Contents

1 Foglio 1

1.1 1 - Osservatori uniformemente accelerati

Considero una particella P_0, uniformemente accelerata rispetto al sistema istantaneamente inerziale $\mathcal{I}$. Il sistema $\mathcal{I}$ va inteso come un insieme di sistemi di riferimento inerziali, tra i quali, per ogni tempo, si considera quello rispetto a cui la particella P_0 è istantaneamente ferma.

Particella accelerata Considero una generica particella P, con velocità u e accelerazione a nel sistema $\mathcal{I}$ Scrivo il boost a velocità inversa dal sistema in movimento $\mathcal{I}$ al sistema terra $\mathcal{T}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_T = \gamma(\mathrm{d}x + v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t_T = \gamma(\mathrm{d}t + v\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{1}$$

$$u_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{\mathrm{d}t_T} = \frac{u+v}{1+uv}$$

$$\mathrm{d}u_T = \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}\mathrm{d}u$$

$$a_T = \frac{\mathrm{d}u_T}{\mathrm{d}t} = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1+uv)^3}a \tag{2}$$

Volendo trovare la velocità della particella P_0, utilizzo l'equazione 2 e la specializzo: la velocità u va posta nulla perchè considero la particella P_0, ferma in $\mathcal{I}$, e considero l'evoluzione temporale di $v(t_T)$, rispetto al sistema $\mathcal{T}$; la velocità della particella rispetto a $\mathcal{T}$ è adesso v e $a = a_0$:

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v(t_T)}{\mathrm{d}t_T} = [1 - v^2(t_T)]^{3/2} a_0$$

$$a_0 t_T = \int_0^{v(t_T)} \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

sostituisco $v = \sin(\theta)$

$$a_0 t_T = \int_0^{\arcsin(v(t_T))} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \mathrm{d}\tan\theta = \tan(\arcsin(v(t_T)))$$

$$v(t_T) = \sin(\arctan(a_0 t_T))$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T}{\sqrt{1 + (a_0 t_T)^2}} \tag{3}$$

Per trovare la legge oraria, considerando che $x_T(0) = v_T(0) = 0$,

$$\int_{x_T(0)}^{x_T(t_T)} \mathrm{d}x_T = \int_0^{t_T} \frac{a_0 t_T}{\sqrt{a + (a_0 t_T)^2}} \mathrm{d}t_T$$

Sostituendo prima $y = a_0 t_T$ e poi $y = \sinh(z)$ si ottiene

$$\begin{aligned} x_T(t_T) &= \frac{1}{a_0}\int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a_0}\int_{z_0}^{z} \sinh(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{a_0}[\cosh\sinh^{-1}(y) - \cosh\sinh^{-1}(y_0)] \\ &= \frac{1}{a_0}[\cosh(\ln(y+\sqrt{1+y^2}) - 1] \\ &= \frac{y^2 + y\sqrt{1+y^2} + 1 - y - \sqrt{1+y^2}}{a_0(y+\sqrt{1+y^2})} \\ &= \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{a_0} \\ x_T(t_T) &= \frac{\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} - 1}{a_0} \end{aligned} \tag{4}$$

TODO limite di basse velocità

Achille e la lepre Uguagliando c*t a xT dovrei trovare qualcosa, ma se metto c=1 si cancella tquadro e se lo tengo non so dove sbattere la testa.

Tempo proprio Con $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$:

$$ic\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s = ic\mathrm{d}t_T\sqrt{(1 * -v^2(t_T))}$$

$$\tau = \int_0^{t_T} \sqrt{(1 * -v^2(t))}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+(a_0 t)^2}}\mathrm{d}t$$

Sostituendo $a_0 t = \cosh z$

$$\tau = \int \frac{\mathrm{d}z}{a_0} = \frac{\sinh^{-1}(a_0 t_T)}{a_0} = \frac{\ln(\sqrt{1+(a_0 t_T)^2} + a_0 t_T)}{a_0}$$

10^9 **anni-luce** TODO udm di c Per percorrere una distanza di 10^9ly con accelerazione da fermo di $g = 9.8m/s^2 = 1.030ly/y^2$, usando la formula 4, occorrono

$$\sqrt{\frac{d^2}{c} + 2\frac{d}{g}} \simeq 2.998 \cdot 10^1 8y$$

cui corrisponde un tempo proprio $\tau \simeq 41.972y$.

Perchè non andiamo su Giove? Con le formule della meccanica classica,

$$t_{TOT} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2x_{TM}}{g}} = 2.8558587119250753y$$

In relatività ristretta, dove 'lh' sono le ore-luce,

$$t_{TM} = 260.627804384274lh$$

$$v_{TM} = 0.9999999999999941c$$

Modificando opportunamente la formula 3 per velocità iniziale non nulla, si ottiene

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \tan\arcsin(v_0)}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \tan\arcsin(v_0))^2}}$$

$$v(t_T) = \frac{a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}}{\sqrt{1 + (a_0 t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}$$

E per la legge oraria

$$x_T(t_T) = \frac{\sqrt{1 + (-g t_T + \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2} - \sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}{-g}$$

Invertendo:

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} + \sqrt{(\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2 - 2gx\sqrt{1 + (\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}})^2}}}{g}$$

TODO risultati bruttissimi

2.99792458e+18 anni tempo proprio: 41.9715540832882 anni

Razzo relativistico Considero il sistema $\mathcal{I}$ in cui il razzo è fermo e i sistemi $\mathcal{E}$, in cui è ferma la dm espulsa, e $\mathcal{J}$, in cui è fermo il razzo propulso con massa $m - \mathrm{d}m$. Nel sistema $\mathcal{I}$:

$$\mathrm{d}m v_e \gamma(v_e) = (m - \mathrm{d}m)\mathrm{d}v\gamma(\mathrm{d}v) \sim m\mathrm{d}v$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{1}{v_e\gamma(v_E)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$m = m_0 e^{\frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}}{v_e\gamma(v_e)}}$$

$$m = m_0 e^{\frac{a_0\tau}{v_e\gamma(v_e)}}$$

Campo elettrico

1.2 2 - Campo elettrico di una particella carica senza massa

Quadripotenziale Considerando la gauge in cui le componenti spaziali di A^μ sono nulle (in quanto il campo magnetico prodotto da una particella ferma è nullo), A^0 puo' essere ricavato, a meno di costanti, considerando che la sua derivata è il campo elettrico, che saraà un vettore (D-1)-dimensionale. Per il teorema di Gauss,

$$\int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$= (cost) \cdot \frac{r^{D-1}}{r^k} \Omega$$

E siccome la dipendenza da r deve cancellarsi $E_i = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-2}}$, quindi

$$A = (-\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-1)2\pi^{\frac{D-1}{2}} \epsilon_0} \frac{1}{r^{D-1}}, \vec{0})$$

Tensore elettromagnetico Le componenti non nulle del tensore $F_{\mu\nu}$ sono le $F_{i0} = -F_{0i} = E_i$.

Coordinate cono-luce Il cambio di coordinate è

$$\Upsilon^\mu_\xi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e il tensore elettromagnetico trasforma nel modo seguente:

$$\tilde{F}_{\xi\varsigma} = \Upsilon^\mu_\xi \Upsilon^\nu_\varsigma F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambio la velocità:

$$x^\pm = \gamma(1-\beta)x^\pm = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

2 Foglio 2

2.1 Proiezione stereografica

Per un cerchio, valgono le relazioni seguenti:

$$x_{N,S} = R\frac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta}$$

Nel caso di una sfera, in coordinate polari tale relazione varra' per il modulo rispetto alla latitudine; la longitudine dara' invece l'argomento. Riscrivendo in campo complesso:

$$z_{N,S} = \rho_{N,S} e^{i\varphi}$$

con

$$\begin{cases} \rho_{N,S} = R\dfrac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta} \\ \varphi_{N,S} = \phi \end{cases}$$

Usando queste relazioni, si trova facilmente che

$$\rho_N = \frac{1}{\rho_S}$$

Tale relazione è olomorfa in $U_N \cap U_S$, cioè il piano complesso senza l'origine e l'infinito. Le coordinate $w_{N,S}$, ottenute proiettando sul piano tangente alla sfera nel polo opposto, hanno modulo doppio delle rispettive $z_{N,S}$:

$$w_{N,S} = 2z_{N,S}$$

2.2 Rotazioni

I calcoli di questo paragrafo si intendono fatti con z_N. Le derivate si considerano per ora applicate a funzioni olomorfe.

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z} = z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_\pm = \pm e^{\pm i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$= \pm e^{\pm i\varphi} R e^{i\varphi}(-\frac{1}{1-\cos\theta} \mp \cot\theta\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})\frac{\partial}{\partial z}$$

Siccome $\rho_N = \dfrac{1+c}{1-c}$,

$$L_+ = -z^2\frac{\partial}{\partial z}, \qquad L_- = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$[L_+, L_-] = -z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2z\frac{\partial}{\partial z} + z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} = 2L_z$$

2.3 Autofunzioni di L_z

Funzioni non olomorfe

Cercando come autofunzione una funzione $F_m(z_N, \bar{z_N}) = z_N^m f(z_N\bar{z_N})$, che dipende anche dalla variabile complessa coniugata e non e' quindi olomorfa, e' necessario pensare le derivate su z come derivate sulle coordinate (θ, ϕ), di cui poi si esegua un push-forward [TODO e' giusto?] sulle coordinate z. In formule,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \to \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{R}, \qquad \frac{\partial}{\partial \phi} \to \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{F}$$

dove

$$\left.\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right|^{R,F} = lim_{|h|\to 0} \frac{g(z+|h|e^{i\phi_{R,F}}) - g(z)}{|h|e^{i\phi_{R,F}}}$$

Con $\phi_R = \varphi$ e $\phi_F = \varphi + \pi/2$. Quindi per funzioni non olomorfe

$$L_z = z \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{F}$$

e usando la relazione

$$\cos\theta = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \to \frac{1}{1-\cos\theta} = \rho^2 + 1$$

si trova

$$L_{\pm} = \mp \frac{z^2}{|z|^2} \frac{R}{2} \left[(|z|^2+1) \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{R} \pm (|z|^2-1) \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{F} \right] \tag{5}$$

Autovalori di F_m

Fatte queste premesse,

$$L_z F_m =$$

$$m z_N^{m-1} f(\rho^2) + z_N^m \frac{\partial f}{\partial(\rho^2)} lim_{|h|\to 0} \frac{(z+|h|e^{i(\varphi+\pi/2)})(\bar{z}+|h|e^{-i(\varphi+\pi/2)}) - z\bar{z}}{|h|e^{i(\varphi+\pi/2)}}$$

$$= m z_N^{m-1} f(\rho^2) + \frac{\partial f}{\partial(\rho^2)}(-\bar{z}+\bar{z}) = m z_N^{m-1} f(\rho^2)$$

Forma di Y_l^l

Poiché, come visto, $\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|^{F} f(\rho^2) = 0$,

$$L_+ F_m = -z^2 \frac{\partial z^m}{\partial z} f(\rho^2) - z^m \frac{z^2}{|z|^2}(|z|^2+1)\frac{R}{2} \left.\frac{\partial z\bar{z}}{\partial z}\right|^{R} \frac{\partial f}{\partial \rho^2}$$

e, dato che $\left.\frac{\partial z\bar{z}}{\partial z}\right|^{R} = 2\bar{z}$ (per la definizione data),

$$L_+ F_m = -z^{m+1} \left[m f + R(|z|^2+1)\frac{\partial f}{\partial \rho^2} \right]$$

Imponendo l'annullamento della parentesi si trova un'equazione differenziale che ha soluzione

$$f_m(\rho^2) = f_0 \left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho_0^2 + 1} \right)^{-m/R}$$

Definendo

$$Y_l^m = z^m f_0 \left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho_0^2 + 1} \right)^{-m/R}$$

si vede infine che

$$L_+ Y_l^m = 0 \iff m = l$$

Da 5 si trova subito che

$$L_- Y_l^l = -2lz Y_l^l$$