Esercitazione a casa sul cap. 4 di EAM2 del 18 gennaio 2023

Studente........[illegible]

Numero di matricola..........1000025452

Parte A (Teoria)

1) Scrivere la generica equazione differenziale lineare del primo ordine completa e dimostrare che la differenza di due sue soluzioni è soluzione dell'equazione omogenea associata.

2) Fra le seguenti equazioni differenziali riconoscere quelle a variabili separabili

   A) $y'' = -2xy$
   B) $y'x = y + 1$
   ~~C~~) $\frac{y'}{y^2} = \log x$
   ~~D~~) $y' = e^{x+y}$
   ~~E~~) $y' = e^{xy}$
   F) $y'' + xy' = xy^2$

Parte B (Esercizi)

Svolgere i seguenti esercizi.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 e^y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2x+1}{e^{3x}}$$

1) Scrivere la generica equazione differenziale lineare del primo ordine completa e dimostrare che la differenza di due sue soluzioni è soluzione dell'equazione omogenea associata.

Equaz diff lineari del primo ordine

$y' + a(t)y = f(x)$ $\qquad a, f : (\alpha, \beta) \Rightarrow \mathbb{R}$ continue

$F(x,y) = f(x) - a(x)y$ $\qquad X : (\alpha, \beta) + \mathbb{R}$

soluz y def. in un sottointervallo di (α, β) a valori reali deriv. e tale che $y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad \forall x$

se $f = 0 \to$ eq. omogenea

(1) $y' + a(x)y = f(t)$ eq. completa

(2) $y' + a(x)y = 0$ eq. omogenea associata

TS y, z soluz. di (1) $\Rightarrow$ $w = y - z$ soluz. di (2)

DIM i) Dimostro che vale $w'(x) + a(x)w(x) = 0$

$w' + aw = y' - z' + a(y-z) = y' + ay - (z' + az) = f(x) - f(x) = 0$

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 e^y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = x^2 e^y$ $\qquad X(x) = x^2 \qquad (a,b) = \mathbb{R}$

$\qquad Y(y) = e^y \qquad (c,d) = \mathbb{R}$

Sol. di I categ.

$e^y \neq 0 \quad \forall\, y \in (c,d) \Rightarrow H = \emptyset$

Sol. di II categ.

$$\frac{y'(x)}{e^{y(x)}} = x^2$$

$$\int y'(x) \cdot e^{-y(x)}\, dx = \int x^2\, dx$$

$$e^{-y(x)} = -\frac{x^3}{3} + c \qquad y(x) = -\log\left(-\frac{x^3}{3} + c\right)$$

$y(0) = 2 \quad , \quad -\log c = 2 \quad , \quad c = e^{-2}$

$$\underline{y(x) = -\log\left(-\frac{x^3}{3} + e^{-2}\right)} \Rightarrow \text{Sol. di PC}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2x+1}{e^{3x}}$$

$$f(x) = e^{-3x}(2x+1)$$

Omogenea assoc. $\quad y'' + 6y' + 9y = 0$

Eq. caratt. $\quad \alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0 \qquad \Delta = 36 - 36 = 0$

$$\alpha = -3 \quad (\text{molt. } 2)$$

Int. gener. omogenea $\quad y(x) = K_1 e^{-3x} + x K_2 e^{-3x}$

Int. part. completa

$$h = -3 \qquad s = 2 \qquad m = 1$$

$$\bar{y}(x) = e^{-3x} x^2 (ax + b) = e^{-3x}(ax^3 + bx^2)$$

$$\bar{y}'(x) = e^{-3x}(-3ax^3 - 3bx^2 + 3ax^2 + 2bx)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{-3x}(9ax^3 + 9bx^2 - 18ax^2 - 12bx + 6ax + 2b)$$

Sostituisco nell' equazione $\quad y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}(2x+1)$

$$\cancel{e^{-3x}}(\cancel{9ax^3} + \cancel{9bx^2} - \cancel{18ax^2} - \cancel{12bx} + 6ax + 2b - \cancel{18ax^3} - \cancel{18bx^2} + \cancel{18ax^2} + \cancel{12bx} + \cancel{9ax^3} + \cancel{9bx^2}) = \cancel{e^{-3x}}(2x+1)$$

$6ax + 2b = 2x + 1$

$$\begin{cases} 6a = 2 \\ 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sol. part. della comp. $\bar{y}(x) = e^{-3x}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$

Sol. gen. della comp. $y(x) = K_1 e^{-3x} + x K_2 e^{-3x} + e^{-3x}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$