1 Esercizi di Relativitá Generale: V gruppo

Consideriamo la metrica $g_{\mu\nu}$ in D dimensioni con segnatura $(-,+^{D-1})$. Quando sarà il caso fisseremo $D=4$ ma per ora teniamo D generico. Espandiamo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

e consideriamo il caso $|h_{\mu\nu}| << 1$ con $x^0 = ct$ e x^i $(i = 1, \dots D-1)$ le coordinate spaziali. Questa affermazione ha senso siccome la metrica è adimensionale. Quindi d'ora in poi lavoreremo al primo ordine nell'espansione in $h_{\mu\nu}$. Questa approssimazione è conosciuta in letteratura come campo debole.

Scrivere il vielbein come $V^a = (\delta^a_\mu + \frac{1}{2}h^a_\mu)dx^\mu$. Notate come quando si lavora con h gli indici piatti e curvi si possono identificare quando si considera solo il primo ordine in h.

Calcolare i seguenti punti.

- La spin connection ed il tensore di Riemann.
- I simboli di Christoffel ed il tensore di Riemann. In entrambi i casi il tensore di Riemann è

$$R^{ab} = -(\partial_\mu \partial^{[a} h^{b]}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^a h^b_\nu - \partial_\mu \partial^b h^a_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1)$$

- Guardando in faccia Ricci è naturale scegliere come gauge

$$\partial^\nu h_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \quad (2)$$

dove $h = h^\nu_\nu$ cosicche il tensore di Einstein diviene

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \right) = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3)$$

dove $\partial^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ è il d'Alambertiano e si è introdotta la notazione

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \quad (4)$$

- Ma è possibile scegliere il gauge (**??**)? Sí, siccome è l'equivalente del gauge di Lorentz. Vediamo in maggior dettaglio come funziona. Facciamo un cambiamento di coordinate $x'^{\mu} = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ con ϵ dello stesso ordine di grandezza di h. Se richiediamo che la nuova metrica h' soddisfi il gauge (**??**), facciamo vedere che ϵ deve soddisfare l'equazione

$$\partial^2 \epsilon_\mu + \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

Fare vedere che l'equazione corrispondente per un campo di gauge A_μ è

$$\partial^2 \epsilon + \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{6}$$

- L'equazione di Einstein linearizzata in $D = 4$ diventa allora

$$\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{7}$$

Dobbiamo quindi trovare la funzione di Green che soddisfa

$$\partial^2 G(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{8}$$

Quale fra queste funzioni di Green (definite nel limite $\epsilon \to 0^+$ e calcolabili con la trasformata di Fourier)

$$\begin{aligned} G_+(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} - \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-(k_0 + i\epsilon)^2 + \vec{k}^2} \\ G_-(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} - \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-(k_0 - i\epsilon)^2 + \vec{k}^2} \\ G_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} - \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-k_0^2 + \vec{k}^2 + i\epsilon} \end{aligned} \tag{9}$$

è quella che progaga il segnale solo avanti nel tempo? Capito ció, calcolarla. Questa è la funzione di Green ritardata G_R. Prima effettuare l'integrale su k^0 con metodo dei residui, poi riscrivere il rimanente $d^3\vec{k}$ in coordinate polari e fare l'integrale sulle coordinate angolari trovando

$$\begin{aligned} G_R(x) &= -2\theta(x^0) \frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty dk \; \sin(kx^0) \sin(k|\vec{x}|) \\ &= -\theta(x^0) \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(x^0 - |\vec{x}|) \end{aligned} \tag{10}$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene usando le formule di prostaferesi. Nella corrispondente equazione scritta in funzione di $x - y$, si vede chiaramente che quello che si misura in $(x^0, \vec{x})$ é quello che è stato generato in $\vec{y}$ ad il tempo precedente $y^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|$, con una differenza tale da permettere ad il segnale che viaggia alla velocitá della luce di raggiungere il punto di osservazione.

(Siete in grado di fare gli stessi passaggi in dimensione D? Fate attenzione che in dimensioni pari tutto funziona come ci aspetta ma non è cosi in dimensioni dispari. In dimensioni dispari la funzione di Green non ha supporto sulla sfera che si espande ma in tutta la palla limitata dalla sfera che si espande. Il conto in dimensione dispari conviene farlo aggiungendo una dimensione falsa in piu' che si elimina con una delta.)

- Siamo allora in grado di risolvere l'equazioni di Einstein linearizzate come

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{y} \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{11}$$

- Consideriamo la polvere con tensore energia impulso

$$T_{\mu\nu} = (c^2\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p \tag{12}$$

nel caso statico, ossia con $u^\mu = (1, \vec{0})$, con pressione per cui $|p| << c^2\rho$ e $\rho = \rho(\vec{y})$. Mettiamoci a grandi distanze rispetto a dove c'è la materia, ossia $|\vec{x}| >> |\vec{y}_M|$ con $\rho(\vec{y}) = 0$ quando $|\vec{y}| > |\vec{y}_M|$. Espandiamo $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ (questo si chiama sviluppo multipolare), dimostrare che in $D = 4$

$$h_{00}(x^0, \vec{x}) = h_{ii}(x^0, \vec{x}) = \frac{2G}{c^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3\vec{y} \rho(\vec{y}) = \frac{2GM}{c^2 r} \tag{13}$$

dove $r = |\vec{x}|$. Possiamo quindi scrivere la metrica come

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r})c^2 dt^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2 r})(d\vec{x})^2 \tag{14}$$

. Questa espressione è valida anche se considero il caso in cui ci sia molta materia, "$M >> 1$"? (Le virgolette sono lí perché la materia è dimensionale e quindi si deve paragonare a qualcosa e poi bisogna vedere che cosa significa distante).

- Consideriamo ora un caso piú generale. Scegliamo le coordinate in maniera tale che il "centro di massa" sia nell'origine e che non abbia velocitá, ossia

$$\int d^3\vec{y}\rho(\vec{y})y_i = \int d^3\vec{y}\rho(\vec{y})v_i(\vec{y}) = 0 \tag{15}$$

dove $u^\mu \sim (1, \vec{v}/c)$, ossia la velocitá locale sia piccola. Notate come $|T_{ij}| \sim |T_{00}|/c^2$ e $|T_{0j}| \sim |T_{00}|/c$ cosa che giustifica considerare solo T_{00} e T_{0i}.

Usiamo la conservazione del tensore energia-impulso $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$ in $\int_V d^3y \partial_k T^{0k} y_i y_j$ con un opportuno volume, integriamo per parti e ci accorgiamo che il termine di superfice non contribuisce. Fate quindi vedere che

$$\int d^3\vec{y}\rho(\vec{y})(y_i v_j + y_j v_i) = 0 \tag{16}$$

- Fatti questi preparativi mostare che

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00}(x^0, \vec{x}) &= \frac{4G}{c^2}\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3\vec{y}\rho(\vec{y}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{4GM}{c^2 r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ \bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) &= -\frac{2G}{c^3}\frac{x^j}{|\vec{x}|^3}\int d^3\vec{y}\rho(\vec{y})(y_i v_j - y_j v_i) + O\left(\frac{1}{r^5}\right) = \frac{2G}{c^3 r^3}x^j J_{ij} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

dove $J_{ij} = \int d^3\vec{y}\rho(\vec{y})(y_i v_j - y_j v_i)$ è il momento angolare del sistema.

Possiamo quindi scrivere la metrica come

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r})c^2 dt^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2 r})(d\vec{x})^2 + \frac{4G}{c^3 r^3}J_{ij}x^j\ dx^i c dt + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \tag{18}$$

Notate come questa forma asintotica della metrica giustifica l'espressione che avevamo usato nel derivare le equazioni gravito-magnetiche.

Inoltre l'ultimo termine fa vedere come un corpo che ruota rispetto all'infinito trascina nella rotazione lo spazio-tempo (giustificare questa affermazione).

Infine questa espressione giustica il perché abbiamo potuto definire la massa di un buco nero usando l'espressione della metrica di Schwarzchild all'infinito.