

SPLINE ED ALTRO

M. Morandi Cecchi

Spline polinomiali

1.1 Polinomi a tratti

Definizione 1.1 (Spazio dei polinomi a tratti) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $\Delta = \{x_i\}_{i=1, \dots, k}$ un insieme di punti tali che:

$$a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} \equiv b$$

Consideriamo la partizione di $[a, b]$ in $k+1$ sottointervalli indotta dall'insieme Δ :

$$\begin{aligned} I_i &= [x_i, x_{i+1}) \quad i : 0, \dots, k-1 \\ I_k &= [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Dato un intero positivo m , e indicato con P_m lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di ordine al più m , definiamo lo spazio dei polinomi a tratti:

$$PP_m(\Delta) = \{f \mid \exists p_0, \dots, p_k \in P_m \text{ t.c. } f(x) = p_i(x) \forall x \in I_i, \quad i : 0, \dots, k\}$$

I polinomi a tratti hanno una flessibilità che non hanno i polinomi definiti sull'intervallo $[a, b]$; possono perdere, però, la regolarità nei punti $x_i \in \Delta$ per $i = 1, \dots, k$.

Per recuperare la caratteristica di regolarità dei polinomi, si introduce lo spazio delle funzioni spline.

1.2 Spline polinomiali a nodi semplici

Definizione 1.2 (Spline a nodi semplici) Siano $[a, b]$ e Δ come nella definizione 1.1 e sia m un intero positivo. Si definisce lo spazio delle funzioni spline polinomiali di ordine m a nodi semplici nel modo seguente:

$$S_m(\Delta) = PP_m(\Delta) \cap C_{[a,b]}^{(m-2)}$$

Ogni elemento di $S_m(\Delta)$ è sufficientemente flessibile e regolare.

Osservazioni

1. Con l'introduzione delle funzioni spline si corregge la non regolarità dei polinomi a tratti ottenendo funzioni derivabili con continuità fino all'ordine $m - 2$, che è la massima regolarità che si può richiedere ai polinomi a tratti per non ricadere nel caso di un unico polinomio definito su tutto $[a, b]$.
2. Risulta che:

$$P_m \subset S_m(\Delta) \subset PP_m(\Delta)$$

dove P_m è lo spazio di tutti i polinomi di ordine minore o uguale ad m (grado minore o uguale ad $m - 1$) compreso il polinomio nullo. $PP_m(\Delta)$ ed $S_m(\Delta)$ sono due spazi di funzioni con caratteristiche estreme: nel primo può non esistere alcuna regolarità, nel secondo si ha la massima regolarità sull'intervallo $[a, b]$. Esistono però altri spazi di funzioni che presentano caratteristiche di regolarità, ma non così elevata come per lo spazio $S_m(\Delta)$. Questi sono gli spazi delle funzioni spline polinomiali a nodi multipli.

1.3 Spline polinomiali a nodi multipli

Definizione 1.3 (Insieme delle spline a nodi multipli) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $\Delta = \{x_i\}_{i=1, \dots, k}$ un insieme di punti tali che: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$; consideriamo la partizione di $[a, b]$ indotta dall'insieme Δ nei sottointervalli $I_i, i = 0, \dots, k$ definiti come sopra.

Sia, poi, m un intero positivo, $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Si definisce l'insieme delle spline di ordine m con nodi x_1, \dots, x_k di molteplicità m_1, \dots, m_k come:

$$S(P_m, M, \Delta) = \{s(x) \mid \exists s_0(x), \dots, s_k(x) \in P_m \text{ t.c.}$$

1. $s(x) = s_i(x)$ per $x \in I_i \quad i = 0, \dots, k$

2. *condizione di continuità sui nodi:*

$$D^l s_{i-1}(x_i) = D^l s_i(x_i) \text{ per } l = 0, \dots, m - m_i - 1 \quad i = 1, \dots, k\}$$

Osservazione

Si possono verificare due casi particolari:

1. $m_i = 1$ per ogni $i = 1, \dots, k$; si ha la massima continuità, in quanto $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$ risulta derivabile con continuità fino all'ordine $m - m_i - 1 = m - 2$ su ogni punto x_i , quindi si ritorna al caso delle spline polinomiali a nodi semplici ed $s(x) \in S_m(\Delta)$.
2. $m_i = m$ per ogni $i = 1, \dots, k$; si ritorna al caso dei polinomi a tratti, poiché la $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$ risulta non essere continua nei punti x_i ($m - m_i - 1 = m - m - 1 = -1$).

Teorema 1.1 *L'insieme delle spline a nodi multipli $S(P_m, M, \Delta)$ è uno spazio di funzioni di dimensione $m + K$ dove:*

$$K = \sum_{i=1}^k m_i.$$

Per la dimostrazione vedere [SHU81].

Ogni elemento $s(x)$ dello spazio $S(P_m, M, \Delta)$, cioè ogni funzione spline, può essere rappresentata nel seguente modo:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i \varphi_i;$$

dove $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m+K}(x)\}$ è un insieme di funzioni base dello spazio $S(P_m, M, \Delta)$. Una base stabile dal punto di vista computazionale è costituita dalle B-spline normalizzate.

Definizione 1.4 (Partizione estesa) *L'insieme $\Delta^* = \{t_i\}_{i=1, \dots, 2m+K}$ e $K = \sum_{i=1}^k m_i$ si chiama partizione estesa associata ad $S(P_m, M, \Delta)$ se e solo se*

$$1. \quad t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m+K}$$

$$2. \quad t_m \equiv a ; t_{m+K+1} \equiv b$$

$$3. \quad (t_{m+1} \leq \dots \leq t_{m+K}) \equiv \underbrace{(x_1 = \dots = x_1)}_{m_1 \text{ volte}} < \dots < \underbrace{(x_k = \dots = x_k)}_{m_k \text{ volte}}$$

Definizione 1.5 (Funzioni B-spline normalizzate) Consideriamo la partizione estesa Δ^* associata allo spazio $S(P_m, M, \Delta)$. Definiamo l'insieme delle funzioni B-spline normalizzate

$$\{N_{i,m}(x)\}_{i=1,\dots,m+K}$$

mediante la seguente formula ricorrente:

$$N_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+h-1}-t_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{t_{i+h}-x}{t_{i+h}-t_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) & \text{se } t_i \neq t_{i+h} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $h = 2, \dots, m$, dove

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

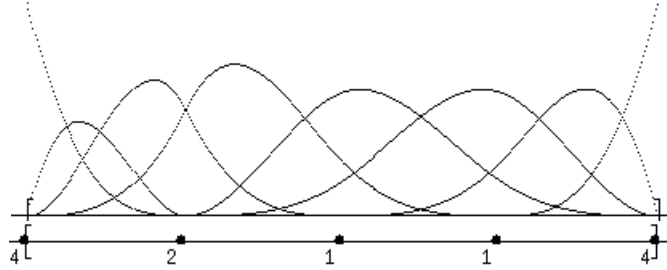


Figura 1.1: B-spline cubiche con un nodo doppio

Proprietà delle B-spline normalizzate

1. Supporto locale

$$N_{i,m}(x) = 0 \quad \forall x \notin [t_i, t_{i+m}) \quad \text{se } t_i < t_{i+m}$$

2. Non negatività

$$N_{i,m}(x) > 0 \quad \forall x \in (t_i, t_{i+m}), \quad t_i < t_{i+m}$$

L'intervallo $[t_i, t_{i+m})$ è detto *supporto* della funzione di base i-esima;

3. Partizione dell'unità

Le B-spline normalizzate sono una partizione dell'unità, cioè:

$$\sum_{i=1}^{m+K} N_{i,m}(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

Poiché le B-spline normalizzate formano una base per $S(P_m, M, \Delta)$, potremo rappresentare ogni spline $s(x)$ di tale spazio come combinazione lineare delle B-spline, cioè:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) \quad x \in [a, b].$$

In particolare, per le proprietà delle $N_{i,m}(x)$, se $x \in [t_l, t_{l+1})$ risulta che:

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(x)$$

Osservazione

Per le proprietà 2 e 3, la spline

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) \quad x \in [a, b]$$

è una combinazione convessa dei coefficienti c_i , per cui il valore assunto dalla funzione spline in un punto $x \in [a, b]$ è sempre compreso tra il valore minimo e massimo dei c_i , ovvero:

$$\min_{i=1, \dots, m+K} \{c_i\} \leq s(x) \leq \max_{i=1, \dots, m+K} \{c_i\} \quad x \in [a, b].$$

Ancora, per la proprietà di localizzazione della spline, risulta che:

$$\min_{i=l-m+1, \dots, l} \{c_i\} \leq s(x) \leq \max_{i=l-m+1, \dots, l} \{c_i\} \quad x \in [t_l, t_{l+1}).$$

1.4 Valutazione delle funzioni spline

Il problema consiste nel determinare il valore che una assegnata spline assume in corrispondenza di un certo punto $\bar{x} \in [a, b]$. Prima di tutto si individua l'intervallo $[t_l, t_{l+1})$ contenente \bar{x} . A questo punto sarà:

$$s(\bar{x}) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(\bar{x})$$

1.4.1 Algoritmo 1

Bisogna valutare le funzioni base in \overline{x} mediante la formula ricorrente che le definisce. Praticamente si valuta la sola funzione $N_{l,1}$ non nulla in \overline{x} , quindi le sole due funzioni $N_{l-1,2}$ e $N_{l,2}$ non nulle in \overline{x} , e procedendo così si arrivano a determinare le m funzioni base di indici da $l - m + 1$ ad l non nulle in \overline{x} secondo il seguente schema triangolare:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{l,1}(\overline{x}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{l-1,2}(\overline{x}) & N_{l,2}(\overline{x}) & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 0 & 0 & N_{l-m+2,m-1}(\overline{x}) & \cdots & \cdots & N_{l,m-1}(\overline{x}) & 0 \\
 0 & N_{l-m+1,m}(\overline{x}) & \cdots & \cdots & \cdots & N_{l,m}(\overline{x}) & 0
 \end{array}$$

Si valuta quindi la combinazione lineare con i coefficienti c_i .

La complessità computazionale è di $3m(m-1)/2$ moltiplicazioni e divisioni e $2m(m-1)$ addizioni e sottrazioni per valutare tutte le $N_{i,m}$ non nulle, più m moltiplicazioni ed $m-1$ addizioni per la combinazione lineare finale.

Osservazioni

- Se $\bar{x} \neq t_l$ per $l = m, \dots, m+K+1$, per definizione di spline risulterà $s(\bar{x}^-) = s(\bar{x}^+)$ (cioè $(\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} s(x) \equiv \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} s(x))$).
- Se $\bar{x} = x_l$ e $molteplicità(x_l) = 1$, per definizione di spline, $s(x_l^-) \equiv s(x_l^+)$ if $m > 1$; questo implica che se calcoliamo $s(x_l^-)$ e $s(x_l^+)$ (cioè effettuiamo il limite per $x \rightarrow x_l^-$ e $x \rightarrow x_l^+$ nella formula ricorrente) otterremo lo stesso valore; in pratica $x_l^- \in [x_{l-1}, x_l)$ e $x_l^+ \in [x_l, x_{l+1})$ e perciò per $s(x_l^-)$ sarà $N_{l-1,1}(x_l^-) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^-) = 0$ per $i \neq l-1$ e per $s(x_l^+)$ sarà $N_{l,1}(x_l^+) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^+) = 0$ per $i \neq l$
- Se $\bar{x} = x_l$ e $molteplicità(x_l) = m$, allora sarà $s(x_l^-) \neq s(x_l^+)$; in questo caso è possibile calcolare entrambi i valori con la formula ricorrente. In pratica questa situazione capita per esempio se si sceglie la partizione stesa con

$$b = x_{m+K+1} = \dots = x_{2m+K}$$

e si vuole il valore della spline in $x = b$; in questo caso $s(b) = s(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} s(x)$.

se $x_{l-1} < x_l$ (cioè $x_l = x_{l+1} = \dots = x_{l+m-1}$) passando al limite nella relazione ricorrente, per $s(x_l^-)$ si ha $N_{l-1,1}(x_l^-) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^-) = 0$ per $i \neq l-1$ e per $s(x_l^+)$ si ha $N_{l+m-1,1}(x_l^+) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^+) = 0$ per $i \neq l+m-1$. In pratica $x_l^- \in [x_{l-1}, x_l)$ e $x_l^+ \in [x_{l+m-1}, x_{l+m})$.

1.4.2 Algoritmo 2

Vediamo ora un secondo algoritmo per la valutazione di una funzione spline, basato su una formula ricorrente sui coefficienti. Sapendo che

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(x)$$

per $x \in [t_l, t_{l+1})$ e sostituendo alla $N_{i,m}$ la sua definizione ricorrente in termini di funzioni base di ordine inferiore si ottiene:

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=l-m+1}^l c_i \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} + \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1} = \\ &= \sum_{i=l-m+2}^l c_i \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} + \sum_{i=l-m+2}^l c_{i-1} \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} = \\ &\quad \sum_{i=l-m+2}^l \frac{c_i(x - t_i) + c_{i-1}(t_{i+m-1} - x)}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1}(x) = \\ &= \sum_{i=l-m+2}^l c_i^{(1)} N_{i,m-1}(x) \end{aligned}$$

dove si è riscritto il valore della spline in un punto in termini di funzioni base di ordine $m-1$; procedendo allo stesso modo il valore della spline in un punto può essere scritta in termini di funzioni base di ordine $m-2$ e per la precisione:

$$= \sum_{i=l-m+3}^l c_i^{(2)} N_{i,m-2}(x)$$

procedendo nello stesso modo più volte si ottiene il valore della spline in un punto in termini di funzioni base di ordine 1 e cioè in termini di un solo coefficiente:

$$\dots = \sum_{i=l}^l c_i^{(m-1)} N_{i,1}(x) = c_l^{(m-1)} N_{l,1}(x) = c_l^{(m-1)}$$

Si è ottenuto che il valore della spline calcolato in x e' quello di una spline di ordine uno per un opportuno coefficiente. Lo schema che si ottiene e' quindi il seguente:

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{l-m+1} & c_{l-m+2} & \dots & \dots & c_l & \\
 & c_{l-m+2}^{(1)} & \dots & \dots & c_l^{(1)} & \\
 & \ddots & \dots & \dots & \vdots & \\
 & & \ddots & \dots & \vdots & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & c_l^{(m-1)} = s(x) &
 \end{array}$$

e in formule:

$$c_i^{[j]} = \frac{(x - t_i)c_i^{[j-1]}(x) + (t_{i+m-j} - x)c_{i-1}^{[j-1]}(x)}{t_{i+m-j} - t_i}$$

per $j = 1, \dots, m-1$ e $i = l-m+j-1, \dots, l$.

La complessità computazionale è di $3m(m-1)$ moltiplicazioni e divisioni e di $2m(m-1)$ addizioni e sottrazioni.

1.5 Derivate delle funzioni spline

Affrontiamo ora il problema del calcolo della derivata e dell'integrale di una funzione spline $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$.

Per quanto detto, $s(x)$ altro non è che un polinomio a tratti ciascuno definito su un intervallo chiuso a sinistra. Perciò, per essere sicuri dell'esistenza della derivata di una funzione spline, dobbiamo considerare la derivata destra. Infatti, nei punti di raccordo x_i , la spline $s(x)$ potrebbe essere solo continua o, addirittura, potrebbe essere discontinua (se la molteplicità di x_i è pari a m). La derivata destra, invece, esiste sempre perché nell'intervallo $[t_i, t_{i+1})$ la spline $s(x)$ è un polinomio, quindi è di classe C^∞ .

Data la funzione spline $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$, la sua derivata destra $D_+s(x)$ è ancora una spline di ordine $m-1$, definita sulla partizione Δ e sul nuovo vettore delle molteplicità $M' = (m'_1, m'_2, \dots, m'_k)$ dove $m'_i = \min(m-1, m_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$. Quindi:

$$D_+s(x) \in S(P_{m-1}, M', \Delta)$$

Applicando le proprietà delle derivate di una funzione, risulta che

$$D_+s(x) = D_+\left(\sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x)\right) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i D_+N_{i,m}(x)$$

Il problema del calcolo della derivata (destra) di una funzione spline si riduce al calcolo delle derivate destre delle B-spline normalizzate.

Se $t_i < t_{i+m}$ e $m > 1$, risulta:

$$D_+N_{i,m}(x) = (m-1) \left(\frac{N_{i,m-1}(x)}{t_{i+m-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_{i+1}} \right) \quad (1.1)$$

Dalla (1.1) appare evidente che la derivata della i -esima B-spline normalizzata viene espressa in funzione di B-spline di ordine $m - 1$, e quindi la derivata della spline $s(x)$ è una spline di ordine inferiore. Possiamo quindi rappresentare $D_+s(x) \in S(P_{m-1}, M', \Delta)$ come:

$$D_+s(x) = \sum_{i=2}^{m+K} c'_i N_{i,m-1}(x)$$

dove i coefficienti c'_i si possono ricavare dalla seguente relazione:

$$c'_i = \begin{cases} (m-1) \frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+m-1} - t_i} & t_i < t_{i+m-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione

Si possono calcolare anche le derivate di ordine superiore sia calcolando le derivate di ordine superiore delle B-spline che determinando la spline di ordine inferiore derivata:

$$D_+^{(j)} s(x) = \sum_{i=j}^{m+K} c_i^{(j)} N_{i,m-j}(x)$$

Usando la formula per i coefficienti, risulta:

$$c_i^{(j)} = \begin{cases} (m-j) \frac{c_i^{(j-1)} - c_{i-1}^{(j-1)}}{t_{i+m-j} - t_i} & t_i < t_{i+m-j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Affrontiamo ora il problema dell'integrazione di una funzione spline: essendo l'operatore di integrazione l'inverso dell'operatore di derivazione, l'integrale di una spline $s(x) \in S(P_{m-1}, M, \Delta)$ sarà una spline di ordine superiore, cioè:

$$\int s(x) dx \in S(P_m, M, \Delta)$$

Usando ancora la formula sui coefficienti, si può calcolare la primitiva di una funzione spline $s(x) \in S(P_{m-1}, M, \Delta)$

$$D_+^{(-1)} s(x) = \sum_{i=0}^{m+K+1} c_i^{(-1)} N_{i,m}(x).$$

dove:

$$c_i^{(-1)} = \frac{t_{i+m-1} - t_i}{m-1} c_i + c_{i-1}^{(-1)}$$

Il primo coefficiente $c_0^{(-1)}$ viene scelto arbitrariamente; sappiamo infatti che l'integrale è unico a meno di una costante additiva, che, in questo caso, dipende dalla scelta di $c_0^{(-1)}$.

Algoritmi geometrici per spline

3.1 Knot-Insertion

Sia Δ^* una partizione nodale e $\hat{t} \in [a, b]$ sia un nuovo nodo da inserire in Δ^* ; se $t_l < \hat{t} \leq t_{l+1}$, si può costruire una nuova partizione $\hat{\Delta}^* = \{\hat{t}_i\}_{i=1, \dots, 2m+K+1}$ dove i

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_i & \text{per } i \leq l \\ \hat{t} & \text{per } i = l + 1 \\ t_{i-1} & \text{per } i \geq l + 2 \end{cases}$$

Sarà $S(P_m, M, \Delta) \subset S(P_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$. Inserendo un nodo aumenta la dimensione dello spazio, e

$$s(x) \in S(P_m, M, \Delta) \Rightarrow s(x) \in S(P_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$$

Se le $N_{i,m}(x)$ $i = 1, \dots, m + K$ sono una base per $S(P_m, M, \Delta)$ e le $\hat{N}_{i,m}(x)$ $i = 1, \dots, m + K + 1$ sono una base per $S(P_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$, si vuole trovare la rappresentazione di $s(x)$ nella nuova base conoscendo la rappresentazione di $s(x)$ nella vecchia base. Un metodo potrebbe essere quello di risolvere un problema di interpolazione, ma ciò comporterebbe la risoluzione di un sistema lineare.

Nel 1980 furono proposte due differenti soluzioni ([Boeh80] e [Cohe80]); di seguito ne vedremo una.

Teorema 3.1 (knot-insertion) *Siano Δ^* e $\hat{\Delta}^*$ le due partizioni nodali definite, allora vale la seguente relazione:*

$$N_{i,m}(x) = \begin{cases} \hat{N}_{i,m}(x) & i \leq l-m \\ \frac{\hat{t}-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m}-\hat{t}_i} \hat{N}_{i,m}(x) + \frac{\hat{t}_{i+m+1}-\hat{t}}{\hat{t}_{i+m+1}-\hat{t}_{i+1}} \hat{N}_{i+1,m}(x) & l-m+1 \leq i \leq l \\ \hat{N}_{i+1,m}(x) & i \geq l+1 \end{cases}$$

Per la dimostrazione si veda [Boeh80].

Corollario 3.1 *Siano Δ^* e $\hat{\Delta}^*$ le partizioni nodali già definite, allora:*

$$\hat{c}_i = \begin{cases} c_i & i \leq l-m+1 \\ \lambda_i c_i + (1-\lambda_i) c_{i-1} & l-m+2 \leq i \leq l \\ c_{i-1} & i \geq l+1 \end{cases}$$

dove $\lambda_i = \frac{\hat{t}-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m}-\hat{t}_i}$.

Dimostrazione

I \hat{c}_i sono i coefficienti della $s(x)$ nella nuova base, infatti

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^{l-m} c_i \hat{N}_{i,m}(x) + \\ &+ \sum_{i=l-m+1}^l c_i (\lambda_i \hat{N}_{i,m}(x) + (1-\lambda_{i+1}) \hat{N}_{i+1,m}(x)) + \sum_{i=l+1}^{m+K} c_i \hat{N}_{i+1,m}(x) = \\ &\sum_{i=1}^{l-m+1} c_i \hat{N}_{i,m}(x) + \sum_{i=l-m+2}^l (\lambda_i c_i + (1-\lambda_i) c_{i-1}) \hat{N}_{i,m}(x) + \sum_{i=l+1}^{m+K+1} c_{i-1} \hat{N}_{i,m}(x). \end{aligned}$$

Osservazione

I λ_i per come sono fatti sono tutti numeri tra $(0,1) \forall i$, quindi i coefficienti \hat{c}_i sono una combinazione convessa dei c_i ed il loro calcolo risulta stabile. Un'attenzione particolare bisogna porla al termine $(1-\lambda_i)$, infatti se λ_i é vicino a 1 si ha un problema di cancellazione numerica. Per questo si consiglia di valutare $(1-\lambda_i)$ come $\frac{\hat{t}_{i+m}-\hat{t}}{\hat{t}_{i+m}-\hat{t}_i}$.

Osservazione

Si vuole rivisitare il problema della valutazione di una funzione spline in un punto \bar{x} ;

partendo da $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x)$, supponiamo di inserire \hat{t} in coincidenza del punto \bar{x} ottenendo così $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \hat{c}_i \hat{N}_{i,m}(x)$. Inserendo un secondo nodo \hat{t} in \bar{x} si ottiene $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+2} \hat{c}_i^{[2]} \hat{N}_{i,m}^{[2]}(x)$ e così via fino a $m-1$ inserimenti ottenendo:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{2m+K-1} \hat{c}_i^{[m-1]} \hat{N}_{i,m}^{[m-1]}(x)$$

ed

$$s(\bar{x}) = \hat{c}_l^{[m-1]} \hat{N}_{l,m}^{[m-1]}(x) = \hat{c}_l^{[m-1]}$$

in quanto \bar{x} è un nodo di molteplicità $m-1$ e quindi solo una funzione base è non nulla in \bar{x} .

Si ha quindi il seguente schema:

$$\begin{array}{cccccc} c_{l-m+1} & c_{l-m+2} & \dots & \dots & c_l & \\ & \hat{c}_{l-m+2}^{[1]} & \dots & \dots & \hat{c}_l^{[1]} & \\ & \ddots & \dots & \dots & \vdots & \\ & & \ddots & \dots & \vdots & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & \hat{c}_l^{[m-1]} = s(\bar{x}) & \end{array}$$

Questo algoritmo coincide con l'algoritmo dei coefficienti presentato per le spline, ma in realtà sono due algoritmi distinti. Infatti si sta considerando una spline in uno spazio che è $m-1$ volte più grande calcolando così dei \hat{c}_l , mentre quello che si è visto per le spline si basava nel fissare un particolare x usando uno spazio di ordine inferiore. In quel caso era solo una questione di rappresentazione delle spline nel punto. Per knot-insertion si ha quindi un nuovo algoritmo per il calcolo della spline.

3.2 Subdivision

Data $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$ con $x \in [a, b]$ e assegnato un certo $c \in [a, b]$ si vogliono determinare due spline, una definita su $[a, c]$, l'altra definita su $[c, b]$ che rappresentino la spline di partenza.

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & x \in [a, c] \\ s_2(x) & x \in [c, b] \end{cases}$$

Si applichi knot-insertion in c ripetutamente m volte;

Ora le funzioni base di questo nuovo spazio si possono dividere in quelle che hanno il supporto a sinistra di c e in quelle che lo hanno a destra; $s_1(x)$ apparterrà allo spazio generato dalle funzioni base a sinistra di c , $s_2(x)$ a quello generato dalle funzioni base a destra di c . I loro coefficienti sono generati da:

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & & \dots & & c_{m+K} & & \\ \hat{c}_1^{[1]} & & \dots & & \dots & & \hat{c}_{m+K+1}^{[1]} \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ \hat{c}_1^{[m]} & \dots & \hat{c}_l^{[m]} & \hat{c}_{l+1}^{[m]} & \dots & \dots & \hat{c}_{2m+K}^{[m]} \end{array}$$

dove da $\hat{c}_1^{[m]}$ a $\hat{c}_l^{[m]}$ sono i coefficienti di $s_1(x)$ e da $\hat{c}_{l+1}^{[m]}$ a $\hat{c}_{2m+K}^{[m]}$ sono quelli di $s_2(x)$. In particolare $\hat{c}_l^{[m]} = \hat{c}_{l+1}^{[m]}$

Osservazione

La valutazione per knot-insertion e la subdivision comportano lo stesso procedimento (infatti l' m -esima inserzione non ha altro effetto che sdoppiare il coefficiente $\hat{c}_l^{[m-1]}$ in $\hat{c}_l^{[m]}$ e $\hat{c}_{l+1}^{[m]}$) e quindi computazionalmente hanno lo stesso costo.

Osservazione

Visto che un polinomio nella base di Bernstein può essere visto come una spline senza nodi interni, è possibile effettuare una suddivisione di un polinomio in due polinomi nelle basi di Bernstein rispettivamente in $[0, c]$ e $[c, 1]$.

Dato

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) \quad x \in [0, 1]$$

si può ottenere:

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) = \sum_{i=0}^n \bar{c}_i B_{i,n}(x) & x \in [0, c] \\ p_2(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{c}_i B_{i,n}(x) & x \in [c, 1] \end{cases}.$$

3.3 Knot-Removal

Il problema consiste nel rappresentare una spline con un numero inferiore di nodi. La rappresentazione può essere intesa approssimata o esatta (in questa trattazione la intenderemo esatta).

Sia $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$ e $S(P_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$ uno spazio in cui è stato inserito \hat{t} . Dato $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \hat{c}_i \hat{N}_{i,m}(x)$ si vuole determinare $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x)$ nella base originale. Il problema consiste nel trovare i c_i conoscendo i \hat{c}_i

$$\hat{c}_i = \begin{cases} c_i & i = 1 \dots l - m + 1 \\ \lambda_i c_i + (1 - \lambda_i) c_{i-1} & i = l - m + 2, \dots, l \\ c_{i-1} & i = l + 1, \dots, m + K + 1 \end{cases}$$

che può essere interpretato come un sistema di $K + m + 1$ equazioni e $K + m$ incognite.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigcirc & \\ & (1 - \lambda_{l-m+2}) \lambda_{l-m+2} & & & & \\ & & (1 - \lambda_{l-m+3}) \lambda_{l-m+3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & \bigcirc & & & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{m+K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{c}_{m+K+1} \end{pmatrix}$$

Tale sistema poiché ha più equazioni che incognite ammette soluzione unica se la matrice dei coefficienti aumentata del vettore dei termini noti ha rango $K + m$. Praticamente, per la particolare forma della matrice, si può procedere alla determinazione dei c_i a partire dalla prima ed ultima equazione procedendo verso le equazioni centrali; se l'equazione centrale (le due equazioni centrali, a seconda che la matrice abbia un numero dispari o pari di righe) è soddisfatta allora il sistema ammette un'unica soluzione e i c_i trovati sono la soluzione; altrimenti il sistema non ammette soluzione. Per motivi numerici è sufficiente che l'equazione centrale sia soddisfatta a meno di una certa tolleranza ([PiTi94]).

3.4 Degree Elevation

Siano assegnati due polinomi di grado differente e si vogliano trovare le radici del polinomio differenza. Se

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

allora

$$p_3 = p_2(x) - p_1(x) = (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2 + (b_3 - 0)x^3$$

senza rendersene conto si é elevato $p_1(x)$ di grado, cioè

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + 0x^3$$

per poterlo sottrarre a $p_2(x)$ ed ottenere un polinomio $p_3(x) \in \mathbb{P}_3$. Tale passaggio non sarebbe così banale se i polinomi fossero stati espressi in un'altra base. Si consideri la base di Bernstein

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i \quad x \in [0,1]$$

Se $p_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x)$ e $p_2(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n+1}(x)$, bisogna prima rappresentare $p_1(x) \in \mathbb{P}_n$ nella base dei polinomi di Bernstein di grado $n+1$, quindi si può procedere alla differenza.

Questo procedimento di rappresentazione di un polinomio in una base di grado maggiore è noto come degree-elevation. Si dimostra che:

$$B_{i,n}(x) = \frac{n+1-i}{n+1} B_{i,n+1}(x) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(x)$$

che lega i polinomi di Bernstein di grado n a quelli di grado $n+1$.

Vale

$$(1-x)B_{i,n}(x) = \frac{n+1-i}{n+1} B_{i,n+1}(x)$$

e

$$xB_{i,n}(x) = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(x)$$

da cui sommando membro a membro si ha la relazione data.

Allora

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{n+1-i}{n+1} B_{i,n+1}(x) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(x) \right) =$$

distribuendo la sommatoria

$$= \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{n+1-i}{n+1} B_{i,n+1}(x) \right) + \sum_{i=0}^n c_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(x) =$$

quindi portando fuori il primo termine della prima sommatoria e l'ultimo termine della seconda si ottiene

$$\begin{aligned}
&= c_0 B_{0,n+1}(x) + \sum_{i=1}^n c_i \frac{n+1-i}{n+1} B_{i,n+1}(x) + \\
&+ \sum_{i=1}^n c_{i-1} \frac{i}{n+1} B_{i,n+1}(x) + c_n B_{n+1,n+1}(x) = \\
&= \sum_{i=0}^n \bar{c}_i B_{i,n+1}(x)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = c_0 \\ \bar{c}_i = 1/(n+1)(c_i(n+1-i) + c_{i-1}i) \\ \bar{c}_{n+1} = c_n \end{cases}$$

dove i \bar{c}_i sono combinazioni convesse dei c_i . Come si può fare un degree-elevation per spline?; una possibilità consiste in ([PiTi94]):

- subdivision in polinomi (in corrispondenza di ogni nodo si inserisce un numero opportuno di nodi, ottenendo una rappresentazione in polinomi di Bernstein)
- degree-elevation per ogni polinomio individuato
- knot-removal sui nodi interni fino al raggiungimento della continuità originale.

Un'altra possibilità deriva dal seguente risultato:

Teorema 3.2 (Identità di Micchelli) *Vale la seguente identità:*

$$N(x/t_i, \dots, t_{i+m}) =$$

$$1/m(N(x/t_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}) + \dots + N(x/t_i, \dots, t_{i+m}, t_{i+m}))$$

dove

$$N_{i,m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} N_{i,m}(x/\Delta^*) \stackrel{\text{def}}{=} N(x/t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m})$$

Notazioni

Δ^* partizione nodale originale, Δ^{*j} partizione nodale ottenuta dal Δ^* dove si è aumentata la molteplicità di 1 dei seguenti nodi:

$$\dots, t_{j-m}, t_j, t_{j+m}, t_{j+2m}, \dots$$

Allora l'identità del teorema può essere riscritta nel seguente modo:

$$N_{i,m}(x/\Delta^*) = 1/m(N_{i,m+1}(x/\Delta^{*i}) + \dots + N_{i,m+1}(x/\Delta^{*(i+m)}))$$

dove $\Delta^{*j} = \Delta^{*j+m}$.

Per quanto riguarda i coefficienti delle spline, li indicheremo con $\{c_i^j\}$ dove raddoppieremo $\dots, c_j, c_{j+m}, c_{j+2m}, \dots$ Quindi a partire da

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x/\Delta^*) = \text{sostituendo} = 1/m(\underbrace{s^1(x) + \dots + s^m(x)}_{\text{hanno partizione nodali diverse}})$$

Concludendo si ottiene che

$$s^j(x) = \sum_{i=1}^H c_i^j N_{i,m+1}(x/\Delta^{*j}) \text{ con } j = 1, \dots, m.$$

Tramite knot-insertion, possiamo uniformare le partizioni delle s^1, \dots, s^m ottenendo che la spline finale sia nella forma:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \tilde{c}_i N_{i,m+1}(x/\tilde{\Delta}^*)$$

dove $\tilde{\Delta}^*$ rappresenta la partizione nodale uniformata.

Esempio: sia $m=3$

Si cerca la rappresentazione della spline di ordine 4 elevando di 1 una spline di ordine 3:

$$s(x) = 1/3(\underbrace{s^1(x)}_{\Delta^{*1}} + \underbrace{s^2(x)}_{\Delta^{*2}} + \underbrace{s^3(x)}_{\Delta^{*3}})$$

Sia

$$s(x) = \sum_{i=1}^4 c_i N_{i,3}(x) =$$

per il teorema

$$= 1/3 \sum_{i=1}^4 c_i (N_{i,4}(x/\Delta^{*i}) + \dots + N_{i,4}(x/\Delta^{*(i+3)}) =$$

$$1/3[(c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*1}) + c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*2}) + c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*3}) +$$

$$\begin{aligned}
& +c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*4})) + \\
& +(c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*2}) + c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*3}) + c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*4}) + \\
& +c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*5})) + \\
& +(c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*3}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*4}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*5}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*6})) \\
& +(c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*4}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*5}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*6}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*7}))
\end{aligned}$$

Sapendo che $\Delta^{*j} = \Delta^{*(j+m)}$ poiché sono congrui modulo m , di conseguenza avremo che $\Delta^{*4} = \Delta^{*1} = \Delta^{*7}$, $\Delta^{*3} = \Delta^{*6}$ e $\Delta^{*2} = \Delta^{*5}$ riscriviamo allora la spline sulla stessa partizione nodale:

$$\begin{aligned}
& 1/3[c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*1}) + c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*1}) + c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*1}) + \\
& +c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*1}) + \\
& +c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*1}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*1}) + c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*2}) + \\
& +c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*2}) + \\
& +c_4 N_{2,4}(x/\Delta^{*2}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*2}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*4}) + c_1 N_{1,4}(x/\Delta^{*3}) + \\
& +c_2 N_{2,4}(x/\Delta^{*3}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*3}) + c_3 N_{3,4}(x/\Delta^{*3}) + c_4 N_{4,4}(x/\Delta^{*1}) = \\
& = 1/3 \left[\underbrace{\sum_{i=1}^6 c_i^1 N_{i,4}(x/\Delta^{*1})}_{S^1} + \underbrace{\sum_{i=1}^5 c_i^2 N_{i,4}(x/\Delta^{*2})}_{S^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^5 c_i^3 N_{i,4}(x/\Delta^{*3})}_{S^3} \right]
\end{aligned}$$

Quindi segue la fase di knot-insertion per uniformare le partizioni nodali. La difficoltà di implementazione di questo algoritmo consiste nel riuscire ad ottimizzarlo (vedi [Pra84], [PrPi91]).

3.5 Approssimazione di forma con spline

Definizione 3.1 (Variazione di segno di un vettore) Sia $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ un vettore ad elementi reali, si definisce numero di variazioni di segno di \mathbf{c} in senso forte

$$V^-[\mathbf{c}]$$

il numero di variazioni di segno nella sequenza c_1, \dots, c_n dove si ignorano gli zeri.

Esempio: Sia $\mathbf{c} = (-1, 3.2, 1.5, -3.7, 4)$ allora $V^-[\mathbf{c}] = 3$

Definizione 3.2 (Variazione di segno di una funzione) Sia f una funzione reale in $[a, b]$; si dirà che:

$$V^-[f(z)] = \sup_n \{V^-[f(z_1), \dots, f(z_n)] \text{ con } z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$$

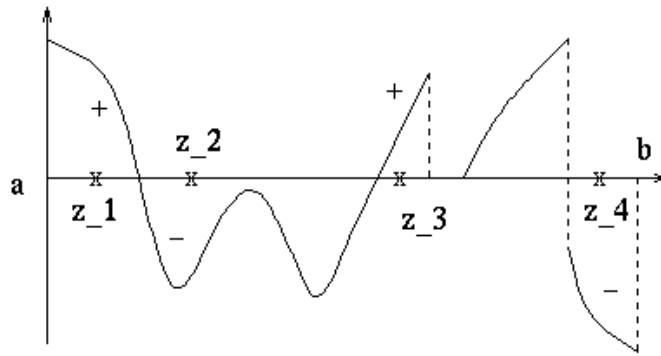


Figura 3.1: Variazioni di segno di una funzione

Teorema 3.3 (Proprietà di Variation Diminishing) Se $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$ è rappresentata nella base delle B-spline normalizzate, allora vale:

$$V^-[s(x)] \leq V^-[c_1, c_2, \dots, c_{m+K}]$$

Cioè la variazione in segno di una spline deve essere minore o uguale alla variazione dei suoi coefficienti.

Dimostrazione

Sia $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ la n -upla che verifica l'equazione

$$V^-[s(z)] = V^-[s(z_1), \dots, s(z_n)]$$

Applichiamo knot-insertion in modo da inserire $z_i, i = 1, \dots, n$, con molteplicità $m - 1$. Chiamando $\tilde{\Delta}^*$ la nuova partizione e \tilde{c}_i i nuovi coefficienti; si avrà che esiste un $\tilde{c}_j = s(z_i), i = 1, \dots, n$ per l'algoritmo di valutazione mediante knot insertion. Allora

$$(s(z_1), s(z_2), \dots, s(z_n)) \subset \tilde{\mathbf{c}}$$

quindi

$$V^-[s(z_1), \dots, s(z_n)] < V^-[\tilde{\mathbf{c}}]$$

dove i $\tilde{\mathbf{c}}$ sono i coefficienti ottenuti per knot-insertion. Per dimostrare il teorema basta quindi provare che $V^-[\tilde{\mathbf{c}}] \leq V^-[\mathbf{c}]$. Consideriamo il punto z_1 e lo inseriamo una volta; a partire da $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{m+K})$ si costruisce un nuovo vettore $\mathbf{c} \uplus \hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, c_1, \dots, \hat{c}_j, c_j, \dots, c_{m+K}, \hat{c}_{m+K+1})$ dove la maggior parte dei \hat{c}_j sono copia dei c_j , mentre $m - 1$ sono nuovi e vale

$$V^-[\mathbf{c}] = V^-[\mathbf{c} \uplus \hat{\mathbf{c}}]$$

infatti per i nuovi coefficienti dove può esserci differenza di segno, si nota che essendo combinazioni convesse dei vecchi, verranno mantenute le stesse variazioni. Ora costruiamo $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{m+K+1})$ ottenuto dal precedente togliendo gli elementi senza cappello.

Quindi $V^-[\hat{\mathbf{c}}] \leq V^-[\mathbf{c} \uplus \hat{\mathbf{c}}] = V^-[\mathbf{c}]$. Tutto questo dopo che si é inserito una volta z_1 ; procedendo nello stesso modo per tutti gli altri z_i si otterrà che $V^-[\tilde{\mathbf{c}}] \leq V^-[\mathbf{c}]$ dimostrando così il teorema.

Definizione 3.3 (Variation Diminishing Approximation (VDA))

Siano F, S spazi di funzioni (F spazio da approssimare, S spazio delle funzioni approssimanti). Sia $s : F \rightarrow S$ una trasformazione lineare; si dirá VDA se gode delle seguenti proprietà:

- Se $a + bx \in F \Rightarrow s(a + bx) = a + bx$ cioè preserva le funzioni lineari
- $V^-[s(f(x))] \leq V^-[f(x)] \forall f \in F$

Da queste due proprietà se ne può dedurre una più informale:

$$s(f(x) - (a + bx)) = s(f(x)) - s(a + bx) = s(f(x)) - (a + bx)$$

quindi

$$V^-[s(f(x) - (a + bx))] = V^-[s(f(x)) - (a + bx)]$$

$$V^-[s(f(x) - (a + bx))] \leq V^-[f(x) - (a + bx)]$$

allora

$$\bullet V^-[s(f(x)) - (a + bx)] \leq V^-[f(x) - (a + bx)]$$

dice che la $s(f(x))$ non può essere più oscillante della funzione $f(x)$ da approssimare, in quanto il numero di intersezioni della $s(f(x))$ con una retta è sempre minore o uguale al numero di intersezioni della $f(x)$ con quella retta.

Vediamo ora come trovare nello spazio delle spline una funzione approssimante VDA.

Teorema 3.4 *Sia $m > 2$ allora $\forall x \in [a, b]$ si ha:*

$$\sum_{i=1}^{m+K} \xi_i N_{i,m}(x) = x$$

dove $\xi_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=i+1}^{j+m-1} t_j$ sono detti nodes.

Definizione 3.4 (Variation Diminishing Spline Approx. VDSA)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e si consideri come approssimazione della $f(x)$, la $s(f(x))$ definita da:

$$s(f(x)) = \sum_{i=1}^{m+K} f(\xi_i) N_{i,m}(x)$$

dove le $N_{i,m}(x)$ sono definite su Δ^* a nodi aggiuntivi coincidenti e $t_i < t_{i+m}$ per $i = 1, \dots, m + K$; gli ξ_i sono i nodes.

Osservazione

Ogni $\xi_i \in [a, b]$ e per la precisione vale:

$$a \equiv \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m+K} \equiv b$$

Osservazione

$S(f(x)) \in C_{[a,b]}^0$ e valgono

$$S(f(a)) = f(a); S(f(b)) = f(b)$$

Verifica che $s(f(x))$ sia una VDA

dobbiamo verificare le due proprietà viste:

1) $s(f(x))$ deve preservare le funzioni lineari:

$$\begin{aligned} s(a + bx) &= \sum_{i=1}^{m+K} (a + b\xi_i) N_{i,m}(x) = \\ &= a \sum_{i=1}^{m+K} N_{i,m}(x) + b \sum_{i=1}^{m+K} \xi_i N_{i,m}(x) = a + bx \end{aligned}$$

dove nella prima sommatoria si è applicata la proprietà di partizione dell'unità mentre nella seconda l'ultimo teorema dato.

2) La $s(f(x))$ gode della proprietà di variation diminishing di una spline:

$$V^-[S(f(x))] \leq V^-[f(\xi_1), \dots, f(\xi_{m+K})]$$

poiché gli ξ_i sono in ordine crescente, individueranno sicuramente una n -pla che soddisfa la definizione di $V^-[f(x)]$ per cui

$$\leq V^-[f(x)]$$

verificando così la proprietà.

Osservazione

Se lo spazio delle spline è senza nodi interni, allora $\xi_i = i/(m-1)$, e $s(f(x)) \equiv B[f(x)]$ approssimazione di Bernstein della $f(x)$.

Teorema 3.5 *Condizione necessaria e sufficiente affinché $s(f(x))$ converga uniformemente a $f(x) \forall f \in C_{[a,b]}$ è che*

$$\frac{\max_i(t_{i+1} - t_i)}{m} \rightarrow 0$$

Quindi per avere convergenza si può aumentare il grado della approssimante oppure infittire la partizione nodale.

3.6 Interpretazione geometrica dei coefficienti di una spline

Definizione 3.5 Sia $m > 1$. Supponiamo che s sia una funzione spline combinazione lineare di B-spline, e gli ξ_i siano i nodes. Definiamo i punti $C_j = (\xi_j, c_j)$ per $j = 1, \dots, m+K$ ad essere i punti di controllo della spline s . La funzione c che interpola i valori c_j nei punti ξ_j per $j = 1, \dots, m+K$, tale che $c|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}$ è lineare sarà detta curva di controllo della spline.

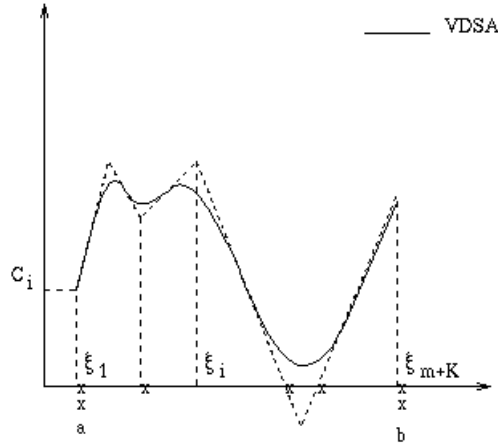


Figura 3.2: Interpretazione geometrica dei coefficienti di una spline

E' ora possibile dare un'interpretazione geometrica dell'algoritmo 2 per valutare una spline nel punto \bar{x} . Supponiamo $\{c_i^j\}$ siano i numeri prodotti dall'algoritmo 2. Per ogni $j = 0, \dots, m-1$ e $i = l-m+j+1, \dots, l$ questi numeri possono essere associati con i punti

$$C_i^j = (\xi_{ij}, c_i^j)$$

dove

$$\xi_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{h=i+1}^{i+m-j-1} t_h + \frac{j\bar{x}}{m-1}$$

si noti che $\xi_{l,m-1} = \bar{x}$ e che i ξ_{ij} dipendono dal punto \bar{x} eccetto quando $j = 0$, nel qual caso $\xi_{i0} = t_i$.

Proposizione 3.1 Per ogni $j = 1, \dots, m-1$ e $i = l-m+j+1, \dots, l$, i punti C_i^j giacciono sulla curva

$$G_i^j = \{(\xi, g_i^j(\xi)), \quad \xi \in [\xi_{i-1,j-1}, \xi_{i,j-1}]\}$$

dove g_i^j è la funzione lineare che interpola c_{i-1}^{j-1} e c_i^{j-1} in $\xi_{i-1,j-1}$ e $\xi_{i,j-1}$ rispettivamente.

Dimostrazione

La funzione g_i^j è data da

$$g_i^j(\xi) = \frac{\xi - \xi_{i-1,j-1}}{\xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j-1}} c_i^{j-1} + \frac{\xi_{i,j-1} - \xi}{\xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j-1}} c_{i-1}^{j-1}$$

Per $\xi = \xi_{ij}$ e se a $\xi_{i-1,j-1}$, $\xi_{i,j-1}$ e $\xi_{i,j}$ si sostituisce la definizione data, questa si riduce alla forma dell'algoritmo 2 e si ha $g_i^j(\xi_{ij}) = c_i^j$.

3.7 Funzioni spline di interpolazione

Le funzioni spline possono essere usate, oltre che per approssimare l'andamento di un insieme di punti, per effettuare l'interpolazione di un insieme di valori $\{x_i\}$ e le corrispondenti osservazioni $\{y_i\}$. Il problema di interpolazione con funzioni spline non differisce dai problemi di interpolazione con funzioni appartenenti ad un generico spazio \mathcal{S} (ad esempio, lo spazio dei polinomi); in questo caso, lo spazio in cui si cerca la funzione interpolante è $S(P_m, M, \Delta)$. Si fa, quindi, la distinzione tra interpolazione di Lagrange, quando i punti da interpolare sono tutti distinti, o di Hermite, quando i punti possono essere coincidenti.

Descriviamo, nei prossimi paragrafi, alcuni dei metodi di interpolazione con funzioni spline.

3.7.1 Interpolazione di Lagrange

Teorema 3.6 (Interpolazione di Lagrange) Sia $\Delta^* = \{t_i\}_{i=1, \dots, 2m+K}$ la partizione estesa associata a $S(P_m, M, \Delta)$ e siano $\{N_{i,m}(x)\}_{i=1, \dots, m+K}$ le B-spline normalizzate definite su Δ^* ; siano, poi, $\{x_j\}_{j=1, \dots, m+K}$ punti di interpolazione dati in ordine crescente stretto:

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{m+K-1} < x_{m+K} \leq b.$$

Dati i valori $\{y_j\}_{j=1, \dots, m+K}$, il sistema:

$$\sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x_j) = y_j \quad j = 1, \dots, m+K$$

ha un'unica soluzione $c_i \quad i = 1, \dots, m+K \iff$ tutti i valori $N_{i,m}(x_i)$; $i = 1, \dots, m+K$ non sono nulli.

Osservazione

$N_{i,m}(x_i) \neq 0$ se x_i appartiene al supporto di $N_{i,m}$; ciò equivale a richiedere che:

1.

$$t_i < x_i < t_{i+m} \quad \text{se} \quad t_i < t_{i+m-1}$$

2.

$$t_i \leq x_i < t_{i+m} \quad \text{se} \quad t_i \equiv t_{i+m-1}$$

3.

$$t_i < x_i \leq t_{i+m} \quad \text{se} \quad t_{i+1} \equiv t_{i+m}$$

Le condizioni precedenti sono dette *condizioni di Schoenberg-Whitney*.

Il teorema indica come scegliere la partizione nodale affinché l'interpolante esista e sia unica.

3.7.2 Interpolazione di Hermite

Siano

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

punti di interpolazione ed y_1, \dots, y_n le osservazioni.

Si definisce:

$$d_i = \max\{j/x_i = \dots = x_{i-j}\} \quad i = 1, \dots, n$$

d_i , quindi, è il numero di punti coincidenti a sinistra con x_i .

Dato l'insieme di funzioni $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, n}$, vogliamo trovare

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x)$$

tale che:

$$D_+^{(d_i)}(\psi(x_i)) = y_i \quad i = 1, \dots, n$$

D_+ simboleggia la derivata destra; quando andiamo ad interpolare i punti coincidenti con l'estremo destro dell'intervallo di definizione, in cui la derivata destra non esiste, dovremo richiedere la derivata sinistra; definiamo per questi casi:

$$e_i = \max\{j/x_i = \dots = x_{i+j}\} \quad i = 1, \dots, n$$

cioè il numero di punti coincidenti a destra con x_i e imporre

$$D_-^{(e_i)}(\psi(x_i)) = y_i \quad i = 1, \dots, n$$

Teorema 3.7 Sia $\Delta^* = \{t_j\}_{j=1, \dots, 2m+K}$ la partizione estesa associata a $S(P_m, M, \delta)$; siano $\{N_{j,m}(x)\}_{j=1, \dots, m+K}$ le B-spline normalizzate definite su Δ^* ; siano, poi, $\{x_i\}_{i=1, \dots, m+K}$ punti di interpolazione dati in ordine non decrescente:

$$a \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m+K} \leq b \quad \text{con} \quad x_i < x_{i+m} \quad \forall i$$

Allora il determinante della matrice:

$$\{D_+^{(d_i)}(N_{j,m}(x_i))\}_{i,j=1, \dots, m+K}$$

$(D_-^{(e_i)}(N_{j,m}(x_i)))$ se $x_i = b$ è non nullo se e solo se tutti i valori di $D_+^{(d_j)}(N_{j,m}(x_j))_{j=1, \dots, m+K}$ non sono nulli.

Osservazione

$D_+^{(d_j)}(N_{j,m}(x_j)) \neq 0$ se x_j appartiene al supporto di $D_+^{(d_j)}(N_{j,m})$, cioè:

$$\begin{aligned} t_j &\leq x_j < t_{j+m} && \text{se } d_j \geq m - \alpha_j \\ t_j &< x_j \leq t_{j+m} && \text{se } d_j \geq m - \beta_{j+m} \\ t_j &< x_j < t_{j+m} && \text{altrimenti} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \max\{i/t_j = \dots = t_{j+i-1}\} \\ \beta_{j+m} &= \max\{i/t_{j+m} = \dots = t_{j+m-i+1}\} \end{aligned}$$

Se queste condizioni sono verificate, il problema di interpolazione alla Hermite ha un'unica soluzione.

3.7.3 Spline cubica di interpolazione periodica

Queste spline non possono essere classificate né nell'interpolazione di Lagrange né in quella di Hermite; non esistendo un supporto teorico per esse, ogni volta si deve verificare l'esistenza e l'unicità dell'interpolante.

Dato un insieme di punti di interpolazione $\{x_i\}_{i=0, \dots, K+1}$ e le corrispondenti osservazioni $\{y_i\}_{i=0, \dots, K+1}$ tali che $y_0 \equiv y_{K+1}$, vogliamo trovare la spline $s \in S(P_4, M, \Delta)$ tale che:

$$\begin{aligned} s(x_i) &= y_i \quad i = 0, \dots, K+1 \\ s'(x_0) &= s'(x_{K+1}) \\ s''(x_0) &= s''(x_{K+1}) \end{aligned}$$

Scegliamo una partizione nodale siffatta:

$$t_4 \equiv x_0, t_5 \equiv x_1, \dots, t_{K+4} \equiv x_K, t_{K+5} \equiv x_{K+1}$$

ed i nodi aggiuntivi determinati come segue:

$$\begin{cases} t_3 = a - (b - t_{K+4}) \\ t_2 = a - (b - t_{K+3}) \\ t_1 = a - (b - t_{K+2}) \\ t_{K+6} = b + (t_5 - a) \\ t_{K+7} = b + (t_6 - a) \\ t_{K+8} = b + (t_7 - a) \end{cases}$$

Allora le condizioni di periodicità saranno banalmente soddisfatte se:

$$\begin{cases} c_1 = c_{K+2} \\ c_2 = c_{K+3} \\ c_3 = c_{K+4} \end{cases}$$

Imponendo le restanti condizioni si ottiene un sistema $(K+1) \times (K+1)$ della forma:

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & X \\ X & X & X & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & X & X & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & X & X & X & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X & X & X \\ X & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \vdots \\ c_{K+1} \\ c_{K+2} \\ c_{K+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{K-2} \\ y_{K-1} \\ y_K \end{pmatrix}$$

Tale sistema si può dimostrare avere un'unica soluzione in quanto la matrice è a diagonale dominante.

3.8 Funzioni spline di approssimazione

Possiamo utilizzare le funzioni spline per risolvere problemi di approssimazione in norma. In particolare, il problema di approssimazione affrontato è quello in norma 2 (minimi quadrati) nel caso discreto (approssimazione di un insieme di punti).

Osservazione

Tale problema si riferisce al caso in cui:

$$n \gg m + K$$

dove n è il numero dei punti ed $m + K$ la dimensione di $S(P_m, M, \Delta)$, spazio in cui si cerca l'approssimante.

3.8.1 Approssimazione ai minimi quadrati.

Dato l'insieme $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tale che:

$$a \equiv x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

e le osservazioni y_1, \dots, y_n , si cerca la spline $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x), \text{ che renda minima la}$$

$$\sum_{l=1}^n (y_l - s(x_l))^2$$

Si dimostra che esiste sempre una soluzione; l'unicità nel caso discreto deve essere verificata di volta in volta.

Si dimostra con semplici calcoli che $\sum_{l=1}^n (y_l - s(x_l))^2$ ha minimo se:

$$\sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{k,m}(x_l) N_{j,m}(x_l) = \sum_{l=1}^n y_l N_{k,m}(x_l) \quad \forall \quad k = 1, \dots, m+K$$

Possiamo scrivere ciò in forma matriciale come $G\underline{c} = \underline{b}$.

Sia H la matrice delle funzioni base calcolate nei punti di approssimazione:

$$H = \{h_{l,j}\} = \{N_{j,m}(x_l)\} \quad l = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m+K$$

allora, la matrice G può essere espressa come $G = H^T H$, cioè:

$$G = \{g_{i,j}\} = \left\{ \sum_{l=1}^n N_{i,m}(x_l) N_{j,m}(x_l) \right\}_{i,j=1,\dots,m+K}$$

La dimensione di H è $n \times (m+K)$. Se H ha rango massimo, allora G è non singolare e, perciò, il sistema ha un'unica soluzione; H ha rango massimo se dagli n punti di approssimazione si possono estrarre $m+K$ punti con cui risolvere il problema di interpolazione; se esistono abbiamo trovato un minore $(m+K) \times (m+K)$ con determinante diverso da zero; perché ciò sia vero, bisogna che siano soddisfatte le condizioni di Schoenberg-Whitney su almeno $m+K$ punti:

Teorema 3.8 *La matrice H ha rango massimo se esiste una successione di indici $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m+K} \leq n$ per cui:*

$$t_i < x_{j_i} < t_{i+m}, \quad i = 1, \dots, m+K$$

(condizioni di Schoenberg-Whitney)

dove i t_i sono i nodi della partizione estesa Δ^* .

3.8.2 Approssimazione ai minimi quadrati vincolata

Il problema da risolvere è lo stesso, cioè: dato l'insieme $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tale che:

$$a \equiv x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

e le osservazioni y_1, \dots, y_n , si cerca la spline $s(x) \in S(P_m, M, \Delta)$,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x), \text{ che renda minima la}$$

$$\sum_{l=1}^n (y_l - s(x_l))^2$$

ma sottoposta ad ulteriori vincoli:

- interpolazione del primo e dell'ultimo punto di approssimazione.
Consideriamo una partizione estesa Δ^* tale che i nodi interni soddisfino le condizioni di Schoenberg-Whitney (per l'unicità della spline di approssimazione), i nodi esterni siano coincidenti negli estremi dell'intervallo; quest'ultima condizione implica il passaggio della funzione per il primo e per l'ultimo punto

$$\iff \begin{cases} c_1 = y_1 & (\iff s(x_1) = y_1) \\ c_{m+K} = y_n & (\iff s(x_n) = y_n) \end{cases}$$

Ora, cerchiamo \underline{c} tale che $H\underline{c} = \underline{y}$, cioè $H^T H \underline{c} = H^T \underline{y}$. Grazie alle condizioni di interpolazione del primo ed ultimo punto, la matrice H può essere ridotta delle incognite c_1 e c_{m+K} , perciò si ottiene un sistema $\overline{H}\underline{c} = \underline{y}$ ancora rettangolare di cui cerchiamo il minimo.

Risolvendo il sistema $\overline{H}^T \overline{H} \underline{c} = \overline{H}^T \underline{y}$ otterremo la spline che minimizza la distanza tra la funzione spline e i punti dati, con il vincolo di avere già assegnato i coefficienti c_1, c_{m+K} .

- Condizione di periodicità.
Consideriamo solo spline cubiche per risolvere questo problema. Dati gli $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ e le osservazioni $\{y_i\}_{i=0,\dots,n}$, vogliamo trovare la funzione spline $s(x)$ che approssimi i punti dati e soddisfi le condizioni di periodicità:

$$\begin{cases} s(x_0) = s(x_n) \\ s'(x_0) = s'(x_n) \\ s''(x_0) = s''(x_n) \end{cases}$$

Scegliamo una partizione nodale che renda il sistema più facilmente calcolabile:

- Δ è tale che siano soddisfatte le condizioni di Schoenberg-Whitney su almeno $K + 4$ punti (\implies esiste una spline approssimante dei punti dati);
- i nodi aggiuntivi sono definiti nel seguente modo:

$$\begin{cases} t_3 = a - (b - t_{K+4}) \\ t_2 = a - (b - t_{K+3}) \\ t_1 = a - (b - t_{K+2}) \\ t_{K+6} = b + (t_5 - a) \\ t_{K+7} = b + (t_6 - a) \\ t_{K+8} = b + (t_7 - a) \end{cases}$$

Ovvero, andiamo a creare, a sinistra di a , la stessa situazione nodale che c'è a destra di b .

Imponiamo, poi, che:

$$\begin{cases} c_1 \equiv c_{K+2} \\ c_2 \equiv c_{K+3} \\ c_3 \equiv c_{K+4} \end{cases}$$

Ora le tre condizioni di periodicità sono soddisfatte. Il sistema in forma matriciale può essere scritto come $H\underline{c} = \underline{y}$; H ha dimensione $(n+1) \times (K+4)$. L'esistenza ed unicità della soluzione dipende dall'esistenza di un minore non singolare della matrice H (vedi teorema 3.8).

Sostituendo i coefficienti che già conosciamo, cioè c_1 , c_{K+3} e c_{K+4} , si ottiene una matrice \overline{H} di dimensione $(n+1) \times (K+1)$; sia $\overline{G} = \overline{H}^T \overline{H}$ essa avrà dimensione $(K+1) \times (K+1)$, risolvendo il sistema $\overline{G}\underline{c} = \overline{H}^T \underline{y}$ si ricava \underline{c} con il vincolo che i primi tre coefficienti siano uguali agli ultimi tre.

\overline{G} è simmetrica, definita positiva e a banda poiché utilizziamo B-spline.

Curve Spline

4.1 Curve in forma parametrica

Una curva $\underline{C}(t) \in \mathbb{R}^d$ in forma parametrica è rappresentata da:

$$\underline{C}(t) = \begin{pmatrix} x_1 = C_1(t) \\ \vdots \\ x_d = C_d(t) \end{pmatrix}$$

con $t \in [0, 1]$ parametro.

In pratica, la curva $\underline{C}(t)$ è una funzione vettoriale. Se le funzioni componenti sono funzioni spline (cioè $C_1(t), \dots, C_d(t) \in S(P_m, M, \Delta)$), allora la curva $\underline{C}(t)$ è detta *curva spline in forma parametrica*.

4.2 Curve spline approssimanti di forma

Definizione 4.1 Curva 2D approssimante di forma.

Data una curva 2D $\underline{G}(t)$, si dice che la curva 2D $\underline{C}(t)$ è approssimante di forma della $\underline{G}(t)$ se il numero delle intersezioni tra la $\underline{C}(t)$ ed una retta qualsiasi non supera il numero di intersezioni tra la $\underline{G}(t)$ e la medesima retta.

Teorema 4.1 Siano $P_i \equiv (x_i, y_i)_{i=1, \dots, m+K}$ punti in \mathbb{R}^2 . La curva spline approssimante di forma della poligonale di vertici P_i è data da

$$\underline{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m+K} P_i N_{i,m}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m+K} x_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=1}^{m+K} y_i N_{i,m}(t) \end{pmatrix}$$

I P_i vengono detti punti di controllo della spline e la poligonale è detta curva di controllo.

Dimostrazione

Prendiamo una qualsiasi retta del piano di equazione $ax + by + c = 0$ e cerchiamo le intersezioni con la $\underline{C}(t)$ mettendo a sistema la $\underline{C}(t)$ con la retta.

$$a \sum_{i=1}^{m+K} x_i N_{i,m}(x) + b \sum_{i=1}^{m+K} y_i N_{i+m}(x) + c = 0$$

Ricordando che $\sum_{i=1}^{m+K} N_{i,m}(x) = 1$ possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{m+K} (ax_i + by_i + c) N_{i,m}(t) = 0$$

che é una funzione spline che gode della proprietà VD dei coefficienti:

$$V^-[aC_1(t) + bC_2(t) + c] \leq V^-[ax_i + by_i + c], \quad i = 1, \dots, m + K$$

.

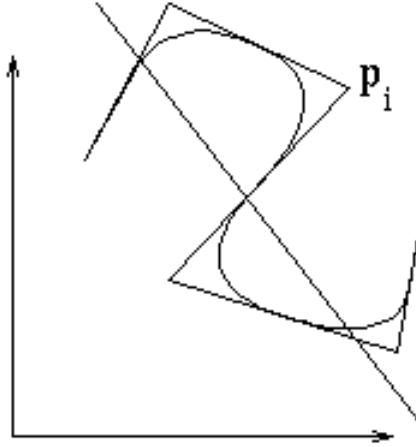


Figura 4.1: Curva spline di approssimazione di forma

Definizione 4.2 Curva 3D approssimante di forma.

Data una curva 3D $\underline{G}(t)$, si dice che la curva 3D $\underline{C}(t)$ è approssimante di forma della $\underline{G}(t)$ se il numero delle intersezioni tra la curva $\underline{C}(t)$ ed un qualunque piano non supera il numero di intersezioni tra la $\underline{G}(t)$ e lo stesso piano.

4.3 Curve spline di interpolazione

Siano dati n punti $Q_i \equiv (x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$; si vuole determinare la curva spline $\underline{C}(t)$ che interpola i punti Q_i , cioè si cerca la curva in forma parametrica

$$\underline{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m+K} a_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=1}^{m+K} b_i N_{i,m}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m+K} P_i N_{i,m}(t)$$

dove $P_i = (a_i, b_i)$, $m + K = n$ e tale che siano verificate le condizioni di interpolazione:

$$\begin{cases} C_1(t_i) = x_i \\ C_2(t_i) = y_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Il problema di interpolazione con una curva spline si riduce a due problemi di interpolazione con funzioni spline, cioè si cercano: la funzione $C_1(t)$ che interpola i punti (t_i, x_i) e la funzione $C_2(t)$ che interpola i punti (t_i, y_i) . Determiniamo, innanzitutto, i valori parametrici t_i in corrispondenza dei quali interpolare.

Metodo della parametrizzazione uniforme. Consiste nel suddividere l'intervallo $[0, 1]$ in $n - 1$ sottointervalli di uguali ampiezze, ovvero nel prendere n punti equidistanti:

$$t_i = \frac{i - 1}{n - 1} \quad i = 1, \dots, n.$$

Questo tipo di parametrizzazione, però, non tiene conto della distanza relativa dei punti sulla curva.

Per ovviare a questo inconveniente si usa il metodo seguente:

Metodo della parametrizzazione della corda. In questo caso si tiene conto della geometria dei punti, poiché si mantengono invariati i rapporti:

$$\frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_{i+1}} = \frac{\|Q_{i+1} - Q_i\|_2}{\|Q_{i+2} - Q_{i+1}\|_2}$$

Per determinare i valori t_i si può procedere come segue:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0 \\ \tau_i &= \tau_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$^1 \|f\|_2 = \sqrt{|x_{i1}|^2 + |x_{i2}|^2 + \dots + |x_{in}|^2} \text{ conf } f = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

Infine si ottengono i valori:

$$t_i = \frac{\tau_i}{\tau_n} \quad i = 1, \dots, n$$

Una volta scelti i parametri t_i , cerchiamo delle condizioni sui punti di interpolazione che ci assicurino che la funzione spline di interpolazione esista e sia unica. I metodi utilizzabili sono quelli visti a proposito di funzioni spline.

4.4 Curve spline di approssimazione

Possiamo risolvere problemi di approssimazione (ad esempio, ai minimi quadrati) cercando la curva, approssimante nello spazio delle spline.

Siano assegnati n punti nel piano euclideo $Q_i = (x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$. Il nostro obiettivo è determinare la curva spline:

$$\underline{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m+K} P_i N_{i,m}(t)$$

con $C_1(t), C_2(t) \in S(P_m, M, \Delta)$ che rende minima la seguente espressione:

$$\sum_{i=1}^n (\|Q_i - \underline{C}(t_i)\|)^2 = \sum_{i=1}^n ((x_i - C_1(t_i))^2 + (y_i - C_2(t_i))^2)$$

Come nel caso dell'interpolazione, il problema della determinazione di una curva spline che approssimi i punti Q_i , può essere scomposto in due sottoproblemi, cioè nella ricerca di due funzioni spline ($C_1(t)$ e $C_2(t) \in S(P_m, M, \Delta)$) che approssimino (ai minimi quadrati) rispettivamente i punti (t_i, x_i) e (t_i, y_i) per $i = 1, \dots, n$. I metodi di approssimazione che possiamo usare sono quelli visti per le funzioni spline: basta trovare le due funzioni componenti della curva applicando due volte il metodo scelto.

Il primo passo da fare è, ancora una volta, la determinazione dei parametri t_i a cui far corrispondere i punti Q_i . I metodi utilizzabili sono:

- Parametrizzazione uniforme
- Parametrizzazione della corda

4.5 Invarianza dell'interpolazione e approssimazione per trasformazioni geometriche

Risulta interessante esaminare se una curva spline ottenuta per interpolazione o approssimazione in norma 2 di un insieme ordinato di punti sia invariante per trasformazioni geometriche. Si possono dimostrare i seguenti risultati:

Parametrizzazione uniforme: si ha l'invarianza sia nel caso dell'interpolazione che dell'approssimazione;

Parametrizzazione della corda: in generale non si ha l'invarianza né per l'interpolazione né per l'approssimazione; l'unica trasformazione non invariante è la scala non uniforme.

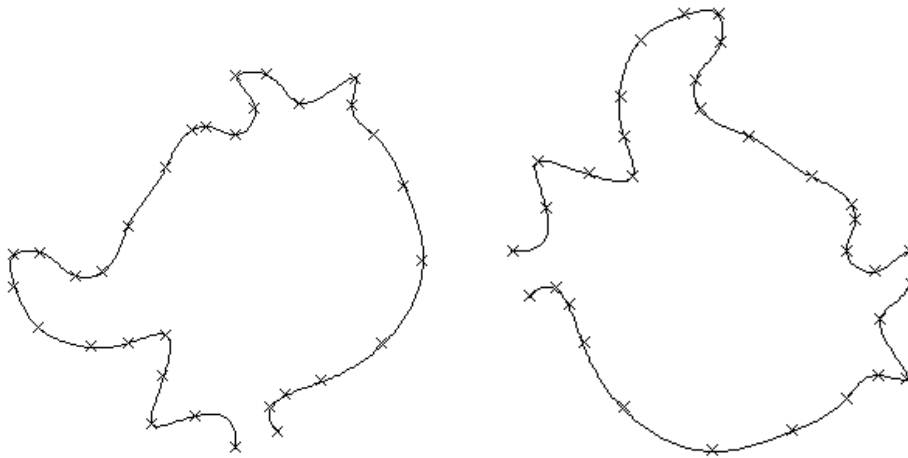


Figura 4.2: Invarianza dell'interpolazione per rotazione

