Esercitazione a casa sul cap. 3 di EAM 2 del 21 dicembre 2022

Studente...Alfeo Sgolò...

Numero di matricola...10000 25452

Parte A (Teoria)

1. Enunciare e dimostrare la prima formula di integrazione indefinita per sostituzione

2. Nel seguito f, g sono due funzioni reali continue nello stesso intervallo $[a, b]$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa.

A) $\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx \quad \forall k \in \mathbb{R}$ F $\rightarrow$ $k \neq 0$

B) $\int f(x)g(x)\ dx = \left(\int f(x)\ dx\right)\left(\int g(x)\ dx\right)$ F

C) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \left(\int f(x)\ dx\right) + \left(\int g(x)\ dx\right)$ V

D) $\int f(g(x))\ dx = \left[\int f(t) dt\right]_{t=g(x)}$ F

E) $\int f(x)\ dx = \int_a^x f(t)dt + k, \quad k \in \mathbb{R}$ V $\rightarrow$ la funzione integrale è una primitiva

F) $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$ V

Parte B (Esercizi)

Svolgere i seguenti esercizi

1) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^1 x \arctan(4x^2)\ dx$$

2) Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x^2, & x < 0 \\ e^x + \log(x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $]-\infty, +\infty[$

3) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^1 |2x - 1| \log(x^2 + x + 1) \mathrm{d}x$$

Parte A

HP $f: (c,d) \Rightarrow \mathbb{R}$ dot. di primit. $g: (a,b) \Rightarrow (c,d)$ deriv.

TS $$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \left[\int f(t)\, dt\right]_{t=g(x)}$$

DIM Sia F una primit. di f allora il II membro è $\left[F(t)+K\right]_{t=g(x)} = F(g(x))+K$

Cons. $$D\left[F(g(x))\right] = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

$\Rightarrow$ il I membro è $F(g(x))+K$

Parte B

$$\int_0^1 x \arctan(4x^2)\, dx$$

Troviamo le primitive

$$I = \frac{1}{8}\int 8x \arctan(4x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \arctan(t)\, dt\right]_{t=4x^2}$$

$$= \frac{1}{8}\left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log|x^2+1| + K\right]_{t=4x^2}$$

$$I = \frac{1}{8}\left(4x^2 \arctan(4x^2) - \frac{1}{2}\log(16x^4+1)\right) + K \Rightarrow \text{Primitive}$$

$$\left[\frac{1}{8}\left(4x^2 \arctan(4x^2) - \frac{1}{2}\log(16x^4+1)\right)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \ldots$$

2) Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x^2, & x < 0 \\ e^x + \log(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $]-\infty, +\infty[$

f è continua ?

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

f continua $\Rightarrow$ quindi ammette primitive.

$$F'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^3 + K \\ e^x + J \end{cases}$$

$$J = \int \underset{FD}{1} \log(x+1)\,dx = x\log(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= x\log(x+1) - x + \log|x+1| + K$$

$$F'(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x+\frac{1}{3}x^3+K & \text{se } x<0 \\ e^x+x\log(x+1)-x+\log|x+1|+c & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Impongo la continuità

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x)$$

$$K = 1+c$$

$$F'(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x+\frac{1}{3}x^3+1+c & \text{se } x<0 \\ e^x+x\log(x+1)-x+\log|x+1|+c & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^1 |2x-1|\log(x^2+x+1)\mathrm{d}x$$

Proprietà additiva

$$-\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\log(x^2+x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\log(x^2+x+1)\,dx$$

Troviamo le primitive

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{FD}}}{(2x-1)} \log(x^2+x+1)\,dx = (x^2-x)\log(x^2+x+1) - \underset{J}{\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}(2x+1)\,dx}$$

$$J = \int \frac{2x^3-x^2-x}{x^2+x+1}\,dx = \int (2x-3) + \frac{3}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-x & x^2+x+1 \\ \hline -\,2x^3-2x^2-2x & 2x-3 \\ \hline / \quad -3x^2-3x & \\ +3x^2+3x & \\ \hline //+3 & \end{array}$$

$$= x^2-3x+3\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$= x^2-3x+3\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= x^2-3x+\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+K$$

$$-\left[(x^2-x)\log(x^2+x+1) - x^2+3x-\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left[(x^2-x)\log(x^2+x+1) - x^2+3x-\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ldots$$