1 Esercizi di Relativitá Generale: III gruppo

Consideriamo la metrica bidimensionale

$$ds^2 = \frac{\epsilon dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{1}$$

Quando $\epsilon = +1$ si prendre $y > 0$ e si ha la pseudosfera, quando $\epsilon = -1$ si trova lo spazio di (anti) de Sitter.

Calcolare i seguenti punti.

- Trovare l'ovvio vettore di Killing. I vettori di Killing $\vec{k}$ sono definiti come $\mathcal{L}_{\vec{k}} g = 0$.
- Usando il trucco dell'azione della geodetica calcolare i simboli di Christoffel. Se si impacchettano tutti in una matrice Γ si trova

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma^x{}_x & \Gamma^x{}_y \\ \Gamma^y{}_x & \Gamma^y{}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dy}{y} & -\frac{dx}{y} \\ \epsilon\frac{dx}{y} & -\frac{dy}{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Scrivere le derivate dei vettori tangenti, la prima è

$$\nabla e_x = e_x \otimes \frac{-dy}{y} + e_y \otimes \frac{\epsilon dx}{y} \tag{3}$$

- Calcolare il tensore curvatura

$$R = \begin{pmatrix} & -1 \\ \epsilon & \end{pmatrix} \frac{dx \wedge dy}{y} \tag{4}$$

  e mostrare che la curvatura è costante e vale $R = -2$.

- Scrivere le ovvie zweibein associate alla metrica piatta $(\epsilon, 1)$
- Calcolare la spin connection e fra vedere che vale

$$\omega^{\underline{x}}{}_{\underline{y}} = -\frac{dx}{y} = -V^{\underline{x}} \tag{5}$$

- calcolare la curvatura nel formalismo delle zweibein e mostrare che vale

$$R = \begin{pmatrix} & -1 \\ \epsilon & \end{pmatrix} V^{\underline{x}} \wedge V^{\underline{y}} \tag{6}$$

  e dedurre che la curvatura vale -2 come prima.

- Calcolare i vettori tangenti duali alle zweibein e scrivere le loro derivate covarianti, per esemipo si ottiene

$$\nabla e_{\underline{x}} = \epsilon e_{\underline{y}} \otimes V^{\underline{x}} \tag{7}$$

- Scrivere l'equazione della geodetica. Associato al vettore di Killing c'è un integrale primo con valore p_x. L'altro integrale primo viene dalla condizione che si ha perche' si usa un parametro affine:

$$\frac{\epsilon \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = \sigma = \pm 1 \tag{8}$$

In particolare fare vedere che l'equaione per la traiettoria $y(x)$ scritta per la variabile $v = y^2$ è

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{4}{p_x^2}(\sigma - \epsilon p_x^2 v) \tag{9}$$

- Integrare la precedente equazione e discutere, facendo il grafo, della geodetica i casi $\epsilon = \sigma = 1$, $\epsilon = \sigma = -1$ e $-\epsilon = \sigma = 1$.

- Calcolare la derivata covariante di un campo vettoriale $X = X^x e_x + X^y e_y = X^{\underline{x}} e_{\underline{x}} + X^{\underline{y}} e_{\underline{y}}$. In particolare si trova per le coordinate piatte

$$\nabla X = (dX^{\underline{x}} - V^{\underline{x}} X^{\underline{y}}) e_{\underline{x}} + (dX^{\underline{y}} + \epsilon V^{\underline{x}} X^{\underline{x}}) e_{\underline{y}} \tag{10}$$

- Considerare la traiettoria $\gamma = (x_0 + r\cos\omega t, y_0 + r\sin\omega t)$ con $y_0 > r$ nel caso della pseudosfera. Far vedere che la condizione per il trasporto parallelo lungo γ, $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ puó esser scritta come

$$\dot{Z} - r\omega \frac{e^{-i\omega t}}{y_0 + r\sin\omega t} Z = 0 \tag{11}$$

quando si definisce $Z = X^x + iX^y$. Integrare l'equazione e discutere cosa succede per $t \to t + \frac{2\pi}{\omega}$. Fare attenzione ai tagli del logaritmo od ai poli della funzione integranda ed ottenere che

$$\ln \frac{Z(\frac{2\pi}{\omega})}{Z(0)} = -2\pi i \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - r^2}}{\sqrt{y_0^2 - r^2}} \tag{12}$$