Parte A

Quali delle seguenti serie sono a termini positivi?

a) $\dfrac{3n+(-1)^n}{n+4}$ ✓

c) $\left(\sin\frac{1}{n}\right)\dfrac{n+1}{n^4+4}$ ✓

b) $(\cos n\pi)\dfrac{n^3+1}{n^4+3}$

d) $(-1)^n(-1)^{n+1}$

2) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi

3) Condizione necessaria per la convergenza. È suff? Fare un esempio

4) Dimostrare che la serie armonica diverge

Parte B

1) Stabilire il carattere della serie $\dfrac{\pi^{2n+2}}{x^{n+3}}$ $(x \neq 0)$ e calcolare la somma

2) Stabilire il carattere della serie $\dfrac{\cos\dfrac{2n^3}{\log(n+1)}}{n^4\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+3}\right)}$

2) Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi

se $\lim \frac{a_n}{b_n} = l > 0$, le due serie hanno lo stesso carattere

DIM Basta osservare che definitivamente si ha

$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$ e applicare il criterio del confronto

3) Sia $\sum a_n$ una serie, se essa converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Non vale il viceversa: Controesempio $\sum \frac{1}{n}$ che diverge $\forall n$

ma $\lim \frac{1}{n} = 0$

4) La serie armonica

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$

$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$

$n \log \left(\frac{n+1}{n}\right) < 1$

$(*) \quad \log \left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Usando $(*)$ si ha $\quad \log(n+1) < s_n \quad \forall n \Rightarrow \lim (\log(n+1)) = +\infty$

per confronto $s_n \to +\infty$

$$\sum \frac{\pi^{2n+2}}{x^{n+3}} \Rightarrow \frac{\pi^2}{x^3}\left(\frac{\pi^2}{x}\right)^n \Rightarrow$$ I° resto Serie geom. di ragione

- Converge se e solo se $-1 < \frac{\pi^2}{x} < 1$

$$-\frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi^2} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} > -\frac{1}{\pi^2} \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\pi^2 \\ x > \pi^2 \end{cases}$$

$$s = \left(\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{x}} - 1\right) = -\frac{\pi^2}{x-\pi^2}$$

- Se $\frac{\pi^2}{x} \geq 1$ La serie diverge

- Se $\frac{\pi^2}{x} < 1$ La serie è indeterminata

$$\frac{\cos \frac{2n^3}{\log(n+1)}}{n^4\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+3}\right)}$$

Dato che $\cos(\dots) \leq 1$

si ha $\sum a_n \leq \frac{1}{n^4\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+3}\right)} \sim \frac{1}{n^4}$

$\Downarrow$

Converge α 4

$\Downarrow$

Per confronto la serie data converge pure