

# Contents

<b>1</b>	<b>Foglio 1</b>	<b>2</b>
1.1	Osservatori uniformemente accelerati . . . . .	2
1.1.1	Particella accelerata . . . . .	2
1.1.2	Achille e la lepre . . . . .	3
1.1.3	Tempo proprio . . . . .	3
1.1.4	$10^9$ anni-luce . . . . .	3
1.1.5	Perchè non andiamo su Giove? . . . . .	4
1.1.6	Razzo relativistico . . . . .	4
1.1.7	Campo elettrico . . . . .	5
1.2	Campo elettrico di una particella carica senza massa . . . . .	5
1.2.1	Quadripotenziale . . . . .	5
1.2.2	Tensore elettromagnetico . . . . .	5
1.2.3	Coordinate cono-luce . . . . .	6
1.2.4	Limite di alte velocità . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Foglio 2</b>	<b>7</b>
2.1	Proiezione stereografica . . . . .	7
2.2	Rotazioni . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Foglio 3</b>	<b>9</b>
3.1	Metrica bidimensionale . . . . .	9
3.1.1	Traiettoria circolare . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Foglio 4</b>	<b>15</b>
4.1	Osservatori in Minkowsky . . . . .	15
4.2	Metrica di Rindler . . . . .	15
4.3	Schwartzschild per osservatori in moto . . . . .	15
4.3.1	Osservatori in moto . . . . .	16
4.3.2	Metrica di Aichelburg-Sexl . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Foglio 5</b>	<b>17</b>
5.0.1	Campo debole . . . . .	17
5.0.2	Gauge "di Lorenz" . . . . .	18
5.0.3	Equazioni di Einstein . . . . .	19
5.0.4	Funzione di Green . . . . .	19
5.0.5	Polvere . . . . .	20
5.0.6	Centro di massa nell'origine . . . . .	21

# 1 Foglio 1

## 1.1 Osservatori uniformemente accelerati

Si considera una particella  $P_0$ , uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale  $\mathcal{I}$ . Il sistema  $\mathcal{I}$  va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella  $P_0$  è istantaneamente ferma.

### 1.1.1 Particella accelerata

Si considera una generica particella  $P$ , con velocità  $u$  e accelerazione  $a$  nel sistema  $\mathcal{I}$ . Il boost a velocità inversa dal sistema in movimento  $\mathcal{I}$  al sistema terra  $\mathcal{T}$  è

$$\begin{cases} dx_T = \gamma(dx + vdt) \\ dt_T = \gamma(dt + vdx) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_T = \frac{dx_T}{dt_T} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

$$du_T = \frac{1 - v^2}{(1 + uv)^2} du$$

$$a_T = \frac{du_T}{dt} = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^3} a \quad (2)$$

Volendo trovare la velocità della particella  $P_0$ , si utilizza l'equazione 2 e la si specializza: la velocità  $u$  va posta nulla perchè si considera la particella  $P_0$ , ferma in  $\mathcal{I}$ , e l'evoluzione temporale di  $v(t_T)$ , rispetto al sistema  $\mathcal{T}$ ; la velocità della particella rispetto a  $\mathcal{T}$  è adesso  $v$  e  $a = a_0$ :

$$a_T = \frac{dv(t_T)}{dt_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

sostituisco  $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int d \tan \theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \quad (3)$$

Per trovare la legge oraria, considerando che  $x_T(0) = v_T(0) = 0$ ,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} dx_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} dt_T$$

Sostituendo prima  $y = a_0 t_T$  e poi  $y = \sinh(z)$  si ottiene

$$x_T(t_T) = \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^y \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^z \sinh(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_0} [\cosh \sinh^{-1}(y) - \cosh \sinh^{-1}(y_0)] = \frac{1}{a_0} [\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2}) - 1] \\
&= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} = \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0} \\
&x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{4}
\end{aligned}$$

Se si prende il limite di basse velocità si avrà  $a_0 t_T \ll 1$ , da cui si ottiene

$$x_t(t_T) \sim \frac{1}{2} a_0 t_T^2$$

che corrisponde alla formula newtoniana.

### 1.1.2 Achille e la lepre

Uguagliando la posizione di una particella accelerata da ferma a partire da  $x_0$  alla posizione di un raggio luminoso partito dall'origine, si ottiene

$$t_T = \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} + x_0$$

$$a_0 t - x_0 a_0 + 1 = \sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1$$

con condizione  $a_0 t - x_0 a_0 + 1 > 0$ . Procedendo,

$$t = \frac{x_0(x_0 a_0 - 2)}{2(1 - a_0 x_0)}$$

che ha soluzione per  $1 < x_0 a_0 < 2$ .

### 1.1.3 Tempo proprio

Con  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$ :

$$\begin{aligned}
icd\tau &= ds = icdt_T \sqrt{1 - v^2(t_T)} \\
\tau &= \int_0^{t_T} \sqrt{1 - v^2(t)} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0 t)^2}} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo  $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{dz}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

### 1.1.4 $10^9$ anni-luce

Utilizzando la formula 4

$$10^9 = \frac{\sqrt{1 + (1.030t)^2} - 1}{1.030}$$

da cui  $t_T \sim 10^9$ . Utilizzando la formula del tempo proprio,

$$\tau = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0} \sim 20.82y$$

### 1.1.5 Perchè non andiamo su Giove?

Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{x_{TG}}{g}} = 1025.2h = 42.7 \text{giorni}$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce, Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-g t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo e definendo  $\xi = \xi(v_0) = \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$  :

$$t = \frac{\sqrt{(a_0 x + \sqrt{1 + \xi^2})^2 - 1} - \xi}{a_0}$$

Nel viaggio Terra-punto medio:

$$t_{TM} = \frac{\sqrt{(a_0 x + 1)^2 - 1}}{a_0} = 0.042y$$

$$v(t) = 0.043c = v_0$$

$$\xi(v_0) = 0.043$$

$$t_{MG} = 0.018y$$

$$t_{TOT} = 1.22y$$

Il tempo impiegato in meccanica classica è inferiore per due ragioni: la prima è che non c'è una velocità limite, la seconda che in relatività speciale è più difficile accelerare un corpo tanto più quanto questo va veloce.

### 1.1.6 Razzo relativistico

Considero il sistema  $\mathcal{I}$  in cui il razzo è fermo e i sistemi  $\mathcal{E}$ , in cui è ferma la  $dm$  espulsa, e  $\mathcal{J}$ , in cui è fermo il razzo propulso con massa  $m - dm$ . Nel sistema  $\mathcal{I}$ :

$$\delta m v_e \gamma(v_e) = (m - dm) dv \gamma(v) \sim m dv$$

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_e)} \frac{dv}{d\tau} d\tau$$

Considerando che  $\delta m \gamma(v_e) = -dm$  e che  $\frac{dv}{dt} = a_0$ ,

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{\tau}{v_e} = -\frac{a_0}{v_e \sqrt{1-v_e^2}} d\tau$$

da cui infine

$$m(\tau) = e^{-\frac{a_0 \tau}{v_e \sqrt{1-v_e^2}}}$$

Utilizzando i risultati del tempo di volo fino a Giove, per arrivare dalla Terra al punto M il tempo proprio è  $\tau = 0.042y$ , quindi

$$m_i/m_f = e^{\frac{a_0 \tau}{v_e \sqrt{1-v_e^2}}} = \begin{cases} e^{1.25 \cdot 10^3} & v_e = 10 km/s \\ 75.7 & v_e = c/100 \\ 1.54 & v_e = c/10 \end{cases}$$

### 1.1.7 Campo elettrico

Preso un campo elettrico costante diretto lungo  $\hat{x}$ , le uniche componenti non nulle del tensore elettromagnetico sono

$$F_{01} = -F_{10} = 1$$

che trasformano per boost lungo la medesima direzione nel seguente modo:

$$F'_{01} = \Lambda_1^1 \Lambda_0^0 F_{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 F_{10} = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$$

restando quindi invariati. Una particella carica risulta quindi uniformemente accelerata, secondo l'equazione di Lorentz.

## 1.2 Campo elettrico di una particella carica senza massa

### 1.2.1 Quadripotenziale

Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di  $\tilde{A}^\mu$  sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo),  $\tilde{A}^0$  può essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \propto \int d\Omega \int \frac{r^{D-2}}{r^{n+1}} dr$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di volume (D-2)-dimensionale. Siccome la dipendenza da  $r$  deve cancellarsi i

$$E_i = e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}, \text{ quindi}$$

$$\tilde{A} = (-e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-3}}, \vec{0})$$

### 1.2.2 Tensore elettromagnetico

Le componenti non nulle del tensore  $F_{\mu\nu}$  sono le  $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$ .

### 1.2.3 Coordinate cono-luce

Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon_\xi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$F_{\xi\varsigma} = \Upsilon_\xi^\mu \Upsilon_\varsigma^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ E_1 & 0 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ -E_2/\sqrt{2} & -E_2/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -E_3/\sqrt{2} & -E_3/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove gli  $E_i$  sono i campi trasformati di coordinate, valutati nelle nuove coordinate.

Un boost di  $-v$  porta a ( $\beta = -v/c$ )

$$x^\pm \rightarrow \gamma(1 \mp \beta)x^\pm$$

pertanto al boost corrisponde, in queste coordinate,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma(1 + \beta) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & \gamma(1 - \beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots \\ E_1 & 0 & \gamma(1 + \beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots \\ -\gamma(1 - \beta)E_2/\sqrt{2} & -\gamma(1 + \beta)E_2/\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### 1.2.4 Limite di alte velocità

Il limite

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{[\gamma^2 a^2 + b^2]^{\frac{D-1}{2}}} = N_D \frac{\delta(a)}{b^{D-2}} \quad (5)$$

si giustifica osservando che per  $a \neq 0$  tende a 0, mentre per  $a = 0$  tende a  $\infty$ , così come fa la  $\delta$  di Dirac. Scrivendo

$$\frac{1}{(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2} + 1)^{\frac{D-1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\tau \tau^{\frac{D-1}{2}-1} e^{\tau(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2} + 1)}$$

e integrando tale risultato in  $da$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int d\tau \tau^{\frac{D-1}{2}-\frac{3}{2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} \end{aligned}$$

dove si è riconosciuta la Gamma di Eulero. A questo punto, usando  $\int da \delta(a) = 1$ ,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{b^{D-1}} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}b}{\gamma} = \frac{N_D}{b^{D-2}}$$

Quindi

$$N_D = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$$

Si considera ora che il raggio trasformato è

$$r = \sqrt{(\frac{x_+ - x_-}{\sqrt{2}})^2 + \tilde{x}_\perp^2} \rightarrow r' = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} (\frac{(1-\beta)x_+ - (1+\beta)x_-}{\sqrt{2}})^2 + \tilde{x}_\perp^2}$$

pertanto le componenti  $F'_{+i}$  per  $i \neq 1$  divengono

$$F'_{+i} = \frac{\gamma(1-\beta)}{\sqrt{2}} e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}} \hat{r}_i = \frac{\gamma(1-\beta)}{\sqrt{2}} e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{(\frac{\gamma^2}{2} (\frac{(1-\beta)x_+ - (1+\beta)x_-}{\sqrt{2}})^2 + \tilde{x}_\perp^2)^{\frac{D-1}{2}}} \hat{r}_i$$

dove si tiene conto che per  $v \rightarrow c \Rightarrow \beta \rightarrow -1$  le componenti  $F_{-i}$  si annullano. Nel limite,

$$F'_{+i} \rightarrow \frac{(1-\beta)}{2} e \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} N_D \frac{\delta(x_+)}{x_\perp^{D-2}}$$

## 2 Foglio 2

### 2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varrà per il modulo rispetto alla latitudine; la longitude darà invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

$$\bar{z}_{N,S} = \rho_{N,S} e^{-i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \frac{\sin \theta}{1 \mp \cos \theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$z_N = \frac{1}{z_S}$$

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\bar{z}_S}$$

Tale relazione è olomorfa in  $U_N \cap U_S$ , cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate  $w_{N,S}$ , ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive  $z_{N,S}$ :

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

## 2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con  $z_N$ .

$$\begin{aligned}
 L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
 L_{\pm} &= \pm e^{\pm i \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
 &= \pm e^{\pm i \varphi} R e^{i \varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \mp \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i \varphi} R e^{-i \varphi} \left( -\frac{1}{1 - \cos \theta} \pm \cot \theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
 \text{Siccome } z \bar{z} &= \frac{1 + c}{1 - c},
 \end{aligned}$$

$$L_+ = -\frac{z^2}{R} \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad L_- = R \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Usando che  $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

### Autovalori di $F_m$

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = \left( z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z [z^m] f(\rho) + z^m L_z [f(\rho)] = m F_m$$

### Forma di $Y_l^l$

$$\begin{aligned}
 L_+[f(z\bar{z})] &= \left( -z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial f}{\partial \rho} \\
 &= -\frac{z^{m+1}}{R} \left[ m f + (|z|^2 + R^2) \frac{\partial f}{\partial \rho^2} \right]
 \end{aligned}$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$\begin{aligned}
 L_+ Y_l^m &= 0 \iff m = l \\
 L_- Y_l^l &= \left( \frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R} \right) Y_l^l
 \end{aligned}$$

Nelle coordinate  $(z_S, \bar{z}_S)$

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S \bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$



### 3 Foglio 3

#### 3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = ds^2 = \frac{\epsilon dx^2 + dy^2}{y^2}$$

con  $\epsilon = \pm 1$ .

#### Vettore di Killing

Considerando che la metrica non dipende dal modulo di  $x$ , ma solo da quello di  $y$ , si scrive immediatamente che per

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{L}_{\vec{k}}g = 0$$

#### Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni  $\delta x$  portano a

$$\left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y^2} \right)' = 0$$
$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per  $\delta y$  si ha

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left( \frac{\dot{y}}{y^2} \right)' = 0$$
$$\ddot{y} + \left( \frac{\epsilon \dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = 0$$

Confrontando le equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{xy}^x & \Gamma_{yx}^x \\ \Gamma_{xy}^y & \Gamma_{yx}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dy}{y} & -\frac{dx}{y} \\ \frac{\epsilon dx}{y} & -\frac{dy}{y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{dy}{y} \otimes e_x + \frac{\epsilon dx}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{dx}{y} \otimes e_x - \frac{dy}{y} \otimes e_y \end{cases} \quad (7)$$

### Tensore curvatura

$$\begin{aligned}
 R &= d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma \\
 (d\Gamma)_j^i &= \partial_\rho \Gamma_{\mu j}^i dx^\rho dx^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \\
 (\Gamma \wedge \Gamma)_j^i &= \Gamma_j^i \wedge \Gamma_k^j
 \end{aligned} \tag{8}$$

e utilizzando il fatto che

$$dx^\mu \wedge dx^\mu = 0 = dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu$$

si trova che  $\Gamma \wedge \Gamma = 0$ . Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Il tensore di Ricci è

$$\text{Ric}_{j\nu} = \delta_i^\mu R_{j\mu\nu}^i$$

E come matrice

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola  $g^{ij}$  come inverso della metrica, da cui

$$\|g^{ij}\| = \text{diag}\left(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2\right)$$

e  $R = -2$ .

### Zweibein

Scrivendo

$$V^x = \frac{dx}{y} \quad V^y = \frac{dy}{y} \quad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$ds^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} dV^x = \partial_y \left( \frac{1}{y} \right) dy \wedge dx \\ dV^y = \partial_x \left( \frac{1}{y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{cases}$$

e, considerando  $T^i = 0$ ,

$$dV^i = -\omega_j^i \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega_x^y \wedge V^x = 0$$

$$\omega_y^x \wedge V^y = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } i = x \\ V^i & \text{se } i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega_y^x \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega_y^x = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega_x^y = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega_y^x$$

che verifica la condizione trovata per  $dV^y$ . L'antisimmetria di  $\omega_j^i$  si trasferisce a  $R_j^i$ , che avrà non nulli solo

$$R_y^x = d\omega_j^i = -V^x \wedge V^y \quad R_x^y = -\epsilon d\omega_j^i = \epsilon V^x \wedge V^y$$

Pertanto

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y$$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$\text{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} R_{x|yx}^y & R_{x|xy}^x \\ R_{y|yx}^y & R_{y|xy}^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y^x & 0 \\ 0 & R_y^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui lo scalare

$$R = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2$$

### Derivate covarianti

I vettori tangenti alle Zweibein sono quelli tali per cui

$$e_i(V^j) = \delta_i^j$$

e sono pertanto

$$e_x = y dx \quad e_y = y dy$$

Se ne calcolano le derivate covarianti, con connessione  $\omega_j^i$ :

$$\nabla e_x = \omega_x^y e_y = \epsilon e_y \otimes V^x \quad \nabla e_y = \omega_y^x e_x = e_x \otimes V^x \quad (9)$$

## Integrali primi

Gli integrali primi

$$\begin{cases} p_x = \frac{\dot{x}}{y^2} \\ \sigma = \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{cases}$$

danno le condizioni

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x y^2 \\ \dot{y}^2 = (\sigma - \epsilon p_x^2 y^2) y^2 \end{cases}$$

Si procede calcolando

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = \left(\frac{2\dot{y}y}{\dot{x}}\right)^2$$

e, sostituendo le condizioni trovate con gli integrali primi, si ottiene

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{4}{p_x^2} (\sigma - \epsilon \dot{x}^2 y^2)$$

Per integrare questa equazione,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{p_x} \sqrt{\sigma - \epsilon p_x^2 v} \Rightarrow \frac{2\sqrt{\sigma}}{p_x} dx = \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}}}$$

Si sostituisce al secondo membro

$$v \rightarrow q = \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon p_x^2} \frac{dq}{\sqrt{1 - q}}$$

Un'ulteriore sostituzione porta a

$$q \rightarrow \theta = \arcsin \sqrt{q} \Rightarrow \frac{2\sigma}{\epsilon p_x^2} d\cos \theta$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\cos \arcsin \sqrt{q} = \sqrt{1 - q}$$

l'integrazione porta a

$$\frac{p_x \epsilon}{\sqrt{\sigma}} (x - x_0) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}} - c_0$$

che raccogliendo le costanti e riarrangiando porta a

$$(p_x \epsilon x - K)^2 = \sigma - \epsilon p_x^2 v$$

Al variare di  $\epsilon$  e  $\sigma$ , si ottengono i seguenti grafici:

## Derivata di un campo vettoriale

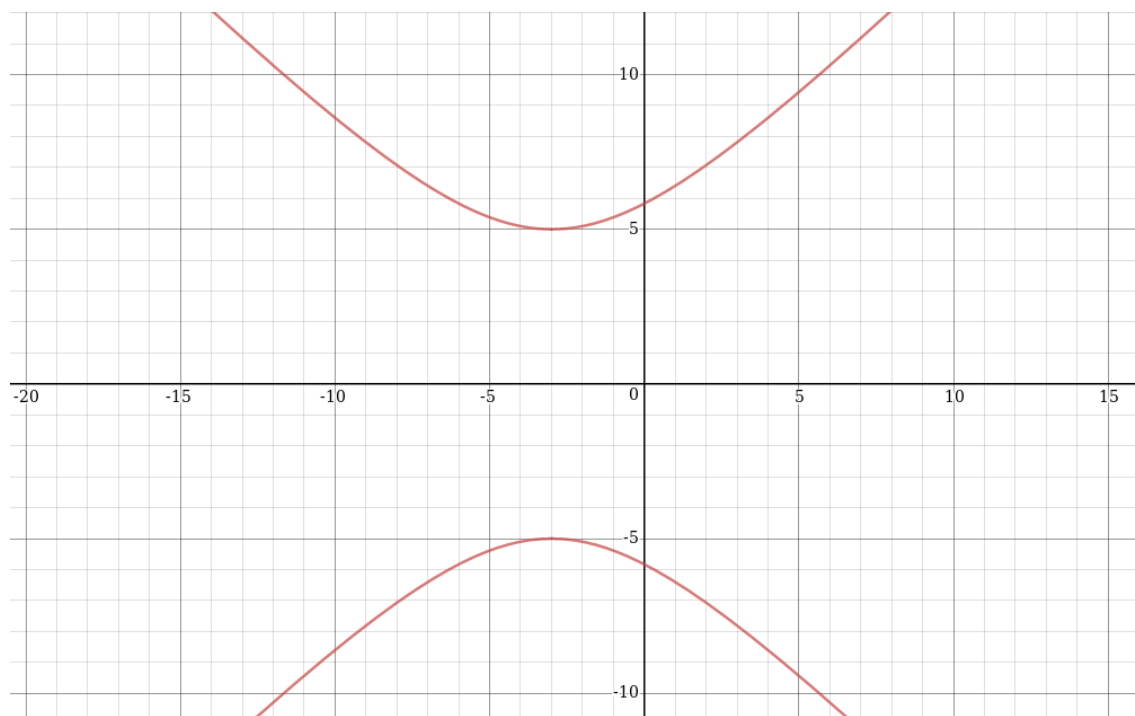
$$\nabla X = (\nabla X^i) \partial_i + X^i \nabla \partial_i$$

dove

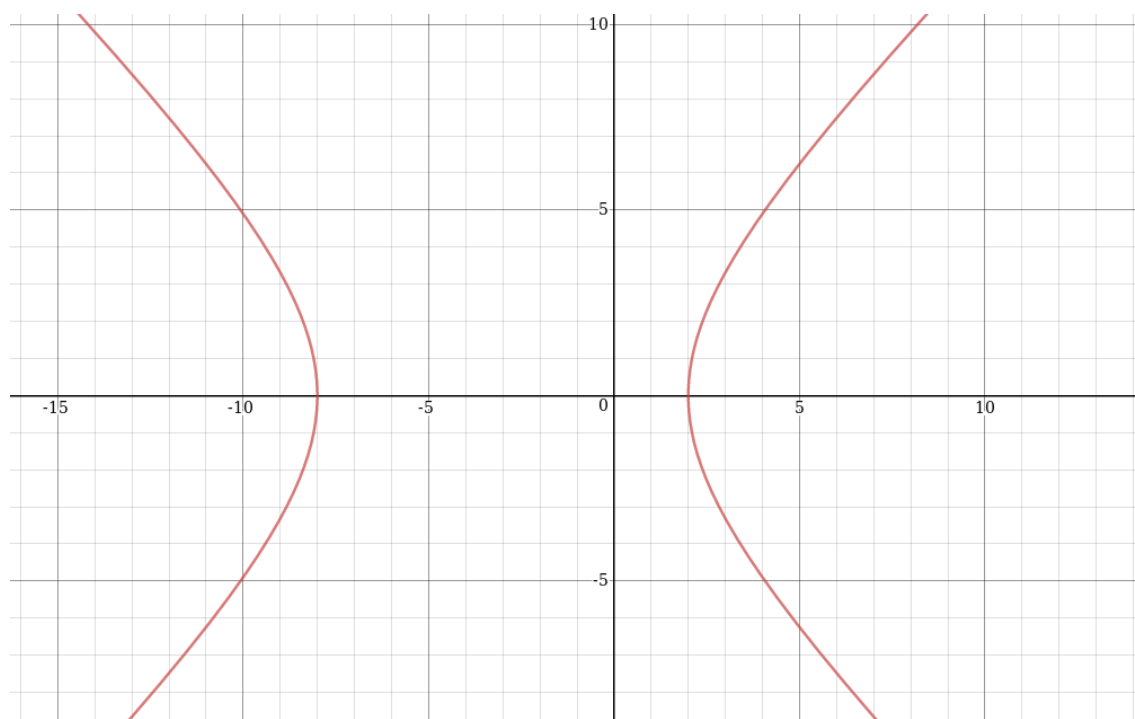
$$\nabla X^i = \partial_j X^i dx^j = dX^i$$

e utilizzando la 9

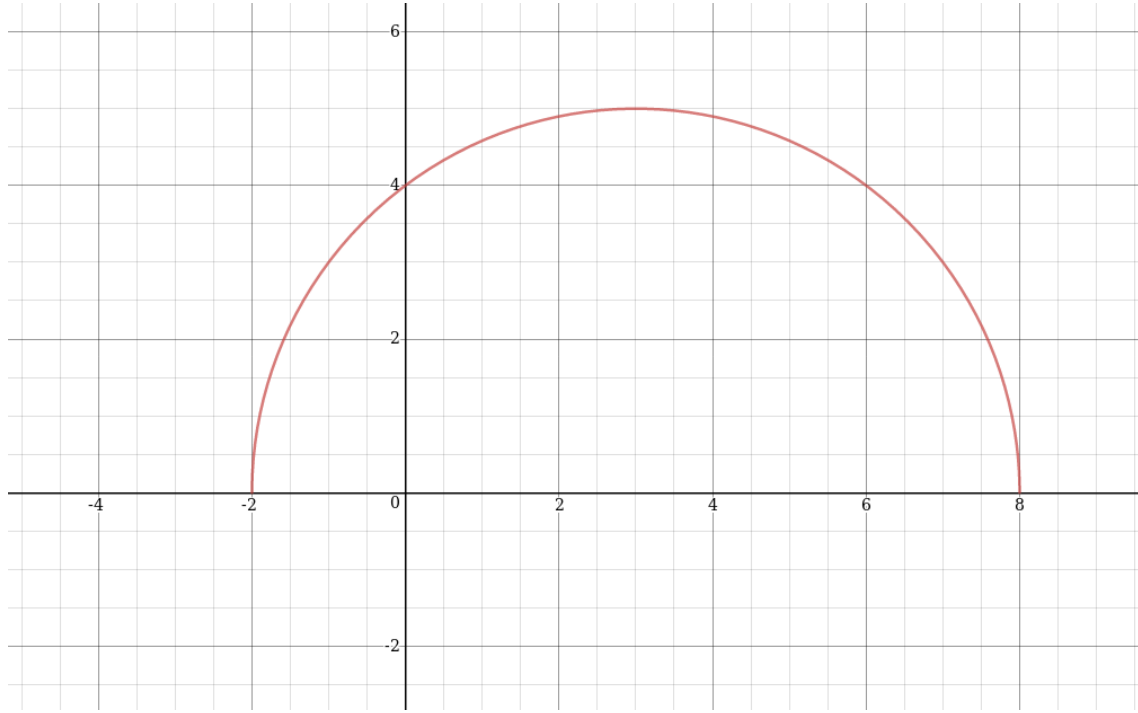
$$\nabla X = (dX^x - X^y V^x) e_x + (dX^y + \epsilon X^x V^x) e_y$$



$$\epsilon = -1, \sigma = -1$$



$$\epsilon = -1, \sigma = +1$$



$$\epsilon = +1, \sigma = +1$$

### 3.1.1 Traiettoria circolare

Presa la traiettoria

$$\gamma(t) = (x_0 + r \cos \omega t, y_0 + r \sin \omega t)$$

si considera il trasporto parallelo lungo essa, scrivibile come

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \gamma| \nabla X = 0$$

Sviluppando questa condizione si trova (per brevità: i simboli  $\cos$  e  $\sin$  sottintendono l'argomento  $\omega t$ ; si scrive  $y$  intendendolo valutato su  $\gamma$ , come indicato a pedice))

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^x = \omega r \left[ -\sin \partial_x X^x + \cos \partial_y X^x + \frac{\sin X^y - \cos X^x}{y} \right]_\gamma = 0 \\ \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^y = \omega r \left[ -\sin \partial_x X^y + \cos \partial_y X^y + \frac{-\epsilon \sin X^x - \cos X^y}{y} \right]_\gamma = 0 \end{cases}$$

Prendendo  $\epsilon = +1$ , moltiplicando membro a membro la seconda equazione per  $i$  e sommando le due si trova

$$\omega r \left[ (-\sin \partial_x + \cos \partial_y)(X^x + iX^y) - \frac{1}{y} \right]_\gamma (X^x + iX^y) e^{+\omega t} = 0$$

Definendo  $Z = X^x + iX^y$ ,  $\dot{Z} = \frac{d\gamma^i}{dt} \nabla_i Z|_\gamma$  e l'equazione diventa

$$\dot{Z} - \omega r \frac{e^{i\omega t}}{y_0 + r \sin \omega t} Z$$

## 4 Foglio 4

### 4.1 Osservatori in Minkowsky

Data la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

il cambio di variabili

$$x = x_0 + vt_0; \quad t = t_0$$

porta, in forma canonica, a

$$ds^2 = (v^2 - 1) \left( dt_0 + \frac{v}{v^2 - 1} dx_0 \right)^2 - \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

da cui si identifica facilmente

$$dl^2 = \frac{1}{v^2 - 1} dx_0^2$$

Si può quindi definire una nuova coppia di variabili, separando la parte spaziale e quella temporale:  
 $dX = dl$ .

### 4.2 Metrica di Rindler

Presa la metrica

$$ds^2 = -\kappa^2 x^2 dt^2 + dx^2$$

si calcolano le geodetiche

$$0 = \ddot{x} + k^2 x t^2 = \ddot{x} + \Gamma_{tt}^x \dot{t}^2 \quad ; \quad 0 = \ddot{t} + \frac{2}{x} \dot{x} \dot{t} = \ddot{t} + \Gamma_{xt}^t \dot{x} \dot{t}$$

da cui

$$\Gamma_{tt}^x = k^2 x \quad ; \quad \Gamma_{xt}^t = \frac{1}{x}$$

Per le traiettorie a  $x = \bar{x} = \text{cost}$

$$\gamma(t) = (t, \bar{x})$$

si ha

$$\dot{\gamma} = \partial_t \gamma = e_t \Rightarrow \|\dot{\gamma}\|^2 = -\kappa^2 x^2$$

da cui

$$u_\mu = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{-\|\dot{\gamma}\|}} = \frac{e_t}{k\bar{x}}$$

L'accelerazione è quindi

$$a = \nabla_u = \frac{1}{k^2 \bar{x}^2} \nabla_t e_t = \frac{1}{k^2 \bar{x}^2} \Gamma_{tt}^x e_x = \frac{e_x}{\bar{x}}$$

### 4.3 Schwarzschild per osservatori in moto

Data la metrica di Schwarzschild in D dimensioni

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \left( \frac{r_s}{r} \right)^{D-3} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left( \frac{r_s}{r} \right)^{D-3}} + r^2 (d\theta_{D-2} + \dots)$$

si calcola il limite di campo debole della sua azione: si considera  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  dove  $\eta$  è la metrica piatta e  $h$  rappresenta le perturbazioni gravitazionali, tali che siano infinitesime e dello stesso ordine tra loro.

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \dot{t}^2 + g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

dove  $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = \mathcal{O}(|h|)$ . Prendendo  $\lambda = t$  e moltiplicando per  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sim \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$  (dove il quadrato di un vettore indica la sua norma al quadrato) si arriva a

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{2c^2} \cdot |h|\right)\right) \\ &= -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \\ &= \int dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) \end{aligned}$$

Identificando i primi due addendi come il termine di massa e quello cinetico, si può identificare il restante come potenziale gravitazionale, da cui

$$\frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = -m\phi_{grav} \Rightarrow r_s^{D-3} = \frac{2MG_D}{c^2}$$

Si può definire il cambiamento di coordinate

$$r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2 \quad ; \quad \cos \theta_{D-2} = \frac{x_{D-1}}{r} \quad ; \quad \cos \theta_{D-3} = \frac{x_{D-1}}{r \cos \theta_{D-2}} \quad \dots$$

e si vede che

$$\sum dx_i^2 = dx^2 + dx_\perp^2 = dr^2 + r^2(d\theta_{D-2} + d\theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-2} + \dots)$$

da cui, raccogliendo  $dr$ ,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} dr^2 + dx^2 + dx_\perp^2$$

#### 4.3.1 Osservatori in moto

L'analogo di una trasformazione di Lorentz si ha con

$$ct = \gamma \frac{1+\beta}{2} U + \gamma \frac{1-\beta}{2} V \quad ; \quad x = \gamma \frac{1+\beta}{2} U - \gamma \frac{1-\beta}{2} V$$

dove  $U$  e  $V$  sono le coordinate di cono luce. Siccome si vuole determinare la metrica per un osservatore in moto alla velocità della luce, si pone il limite  $\beta \rightarrow 1$ . Si scrive la trasformazione dei termini in  $dt$  e  $dx$ , per poi imporre le condizioni desiderate:

$$-c^2 \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right) dt^2 + dx^2$$



$$\rightarrow \gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV + \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} \left( \gamma^2 \frac{(1+\beta)^2}{4} dU^2 + \gamma^2 \frac{(1-\beta)^2}{4} dV^2 - dU dV \right)$$

Si nota subito che tutti i coefficienti di  $dV$  tendono a zero. Inoltre per  $U \neq 0$

$$r = \sqrt{\gamma^2 \left( \frac{(1+\beta)^2}{4} U^2 + \frac{(1-\beta)^2}{4} V^2 - UV + x_\perp^2 \right)}$$

che nel limite tende a infinito a causa del  $\gamma$  davanti a  $U^2$ , per cui tutti i termini  $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$  si annullano e rimane

$$ds^2 = -dU dV + dx_\perp^2$$

Nel caso in cui  $U = 0$ , invece,

$$r = \sqrt{x_\perp^2} = x_\perp$$

e

$$ds^2 = \gamma^2 \left( \frac{r_s}{x_\perp} \right)^{D-3} dU^2 + o(dU^2)$$

che diverge nel limite.

### 4.3.2 Metrica di Aichelburg-Sexl

I termini in  $dt$  e  $dx$  si possono riscrivere all'ordine di  $dU^2$ , tenendo conto che il termine in  $V^2$  svanisce, come

$$-dU dV + r_s^{D-3} \left[ \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} dU^2 \right]$$

e usando il limite noto 5

$$\left[ \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}} \right] = N_D \frac{\delta U}{-UV + x_\perp^{D-4}} = N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}}$$

inoltre si impone

$$\lim M\gamma = M_*$$

che ha il significato di una massa limite, non infinita, in modo che abbia significato fisico; per cui

$$r_s \rightarrow r_{s*}$$

Unendo i risultati

$$ds^2 = -dU dV + N_D r_{s*}^{D-3} N_D \frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}} dU^2 + dx_\perp^2$$

cioè tale metrica è analoga a quella piatta, fatta eccezione per il supporto della  $\delta$ , cioè la bisettrice del II e IV quadrante nel piano (X, cT).

## 5 Foglio 5

### 5.0.1 Campo debole

Si considera la metrica D-dimensionale  $g_{\mu\nu}$  nell'approssimazione di campo debole. Le Vielbein possono essere scritte come  $V^a = (\delta_\mu^a + \frac{1}{2} h_\mu^a) dx^\mu$ : si verifica infatti che, al primo ordine in  $|h_{\mu\nu}|$ ,

$$\eta_{ab} V^a V^b = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Si verifica immediatamente che

$$V_a^\mu = (\delta_a^\mu - \frac{1}{2}h_a^\mu)$$

pertanto si può usare la formula

$$\omega_{abc} = V_a^\mu V_b^\nu \partial_\mu V_\nu^c - [cab] + [bca]$$

che, considerando di secondo ordine termini del tipo  $(\partial h)h$ , porta al primo ordine a

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}[\partial[bh_c]_a - [abc] + [cab]]$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\partial_{[b}h_{a]c}V^c$$

Siccome si trascurano termini del tipo  $(\partial h)(\partial h)$ ,

$$R_{ab} = d\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_i \partial_{[a}h_{b]j}V^i \wedge V^j$$

Lo stesso calcolo si può fare con i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + [\nu\rho\mu] - [\rho\mu\nu]) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\nu^\sigma + \partial_\nu h_\mu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu})$$

e

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\alpha \partial_{[\mu}h_{\nu]\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Il tensore di Ricci è

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab} + \frac{1}{2}\partial_\nu \partial^\mu h_\mu^b + \frac{1}{2}\partial_\mu \partial^b h_\nu^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu \partial^b h$$

che con la gauge

$$\partial^a \bar{h}_{ab} = 0 \quad ; \quad \bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

diventa

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab}$$

da cui il tensore di Einstein è immediatamente

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}$$

### 5.0.2 Gauge "di Lorenz"

Presa una variazione

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad \rightarrow \quad dx'^\mu = dx^\mu + \partial_\nu \epsilon^\mu dx^\nu$$

e considerando che la metrica deve restare invariata

$$g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu$$

Il primo membro è semplicemente  $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , mentre il secondo può essere espanso al primo ordine come

$$(g'_{\mu\nu}(x) + \partial_\rho g'_{\mu\nu}(x)\epsilon^\rho)dx'^\mu dx'^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) + \partial_\rho h'_{\mu\nu}\epsilon^\rho)dx'^\mu dx'^\nu$$

Quindi uguagliando le due metriche (trascurando i termini  $h\epsilon$  o  $\partial h\epsilon$ )

$$h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\epsilon^\mu dx^\rho dx^\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\epsilon^\nu dx^\mu dx^\rho + h'_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

da cui

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\epsilon_\nu - \partial_\nu\epsilon_\mu \quad ; \quad \partial^\mu h'_{\mu\nu} = \partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial^2\epsilon_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\epsilon^\mu \quad ; \quad h' = h - 2\partial^\mu\epsilon_\mu$$

e imponendo la gauge

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^2\epsilon_\nu = 0$$

Per il potenziale Elettromagnetico, invece,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\epsilon$$

e nella gauge di Lorenz

$$\partial^\mu A_\mu - \partial^2\epsilon = 0$$

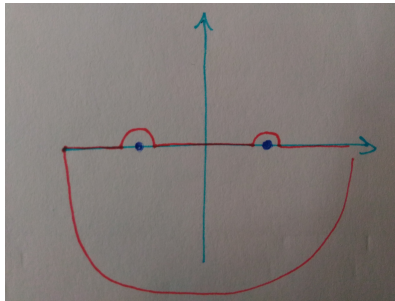
### 5.0.3 Equazioni di Einstein

In definitiva l'equazione di Einstein diventa

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2\bar{h}_{\mu\nu} \\ \partial^2\bar{h}_{\mu\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10}$$

### 5.0.4 Funzione di Green

La funzione di Green del D'Alambertiano, valutata nella sua trasformata di Fourier, risulta essere  $\tilde{G} = -1/k^2$ . Dovendo integrare questa espressione in  $k^0$ , si nota subito che ha due poli per  $k^0 = |\vec{k}|$ , per cui sarà necessaria una prescrizione  $i\epsilon$ , concretizzata in un cambio di variabile  $k^0 \rightarrow k^0 \pm i\epsilon$ . La richiesta di causalità permette di fissarne il segno, in quanto corrisponde alla richiesta che la funzione sia nulla per  $x^0 < 0$ : infatti, usando il lemma di Jordan, l'integrale in questo intervallo si annulla chiudendo la circonferenza "sopra" l'asse reale; ma, richiedendo che sia nullo, esso non deve contenere i poli, pertanto si ha una situazione come in ??.



L'integrale risulta quindi

$$G_R = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}$$

che diventa col teorema dei residui, in coordinate sferiche

$$G_R = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\phi d\cos\theta dk k^2 e^{ik|x|\cos\theta} \frac{2\pi i}{2k} \left[ e^{-ikx^0} - e^{ikx^0} \right] \theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2|x|} \int dk \left( e^{ik|x|} - e^{-ik|x|} \right) \left( e^{-ikx^0} - e^{ikx^0} \right) \theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{2}{(2\pi)^2|x|} \int dk \sin(k|x|) \sin(kx^0) \theta(x^0)$$

Alternativamente, sviluppando i prodotti di esponenziali e cambiando variabile per gli esponenti con segno negativo, utilizzando infine la forma integrale della delta di Dirac  $2\pi\delta(x) = \int dk e^{ikx}$  si trova

$$G_R = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta x^0 - |\vec{x}|$$

dove la  $\theta$  è sottintesa dalla  $\delta$ .

### 5.0.5 Polvere

Per le proprietà della funzione di Green, la 10 ha soluzione

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \int G_R(x-y) \left[ -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(y) \right] = \frac{4G}{c^4} \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y) \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Preso il tensore energia-impulso della polvere

$$T_{\mu\nu} = (c^2\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p$$

nelle condizioni

$$u^\mu = (1, \vec{0}) \quad ; \quad |p| \ll c^2\rho \quad ; \quad \rho = \rho(\vec{y})$$

Se la materia è confinata in un raggio  $|\vec{y}_M|$  e il campo viene valutato a distanze molto maggiori di questo raggio, si può sviluppare

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|}$$

Il tensore energia-impulso si riduce, nelle condizioni date, a

$$T_{00} = c^2\rho \quad ; \quad T_{ii} = p \quad ; \quad T = -T_{00} + 3T_{ii} \sim -T_{00}$$

per cui

$$h_{00} = \bar{h}_{00} + \frac{1}{2}\eta_{00}h = \frac{4G}{c^4|\vec{x}|} \int d^3y (c^2\rho - \frac{1}{2}c^2\rho) = \frac{2GM}{c^2|\vec{x}|}$$

$$h_{ii} = \bar{h}_{ii} + \frac{1}{2}\eta_{ii}h = \frac{4G}{c^4|\vec{x}|} \int d^3y (p + \frac{1}{2}c^2\rho) \sim \frac{2GM}{c^2|\vec{x}|}$$

quindi la metrica diventa

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2r})c^2dt^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2r})(d\vec{x})^2$$

da cui si vede che, perché resti valido il limite di campo debole, dev'essere

$$2GM \ll c^2r \quad \rightarrow \quad M \ll \frac{c^2R}{2G}$$

### 5.0.6 Centro di massa nell'origine

Si prende il centro di massa nell'origine, con velocità nulla. Si considera  $u^\mu \sim (1, \vec{v}/c)$ .

$$T_{00} = c^2 \rho \quad ; \quad T_{0i} \sim c \rho v_i \sim T_{00}/c \quad ; \quad T_{ij} \sim \rho v_i v_j \sim T_{00}/c^2$$

Usando la conservazione di  $T_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \rightarrow \partial_k T^{k0} = -\partial_0 T^{00}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_V d^3y \partial_k T^{0k} y_i y_j &= - \int_V d^3y \partial_0 T^{00} y_i y_j = - [T^{00} y_i y_j]_\Sigma + \int d^3y c^2 T^{00} (v_i y_j + y_i v_j) \\ \partial_0 \rho(\vec{y}) = 0 &\Rightarrow \partial_0 T^{00} = 0 \Rightarrow \int d^3y T^{00} (v_i y_j + y_i v_j) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Dove si è trascurato il termine di bordo in quanto **TODO**

Si sviluppa in multipoli

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|} + y^i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

da cui

$$\bar{h}_{00}(x^0, \vec{x}) = \frac{2GM}{c^2 r} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

usando la condizione di massa centrata nell'origine, per cui  $\int d^3y \rho(\vec{y}) y_i = 0$ ; i termini  $T_{ij}$  si trascurano, essendo di ordine  $T_{00}/c^2$ ; infine

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) \sim \frac{4G}{c^3} \int d^3y \left[ \frac{\rho(\vec{y}) v_i}{|\vec{x}|} - \frac{\rho(\vec{y}) v_i y_j x^j}{|\vec{x}|^3} \right]$$

Il primo termine si annulla: la condizione di centro di massa fermo implica infatti  $\int d^3y \rho(\vec{y}) v_i = 0$ . Per quanto riguarda il secondo, grazie a 11, si verifica che

$$\frac{1}{2} \int d^3y \rho (v_i y_j - y_i v_j) = \int d^3y \rho v_i y_j$$

pertanto

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) \sim -\frac{2G x^j}{c^3 |\vec{x}|} \int d^3y \rho(\vec{y}) (v_i y_j - v_j y_i) + \mathcal{O}(r^{-5})$$

Per cui la metrica diventa, usando  $J_{ij} = \int d^3y \rho(|\vec{y}|) (v_i y_j - v_j y_i)$ ,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (d\vec{x})^2 + \frac{4G}{c^3 r^3} J_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}(r^{-5})$$

**TODO** perchè  $h_{00} = h_{ii}$ ? **TODO** trascinamento