

# Contents

<b>1</b>	<b>Foglio 1</b>	<b>2</b>
1.1	1 - Osservatori uniformemente accelerati . . . . .	2
	Particella accelerata . . . . .	2
	Achille e la lepre . . . . .	3
	Tempo proprio . . . . .	3
	$10^9$ anni-luce . . . . .	3
	Perchè non andiamo su Giove? . . . . .	4
	Razzo relativistico . . . . .	4
	Campo elettrico . . . . .	4
1.2	2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa . . . . .	5
	Quadripotenziale . . . . .	5
	Tensore elettromagnetico . . . . .	5
	Coordinate cono-luce . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Foglio 2</b>	<b>5</b>
2.1	Proiezione stereografica . . . . .	5
2.2	Rotazioni . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Foglio 3</b>	<b>7</b>
3.1	Metrica bidimensionale . . . . .	7

# 1 Foglio 1

## 1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella  $P_0$ , uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale  $\mathcal{I}$ . Il sistema  $\mathcal{I}$  va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella  $P_0$  è istantaneamente ferma.

**Particella accelerata** Considero una generica particella  $P$ , con velocità  $u$  e accelerazione  $a$  nel sistema  $\mathcal{I}$ . Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento  $\mathcal{I}$  al sistema terra  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{cases} dx_T = \gamma(dx + vdt) \\ dt_T = \gamma(dt + vdx) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_T = \frac{dx_T}{dt_T} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

$$du_T = \frac{1 - v^2}{(1 + uv)^2} du$$

$$a_T = \frac{du_T}{dt} = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^3} a \quad (2)$$

Volendo trovare la velocità della particella  $P_0$ , utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità  $u$  va posta nulla perchè considero la particella  $P_0$ , ferma in  $\mathcal{I}$ , e considero l'evoluzione temporale di  $v(t_T)$ , rispetto al sistema  $\mathcal{T}$ ; la velocità della particella rispetto a  $\mathcal{T}$  è adesso  $v$  e  $a = a_0$ :

$$a_T = \frac{dv(t_T)}{dt_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

sostituisco  $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int d \tan \theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \quad (3)$$

Per trovare la legge oraria, considerando che  $x_T(0) = v_T(0) = 0$ ,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} dx_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} dt_T$$

Sostituendo prima  $y = a_0 t_T$  e poi  $y = \sinh(z)$  si ottiene

$$\begin{aligned}
x_T(t_T) &= \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^y \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy \\
&= \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^z \sinh(z) dz \\
&= \frac{1}{a_0} [\cosh \sinh^{-1}(y) - \cosh \sinh^{-1}(y_0)] \\
&= \frac{1}{a_0} [\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2})) - 1] \\
&= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} \\
&= \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0} \\
x_T(t_T) &= \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{4}
\end{aligned}$$

**TODO** limite di basse velocità

**Achille e la lepre** Uguagliando  $c \cdot t$  a  $x_T$  dovrei trovare qualcosa, ma se metto  $c=1$  si cancella  $t$ quadro e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

**Tempo proprio** Con  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$ :

$$\begin{aligned}
icd\tau &= ds = icdt_T \sqrt{(1 - v^2(t_T))} \\
\tau &= \int_0^{t_T} \sqrt{(1 - v^2(t))} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0 t)^2}} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo  $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{dz}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

$10^9$  **anni-luce** **TODO** udm di  $c$  Per percorrere una distanza di  $10^9 ly$  con accelerazione da fermo di  $g = 9.8 m/s^2 = 1.030 ly/y^2$ , usando la formula 4, occorrono

$$\sqrt{\frac{d^2}{c^2} + 2 \frac{d}{g}} \simeq 2.998 \cdot 10^1 8y$$

cui corrisponde un tempo proprio  $\tau \simeq 41.972y$ .

**Perchè non andiamo su Giove?** Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.9999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-gt_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2 - 2gx\sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}}{g}$$

**TODO** risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

**Razzo relativistico** Considero il sistema  $\mathcal{I}$  in cui il razzo è fermo e i sistemi  $\mathcal{E}$ , in cui è ferma la  $dm$  espulsa, e  $\mathcal{J}$ , in cui è fermo il razzo propulso con massa  $m - dm$ . Nel sistema  $\mathcal{I}$ :

$$dm v_e \gamma(v_e) = (m - dm) dv \gamma(v) \sim m dv$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_e)} \frac{dv}{d\tau}$$

$$m = m_0 e^{\frac{\frac{dv}{d\tau}}{v_e \gamma(v_e)}}$$

$$m = m_0 e^{\frac{a_0 \tau}{v_e \gamma(v_e)}}$$

**Campo elettrico**

## 1.2 2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa

**Quadripotenziale** Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di  $A^\mu$  sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo),  $A^0$  può essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$= (cost) \cdot \frac{r^{D-1}}{r^k} \Omega$$

E siccome la dipendenza da r deve cancellarsi  $E_i = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}$ , quindi

$$A = (-\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0})$$

**Tensore elettromagnetico** Le componenti non nulle del tensore  $F_{\mu\nu}$  sono le  $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$ .

**Coordinate cono-luce** Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon_{\xi}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$\tilde{F}_{\xi\varsigma} = \Upsilon_{\xi}^{\mu} \Upsilon_{\varsigma}^{\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambio la velocità:

$$x^{\pm} = \gamma(1 - \beta)x^{\pm} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

## 2 Foglio 2

### 2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varra' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine dara' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$\begin{aligned} z_{N,S} &= \rho_{N,S} e^{i\varphi} \\ \bar{z}_{N,S} &= \rho_{N,S} e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{1}{z_S} \\ \bar{z}_N &= \frac{1}{\bar{z}_S} \end{aligned}$$

Tale relazione è olomorfa in  $U_N \cap U_S$ , cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate  $w_{N,S}$ , ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive  $z_{N,S}$ :

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

## 2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con  $z_N$ .

$$\begin{aligned} L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ L_{\pm} &= \pm e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \pm e^{\pm i\varphi} R e^{i\varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \mp \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i\varphi} R e^{-i\varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \pm \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

$$\text{Siccome } z\bar{z} = \frac{1+c}{1-c},$$

$$L_+ = -\frac{z^2}{R} \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad L_- = R \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{Usando che } \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

### Autovalori di $F_m$

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = (z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z [z^m] f(\rho) + z^m L_z [f(\rho)] = m F_m$$

### Forma di $Y_l^l$

$$\begin{aligned} L_+[f(z\bar{z})] &= (-z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ &= -\frac{z^{m+1}}{R} \left[ m f + (|z|^2 + R^2) \frac{\partial f}{\partial \rho^2} \right] \end{aligned}$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$\begin{aligned} L_+ Y_l^m &= 0 \iff m = l \\ L_- Y_l^l &= (\frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R}) Y_l^l \end{aligned}$$

Nelle coordinate  $(z_S, \bar{z}_S)$

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S \bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$

## 3 Foglio 3

### 3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = ds^2 = \frac{\epsilon dx^2 + dy^2}{y^2}$$

con  $\epsilon = \pm 1$ .

### Vettore di Killing

**TODO** Considerando che la metrica non dipende dal modulo di  $x$ , ma solo da quello di  $y$ , si scrive immediatamente che per

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{\vec{k}} g &= 0 \end{aligned}$$

### Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni  $\delta x$  portano a

$$\left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per  $\delta y$  si ha

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left( \frac{\dot{y}}{y^2} \right)' = 0$$

$$\ddot{y} + \left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = 0$$

Confrontando le equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{xy}^x & \Gamma_{yy}^x \\ \Gamma_{xy}^y & \Gamma_{yy}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dy}{y} & -\frac{dx}{y} \\ \frac{\epsilon dx}{y} & -\frac{dy}{y} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{dy}{y} \otimes e_x + \frac{\epsilon dx}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{dx}{y} \otimes e_x - \frac{dy}{y} \otimes e_y \end{cases} \quad (6)$$

### Tensore curvatura

$$R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$$

$$(d\Gamma)_j^i = \partial_\rho \Gamma_{\mu j}^i dx^\rho dx^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \quad (7)$$

$$(\Gamma \wedge \Gamma)_j^i = \Gamma_j^i \wedge \Gamma_k^j$$



e utilizzando il fatto che

$$dx^\mu \wedge dx^\mu = 0 = dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu$$

si trova che  $\Gamma \wedge \Gamma = 0$ . Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Il tensore di Ricci è

$$\text{Ric}_{j\nu} = \delta_i^\mu R_{j\mu\nu}^i$$

E come matrice

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola  $g^{ij}$  come inverso della metrica, da cui

$$||g^{ij}|| = \text{diag}\left(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2\right)$$

e  $R = -2$ .

### **Zweibein**

Scrivendo

$$V^x = \frac{dx}{y} \quad V^y = \frac{dy}{y} \quad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$ds^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} dV^x = \partial_y \left( \frac{1}{y} \right) dy \wedge dx \\ dV^y = \partial_x \left( \frac{1}{y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{cases}$$

e, considerando  $T^i = 0$ ,

$$dV^i = -\omega_j^i \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega_x^y \wedge V^x = 0$$

$$\omega_y^x \wedge V^y = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } i = x \\ V^i & \text{se } i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega_y^x \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega_y^x = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega_x^y = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega_y^x$$

che verifica la condizione trovata per  $dV^y$ . L'antisimmetria di  $\omega_j^i$  si trasferisce a  $R_j^i$ , che avrà non nulli solo

$$R_y^x = d\omega_j^i = -V^x \wedge V^y \quad R_x^y = -\epsilon d\omega_j^i = \epsilon V^x \wedge V^y$$

Pertanto

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y$$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$\text{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} R_{x|yx}^y & R_{x|xy}^x \\ R_{y|yx}^y & R_{y|xy}^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y^x & 0 \\ 0 & R_y^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui lo scalare

$$R = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2$$