

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Studi in Ingegneria Matematica



Tesi di Laurea Magistrale

TITOLO

Relatore: Prof. Laura SANGALLI
Correlatore: ?

Tesi di Laurea di:
Gabriele Mazza Matr. 798794

Anno Accademico 2013-2014

Sommario

Il presente lavoro di tesi illustra il modello statistico *Spatio-Temporal Regression model with PDE penalization* (STR-PDE) per l'analisi funzionale di dati distribuiti in un dominio spaziale e in un intervallo temporale, estendendo il caso puramente spaziale proposto in [6]. Il modello ipotizza che i dati possano essere rappresentati dalla somma di una funzione spazio-temporale e di un eventuale termine di covariate. I risultati analitici hanno portato alla creazione di un codice R, con cui il modello ha potuto essere testato nel caso noto del dominio a forma di C descritto in [5] e confrontato con alcune tecniche già esistenti. L'applicazione studiata riguarda l'analisi della produzione di rifiuti urbani pro capite nella provincia di Venezia tra il 1997 e il 2011, con un'attenzione particolare agli effetti legati al turismo.

Abstract

The present work of thesis describes the statistical model *Spatio-Temporal Regression model with PDE penalization* (STR-PDE) for the functional analysis of data distributed over a spatial domain and a temporal interval, extending the case purely spatial proposed in [6]. The model assumes that the data could be represented by the sum of a function of space and time and a possible term of covariates. The analytical results led to the creation of a R code, with which the model could be tested in the known case of the C-shaped domain described in [5] and compared with some existing techniques. The application studied concerns the analysis of urban waste production per capita in Venice province between 1997 and 2011, with a particular attention to the effects related to tourism.

Ringraziamenti

da fare

Elenco delle figure	iv
Elenco delle tabelle	v
Introduzione	1
1 Panoramica sui modelli già esistenti	3
2 Presentazione del modello STR-PDE	5
2.1 Caso senza covariate	5
2.1.1 Dati e modello	5
2.1.2 Definizione delle funzioni di base per $f(\underline{p}, t)$	6
2.1.3 Funzionale di penalizzazione $J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t))$	7
2.1.4 Modello ideale	8
2.1.5 Soluzione del problema di stima	13
2.1.6 Proprietà statistiche di \hat{c}	15
2.2 Caso con covariate	15
2.2.1 Proprietà statistiche di \hat{c} e $\hat{\beta}$	16
2.3 Stima di σ^2 e scelta dei parametri λ_S e λ_T	17
2.3.1 Stima di σ^2	17
2.3.2 Parametri λ_S e λ_T	17
3 Applicazione al dominio a forma di C	19
3.1 Triangolazione e istanti temporali	20
3.2 Caso senza covariata	21
3.2.1 Ricerca del miglior $\underline{\lambda}$	21
3.2.2 Risultati	21
3.2.3 Analisi dei residui	23
3.3 Caso con covariata	24

3.3.1	Generazione della covariata e ricerca del miglior λ	24
3.3.2	Risultati	25
3.3.3	Analisi dei residui e test d'ipotesi per β	27
4	Confronto con altri metodi	29
4.1	Caso senza covariata	31
4.2	Caso con covariata	33
5	Analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia	35
5.1	L'inclusione dell'effetto del turismo	36
5.2	Trattamento del dominio	36
5.2.1	Regression splines	37
5.2.2	Scelte particolari tra i comuni	39
5.2.3	Triangolazione del dominio	39
5.3	Analisi preliminare dei dati	40
5.4	Applicazione del modello senza covariata	43
5.4.1	Ricerca del miglior λ	43
5.4.2	Risultati	44
5.4.3	Analisi dei residui	47
5.5	Applicazione del modello con covariata	47
5.5.1	Ricerca del miglior λ	47
5.5.2	Risultati	48
5.5.3	Analisi dei residui	51
6	Conclusioni e sviluppi futuri	53

Elenco delle figure

3.1	Funzione spaziale $g(\underline{p})$	19
3.2	Triangolazione del dominio a forma di C	20
3.3	Stime della funzione $f(\underline{p}, t)$ ad alcuni istanti di tempo, caso senza covariata	22
3.4	Evoluzione temporale in alcuni nodi della triangolazione, caso senza covariata	23
3.5	Scatterplot dei residui, caso senza covariata	24
3.6	Stime della funzione $f(\underline{p}, t)$ ad alcuni istanti di tempo, caso con covariata	26
3.7	Evoluzione temporale in alcuni nodi della triangolazione, caso con covariata	27
3.8	Scatterplot dei residui, caso con covariata	28
3.9	QQplot dei residui, caso con covariata	28
4.1	Confronto tra i metodi, caso senza covariata	31
4.2	Per alcuni istanti di tempo, funzione test $f(\underline{p}, t)$ reale, dati simulati, stime ottenute rispettivamente con kriging spazio-temporale, GAMM con soap film smoothing, GAMM con thin plate splines e stima con STR-PDE nel caso senza covariata.	32
4.3	Confronto tra i metodi, caso con covariata	33
4.4	Per alcuni istanti di tempo, funzione test $f(\underline{p}, t)$ reale, dati simulati, stime ottenute rispettivamente con GAMM con soap film smoothing, GAMM con thin plate splines e stima con STR-PDE nel caso con covariata.	34
5.1	Poligoni disponibili nel pacchetto <i>raster</i>	37

5.2	Smoothing con <i>Regression Splines</i> cubiche per il primo poligono dell'entroterra della provincia di Venezia	38
5.3	Frontiera e punti spaziali per la provincia di Venezia	39
5.4	Triangolazione della provincia di Venezia	40
5.5	Bubbleplot delle misurazioni della produzione di rifiuti urbani pro capite ogni due anni dal 1997 al 2011.	41
5.6	Bubbleplot dei posti letto pro capite ogni due anni dal 1997 al 2011.	42
5.7	Stima della funzione spazio-temporale della produzione dei rifiuti nella provincia di Venezia a tempi fissati dal 1997 al 2011, caso senza covariata.	45
5.8	Stima della produzione dei rifiuti pro capite in alcuni comuni, caso senza covariata.	46
5.9	Scatterplot dei residui, caso senza covariata	47
5.10	Stima della funzione spazio-temporale della produzione dei rifiuti nella provincia di Venezia a tempi fissati dal 1997 al 2011, con covariata.	49
5.11	Stima della parte funzionale della produzione dei rifiuti pro capite in alcuni comuni, con covariata.	50
5.12	Scatterplot dei residui, caso con covariata	51
5.13	QQplot dei residui, caso con covariata	52

Elenco delle tabelle

3.1	Analisi di GCV(λ) per il dominio a forma di C, caso senza covariata	21
3.2	Analisi di GCV(λ) per il dominio a forma di C, caso con covariata	25
5.1	Analisi di GCV(λ) per la provincia di Venezia, caso senza covariata	44
5.2	Analisi di GCV(λ) per la provincia di Venezia, caso con covariata	48

Introduzione

Il presente lavoro di tesi illustra il modello statistico *Spatio-Temporal Regression model with PDE penalization* (STR-PDE) per l’analisi funzionale di dati distribuiti in spazio e tempo. Quanto fatto può essere considerato un’estensione dei modelli proposti in [6] che studiano la possibilità di costruire una stima funzionale per dati distribuiti su un dominio spaziale attraverso l’approssimazione in basi di elementi finiti. Il modello STR-PDE, invece, sviluppa una tecnica analoga permettendo la variazione temporale alla stima funzionale precedente. Di conseguenza può essere considerato un buon strumento per lo studio di fenomeni varianti in spazio e in tempo. Dalla modellizzazione matematica è stato sviluppato un algoritmo e il codice R per il calcolo della soluzione numerica della stima.

Il lavoro è motivato dalla ricerca di un buon metodo di analisi di un dataset contenente le misurazioni della produzione dei rifiuti urbani pro capite nei comuni della provincia di Venezia tra il 1997 e il 2011. I dati sono stati raccolti ed elaborati dall’Agenzia Regionale per la Prevenzione e Protezione Ambientale del Veneto (Arpav) e sono disponibili sul sito di Open Data Veneto¹ per la consultazione e il trattamento. Le misurazioni contenute nel dataset in realtà riguardano tutto il Veneto, ma per semplicità computazionale e per l’elevato interesse riguardo la laguna veneta sarà analizzata solo la provincia di Venezia. Il modello STR-PDE permette di stimare l’andamento della produzione dei rifiuti su tutta la regione e ad ogni istante di tempo nell’intervallo considerato, garantendo una chiara visualizzazione del fenomeno.

Il lavoro di tesi sarà strutturato come segue. Nel Capitolo 1 è riportato un excursus sui metodi simili già esistenti in letteratura. Nel Capitolo 2 è presentata la costruzione del modello matematico STR-PDE. Nel Capitolo

¹<http://dati.veneto.it/dataset/produzione-annua-di-rifiuti-urbani-totale-e-pro-capite-1997-2011>

3 si hanno i primi risultati, derivanti dall'applicazione del modello e del codice R al caso del dominio a forma di C descritto in [5] e [7], per il quale è possibile valutare la bontà delle stime ottenute grazie alla perfetta conoscenza del fenomeno reale in ogni punto e in ogni istante. Nel capitolo 4 il modello STR-PDE è paragonato ad altri metodi già esistenti per il confronto delle stime ottenute. Nel Capitolo 5 si ha l'applicazione allo studio della produzione dei rifiuti nella provincia di Venezia e infine, nel Capitolo 6, sono raccolte le conclusioni e i possibili sviluppi futuri riguardanti miglioramenti del lavoro.

CAPITOLO 1

Panoramica sui modelli già esistenti

L'obiettivo del modello che sarà presentato in seguito è la rappresentazione funzionale di dati distribuiti in spazio e tempo. La funzione, però, non può essere identificata solo dalla minimizzazione degli scarti quadratici tra valori osservati e stimati, ma il processo di stima deve tener conto anche della regolarità della funzione. Quindi il modello STR-PDE si inserisce anche nello studio di tecniche di smoothing di dati funzionali, che prevedono la penalizzazione di opportune derivate della funzione stimata. Sono già disponibili alcune pubblicazioni riguardante l'analisi di dati funzionali con smoothing ed è possibile evidenziare similarità o contrasti con ognuna di esse.

Come già accennato nell'introduzione, il lavoro si propone di essere un'estensione al caso tempo-variante di quanto fatto in [6]. In questa pubblicazione si ipotizza che i dati siano distribuiti su un dominio limitato e che possano essere descritti da una funzione con l'aggiunta di rumore:

$$z_i = f(\underline{p}_i) + \varepsilon_i \quad \forall i \in 1 \dots n$$

dove \underline{p}_i è il vettore delle coordinate. Estendere ciò al caso tempo-variante significa aggiungere ad f anche la dipendenza temporale e studiare dati che abbiano anche un'informazione legata al tempo, appartenente ad un intervallo fissato. L'approccio seguito, però, sarà differente sotto alcuni aspetti. Per poter stimare la funzione solo spaziale in [6] era posto un funzionale di penalizzazione da minimizzare con la somma di un termine di scarti quadratici tra dati e valori stimati dal modello e di un integrale di opportune derivate della funzione (utile ad avere una stima più o meno liscia). Il problema di minimo era ridotto ad un problema variazionale che, per poter essere risolto computazionalmente, necessitava della riduzione

ad una combinazione lineare di opportune funzioni di base per la funzione da stimare. Quindi la possibilità di avere una soluzione era dovuta al passaggio da una formulazione complessa esatta ad una più semplice (solitamente risolvibile tramite un sistema lineare) e approssimata, ammettendo che la funzione potesse appartenere ad uno spazio finito-dimensionale. Nell'approccio seguito in questo lavoro, come si potrà vedere in seguito, non sarà così. Tuttavia l'articolo è stato da ispirazione per molte cose: la modellizzazione elementi finiti come basi in spazio, la scelta di penalizzare il laplaciano, l'uso di alcune matrici (come R_0 e R_1 che si potranno vedere nel corso della spiegazione del modello nel Capitolo 2) derivano dalla volontà di estendere il caso puramente spaziale.

Anche in [1] e [4] sono disponibili metodi per l'analisi di dati distribuiti in spazio e tempo. Questi lavori, però, si basano su modelli additivi generalizzati (GAMM), cioè mirano a spiegare una funzione del valore atteso della risposta tramite uno o più termini funzionali. Quanto proposto, quindi, rappresenta una costruzione più complessa di quanto è proposto in questa tesi, in cui si studia una sola funzione di risposta e non si fa uso di modelli generalizzati. Inoltre, la tecnica proposta dagli autori ipotizza già da subito che la funzione possa essere estesa come sviluppo di funzioni di base. Questo può essere considerato come il maggior punto di incontro con questi articoli, poiché non sarà creato un problema esatto da approssimare solo alla fine della costruzione del modello, ma sarà imposta già da subito una rappresentazione finito-dimensionale.

CAPITOLO 2

Presentazione del modello STR-PDE

In questo capitolo viene descritto nel dettaglio il modello STR-PDE per l'analisi di dati distribuiti in spazio e tempo ed è calcolata la soluzione al problema di stima.

2.1 Caso senza covariate

2.1.1 Dati e modello

Siano $\{\underline{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ un insieme di n punti spaziali in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e siano $\{t_j; j = 1, \dots, m\}$ un insieme di m istanti temporali in un intervallo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. In questi punti ed istanti osserviamo i dati: siano quindi z_{ij} i valori della variabile reale nel punto \underline{p}_i al tempo t_j .

Sarebbe possibile trattare i dati come provenienti da funzioni tempovarianti in ognuno dei punti spaziali considerati, cioè ipotizzare che le osservazioni $\{z_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ provengano da una funzione $z_i(t)$ valutata all'istante t_j . Questa marginalizzazione può analogamente essere eseguita in spazio, supponendo che per ogni istante di tempo esista una funzione variante in spazio definita su Ω che genera i dati. Tuttavia in questa analisi non si studiano questi modelli marginali, ma si suppone che le osservazioni $\{z_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ siano generate da un campo campo spazio-temporale con l'aggiunta di rumore:

$$z_{ij} = f(\underline{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m , \quad (2.1)$$

dove $\{\varepsilon_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ sono residui indipendenti identicamente distribuiti di media nulla e varianza σ^2 . L'obiettivo del modello

STR-PDE sarà la stima della funzione $f(\underline{p}, t)$ dalle nm osservazioni a disposizione, minimizzando un funzionale $J_{\lambda}(f(\underline{p}, t))$ con la somma degli scarti quadratici tra le osservazioni e valori stimati e termini di penalizzazione delle derivate per la regolarità della funzione separati in spazio e tempo.

2.1.2 Definizione delle funzioni di base per $f(\underline{p}, t)$

Dall'analisi della letteratura già disponibile per modelli simili, anche se solo spaziali, si può dedurre che non è possibile dare una stima della funzione se essa non risulta espressa in una espansione di opportune funzioni di base. Infatti l'infinita possibilità di variazione di una funzione in un qualsiasi spazio funzionale non renderebbe possibile una stima computazionale del risultato. L'approccio scelto per la costruzione di $f(\underline{p}, t)$ si basa sulla generalizzazione delle espansioni in funzione di base dei casi puramente spaziali o temporali.

Siano

$$\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\} \subset H^2([T_1, T_2])$$

un insieme di M funzioni di base definite sull'intervallo temporale $[T_1, T_2]$ e

$$\{\psi_l(\underline{p}); l = 1, \dots, N\} \subset H^1(\Omega)$$

in insieme di N funzioni di base definite sul dominio spaziale Ω . Con le combinazioni lineari

$$\sum_{k=1}^M a_k \varphi_k(t) \quad \sum_{l=1}^N b_l \psi_l(\underline{p})$$

è possibile costruire, rispettivamente, funzioni varianti soltanto in tempo e in spazio. La funzione $f(\underline{p}, t)$ nasce ipotizzando che i coefficienti costanti delle espansioni in base precedenti possano variare secondo la variabile che non è espressa dalle funzioni di base:

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{k=1}^M a_k(\underline{p}) \varphi_k(t) \tag{2.2}$$

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{l=1}^N b_l(t) \psi_l(\underline{p}) . \tag{2.3}$$

Si ha quindi che $\{a_k(\underline{p}); k = 1, \dots, M\}$ sono i coefficienti spazio-varianti dell'espansione in basi di tempo e $\{b_l(t); l = 1, \dots, N\}$ sono i coefficienti tempo-varianti dell'espansione in basi spaziali. In questa costruzione la funzione $f(\underline{p}, t)$ possiede entrambe queste rappresentazioni.

Sono state ricavate due espressioni equivalenti per f ma, come si potrà notare in seguito, questo è coerente e sarà ricavata un'espressione più

specificata. Per il momento occorre soltanto aggiungere condizioni per i coefficienti appena introdotti, che saranno necessarie per la costruzione del funzionale di penalizzazione $J_{\underline{\Lambda}}(\underline{f}(\underline{p}, t))$:

$$a_k(\underline{p}) \in H_{n_0}^2(\Omega) \quad \forall k = 1, \dots, M$$

e

$$b_l(t) \in H^2([T_1, T_2]) \quad \forall l = 1, \dots, N,$$

dove $H_{n_0}^2(\Omega) = \{h \in H^2(\Omega) | \partial_\nu h = 0 \text{ su } \partial\Omega\}$, spazio incluso in $H^2(\Omega)$ che garantisce alle funzioni $a_k(\underline{p})$ di avere condizioni di Neumann alla frontiera.

2.1.3 Funzionale di penalizzazione $J_{\underline{\Lambda}}(\underline{f}(\underline{p}, t))$

Per poter stimare $f(\underline{p}, t)$ si introduce la minimizzazione di un funzionale non formato solamente dagli scarti quadratici tra le osservazioni e le stime negli nm punti disponibili. Sono inclusi in esso anche altri due termini, che derivano dalla penalizzazione di opportune derivate in spazio e tempo per poter garantire regolarità alla funzione.

Analogamente a quanto fatto il 2.1.2, per costruire tale funzionale si considerano inanzitutto i problemi marginali in spazio e tempo.

Per una funzione spazio-variante sono disponibili più alternative per penalizzare la regolarità, ma in questo caso si considera il quadrato della norma L^2 del laplaciano (dove per laplaciano si intenderà, da ora in avanti, rispetto alle variabili in spazio \underline{p}). La stessa scelta è stata fatta in altre pubblicazioni come [5], [6] e [7]. Quindi se $g(\underline{p}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ è una funzione spazio-variante, allora si può definire la penalizzazione della regolarità in spazio tramite:

$$J_S(g(\underline{p})) = \int_{\Omega} (\Delta g(\underline{p}))^2 d\underline{p}.$$

Analogamente in tempo si avrà la penalizzazione del quadrato della norma L^2 della derivata seconda. Se $h(t) : [T_1, T_2] \mapsto \mathbb{R}$, allora si avrà

$$J_T(h(t)) = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt.$$

Grazie alle ipotesi di regolarità introdotte in sez. 2.1.2 tali penalizzazioni possono essere applicate ai coefficienti degli sviluppi delle eq. 2.2 e 2.3. Per questo motivo si definisce:

$$\begin{aligned} J_{\underline{\Lambda}}(\underline{f}(\underline{p}, t)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(p_i, t_j))^2 + \\ &\quad + \lambda_S \sum_{k=1}^M J_S(a_k(\underline{p})) + \lambda_T \sum_{l=1}^N J_T(b_l(t)), \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t)) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(\underline{p}_i, t_j))^2 + \\ & + \lambda_S \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} (\Delta(a_k(\underline{p})))^2 d\underline{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt, \quad (2.4) \end{aligned}$$

dove $\lambda_S > 0$ e $\lambda_T > 0$ sono i parametri di smoothing che stabiliscono il peso della penalizzazione della regolarità della funzione rispettivamente in spazio e tempo. Se troppo alti, la funzione stimata tenderà ad essere quasi liscia e distante dai dati. Al contrario, se troppo bassi, la funzione stimata sarà quasi l'interpolazione dei dati e per nulla liscia. Sebbene quest'ultimo caso si avvicini molto ai valori osservati, non può essere considerato buono perché solitamente attribuisce alla stima troppe variazioni repentine e quindi non è adatta a descrivere il fenomeno.

2.1.4 Modello ideale

Il funzionale di penalizzazione riportato in eq. 2.4 è il risultato di una costruzione associata alla generalizzazione delle penalizzazioni marginali in spazio e tempo, ma idealmente si può ricondurre al seguente:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\underline{\lambda}}(f) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(\underline{p}_i, t_j))^2 + \\ & + \lambda_S \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} (\Delta f(\underline{p}, t))^2 d\underline{p} dt + \lambda_T \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 f(\underline{p}, t)}{\partial t^2} \right)^2 dt d\underline{p}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

dove J_S e J_T sono applicati direttamente alla funzione $f(\underline{p}, t)$ e sono integrati, rispettivamente, sull'intervallo spaziale e il dominio spaziale.

Se si applica la forma di $f(\underline{p}, t)$ dell'eq. 2.2 nel termine di penalizzazione del laplaciano in spazio, allora si può ritrovare:

$$\begin{aligned}
 \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(\Delta f(\underline{p}, t) \right)^2 d\underline{p} dt &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(\Delta \left(\sum_{k=1}^M a_k(\underline{p}) \varphi_k(t) \right) \right)^2 d\underline{p} dt \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^M \Delta a_k(\underline{p}) \varphi_k(t) \right)^2 d\underline{p} dt \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^M \Delta a_k(\underline{p}) \varphi_k(t) \right) \left(\sum_{h=1}^M \Delta a_h(\underline{p}) \varphi_h(t) \right) d\underline{p} dt \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^M \Delta a_k(\underline{p}) \Delta a_h(\underline{p}) \varphi_k(t) \varphi_h(t) \right) d\underline{p} dt \\
 &= \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^M \int_{\Omega} \Delta a_k(\underline{p}) \Delta a_h(\underline{p}) d\underline{p} \int_{T_1}^{T_2} \varphi_k(t) \varphi_h(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Questo termine è equivalente a quello proposto in 2.4 se le basi temporali siano ortonormali, poiché in tal caso l'ultimo integrale in eq. 2.6 sarebbe 1 se $k = h$ e 0 altrimenti.

Allo stesso modo, se si sostituisce la forma di $f(\underline{p}, t)$ dell'eq. 2.3 nella penalizzazione ideale dell'eq. 2.5 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 f(\underline{p}, t)}{\partial t^2} \right)^2 dt d\underline{p} &= \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 \sum_{l=1}^N b_l(t) \psi_l(\underline{p})}{\partial t^2} \right)^2 dt d\underline{p} \\
 &= \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \psi_l(\underline{p}) \right)^2 dt d\underline{p} \\
 &= \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \psi_l(\underline{p}) \right) \left(\sum_{h=1}^N \frac{\partial^2 b_h(t)}{\partial t^2} \psi_h(\underline{p}) \right) dt d\underline{p} \\
 &= \int_{\Omega} \int_{T_1}^{T_2} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{h=1}^N \frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \frac{\partial^2 b_h(t)}{\partial t^2} \psi_l(\underline{p}) \psi_h(\underline{p}) \right) dt d\underline{p} \\
 &= \sum_{l=1}^N \sum_{h=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \frac{\partial^2 b_h(t)}{\partial t^2} dt \int_{\Omega} \psi_l(\underline{p}) \psi_h(\underline{p}) d\underline{p}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

La stessa osservazione del caso precedente vale anche ora: se le basi in spazio sono ortonormali, si ritrova la penalizzazione proposta in 2.4.

In questo lavoro di tesi, quindi, è proposto un modello che risulterà essere computazionalmente semplice ma non perfettamente equivalente a questo modello ideale. Le basi proposte, infatti, non sono ortonormali. Comunque sia, gli insiemi di basi che saranno adattati sono sparsi, cioè i

termini $\int_{T_1}^{T_2} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt$ e $\int_{\Omega} \psi_l(\underline{p}) \psi_k(\underline{p}) d\underline{p}$ sono diversi da zero solo per poche coppie di indici.

Discretizzazione dei termini di penalizzazione delle derivate

Così come è scritto in 2.4, il funzionale $J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t))$ non è ancora adatto ad essere trattato computazionalmente. Per poter avere una forma che renda semplice la stima, $f(\underline{p}, t)$ e $J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t))$ saranno nuovamente discretizzati.

Il primo caso da trattare è l'integrale del laplaciano dei coefficienti spazio-varianti dell'eq. 2.2 in modo analogo a quanto fatto in [6]. Fissato k , l'integrale

$$\int_{\Omega} (\Delta(a_k(\underline{p})))^2 d\underline{p}$$

può essere semplificato introducendo la funzione $g_k(\underline{p})$ come segue:

$$\int_{\Omega} g_k(\underline{p}) v(\underline{p}) d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(a_k(\underline{p})) v(\underline{p}) d\Omega \quad \forall v(\underline{p}) \in L^2(\Omega). \quad (2.8)$$

Non è difficile verificare che, se $g_k(\underline{p})$ rispetta l'equazione precedente, per l'arbitrarietà di v allora:

$$\int_{\Omega} (\Delta(a_k(\underline{p})))^2 d\underline{p} = \int_{\Omega} \Delta(a_k(\underline{p})) g_k(\underline{p}) d\underline{p}. \quad (2.9)$$

Applicando la formula di Green e tenendo conto delle condizioni di Neumann per $a_k(\underline{p})$, si possono semplificare gli integrali come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(a_k(\underline{p})) g_k(\underline{p}) d\underline{p} &= - \int_{\Omega} \nabla a_k(\underline{p}) \nabla g_k(\underline{p}) d\underline{p} \\ \int_{\Omega} \Delta(a_k(\underline{p})) v(\underline{p}) d\underline{p} &= - \int_{\Omega} \nabla a_k(\underline{p}) \nabla v(\underline{p}) d\underline{p}. \end{aligned}$$

Per poter calcolare analiticamente questi integrali è necessario introdurre l'uso delle basi spaziali $\{\psi_l(\underline{p}); l = 1, \dots, N\}$ per le funzioni a_k , g_k e v . Siano quindi:

$$a_k(\underline{p}) = \sum_{l=1}^N c_{lk} \psi_l(\underline{p}) \quad g_k(\underline{p}) = \sum_{l=1}^N g_{lk} \psi_l(\underline{p}) \quad v(\underline{p}) = \sum_{l=1}^N v_l \psi_l(\underline{p}).$$

Per semplificare le notazioni saranno usati i seguenti vettori:

$$\underline{c}_k = \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \dots \\ c_{Nk} \end{bmatrix} \quad \underline{g}_k = \begin{bmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \\ \dots \\ g_{Nk} \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_N \end{bmatrix}$$

e gli analoghi per le funzioni di base e le loro derivate parziali:

$$\underline{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\psi}_x = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial x \\ \partial\psi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\psi_n/\partial x \end{bmatrix} \quad \underline{\psi}_y = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial y \\ \partial\psi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\psi_n/\partial y \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Mediante l'uso delle funzioni di base e di ciò che è stato ottenuto dall'applicazione della formula di Green, le relazioni 2.8 e 2.9 diventano:

$$g_k \left(\int_{\Omega} \underline{\psi} \underline{\psi}^T \right) \underline{v} = -\underline{c}_k \left(\int_{\Omega} (\underline{\psi}_x \underline{\psi}_x^T + \underline{\psi}_y \underline{\psi}_y^T) \right) \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N$$

$$\int_{\Omega} \left(\Delta(a_k(\underline{p})) \right)^2 d\underline{p} = -\underline{c}_k \left(\int_{\Omega} (\underline{\psi}_x \underline{\psi}_x^T + \underline{\psi}_y \underline{\psi}_y^T) \right) \underline{g}_k,$$

quindi, se si introducono le matrici (analogamente a quanto fatto in [6])

$$R_0 = \int_{\Omega} \underline{\psi} \underline{\psi}^T$$

$$R_1 = \int_{\Omega} (\underline{\psi}_x \underline{\psi}_x^T + \underline{\psi}_y \underline{\psi}_y^T)$$

si trova, per l'arbitrarietà di \underline{v} :

$$\int_{\Omega} \left(\Delta(a_k(\underline{p})) \right)^2 d\underline{p} = \underline{c}_k^T R_1 R_0^{-1} R_1 \underline{c}_k = \underline{c}_k^T P_S \underline{c}_k \quad (2.11)$$

Si noti che la matrice P_S non dipende da k e può essere considerata la stessa per tutte le funzioni $a_k(\underline{p})$. Inoltre è simmetrica, poiché R_0 e R_1 lo sono.

Grazie all'introduzione della discretizzazione in basi spaziali

$$a_k(\underline{p}) = \sum_{l=1}^N c_{lk} \psi_l(\underline{p})$$

è stato possibile ridurre la penalizzazione con l'integrale del quadrato di $\Delta a_k(\underline{p})$ alla valutazione di una forma quadratica che non cambia con le funzioni a_k . Si ha anche un'altra conseguenza: per l'equivalenza ipotizzata tra le espressioni di $f(\underline{p}, t)$ in 2.2 e 2.3, allora è necessario che i coefficienti tempo-varianti dell'espansione in basi spaziali assumano la seguente forma:

$$b_l(t) = \sum_{k=1}^M c_{lk} \varphi_k(t).$$

Si ritrova quindi anche in questo caso l'espansione in funzioni di base.

Non resta altro che discretizzare anche $\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt$. Dopo aver introdotto l'uso delle funzioni di base, se si definisce

$$P_T = \begin{bmatrix} \int_{T_1}^{T_2} \varphi_1''(t) \varphi_1''(t) dt & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_1''(t) \varphi_2''(t) dt & \dots & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_1''(t) \varphi_M''(t) dt \\ \int_{T_1}^{T_2} \varphi_2''(t) \varphi_1''(t) dt & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_2''(t) \varphi_2''(t) dt & \dots & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_2''(t) \varphi_M''(t) dt \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_{T_1}^{T_2} \varphi_M''(t) \varphi_1''(t) dt & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_M''(t) \varphi_2''(t) dt & \dots & \int_{T_1}^{T_2} \varphi_M''(t) \varphi_M''(t) dt \end{bmatrix}$$

e il vettore

$$\underline{c}_l = \begin{bmatrix} c_{l1} \\ c_{l2} \\ \vdots \\ c_{lM} \end{bmatrix},$$

si ritrova:

$$\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt = \underline{c}_l^T P_T \underline{c}_l.$$

Anche la matrice P_T è simmetrica.

In conclusione si può notare come la parte di penalizzazione per la regolarizzazione di f in 2.4 sia diventata un'unica forma quadratica. Per mostrarlo, si introduce il vettore

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{2M} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix}$$

e la matrice P , definita con opportuni prodotti di Kronecker come segue:

$$P = \lambda_S (P_S \otimes I_M) + \lambda_T (I_N \otimes P_T),$$

dove I_M and I_N sono matrici identità di dimensioni $M \times M$ e $N \times N$ rispettivamente. Allora si avrà:

$$\begin{aligned} \lambda_S \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} \left(\Delta(a_k(\underline{p})) \right)^2 d\underline{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt \\ \lambda_S \sum_{k=1}^M \underline{c}_k^T P_S \underline{c}_k + \lambda_T \sum_{l=1}^N \underline{c}_l^T P_T \underline{c}_l = \underline{c}^T P \underline{c}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

A causa della simmetria dei termini con cui è costruita, anche la matrice P è simmetrica.

2.1.5 Soluzione del problema di stima

Grazie a quanto ricavato nel paragrafo precedente, la parte di penalizzazione delle derivate del funzionale $J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t))$ si è ridotta ad un'unica forma quadratica. Ma questo è stato possibile grazie all'espressione in funzione di base per i coefficienti delle eq. 2.2 e 2.3:

$$a_k(\underline{p}) = \sum_{l=1}^N c_{lk} \psi_l(\underline{p}) \quad b_l(t) = \sum_{k=1}^M c_{lk} \varphi_k(t).$$

Essendo 2.2 e 2.3 equivalenti, allora in definitiva:

$$f(\underline{p}, t) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M c_{lk} \psi_l(\underline{p}) \varphi_k(t), \quad (2.13)$$

cioè la funzione da stimare è la combinazione lineare di tutti i possibili prodotti incrociati tra le funzioni di base in tempo e spazio. Questa formulazione può essere considerata la definitiva per la funzione $f(\underline{p}, t)$ e permette di poter identificare la funzione con il vettore dei suoi coefficienti \underline{c} . Inoltre ne consegue che è possibile scrivere in modo più agevole il funzionale $J_{\underline{\lambda}}(f(\underline{p}, t))$.

Siano definiti il vettore dei valori osservati

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2m} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

e le matrici Ψ (con le valutazioni delle basi spaziali nei punti $\{\underline{p}_i; i = 1, \dots, n\}$) e Φ (con le valutazioni delle basi temporali $\{t_j; j = 1, \dots, m\}$):

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1(\underline{p}_1) & \psi_2(\underline{p}_1) & \dots & \psi_N(\underline{p}_1) \\ \psi_1(\underline{p}_2) & \psi_2(\underline{p}_2) & \dots & \psi_N(\underline{p}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_1(\underline{p}_n) & \psi_2(\underline{p}_n) & \dots & \psi_N(\underline{p}_n) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_M(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_M(t_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \dots & \varphi_M(t_m) \end{bmatrix}.$$

Le ultime due matrici hanno una grossa utilità se moltiplicate tra loro con prodotto di Kronecker, poichè se

$$B = \Psi \otimes \Phi ,$$

allora si può facilmente dire che:

$$\begin{bmatrix} f(\underline{p}_1, t_1) \\ \vdots \\ f(\underline{p}_1, t_m) \\ f(\underline{p}_2, t_1) \\ \vdots \\ f(\underline{p}_2, t_m) \\ \vdots \\ f(\underline{p}_n, t_m) \end{bmatrix} = B\underline{c} .$$

Quindi è possibile dare una forma definitiva al funzionale di penalizzazione:

$$J_{\underline{\lambda}}(\underline{c}) = (\underline{z} - B\underline{c})^T (\underline{z} - B\underline{c}) + \underline{c}^T P \underline{c} , \quad (2.15)$$

e per trovare la stima della funzione $f(p, t)$ sarà sufficiente ricavare il vettore dei coefficienti \underline{c} risolvendo il problema di minimo:

$$\hat{\underline{c}} = \arg \min_{c \in \mathbb{R}^{NM}} J_{\underline{\lambda}}(c) .$$

Grazie alla formulazione ottenuta in 2.15 basta derivare per ottenere la soluzione al problema di stima. Grazie alla simmetria di P , si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}} J = -2B^T \underline{z} + 2(B^T B + P)\underline{c} ,$$

che posta uguale a zero porta all'equazione

$$(B^T B + P)\underline{c} = B^T \underline{z}$$

e in conclusione

$$\hat{\underline{c}} = (B^T B + P)^{-1} B^T \underline{z} .$$

Il problema di stima è stato risolto e la soluzione si ricava dalla risoluzione di un sistema lineare, seppur di grandi dimensioni (la matrice $B^T B + P$ ha dimensioni $NM \times NM$ e già dagli esempi si potranno notare dimensioni elevate).

L'ultimo elemento da definire è la *smoothing matrix* S , usata per conoscere i valori stimati dal modello direttamente da quelli osservati:

$$\hat{\underline{z}} = B\hat{\underline{c}} = B(B^T B + P)^{-1} B^T \underline{z} = S \underline{z} .$$

2.1.6 Proprietà statistiche di \hat{c}

Il modello di partenza indicato in 2.1 può essere scritto anche in forma matriciale

$$\underline{z} = B\underline{c} + \underline{\varepsilon}. \quad (2.16)$$

A causa delle proprietà statistiche di $\underline{\varepsilon}$

$$\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = \underline{0} \quad \text{Var}[\underline{\varepsilon}] = \sigma^2 I_{nm}$$

sia ha

$$\mathbb{E}[\underline{z}] = B\underline{c} \quad \text{Var}[\hat{c}] = \sigma^2 I_{nm}$$

e quindi è immediato ricavare per lo stimatore \hat{c} (grazie alle proprietà simmetria di P):

$$\mathbb{E}[\hat{c}] = (B^T B + P)^{-1} B^T B \underline{c} \quad \text{Var}[\hat{c}] = \sigma^2 (B^T B + P)^{-1} B^T B (B^T B + P)^{-1}.$$

Non è stata ipotizzata la gaussianità per $\underline{\varepsilon}$ ma se fosse ipotizzata anche \hat{c} sarebbe gaussiano. Attraverso questa ulteriore ipotesi sarebbe possibile elaborare (con una data significatività) una regione di confidenza per \hat{c} e quindi una banda di confidenza per la funzione stimata f .

2.2 Caso con covariate

Il modello si estende facilmente se si prevede che il dato possa essere influenzato da covariate. Il modello di (2.1) diventa:

$$z_{ij} = \underline{w}_{ij}^T \underline{\beta} + f(p_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.17)$$

dove \underline{w}_{ij} è il vettore delle p covariate associate a z_{ij} e $\underline{\beta}$ è il vettore dei coefficienti di regressione. Di conseguenza il funzionale discreto di 2.15 diventa:

$$J_A(\underline{c}) = (\underline{z} - W\underline{c} - B\underline{c})^T (\underline{z} - W\underline{c} - B\underline{c}) + \underline{c}^t S \underline{c},$$

dove W è la matrice $nm \times p$ con i vettori $\{\underline{w}_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$.

Per trovare la soluzione occorre derivare questa espressione rispetto a $\underline{\beta}$ e \underline{c} :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} J = -2W^T \underline{z} + 2W^T B \underline{c} + 2W^T W \underline{\beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}} J = -2B^T \underline{z} + 2B^T W \underline{\beta} + 2(B^T B + P)\underline{c}.$$

Imponendo che le derivate siano uguali a zero si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} W^T W \hat{\underline{\beta}} = W^T (\underline{z} - B \hat{\underline{c}}) \\ (B^T B + P) \hat{\underline{c}} = B^T (\underline{z} - W \hat{\underline{\beta}}) \end{cases}.$$

che ricordano le equazioni usate per la regressione e per il modello senza covariate, con la differenza che in questo caso a \underline{z} è sottratto, in entrambi i casi, la parte spiegata dal termine di modello a cui non si riferiscono $\hat{\beta}$ e \hat{c} rispettivamente.

A questo punto si possono ricavare le soluzioni. Si ha:

$$\hat{c} = [B^T B + P + B^T W(W^T W)^{-1} W^T B]^{-1} B^T [I - W(W^T W)^{-1} W^T] \underline{z} = A Q \underline{z}$$

con $A = [B^T B + P + B^T W(W^T W)^{-1} W^T B]^{-1} B^T$ e $Q = [I - W(W^T W)^{-1} W^T]$, matrice molto importante nel caso di regressione lineare, poiché essa proietta il vettore dei dati nel sottospazio ortogonale allo spazio generato dalle colonne della matrice disegno, ricavando così il vettore dei residui. Questa matrice si ritrova anche in questo caso, e sono valide le sue proprietà:

- Q è idempotente, cioè $QQ = Q$;
- Q è simmetrica;
- a causa del fatto che proietta nel sottospazio ortogonale di $\text{Col}(W)$, QW risulta essere la matrice nulla di opportune dimensioni.

Infine, la stima di $\hat{\beta}$ si ottiene dalla stima ottenuta per \hat{c} :

$$\hat{\beta} = (W^T W)^{-1} W^T (I - BAQ) \underline{z}$$

In modo analogo al caso senza covariate, è necessario ricavare anche per questo caso la *smoothing matrix*:

$$\hat{z} = B\hat{c} + W\hat{\beta} = [BAQ + W(W^T W)^{-1} W^T (I - BAQ)] \underline{z} = S \underline{z}.$$

2.2.1 Proprietà statistiche di \hat{c} e $\hat{\beta}$

Anche in questo caso è possibile calcolare valore atteso e varianza degli estimatori ottenuti, ed è utile in quanto consente di verificare la significatività delle covariate. Per farlo, però, è necessario avere la forma matriciale del modello indicato in 2.17:

$$\underline{z} = B\underline{c} + W\beta + \underline{\varepsilon}. \quad (2.18)$$

Di nuovo si ha

$$\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = 0 \quad \text{Var}[\underline{\varepsilon}] = \sigma^2 I_{nm}$$

e di conseguenza

$$\mathbb{E}[\underline{z}] = B\underline{c} + W\beta \quad \text{Var}[\underline{z}] = \sigma^2 I_{nm}.$$

Mediate questo risultato e le proprietà ricavate per la matrice Q è possibile ottenere che:

$$\mathbb{E}[\hat{c}] = AQB\underline{c} \quad \text{Var}[\hat{c}] = \sigma^2 AQA^T.$$

Per $\hat{\beta}$ i calcoli sono più complessi, ma si semplificano grazie alle proprietà indicate in precedenza per la matrice Q . Si ritrova:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \underline{\beta} + (W^T W)^{-1} W^T (I - BAB) \underline{c}$$

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 (W^T W)^{-1} + \sigma^2 (W^T W)^{-1} W^T B A Q A^T B^T W (W^T W)^{-1}.$$

Come nel caso senza covariate, anche ora si potrebbe stimare la gaussianità degli stimatori se fosse ipotizzata per ε . Questo permette di elaborare intervalli di confidenza per le componenti di $\underline{\beta}$ e di verificare la significatività delle covariate.

2.3 Stima di σ^2 e scelta dei parametri λ_S e λ_T

Quanto riportato di seguito è valido indipendentemente dal fatto che siano inserite nel modello le covariate, quindi per entrambi i modelli proposti in precedenza.

2.3.1 Stima di σ^2

Stimare la varianza dell'errore è necessario se si vuole fare inferenza sugli stimatori ed è molto semplice se si conoscono i gradi di libertà equivalenti del modello. Ma questi si ricavano dalla *smoothing matrix*:

$$\text{EDF} = \text{tr}(S).$$

Con questo valore si calcola la stima della varianza, usando i residui e il numero totale di dati:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nm - \text{tr}(S)} (\underline{z} - \hat{\underline{z}})^T (\underline{z} - \hat{\underline{z}})$$

2.3.2 Parametri λ_S e λ_T

I parametri λ_S e λ_T hanno un ruolo rilevante nella stima della soluzione, poiché scelgono quanto peso dare alla regolarità della funzione in spazio e tempo. Quindi è opportuno che siano fissati accuratamente prima della stima della soluzione.

Secondo quanto indicato in [4], la scelta corretta si ha con il valore di $\underline{\lambda}$ che realizza il minimo dell'indice di *generalized cross validation*

$$GCV(\underline{\lambda}) = \frac{nm}{nm - \text{tr}(S)} D(\hat{\underline{\beta}}),$$

dove D è la devianza del modello. Si ha:

$$D(\hat{\underline{\beta}}) = 2\sigma^2(l_{\text{sat}} - l(\hat{\underline{\beta}})),$$

dove l è la logverosimiglianza del modello, che si ipotizza gaussiano, valutata rispettivamente nel suo massimo (valore di saturazione) e in corrispondenza dei valori stimati. Non è difficile dimostrare che, sia nel caso con covariate che senza covariate, si ha:

$$D(\underline{\hat{c}}, \underline{\hat{\beta}}) = (\underline{z} - \underline{\hat{z}})^T (\underline{z} - \underline{\hat{z}})$$

Di conseguenza, il miglior $\underline{\lambda}$ può essere scelto come valore che minimizza

$$GCV(\underline{\lambda}) = \frac{nm}{nm - \text{tr}(S)} (\underline{z} - \underline{\hat{z}})^T (\underline{z} - \underline{\hat{z}}). \quad (2.19)$$

CAPITOLO 3

Applicazione al dominio a forma di C

Prima di applicare il modello allo studio della produzione di rifiuti nella provincia di Venezia sono state eseguite simulazioni su un caso noto e più semplice. Si è scelto di analizzare il dominio a forma di C e la corrispondente funzione spaziale $g(\underline{p})$ (riportata in fig. 3.1) descritti in ??, ??, ?? e nel pacchetto R *mgcv*. La funzione $g(\underline{p})$ è solo spaziale, quindi è stata introdotta una variazione temporale deformando con il coseno:

$$f(\underline{p}, t) = g(\underline{p}) \cos(t)$$

Su questo semplice caso sono stati eseguiti i primi tentativi per il modello STR-PDE sia senza covariate che con una covariata generata.

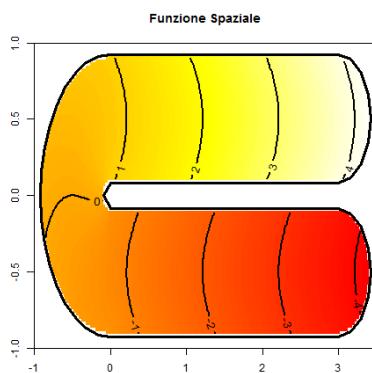


Figura 3.1: Funzione spaziale $g(\underline{p})$

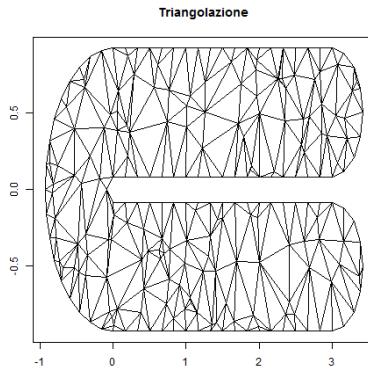


Figura 3.2: Triangolazione del dominio a forma di C

3.1 Triangolazione e istanti temporali

Nel dominio a forma di C non sono presenti punti spaziali definiti dalla natura del problema (come possono essere i comuni per la provincia di Venezia), quindi è stato necessario ricavarli. Sono stati generati casualmente 150 punti all'interno del rettangolo $(-1, +3.5) \times (-1, +1)$ e di questi sono stati considerati validi solo quelli che ricadevano all'interno del dominio. Non è stata usata la descrizione della frontiera presente in *mgcv*, ma una versione diversa che permette di avere punti anche nella parte rettilinea del bordo. In fig. 3.2 è riportata la triangolazione ottenuta grazie al pacchetto R *RTriangle*. Come basi in spazio sono stati usati gli elementi finiti lineari definiti su questa triangolazione. In tutti gli esempi che seguiranno sarà considerata questa descrizione del dominio, che è formata da 241 punti (pari anche al numero di basi spaziali N). Di questi, 108 sono di frontiera e i restanti 133 corrispondono agli n punti sui quali saranno disponibili i dati.

Come intervallo temporale di variazione dei dati è stato scelto $[0, 2\pi]$, per sfruttare la periodicità del coseno. All'interno di questo intervallo sono stati ricavati 9 istanti temporali equidistanti tra di loro, quindi uno ogni $\frac{\pi}{4}$. Si è scelto di fissare come basi in tempo le B-splines cubiche. Il numero di basi M è uguale al numero di istanti temporali a disposizione m , quindi 9.

3.2 Caso senza covariata

3.2.1 Ricerca del miglior $\underline{\lambda}$

Nei punti e negli istanti temporali disponibili i dati sono stati ricavati dalla funzione esatta con l'aggiunta del rumore:

$$z_{ij} = g(\underline{p}_i) \cos(t_j) + \varepsilon_{ij} \quad \forall i \in 1 \dots n, \forall j \in 1 \dots m$$

dove

$$\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 0.5^2) \quad \forall i \in 1 \dots n, \forall j \in 1 \dots m.$$

Per poter eseguire una analisi ottimale, come primo passo è necessario scegliere i valori per λ ottimizzando l'indice GCV($\underline{\lambda}$) come riportato in eq. 2.19. In queste analisi λ_S e λ_T sono sempre espressi in potenze di 10. Per trovare dei buoni valori per i parametri si procede per tentativi, creando due insiemi discreti di variazione per $\log_{10} \lambda_S$ e $\log_{10} \lambda_T$ e minimizzando sui $\underline{\lambda}$ corrispondenti al prodotto cartesiano tra di essi. Il procedimento viene iterato qualche volta (a causa dell'alto costo computazionale non è opportuno eseguire troppe iterazioni) rendendo la griglia sempre più fitta. In particolare, nel primo caso i valori sono distanziati di 1, poi (una volta che è possibile centrare gli intervalli in base al risultato precedente) di 0.25 e 0.125.

Intervalli per $\log_{10} \lambda_S$ e $\log_{10} \lambda_T$	Miglior valore
$\log_{10} \lambda_S \in \{-5, -4, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^0, 10^{-3})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-5, -4, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-1, -0.75, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-0.5}, 10^{-3.25})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-4, -3.75, \dots, -2\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-1, -0.875, \dots, +0\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-0.375}, 10^{-3.25})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-3.75, -3.625, \dots, -2.75\}$	

Tabella 3.1: Analisi di GCV($\underline{\lambda}$) per il dominio a forma di C, caso senza covariata

3.2.2 Risultati

L'analisi è stata eseguita con $\underline{\lambda} = (10^{-0.375}, 10^{-3.25})$ e la stima della funzione si è rivelata molto buona. In fig. 3.3 sono riportati i confronti tra funzione reale e stimata nei primi istanti di tempo (la scala di colori è stata resa uniforme tra tutti i grafici). Si può notare come la funzione stimata sia effettivamente molto simile a quella reale.

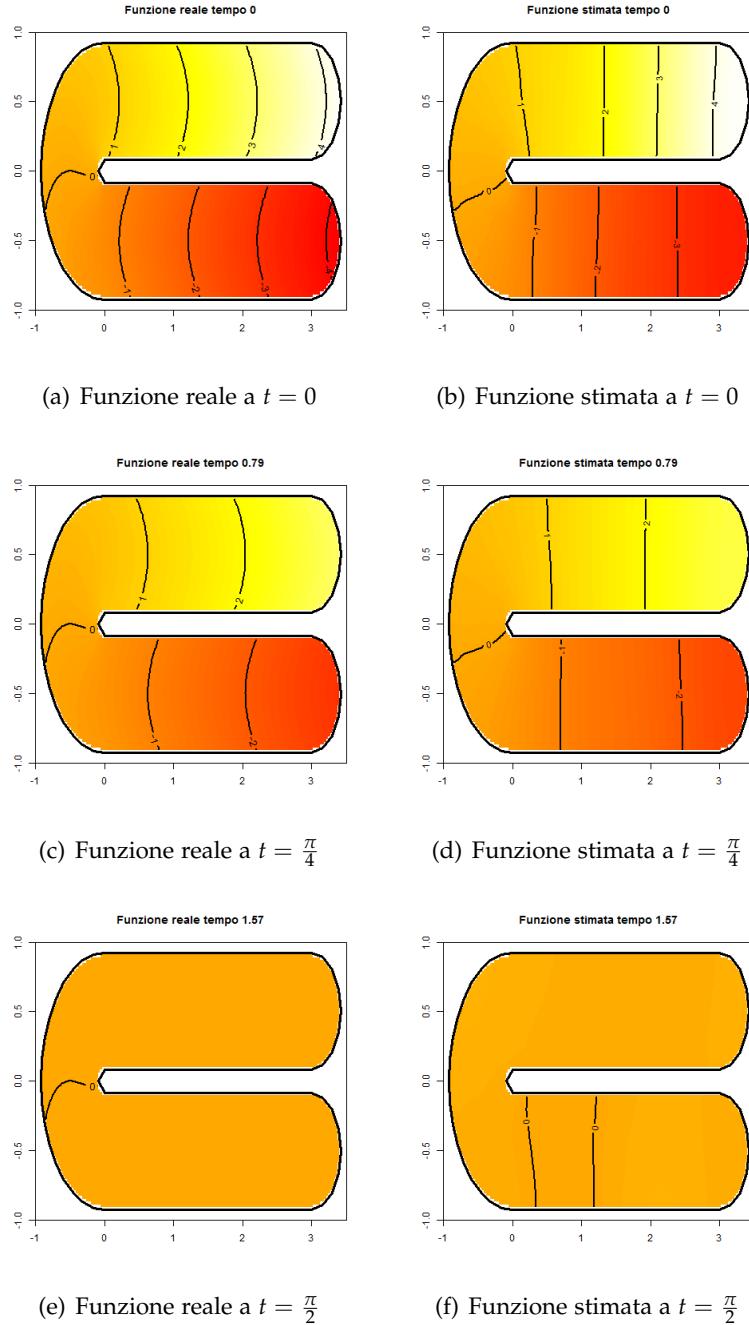


Figura 3.3: Stime della funzione $f(\underline{p}, t)$ ad alcuni istanti di tempo, caso senza covariata

In fig. 3.4 si ha il confronto dell'evoluzione temporale in alcuni nodi della triangolazione. Oltre alla curva stimata è tracciata la reale, che è una

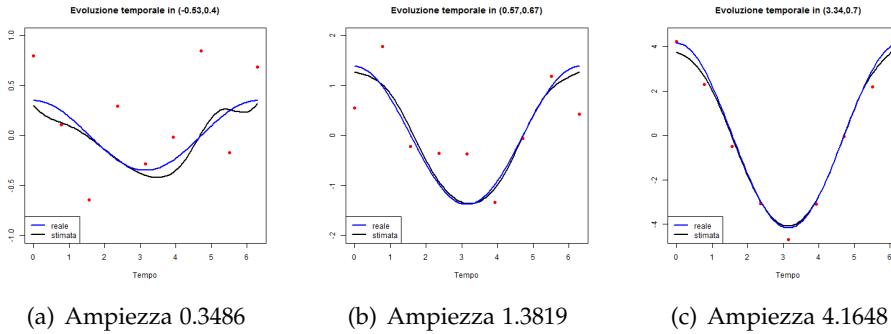


Figura 3.4: Evoluzione temporale in alcuni nodi della triangolazione, caso senza covariata

cosinusoide di ampiezza nota (grazie alla perfetta conoscenza di $g(p)$) riportata con i grafici. I punti rossi corrispondono al dato sporcato dal rumore. Tanto più è vicina a zero l'ampiezza della curva, tanto più il rumore influenza la stima poiché più rilevante (infatti, in fig. 3.3, le curve di livello della funzione stimata a $t = \frac{\pi}{2}$ sono le più distanti dalle reali). Tuttavia, anche nel caso con ampiezza vicina al valore massimo di $g(p)$ in fig. 3.4(c), la curva stimata non è una perfetta interpolazione dei dati e coglie il vero andamento temporale della funzione. Si può concludere quindi che la stima è molto buona, sebbene più confusa nella parte centrale del dominio a forma di C.

3.2.3 Analisi dei residui

Nella costruzione del modello spiegata nel dettaglio nel Capitolo 2 si ipotizza che il rumore aggiunto al dato funzionale sia generato da una variabile aleatoria di media nulla e varianza σ^2 . Quindi si ha l'ipotesi di omoschedasticità che deve essere verificata per validare i risultati ottenuti, analogamente a quanto si fa per i modelli di regressione lineare. In questo caso il processo di generazione dei dati è perfettamente noto e il rumore rispetta questa ipotesi poiché generato da una normale con parametri fissi. Tuttavia, per introdurre una prassi che deve essere rispettata quando si controllano i risultati di questo algoritmo, anche in questo caso in cui già a priori si ha la certezza della validità dell'ipotesi di omoschedasticità è opportuno eseguire l'analisi dei residui.

Ad ogni dato è possibile associare il residuo

$$e_{ij} = z_{ij} - \hat{z}_{ij}$$

che, tramite opportuni scatterplot, è impiegato nella verifica dell'ipotesi di omogeneità della varianza.

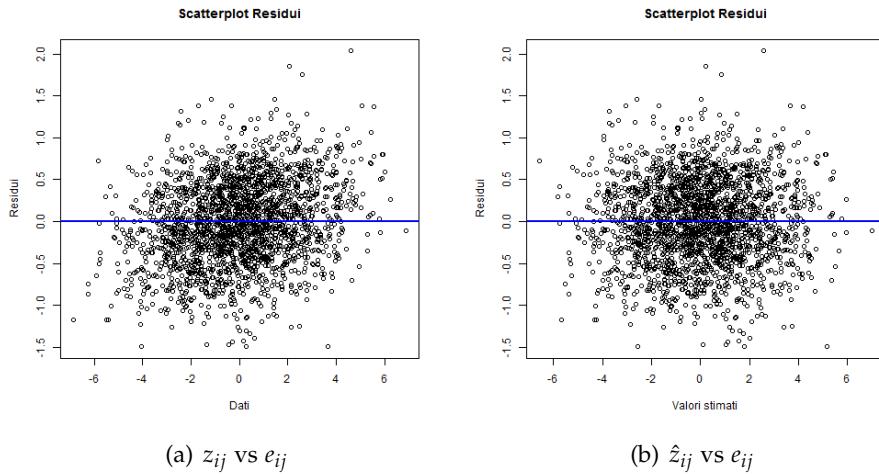


Figura 3.5: Scatterplot dei residui, caso senza covariata

Dall’analisi dei grafici in fig. 3.5 si può facilmente capire che non si ha una cattiva dispersione dei residui attorno allo zero. Quindi, come ci si aspettava, l’ipotesi di omoschedasticità può essere considerata valida.

Inoltre, il grafico in fig. 3.5(a) permette di evidenziare una delle particolarità dello smoothing associato all’algoritmo. I residui negativi più bassi sono in corrispondenza dei dati minori e, analogamente, i residui positivi più alti sono in corrispondenza dei dati maggiori. Questo è dovuto allo smoothing imposto nei massimi e nei minimi della funzione $f(\underline{p}, t)$: come si può notare in fig. 3.4(c) in questi punti si ha la maggior distanza tra la curva reale e quella stimata.

3.3 Caso con covariata

3.3.1 Generazione della covariata e ricerca del miglior λ

Nel problema della stima della funzione $f(\underline{p}, t) = g(\underline{p})\cos(t)$ non sono presenti covariate. Quindi per poter provare il modello in questo caso, è stato necessario generare valori da assumere come covariata in ogni punto spaziale ed istante temporale in cui si hanno le misurazioni della risposta.

In definitiva i dati sono così formati:

$$z_{ij} = g(\underline{p}_i) \cos(t_j) + \beta w_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \forall i \in 1 \dots n, \forall j \in 1 \dots m$$

dove covariata e rumore sono generate da due normali tra loro indipendenti:

$$w_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1) \quad \forall i \in 1 \dots n, \forall j \in 1 \dots m$$

$$\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 0.5^2) \quad \forall i \in 1 \dots n, \forall j \in 1 \dots m$$

e β è fissato a 1. Se il modello è buono, c'è da aspettarsi che la parte di funzione stimata senza covariata sia vicina a $f(p, t)$ e che $\hat{\beta}$ si avvicini a 1.

Anche in questo caso è necessaria una analisi preliminare per fissare i valori per λ ottimizzando l'indice GCV($\underline{\lambda}$), che nel caso con covariata si differenzia dal precedente solo per la forma della *smoothing matrix*. In tab. 3.2 sono riportati i risultati ricavati adattando lo stesso approccio del caso senza covariata.

Intervalli per $\log_{10} \lambda_S$ e $\log_{10} \lambda_T$	Miglior valore
$\log_{10} \lambda_S \in \{-5, -4, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^0, 10^{-4})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-5, -4, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-1, -0.75, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^{0.25}, 10^{-3.75})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-5, -4.75, \dots, -3\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-0.25, -0.125, \dots, +0.75\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-0.125}, 10^{-3.25})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-4.25, -4.125, \dots, -3.25\}$	

Tabella 3.2: Analisi di GCV($\underline{\lambda}$) per il dominio a forma di C, caso con covariata

Procedendo per tentativi, si può notare come i valori si sono rivelati molto simili al caso senza covariata riportato in 3.1, facendo pensare che la stima della funzione $f(p, t)$, cioè della parte non spiegata dalla covariata, possa essere molto vicina a quella stimata nel caso senza covariata e, quindi, a quella reale.

3.3.2 Risultati

Eseguendo l'analisi con $\underline{\lambda} = (10^{-0.125}, 10^{-3.25})$ questa ipotesi è confermata e si trova una buona stima della funzione. In fig. 3.6 si hanno i grafici dei primi istanti di tempo (si ricorda che la funzione tracciata non contiene la parte spiegata dalla covariata, ma solo la stima di $f(p, t)$).

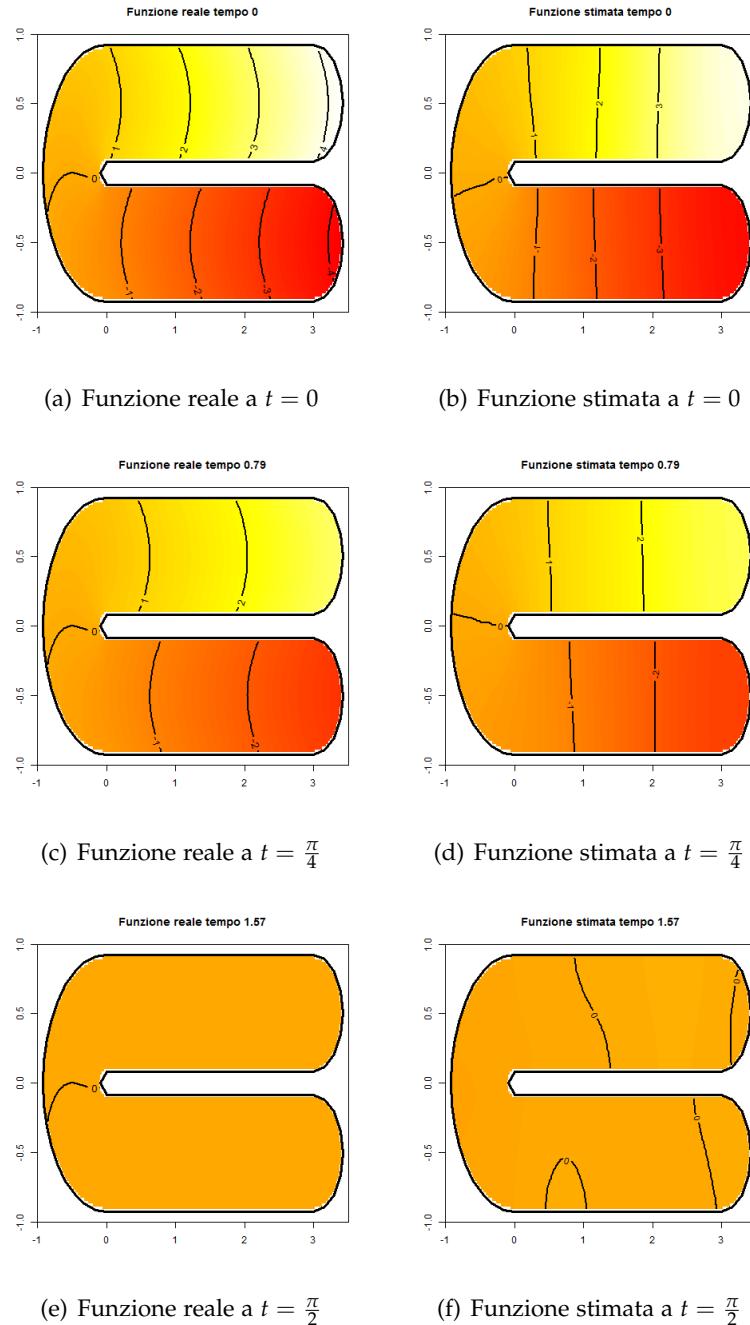


Figura 3.6: Stime della funzione $f(\underline{p}, t)$ ad alcuni istanti di tempo, caso con covariata

In fig. 3.7, analogamente a quanto fatto nel caso senza covariata, si hanno i grafici dell'evoluzione temporale della funzione in alcuni punti

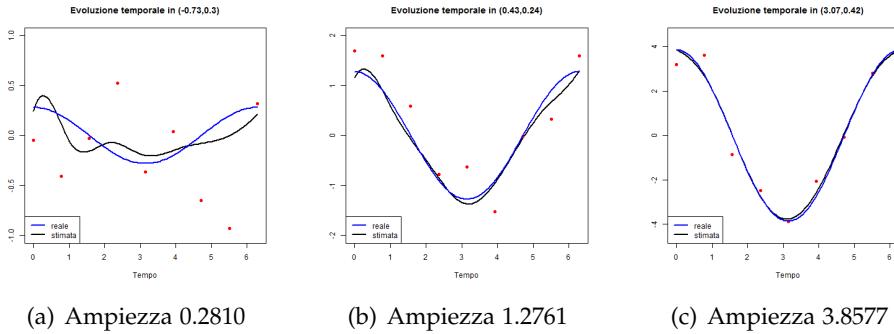


Figura 3.7: Evoluzione temporale in alcuni nodi della triangolazione, caso con covariata

fissati. I punti rossi tracciati corrispondono alla parte di dato senza il termine dovuto alla covariata. Le conclusioni sono le stesse del caso senza covariata: la stima è ben riuscita e la vera variazione temporale è stata colta dal modello. Tuttavia, avvicinandosi alla parte centrale del dominio a C sia una maggiore influenza del rumore.

Dai grafici precedenti si può concludere che la stima della parte funzionale della risposta sia effettivamente una buona approssimazione della reale. Tuttavia occorre verificare anche che il contributo delle covariata sia ben riconosciuto dal modello, e per questo basta controllare il valore stimato di β . Si ha:

$$\hat{\beta} \approx 1.005,$$

valore vicinissimo al reale.

3.3.3 Analisi dei residui e test d'ipotesi per β

Sarebbe interessante eseguire un test del tipo

$$\begin{cases} H_0 : \beta = \hat{\beta} \\ H_1 : \beta \neq \hat{\beta} \end{cases}$$

per poter controllare con una data significatività se il valore stimato corrisponde a quello reale. Tuttavia è necessario controllare prima le ipotesi del modello e verificare se è possibile attribuire la normalità ai residui. Analogamente a quanto fatto nel caso senza covariata, siamo già certi che tutte queste ipotesi siano valide per come sono stati costruiti i dati. Tuttavia, per completezza, è necessario eseguire l'analisi dei residui anche in questo caso.

Per quanto riguarda l'omoschedasticità, in fig. 3.8 si hanno gli scatterplot dei residui. Non si hanno problemi riguardo all'ipotesi di varian-

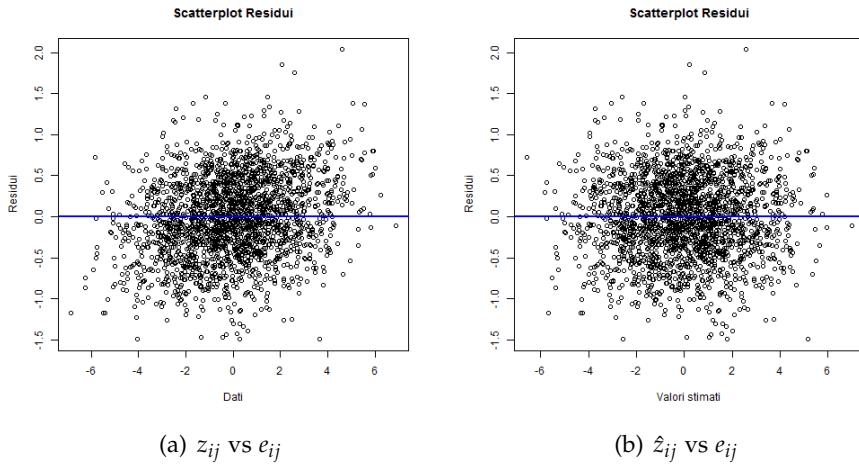


Figura 3.8: Scatterplot dei residui, caso con covariata

za uniforme e valgono le stesse considerazioni riportate nel caso senza covariata.

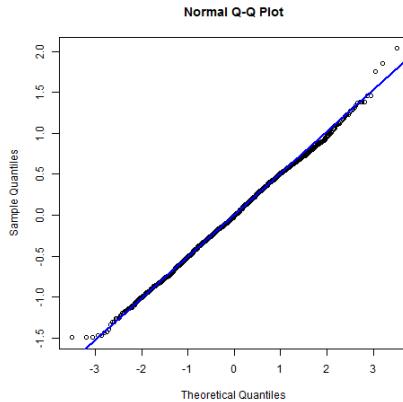


Figura 3.9: QQplot dei residui, caso con covariata

Riguardo alla normalità, sia in base al QQplot dei residui riportato in fig. 3.9 (che si adatta alla retta eccetto per qualche punto nelle code) sia in base al p-value del Shapiro-Wilk test (0.1259) si può concludere che i residui possono essere considerati gaussiani. Quindi è possibile costruire un intervallo di confidenza approssimato al 95% per β (eliminando il termine di distorsione) con quanto ricavato in sez. 2.2.1. Ne risulta:

$$\beta \in [0.9843; 1.0259]$$

che contiene 1. L'ipotesi nulla è accettata.

CAPITOLO 4

Confronto con altri metodi

Il modello STR-PDE rappresenta una generalizzazione del caso puramente spaziale proposto in [6] e, come è già stato evidenziato nel Capitolo 1, non è l'unico modello disponibile per l'analisi di dati distribuiti sia in spazio che in tempo. Pertanto è necessario che sia confrontato con le altre principali metodologie presenti in letteratura, al fine di poter dire se e quanto il modello proposto possa rappresentare un miglioramento in questo campo.

L'articolo [1] propone l'analisi di dati di questo tipo attraverso modelli misti additivi generalizzati (GAMM) di interazione spazio-tempo. Questo metodo è generalizzato, quindi può essere usato per spiegare anche funzioni del valore atteso della risposta. Nel nostro caso, per avvicinarci al caso STR-PDE, si ipotizza che la risposta sia pari alla somma di una funzione e di un eventuale termine con covariata. Alla funzione è associato lo smoothing secondo il prodotto tensoriale dei termini marginali in spazio e tempo con le loro penalizzazioni. Quindi la costruzione dei GAMM è molto simile a quella analizzata in STR-PDE e, mediante il codice implementato nel pacchetto R *mgcv*, è possibile scegliere tra più tipi di modelli. In particolare ne saranno studiati due, i più simili al modello STR-PDE:

- TPS, in cui sono poste marginalmente *cubic regression splines* in tempo e *thin plate splines* in spazio;
- SOAP, che considera *cubic regression splines* in tempo e *soap film smoothing* in spazio.

Un altro metodo da confrontare è sicuramente il kriging (KRIG) spazio-temporale. Le stime sono ottenute fissando un variogramma separabile e

marginalmente esponenziale in spazio e tempo. I parametri del vario-gramma sono stimati dall'empirico e, successivamente, è possibile calcolare la stima grazie alle funzioni del pacchetto R *spacetime*.

I quattro modelli sono confrontati sull'esempio del dominio a forma di C proposto precedentemente, poichè garantisce di poter conoscere in ogni punto spaziale e ad ogni istante temporale il valore esatto della funzione. La triangolazione e i dati sono gli stessi che sono stati usati nel Capitolo 3. In aggiunta è stata costruita una griglia spazio-temporale di punti per la validazione: sono stati presi 80 punti equispaziati in $(-1, +3.5)$ per l'ascissa, 40 punti in equispaziati $(-1, +1)$ per l'ordinata e 20 istanti in $(0, 2\pi)$ per il tempo. Ovviamente la validazione è stata studiata soltanto sui punti che ricadevano all'interno del dominio a forma di C.

I modelli sono stati confrontati attraverso il Root Mean Square Error (RMSE) prodotto sui punti di validazione. Quindi se se V è l'insieme dei punti della griglia interni al dominio, e Mod rappresenta la stima ottenuta dal modello, si avrà:

$$\text{RMSE}_V(\text{Mod}) = \sqrt{\frac{\sum_{(\underline{p}_i, t_i) \in V} (\text{Mod}(\underline{p}_i, t_i) - g(\underline{p}_i) \cos(t_i))^2}{\text{card}(V)}}$$

Il procedimento è stato iterato 50 volte, per poter escludere possibili andamenti particolari dovuti alla generazione del rumore.

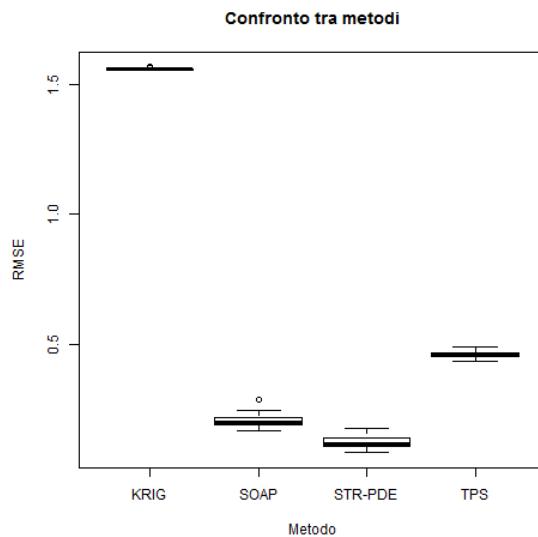


Figura 4.1: Confronto tra i metodi, caso senza covariata

4.1 Caso senza covariata

Nel caso senza covariata si hanno i risultati riportati in fig. 4.1, in cui sono stati tracciati i boxplot dei valori di RMSE raccolti nelle 50 iterazioni per ogni metodo. Subito si nota che l'errore commesso è minore nel caso di STR-PDE, e quindi la stima ottenuta con il modello proposto è la migliore.

Tutto ciò è confermato dai grafici presenti in fig. 4.2. Dai boxplot si nota che l'errore commesso è più alto nei casi di KRIG e TPS, e infatti le stime sono molto distanti dalla funzione reale. Invece SOAP e STR-PDE commettono errori minori, ma tra i due il migliore è STR-PDE, che ha linee di livello più ordinate rispetto a SOAP.

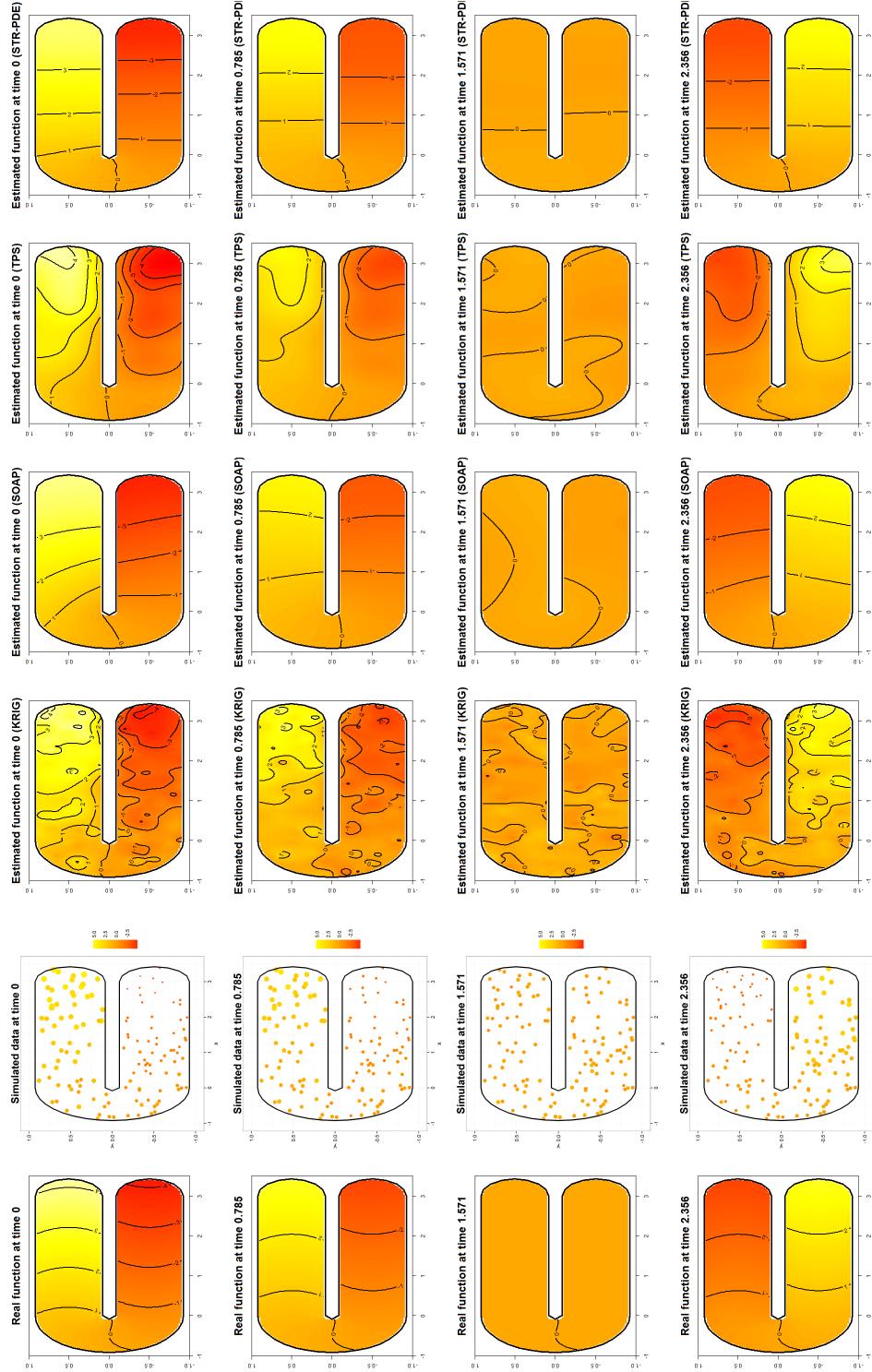


Figura 4.2: Per alcuni istanti di tempo, funzione test $f(p, t)$ reale, dati simulati, stime ottenute rispettivamente con kriging spazio-temporiale, GAMM con soap film smoothing, GAMM con thin plate splines e stima con STR-PDE nel caso senza covariata.

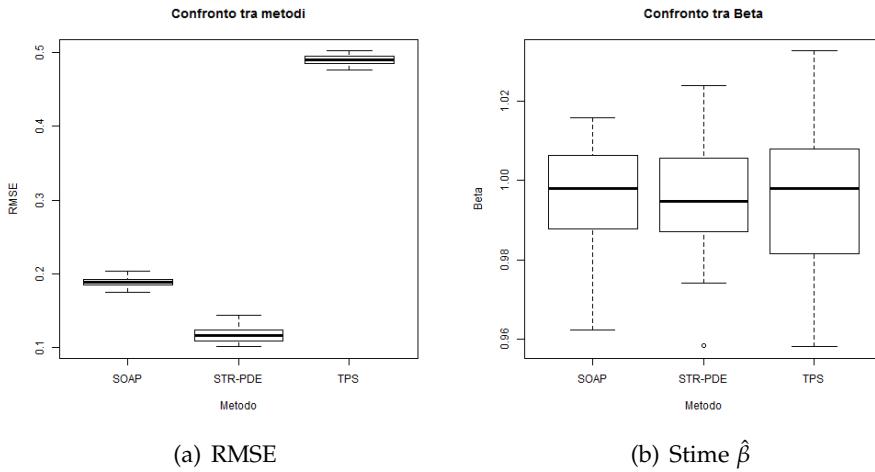


Figura 4.3: Confronto tra i metodi, caso con covariata

4.2 Caso con covariata

La stessa analisi è stata eseguita nel caso con covariata. La covariata è stata generata in tutti i punti esattamente come fatto nel Capitolo 3. Nella calcolo del RMSE, poichè non è opportuno generare nuovamente valori per la covariata nei punti di validazione, è stato considerato solo il termine dipendente dalla funzione $f(p, t)$. I boxplot riportati in fig. 4.3(a) possono quindi essere considerati come valutazione della bontà della stima della parte funzionale del modello. Per la parte spiegata dalla covariata sono stati tracciati i boxplot in fig. 4.3(b), con le stime di $\hat{\beta}$ calcolate dai metodi. Il kriging, che nel caso senza covariata si è rivelato ampiamente peggiore degli altri metodi, non è stato considerato.

Le conclusioni sono perfettamente analoghe al caso precedente. La stima di β non presenta differenze, ma nella parte funzionale il caso STR-PDE è nuovamente il migliore.

Analogamente al caso senza covariata, dai plot della funzione stimata ad alcuni istanti di tempo fissati in fig. 4.4 si possono trarre le stesse conclusioni. Il modello STR-PDE è quello che più si avvicina alla funzione reale.

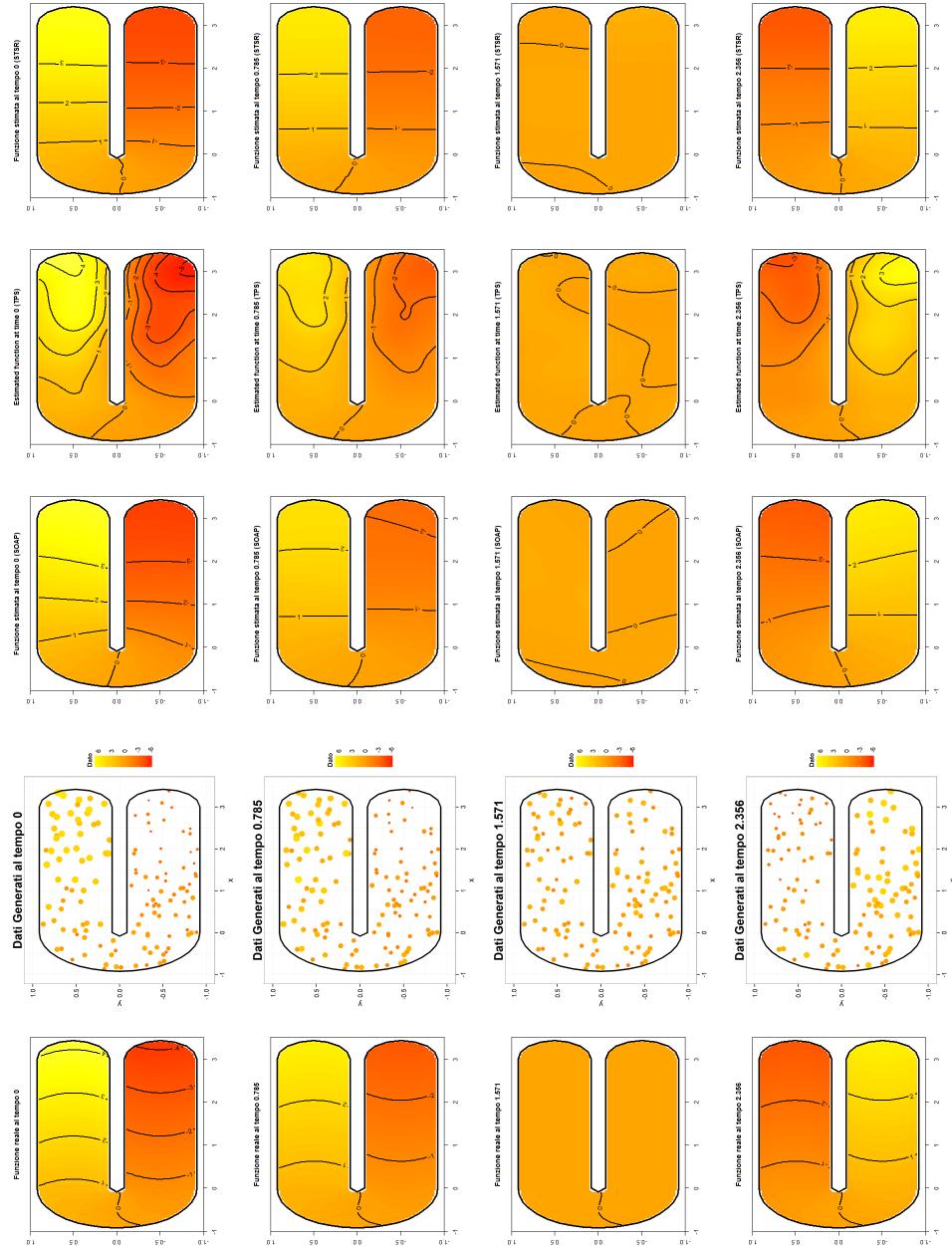


Figura 4.4: Per alcuni istanti di tempo, funzione test $f(p, t)$ reale, dati simulati, stime ottenute rispettivamente con GAMM con soap film smoothing, GAMM con thin plate splines e stima con covariata.

CAPITOLO 5

Analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia

Come è già stato brevemente accennato in precedenza, l'applicazione scelta per il modello STR-PDE riguarda i dati della produzione di rifiuti urbani nel periodo di anni dal 1997 al 2011 nella provincia di Venezia. Per rifiuti urbani si intendono rifiuti domestici, rifiuti prodotti in locali, aree pubbliche, parchi, giardini o spiagge, rifiuti provenienti dalla pulizia delle strade o di altri luoghi pubblici. Non sono conteggiati i rifiuti speciali (tra cui ad esempio quelli industriali, agricoli o provenienti da attività commerciali o di costruzione) o pericolosi (per i quali esistono programmi di smaltimento particolari).

In realtà, come già precedentemente indicato, i dati raccolti dall'Agenzia Regionale per la Prevenzione e Protezione Ambientale del Veneto (Arpav) riguardano tutta la regione. Tuttavia è stata analizzata solo la provincia di Venezia per due motivi. Inanzitutto l'interesse particolare per la zona della laguna veneta, in cui è rilevante il ruolo del turismo (come si potrà notare in seguito). Inoltre considerare tutto il Veneto aumenterebbe notevolmente le dimensioni delle matrici in gioco causando una grossa spesa computazionale per la ricerca della soluzione. Quindi è stato scelto di concentrarsi su un dominio più piccolo ma nel quale è possibile notare più facilmente le particolarità dell'andamento del fenomeno della produzione dei rifiuti urbani.

Per ogni comune della provincia di Venezia e per ogni anno è disponibile il numero di rifiuti totali raccolti in tonnellate e la popolazione residente. La popolazione è certamente un valore influente per la produzione di rifiuti, perciò la quantità di riferimento non sarà il valore dei rifiuti totali raccolti in ogni anno per comune, ma il valore pro capite.

Le coordinate spaziali dei comuni sono la longitudine e la latitudine, disponibili on line¹. Nel caso dei comuni con dato replicato (sez 5.2.2), le coordinate sono state scaricate da Google Maps.

5.1 L'inclusione dell'effetto del turismo

L'inclusione della popolazione residente nella risposta tramite la scelta di usare i valori pro capite è necessaria, poichè permette di depurare la risposta da una variabile che per sua natura la influenzerebbe. Ma sarebbe un errore fermarsi solo alla popolazione residente, poichè anche i turisti rappresentano una componente non trascurabile di produzione di rifiuti urbani.

Nella provincia di Venezia sono presenti molte zone di elevata attrazione turistica. Grande importanza è da attribuire a Venezia, ma si hanno anche zone balneari (come Lido di Venezia, Cavallino-Treporti, Jesolo, San Michele al Tagliamento, Bibione, ecc...). L'informazione scelta per sintetizzare l'attività turistica è il numero di posti letto totali del comune, valore disponibile grazie all'applicativo dell'Istat *Atlante Statistico dei Comuni*² per ogni anno. Il totale dei posti letto per comune è la somma di vari tipi di attività non solamente alberghiere in senso stretto (ad esempio sono conteggiati anche esercizi complementari, bed & breakfast, campeggi) e saranno considerati normalizzati per la popolazione residente per uniformità con la risposta. I valori ricavati saranno inseriti nel modello come possibile covariata.

5.2 Trattamento del dominio

Per poter studiare il problema a livello computazionale occorre avere una buona approssimazione della frontiera della regione. Questa è disponibile nel pacchetto R *raster* che descrive dati geografici di moltissime zone del mondo sia a livello nazionale che locale (nel caso italiano province e comuni) tramite poligoni molto precisi.

Una volta scaricata la provincia di Venezia da *raster*, si è riscontrato subito un problema: la regione è composta da un insieme di 101 poligoni distinti (a causa delle numerose isole di cui è composta la laguna) e ogni poligono ha un alto numero di vertici (ad esempio, la prima delle due regioni corrispondenti all'entroterra aveva 10538 vertici). Non è possibile analizzare il problema su un territorio così descritto, perciò è stata necessaria una analisi iniziale della frontiera per ridurne la complessità.

¹<http://www.dossier.net/utilities/coordinate-geografiche/>

²<http://www.istat.it/it/archivio/113712>

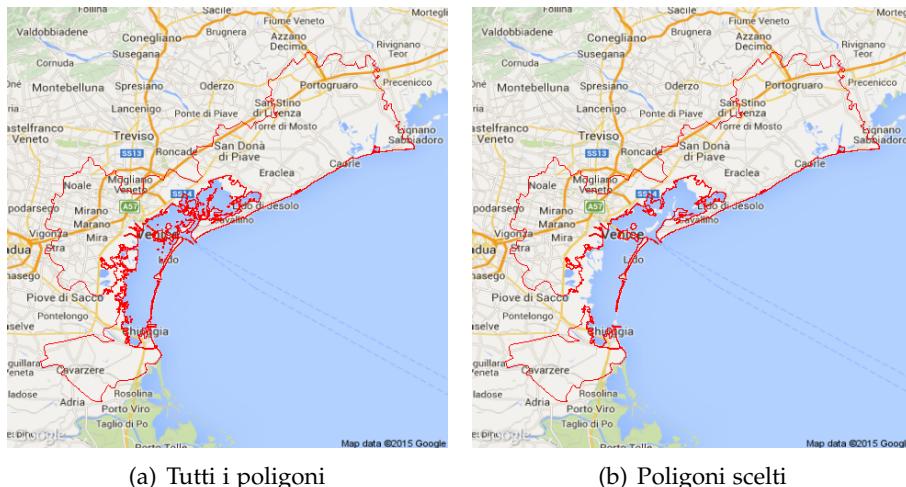


Figura 5.1: Poligoni disponibili nel pacchetto *raster*

Oltre all'entroterra (composto da due poligoni) stati scelti solo le più più rilevanti isole della laguna a livello di popolazione e turismo: Venezia, Murano, Lido di Venezia, Pellestrina e Chioggia (composta da due poligoni). In fig. 5.1 sono visualizzati i poligoni disponibili e quelli scelti per l'analisi. Come sarà indicato nel paragrafo successivo, tutte queste isole sono state trattate per la riduzione dei vertici e, per creare un poligono unico, sono state unite tra loro con ponti dove era possibile. Tra le isole collegate solamente via mare con il resto del territorio sono stati simulati ponti in corrispondenza delle trafficate linee di trasporto pubblico con traghetto.

5.2.1 Regression splines

Per ridurre l'elevato numero di vertici di ognuno dei poligoni considerati si è scelto di ricorrere ad un'analisi di smoothing di dati funzionali. Ad ogni poligono è associata una coppia di funzioni: la latitudine e la longitudine rispetto all'ascissa curvilinea (disponibili per punti, corrispondenti ai vertici) che sono state rappresentate in basi e valutate in un numero molto inferiore di punti, con i quali si è costruita la nuova definizione della regione.

Per avere una rappresentazione tramite funzioni di base di queste funzioni sono state provate più tecniche e la scelta definitiva è ricaduta sulle *Regression Splines* cubiche senza penalizzazione della derivata seconda. Infatti i risultati non sono stati migliori negli altri casi a causa della zona interna alla laguna di Venezia, fortemente frastagliata: ad esempio penalizzare la derivata seconda eliminava troppe asperità presenti sulle coste

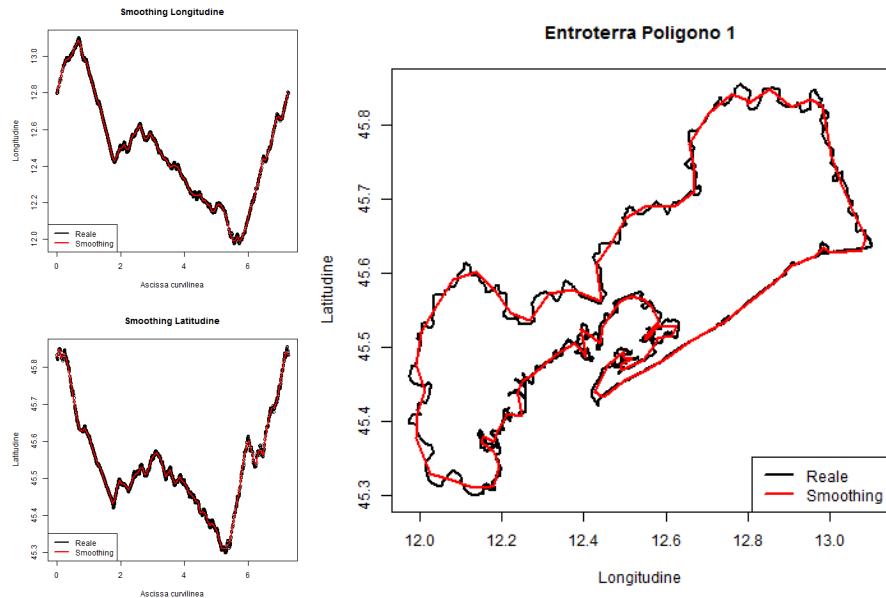


Figura 5.2: Smoothing con *Regression Splines* cubiche per il primo poligono dell'entroterra della provincia di Venezia

del territorio, mentre con *Kernel Smoothing* sono state ricavate regioni che, dopo la triangolazione, presentavano troppi triangoli composti solamente da punti di frontiera (e quindi senza dati) rispetto agli altri metodi.

Una volta fissato un ragionevole numero di punti con cui descrivere la regione sono stati eseguiti più tentativi per decidere il miglior numero di basi necessario per descrivere le due funzioni. Il criterio di scelta è stato complesso, poiché sono stati esclusi i valori che generavano intersezioni nella nuova descrizione della regione e comuni esterni alla frontiera. Ma la scelta del miglior numero di basi per *Regression Splines* è ricaduta sul valore che, una volta eseguito lo smoothing della regione, causava la minor distanza tra i nuovi punti della regione e il poligono iniziale. In fig. 5.2 è riportato il risultato dello smoothing sul primo poligono, che descrive l'entroterra della provincia di Venezia (nella versione definitiva ha 100 punti, molti meno dei 10538 iniziali).

Dopo aver ripetuto l'analisi per ognuna delle isole elencate precedentemente, la descrizione finale è stata ricavata unendo tra loro tutti i nuovi poligoni. In seguito è stata eliminata una zona costiera dell'entroterra della laguna di Venezia che, sebbene sia presente sia in *raster* che nei grafici di Google Maps, corrisponde ad una parte fangosa e paludosa e quindi disabitata. Non essendo possibile che su di essa siano prodotti rifiuti è stata tagliata dalla regione. Per questo motivo si troverà sempre una zona non analizzata sui grafici con mappe da Google Maps. In fig. 5.3 è riportata la



Figura 5.3: Frontiera e punti spaziali per la provincia di Venezia

descrizione finale del dominio con i punti spaziali considerati (si consulti anche la sezione successiva).

5.2.2 Scelte particolari tra i comuni

L'uso di valori pro capite per rifiuti e posti letto consente di replicare il dato del comune anche su altri punti in cui risulta necessario. Ad esempio le isole di Murano, Lido di Venezia e Pellestrina non sono sedi di comune, ma si riferiscono a Venezia. Quindi il dato di Venezia è stato replicato in queste isole ad ogni anno, per avere un valore di riferimento in quanto zone distaccate. Come si può notare in fig. 5.3(b) anche nell'isola di Venezia è stato duplicato il dato, per avere una triangolazione senza troppi triangoli composti solo da punti di frontiera in una zona di particolare rilevanza.

Un caso particolare riguarda il comune di Cavallino-Treporti, che è stato istituito nel 1999 con una parte dei territori del comune di Venezia. La separazione all'interno dei dati, però, è presente dal 2002. Di conseguenza prima di questo anno il dato in Cavallino-Treporti è una replica del dato di Venezia.

5.2.3 Triangolazione del dominio

La triangolazione è stata prodotta tramite il pacchetto R *RTriangle*. Poiché nella zona ad est il numero di capoluoghi di comune (e quindi di nodi della triangolazione) è minore rispetto al resto della regione, è stata fissata un'area massima per i triangoli generati da *RTriangle*. Questo ha reso la triangolazione più fitta anche dove non lo sarebbe stata, e garantirà una

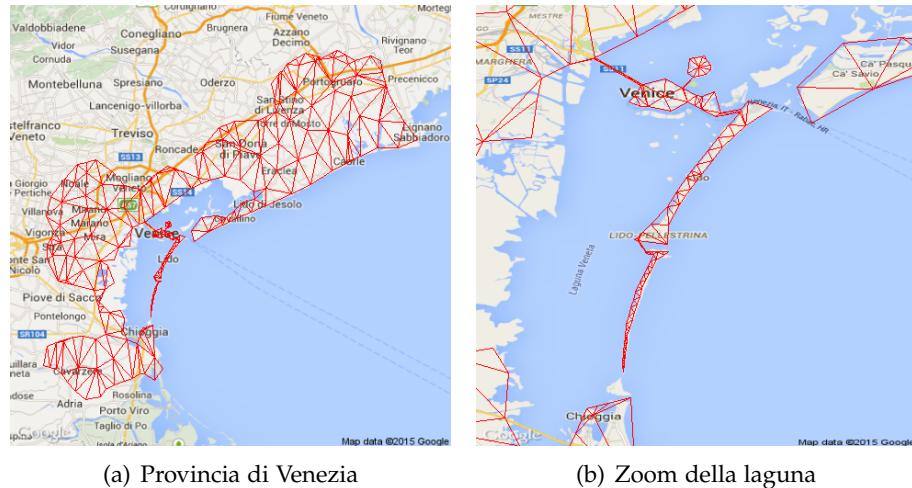


Figura 5.4: Triangolazione della provincia di Venezia

stima della risposta più precisa nella zona balneare che, come si potrà notare in seguito, ha una grande importanza per la distribuzione dei rifiuti. Affinchè questo sia possibile sono stati aggiunti nuovi punti spaziali, che restano senza dato per tutta l'analisi. In fig. 5.4 si ha la triangolazione finale che sarà usata da ora in avanti.

In conclusione, il dominio è descritto da 414 punti (41 con dati, 373 di frontiera o aggiunti dalla triangolazione) e da 475 triangoli.

5.3 Analisi preliminare dei dati

Prima di eseguire l'analisi, è opportuno avere una visualizzazione dei dati sul dominio della provincia di Venezia. In fig. 5.5 sono riportati i bubble-plot dei dati, che permettono di avere un'idea del fenomeno in spazio e tempo.

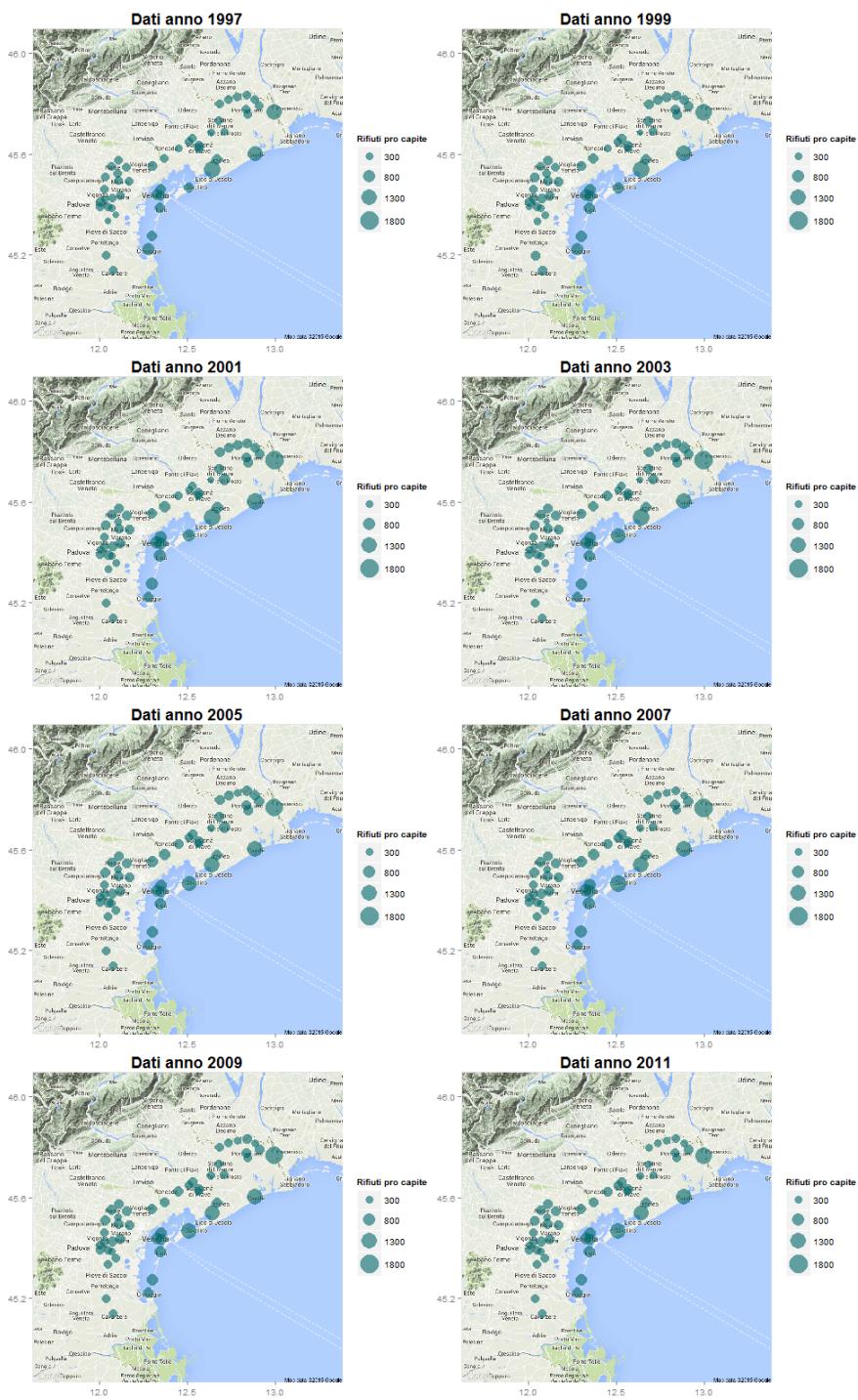


Figura 5.5: Bubbleplot delle misurazioni della produzione di rifiuti urbani pro capite ogni due anni dal 1997 al 2011.

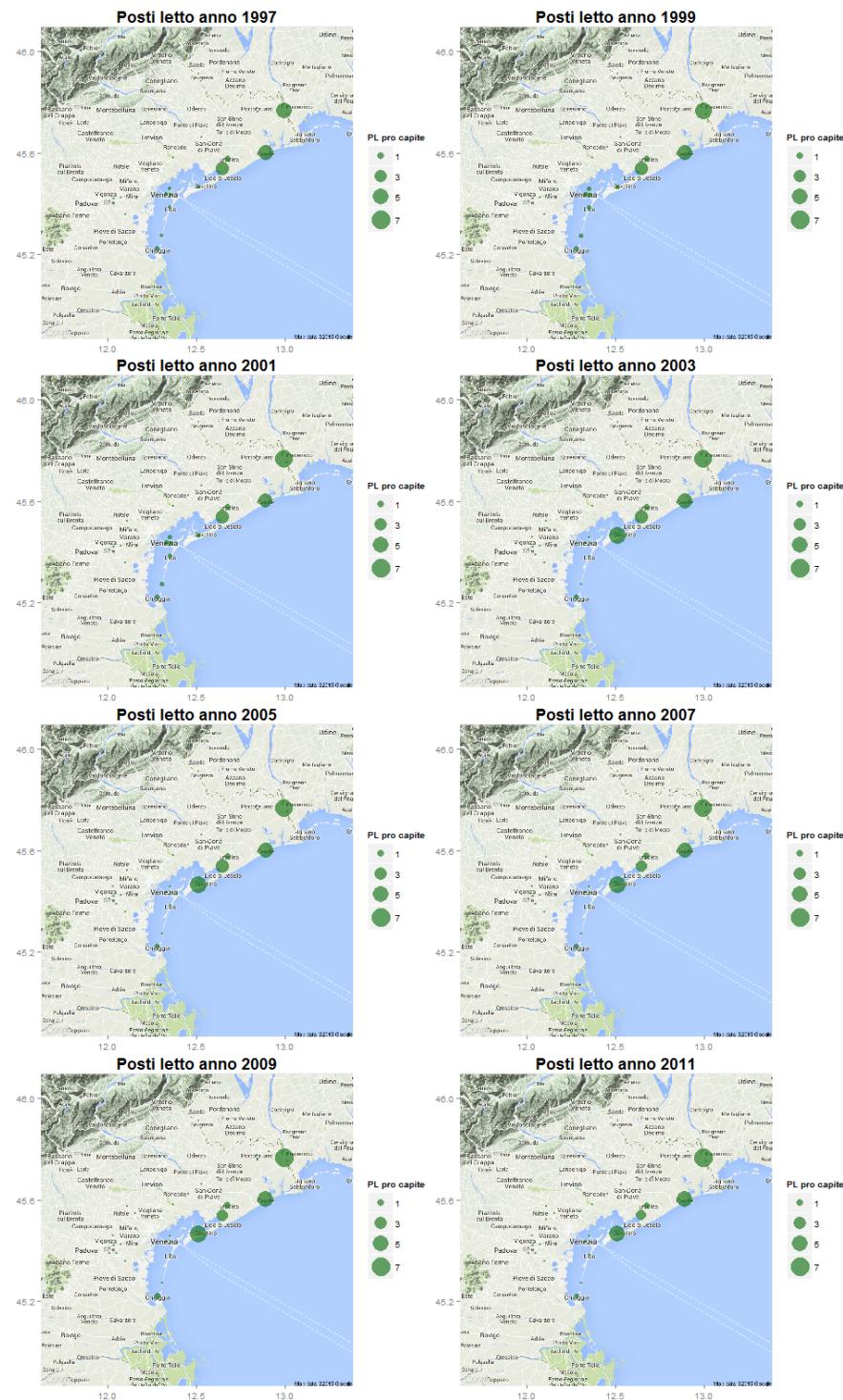


Figura 5.6: Bubbleplot dei posti letto pro capite ogni due anni dal 1997 al 2011.

Da questa analisi iniziale si può ipotizzare che il modello mostri una produzione di rifiuti più alta nella zona balneare della regione e che non abbia grosse variazioni nel tempo, poiché i dati sono più o meno simili negli anni.

Gli stessi grafici sono stati ripetuti in fig. 5.6 per il numero di posti letto pro capite. In questo caso, però, si può evidenziare un andamento diverso. Si può notare che il numero di posti letto assume valori maggiori nella zona balneare rispetto al resto della regione. Contrariamente a quello che ci si aspettava, non si hanno molto posti letto nell'isola di Venezia. Invece si ha una grossa variazione nel comune di Cavallino-Treporti dopo la separazione dal comune di Venezia (si nota che il raggio della bolla aumenta notevolmente dopo il 2002). Questo indica che i posti letto sono in realtà numerosi in Cavallino-Treporti, ma quando era unito al comune di Venezia questo effetto non poteva essere notato in modo così dettagliato. Ci si può quindi aspettare che la funzione stimata presenti un comportamento differente in Cavallino-Treporti nelle due situazioni.

5.4 Applicazione del modello senza covariata

5.4.1 Ricerca del miglior λ

Le basi in spazio scelte per l'applicazione del modello in questo caso sono gli elementi finiti lineari. Ad ognuno dei punti spaziali (interni o di frontiera) è associata una funzione di base, coerentemente con la triangolazione prodotta. Di conseguenza si ha $N = 414$ mentre il numero di punti con dati n è minore ed è pari a 41.

In tempo, esattamente come nel caso del dominio a forma di C, sono state scelte come funzioni di base le B-splines cubiche. L'intervallo temporale per la descrizione del dominio è [1997, 2011] e i dati sono disponibili con cadenza annuale. Anche in questo caso si assume che il numero di basi sia pari al numero di istanti temporali a disposizione, quindi $M = m = 15$.

Prima di calcolare i risultati dell'analisi occorre fissare i parametri λ_S e λ_T . Il procedimento è perfettamente analogo a quello ricavato nel caso del dominio a forma di C, minimizzando la quantità $GCV(\lambda)$ in eq. 2.19. In tab. 5.1 sono disponibili i risultati.

Intervalli per $\log_{10} \lambda_S$ e $\log_{10} \lambda_T$	Miglior valore
$\log_{10} \lambda_S \in \{-12, -11, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-10}, 10^0)$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-8, -7, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-11, -10.5, \dots, -9\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-9.5}, 10^0)$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-1, -0.5, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-10, -9.875, \dots, -9\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-9.625}, 10^0)$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-0.5, -0.375, \dots, +0.5\}$	

Tabella 5.1: Analisi di GCV($\underline{\lambda}$) per la provincia di Venezia, caso senza covariata

5.4.2 Risultati

La produzione dei rifiuti è stata analizzata con $\underline{\lambda} = (10^{-9.625}, 10^0)$. In fig. 5.7 sono riportati i risultati ottenuti nei 15 anni a disposizione. Questi grafici (grazie anche alla visualizzazione sulle mappe di Google Maps) permettono di studiare il profilo della funzione nei vari istanti temporali e di avere un'idea dell'evoluzione della produzione di rifiuti a livello geografico.

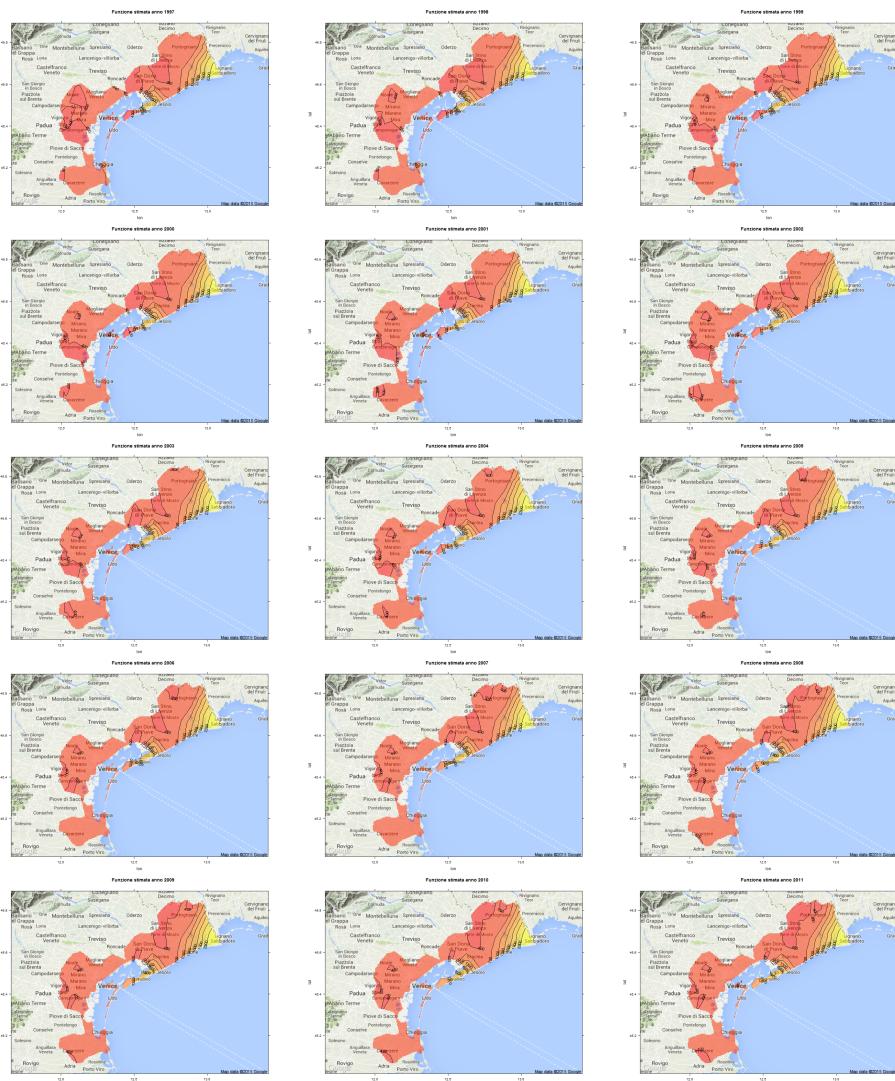


Figura 5.7: Stima della funzione spazio-temporale della produzione dei rifiuti nella provincia di Venezia a tempi fissati dal 1997 al 2011, caso senza covariata.

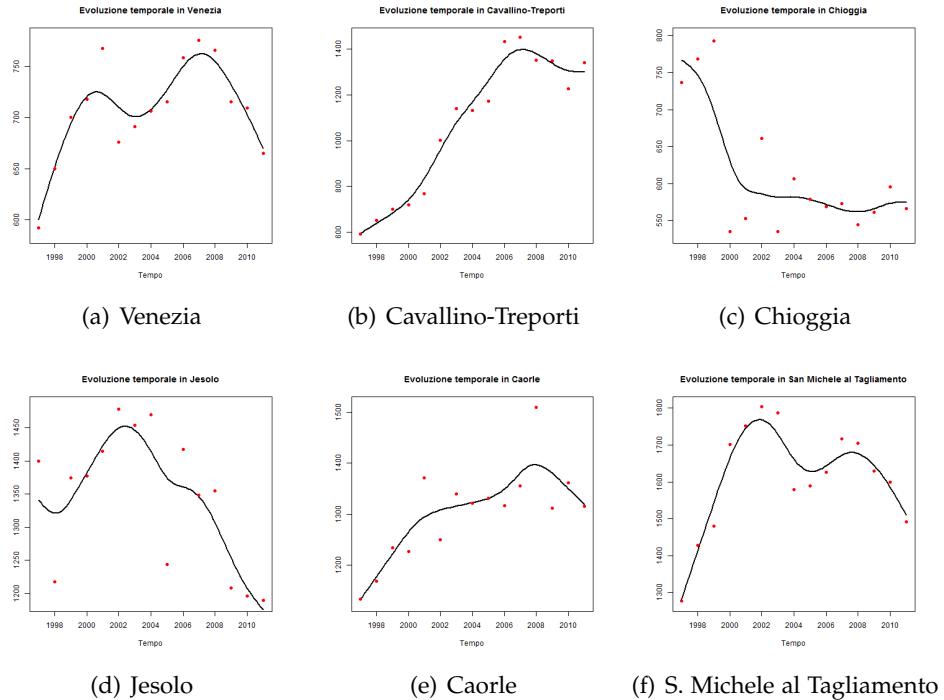


Figura 5.8: Stima della produzione dei rifiuti pro capite in alcuni comuni, caso senza covariata.

Come si può notare dai grafici, ci sono due zone ad elevato valore di produzione dei rifiuti pro capite, corrispondenti a località con grande interesse turistico per le spiagge presenti. Ad est, tra le altre, si hanno le località turistiche di Bibione (confinante con Lignano Sabbiadoro, che però è oltre il confine) e Caorle. Scendendo verso sud-ovest si nota che anche Jesolo causa un innalzamento della funzione che descrive la risposta. La produzione dei rifiuti è particolarmente alta in queste zone turistiche e, contrariamente a ciò che si poteva immaginare, molto più di Venezia. Come già si notava dai bubbleplot in fig. 5.6, il turismo sarà rilevante nell'analisi della produzione di rifiuti, e la causa non sarà Venezia (dove la produzione non è eccessivamente diversa dagli altri comuni) ma saranno le località balneari.

In fig. 5.8 sono tracciati gli sviluppi temporali stimati in alcuni comuni. I punti rossi corrispondono al dato misurato. La funzione stimata spiega bene l'andamento tracciato dai dati iniziali senza cadere nell'eccessiva interpolazione. Infatti lo smoothing imposto dal modello tramite la penalizzazione della derivata seconda in tempo permette di non avere variazioni repentine. Ad esempio nei grafici di Venezia e Cavallino-Treporti il cambio di andamento dovuto alla separazione del comune dal 2002 non ha pro-

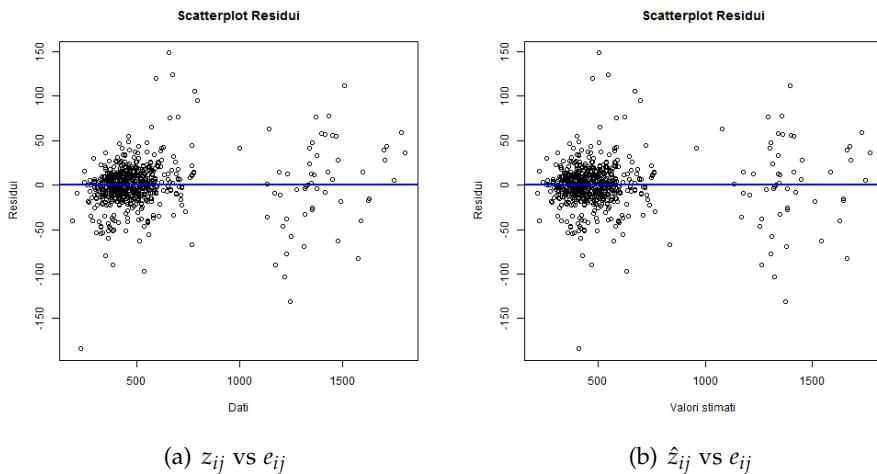


Figura 5.9: Scatterplot dei residui, caso senza covariata

vocato bruschi cambiamenti alla funzione ma è stato comunque colto dal modello. In Chioggia e in Jesolo si ha un calo generale della produzione dei rifiuti, mentre in San Michele al Tagliamento (comune di appartenenza di Bibione) e Caorle si hanno valori alti, a conferma dei grafici in 5.7.

5.4.3 Analisi dei residui

Contrariamente a quanto fatto in precedenza nel caso di dominio a forma di C, non si può prescindere dall'analisi dei residui per verificare l'ipotesi di omogeneità in varianza. Tramite gli scatterplot in fig. 5.9 si può concludere che l'ipotesi è rispettata poiché i residui si dispongono come una nuvola uniformemente distribuita intorno allo zero.

5.5 Applicazione del modello con covariata

5.5.1 Ricerca del miglior λ

Le basi in spazio e in tempo sono esattamente le stesse del caso precedente. Prima di eseguire l'analisi, come al solito, occorre cercare buoni valori per λ . Dalla tab. 5.2 si possono seguire le iterazioni eseguite e il risultato finale.

Intervalli per $\log_{10} \lambda_S$ e $\log_{10} \lambda_T$	Miglior valore
$\log_{10} \lambda_S \in \{-12, -11, \dots, +1\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-8}, 10^0)$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-8, -7, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-9, -8.5, \dots, -7\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-8}, 10^0)$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-1, -0.5, \dots, +1\}$	
$\log_{10} \lambda_S \in \{-8.5, -8.375, \dots, -7.5\}$	$\underline{\lambda} = (10^{-7.750}, 10^{-0.125})$
$\log_{10} \lambda_T \in \{-0.5, -0.375, \dots, +0.5\}$	

Tabella 5.2: Analisi di GCV($\underline{\lambda}$) per la provincia di Venezia, caso con covariata

5.5.2 Risultati

Le analisi sono state eseguite con $\underline{\lambda} = (10^{-7.750}, 10^{-0.125})$. Come si può notare dai grafici in fig. 5.10, dove è riportata la stima della funzione $f(p, t)$ in tutti i punti senza l'aggiunta della parte spiegata dalla covariata, nelle zone dove la produzione di rifiuti è massima si hanno ora i valori più bassi.

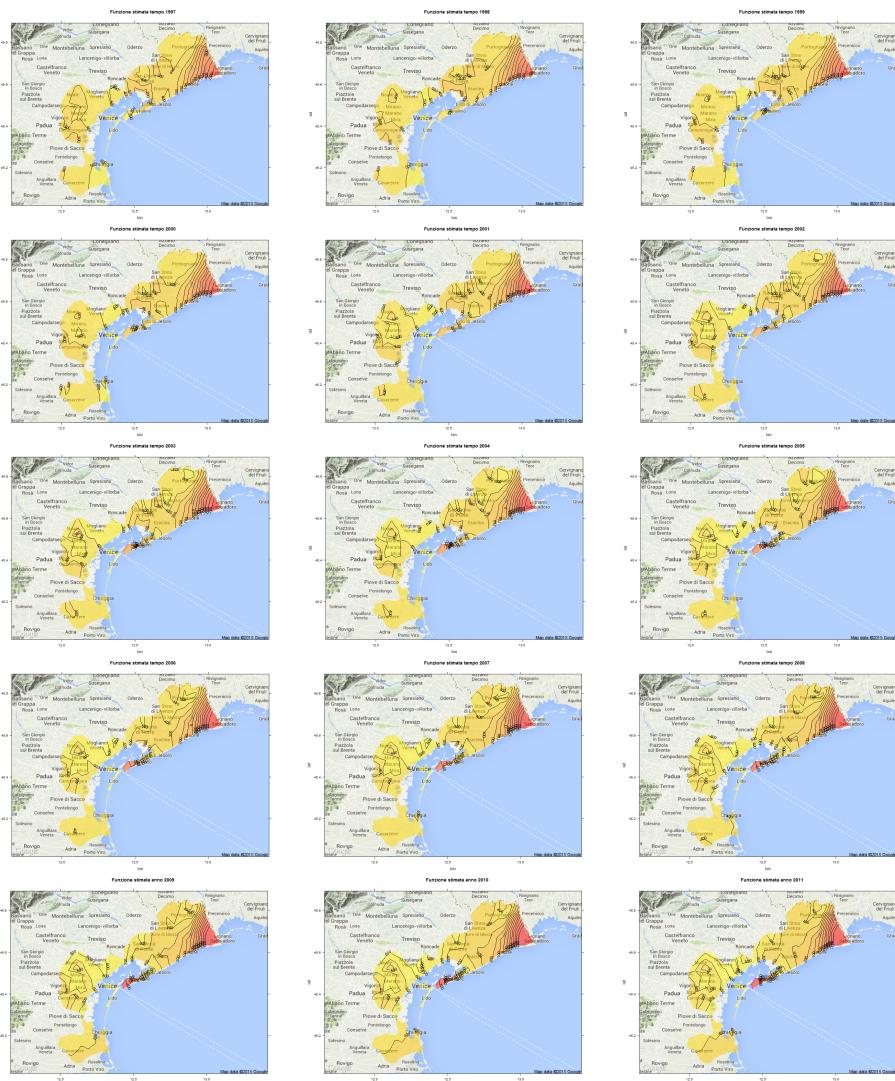


Figura 5.10: Stima della funzione spazio-temporale della produzione dei rifiuti nella provincia di Venezia a tempi fissati dal 1997 al 2011, con covariata.

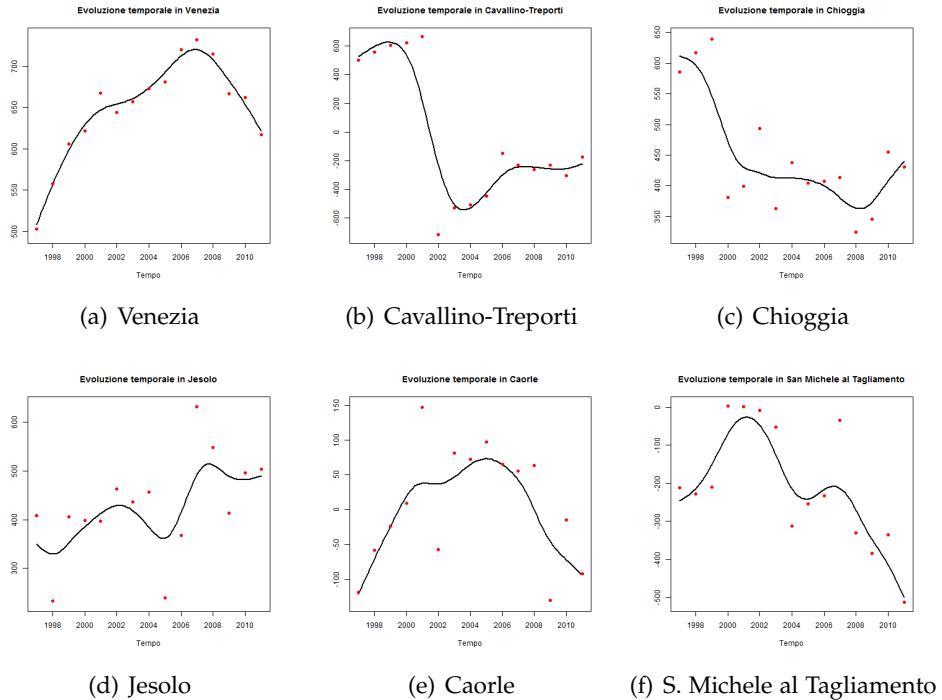


Figura 5.11: Stima della parte funzionale della produzione dei rifiuti pro capite in alcuni comuni, con covariata.

In fig. 5.11 si hanno anche i grafici della funzione stimata (senza il termine di covariata) in alcuni comuni. I punti tracciati in rosso rappresentano il dato, a cui è sottratta la covariata moltiplicata per $\hat{\beta}$ stimato. Non possono essere considerati come la parte di dati generati esattamente dalla funzione, ma come una loro buona approssimazione.

L'interpretazione del risultato in questo caso è legata all'alta affluenza turistica nelle zone balneari. Come si può notare dai grafici iniziali dalle fig. 5.5 e 5.6, su tutta la zona costiera non si hanno solo i massimi dei rifiuti pro capite ma anche del numero di posti letto pro capite. Quindi non soltanto la produzione di rifiuti è massima nella zona balneare (come già si notava dalla funzione stimata nel caso senza covariata) ma anche l'attività turistica. In questo caso

$$\hat{\beta} \approx 284.05 .$$

Più la covariata è alta, più è sottratta informazione alla funzione $f(\underline{p}, t)$, poiché $\hat{\beta}$ è costante in spazio e tempo. Perciò la funzione ha un profilo quasi simile ad una traslazione del caso senza covariate nel resto del dominio (in questa zona il numero di posti letto pro capite, come si nota in

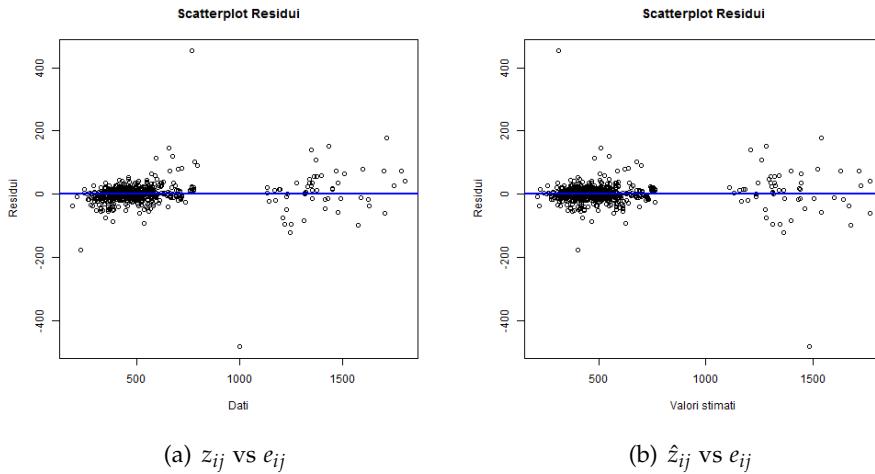


Figura 5.12: Scatterplot dei residui, caso con covariata

fig. 5.6, è quasi costante) e ribassato nella zona balneare, a causa dell'alto contributo della covariata.

Interessante è quanto accade nel comune di Cavallino-Treporti, dove la funzione subisce una grossa variazione dopo la divisione dal comune di Venezia per l'aumento del numero dei posti letto. Attorno all'anno 2002 si ha uno stravolgimento dell'andamento della funzione. Tuttavia, essendo dovuto alla maggior precisione del dato in Cavallino-Treporti, è un cambiamento utile a spiegare meglio la risposta. Gli effetti dovuti alle proprieà di smoothing poste dal modello sono analoghi al caso senza covariata, si ha una spiegazione dell'andamento generale della funzione senza cogliere troppo il dato e senza interpolare. Nelle località dove si avevano i valori massimi nel caso senza covariata, ora si hanno i minimi a causa dei posti letto (in alcuni casi la funzione è addirittura negativa).

5.5.3 Analisi dei residui

Anche in questo caso è necessario controllare l'ipotesi di omoschedasticità dei residui. I risultati sono perfettamente analoghi al caso senza covariata e si può concludere che l'ipotesi è rispettata.

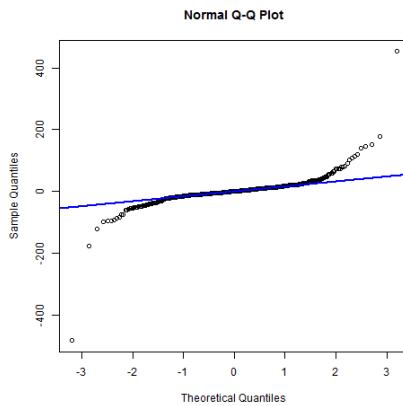


Figura 5.13: QQplot dei residui, caso con covariata

Essendo presente una covariata, potrebbe essere interessante calcolare per essa intervalli di confidenza o verificare alcune ipotesi. Pertanto in questo caso è opportuno controllare anche l'eventuale gaussianità dei residui. Dal QQplot in fig. 5.13, troppo distante da una retta, e dal p-value del Shapiro-Wilk test, che è stimato minore di 2×10^{-16} , si deduce che la gaussianità non può essere ipotizzata e quindi non è possibile calcolare intervalli di confidenza come fatto per il dominio a forma di C.

CAPITOLO 6

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro di tesi è stato analizzato nel dettaglio il modello STR-PDE nell'ambito della stima funzionale per dati varianti all'interno di un dominio spaziale e di un intervallo temporale. Il modello, che si propone di essere un'estensione del caso puramente spaziale già analizzato in letteratura, è stato sviluppato in codice R. Dal confronto con gli altri metodi e da quanto ricavato con le stime, soprattutto sul dominio a forma di C in cui è possibile conoscere il valore reale della funzione, si può concludere che i risultati prodotti sono molto buoni.

Diversa è la conclusione per le prestazioni computazionali del codice. Per semplicità computazionale le basi degli elementi finiti sono state scelte lineari e la produzione dei rifiuti è stata analizzata solamente nella provincia di Venezia, pur avendo a disposizione i dati di tutto il Veneto. Inoltre, durante l'esecuzione del codice, si è potuto notare che alcune funzioni come la minimizzazione di $GCV(\lambda)$ o il calcolo dei valori stimati ad un istante di tempo fissato (usati ad esempio per conoscere il profilo della funzione ad un certo anno) sono molto lente. Ovviamente per analisi di dataset di grosse dimensioni deve essere messa in conto una spesa di tempo elevata, ma R certamente non ha aiutato. Infatti, è noto che R non sia un linguaggio di programmazione fortemente efficiente, e questo ha caratterizzato la lentezza di esecuzione. Il più chiaro sviluppo futuro può essere l'uso del codice come base per la creazione di un algoritmo più veloce, attraverso l'integrazione con un linguaggio di programmazione più efficiente (come il C++) o della parallelizzazione nei colli di bottiglia più evidenti.

Dopo che sarà stata sviluppata l'integrazione del codice, sarà possibile garantire una analisi più agile anche per dataset di dimensioni più elevate

o per elementi finiti di ordine maggiore. In questo modo si avrà a disposizione uno strumento di analisi statistica buono non solo dal punto di vista dei risultati, ma anche in termini di efficienza computazionale.

Bibliografia

- [1] Nicole H. Augustin, Verena M. Trenkel, Simon N. Wood, Pascal Lorange, *Space-time modelling of blue ling for fisheries stock management*, Environmetrics, 24, 109–119, (2013)
- [2] Laura Azzimonti, Laura M. Sangalli, Piercesare Secchi, Maurizio Domanin, Fabio Nobile, *Blood flow velocity field estimation via spatial regression with PDE penalization*, Journal of the American Statistical Association, (2015)
- [3] Peter Craven, Grace Wahba, *Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation*, Numerische Mathematik, 31, 377–403, (1979)
- [4] Giampiero Marra, David L. Miller, Luca Zanin, *Modelling the spatiotemporal distribution of the incidence of resident foreign population*, Statistica Neerlandica, 66, 133–160, (2012)
- [5] Timothy O. Ramsay, *Spline smoothing over difficult regions*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 64, 307–319, (2002)
- [6] Laura M. Sangalli, James O. Ramsay, Timothy O. Ramsay, *Spatial spline regression models*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 75, 681–703, (2013)
- [7] Simon N. Wood, Mark W. Bravington, Sharon L. Hedley, *Soap film smoothing*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 70, 931–955, (2008)