

Regressione con regolarizzazioni differenziali per dati spazio-temporali, con applicazione all'analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia

Gabriele Mazza

29 Aprile 2015



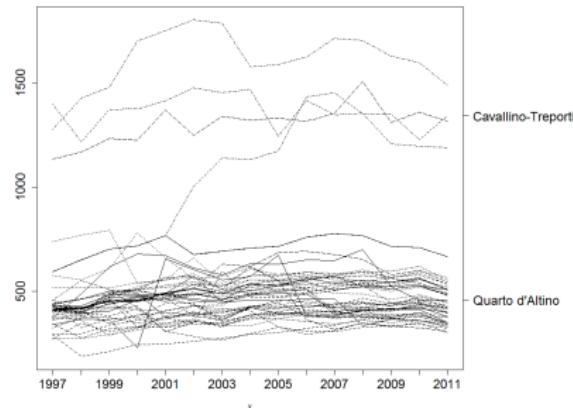
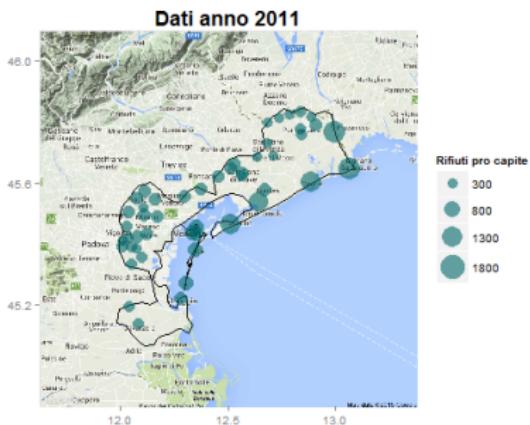
Introduzione

In questo lavoro di tesi è costruito e analizzato il modello di *Regressione Spazio-Temporale con Penalizzazioni Differenziali* (ST-PDE) per dati distribuiti in spazio e tempo. Il modello è particolarmente adatto a domini spaziali complessi.

Introduzione

In questo lavoro di tesi è costruito e analizzato il modello di *Regressione Spazio-Temporale con Penalizzazioni Differenziali* (ST-PDE) per dati distribuiti in spazio e tempo. Il modello è particolarmente adatto a domini spaziali complessi.

L'applicazione scelta riguarda l'analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia tra il 1997 e il 2011



Presentazione modello ST-PDE

Definisco:

- $\{\mathbf{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, \dots, n\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- $\{t_j; j = 1, \dots, m\} \subset [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$
- z_{ij} osservazioni in (\mathbf{p}_i, t_j)

Presentazione modello ST-PDE

Definisco:

- $\{\mathbf{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, \dots, n\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- $\{t_j; j = 1, \dots, m\} \subset [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$
- z_{ij} osservazioni in (\mathbf{p}_i, t_j)

Modello:

$$z_{ij} = f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

ε_{ij} rumore iid di media nulla e varianza σ^2 .

Presentazione modello ST-PDE

Definisco:

- $\{\mathbf{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, \dots, n\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- $\{t_j; j = 1, \dots, m\} \subset [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$
- z_{ij} osservazioni in (\mathbf{p}_i, t_j)

Modello:

$$z_{ij} = f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

ε_{ij} rumore iid di media nulla e varianza σ^2 .

Se $\{\psi_l(\mathbf{p}); l = 1, \dots, N\}$ sono basi spaziali definite in Ω e $\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\}$ basi temporali definite in $[T_1, T_2]$, allora:

$$f(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=1}^M a_k(\mathbf{p}) \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^N b_l(t) \psi_l(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M c_{lk} \psi_l(\mathbf{p}) \varphi_k(t)$$

Se $\{\psi_l(\boldsymbol{p}); l = 1, \dots, N\}$ sono basi spaziali definite in Ω e $\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\}$ basi temporali definite in $[T_1, T_2]$, allora:

$$f(\boldsymbol{p}, t) = \sum_{k=1}^M a_k(\boldsymbol{p}) \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^N b_l(t) \psi_l(\boldsymbol{p}) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M c_{lk} \psi_l(\boldsymbol{p}) \varphi_k(t)$$

La soluzione si ricaverà minimizzando il funzionale di penalizzazione:

Se $\{\psi_l(\mathbf{p}); l = 1, \dots, N\}$ sono basi spaziali definite in Ω e $\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\}$ basi temporali definite in $[T_1, T_2]$, allora:

$$f(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=1}^M a_k(\mathbf{p}) \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^N b_l(t) \psi_l(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M c_{lk} \psi_l(\mathbf{p}) \varphi_k(t)$$

La soluzione si ricaverà minimizzando il funzionale di penalizzazione:

$$J_\lambda(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(\mathbf{p}_i, t_j))^2 + \lambda_S [\text{reg. spaziale}] + \lambda_T [\text{reg. temporale}]$$

Se $\{\psi_l(\mathbf{p}); l = 1, \dots, N\}$ sono basi spaziali definite in Ω e $\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\}$ basi temporali definite in $[T_1, T_2]$, allora:

$$f(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=1}^M \textcolor{red}{a}_k(\mathbf{p}) \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^N \textcolor{red}{b}_l(t) \psi_l(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M c_{lk} \psi_l(\mathbf{p}) \varphi_k(t)$$

La soluzione si ricaverà minimizzando il funzionale di penalizzazione:

$$J_\lambda(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(\mathbf{p}_i, t_j))^2 + \lambda_S \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} (\Delta(\textcolor{red}{a}_k(\mathbf{p})))^2 d\mathbf{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 \textcolor{red}{b}_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt$$

Approccio considerato anche in Marra et al (2012).

$$J_{\lambda}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij} - f(\boldsymbol{p}_i, t_j))^2 + \lambda_S \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} (\Delta(a_k(\boldsymbol{p})))^2 d\boldsymbol{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt$$

$$J_\lambda(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - B\mathbf{c})^T(\mathbf{z} - B\mathbf{c}) + \lambda_S \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} \left(\Delta(a_k(\mathbf{p})) \right)^2 d\mathbf{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^N \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt$$

dove:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix}$$

e le matrici:

- $B = \Psi \otimes \Phi$ $\Psi|_{i,I} = \psi_I(\mathbf{p}_i)$, $\Phi|_{j,k} = \varphi_k(t_j)$

$$J_{\lambda}(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T(\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T[\lambda_S (P_S \otimes I_M) + \lambda_T (I_N \otimes P_T)]\mathbf{c}$$

dove:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_x = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial x \\ \partial\psi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_y = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial y \\ \partial\psi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial y \end{bmatrix}$$

e le matrici:

- $B = \Psi \otimes \Phi$ $\Psi|_{i,I} = \psi_I(\mathbf{p}_i)$, $\Phi|_{j,k} = \varphi_k(t_j)$
- $P_S = R_1 R_0^{-1} R_1$ $R_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T d\mathbf{p}$, $R_1 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\psi}_x \boldsymbol{\psi}_x^T + \boldsymbol{\psi}_y \boldsymbol{\psi}_y^T) d\mathbf{p}$ (Sangalli et al (2013))
- $P_T|_{k_1, k_2} = \int_{T_1}^{T_2} \varphi_{k_1}''(t) \varphi_{k_2}''(t) dt$

$$J_{\lambda}(\boldsymbol{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{B}\boldsymbol{c})^T(\mathbf{z} - \mathbf{B}\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}^T P \boldsymbol{c}$$

dove:

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_x = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial x \\ \partial\psi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_y = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial y \\ \partial\psi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial y \end{bmatrix}$$

e le matrici:

- $\mathbf{B} = \Psi \otimes \Phi \quad \Psi|_{i,I} = \psi_I(\mathbf{p}_i) , \Phi|_{j,k} = \varphi_k(t_j)$
- $P_S = R_1 R_0^{-1} R_1 \quad R_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T d\mathbf{p} , R_1 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\psi}_x \boldsymbol{\psi}_x^T + \boldsymbol{\psi}_y \boldsymbol{\psi}_y^T) d\mathbf{p}$ (Sangalli et al (2013))
- $P_T|_{k_1, k_2} = \int_{T_1}^{T_2} \varphi''_{k_1}(t) \varphi''_{k_2}(t) dt$

$$\hat{\boldsymbol{c}} = (B^T B + P)^{-1} B^T \mathbf{z} \quad \hat{\mathbf{z}} = B(B^T B + P)^{-1} B^T \mathbf{z} = S \mathbf{z}$$

$$J_{\lambda}(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T(\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T P \mathbf{c}$$

dove:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_x = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial x \\ \partial\psi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_y = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial y \\ \partial\psi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial y \end{bmatrix}$$

e le matrici:

- $B = \Psi \otimes \Phi$ $\Psi|_{i,I} = \psi_I(\mathbf{p}_i)$, $\Phi|_{j,k} = \varphi_k(t_j)$
- $P_S = R_1 R_0^{-1} R_1$ $R_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T d\mathbf{p}$, $R_1 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\psi}_x \boldsymbol{\psi}_x^T + \boldsymbol{\psi}_y \boldsymbol{\psi}_y^T) d\mathbf{p}$ (Sangalli et al (2013))
- $P_T|_{k_1, k_2} = \int_{T_1}^{T_2} \varphi''_{k_1}(t) \varphi''_{k_2}(t) dt$

$$\hat{\mathbf{c}} = (B^T B + P)^{-1} B^T \mathbf{z} \quad \hat{\mathbf{z}} = B(B^T B + P)^{-1} B^T \mathbf{z} = S \mathbf{z}$$

Si inseriscono nel modello p possibili covariate:

$$z_{ij} = f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$J_\lambda(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$$

Si inseriscono nel modello p possibili covariate:

$$z_{ij} = \mathbf{w}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$J_\lambda(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$$

Si inseriscono nel modello p possibili covariate:

$$z_{ij} = \mathbf{w}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$J_\lambda(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$$

Derivando si trova la soluzione:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T (\mathbf{z} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{c}}) \\ \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{z} \end{cases}$$

con $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{W}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$ e $\mathbf{A} = [\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{B}^T$.

Si inseriscono nel modello p possibili covariate:

$$z_{ij} = \mathbf{w}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + f(\mathbf{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$J_\lambda(\mathbf{c}) = (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c})^T (\mathbf{z} - \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$$

Derivando si trova la soluzione:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T (\mathbf{z} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{c}}) \\ \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{z} \end{cases}$$

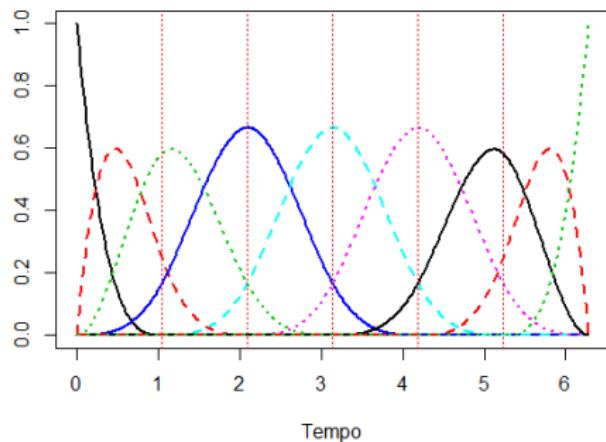
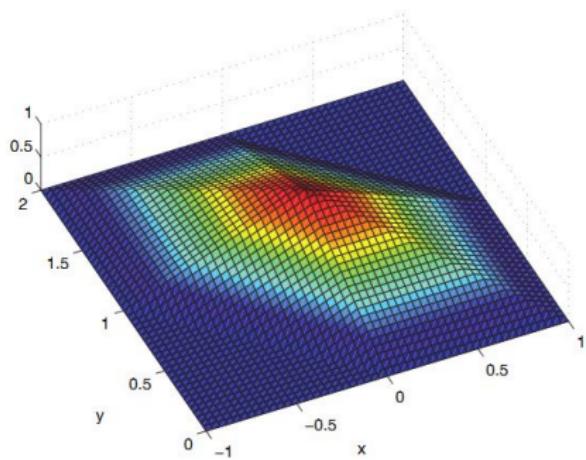
con $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{W}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$ e $\mathbf{A} = [\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{B}^T$.

Si possono ricavare le proprietà statistiche degli stimatori:

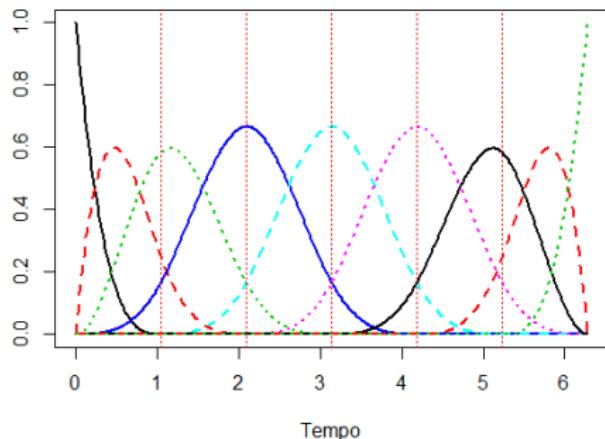
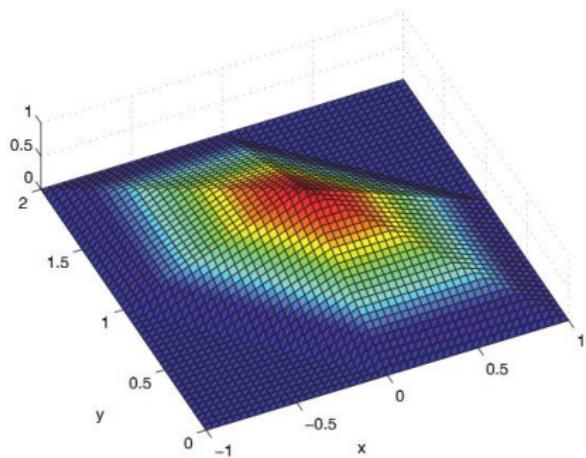
$$\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{Q}) \mathbf{B}\mathbf{c}$$

$$\text{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2 (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} + \sigma^2 (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}$$

Dopo aver sviluppato il modello, si scelgono le funzioni di base in spazio e tempo:



Dopo aver sviluppato il modello, si scelgono le funzioni di base in spazio e tempo:



Per fissare i parametri di smoothing λ_S e λ_T , si minimizza il seguente indice:

$$\text{GCV}(\lambda) = \frac{nm}{nm - \text{tr}(S)} (z - \hat{z})^T (z - \hat{z})$$

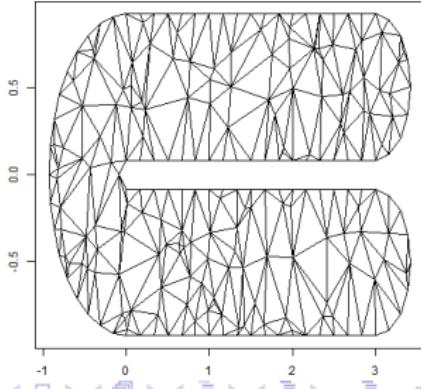
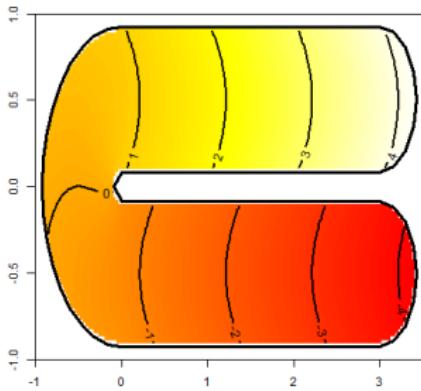
Studi di simulazione

Le simulazioni sono state eseguite simulando da $f(\mathbf{p}, t) = g(\mathbf{p})\cos(t)$, con aggiunta del rumore:

$$z_{ij} = f(\mathbf{p}_i, t_j) + \beta w_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \forall i, \forall j$$

dove:

- $\beta = 1$
 - $w_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1) \quad \forall i, \forall j$
 - $\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 0.5^2) \quad \forall i, \forall j$



Il modello stima:

$$\hat{\beta} \approx 1.001$$

IC approssimato:

$$\beta \in [0.9809; 1.0225]$$

Confronto con altri metodi

Il modello è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

Confronto con altri metodi

Il modello è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

- KRIG: modello basato su kriging spazio-temporale (Caballero et al (2013), Menafoglio et al (2013) and Menafoglio et al (2014))

Confronto con altri metodi

Il modello è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

- KRIG: modello basato su kriging spazio-temporale (Caballero et al (2013), Menafoglio et al (2013) and Menafoglio et al (2014))
- TPS: basi in spazio *Thin Plate Splines* (Wood (2003)), in tempo *Smoothing Splines*

Confronto con altri metodi

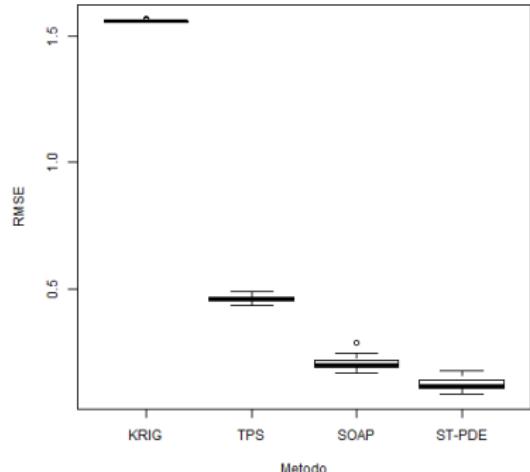
Il modello è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

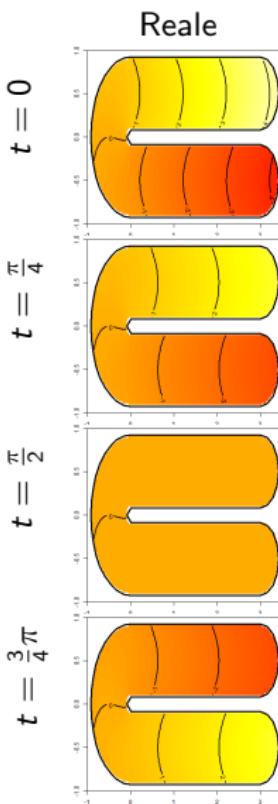
- KRIG: modello basato su kriging spazio-temporale (Caballero et al (2013), Menafoglio et al (2013) and Menafoglio et al (2014))
- TPS: basi in spazio *Thin Plate Splines* (Wood (2003)), in tempo *Smoothing Splines*
- SOAP: basi in spazio *Soap Film Smoothing* (Wood et al (2008)), in tempo *Smoothing Splines*

Confronto con altri metodi

Il modello è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

- KRIG: modello basato su kriging spazio-temporale (Caballero et al (2013), Menafoglio et al (2013) and Menafoglio et al (2014))
- TPS: basi in spazio *Thin Plate Splines* (Wood (2003)), in tempo *Smoothing Splines*
- SOAP: basi in spazio *Soap Film Smoothing* (Wood et al (2008)), in tempo *Smoothing Splines*



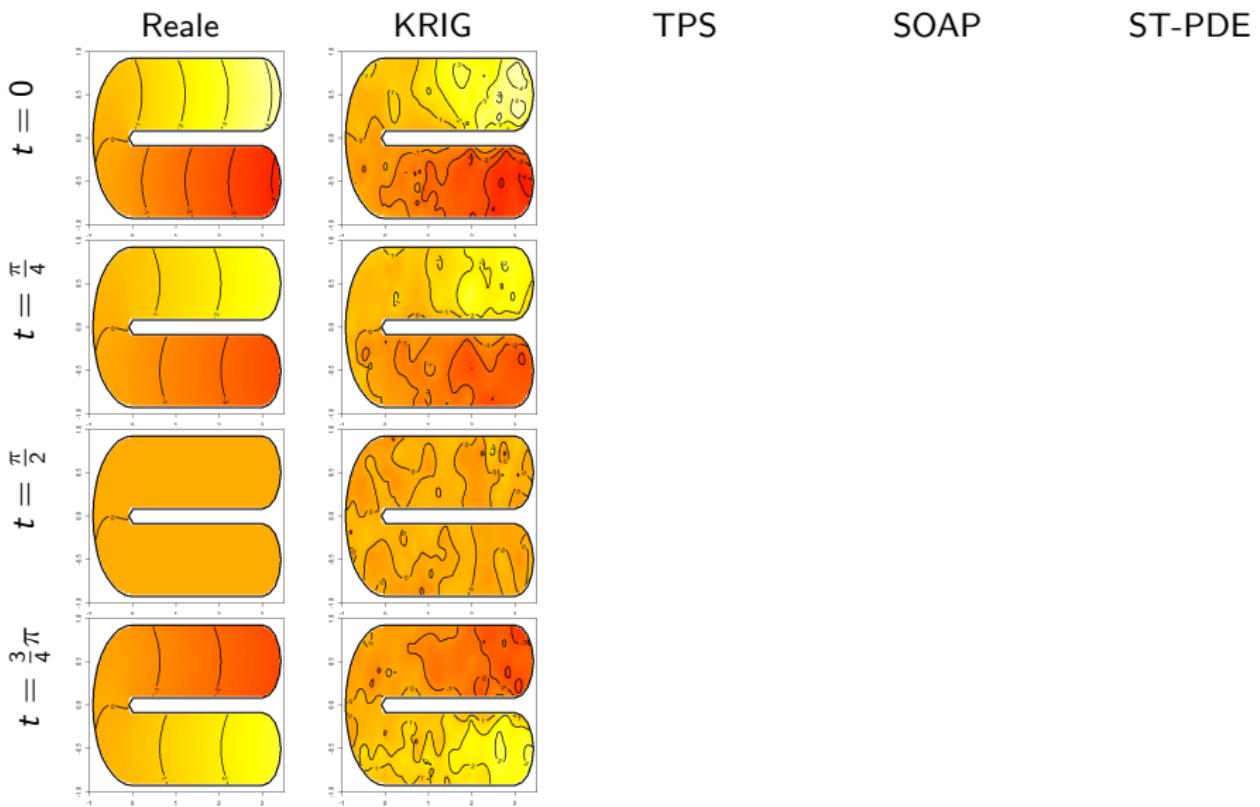


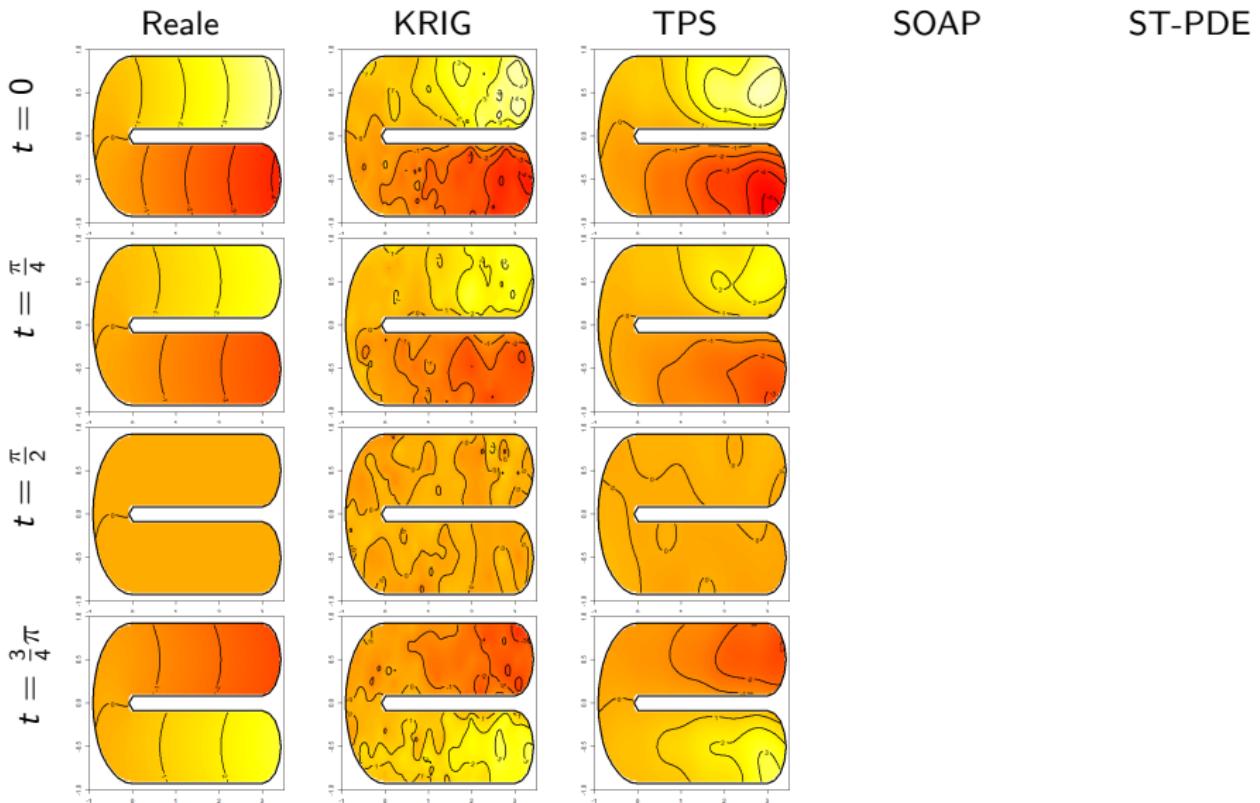
KRIG

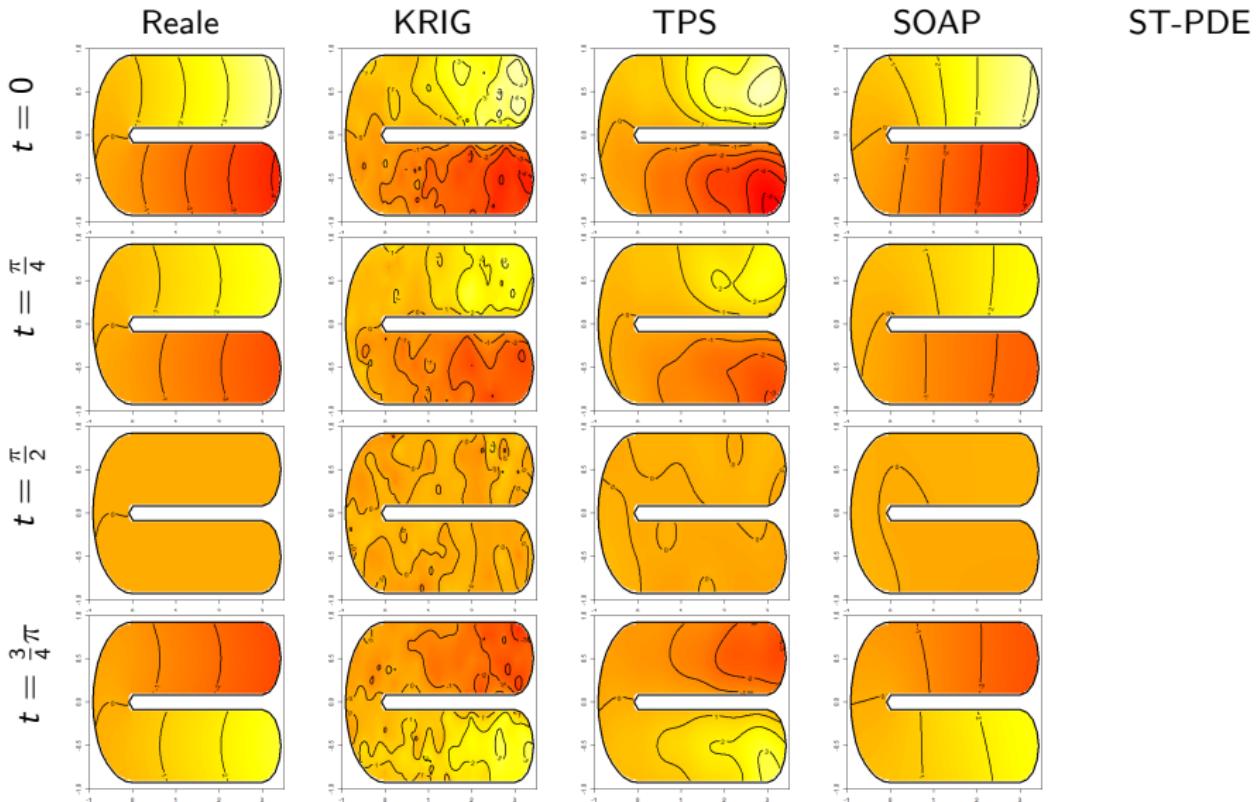
TPS

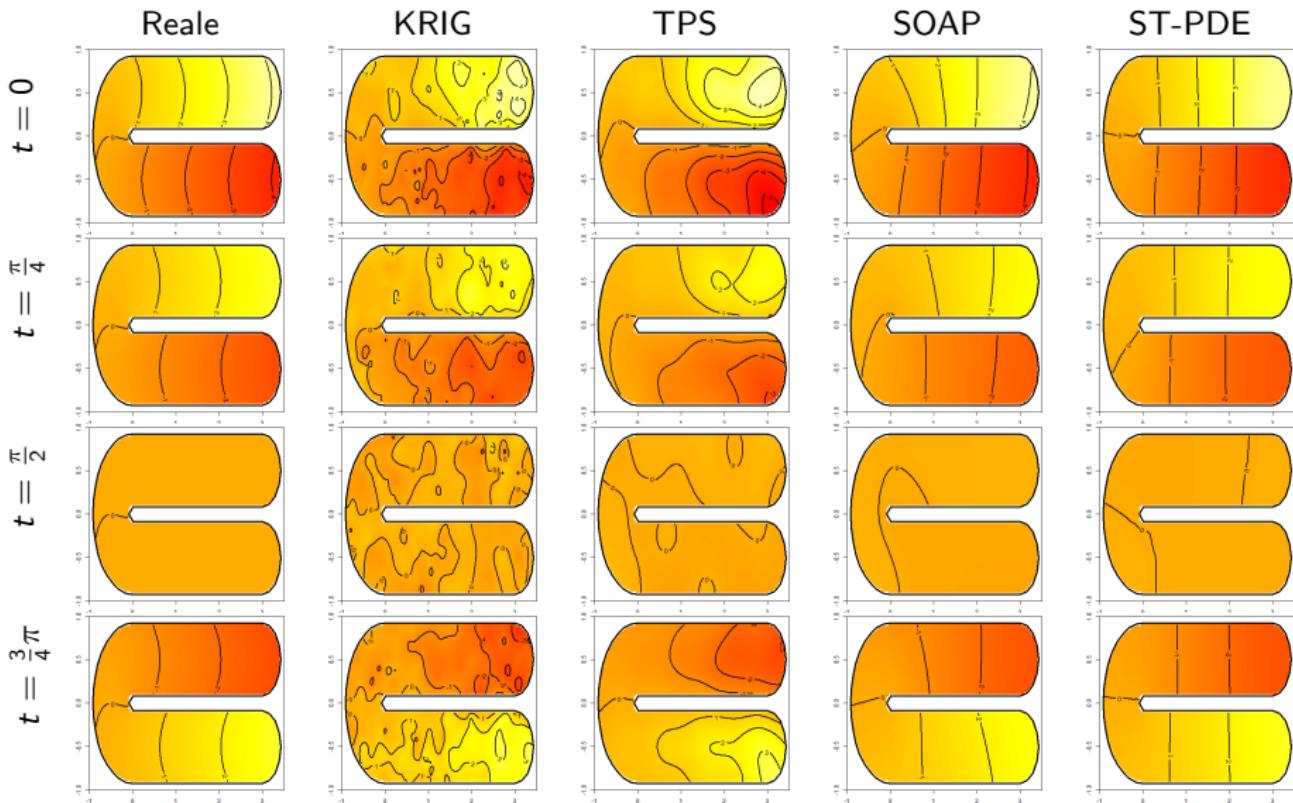
SOAP

ST-PDE

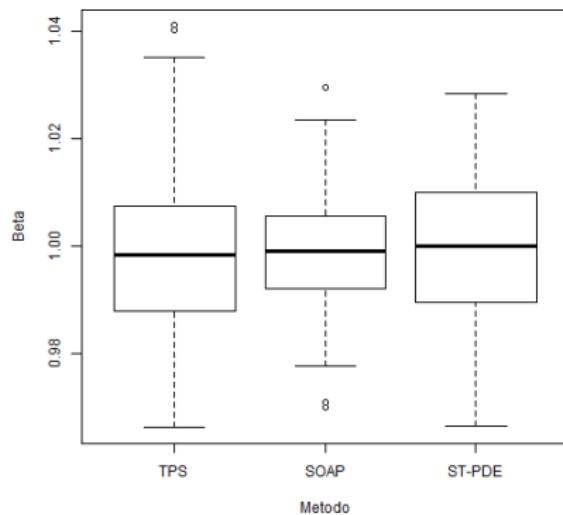
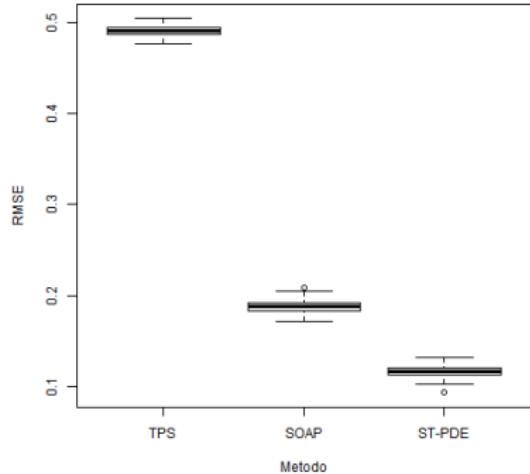








I confronti dei metodi sono stati eseguiti anche nel caso con covariata (senza il kriging):

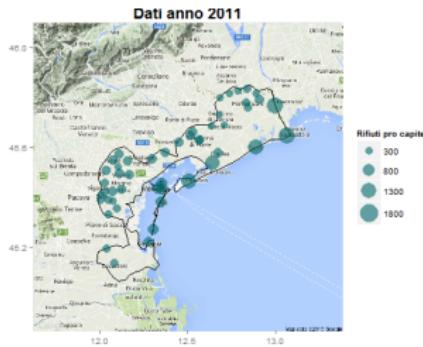


Applicazione allo studio dei rifiuti nella provincia di Venezia

I dati sono stati localizzati in un unico punto, nel paese di riferimento del comune.

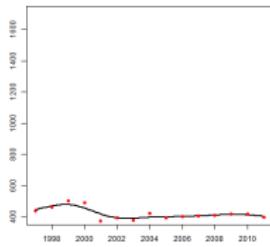
Come covariata, per tener conto dell'effetto del turismo, si usa il numero di posti letto pro capite in strutture ricettive.

Sono stati usati i valori pro capite, sia per il dato che per la covariata (possibilità di replicare i dati poichè densità). I parametri di smoothing sono calcolati tramite GCV.

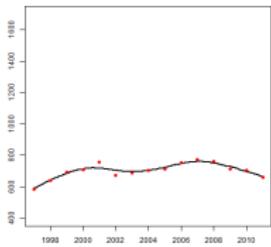


Risultati dell'applicazione del modello con la covariata:

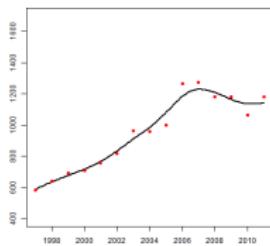
$$\hat{\beta} \approx 30.5563 \quad \beta \in [14.3158; 46.7767]$$



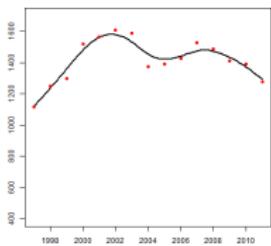
Cavarzere



Venezia



Cavallino-Treporti



Bibione

Sviluppi futuri

Il modello ST-PDE può essere ulteriormente sviluppato, per poter essere applicato ad ulteriori casi:

Sviluppi futuri

Il modello ST-PDE può essere ulteriormente sviluppato, per poter essere applicato ad ulteriori casi:

- è possibile riferire i dati ad un'area, e non ad un punto? Modello per il caso areale (in corso)

Sviluppi futuri

Il modello ST-PDE può essere ulteriormente sviluppato, per poter essere applicato ad ulteriori casi:

- è possibile riferire i dati ad un'area, e non ad un punto? Modello per il caso areale (in corso)
- miglioramenti computazionali, per avere un codice più efficiente ed applicabile a dataset più grandi

Bibliografia

N.H. Augustin, V.M. Trenkel, S.N. Wood, P. Lorance, *Space-time modelling of blue ling for fisheries stock management*, Environmetrics, 24, pp. 109–119, 2013.

W. Caballero, R. Giraldo, J. Mateu, *A universal kriging approach for spatial functional data*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 27(7), pp. 1553-1563, Springer, 2013.

G. Marra, D.L. Miller, Luca Zanin, *Modelling the spatiotemporal distribution of the incidence of resident foreign population*, Statistica Neerlandica, 66, pp. 133–160, 2012.

A. Menafoglio, A. Guadagnini, P. Secchi, *A kriging approach based on Aitchison geometry for the characterization of particle-size curves in heterogeneous aquifers*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 28(7), pp. 1835-1851, 2014.

[segue]

Bibliografia

- A. Menafoglio, P. Secchi, M. Dalla Rosa et al., *A Universal Kriging predictor for spatially dependent functional data of a Hilbert Space*, Electronic Journal of Statistics, 7, pp. 2209–2240, 2013.
- L.M. Sangalli, J.O. Ramsay, T.O. Ramsay, *Spatial spline regression models*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 75, pp. 681–703, 2013.
- S.N. Wood, *Thin-plate regression splines*, Journal of the Royal Statistical Society (B), 65(1), pp. 95–114, 2003.
- S.N. Wood, M.W. Bravington, S.L. Hedley, *Soap film smoothing*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 70, pp. 931–955, 2008.