Capitolo 1

Distribuzione degli stimatori

Il modello di riferimento per questo studio resta

$$\underline{z} = \Pi\underline{c} + W\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

con

$$\underline{\epsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$$

Di conseguenza, si avrà che

$$\underline{z} \sim N(\Pi\underline{c} + W\underline{\beta}, \sigma^2 I)$$

1.1 $\hat{\underline{c}}$

Studio la distribuzione delle stime dei coefficienti dello sviluppo spazio-temporale della funzione. Si ha, dalle stime ricavate nel caso con le covariate:

$$\hat{\underline{c}} = [\Pi^T\Pi + S + \Pi^T W(W^T W)^{-1} W^T \Pi]^{-1}\Pi^T[I - W(W^T W)^{-1}W^T]\underline{z}$$

Preferisco però identificare alcune delle matrici di questo sviluppo:

$$A_{smooth} = [\Pi^T\Pi + S + \Pi^T W(W^T W)^{-1} W^T \Pi]^{-1}\Pi^T$$

$$Q = [I - W(W^T W)^{-1}W^T]$$

In questo modo:

$$\hat{\underline{c}} = A_{smooth} Q \underline{z}$$

In particolare la matrice Q è una matrice di proiezione. Infatti, proietta sul complemento ortogonale dello spazio generato dalle colonne di W, matrice disegno delle covariate. Ne segue quindi che:

- ogni volta in cui si avrà il prodotto QW, questo varrà la matrice nulla di opportune dimensioni
- Q è idempotente
- in questo caso Q è simmetrica

La distribuzione di $\hat{c}$ è ovviamente multivariata, e quindi occorre ricavarne la media e la matrice di varianza-covarianza. Tuttavia, conoscendo la distribuzione di z, si avrà che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{\hat{c}}] &= A_{smooth}Q\mathbb{E}[\underline{z}] \\ &= A_{smooth}Q(\Pi\underline{c} + W\underline{\beta}) \\ &= A_{smooth}Q\Pi\underline{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\underline{\hat{c}}] &= A_{smooth}Q\mathrm{Var}[\underline{z}]Q^T A_{smooth}^T \\ &= \sigma^2 A_{smooth}QQ^T A_{smooth}^T \\ &= \sigma^2 A_{smooth}QQA_{smooth}^T \\ &= \sigma^2 A_{smooth}QA_{smooth}^T\end{aligned}$$

1.2 $\underline{\hat{\beta}}$

Molto interessante è lo studio della distribuzione di $\underline{\hat{\beta}}$, perchè sarà usato per la creazione di intervalli di confidenza con cui verificare la significatività delle covariate. Si ha

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\beta}} &= (W^TW)^{-1}W^T(\underline{z} - \Pi\underline{\hat{c}}) \\ &= (W^TW)^{-1}W^T(\underline{z} - \Pi A_{smooth}Q\underline{z}) \\ &= (W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi A_{smooth}Q)\underline{z}\end{aligned}$$

Quindi si avrà

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{\hat{\beta}}] &= (W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi A_{smooth}Q)\mathbb{E}[\underline{z}] \\ &= (W^TW)^{-1}W^T(I - \Pi A_{smooth}Q)(\Pi\underline{c} + W\underline{\beta})\end{aligned}$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned}(W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)W\underline{\beta} &= (W^TW)^{-1}W^T(W\underline{\beta}-\Pi A_{smooth}QW\underline{\beta}) \\ &= (W^TW)^{-1}W^T(W\underline{\beta}) \\ &= \underline{\beta}\end{aligned}$$

Da cui:

$$\mathbb{E}[\hat{\underline{\beta}}] = \underline{\beta} + (W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)\Pi\underline{c}$$

Invece, per quanto riguarda la varianza:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{\underline{\beta}}] &= (W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)\text{Var}[\underline{z}]((W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q))^T \\ &= \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)((W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q))^T \\ &= \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)(I-\Pi A_{smooth}Q)^TW(W^TW)^{-T} \\ &= \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T(I-\Pi A_{smooth}Q)(I-\Pi A_{smooth}Q)^TW(W^TW)^{-1}\end{aligned}$$

Studio un termine alla volta nella moltiplicazione tra le parentesi

$$\sigma^2(W^TW)^{-1}W^TIIW(W^TW)^{-1} = \sigma^2(W^TW)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi A_{smooth}QIW(W^TW)^{-1} &= \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi A_{smooth}QW(W^TW)^{-1} \\ &= \mathbb{O}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(W^TW)^{-1}W^TIQA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1} &= \sigma^2(W^TW)^{-1}W^TQ^TA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1} \\ &= \sigma^2(W^TW)^{-1}(QW)^TA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1} \\ &= \mathbb{O}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi A_{smooth}QQA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1} &= \\ \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi A_{smooth}QA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1}\end{aligned}$$

Concludendo

$$\text{Var}[\hat{\underline{\beta}}] = \sigma^2(W^TW)^{-1} + \sigma^2(W^TW)^{-1}W^T\Pi A_{smooth}QA^T_{smooth}\Pi^TW(W^TW)^{-1}$$