Esercizi di Relativitá Generale: I gruppo

1 Osservatori uniformemente accelerati

Consideriamo una particella relativistica con accelerazione propria costante. Questo vuol dire che l'accelarazione rispetto al sistema inerziale $\mathcal{I}$ in cui è istantameamente ferma è costante e pari a a_0.

Supponiamo il moto unidimensionale lungo l'asse x.

Indichiamo con x_T, t_T le coordinate misurate da "terra", con x, t le coordinate misurate dall'osservatore inerziale $\mathcal{I}$ (in cui la particella è istantaneamente ferma) e con v la velocitá rispetto alla terra. Calcolare i seguenti punti.

- Dato un oggetto con velocitá u ed accelerazione a nel sistema $\mathcal{I}$, fare vedere che nel sistema "terra" si ha ($c = 1$)

$$a_T = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^2} a \tag{1}$$

- Consideriamo ora la cinematica della particella che accelera, ossia consideriamo $v = v(t_T)$ e $u = 0$ nella precedente equazione. Dimostrare che

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \tag{2}$$

- Supponendo che $x_T(0) = v_T(0) = 0$ fare vedere che

$$x_T = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{3}$$

  e che nel limite di basse velocitá si ritrova la formula classica.

- **Achille e la lepre.** Consideriamo delle particelle (le lepri) che all'istante iniziale sono $x_T(0) = x_0; v_T(0) = 0$ e supponiamo di lanciare un raggio luminoso (Achille) all'inseguimento da $x_T(0) = v_T(0) = 0$. Il raggio luminoso raggiunge sempre la particella?

- Calcolare il tempo proprio τ e la legge oraria in funzione del tempo proprio.

- Se accelerassimo con accelerazione pari a $g = 9.8m/s^2$ per garantire il massimo conforto, quanto tempo e tempo proprio passerebbe per percorrere $1 \cdot 10^9 ly$ (anni luce)? [Potete usare ly e y come unitá di misura in tal caso $g = 1.030ly/y^2$]

- **Perché non andiamo su Giove?** Consideriamo un viaggio Terra-Giove con un punto intermedio M. Assumiamo che la distanza sia 8 ore luce. Programmiamo un viaggio con accelerazione fra Terra e M, decelerazione fra M e Giove, accelerazione fra Giove e M e decelerazione fram M e Terra, il tutto con $a_0 = g$. Quanto tempo t_R ci si mette in relativita' ristretta e quanto t_C in meccanica classica? Perché $t_C < t_R$?

- Consideriamo un razzo e scriviamo la conservazione dell'impulso nel sistema $\mathcal{I}$. Supponiamo che la velocitá di espulsione del materiale sia v_e. Far vedere che la massa del razzo misurata nel tempo proprio è:

$$m_0(\tau) = m_0(0)e^{-\frac{a_0 \tau}{\sqrt{1-v_e^2}v_e}} \tag{4}$$

- Usando i risultati sul tempo di volo fino a Giove, calcolare il rapporto $m_{iniziale}/m_{finale}$ per $v_e = 10km/s$, $\frac{1}{100}c$, $\frac{1}{10}c$.

- Consideriamo la forza di Lorentz applicata alla particella

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{5}$$

  e supponiamo che nel sistema di riferimento di quiete della particella vi sia solo il campo elettrico lungo la direzione x. Calcolare l'accelerazione nel sistema di riferimento di quiete della particella.

- Consideriamo ora il sistema della terra e supponiamo che vi sia solo un campo elettrico costante lungo l'asse x. Dimostrare che questo campo elettrico è lo stesso per ogni osservatore che si muove lungo l'asse x quindi dedurre il moto di una particella carica.

2 Campo elettrico di una particella carica senza massa

Consideriamo una particella di massa m (che faremo tendere a zero) e di carica e nel sistema di riferimento $x'^\mu = (ct', x', y', \dots) = (x'^0, x'^i)$ con $i =$

$1, \ldots D-1$ dove essa è ferma.

- Scriviamo il suo quadri-potenziale A'_μ nel sistema x'^μ (per capire la dipedenza dalla distanza dalla carica in uno spazio tempo di dimensione generica D usate la legge di Gauss e normalizzate come $A'_0 = \frac{e}{r'^{\cdots}}$);

- Calcoliamo il campo e.m $F'_{\mu\nu}$ nel sistema x'^μ;

- Scriviamo il campo e.m $F'_{\mu\nu}$ nelle coordinate di cono luce, ossia $x'^\pm = \frac{x'^0 \pm x'^1}{\sqrt{2}}$;

- Scriviamo le trasformazioni di Lorentz per le coordinate di cono luce;

- Scriviamo tramite una trasformazione di Lorentz il campo e.m $F_{\mu\nu}$ nel sistema x^μ dove la particella si muove com velocitá $-v$ lungo l'asse x usando le coordinate di cono luce;

- Giustificare che

  $$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\gamma}{[\gamma^2 a^2 + b^2]^{(D-1)/2}} = N_D \frac{\delta(a)}{b^{D-2}}$$

  La costante N_D puó esser calcolata sapendo che $\int da\delta(a) = 1$ ed usando il seguente trucco di Scwhwinger. Si scrive

  $$\frac{\Gamma(\alpha)}{(u^2+1)^\alpha} = \int_0^\infty d\tau \; \tau^{\alpha-1} e^{-\tau(u^2+1)}$$

  e quindi si fa prima l'integrale su a e poi su τ.

- Considerare il limite $v \to c$, ossia $\gamma \to \infty$ e mostrare che le uniche compomenti non nulle del campo e.m sono

  $$F_{i+} = -eN_D \frac{x_i}{x_\perp^{D-2}} \delta(x^+),$$

  dove $i = 2, \ldots D$

- Disegnare il campo ed il moto della particella nel piano xt;

- Disegnare il campo ed la direzione di moto della particella nel piano xy ad un dato istante t.

- Facoltativo. Calcolare il moto di una particella di test carica in questo campo e.m. A questo scopo notare che la particella è libera sia prima che dopo l'attraversamento dell'onda d'urto e.m. Il problema si riduce quindi ad unire sulla discontinuitá data dall'onda d'urto e.m due traiettorie libere.