Contents

1 Foglio 1

1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella P_0, uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale $\mathcal{I}$. Il sistema $\mathcal{I}$ va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

Particella accelerata Considero una generica particella P, con velocità u e accelerazione a nel sistema $\mathcal{I}$ Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento $\mathcal{I}$ al sistema terra $\mathcal{T}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_T = \gamma(\mathrm{d}x + v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t_T = \gamma(\mathrm{d}t + v\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{1}$$

$$u_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{\mathrm{d}t_T} = \frac{u+v}{1+uv}$$

$$\mathrm{d}u_T = \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}\mathrm{d}u$$

$$a_T = \frac{\mathrm{d}u_T}{\mathrm{d}t} = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1+uv)^3}a \tag{2}$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0, utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità u va posta nulla perchè considero la particella P_0, ferma in $\mathcal{I}$, e considero l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema $\mathcal{T}$; la velocità della particella rispetto a $\mathcal{T}$ è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v(t_T)}{\mathrm{d}t_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \mathrm{d}\tan\theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \tag{3}$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} \mathrm{d}x_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{a + (a_0 t_T)^2}} \mathrm{d}t_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$x_T(t_T) = \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^{z} \sinh(z) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{a_0}[\cosh\sinh^{-1}(y) - \cosh\sinh^{-1}(y_0)] = \frac{1}{a_0}[\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2}) - 1]$$

$$= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y+\sqrt{1+y^2})} = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{a_0}$$

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1+(a_0t_T)^2}-1}{a_0} \tag{4}$$

TODO limite di basse velocità

Achille e la lepre Uguagliando c*t a xT dovrei trovare qualcosa, ma se metto c=1 si cancella tquadro e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

Tempo proprio Con $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$:

$$ic\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s = ic\mathrm{d}t_T\sqrt{(1*-v^2(t_T))}$$

$$\tau = \int_0^{t_T}\sqrt{(1*-v^2(t))}\mathrm{d}t = \int\frac{1}{\sqrt{1+(a_0t)^2}}\mathrm{d}t$$

Sostituendo $a_0t = \cosh z$

$$\tau = \int\frac{\mathrm{d}z}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1+(a_0t_T)^2}+a_0t_T)}{a_0}$$

10^9 anni-luce TODO udm di c Per percorrere una distanza di 10^9ly con accelerazione da fermo di $g = 9.8m/s^2 = 1.030ly/y^2$, usando la formula 4, occorrono

$$\sqrt{\frac{d}{c}^2 + 2\frac{d}{g}} \simeq 2.998 \cdot 10^18y$$

cui corrisponde un tempo proprio $\tau \simeq 41.972y$.

Perchè non andiamo su Giove? Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4\cdot\sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.9999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0t_T + \tan\arcsin(v_0)}{\sqrt{1+(a_0t_T+\tan\arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1+(a_0t_T+\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1+(-gt_T+\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1+(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2 - 2gx\sqrt{1+(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}}{g}$$

TODO risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

Razzo relativistico Considero il sistema $\mathcal{I}$ in cui il razzo è fermo e i sistemi $\mathcal{E}$, in cui è ferma la dm espulsa, e $\mathcal{J}$, in cui è fermo il razzo propulso con massa $m - \mathrm{d}m$. Nel sistema $\mathcal{I}$:

$$\mathrm{d}m v_e \gamma(v_e) = (m - \mathrm{d}m)\mathrm{d}v\gamma(\mathrm{d}v) \sim m\mathrm{d}v$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{1}{v_e\gamma(v_E)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$m = m_0 e^{\frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}}{v_e\gamma(v_e)}}$$

$$m = m_0 e^{\frac{a_0\tau}{v_e\gamma(v_e)}}$$

Campo elettrico

1.2 2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa

Quadripotenziale Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di A^μ sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo), A^0 puo' essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che saraà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = (cost)\cdot\frac{r^{D-1}}{r^k}\Omega$$

E siccome la dipendenza da r deve cancellarsi $E_i = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0}\frac{1}{r^{D-2}}$, quindi

$$A = (-\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0}\frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0})$$

Tensore elettromagnetico Le componenti non nulle del tensore $F_{\mu\nu}$ sono le $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$.

Coordinate cono-luce Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon^\mu_\xi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$\tilde{F}_{\xi\varsigma} = \Upsilon^\mu_\xi\Upsilon^\nu_\varsigma F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambio la velocità:

$$x^\pm = \gamma(1-\beta)x^\pm = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

2 Foglio 2

2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R\frac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varra' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine dara' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S}e^{i\varphi}$$

$$\bar{z}_{N,S} = \rho_{N,S}e^{-i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R\frac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$z_N = \frac{1}{z_S}$$

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\bar{z}_S}$$

Tale relazione è olomorfa in $U_N \cap U_S$, cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate $w_{N,S}$, ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive $z_{N,S}$:

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con z_N.

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}) = z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

$$L_\pm = \pm e^{\pm i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$= \pm e^{\pm i\varphi}Re^{i\varphi}(-\frac{1}{1-\cos\theta} \mp \cot\theta\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})\frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i\varphi}Re^{-i\varphi}(-\frac{1}{1-\cos\theta} \pm \cot\theta\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

Siccome $z\bar{z} = \frac{1+c}{1-c}$,

$$L_+ = -\frac{z^2}{R}\frac{\partial}{\partial z} - R\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \qquad L_- = R\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

Usando che $\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

Autovalori di F_m

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = (z\frac{\partial\rho}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}})\frac{\partial f}{\partial\rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z[z^m]f(\rho) + z^m L_z[f(\rho)] = mF_m$$

Forma di Y_l^l

$$L_+[f(z\bar{z})] = (-z^2\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}})\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

$$= -\frac{z^{m+1}}{R}\left[mf + (|z|^2 + R^2)\frac{\partial f}{\partial\rho^2}\right]$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$L_+Y_l^m = 0 \iff m = l$$

$$L_-Y_l^l = (\frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R})Y_l^l$$

Nelle coordinate $(z_S, \bar{z}_S)$

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S\bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$

3 Foglio 3

3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = \mathrm{d}s^2 = \frac{\epsilon\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

con $\epsilon = \pm 1$.

Vettore di Killing

TODO Considerando che la metrica non dipende dal modulo di x, ma solo da quello di y, si scrive immediatamente che per

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{\vec{k}}g = 0$$

Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\lambda \frac{\epsilon\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni δx portano a

$$\left(\frac{\epsilon\dot{x}}{y^2}\right)^{\cdot} = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per δy si ha

$$\frac{\epsilon\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right)^{\cdot} = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{\epsilon\dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y}\right) = 0$$

Confrontando le'equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma^y_{xx} = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{\ x} & \Gamma^x_{\ y} \\ \Gamma^y_{\ x} & \Gamma^y_{\ y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}y}{y} & -\frac{\mathrm{d}x}{y} \\ \frac{\epsilon\mathrm{d}x}{y} & -\frac{\mathrm{d}y}{y} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{\mathrm{d}y}{y} \otimes e_x + \frac{e\mathrm{d}x}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{\mathrm{d}x}{y} \otimes e_x - \frac{\mathrm{d}y}{y} \otimes e_y \end{cases} \tag{6}$$

Tensore curvatura

$$R = \mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$$

$$(\mathrm{d}\Gamma)^i_{\ j} = \partial_\rho \Gamma^i_{\mu j}\mathrm{d}x^\rho \mathrm{d}x^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{7}$$

$$(\Gamma \wedge \Gamma)^i_{\ j} = \Gamma^i_{\ j} \wedge \Gamma^j_{\ k}$$

e utilizzando il fatto che

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 = \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu$$

si trova che $\Gamma \wedge \Gamma = 0$. Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Il tensore di Ricci è

$$\mathrm{Ric}_{j\nu} = \delta^{\mu}_{i} R^{i}_{j\mu\nu}$$

E come matrice

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola g^{ij} come inverso della metrica, da cui

$$||g^{ij}|| = \mathrm{diag}(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2)$$

e $R = -2$.

Zweibein

Scrivendo

$$V^x = \frac{\mathrm{d}x}{y} \qquad V^y = \frac{\mathrm{d}y}{y} \qquad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} \mathrm{d}V^x = \partial_y \left(\dfrac{1}{y}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V^y = \partial_x \left(\dfrac{1}{y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

e, considerando $T^i = 0$,

$$\mathrm{d}V^i = -\omega^i_j \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega^y_x \wedge V^x = 0$$

$$\omega^x_y \wedge V^y = \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } \ i = x \\ V^i & \text{se } \ i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega^x_y \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega^x_y = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega^y_x = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega^x_y$$

che verifica la condizione trovata per $\mathrm{d}V^y$. L'antisimmetria di ${\omega^i}_j$ si trasferisce a ${R^i}_j$, che avrà non nulli solo

$$ {R^x}_y = \mathrm{d}{\omega^i}_j = -V^x \wedge V^y \qquad {R^y}_x = -\epsilon \mathrm{d}{\omega^i}_j = \epsilon V^x \wedge V^y $$

Pertanto

$$ R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y $$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$ \mathrm{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} {R^y}_{x|yx} & {R^x}_{x|xy} \\ {R^y}_{y|yx} & {R^x}_{y|xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {R^x}_y & 0 \\ 0 & {R^x}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} $$

per cui lo scalare

$$ R = g^{ij}\mathrm{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2 $$

Derivate covarianti

I vettori tangenti alle Zweibein sono quelli tali per cui

$$ e_i(V^j) = \delta_i^j $$

e sono pertanto

$$ e_x = y\mathrm{d}x \qquad e_Y = y\mathrm{d}y $$

Se ne calcolano le derivate covarianti, con connessione ${\omega^i}_j$:

$$ \nabla e_x = {\omega^y}_x e_y = \epsilon e_y \otimes V^x \qquad \nabla e_y = {\omega^x}_y e_x = e_x \otimes V^x $$

Integrali primi

Gli integrali primi

$$ \begin{cases} p_x = \dfrac{\dot{x}}{y^2} \\ \sigma = \dfrac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{cases} $$

danno le condizioni

$$ \begin{cases} \dot{x} = p_x y^2 \\ \dot{y}^2 = (\sigma - \epsilon p_x^2 y^2) y^2 \end{cases} $$

Si procede calcolando

$$ \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{2\dot{y}y}{\dot{x}}\right)^2 $$

e, sostituendo le condizioni trovate con gli integrali primi, si ottiene

$$ \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{4}{p_x^2}(\sigma - \epsilon \dot{x}^2 y^2) $$

Per integrare questa equazione,

$$ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{p_x}\sqrt{\sigma - \epsilon p_x^2 v} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{\sigma}}{p_x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}}} $$

Si sostituisce al secondo membro

$$v \to q = \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\epsilon p_x^2} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{1-q}}$$

Un'ulteriore sostituzione porta a

$$q \to \theta = \arcsin \sqrt{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sigma}{\epsilon p_x^2} \mathrm{d}\cos\theta$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\cos \arcsin \sqrt{q} = \sqrt{1-q}$$

l'integrazione porta a

$$\frac{p_x \epsilon}{\sqrt{\sigma}}(x - x_0) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}} - c_0$$

che raccogliendo le costanti e riarrangiando porta a

$$(p_x \epsilon x - K)^2 = \sigma - \epsilon p_x^2 v$$

Al variare di ϵ e σ, si ottengono i seguenti grafici:

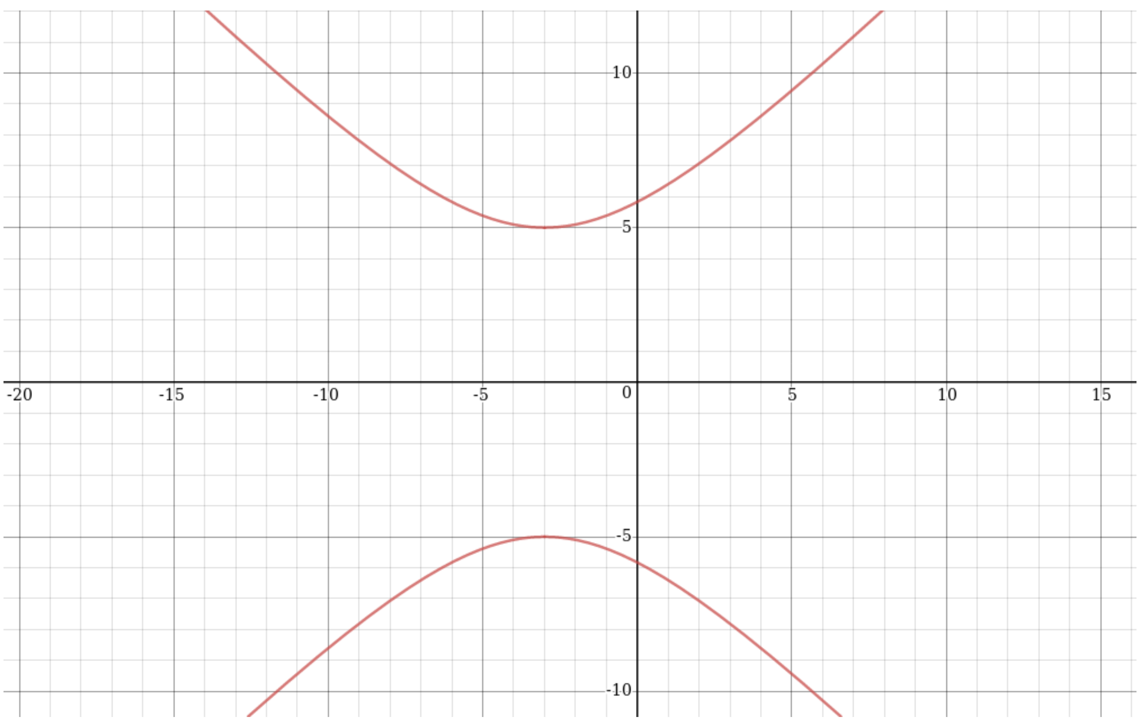

Figure 1: $\epsilon = -1, \ \sigma = -1$

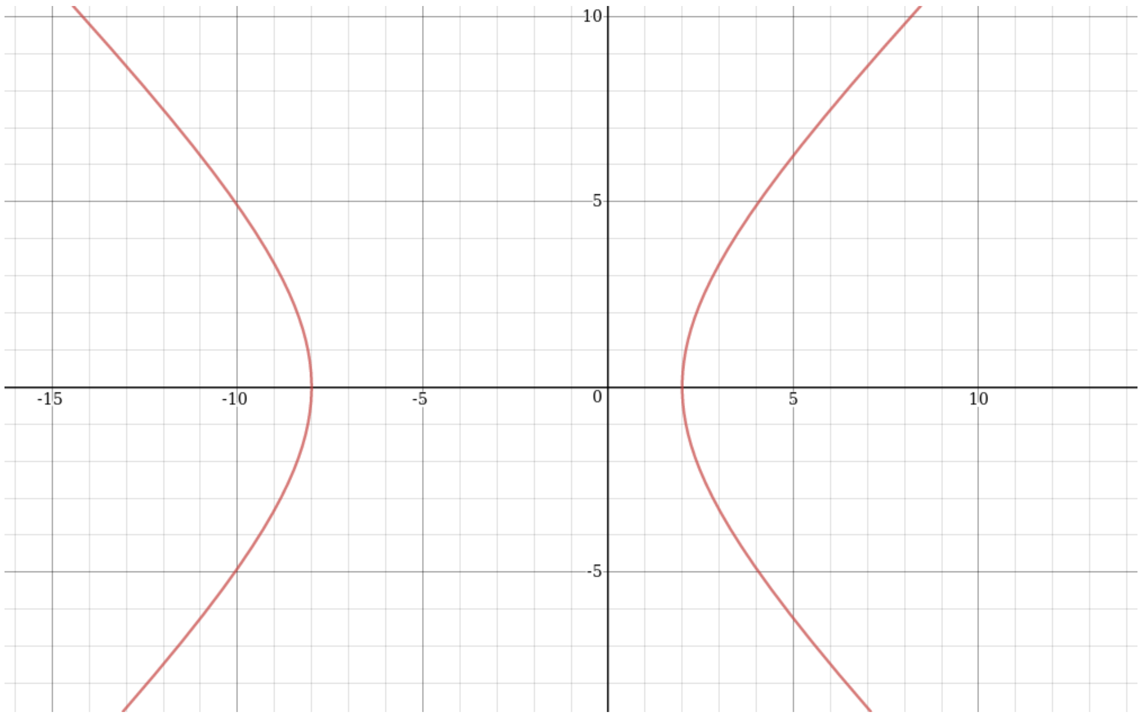

Figure 2: $\epsilon = -1,\ \sigma = +1$

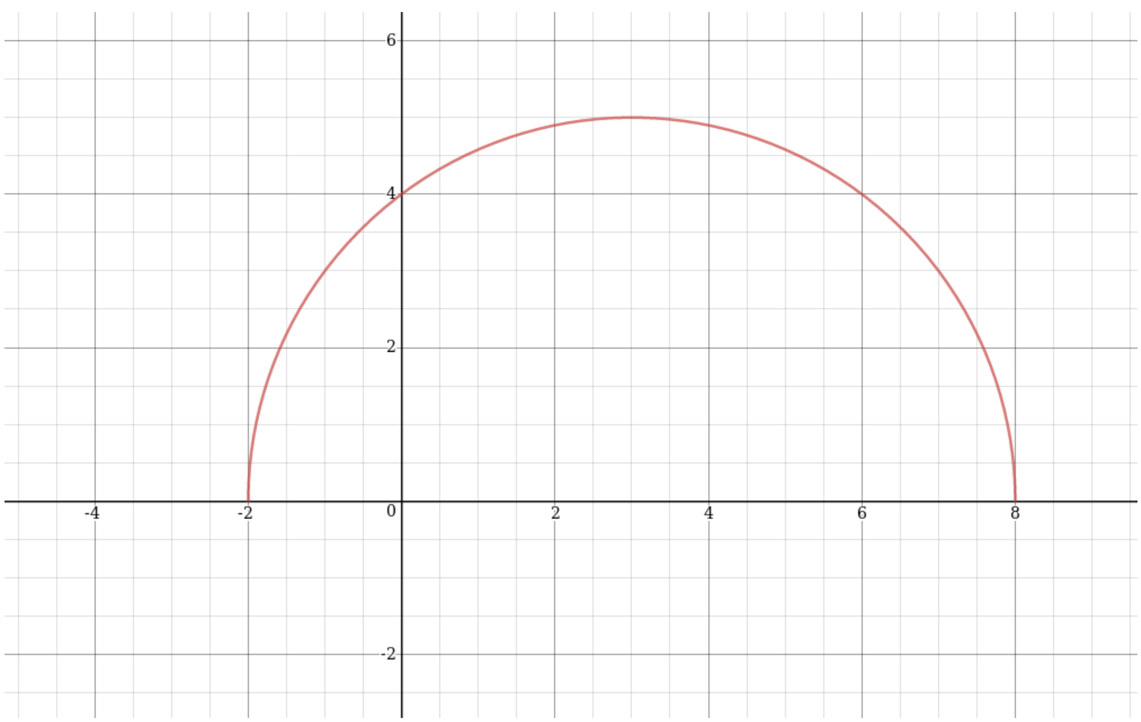

Figure 3: $\epsilon = +1,\ \sigma = +1$