SERIE NUMERICA

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ $\Rightarrow$ RAPPRESENTA LA SOMMA DI TUTTI I TERMINI GENERATI DALLA SUCCESSIONE a_n, QUINDI $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

INDICO CON S_n LA SOMMA PARZIALE DI POSTO n CIOÈ LA SOMMA LIMITATA AI PRIMI n TERMINI DELLA SUCCESSIONE $\longrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

- SE $S_n \longrightarrow S$, LA SERIE CONVERGE E HA SOMMA S
- SE $S_n \longrightarrow \pm\infty$, LA SERIE DIVERGE
- SE S_n NON HA LIMITE, LA SERIE È INDETERMINATA

ES. 1) SUCCESSIONE CONVERGE MA LA SERIE DIVERGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \qquad S_n = \begin{cases} k=0 & \text{CONVERGE E } S=0 \\ k \neq 0 & \text{DIVERGE } \begin{matrix} +\infty, & k>0 \\ -\infty, & k<0 \end{matrix} \end{cases}$$

ES. 2) SERIE DIVERGE POSITIVAMENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{E DIVERGE PERCHÉ } \lim S_n = \pm\infty$$

ES. 3) SERIE INDETERMINATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad S_n \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ 1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

TIPI DI SERIE

SERIE TELESCOPICA

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - a_{n+1} \right)}$$

- CONVERGE SE $\lim a_n = l$ ($s_n = a_1 - a_{n+1}$) E HA SOMMA $a_1 - l$
- DIVERGE SE $\lim a_n = \pm\infty$
- INDETERMINATA SE $\nexists \lim a_n$

ES $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$

$\lim \frac{1}{n} = 0$ QUINDI LA SERIE CONVERGE A $(1-0) = 1$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE X

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}} \;/\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- SE $x \geq 1$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- SE $-1 < x < 1$ CONVERGE E HA SOMMA $\frac{1}{1-x}$
- SE $x < -1$ INDETERMINATA

ES $\sum \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$ SERIE GEOM. DI RAGIONE $\frac{1}{2}$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$, QUINDI LA SERIE CONVERGE A $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

SERIE ARMONICA

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}} \implies \text{DIVERGE POSITIVAMENTE}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) < e \implies \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \implies n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \implies \log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$S_n > \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} \dots = \log(n+1) \implies S_n > \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DATO CHE $\lim \log(n+1) = +\infty$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO SULLE SUCCESSIONI
$\lim S_n = +\infty$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}} \quad \begin{cases} - \text{ PER } x = 1 & \text{DIVERGE POSITIVAMENTE} \\ - \text{ PER } x > 1 & \text{CONVERGE A } x \end{cases}$$

SERIE ARMONICA ALTERNATA

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}$$

PER LEIBNIZ LA SERIE CONVERGE

SERIE ESPONENZIALE

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}$$

- SE $x>0$ CONVERGE A 0 — CRIT. DEL CONFRONTO
- SE $x=0$ CONVERGE A 1
- SE $x<0$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE — PERCHÉ $|a_n|$ È CONVERGENTE

SERIE LOGARITMICA

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

CONVERGE SOLO PER $-1 \leq x < 1$

1. SE $x=0$ CONVERGE E HA SOMMA 0
   SE $x=1$ DIVERGE (SERIE ARMONICA)

2. SE $x>0$ CONVERGE AD x (CRITERIO DEL RAPPORTO)
   SE $0<x<1$ CONVERGE
   SE $x>1$ DIVERGE

3. SE $x<0$ SERIE A SEGNI ALTERNI, CONS. $|a_n| \Rightarrow$ ASSOLUT. CONVERGENTE
   SE $x=-1$ CONVERGE (SERIE ARMONICA ALT.)
   SE $x<-1$ NON REGOLARE $\begin{cases} \text{DEFINIT. CRESCENTE} \\ \text{HA ALMENO UN TERMINE POSITIVO} \end{cases}$

SERIE DI POTENZE

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n}$$

a_n = COEFFICIENTI DELLA SERIE

c = CENTRO DELLA SERIE

$a_n, c \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

IN $x=c$ CONVERGE SEMPRE $\Rightarrow$ ALMENO IN UN PUNTO È SEMPRE CONVERGENTE

$\boxed{\text{ES}}$

SERIE GEOMETRICA $\quad 1+x+x^2+\dots \quad a_n=1 \quad c=0$

SERIE ESPONENZIALE $\quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad a_n=\frac{1}{(n-1)!} \quad c=0$

SERIE LOGARITMICA $\quad \frac{x^n}{n} \quad a_n=\frac{1}{n} \quad c=0$

CRITERI PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

CRITERIO DEL CONFRONTO

SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ DUE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI : $a_n \leq b_n$

- SE $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE

INDICO CON s_n E S_n LE SOMME PARZIALI DELLE DUE SERIE, $s_n \leq S_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
IN CASO DI CONVERGENZA INDICO CON s E S LE SOMME DELLE DUE SERIE, SI HA $s_n \leq S_n \leq S$
E QUINDI $s \leq S$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ DUE SERIE A TERMINI POSITIVI

SE $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$ LE DUE SERIE HANNO LO STESSO CARATTERE

DIMOSTRAZIONE

$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2 \ell b_n$ E POI APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO

CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI : $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \neq 1$

- SE $\ell > 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- SE $\ell < 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE

CRITERIO DELLA RADICE

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI : $\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \neq 1$

- SE $\ell > 1 \implies \sum a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- SE $\ell < 1 \implies \sum a_n$ CONVERGE

CRITERIO DI RAABE

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI : $\exists \lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell \neq 1$

- SE $\ell > 1 \implies \sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell < 1 \implies \sum a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE

SI USA <u>SOLO</u> PER DIMOSTRARE LA CONVERGENZA DELLA SERIE ARM. GENERAL.

$$\sum \frac{1}{n^x} \qquad n\left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1\right) = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x - 1\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow x$$

QUINDI PER $x > 1$, $\sum \frac{1}{n^x}$ CONVERGE AD x (PER $x = 1$ DIVERGE $\forall n$)

CRITERIO DEL CONFRONTO CON LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

(ORDINE DEGLI INFINITESIMI)

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI : $\exists \lim n^x a_n = l > 0$

- SE $x > 1 \implies \sum a_n$ CONVERGE
- SE $0 < x < 1 \implies \sum a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE

DIMOSTRAZIONE

$\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \longrightarrow l$ SI APPLICA IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

BASTA MOLTIPLICARE PER n^3 PER OTTENERE UN $\lim \neq 0$

$\boxed{ES}$ $\sum \dfrac{3n+2}{n^4+5}$ $x = 4 - 1 = 3 > 1 \implies$ CONVERGE

CRITERI PER LE SERIE A SEGNI ALTERNI

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ / $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ / $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

CRITERIO DI LEIBNIZ

IP: SE LA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ VERIFICA:
- È DECRESCENTE
- $\lim a_n = 0$

TS: LA SERIE CONVERGE E HA SOMMA $|S - S_n| \leq a_{n+1}$

DIMOSTRAZIONE

DATA LA MONOTONIA, SAPPIAMO CHE LA SERIE NON PUÒ DIVERGERE, BASTA DIMOSTRARE CHE S_{2n} E S_{2n+1} CONVERGONO ALLO STESSO LIMITE.

DATO CHE $\{a_n\}$ È DECRESCENTE, S_{2n-1} È DECRESCENTE E $S_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots$ ESSA È A TERMINI NON NEGATIVI IN QUANTO SOMMA DI ADDENDI NON NEGATIVI E QUINDI È LIMITATA INFERIORMENTE.

$S \longrightarrow \inf S_{2n-1}$ (NON PUÒ DIVERGERE A $-\infty$)

SI HA CHE $S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} \longrightarrow S$ (NON PUÒ DIVERGERE A $+\infty$)

QUINDI LA CONVERGENZA È DIMOSTRATA

CRITERIO DI NON REGOLARITÀ

IP: SE $\{a_n\}$ VERIFICA:
- È DECRESCENTE E $\lim a_n \neq 0$
- È CRESCENTE ED HA ALMENO UN TERMINE POSITIVO

TS: LA SERIE È INDETERMINATA

DIMOSTRAZIONE

INDETERMINATA

SE $\lim a_n \neq 0$ NON PUÒ CONVERGERE. PER LA MONOTONIA, LA SERIE NON PUÒ DIVERGERE

CONDIZIONI, PROPOSIZIONI E TEOREMI

TEOREMA SULLA CONVERGENZA $\Rightarrow$ COND. NECESSARIA

IP: a_n CONVERGE

TS: $\lim a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

CONTROESEMPIO

$\sum \frac{1}{n}$ (SERIE ARMONICA) DIVERGE SEMPRE, NONOSTANTE $\frac{1}{n} \to 0$

SERIE RESTO

DATA UNA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $r \in \mathbb{N}$ SI DICE SERIE RESTO DI POSTO r $\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$

PROPOSIZIONE SULLA SERIE RESTO

UNA SERIE E TUTTI I SUOI RESTI HANNO LO STESSO CARATTERE

IN CASO DI CONVERGENZA SI HA $\sum_{n=r+1} a_n = \sum_{n} a_n - S_r$

PROPOSIZIONE SUL CARATTERE DELLE SERIE

SE DUE SERIE DIFFERISCONO PER UN NUMERO FINITO DI TERMINI ALLORA HANNO LO STESSO CARATTERE

PROPOSIZIONE SULLA REGOLARITÀ

DATA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$ ALLORA $\sum K \cdot a_n$ È REGOLARE $\iff$ $\sum a_n$ È REGOLARE

SERIE SOMMA

DATE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ SI CHIAMA SERIE SOMMA $\sum (a_n + b_n)$

PROPOSIZIONE SULLA DIVERGENZA DELLA SERIE SOMMA

i) SE UNA CONVERGE E UNA DIVERGE $\Longrightarrow$ LA SOMMA DIVERGE
ii) SE ENTRAMBE DIVERGONO CON LO STESSO SEGNO $\Longrightarrow$ LA SOMMA DIVERGE

TEOREMA SULLA REGOLARITÀ DELLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

OGNI SERIE A TERMINI NON NEGATIVI È REGOLARE

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

DATA $\sum a_n$ CONSIDERO LA SERIE $\sum |a_n|$

$\sum a_n$ ASSOL. CONVERGENTE SE $\sum |a_n|$ È CONVERGENTE

TEOREMA SULL'ASSOLUTA CONVERGENZA

UNA SERIE ASS. CONVERGENTE È CONVERGENTE

DIMOSTRAZIONE

$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$

POICHÉ $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \forall n$ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO $a_n + |a_n|$ È CONVERGENTE. LA TESI È DIMOSTRATA PERCHÉ LA SERIE DATA È LA DIFFERENZA DI 2 SERIE CONVERGENTI

CONTROESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ PER LEIBNIZ LA SERIE È CONVERGENTE

MENTRE $|a_n| = \frac{1}{n}$ DIVERGE $\forall n$

↘ SERIE ARMONICA

LEMMA PER LE SERIE A SEGNI ALTERNI

IP: $\sum (-1)^{n+1} a_n$, $\{a_n\}$ MONOTONA

TS: NON PUÒ DIVERGERE

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO $\{a_n\}$ DECRESCENTE E $\{S_n\}$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI.

CONSIDERO S_{2n} E S_{2n-1}.

DATO CHE $\{a_n\}$ DECRESCENTE $a_{2n+1} > a_{2n+2} \quad \forall n \implies S_{2n+2} > S_{2n} \implies S_{2n}$ È CRESCENTE E NON PUÒ TENDERE A $-\infty$

ALLO STESSO MODO SI HA CHE S_{2n-1} È DECRESCENTE E NON PUÒ TENDERE A $+\infty$.

NE SEGUE LA TESI.