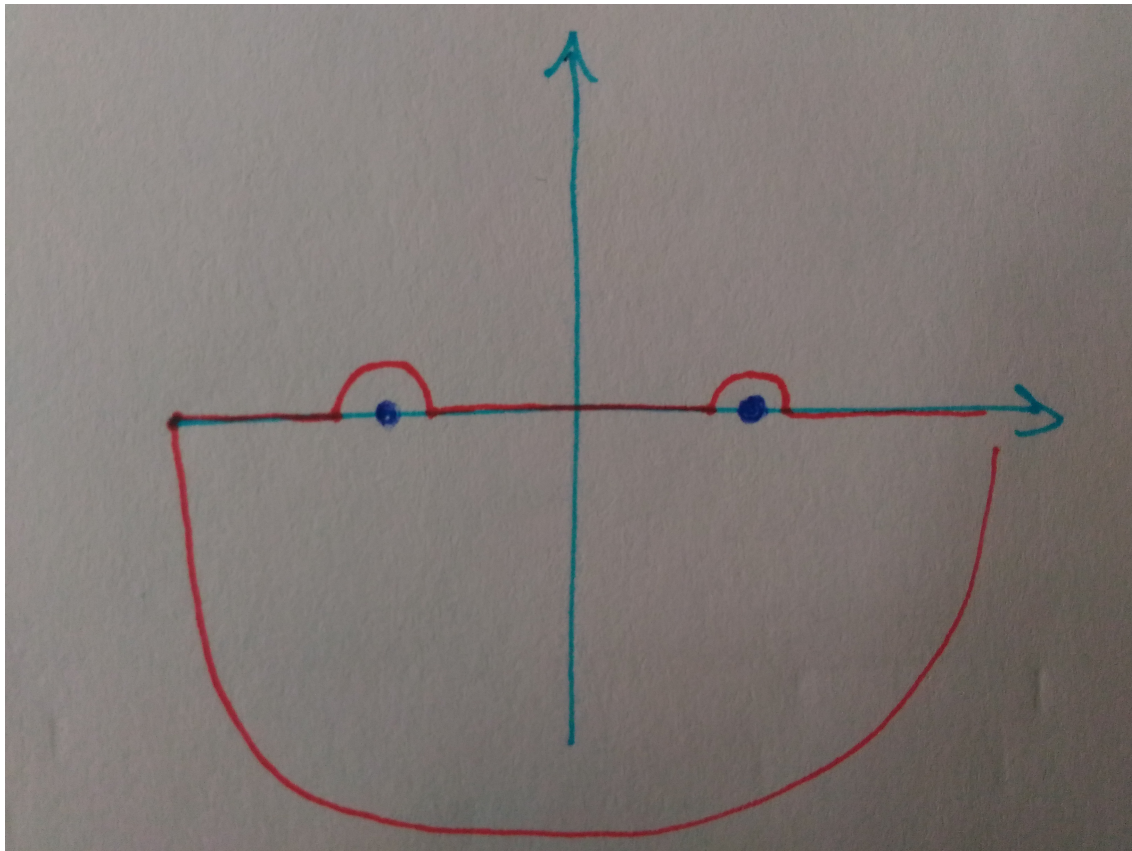
da cui il tensore di Einstein è immediatamente

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}$$

**TODO TODO**

## 5.2 Funzione di Green

La funzione di Green del D'Alambertiano, valutata nella sua trasformata di Fourier, risulta essere  $\tilde{G} = -1/k^2$ . Dovendo integrare questa espressione in  $k^0$ , si nota subito che ha due poli per  $k^0 = |\vec{k}|$ , per cui sarà necessaria una prescrizione  $i\epsilon$ , concretizzata in un cambio di variabile  $k^0 \rightarrow k^0 \pm i\epsilon$ . La richiesta di causalità permette di fissarne il segno, in quanto corrisponde alla richiesta che la funzione sia nulla per  $x^0 < 0$ : infatti, usando il lemma di Jordan, l'integrale in questo intervallo si annulla chiudendo la circonferenza "sopra" l'asse reale; ma, richiedendo che sia nullo, esso non deve contenere i poli, pertanto si ha una situazione come in ??.



L'integrale risulta quindi

$$G_R = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}$$

che diventa col teorema dei residui, in coordinate sferiche

$$G_R = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\phi d\cos\theta dk k^2 e^{ik|x|\cos\theta} \frac{2\pi i}{2k} \left[ e^{-ikx^0} - e^{ikx^0} \right] \theta(x^0)$$