Esercizi di Relativitá Generale: IV gruppo

Consegna con file pdf o da latex o da scanning

Lo scopo di questo gruppo di esercizi è di cercare di capire il significato delle coordinate in RG.

Esercizio 1

Consideriamo la metrica di Minkowski in 1+1 dimensioni ($c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \tag{1}$$

Svolgiamo i seguenti punti

- Facciamo il cambio di variabili

  $$x = x_0 + vt_0, \qquad t = t_0 \tag{2}$$

  Gli osservatori con etichetta (x_0) si muovono quindi a velocitá costante rispetto ai vecchi osservatori. Dal punto di vista della RG queste coordinate sono altrettanto belle di quelle originali.

- Portare la metrica in forma canonica in modo da poter leggere semplicemente la distanza spaziale dl^2 misurata dagli osservatori (x_0).

- Vista la semplicitá di dl^2 si puó introdurre una vuova coordinata X tale che $dl^2 = (dX)^2$. In contemporanea si puó anche cercare di riscriverela parte temporale come $-(dT)^2$, ossia si scriva $ds^2 = -dT^2 + dX^2$.

  Qual'è la relazione fra le vecchie coordinate (t, x) e le nuove (T, X)?

- Supponiano di fare gli stessi conti per una classe di osservatori che si muovono con moto accelerato uniforme come

  $$x = x_0 + \sqrt{\kappa^2 + t_0^2}, \qquad t = t_0 \tag{3}$$

  Possiamo portare la metrica nella forma $ds^2 = -dT^2 + dX^2$?

Esercizio 2

Consideriamo la metrica di Rindler

$$ds^2 = -\kappa^2 x^2 dt^2 + dx^2 \tag{4}$$

Calcolare l'accelerazione degli osservatori (x).

Esercizio 3

Cosa succede se la metrica di Schwarzchild è vista da un osservatore in moto? In particolare cosa succede se la velocitá tende a c? La questione precedente puó anche esser riformulata come qual'è la metrica di una particella senza massa.

La risposta a questa domanda è data dalla metrica di Aichelburg-Sexl.

Partiamo da Schwarzchild in D dimensioni

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}} + r^2 \left(d\theta_{D-2}^2 + \dots\right) \tag{5}$$

- Usare il limite di campo debole per mostrare che $r_S^{D-3} = 2G_D M/c^2$ dove G_D è la costante gravitazionale in D dimensioni spazio temporali.
- Le coordinate $r, \theta_{D-2}, \dots \theta_1$ **non** possono esser interpretate come le coordinate polari ma solo come etichette degli osservatori. Quindi le espressioni $r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2$, $\cos\theta_{D-2} = x_{D-1}/r$ e via dicendo con $\vec{x}_\perp = (x_2, \dots x_{D-1})$ possono **solo** esser viste come cambiamento di coordinate definito arbitrariamente. Ovviamente quando $r \to \infty$ il precedente cambiamento di coordinate è il vecchio cambiamento in R^{D-1}. Riscrivere quindi la metrica come

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{\left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}}{1 - \left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}} dr^2 + dx^2 + d\vec{x}_\perp^2 \tag{6}$$

- Tenendo sempre presente le considerazioni del punto precedente possiamo fare una "trasformazione di Lorentz" definita da un ulteriore cambiamento di coordinate come

$$ct = \gamma\frac{1+\beta}{2}U + \gamma\frac{1-\beta}{2}V, \qquad x = \gamma\frac{1+\beta}{2}U - \gamma\frac{1-\beta}{2}V \tag{7}$$

dove $U = cT + X$ e $V = cT - X$ sono le coordinate di cono luce. E considerare il limite $\beta \to 1$.

Mostrare che quando $U \neq 0$ nel predente limite la metrica diventa la metrica piatta in coordinate di cono luce

$$ds^2 = -dUdV + d\vec{x}_\perp^2 \tag{8}$$

- Considerare ora il caso $U = 0$. Far vedere che il tal caso la metrica diventa

$$ds^2 = \gamma^2 \left(\frac{r_S}{x_\perp}\right)^{D-3} dU^2 + \dots \tag{9}$$

ed è quindi divergente.

- Dobbiamo quindi fare i conti con piú attenzione. I problemi del punto precedente nascono dati termini

$$-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_S}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + dx^2 \tag{10}$$

Fare vedere che questi due termini si possono riscrivere come

$$-dUdV + r_S^{D-3} \left\{ \frac{\gamma^2}{[\gamma^2 U^2 - UT + x_\perp^2]^{(D-3)/2}} dU^2 + O(1-\beta)^0 \right\} \tag{11}$$

- A questo punto ci ricordiamo del primo insieme di esercizi dove avevamo mostrato che

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma}{[\gamma^2 x^2 + x_\perp^2]^{(D-3)/2}} = N_D \frac{\delta(x)}{x_\perp^{D-4}} \tag{12}$$

(Una sottigliezza per $D = 4$ $x^0 = \ln(x/\mu)$ dove μ è un cutoff). Usiamo il risultato del primo punto di questo esercizio per l'espressione per r_S e richiediamo che

$$\lim_{\gamma \to \infty} M\gamma = M_* \tag{13}$$

Qual'è il significato di questa richiesta?

Ottenere quindi la metrica di Aichelburg-Sexl

$$ds^2 = -dUdV + N_D r_{S*}^{D-3} \frac{\delta(U)}{x_\perp^{D-4}} dU^2 + d\vec{x}_\perp^2 \tag{14}$$

dove r_{S*} è il raggio di Schwarzcild di M_*. Nel piano X, cT disegnare dove la metrica differisce da quella piatta.

- (Facoltativo ma interessante) Siete capaci di trovare le geodetiche unendo due geodetiche nello spazio piatto sulla discontinuitá a $U = 0$?