Contents

1 Foglio 1

1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella P_0, uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale $\mathcal{I}$. Il sistema $\mathcal{I}$ va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

Particella accelerata Considero una generica particella P, con velocità u e accelerazione a nel sistema $\mathcal{I}$ Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento $\mathcal{I}$ al sistema terra $\mathcal{T}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_T = \gamma(\mathrm{d}x + v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t_T = \gamma(\mathrm{d}t + v\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{1}$$

$$u_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{\mathrm{d}t_T} = \frac{u+v}{1+uv}$$

$$\mathrm{d}u_T = \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}\mathrm{d}u$$

$$a_T = \frac{\mathrm{d}u_T}{\mathrm{d}t} = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1+uv)^3}a \tag{2}$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0, utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità u va posta nulla perchè considero la particella P_0, ferma in $\mathcal{I}$, e considero l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema $\mathcal{T}$; la velocità della particella rispetto a $\mathcal{T}$ è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v(t_T)}{\mathrm{d}t_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \mathrm{d}\tan\theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}}$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} \mathrm{d}x_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{a + (a_0 t_T)^2}} \mathrm{d}t_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
x_T(t_T) &= \frac{1}{a_0}\int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a_0}\int_{z_0}^{z} \sinh(z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{a_0}[\cosh\sinh^{-1}(y) - \cosh\sinh^{-1}(y_0)] \\
&= \frac{1}{a_0}[\cosh(\ln(y+\sqrt{1+y^2}) - 1] \\
&= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y+\sqrt{1+y^2})} \\
&= \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{a_0} \\
& \frac{\sqrt{1+(a_0t_T)^2}-1}{a_0}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

TODO limite di basse velocità

Achille e la lepre Uguagliando c*t a xT dovrei trovare qualcosa, ma se metto c=1 si cancella tquadro e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

Tempo proprio Con $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$:

$$ic\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s = ic\mathrm{d}t_T\sqrt{(1 * -v^2(t_T))}$$

$$\tau = \int_0^{t_T} \sqrt{(1 * -v^2(t))}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+(a_0t)^2}}\mathrm{d}t$$

Sostituendo $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{\mathrm{d}z}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1+(a_0t_T)^2} + a_0t_T)}{a_0}$$

10^9 **anni-luce** Per percorrere una distanza di 10^9ly con accelerazione da fermo di $g = 9.8m/s^2 = 1.030ly/y^2$, usando la formula 3, occorrono

$$\sqrt{\frac{d}{c}^2 + 2\frac{d}{g}} \simeq 1.942 \cdot 10^9 y$$

cui corrisponde un tempo proprio $\tau = 0.142 \cdot 10^9 ly$.