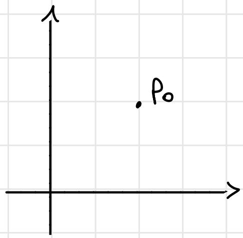
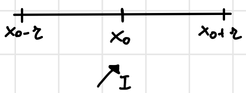
DEFINIZIONI



$P_0(x_0, y_0)$ $\qquad$ $x, y \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^2$



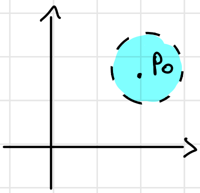
$a, b \in \mathbb{R} \qquad d(a,b) = |a-b|$

$x \in I \longleftrightarrow d(x, x_0) < r \Longleftrightarrow |x - x_0| < r$

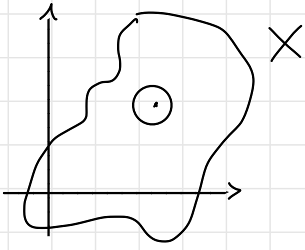
$P_1(x_1, y_1)$

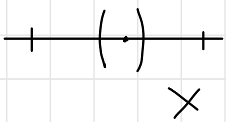
$P_2(x_2, y_2)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y^2)^2}$$



$P_0(x_0, y_0) \quad r > 0 \qquad P_0(P_0, r) = I_r(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$





- P_0 INTERNO AD X SE $\exists r > 0 : \underset{\text{BALL}}{B}(P_0, r) \subseteq X$

- $\text{INT}(X) = \overset{\circ}{X} =$ INTORNO DI $X = \{ P$ INTERNI AD $X \}$

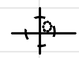
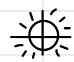
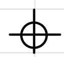
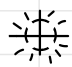
- X APERTO SE $X = \emptyset$ OPPURE $X \neq \emptyset$ E $X = \mathrm{INT}(X)$

- X CHIUSO SE :

  - $\mathbb{R}^2 - X$ È APERTO
  - $F(X) \subseteq X \iff D(X) \subseteq X$
  - $X = \overline{X}$

- $\emptyset$ APERTO $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ CHIUSO
- $\mathbb{R}^2$ APERTO $\longrightarrow$ $\emptyset$ CHIUSO

- $\emptyset$ E $\mathbb{R}^2$ SONO GLI UNICI APERTI E CHIUSI $\iff$ SONO GLI UNICI AD AVERE FRONTIERA VUOTA

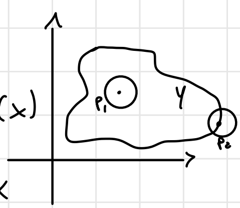
- $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\} = B((0,0),1)$ APERTO 
- $R - X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \geq 1\}$ CHIUSO 
- $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ CHIUSO 
- $R - X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} > 1\}$ APERTO 

- $P_0 \in \mathbb{R}^2$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X SE $\forall r > 0$ $B(P_0, r) \cap (X - \{P_0\}) \neq \emptyset$

- $D(X)$ INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE

- $P_0 \in \mathbb{R}^2$ PUNTO DI FRONTIERA PER X SE $\forall r > 0$ $\exists P_1, P_2 \in B(P_0, r)$ CON $P_1 \in X$, $P_2 \in \mathbb{R}^2 - X$

- $P_1 \in \mathrm{INT}(X)$, $P_1 \in D(X)$
- $P_2 \in F(X)$
  $P_2 \in D(X)$, $P_2 \in X$



$\cdot P_0$

- P_0 PUNTO ISOLATO

DEF. LIMITE CON 2 VARIABILI

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad P_0(x_0, y_0) \in D(X)$ $\quad \ell \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0$: SE $P \in B(P_0, \sigma)$, $P \neq P_0$

SI HA $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \pm\infty$ SE $\forall k > 0 \ \exists \sigma > 0$: SE $(x,y) \in X$,

SI HA $f(x,y) \underset{< -k}{> k}$

TEOREMA SULLE RESTRIZIONI $\Rightarrow$ COND. NECESSARIA

IP: $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$, $Y \subseteq X$ $\quad P_0 \in D(X)$ $\quad P_0 \in D(Y)$

$g: Y \to \mathbb{R}$ $\quad g = f_{|Y}$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

TS: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$: $P \in B(P_0, \sigma)$, $P \neq P_0$ SI HA $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

IN PARTICOLARE CIÒ VALE ANCHE PER $P \in Y \Rightarrow$ TS.

NON VALE IL VICEVERSA!

CONTROESEMPIO

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

CONSIDERO $y=0 \Longrightarrow \frac{0}{x^2} \to 0$ (QUINDI SE $\exists \lim$ DEVE ESSERE ZERO)

CONSIDERO $y=x \Longrightarrow \frac{x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

f NON È REGOLARE

DISUGUAGLIANZE UTILI

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1 \qquad \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \qquad \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$$

$$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

CONTINUITÀ

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad P_0 \in X$ NON ISOLATO

f CONTINUA IN P_0 SE $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

WEIERSTRASS

IP: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ CHIUSO E LIMITATO

$f: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA

TS: f AMMETTE MINIMO E MASSIMO ASSOLUTI

TEOREMA VALORI INTERMEDI

IP: X CONNESSO

$f: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA

TS: SE f ASSUME 2 VALORI, ASSUME ANCHE TUTTI QUELLI COMPRESI FRA ESSI

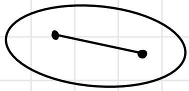
X CONNESSO

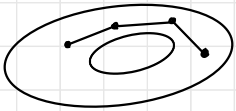
$X \subseteq \mathbb{R}^2$

SE X È APERTO (O CHIUSO) NON È POSSIBILE DECOMPORLO NELL'UNIONE DI 2 APERTI (O CHIUSI) DISGIUNTI

$\Updownarrow$

$\forall P_1, P_2 \in X$, $\exists$ UNA POLIGONALE $\subseteq X$ CHE LI CONGIUNGE





CALCOLO DIFFERENZIALE

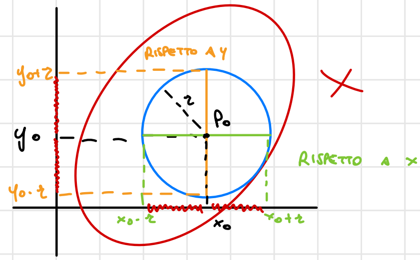
$$R(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Longrightarrow$$ RAPPORTO INCREMENTALE

DERIVATE PARZIALI

$f: X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO

$P_0(x_0, y_0) \in X$

$\exists r > 0 : B(P_0, r) \subseteq X$



CONSIDERO $g(x) = f(x, y_0) \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$

SE $\exists\ g'(x)$ f AMMETTE DERIV. PARZIALE RISPETTO AD X E $\underline{g'(x) = f_x(x_0, y_0)}$

CONSIDERO $h(y) = f(x_0, y) \quad \forall y \in]y_0 - r, y_0 + r[$

SE $\exists\ h'(y)$ f AMMETTE DER. PARZIALE RISPETTO AD Y E $\underline{h'(y) = f_y(x_0, y_0)}$

GRADIENTE

SE ESISTONO $f_x(x_0, y_0)$ E $f_y(x_0, y_0)$ SI CONSIDERA IL VETTORE

$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ GRADIENTE DI f IN P_0

LEMMA DI SCHWARZ

IP: $f : X \to \mathbb{R}$ APERTO ED $\exists\, f_x, f_y$ ED $\exists\, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yx}$

f_{xy}, f_{yx} CONTINUE IN P_0

TS: $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$

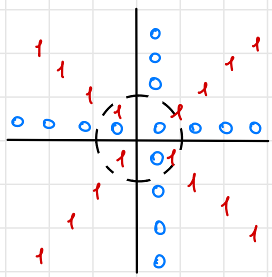
PRECISAZIONI

CONT. $\not\Rightarrow$ DER.

DER. $\not\Rightarrow$ CONT.

CONTROESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } xy = 0 \\ 1 & \text{SE } xy \neq 0 \end{cases}$$



$\exists\, f_x(0,0)$? $\quad g(x) = f(x,0) = 0 \quad \forall x$

$\exists\, f_y(0,0)$? $\quad h(y) = f(0,y) = 0 \quad \forall y$

MA f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ PERCHÉ IN OGNI SUO INTORNO CI SONO INFINITI PUNTI IN CUI VALE 0 E 1

DEFINIZIONE f DIFFERENZIABILE

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\quad P_0 \in D(x)$

f SI DICE DIFFERENZIABILE IN P_0 SE $\exists\, l, m \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\overbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}^{\Delta f} - \overbrace{(lh+mk)}^{df}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$df = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

TEOREMA SULLA DIFFERENZIABILITÀ $\Rightarrow$ COND. NECESSARIA

IP: $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\quad P_0 \in D(X)$

f DIFFERENZIABILE IN P_0

TS: 1) f È CONTINUA IN P_0

2) $\exists\, f_x(P_0) = l$, $\exists\, f_y(P_0) = m$

DIMOSTRAZIONE

1) f CONTINUA IN $P_0 \iff \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = 0$

$$\Delta f = \Delta f - lh - mk + lh + mk = \underbrace{\frac{\Delta f - lh - mk}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\to 0} \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\to 0} + \underbrace{lh}_{\to 0} + \underbrace{mk}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

2) DIMOSTRO CHE $f_x(x_0,y_0) = l$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2}} = l$$

CONSIDERO $g(h,k) = \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(lh+mk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ (PER IP.)

CONSIDERO $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-lh+lh}{|h|} = 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-lh}{|h|}}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\pm 1} + \underbrace{\frac{lh}{h}}_{\downarrow\ l} = l$$

ANALOGAMENTE TROVO CHE $f_y(x_0,y_0) = m$

IL TEOREMA FORNISCE UNA CONDIZIONE SOLO NECESSARIA, QUINDI IL VICEVERSA NON VALE

CONTROESEMPIO

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$

$g(x) = f(x,0) = 0$ $\quad \exists f_x = 0$

$h(y) = f(0,y) = 0$ $\quad \exists f_y = 0$

DIFF. IN $(0,0)$?

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}} \begin{cases} \to 0 & \text{PER } h=0 \\ \to \frac{1}{2} & \text{PER } h=k \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim$$

$\Downarrow$

f NON E' DIFF.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE $\Longrightarrow$ COND. SUFF.

IP: $f : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\quad P_0 \in X$

$\exists f_x(P_0)$, $\exists f_y(P_0)$

- ALMENO UNA DELLE DUE ESISTE IN UN INTORNO DI P_0
- ALMENO UNA DELLE DUE CONTINUA IN P_0

TS: f E' DIFFERENZIABILE IN P_0

$\boxed{\text{ES}}$ $f(x,y) = |xy|$

$$\begin{cases} xy & \text{SE } xy \geq 0 \\ -xy & \text{SE } xy < 0 \end{cases}$$

f CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$

$xy > 0$: $\quad f_x = y$, $\quad f_y = x$

$xy < 0$: $\quad f_x = -y$, $\quad f_y = -x$

STUDIO ASSE X $(y=0)$

$\exists f_x(a,0)$? $\quad f(x) = f(x,0) = 0 \quad \exists f_x = 0 \ \forall a$

$\exists f_y(a,0)$? $\quad h(y) = f(a,y) = \underset{>0}{|a|y} \quad \underset{<0}{-|a|y}$

$|a|y = -|a|y \iff a = 0 \Rightarrow \exists f_y(a,0) = 0$ SE $a = 0$

- $\nexists f_y(a,0)$ SE $a \neq 0$

STUDIO ASSE Y $(x=0)$

$\exists f_x(0,b) = 0$ SE $b = 0$

- $\nexists f_x(0,b)$ SE $b \neq 0$

$\exists f_y(0,b) = 0 \quad \forall b$

$df = 0$

- NON POSSO APPLICARE IL TEOREMA DEL DIFF. TOTALE. f E' DIFF. ?

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} = 0$$

f DIFFERENZIABILE PER DEFINIZIONE

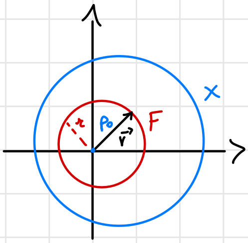
DEFINIZIONE DERIVATA DIREZIONALE

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\quad P_0 \in D(X)$ $\quad \exists r > 0 : B(P_0, r) \subseteq X$ $\quad v(v_1, v_2)$

$g_1(t) = x_0 + t v_1$

$g_2(t) = y_0 + t v_2$

$$F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$$
$$\Downarrow$$
$$F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$$



SE $\exists F'(t_0)$ CON $t_0 = 0$ ALLORA f È DOTATA DI DERIVATA DIREZIONALE LUNGO V IN P_0 E $f_v(x_0, y_0) = F'(0)$

TEOREMA SULLE DERIVATE DIREZIONALI

IP: SE f È DIFFERENZIABILE IN P_0

PRODOTTO SCALARE

TS: $\forall \vec{v}(v_1, v_2)$, $\exists f_v(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot v$

DIMOSTRAZIONE

SI APPLICA IL TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$\forall v(v_1, v_2)$ CON $v_1 = g_1'(0)$, $v_2 = g_2'(0)$

$$F'(0) = f_x(P_0) \underbrace{g_1'(0)}_{v_1} + f_y(P_0) \underbrace{g_2'(0)}_{v_2} = \nabla f(P_0) \cdot v$$

CONTROESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f È CONTINUA IN $(0,0)$? SI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \longrightarrow 0 \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |x|$$

$\exists f_x(0,0)$? $\quad f(x,0) = 0 \quad \exists f_x(0,0) = 0$

$\exists f_y(0,0)$? $\quad f(0,y) = 0 \quad \exists f_y(0,0) = 0$

$\exists f_v(0,0) = f_x(0,0) \cdot v_1 + f_y(0,0) \cdot v_2 = 0 \quad \forall v(v_1, v_2)$ PERCHÉ $\underline{f_x = f_y = 0}$

QUINDI f AMMETTE DERIVATA DIREZIONALE LUNGO QUALUNQUE DIREZIONE IN $(0,0)$

f È DIFFERENZIABILE?

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \nexists$$

$\Downarrow$

RESTRIZ. $f(x, mx)$

QUINDI NON È DIFFERENZIABILE

"TEOREMA TUCCARI"

FUNZIONE CHE HA LE DUE DERIVATE PARZIALI MA NON HA QUELLE DIREZIONALI

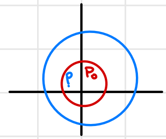
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}}{t} = \frac{v_1 v_2}{t}$$

$V_1 = 0$ OPPURE $V_2 = 0 \Rightarrow$ RAPP. INCR. $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f_x = f_y = 0 \quad$ SE $V_1, V_2 \neq 0$ RAPP. INCR. DIVERGE $\Rightarrow \nexists f_v$

ESTREMI RELATIVI



$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P_0 \in X$

P_0 È DI MINIMO (MASSIMO) RELATIVO PER f SE $\exists r > 0$: SE $\forall P \in B(P_0, r) \cap X$ SI HA $f(P) \underset{\leq}{\geq} f(P_0)$

TEOREMA DI FERMAT

IP: $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\qquad P_0$ ESTREMO REL. PER f

$\exists f_v(P_0)$

TS: $f_v(P_0) = 0$

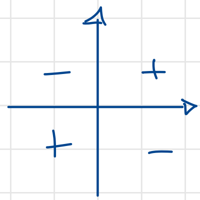
DIMOSTRAZIONE

BASTA OSSERVARE CHE, PER IPOTESI, $F(t) = (\overset{g_1'(t)}{\overset{\|}{x_0 + tv_1}}, \overset{g_2'(t)}{\overset{\|}{y_0 + tv_2}})$ HA UN ESTREMO REL. IN $t = 0$. PER IL TEOREMA DI FERMAT SULLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE SEGUE CHE $F'(0) = 0$. QUINDI $f_v = F'(0) = 0$

ES. DI $f_v(P_0) = 0$ MA P_0 NON È ESTREMO RELATIVO

$f(x,y) = xy \qquad P_0 = 0$

$f_x = y$
$f_y = x$ $\implies$ $\nabla f(0,0) = 0$
$f(0,0) = 0$



RICERCA ESTREMI RELATIVI

1) • PUNTI STAZIONARI $f_x = f_y = 0$
• PUNTI IN CUI $\nexists$ UNA TRA f_x E f_y E L'ALTRA E' NULLA
• PUNTI IN CUI $\nexists f_x$ E $\nexists f_y$

2) SUPPONGO f DOTATA DI DERIVATE SECONDE

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

H = HESSIANO DI f IN P_0

• $H < 0 \longrightarrow P_0$ PUNTO DI SELLA

• $H > 0 \longrightarrow P_0$ ESTREMO RELATIVO
  - $f_{xx}(P_0) > 0$, P_0 MIN. REL.
  - $f_{xx}(P_0) < 0$, P_0 MAX. REL.

• $H = 0 \longrightarrow$ STUDIO LOCALE
  - CALCOLO $f(P_0)$
  - CERCO UN INTORNO DI P_0 DOVE f ABBIA VALORI MINORI (MAGGIORI) DI $f(P_0)$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

IP: $f : X \to \mathbb{R}$ CONTINUA $X \subseteq \mathbb{R}^2$ CHIUSO E LIMITATO

TS: $\exists \min_X = m$, $\exists \max_X = M$ ESTREMI ASSOLUTI

RICERCA DEGLI ESTREMI ASSOLUTI

- $X_1 = \{P \in \text{INT}(X) : \nabla f(P) = 0\}$ $\Rightarrow$ PUNTI STAZIONARI
- $X_2 = \{P \in \text{INT}(X) : \nexists f_x$ o f_y E L'ALTRA È NULLA
  $\nexists f_x$ E $\nexists f_y\}$
- $X_3 = \{P \in F(X)\}$
  - CONSIDERO I SEGMENTI CHE COMPONGONO $F(X)$ E NE SCRIVO LE FUNZIONI
  - CALCOLO f NEI PUNTI DI FRONTIERA
  - DERIVO f NEI PUNTI CONSIDERATI E VEDO DOVE SI ANNULLA f'
  - SE IL PUNTO $\in$ AL SEGMENTO DI $F(X)$ IN ESAME LO SI CONSIDERA $\in X_3$

CALCOLO IL VAL. ASS. DI f IN TUTTI I PUNTI $\in$ A X_1, X_2, X_3 E OSSERVO CHE IL VALORE MINIMO
MASSIMO
È IL VALORE DEL MINIMO
MASSIMO
ASSOLUTO DI f

TUTTI I PUNTI IN CUI f ASSUME TALI VALORI SONO PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO
MASSIMO

DIMOSTRATI

- TEOREMA SULLE RESTRIZIONI
- TEOREMA SULLA DIFFERENZIABILITÀ IN UN PUNTO
- TEOREMA SULLE DERIVATE DIREZIONALI
- TEOREMA DI FERMAT
- f HA LE DIREZIONALI ALLORA f HA LE PARZIALI

CONTROESEMPI

- TEOREMA SULLE RESTRIZIONI

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

- DER. PARZ. $\not\Rightarrow$ DERIV. DIREZ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- DER. $\not\Rightarrow$ CONT.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } xy = 0 \\ 1 & \text{SE } xy \neq 0 \end{cases}$$

- TEOREMA SULLA DIFFERENZIABILITÀ

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

- TEOREMA SULLE DER. DIREZ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- TEOREMA SUL DIFFERENZIALE TOTALE

$$f(x,y) = |xy|$$