Capitolo 1

Descrizione del modello

1.1 Caso senza covariate

Dati e modello

Siano $\{\underline{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, ..., n\}$ un insieme di n punti spaziali in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e siano $\{t_j; j = 1, ..., m\}$ un insieme di m istanti temporali in un intervallo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. In questi punti ed istanti osserviamo i dati: siano quindi z_{ij} i valori della variabile reale nel punto $\underline{p}_i$ al tempo t_j.

Supponiamo che le osservazioni $\{z_{ij}; i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}$ provengano da una funzione $f(\underline{p}, t)$, con l'aggiunta di un rumore:

$$z_{ij} = f(\underline{p}_i, t_j) + \epsilon_{ij} \qquad i = 1, ..., n \quad j = 1, ..., m \quad , \tag{1.1}$$

dove $\{\epsilon_{ij}; i = 1, ..., n; j = 1, ...m\}$ sono residui indipendenti identicamente distribuiti di media nulla e varianza σ^2.

L'obiettivo del modello è stimare la funzione spazio-temporale $f(\underline{p}, t)$ dai dati, minimizzando il seguente funzionale:

$$\begin{aligned} J_{\underline{\lambda}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \big(z_{ij} - f(\underline{p}_i, t_j)\big)^2 \; + \\ + \; \lambda_S \int_0^T \int_\Omega \Big(\triangle f\Big)^2 d\Omega \; dt \; + \; \lambda_T \int_\Omega \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Big)^2 dt \; d\Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Il primo termine di $J_{\underline{\lambda}}(f)$ considera la minimizzazione dello scarto quadratico tra i dati e la funzione f calcolata nei corrispondenti punti spaziali e istanti temporali. Tuttavia in aggiunta il funzionale presenta due termini di penalizzazione, che nel processo di minimizzazione cercano di rendere liscia e regolare la funzione rispettivamente in spazio e tempo.

Il termine della penalizzazione in spazio comprende l'integrale sull'intervallo $[0, T]$ dell'integrale sul dominio spaziale Ω del quadrato del laplaciano della funzione f. Come è noto, il laplaciano esprime la curvatura della funzione, ed è quindi una misura di quanto la funzione è liscia in spazio. L'analogo significato in tempo è rappresentato dalla derivata seconda in t, che nell'ultimo termine della penalizzazione è integrata prima sull'intervallo temporale $[0, T]$, e in seguito sul dominio spaziale Ω.

I due termini λ_S e λ_T sono rispettivamente i pesi della penalizzazione in spazio e in tempo. La scelta di $\underline{\lambda}$, vettore $\begin{bmatrix} \lambda_S \\ \lambda_T \end{bmatrix}$ deve essere molto accurata. Infatti, valori troppo bassi per i due termini causerebbero una stima vicina all'interpolazione dei dati (poiché darebbero più peso al termine con gli scarti quadratici), mentre valori troppo elevati porterebbero ad avere una funzione f fin troppo liscia e quindi distante dai dati. Per questo motivo sarà dato ampio spazio alla scelta di $\underline{\lambda}$.

Spazio funzionale per f

Sviluppo in funzioni di base della funzione f

Per poter risolvere il problema numericamente è necessaria una riduzione finito-dimensionale della funzione f. Rappresentiamo quindi f con un opportuno sviluppo di basi separate in spazio e tempo.

Sia $\{\varphi_i(\underline{p}); i = 1, ..., N\}$ un insieme di N basi spaziali definite sul dominio Ω e $\{\psi_j(t); j = 1, ..., M\}$ un insieme di basi temporali definite sull'intervallo $[0, T]$. Da questi due insiemi di basi marginali in spazio e tempo si costruisce la funzione f, con tutti i prodotti incrociati disponibili tra spazio e tempo:

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \ \varphi_i(\underline{p}) \ \psi_j(t). \tag{1.3}$$

Nel codice implementato sono disponibili elementi finiti in spazio e splines in tempo, perciò il dominio Ω sarà sostituito dalla sua triangolazione Ω_T.

La funzione $f(\underline{p}, t)$ può essere identificata semplicemente con i valori dei coefficienti $\{c_{ij}; i = 1, ..., N \ j = 1, ..., M\}$. Quindi l'obiettivo della stima sarà il vettore contenente questi coefficienti:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{2M} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

e si dimostrerà che sarà soluzione di un sistema lineare.

Discretizzazione dei termini di penalizzazione di J

Dopo aver fissato le basi dello sviluppo di f, è necessario riscrivere in forma discreta anche il funzionale J in (1.2). La parte più complessa da trattare di J è rappresentata dai due termini di penalizzazione in spazio e tempo, che si semplifica considerando la seguente discretizzazione:

$$\lambda_S \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_T} \Big(\triangle(\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\varphi_i)\Big)^2 d\Omega + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M}(c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2}\Big)^2 dt, \tag{1.5}$$

La scelta di questa discretizzazione è giustificata dalla separabilità delle due penalizzazioni in J e dalla forma di f nell'espressione in funzioni di base in 1.3. Infatti f è ricavata combinando le basi dei modelli marginali in spazio e in tempo, e si può ricavare che:

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{j=1}^{M} m_{S_j}(\underline{p})\psi(t) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(\underline{p}) m_{T_i}(t)$$

dove

$$m_{S_j}(\underline{p}) = \sum_{i=0}^{N} c_{ij}\varphi_i(\underline{p}) \qquad \forall j = 1...M$$

$$m_{T_i}(t) = \sum_{j=0}^{M} cij\psi_j(t) \qquad \forall i = 1...N$$

cioè da f si possono ricavare due insiemi di funzioni marginali fissando rispettivamente l'indice in tempo o in spazio.

Inoltre lo smoothing marginale spaziale ha il suo termine di penalizzazione (l'integrale su Ω_T del laplaciano, che indicheremo con J_S) così come lo smoothing in tempo (l'integrale su $[0, T]$ della derivata seconda, che indicheremo con J_T). Tali modelli marginali sono già stati trattati con le stesse basi dei casi che saranno analizzati in seguito (elementi finiti in spazio e B-spline in tempo) e sono validi, quindi per discretizzare J secondo quanto indicato in 1.5 basta applicare J_S e J_T alle restrizioni marginali risultanti dallo sviluppo di f:

$$\begin{aligned}
&\lambda_S \sum_{j=1}^{M} J_S(m_{S_j}(\underline{p})) + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} J_T(m_{T_i}(t)) = \\
&\quad = \lambda_S \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_T} \Big(\triangle(\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\varphi_i)\Big)^2 d\Omega + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M}(c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2}\Big)^2 dt
\end{aligned}$$

Dopo questa costruzione (analoga a quella riportata in [2]) non resta che calcolare i due termini con gli integrali in 1.5.

L'integrale $\int_{\Omega_T}(\triangle(\sum_{i=1}^N c_{ij}\varphi_i))^2 d\Omega$ implica la creazione della matrice S_S, il cui (k,l)-mo elemento è:

$$S_{S_{k,l}} = \int_\Omega \triangle\varphi_k \triangle\varphi_l \quad k = 1, ..., n \ \ l = 1, ..., n.$$

Per avere una forma utile a livello computazionale di questa espressione è necessario considerare $g = \triangle\varphi_l$ e un insieme di funzioni test v, discretizzate in spazio con le stesse funzioni di base di f:

$$g = \sum_{i=1}^N g_i\varphi_i$$

$$v = \sum_{i=1}^N v_i\varphi_i \qquad v \in \mathbb{R}^N$$

e si ha:

$$S_{S_{k,l}} = \int_\Omega \triangle\varphi_k g \ , \qquad \int_\Omega gv = \int_\Omega \triangle\varphi_l v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

Usando la formula di Green ed eliminando gli integrali di bordo grazie alle condizioni di Neumann, si ricava:

$$S_{S_{k,l}} = -\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla g \ , \qquad \int_\Omega gv = -\int_\Omega \nabla\varphi_l \nabla v.$$

Di conseguenza, se si definiscono i vettori con le funzioni di base in spazio e i vettori con le loro derivate parziali

$$\underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_x = \begin{bmatrix} \partial\varphi_1/\partial x \\ \partial\varphi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\varphi_n/\partial x \end{bmatrix} \qquad \underline{\varphi}_x = \begin{bmatrix} \partial\varphi_1/\partial y \\ \partial\varphi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\varphi_n/\partial y \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

e le matrici

$$R_0 = \int_\Omega \underline{\varphi}\underline{\varphi}^T$$

$$R_1 = \int_\Omega (\underline{\varphi}_x \underline{\varphi}_x^T + \underline{\varphi}_y \underline{\varphi}_y^T).$$

si ha, per l'arbitrarietà di v:

$$S_S = -R_1 \underline{g} \ , \qquad R_0 \underline{g} = -R_1$$

dove $\underline{g}$ contiene i coefficienti dell'espansione in base di g. Quindi in conclusione

$$S_S = R_1 R_0^{-1} R_1.$$

Per passare all'integrale, però, occorre considerare anche i coefficienti del vettore $\underline{c}_j = \begin{bmatrix} c_{1j} & c_{2j} & \dots & c_{Nj} \end{bmatrix}^T$ e si ha:

$$\int_{\Omega_T} \Big(\triangle (\sum_{i=1}^{N} c_{ij} \varphi_i) \Big)^2 d\Omega = \underline{c}_j^T S_S \underline{c}_j.$$

Riguardo al termine $\int_0^T (\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M} (c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2})^2 dt$, la semplificazione è molto più semplice, poichè se si considera la matrice

$$S_T = \begin{bmatrix} \int_0^T \psi_1''(t)\psi_1''(t)dt & \int_0^T \psi_1''(t)\psi_2''(t)dt & \dots & \int_0^T \psi_1''(t)\psi_M''(t)dt \\ \int_0^T \psi_2''(t)\psi_1''(t)dt & \int_0^T \psi_2''(t)\psi_2''(t)dt & \dots & \int_0^T \psi_2''(t)\psi_M''(t)dt \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_0^T \psi_M''(t)\psi_1''(t)dt & \int_0^T \psi_M''(t)\psi_2''(t)dt & \dots & \int_0^T \psi_M''(t)\psi_M''(t)dt \end{bmatrix}.$$

e il vettore $\underline{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{iM} \end{bmatrix}^T$ allora si ha:

$$\int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M} (c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2} \Big)^2 dt = \underline{c}_i^T S_T \underline{c}_i$$

Ora che sono state ricavate le forme quadratiche associate ai due integrali, per completare lo studio di 1.5 è necessario solamente introdurre opportuni prodotti di Kronacker e l'uso del vettore $\underline{c}$:

$$\begin{aligned} \lambda_S \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_T} \Big(\triangle (\sum_{i=1}^{N} c_{ij} \varphi_i) \Big)^2 d\Omega + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M} (c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2} \Big)^2 dt = \\ = \lambda_S \ \underline{c}^T (I_M \otimes S_S) \ \underline{c} \ + \ \lambda_T \ \underline{c}^T (S_T \otimes I_N) \ \underline{c} \end{aligned}$$

dove I_M and I_N sono matrici identità di dimensioni $M \times M$ e $N \times N$ rispettivamente. Di conseguenza se

$$S = \lambda_S \ (S_S \otimes I_M) \ + \ \lambda_T \ (I_N \otimes S_T).$$

allora

$$\lambda_S \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_T} \Big(\triangle (\sum_{i=1}^{N} c_{ij} \varphi_i) \Big)^2 d\Omega + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M} (c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2} \Big)^2 dt = \underline{c}^T S \underline{c}$$

Soluzione

Per avere una forma matriciale della versione discreta di $J_{\underline{\lambda}}(f)$, cioè di

$$J_{\underline{\lambda}}^{D}(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(z_{ij} - f(\underline{p}_i, t_j)\big)^2 +$$
$$+ \lambda_S \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_T} \Big(\triangle(\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\varphi_i)\Big)^2 d\Omega + \lambda_T \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Big(\frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{M}(c_{ij}\psi_j)}{\partial t^2}\Big)^2 dt$$

occorre definire il vettore $\underline{z}$ dei valori osservati

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2m} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

e le matrici Φ (con le valutazioni delle basi spaziali nei punti $\{\underline{p}_i; i = 1, ..., n\}$) e Ψ (con le valutazioni delle basi temporali $\{t_j; j = 1, ..., m\}$):

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(\underline{p}_1) & \varphi_2(\underline{p}_1) & \dots & \varphi_N(\underline{p}_1) \\ \varphi_1(\underline{p}_2) & \varphi_2(\underline{p}_2) & \dots & \varphi_N(\underline{p}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(\underline{p}_n) & \varphi_2(\underline{p}_n) & \dots & \varphi_N(\underline{p}_n) \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1(t_1) & \psi_2(t_1) & \dots & \psi_M(t_1) \\ \psi_1(t_2) & \psi_2(t_2) & \dots & \psi_M(t_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_1(t_n) & \psi_2(t_m) & \dots & \psi_M(t_m) \end{bmatrix}$$

Sia Π il prodotto di Kronecker Φ e Ψ:

$$\Pi = \Phi \otimes \Psi.$$

Allora

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ \varphi_i(\underline{p})\ \psi_j(t) = \Pi\underline{c}.$$

Quindi si avrà:

$$J_{\underline{\lambda}}^{D}(f) = (\underline{z} - \Pi\underline{c})^T(\underline{z} - \Pi\underline{c}) + \underline{c}^t S\underline{c} \tag{1.8}$$

Una volta che è stata ricavata questa forma, per risolvere il problema di minimo è sufficiente derivare questa espressione

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}} J = -2\Pi^T \underline{z} + 2(\Pi^T \Pi + S)\underline{c} \quad ,$$

porre uguale a zero

$$(\Pi^T \Pi + S)\underline{\hat{c}} = \Pi^T \underline{z}$$

e si ha in conclusione

$$\underline{\hat{c}} = (\Pi^T \Pi + S)^{-1} \Pi^T \underline{z}.$$

Grazie a questo risultato, è anche possibile ricavare i valori stimati della funzione f nei punti dati:

$$\underline{\hat{z}} = \Pi \underline{\hat{c}} = \Pi(\Pi^T \Pi + S)^{-1} \Pi^T \underline{z} = H \underline{z}$$

dove H rappresenta l'analogo della *hat matrix* del classico modello di regressione in questo caso.

Proprietà statistiche di $\underline{\hat{c}}$

Il modello di partenza indicato in 1.1 può essere scritto anche in forma matriciale

$$\underline{z} = \Pi \underline{c} + \underline{\epsilon}. \tag{1.9}$$

A causa delle proprietà statistiche di $\underline{\epsilon}$

$$\mathbb{E}[\underline{\epsilon}] = \underline{0} \qquad \mathrm{Var}[\underline{\epsilon}] = \sigma^2 I_{nm}$$

sia ha

$$\mathbb{E}[\underline{z}] = \Pi \underline{c} \qquad \mathrm{Var}[\underline{\hat{c}}] = \sigma^2 I_{nm}$$

e quindi è immediato ricavare per lo stimatore $\underline{\hat{c}}$ (grazie alle proprietà simmetria di S):

$$\mathbb{E}[\underline{\hat{c}}] = (\Pi^T \Pi + S)^{-1} \Pi^T \Pi \underline{c} \qquad \mathrm{Var}[\underline{z}] = \sigma^2 (\Pi^T \Pi + S)^{-1} \Pi^T \Pi (\Pi^T \Pi + S)^{-1}.$$

Non è stata ipotizzata la gaussianità per $\underline{\epsilon}$, ma se fosse ipotizzata anche $\underline{\hat{c}}$ sarebbe gaussiano. Grazie a questa ulteriore ipotesi sarebbe possibile elaborare (con una data significatività) una regione di confidenza per $\underline{\hat{c}}$ e quindi una banda di confidenza per la funzione stimata f.

1.2 Caso con covariate

Il modello si estende facilmente se si prevede che il dato possa essere influenzato da covariate. Il modello di (1.1) diventa:

$$z_{ij} = \underline{w}_{ij}^T \, \underline{\beta} \; + \; f(\underline{p}_i, t_j) \; + \; \epsilon_{ij} \qquad i = 1, ..., n \;\; j = 1, ..., m \quad , \tag{1.10}$$

dove $\underline{w}_{ij}$ è il vettore delle p covariate associate a z_{ij} e $\underline{\beta}$ è il vettore dei coefficienti di regressione. Di conseguenza, il funzionale discreto di 1.8 diventa:

$$J = (\underline{z} - W\underline{\beta} - \Pi\underline{c})^T(\underline{z} - W\underline{\beta} - \Pi\underline{c}) + \underline{c}^t S\underline{c} \ ,$$

dove W è la matrice $nm \times p$ con i vettori $\{\underline{w}_{ij}; i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}$.

Per ricavare la soluzione occorre derivare questa espressione rispetto a $\underline{\beta}$ e $\underline{c}$:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} J = -2W^T\underline{z} + 2W^T\Pi\underline{c} + 2W^TW\underline{\beta} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}} J = -2\Pi^T\underline{z} + 2\Pi^TW\underline{\beta} + 2(\Pi^T\Pi + S)\underline{c} \quad .$$

Imponendo che le derivate siano uguali a zero si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} W^TW\hat{\underline{\beta}} = W^T(\underline{z} - \Pi\hat{\underline{c}}) \\ (\Pi^T\Pi + S)\hat{\underline{c}} = \Pi^T(\underline{z} - W\hat{\underline{\beta}}) \end{cases} .$$

che ricordano le equazioni usate per la regressione e per il modello senza covariate, con la differenza che in questo caso a $\underline{z}$ è sottratto in entrambi i casi la parte spiegata dal termine di modello a cui non si riferiscono $\hat{\underline{\beta}}$ e $\hat{\underline{c}}$ rispettivamente.

A questo punto si possono ricavare le soluzioni. Si ha:

$$\hat{\underline{c}} = [\Pi^T\Pi + S + \Pi^TW(W^TW)^{-1}W^T\Pi]^{-1}\Pi^T[I - W(W^TW)^{-1}W^T]\underline{z} = AQ\underline{z}$$

con $A = [\Pi^T\Pi + S + \Pi^TW(W^TW)^{-1}W^T\Pi]^{-1}\Pi^T$ e $Q = [I - W(W^TW)^{-1}W^T]$, matrice molto importante nel caso di regressione lineare, poiché proietta il vettore dei dati nel sottospazio ortogonale allo spazio generato dalle colonne della matrice disegno, ricavando così il vettore dei residui. Questa matrice si ritrova anche in questo caso, ed è ancora valide le sue proprietà:

- Q è idempotente, cioè $QQ = Q$;
- Q è simmetrica;
- a causa del fatto che proietta nel sottospazio ortogonale di Col(W), QW risulta essere la matrice nulla di opportune dimensioni.

Infine, la stima di $\hat{\underline{\beta}}$ si ricava dalla stima ottenuta per $\hat{\underline{c}}$:

$$(W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi AQ)\underline{z}$$

In modo analogo al caso senza covariate, è necessario ricavare anche per questo caso la *hat matrix*:

$$\hat{\underline{z}} = \Pi\hat{\underline{c}} + W\hat{\underline{\beta}} = [\Pi AQ + W(W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi AQ)]\underline{z} = H\underline{z}.$$

Proprietà statistiche di $\underline{\hat{c}}$ e $\underline{\hat{\beta}}$

Anche in questo caso è possibile ricavare valore atteso e varianza degli stimatori ottenuti, ed è utile in quanto consente di verificare la significatività delle covariate. Per farlo però, è necessario avere la forma matriciale del modello indicato in 1.10:

$$\underline{z} = \Pi\underline{c} + W\underline{\beta} + \underline{\epsilon}. \tag{1.11}$$

Di nuovo si ha

$$\mathbb{E}[\underline{\epsilon}] = \underline{0} \qquad \text{Var}[\underline{\epsilon}] = \sigma^2 I_{nm}$$

e di conseguenza

$$\mathbb{E}[\underline{z}] = \Pi\underline{c} + W\underline{\beta} \qquad \text{Var}[\underline{z}] = \sigma^2 I_{nm}.$$

Grazie a ciò e alle proprietà ricavate per la matrice Q è possibile ricavare che:

$$\mathbb{E}[\underline{\hat{c}}] = AQ\Pi\underline{c} \qquad \text{Var}[\underline{\hat{c}}] = \sigma^2 AQA^T.$$

Per $\underline{\hat{\beta}}$ i calcoli sono più complessi, ma si semplificano grazie alle proprietà indicate in precedenza per la matrice Q. Si ritrova:

$$\mathbb{E}[\underline{\hat{\beta}}] = \underline{\beta} + (W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi A\Pi)\underline{c}$$

$$\text{Var}[\underline{\hat{\beta}}] = \sigma^2(W^TW)^{-1} + \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi AQA^T\Pi^TW(W^TW)^{-1}.$$

Come nel caso senza covariate, anche ora si potrebbe stimare la gaussianità degli stimatori se fosse ipotizzata per $\underline{\epsilon}$. Questo permette di elaborare intervalli di confidenza per le componenti di $\underline{\beta}$ e di verificare la signiificatività delle covariate.

1.3 Scelta di e stima di σ^2

Parametri di smoothing

I parametri λ_S e λ_T hanno un ruolo rilevante nella stima della soluzione, poichè scelgono quanto peso dare allo smoothing della funzione in spazio e tempo. Quindi è necessario che siano fissati accuratamente prima della stima della soluzione.

Secondo quanto indicato in [2], è indicato il valore di $\underline{\lambda}$ che realizza il minimo dell'indice

$$GCV(\underline{\lambda}) = \frac{nm}{nm - \text{tr}(H)} D(\underline{\hat{c}})$$

dove H è la *hat matrix*, ovvero la matrice che is the hat matrix that maps the vector of observed values $\underline{z}$ to the vector of fitted values $\underline{\hat{z}}$:

$$H = \Pi(\Pi^T\Pi + S)^{-1}\Pi^T,$$

and D is the deviance of the model:

$$D(\underline{\hat{c}}) = (\underline{z} - \underline{\hat{z}})^T(\underline{z} - \underline{\hat{z}}) = (\underline{z} - H\underline{\hat{c}})^T(\underline{z} - H\underline{\hat{c}}).$$

Bibliografia

[1] Nicole H. Augustin, Verena M. Trenkel, Simon N. Wood, Pascal Lorance, *Space-time modelling of blue ling for fisheries stock management*, Environmetrics, 24, 109–119, (2013)

[2] Giampiero Marra, David L. Miller, Luca Zanin, *Modelling the spatio-temporal distribution of the incidence of resident foreign population*, Statistica Neerlandica, 66, 133–160, (2012)

[3] Laura M. Sangalli, James O. Ramsay, Timothy O. Ramsay, *Spatial spline regression models*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 75, 681–703, (2013)

[4] Simon N. Wood, Mark W. Bravington, Sharon L. Hedley, *Soap film smoothing*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 70, 931–955, (2008)