Contents

1 Foglio 1

1.1 Osservatori uniformemente accelerati

Si considera una particella P_0, uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale $\mathcal{I}$. Il sistema $\mathcal{I}$ va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

1.1.1 Particella accelerata

Si considera una generica particella P, con velocità u e accelerazione a nel sistema $\mathcal{I}$. Il boost a velocità inversa dal sistema in movimento $\mathcal{I}$ al sistema terra $\mathcal{T}$ è

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_T = \gamma(\mathrm{d}x + v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t_T = \gamma(\mathrm{d}t + v\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{1}$$

$$u_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{\mathrm{d}t_T} = \frac{u+v}{1+uv}$$

$$\mathrm{d}u_T = \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}\mathrm{d}u$$

$$a_T = \frac{\mathrm{d}u_T}{\mathrm{d}t} = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1+uv)^3}a \tag{2}$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0, si utilizza l'equazione 2 e la si specializza: la velocità u va posta nulla perchè si considera la particella P_0, ferma in $\mathcal{I}$, e l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema $\mathcal{T}$; la velocità della particella rispetto a $\mathcal{T}$ è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v(t_T)}{\mathrm{d}t_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \mathrm{d}\tan\theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \tag{3}$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} \mathrm{d}x_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{a + (a_0 t_T)^2}} \mathrm{d}t_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$x_T(t_T) = \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^{z} \sinh(z) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{a_0}[\cosh\sinh^{-1}(y) - \cosh\sinh^{-1}(y_0)] = \frac{1}{a_0}[\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2}) - 1]$$

$$= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} = \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0}$$

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{4}$$

Se si prende il limite di basse velocità si avrà $a_0 t_T << 1$, da cui si ottiene

$$x_t(t_T) \sim \frac{1}{2} a_0 t_T^2$$

che corrisponde alla formula newtoniana.

1.1.2 Achille e la lepre

Uguagliando la posizione di una particella accelerata da ferma a partire da x_0 alla posizione di un raggio luminoso partito dall'origine, si ottiene

$$t_T = \frac{\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} + x_0$$

$$a_0 t - x_0 a_0 + 1 = \sqrt{1+(a_0 t_T)^2} - 1$$

con condizione $a_0 t - x_0 a_0 + 1 > 0$ TODO. Procedendo,

$$t = \frac{x_0(x_0 a_0 - 2)}{2(1 - a_0 x_0)}$$

che ha soluzione per $1 < x_0 a_0 < 2$.

1.1.3 Tempo proprio

Con $\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$:

$$ic\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s = ic\mathrm{d}t_T \sqrt{1 - v^2(t_T)}$$

$$\tau = \int_0^{t_T} \sqrt{1 - v^2(t)}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+(a_0 t)^2}}\mathrm{d}t$$

Sostituendo $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{\mathrm{d}z}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

1.1.4 10^9 anni-luce

Utilizzando la formula 4

$$10^9 = \frac{\sqrt{1+(1.030t)^2} - 1}{1.030}$$

da cui $t_T \sim 10^9$. Utilizzando la formula del tempo proprio,

$$\tau = \frac{\ln(\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0} \sim 20.82y$$

1.1.5 Perchè non andiamo su Giove?

Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.9999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan\arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan\arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-gt_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2 - 2gx\sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}}{g}$$

TODO risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

1.1.6 Razzo relativistico

Considero il sistema $\mathcal{I}$ in cui il razzo è fermo e i sistemi $\mathcal{E}$, in cui è ferma la dm espulsa, e $\mathcal{J}$, in cui è fermo il razzo propulso con massa $m - \mathrm{d}m$. Nel sistema $\mathcal{I}$:

$$\delta m v_e \gamma(v_e) = (m - \mathrm{d}m)\mathrm{d}v\gamma(\mathrm{d}v) \sim m\mathrm{d}v$$

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_E)} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Considerando che $\delta m\gamma(v_e) = -\mathrm{d}m$ e che $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$,

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\tau}{v_e} = -\frac{a_0}{v_e\sqrt{1-v_e^2}}\mathrm{d}\tau$$

da cui infine

$$m(\tau) = e^{-\frac{a_0 \tau}{v_e\sqrt{1-v_e^2}}}$$

1.1.7 Campo elettrico

1.2 Campo elettrico di una particella carica senza massa

1.2.1 Quadripotenziale

Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di $\tilde{A}^\mu$ sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo), $\tilde{A}^0$ puo' essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_\Sigma \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} \mathrm{d}V \propto \int \mathrm{d}\Omega \int \frac{r^{D-2}}{r^{n+1}} \mathrm{d}r$$

dove dΩ è l'elemento di volume (D-2)-dimensionale. Siccome la dipendenza da r deve cancellarsi $E_i = e\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0}\frac{1}{r^{D-2}}$, quindi

$$\tilde{A} = (-e\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0}\frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0})$$

1.2.2 Tensore elettromagnetico

Le componenti non nulle del tensore $F_{\mu\nu}$ sono le $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$.

1.2.3 Coordinate cono-luce

Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon^\mu_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$F_{\xi\varsigma} = \Upsilon^\mu_\xi \Upsilon^\nu_\varsigma \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ E_1 & 0 & E_2/\sqrt{2} & E_3/\sqrt{2} & \cdots \\ -E_2/\sqrt{2} & -E_2/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -E_3/\sqrt{2} & -E_3/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove gli E_i sono i campi trasformati di coordinate, valutati nelle nuove coordinate.

Un boost porta a

$$x^\pm \to \gamma(1 \mp \beta)x^\pm$$

pertanto al boost corrisponde, in queste coordinate,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma(1+\beta) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e

$$F_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & \gamma(1-\beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots & \\ E_1 & 0 & \gamma(1+\beta)E_2/\sqrt{2} & \cdots & \\ -\gamma(1-\beta)E_2/\sqrt{2} & -\gamma(1+\beta)E_2/\sqrt{2} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1.2.4 Limite di alte velocità

Il limite

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\gamma}{[\gamma^2 a^2 + b^2]^{\frac{D-1}{2}}} = N_D \frac{\delta(a)}{b^{D-2}}$$

si giustifica osservando che per $a \neq 0$ tende a 0, mentre per $a = 0$ tende a ∞, così come fa la δ di Dirac. Scrivendo

$$\frac{1}{(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2} + 1)^{\frac{D-1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int \mathrm{d}\tau\, \tau^{\frac{D-1}{2}-1} e^{\tau(\frac{\gamma^2 a^2}{b^2}+1)}$$

e integrando tale risultato in da si ottiene

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int \mathrm{d}\tau\, \tau^{\frac{D-1}{2}-\frac{3}{2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{\pi} b}{\gamma}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi} b}{\gamma}$$

dove si è riconosciuta la Gamma di Eulero. A questo punto, usando $\int \mathrm{d}a\, \delta(a) = 1$,

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\gamma}{b^{D-1}} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi} b}{\gamma} = \frac{N_D}{b^{D-2}}$$

Quindi

$$N_D = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$$

2 Foglio 2

2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varra' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine dara' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

$$\bar{z}_{N,S} = \rho_{N,S} e^{-i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \dfrac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Si definisce la funzione che lega le due carte nel modo seguente:

$$z_N = \frac{1}{z_S}$$

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\bar{z}_S}$$

Tale relazione è olomorfa in $U_N \cap U_S$, cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate $w_{N,S}$, ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive $z_{N,S}$:

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con z_N.

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}) = z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

$$L_\pm = \pm e^{\pm i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$= \pm e^{\pm i\varphi}Re^{i\varphi}(-\frac{1}{1-\cos\theta} \mp \cot\theta\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})\frac{\partial}{\partial z} \pm e^{\pm i\varphi}Re^{-i\varphi}(-\frac{1}{1-\cos\theta} \pm \cot\theta\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

Siccome $z\bar{z} = \dfrac{1+c}{1-c}$,

$$L_+ = -\frac{z^2}{R}\frac{\partial}{\partial z} - R\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \qquad L_- = R\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}^2}{R}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$$

Usando che $\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}$

$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

Autovalori di F_m

Tenendo conto che

$$L_z f(\rho) = (z\frac{\partial\rho}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}})\frac{\partial f}{\partial\rho} = 0$$

è immediato verificare che

$$L_z F_m = L_z[z^m]f(\rho) + z^m L_z[f(\rho)] = mF_m$$

Forma di Y_l^l

$$L_+[f(z\bar{z})] = (-z^2\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}})\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

$$= -\frac{z^{m+1}}{R}\left[mf + (|z|^2 + R^2)\frac{\partial f}{\partial\rho^2}\right]$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_m(\rho^2 + R^2)^{-m}$$

si vede infine che

$$L_+ Y_l^m = 0 \iff m = l$$

$$L_- Y_l^l = (\frac{mR}{z} + \frac{\bar{z}}{R}) Y_l^l$$

Nelle coordinate $(z_S, \bar{z}_S)$

$$Y_l^m = z_S^{-m} f_m((z_S \bar{z}_S)^{-1} + R^2)^{-m}$$

3 Foglio 3

3.1 Metrica bidimensionale

Si studia la metrica

$$g = \mathrm{d}s^2 = \frac{\epsilon \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

con $\epsilon = \pm 1$.

Vettore di Killing

TODO Considerando che la metrica non dipende dal modulo di x, ma solo da quello di y, si scrive immediatamente che per

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{\vec{k}} g = 0$$

Simboli di Christoffel

L'azione di una particella libera, in parametrizzazione affine, si scrive

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\lambda \frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Le variazioni δx portano a

$$\left(\frac{\epsilon \dot{x}}{y^2} \right)^{\cdot} = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

mentre per δy si ha

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} + \left(\frac{\dot{y}}{y^2} \right)^{\cdot} = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{\epsilon \dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = 0$$

Confrontando le'equazioni con la condizione per le geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho = 0$$

si trovano

$$\Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = -\frac{1}{y}; \quad \Gamma^y_{xx} = \frac{\epsilon}{y}; \quad \Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{y}$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{\ x} & \Gamma^x_{\ y} \\ \Gamma^y_{\ x} & \Gamma^y_{\ y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}y}{y} & -\frac{\mathrm{d}x}{y} \\ \frac{\epsilon \mathrm{d}x}{y} & -\frac{\mathrm{d}y}{y} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Con i simboli così trovati, si possono scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla e_x = -\frac{\mathrm{d}y}{y} \otimes e_x + \frac{e\mathrm{d}x}{y} \otimes e_y \\ \nabla e_y = -\frac{\mathrm{d}x}{y} \otimes e_x - \frac{\mathrm{d}y}{y} \otimes e_y \end{cases} \tag{6}$$

Tensore curvatura

$$R = \mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$$

$$(\mathrm{d}\Gamma)^i_j = \partial_\rho \Gamma^i_{\mu j} \mathrm{d}x^\rho \mathrm{d}x^\mu = \partial_y \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{\epsilon}{y} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{7}$$

$$(\Gamma \wedge \Gamma)^i_j = \Gamma^i_j \wedge \Gamma^j_k$$

e utilizzando il fatto che

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 = \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu$$

si trova che $\Gamma \wedge \Gamma = 0$. Ne segue che

$$R = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Il tensore di Ricci è

$$\mathrm{Ric}_{j\nu} = \delta^\mu_i R^i_{j\mu\nu}$$

E come matrice

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Lo scalare di curvatura è definito come

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Si calcola g^{ij} come inverso della metrica, da cui

$$||g^{ij}|| = \mathrm{diag}(\frac{y^2}{\epsilon}, y^2)$$

e $R = -2$.

Zweibein

Scrivendo

$$V^x = \frac{\mathrm{d}x}{y} \qquad V^y = \frac{\mathrm{d}y}{y} \qquad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij} V^i V^j$$

Sapendo che

$$\begin{cases} \mathrm{d}V^x = \partial_y \left(\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V^y = \partial_x \left(\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

e, considerando $T^i = 0$,

$$\mathrm{d}V^i = -\omega^i_j \wedge V^j$$

(gli indici sono ora intesi nello spazio delle zweibein) si trova

$$\omega^y_x \wedge V^x = 0$$

$$\omega^x_y \wedge V^y = \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

Considerando che, con la metrica piatta,

$$V_i = \eta_{ij} V^j = \begin{cases} \epsilon V^i & \text{se } \ i = x \\ V^i & \text{se } \ i = y \end{cases}$$

si trova che

$$\omega^x_y \wedge V^y = -V^x \wedge V^y$$

da cui

$$\omega^x_y = -V^x$$

e naturalmente

$$\omega^y_x = \epsilon \omega^{yx} = -\epsilon \omega^{xy} = -\epsilon \omega^x_y$$

che verifica la condizione trovata per $\mathrm{d}V^y$. L'antisimmetria di ${\omega^i}_j$ si trasferisce a ${R^i}_j$, che avrà non nulli solo

$$R^x_{\ y} = \mathrm{d}{\omega^i}_j = -V^x \wedge V^y \qquad R^y_{\ x} = -\epsilon \mathrm{d}{\omega^i}_j = \epsilon V^x \wedge V^y$$

Pertanto

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} V^x \wedge V^y$$

Il tensore di Ricci ha componenti

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \begin{pmatrix} R^y_{x|yx} & R^x_{x|xy} \\ R^y_{y|yx} & R^x_{y|xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^x_{\ y} & 0 \\ 0 & R^x_{\ y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui lo scalare

$$R = g^{ij} \mathrm{Ric}_{ij} = -\epsilon^2 - 1 = -2$$

Derivate covarianti

I vettori tangenti alle Zweibein sono quelli tali per cui

$$e_i(V^j) = \delta_i^j$$

e sono pertanto

$$e_x = y\mathrm{d}x \qquad e_Y = y\mathrm{d}y$$

Se ne calcolano le derivate covarianti, con connessione ${\omega^i}_j$:

$$\nabla e_x = {\omega^y}_x e_y = \epsilon e_y \otimes V^x \qquad \nabla e_y = {\omega^x}_y e_x = e_x \otimes V^x \tag{8}$$

Integrali primi

Gli integrali primi

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\dot{x}}{y^2} \\ \sigma = \dfrac{\epsilon\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{cases}$$

danno le condizioni

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x y^2 \\ \dot{y}^2 = (\sigma - \epsilon p_x^2 y^2) y^2 \end{cases}$$

Si procede calcolando

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{2\dot{y}y}{\dot{x}}\right)^2$$

e, sostituendo le condizioni trovate con gli integrali primi, si ottiene

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{4}{p_x^2}(\sigma - \epsilon\dot{x}^2 y^2)$$

Per integrare questa equazione,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{p_x}\sqrt{\sigma - \epsilon p_x^2 v} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{\sigma}}{p_x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}}}$$

Si sostituisce al secondo membro

$$v \to q = \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\epsilon p_x^2}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{1-q}}$$

Un'ulteriore sostituzione porta a

$$q \to \theta = \arcsin\sqrt{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sigma}{\epsilon p_x^2}\mathrm{d}\cos\theta$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\cos\arcsin\sqrt{q} = \sqrt{1-q}$$

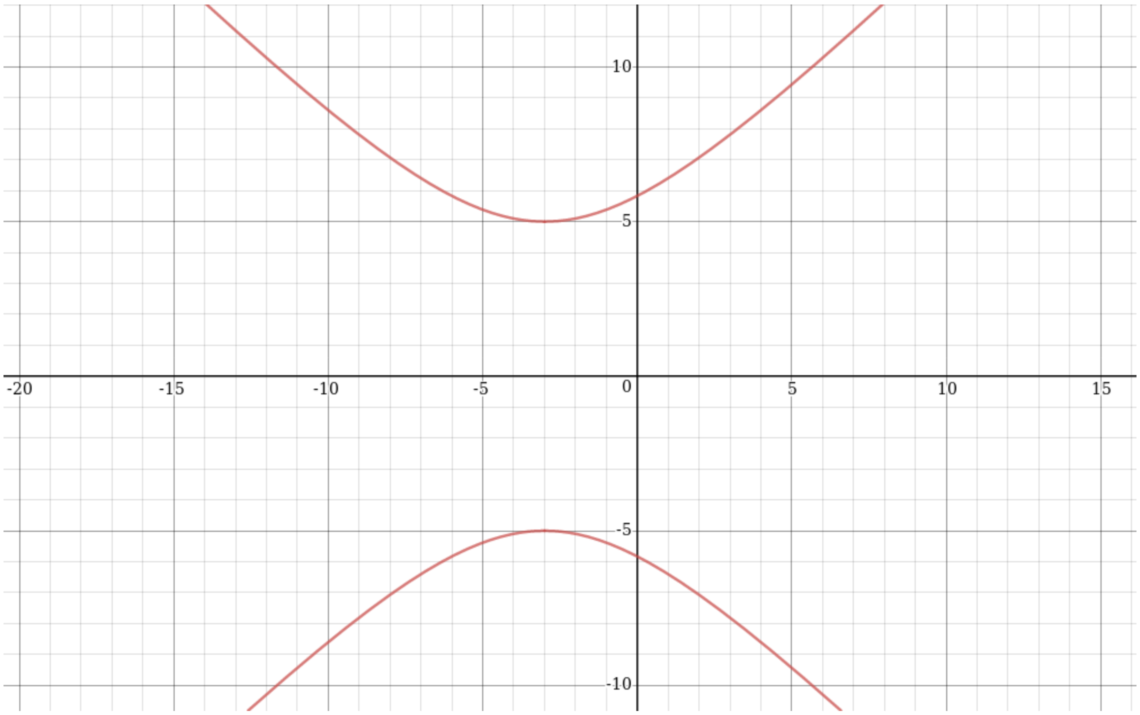
l'integrazione porta a

$$\frac{p_x\epsilon}{\sqrt{\sigma}}(x - x_0) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon p_x^2 v}{\sigma}} - c_0$$

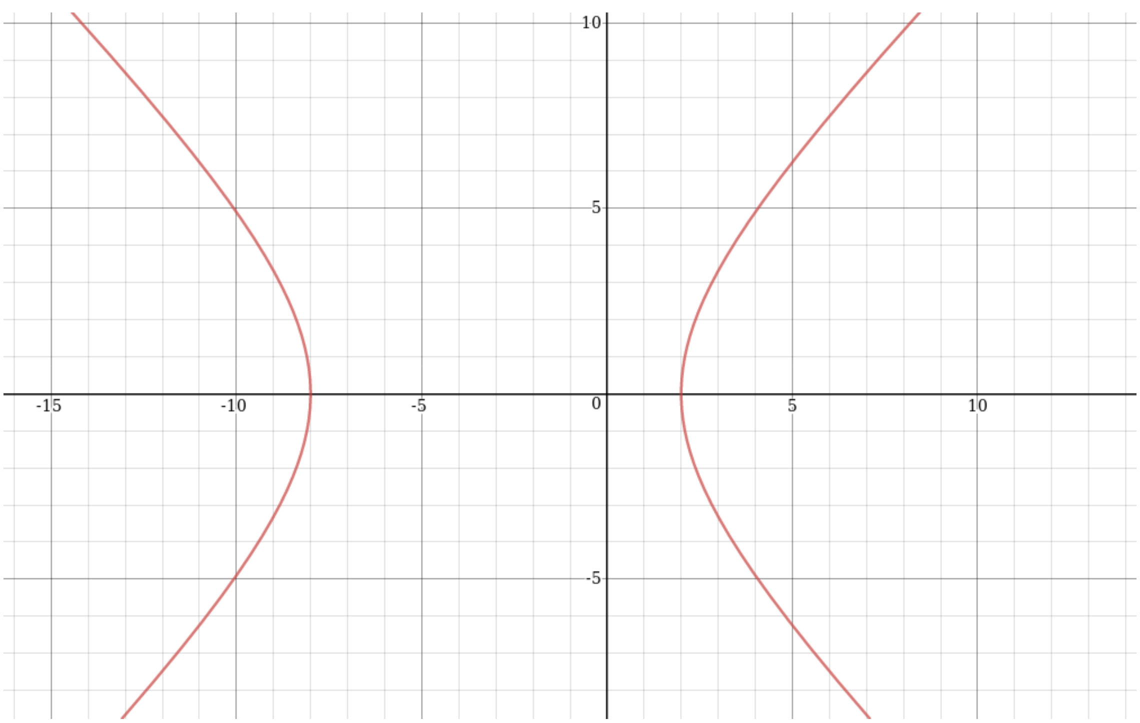
che raccogliendo le costanti e riarrangiando porta a

$$(p_x\epsilon x - K)^2 = \sigma - \epsilon p_x^2 v$$

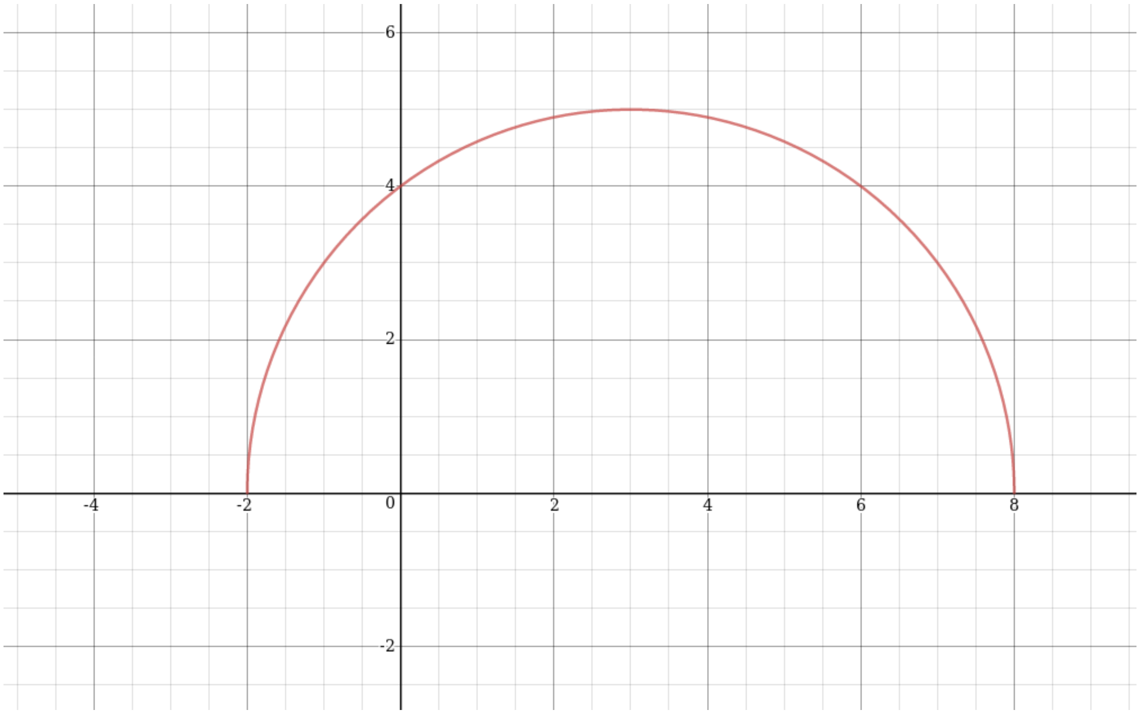
Al variare di ϵ e σ, si ottengono i seguenti grafici:



$\epsilon = -1,\ \sigma = -1$



$\epsilon = -1,\ \sigma = +1$



$$\epsilon = +1,\ \sigma = +1$$

Derivata di un campo vettoriale

$$\nabla X = (\nabla X^i)\partial_i + X^i \nabla \partial_i$$

dove

$$\nabla X^i = \partial_j X^i \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}X^i$$

e utilizzando la **??**

$$\nabla X = (\mathrm{d}X^x - X^y V^x)e_x + (\mathrm{d}X^y + \epsilon X^x V^x)e_y$$

3.1.1 Traiettoria circolare

Presa la traiettoria

$$\gamma(t) = (x_0 + r\cos\omega t, y_0 + r\sin\omega t)$$

si considera il trasporto parallelo lungo essa, scrivibile come

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \gamma \rfloor \nabla X = 0$$

Sviluppando questa condizione si trova (per brevità: i simboli cos e sin sottintendono l'argomento ωt; si scrive y intendendolo valutato su γ, come indicato a pedice))

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^x = \omega r \left[-\sin \partial_x X^x + \cos \partial_y X^x + \dfrac{\sin X^y - \cos X^x}{y} \right]_\gamma = 0 \\ \dot{\gamma}^\mu (\nabla_\mu X)^y = \omega r \left[-\sin \partial_x X^y + \cos \partial_y X^y + \dfrac{-\epsilon \sin X^x - \cos X^y}{y} \right]_\gamma = 0 \end{cases}$$

Prendendo $\epsilon = +1$, moltiplicando membro a membro la seconda equazione per i e sommando le due si trova

$$\omega r\left[(-\sin\partial_x + \cos\partial_y)(X^x + ix^y) - \left.\frac{1}{y}\right|_\gamma (X^x + iX^y)e^{+\omega t}\right] = 0$$

Definendo $Z = X^x + iX^y$, $\dot{Z} = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\ \nabla_i Z|_\gamma$ e l'equazione diventa

$$\dot{Z} - \omega r\frac{e^{i\omega t}}{y_0 + r\sin\omega t}Z$$

4 Foglio 4

4.1 Osservatori in Minkowsky

Data la metrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

il cambio di variabili

$$x = x_0 + vt_0; \quad t = t_0$$

porta, in forma canonica, a

$$\mathrm{d}s^2 = (v^2-1)\left(\mathrm{d}t_0 + \frac{v}{v^2-1}\mathrm{d}x_0\right)^2 - \frac{1}{v^2-1}\mathrm{d}x_0^2$$

da cui si identifica facilmente

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{1}{v^2-1}\mathrm{d}x_0^2$$

Si può quindi definire una nuova coppia di variabili, separando la parte spaziale e quella temporale: $\mathrm{d}X = \mathrm{d}l$.

4.2 manca

4.3 Schwartzschild per osservatori in moto

Data la metrica di Schwartzschild in D dimensioni

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}} + r^2(\mathrm{d}\theta_{D-2} + ...)$$

si calcola il limite di campo debole della sua azione: si considera $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ dove η è la metrica piatta e h rappresenta le perturbazioni gravitazionali, tali che siano infinitesime e dello stesso ordine tra loro.

$$S = -mc\int \mathrm{d}\lambda\sqrt{-c^2\left(1-\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)\dot{t}^2 + g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$$

dove $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = \mathcal{O}(|h|)$. Prendendo $\lambda = t$ e moltiplicando per $(1-v^2/c^2)^{1/2}(1-v^2/c^2)^{-1/2} \sim \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$ (dove il quadrato di un vettore indica la sua norma al quadrato) si arriva a

$$S = -mc^2\int \mathrm{d}t\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} + \mathcal{O}(\frac{v^2}{2c^2}\cdot|h|)\right)$$

$$= -mc^2 \int \mathrm{d}t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)$$
$$= \int \mathrm{d}t \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mc^2\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)$$

Identificando i primi due addendi come il termine di massa e quello cinetico, si può identificare il restante come potenziale gravitazionale, da cui

$$\frac{1}{2}mc^2\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3} = -m\phi_{grav} \quad \Rightarrow \quad r_s^{D-3} = \frac{2MG_D}{c^2}$$

Si può definire il cambiamento di coordinate

$$r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2 \quad ; \quad \cos\theta_{D-2} = \frac{x_{D-1}}{r} \quad ; \quad \cos\theta_{D-3} = \frac{x_{D-1}}{r\cos\theta_{D-2}} \quad ...$$

e si vede che

$$\sum \mathrm{d}x_i^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x_\perp^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta_{D-2} + \mathrm{d}\theta_{D-3}\sin^2\theta_{D-2} + ...)$$

da cui, raccogliendo dr,

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}}\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x_\perp^2$$

4.3.1 Osservatori in moto

L'analogo di una trasformazione di Lorentz si ha con

$$ct = \gamma\frac{1+\beta}{2}U + \gamma\frac{1-\beta}{2}V \quad ; \quad x = \gamma\frac{1+\beta}{2}U - \gamma\frac{1-\beta}{2}V$$

dove U e V sono le coordinate di cono luce. Siccome si vuole determinare la metrica per un osservatore in moto alla velocità della luce, si pone il limite $\beta \to 1$. Si scrive la trasformazione dei termini in dt e dx, per poi imporre le condizioni desiderate:

$$-c^2\left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}\right)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

$$\to \quad \gamma^2\frac{(1+\beta)^2}{4}\mathrm{d}U^2 + \gamma^2\frac{(1-\beta)^2}{4}\mathrm{d}V^2 - \mathrm{d}U\mathrm{d}V + \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}(\gamma^2\frac{(1+\beta)^2}{4}\mathrm{d}U^2 + \gamma^2\frac{(1-\beta)^2}{4}\mathrm{d}V^2 - \mathrm{d}U\mathrm{d}V)$$

Si nota subito che tutti i coefficienti di dV tendono a zero. Inoltre per $U \neq 0$

$$r = \sqrt{\gamma^2(\frac{(1+\beta)^2}{4}U^2 + \gamma^2(\frac{(1+\beta)^2}{4}V^2 - UV + x_\perp^2}$$

che nel limite tende a infinito a causa del γ davanti a U^2, per cui tutti i termini $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$ si annullano e rimane

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}U\mathrm{d}V + \mathrm{d}x_\perp^2$$

Nel caso in cui $U = 0$, invece,

$$r = \sqrt{x_\perp^2} = x_\perp$$

e

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma^2\left(\frac{r_s}{x_\perp}\right)^{D-3}\mathrm{d}U^2 + \mathrm{o}(\mathrm{d}U^2)$$

che diverge nel limite.

4.3.2 Metrica di Aichelburg-Sexl

I termini in dt e dx si possono riscrivere all'ordine di dU^2, tenendo conto che il termine in V^2 svanisce, come

$$-\mathrm{d}U\mathrm{d}V + r_s^{D-3}\left[\frac{\gamma^2}{(\gamma^2U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}}\mathrm{d}U^2\right]$$

e usando il limite noto TODO RIFERIMENTO

$$\left[\frac{\gamma^2}{(\gamma^2U^2 - UV + x_\perp^2)^{(D-3)/2}}\right] = N_D\frac{\delta U}{-UV + x_\perp^{D-4}} = N_D\frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}}$$

inoltre si impone TODO perche'?

$$\lim M\gamma = M_*$$

per cui

$$r_s \to r_{s*}$$

Unendo i risultati TODO e gli altri termini in dr?

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}U\mathrm{d}V + N_D r_{s*}^{D-3} N_D\frac{\delta U}{x_\perp^{D-4}}\mathrm{d}U^2 + \mathrm{d}x_\perp^2$$

5 Foglio 5

5.0.1 Campo debole

Si considera la metrica D-dimensionale $g_{\mu\nu}$ nell'approssimazione di campo debole. Le Vielbein possono essere scritte come $V^a = (\delta^a_\mu + \frac{1}{2}h^a_\mu)\mathrm{d}x^\mu$: si verifica infatti che, al primo ordine in $|h_{\mu\nu}|$,

$$\eta_{ab}V^aV^b = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

Si verifica immediatamente che

$$V^\mu_a = (\delta^\mu_a - \frac{1}{2}h^\mu_a)$$

pertanto si può usare la formula

$$\omega_{abc} = V^\mu_a V^\nu_b \partial_\mu V^c_\nu - [cab] + [bca]$$

che, considerando di secondo ordine termini del tipo $(\partial h)h$, TODO porta al primo ordine a

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}[\partial[bh_{c]a} - [abc] + [cab]$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\partial_{[b}h_{a]c}V^c$$

Siccome si trascurano termini del tipo $(\partial h)(\partial h)$,

$$R_{ab} = \mathrm{d}\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_i\partial_{[a}h_{b]j}V^i \wedge V^j$$

Lo stesso calcolo si può fare con i simboli di Christoffel:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + [\nu\rho\mu] - [\rho\mu\nu]) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h^\sigma_\mu + \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial^\sigma h_{\mu\nu})$$

e

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\alpha \partial_{[\mu} h_{\nu]\beta} \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$$

Il tensore di Ricci è

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab} + \frac{1}{2}\partial_\nu \partial^\mu h^b_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \partial^b h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu \partial^b h$$

che con la gauge

$$\partial^a \bar{h}_{ab} = 0 \quad ; \quad \bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab} h$$

diventa

$$Ric_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{ab}$$

da cui il tensore di Einstein è immediatamente

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}$$

TODO TODO

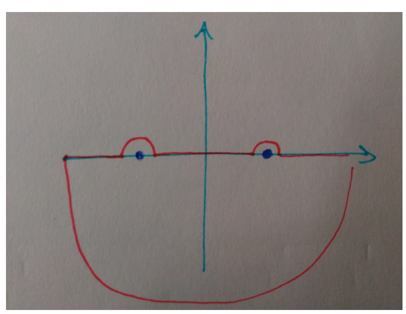
In definitiva l'equazione di Einstein diventa

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}$$

$$\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{9}$$

5.0.2 Funzione di Green

La funzione di Green del D'Alambertiano, valutata nella sua trasformata di Fourier, risulta essere $\tilde{G} = -1/k^2$. Dovendo integrare questa espressione in k^0, si nota subito che ha due poli per $k^0 = |\vec{k}|$, per cui sarà necessaria una prescrizione $i\epsilon$, concretizzata in un cambio di variabile $k^0 -> k^0 \pm i\epsilon$. La richiesta di causalità permette di fissarne il segno, in quanto corrisponde alla richiesta che la funzione sia nulla per $x^0 < 0$: infatti, usando il lemma di Jordan, l'integrale in questo intervallo si annulla chiudendo la circonferenza "sopra" l'asse reale; ma, richiedendo che sia nullo, esso non deve contenere i poli, pertanto si ha una situazione come in **??**.



L'integrale risulta quindi

$$G_R = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}$$

che diventa col teorema dei residui, in coordinate sferiche

$$G_R = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\cos\theta\ \mathrm{d}k\ \ k^2 e^{ik|x|\cos\theta}\frac{2\pi i}{2k}\left[e^{-ikx^0} - e^{ikx^0}\right]\theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2|x|}\int \mathrm{d}k \left(e^{ik|x|} - e^{-ik|x|}\right)\left(e^{-ikx^0} - e^{ikx^0}\right)\theta(x^0)$$

$$G_R = \frac{2}{(2\pi)^2|x|}\int \mathrm{d}k \sin(k|x|)\sin(kx^0)\theta(x^0)$$

Alternativamente, sviluppando i prodotti di esponenziali e cambiando variabile per gli esponenti con segno negativo, utilizzando infine la forma integrale della delta di Dirac $2\pi\delta(x) = \int \mathrm{d}k e^{ikx}$ si trova

$$G_R = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta x^0 - |\vec{x}|$$

dove la θ è sottintesa dalla δ.

5.0.3 Polvere

Per le proprietà della funzione di Green, la **??** ha soluzione

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0,\vec{x}) = \int G_R(x-y)\left[-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}(y)\right] = \frac{4G}{c^4}\int \mathrm{d}^4 y \frac{T_{\mu\nu}(y)\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x}-\vec{y}|}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0,\vec{x}) = \frac{4G}{c^4}\int \mathrm{d}^3 y \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Preso il tensore energia-impulso della polvere

$$T_{\mu\nu} = (c^2\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p$$

nelle condizioni

$$u^\mu = (1,\vec{0}) \quad ; \quad |p| << c^2\rho \quad ; \quad \rho = \rho(\vec{y})$$

Se la materia è confinata in un raggio $|\vec{y}_M|$ e il campo viene valutato a distanze molto maggiori di questo raggio, si può sviluppare

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|}$$

Il tensore energia-impulso si riduce, nelle condizioni date, a

$$T_{00} = c^2\rho \quad ; \quad T_{ii} = p$$

per cui

$$\bar{h}_{00}(x^0,\vec{x}) = \frac{2G}{c^2|\vec{x}|}\int \mathrm{d}^3 y\rho(\vec{y}) = \frac{2GM}{c^2 r}$$

TODO perche' T_ii?? TODO molta materia

5.0.4 Centro di massa nell'origine

Si prende il centro di massa nell'origine, con velocità nulla. Si considera $u^\mu \sim (1, \vec{v}/c)$.

$$T_{00} = c^2\rho \quad ; \quad T_{0i} \sim c\rho v_i \sim T_{00}/c \quad ; \quad T_{ij} \sim \rho v_i v_j \sim T_{00}/c^2$$

Usando la conservazione di $T_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \to \partial_k T^{k0} = -\partial_0 T^{00}$$

e quindi

$$\int_V \mathrm{d}^3y \partial_k T^{0k} y_i y_j = -\int_V \mathrm{d}^3y \partial_0 T^{00} y_i y_j = -\left[T^{00} y_i y_j\right|_\Sigma + \int \mathrm{d}^3y c^2 T^{00}(v_i y_j + y_i v_j)$$

$$\partial_0\rho(\vec{y}) = 0 \Rightarrow \partial_0 T^{00} = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^3y T^{00}(v_i y_j + y_i v_j) = 0 \tag{10}$$

Dove si è trascurato il termine di bordo in quanto TODO

Si sviluppa in multipoli

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sim \frac{1}{|\vec{x}|} + y^i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

da cui

$$\bar{h}_{00}(x^0, \vec{x}) = \frac{2GM}{c^2 r} + \mathcal{O}(r^{-5})$$

usando la condizione di massa centrata nell'origine, per cui $\int \mathrm{d}^3y \rho(\vec{y}) y_i = 0$; i termini T_{ij} si trascurano, essendo di ordine T_{00}/c^2; infine

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) \sim \frac{4G}{c^3} \int \mathrm{d}^3y \left[\frac{\rho(\vec{y}) v_i}{|\vec{x}|} - \frac{\rho(\vec{y}) v_i y_j x^j}{|\vec{x}|^3}\right]$$

Il primo termine si annulla: la condizione di centro di massa fermo implica infatti $\int \mathrm{d}^3y \rho(\vec{y}) v_i = 0$. Per quanto riguarda il secondo, grazie a **??**, si verifica che

$$\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3y \rho(v_i y_j - y_i v_j) = \int \mathrm{d}^3y \rho v_i y_j$$

pertanto

$$\bar{h}_{0i}(x^0, \vec{x}) \sim -\frac{2Gx^j}{c^3|\vec{x}|} \int \mathrm{d}^3y \rho(\vec{y})(v_i y_j - v_j y_i) + \mathcal{O}(r^{-5})$$

Per cui la metrica diventa, usando $J_{ij} = \int \mathrm{d}^3y \rho(|\vec{y}|)(v_i y_j - v_j y_i)$,

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r})c^2 \mathrm{d}t^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2 r})(\mathrm{d}\vec{x})^2 + \frac{4G}{c^3 r^3} J_{ij} \mathrm{d}x^i c\mathrm{d}t + \mathcal{O}(r^-5)$$

TODO perchè h00 = hii? TODO trascinamento