1) Introduzione al corso (1)

- Dire che è il 1° anno e introduzione
- differenze con l'altro
- nuovi metodi geometrici (capire il significato
- chiedere elettrodin. relativistica
- corso, indirizzi email * ML,

2) Relatività speciale

$\boxed{c \text{ è costante}}$

$\Rightarrow \quad -c^2\Delta t^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y^2) + (\Delta z)^2 = 0$

in tutti i sistemi

Introduco $X^\mu = (ct, x, y, z)$ $\quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu = 0,1,2,3$

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = 0 \quad \text{per la luce}$$
$$= \Delta x^T \eta \Delta x$$

→ Considero trasformazioni lineari che lasciano invariato Δs^2

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

indici ripetuti sono sommati

$$x' = \Lambda x + a$$
$$\Delta x' = \Lambda \Delta x$$
$$\Delta s'^2 = \Delta x'^T \eta \Delta x' = \Delta x^T \underbrace{\Lambda^T \eta \Lambda}_{\eta} \Delta x = \Delta x^T \eta \Delta x = \Delta s^2$$

→ richiesto $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

→ i Λ formano un gruppo : $O(1,3)$ — Che cos'è un gruppo chiedere

ossia $\Lambda_1 \Lambda_2 \in O(1,3)$

$\Lambda^{-1} \in O(1,3)$

→ $c^2 \Delta\tau^2 = \Delta s^2$

ha significato fisico è il tempo proprio, ossia il tempo misurato da un orologio per un osservatore nell'origine

Sottogruppi e connetti su $O(1,3)$

• Rotazioni e Parità

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R \end{pmatrix} \qquad R \in SO(3)$$

$\det \Lambda_P = -1$ $\qquad \det \Lambda_R = 1$

non è un caso $\quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \rightarrow \det \Lambda = \pm 1$

• Boost

$$\Lambda_b = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_i/c \\ \gamma v^j/c & \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^2} \end{pmatrix} = \| \Lambda^\mu{}_\nu \|$$

check $\quad \Lambda_b^T \eta \Lambda_b = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v^T/c \\ \gamma v/c & \mathbb{1} + v v^T \frac{\gamma-1}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v^T/c \\ \gamma v/c & \mathbb{1} + v v^T \frac{\gamma-1}{v^2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} v^T v & -\gamma^2 \frac{v^T}{c} + \gamma \frac{v^T}{c} + \gamma \frac{\gamma}{c} v^T v v^T \frac{\gamma-1}{v^2} \\ -\frac{\gamma^2 v}{c} + \gamma \frac{v}{c} + \frac{\gamma-1}{v^2} \gamma v v^T v & -\frac{\gamma^2 v v^T}{c^2} \mathbb{1} + 2 v v^T \frac{\gamma-1}{v^2} + \left(\frac{\gamma-1}{v^2}\right)^2 v v^T v v^T \end{pmatrix}$$

11 $\quad -\gamma^2 \left(1 - \frac{v^T v}{c^2}\right) = -1$

12 $\quad \gamma \frac{v^T}{c} \left[-\gamma + 1 + \gamma - 1 \right] = 0$

22 $\quad \mathbb{1} - \gamma^2 \frac{v v^T}{c^2} + 2 \frac{\gamma-1}{v^2} v v^T + \frac{(\gamma-1)^2}{v^2} v v^T = \mathbb{1} + v v^T \left[\frac{-\gamma^2}{c^2} + \frac{2\gamma - 2 + \gamma^2 - 2\gamma + 1}{v^2} \right]$

$$= \mathbb{1} + v v^T \left[-\frac{\gamma^2}{c^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) - \frac{1}{v^2} \right] = \mathbb{1} + v v^T \left[+ \frac{\gamma^2}{v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{1}{v^2} \right] = \mathbb{1}$$

• Inversione temporale

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$$

• $\Delta\tau^2 < 0 \;\Rightarrow$ time like $\Rightarrow |c\Delta t| > |\Delta \vec{x}|$ in ogni sistema di riferimento

si può scegliere $\Delta x' = 0$: $\quad \Delta x' = 0 = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow |v| = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| < c$; $\Delta t'$; $\Lambda^0{}_0 > 0$ sempre

$\Delta \tau^2 > 0$ space like $\Rightarrow |c\Delta t| < |\Delta \vec{x}|$ sempre

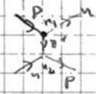
(Ho $\Delta t > 0$) si può scegliere $\Delta t' > 0$ o $\Delta t' < 0$ $\quad \frac{1}{\gamma}\Delta t' = \Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}$ $\delta\Delta t' < 0$ se $\beta < \frac{c\Delta t}{|\Delta x|} < 1$

Cambio l'ordine degli eventi

Qual'è il significato? Causalità: se due eventi non possono essere connessi da una relazione causa effetto allora possono capitare nell'ordine che vogliono

(*) Se però consideriamo la MQ ed il principio di indeterminazione (3)

la situazione è più interessante



$p + n \to p + n$

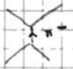
Supponiamo $s_{12}^2 = -c^2(t_1-t_2)^2 + |\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2 > 0$ ma quasi zero

allora può ben capitare che $\Delta x_2\ \Delta t_2$ siano tali da

far sì che $|\Delta s_{12}^2| > |s_{12}^2|$

e che quindi vi sia una inversione temporale!

Come può essere interpretato?



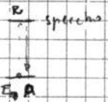
ora si vede un'antiparticella

• Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

1) Dilatazioni temporali

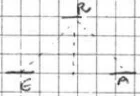
Modo visuale

Fermo



$$\Delta t = \Delta\tau = \frac{2L}{c}$$

Moto



$$\Delta t' = \frac{2\sqrt{L^2 + v^2\Delta t'^2/4}}{c}$$ ← invariante

$$\Rightarrow \quad \Delta t'^2 = (\Delta\tau)^2 + \beta^2\Delta t'^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta\tau = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau$$

Modo analitico

Quiete $\quad \Delta t \quad \Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 = -c^2\Delta\tau^2$

Moto $\quad \Delta t' \quad \Delta x' = v\Delta t' \quad \Delta s^2 = -c^2\Delta t'^2 + v^2\Delta t'^2$

$$= -c^2(1-\beta^2)\Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t'$$

2) Effetto doppler

Quiete: $\nu = \frac{1}{P}$

$(x_0=0,\ t_0=0)\ (x_1=0,\ t_1=P)$ $\qquad \Delta t = \Delta\tau = P$

Moto $(\vec{x}'_0,\ t'_0)\ (\vec{x}'_1 = \vec{x}'_0 + \vec{v}(t'_1 - t'_0),\ t'_1)$ $\qquad \Delta t' = \gamma \Delta\tau = \gamma P$

$$t'_{0,m} = t'_0 + \frac{|\vec{x}'_0|}{c} \qquad t'_{1,m} = \frac{|x'_1|}{c} + t'_1$$

v radiale

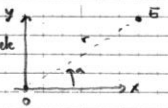
$$P' = \Delta t' + \frac{|x'_1| - |x'_0|}{c} = \gamma P + \frac{v_r}{c}\cdot\gamma P = \left(1+\frac{v_r}{c}\right)\gamma P$$

$$\frac{\nu_{motion}}{\nu_{emitted}} = \frac{P}{P'} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{v_r}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v_r}{c}}$$

Nota doppler radiale è classico ma il doppler trasverso $v_r=0$ è solo relativistico

3) Correzioni all' aberrazione ct_E $\Rightarrow$ effetto faro

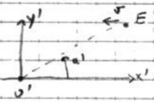
Quiete



$E \equiv (-r,\ r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

stesso evento esattamente come $O \equiv O'$

Moto



$E' \equiv (ct'_E,\ x',\ y')$

Classico $\quad y' \equiv y = r\sin\alpha$ $\qquad t'_E = t_E$

$$x' = x - vt = r\cos\alpha + v\frac{r}{c}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{v}{c}}$$

class. $\quad r'^2 = r^2\left[(\sin\alpha)^2 + \left(\cos\alpha + \frac{v}{c}\right)^2\right] = c'^2 t'^2_E = c'^2\frac{r^2}{c^2}$

$$\Rightarrow c'^2 = c^2\left[(\sin\alpha)^2 + \left(\cos\alpha + \frac{v}{c}\right)^2\right]$$

Relativistico

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma r(\cos\alpha + \frac{v}{c})$$

$$y' = y = r\sin\alpha$$

$$ct'_E = \gamma(ct_E - \frac{v}{c}x) = \gamma(-r - \frac{v}{c}r\cos\alpha) = -\gamma r(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{v}{c}}$$

Notare per $\gamma \gg 1$, $\cos\alpha + \frac{v}{c} > O(\frac{1}{\gamma})$: $\mathrm{tg}\,\alpha' \sim O(\frac{1}{\gamma}) \ll 1$

Se vedo sfera isotropicamente emittente da fermo — n è il numero di fotoni per angolo solido — ma in moto

$d\Omega = d\theta \sin\theta\, d\varphi \Rightarrow \Omega(\alpha) = 2\pi(1 - \cos\alpha)$

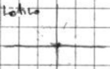
$N(\alpha) = n\,2\pi(1 - \cos\alpha)$ N fotoni nell'angolo α

$N(\alpha') =$

Headlight effect $N = 1/2 \Rightarrow \alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$ $\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{1}{\gamma\beta}$ $\Omega_{1/2} = 2\pi$ $\Omega' \sim \frac{2\pi}{2}\frac{1}{\gamma^2\beta^2}$

Effetto Faro

Statico



uniforme

Moto

effetto faro

www.anu.edu.au/physics/Searle