Regressione con regolarizzazioni differenziali per dati spazio-temporali, con applicazione all'analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia

Gabriele Mazza

29 Aprile 2015

Introduzione

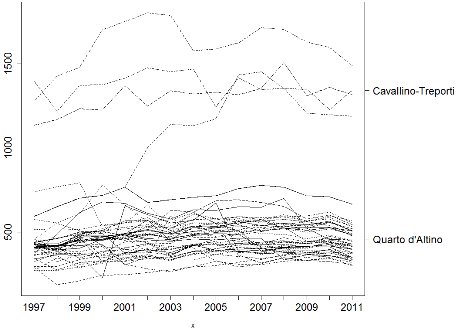
In questo lavoro di tesi è costruito e analizzato il modello di *Regressione Spazio-Temporale con Penalizzazioni Differenziali* (ST-PDE) per dati distribuiti in spazio e tempo:

$$z = f(\boldsymbol{p}, t)$$

con $\boldsymbol{p} \in \Omega$, $t \in [T_1, T_2]$.

Grande attenzione sarà dedicata al dominio spaziale.

L'applicazione scelta riguarda l'analisi della produzione di rifiuti urbani nella provincia di Venezia tra il 1997 e il 2011



Presentazione modello ST-PDE

Definisco:

- $\{\boldsymbol{p}_i = (x_i, y_i); i = 1, \ldots, n\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- $\{t_j; j = 1, \ldots, m\} \subset [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$
- z_{ij} osservazioni in $(\boldsymbol{p}_i, t_j)$

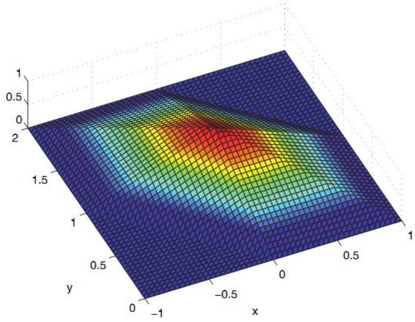
Modello:

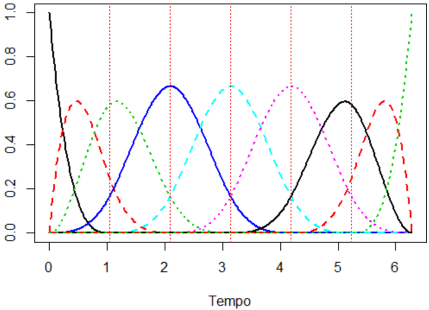
$$z_{ij} = f(\boldsymbol{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, m$$

ε_{ij} rumore iid di media nulla e varianza σ^2

Funzioni di base in spazio e tempo:

$\{\varphi_k(t); k = 1, \dots, M\}$	basi temporali definite in $[T_1, T_2]$
$\{\psi_l(\boldsymbol{p}); l = 1, \dots, N\}$	basi spaziali definite in Ω





La funzione è espressa tramite le funzioni di base:

$$f(\boldsymbol{p}, t) = \sum_{k=1}^{M} a_k(\boldsymbol{p})\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{N} b_l(t)\psi_l(\boldsymbol{p}) = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} c_{lk}\psi_l(\boldsymbol{p})\varphi_k(t)$$

La soluzione si ricaverà minimizzando il funzionale di penalizzazione:

$$J_{\boldsymbol{\lambda}}(f(\boldsymbol{p}, t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(z_{ij} - f(\boldsymbol{p}_i, t_j)\right)^2 +$$

$$+ \lambda_S \sum_{k=1}^{M} \int_{\Omega} \Big(\Delta(a_k(\boldsymbol{p}))\Big)^2 d\boldsymbol{p} + \lambda_T \sum_{l=1}^{N} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial^2 b_l(t)}{\partial t^2}\right)^2 dt \ .$$

Dati i vettori:

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1M} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{NM} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi}_x = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial x \\ \partial\psi_2/\partial x \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial x \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi}_y = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial y \\ \partial\psi_2/\partial y \\ \vdots \\ \partial\psi_N/\partial y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{nm} \end{bmatrix}$$

e le matrici:

- $P_S = R_1 R_0^{-1} R_1 \qquad R_0 = \int_\Omega \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}^T d\boldsymbol{p}\ , R_1 = \int_\Omega (\boldsymbol{\psi}_x\boldsymbol{\psi}_x^T + \boldsymbol{\psi}_y\boldsymbol{\psi}_y^T) d\boldsymbol{p}$
- $P_T|_{k_1,k_2} = \int_{T_1}^{T_2} \varphi''_{k_1}(t)\varphi''_{k_2}(t)$
- $P = \lambda_S\ (P_S \otimes I_M)\ +\ \lambda_T\ (I_N \otimes P_T)$
- $B = \Psi \otimes \Phi \qquad \Psi|_{i,l} = \psi_l(\boldsymbol{p}_i)\ , \Phi|_{j,k} = \varphi_k(t_j)$

Allora:

$$J_\lambda(\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{z} - B\boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{z} - B\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}^T P \boldsymbol{c} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{c}} = (B^T B + P)^{-1} B^T \boldsymbol{z}$$

Si inseriscono nel modello p possibili covariate:

$$z_{ij} = \boldsymbol{w}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + f(\boldsymbol{p}_i, t_j) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, m$$

Data la matrice disegno W, che si ottiene accostando per colonna i vettori di covariate, allora:

$$J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{z} - W\boldsymbol{\beta} - B\boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{z} - W\boldsymbol{\beta} - B\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}^t S \boldsymbol{c}$$

Derivando:

$$\begin{cases} W^T W \hat{\boldsymbol{\beta}} = W^T(\boldsymbol{z} - B\hat{\boldsymbol{c}}) \\ (B^T B + P)\hat{\boldsymbol{c}} = B^T(\boldsymbol{z} - W\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} = (W^T W)^{-1} W^T(\boldsymbol{z} - B\hat{\boldsymbol{c}}) \\ \hat{\boldsymbol{c}} = AQ\boldsymbol{z} \end{cases}$$

con

$$Q = [I - W(W^T W)^{-1} W^T] \qquad A = [B^T Q B + P]^{-1} B^T$$

Studi di simulazione

Le simulazioni sono state eseguite simulando da $f(\boldsymbol{p}, t) = g(\boldsymbol{p}) cos(t)$: del rumore:

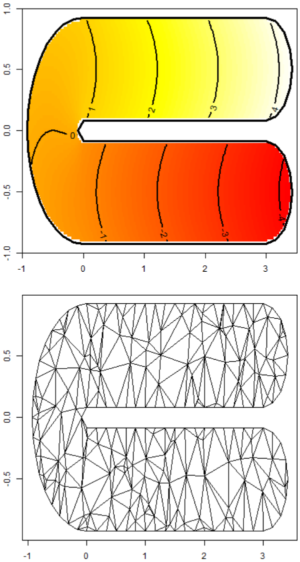
$$z_{ij} = f(\boldsymbol{p}_i, t_j) + \beta w_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad \forall i, \forall j$$

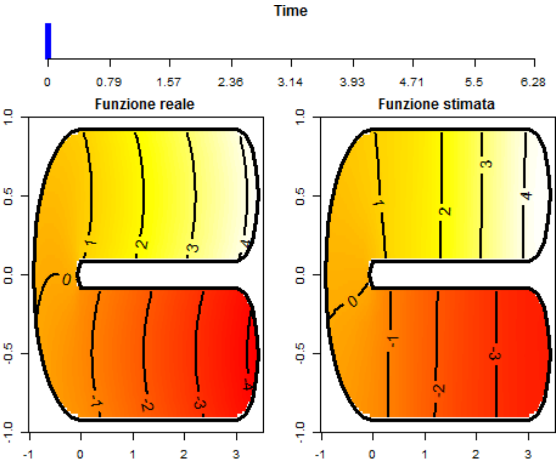
dove:

- $\beta = 1$ (eventuale)
- $w_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1) \qquad \forall i, \forall j$
- $\varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 0.5^2) \qquad \forall i, \forall j$

I parametri di smoothing sono calcolati tramite GCV:

- senza covariata $\boldsymbol{\lambda} = (10^{-0.375}, 10^{-3.25})$
- con covariata $\boldsymbol{\lambda} = (10^{-0.5}, 10^{-3.25})$



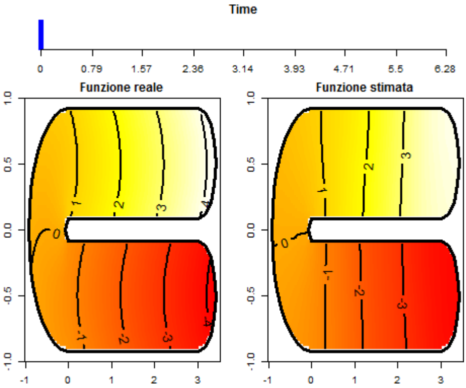

Time
0
0.79
1.57
2.36
3.14
3.93
4.71
5.5
6.28
Funzione reale
Funzione stimata
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1
0
1
2
3
4
-2
-3
-4

Il modello stima:

$$\hat{\beta} \approx 1.001$$

IC approssimato:

$$\beta \in [0.9809; 1.0225]$$

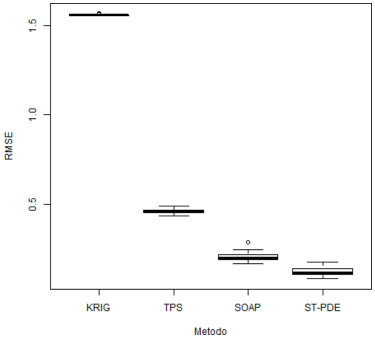


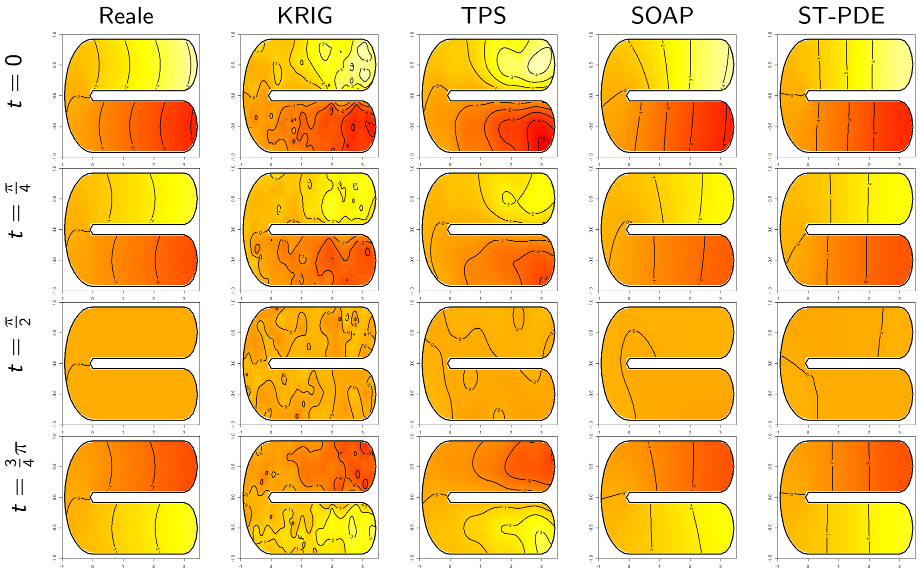
Confronto con altri metodi

L'algoritmo è stato confrontato con altre tecniche già esistenti:

- KRIG: modello basato su kriging spazio-temporale
- TPS: basi in spazio *Thin Plate Splines*, in tempo *Smoothing Splines*
- SOAP: basi in spazio *Soap Film Smoothing*, in tempo *Smoothing Splines*

Solo SOAP e ST-PDE possono tener conto del dominio spaziale!




Reale
KRIG
TPS
SOAP
ST-PDE
$t = 0$
$t = \frac{\pi}{4}$
$t = \frac{\pi}{2}$
$t = \frac{3}{4}\pi$