

Contents

1	Foglio 1	2
1.1	1 - Osservatori uniformemente accelerati	2
	Particella accelerata	2
	Achille e la lepre	3
	Tempo proprio	3
	10^9 anni-luce	3
	Perchè non andiamo su Giove?	4
	Razzo relativistico	4
	Campo elettrico	4
1.2	2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa	5
	Quadripotenziale	5
	Tensore elettromagnetico	5
	Coordinate cono-luce	5
2	Foglio 2	5
2.1	Proiezione stereografica	5
2.2	Rotazioni	6

1 Foglio 1

1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella P_0 , uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale \mathcal{I} . Il sistema \mathcal{I} va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

Particella accelerata Considero una generica particella P , con velocità u e accelerazione a nel sistema \mathcal{I} . Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento \mathcal{I} al sistema terra \mathcal{T} :

$$\begin{cases} dx_T = \gamma(dx + vdt) \\ dt_T = \gamma(dt + vdx) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_T = \frac{dx_T}{dt_T} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

$$du_T = \frac{1 - v^2}{(1 + uv)^2} du$$

$$a_T = \frac{du_T}{dt} = \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 + uv)^3} a \quad (2)$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0 , utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità u va posta nulla perchè considero la particella P_0 , ferma in \mathcal{I} , e considero l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema \mathcal{T} ; la velocità della particella rispetto a \mathcal{T} è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{dv(t_T)}{dt_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int d \tan \theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \quad (3)$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} dx_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} dt_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
x_T(t_T) &= \frac{1}{a_0} \int_{y_0}^y \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy \\
&= \frac{1}{a_0} \int_{z_0}^z \sinh(z) dz \\
&= \frac{1}{a_0} [\cosh \sinh^{-1}(y) - \cosh \sinh^{-1}(y_0)] \\
&= \frac{1}{a_0} [\cosh(\ln(y + \sqrt{1+y^2})) - 1] \\
&= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y + \sqrt{1+y^2})} \\
&= \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0} \\
x_T(t_T) &= \frac{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \tag{4}
\end{aligned}$$

TODO limite di basse velocità

Achille e la lepre Uguagliando $c \cdot t$ a x_T dovrei trovare qualcosa, ma se metto $c=1$ si cancella t quadro e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

Tempo proprio Con $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$:

$$\begin{aligned}
icd\tau &= ds = icdt_T \sqrt{(1 - v^2(t_T))} \\
\tau &= \int_0^{t_T} \sqrt{(1 - v^2(t))} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0 t)^2}} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{dz}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

10^9 **anni-luce** **TODO** udm di c Per percorrere una distanza di $10^9 ly$ con accelerazione da fermo di $g = 9.8 m/s^2 = 1.030 ly/y^2$, usando la formula 4, occorrono

$$\sqrt{\frac{d^2}{c^2} + 2 \frac{d}{g}} \simeq 2.998 \cdot 10^1 8y$$

cui corrisponde un tempo proprio $\tau \simeq 41.972y$.

Perchè non andiamo su Giove? Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.9999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan \arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-gt_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2 - 2gx\sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}}{g}$$

TODO risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

Razzo relativistico Considero il sistema \mathcal{I} in cui il razzo è fermo e i sistemi \mathcal{E} , in cui è ferma la dm espulsa, e \mathcal{J} , in cui è fermo il razzo propulso con massa $m - dm$. Nel sistema \mathcal{I} :

$$dm v_e \gamma(v_e) = (m - dm) dv \gamma(v) \sim m dv$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{v_e \gamma(v_e)} \frac{dv}{d\tau}$$

$$m = m_0 e^{\frac{\frac{dv}{d\tau}}{v_e \gamma(v_e)}}$$

$$m = m_0 e^{\frac{a_0 \tau}{v_e \gamma(v_e)}}$$

Campo elettrico

1.2 2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa

Quadripotenziale Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di A^μ sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo), A^0 può essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che sarà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= (cost) \cdot \frac{r^{D-1}}{r^k} \Omega \end{aligned}$$

E siccome la dipendenza da r deve cancellarsi $E_i = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}$, quindi

$$A = \left(-\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}}\epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0} \right)$$

Tensore elettromagnetico Le componenti non nulle del tensore $F_{\mu\nu}$ sono le $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$.

Coordinate cono-luce Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon_\xi^\mu = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$\tilde{F}_{\xi\varsigma} = \Upsilon_\xi^\mu \Upsilon_\varsigma^\nu F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambio la velocità:

$$x^\pm = \gamma(1 - \beta)x^\pm = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

2 Foglio 2

2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R \frac{\cos \theta}{1 \mp \sin \theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varrà per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine darà invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R \frac{\cos \theta}{1 \mp \sin \theta} \\ \varphi = \phi \end{cases}$$

Usando queste relazioni, si trova facilmente che

$$\rho_N = \frac{1}{\rho_S}$$

Tale relazione è olomorfa in $U_N \cap U_S$, cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate $w_{N,S}$, ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive $z_{N,S}$:

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

2.2 Rotazioni

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = z \frac{\partial}{\partial z}$$