SERIE GEOMETRICHE E TELESCOPICHE, CRITERI DI CONVERGENZA

Titolo nota 21/12/2014

LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ CON $q \in \mathbb{R}$ E' DETTA SERIE GEOMETRICA

$$s_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{SE } q \neq 1 \\ n+1 & \text{SE } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{SE } |q|<1 \\ +\infty & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ E' } \begin{cases} \text{CONVERGENTE (CON SOMMA } \frac{1}{1-q}\text{)} & \text{SE } |q|<1 \\ \text{DIVERGENTE} & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{INDETERMINATA} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CONVERGE (ESSENDO $\underbrace{\frac{1}{2}}_{q}<1$) E LA SOMMA E' $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

1/1

LE SERIE GEOMETRICHE E LE SERIE TELESCOPICHE SONO SEMPLICI DA CARATTERIZZARE POICHE' POSSIAMO RICAVARE UNA FORMULA CHIUSA PER S_n

(L'ESPRESSIONE "STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE" SIGNIFICA STABILIRE SE LA SERIE E' CONVERGENTE, DIVERGENTE O INDETERMINATA)

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UNA SERIE CONVERGA E' CHE IL TERMINE GENERALE a_n SIA INFINITESIMO (OVVERO $a_n \to 0$ PER $n \to +\infty$)

CI SONO POI DEI CRITERI CHE FORNISCONO DELLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA

CRITERIO DEL RAPPORTO
CRITERIO DELLA RADICE
CRITERIO DEL CONFRONTO
CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

} SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA
CRITERIO DI LEIBNIZ

} SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

3/4

SIANO $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ DUE SERIE NUMERICHE CONVERGENTI E SIA $K \in \mathbb{R}$. ALLORA

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

NB: SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE ANCHE $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n$ CONVERGE (STESSA COSA PER LA DIVERGENZA)

UNA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI (CIOE' CON $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE) CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$: NON PUO' ESSERE INDETERMINATA!

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3^{-n}}{n^2-5}$

- $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE QUINDI LA SERIE CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3^{-n}}{n^2-5} = 1 \implies$ LA SERIE NON CONVERGE

CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

ESSENDO $a_n > 0$ $\ell \in [0,+\infty)$ OPPURE $\ell = +\infty$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ TUTTO E' POSSIBILE (BISOGNA CAMBIARE CRITERIO)

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{3\cdot \cancel{3^n}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \underbrace{\frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}}}_{\to 1} = \frac{1}{3} < 1$$

QUINDI LA SERIE CONVERGE

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

LIMITE NOTEVOLE $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE LA SERIE CONSIDERATA CONVERGE

ESEMPIO 3: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{2^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(2n+2)}(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2^n}\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{2^n}\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty > 1$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE LA SERIE CONSIDERATA DIVERGE A $+\infty$.

SE IL RISULTATO DEL LIMITE E' 1, IL CRITERIO NON E' CONCLUSIVO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{n[(n+1)^2+1]} = 1 \Big\} \text{ DIVERGE A } +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n^3+1)}{n[(n+1)^3+1]} = 1 \Big\} \text{ CONVERGE}$$

CRITERIO DELLA RADICE e CRITERIO DEL CONFRONTO

Titolo nota 01/01/2015

CRITERIO DELLA RADICE

SIA $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ TUTTO E' POSSIBILE (BISOGNA CAMBIARE CRITERIO)

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

LA SERIE CONVERGE.

$$\Uparrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \left[(\log n)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1$$

1 / 1

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}_{e} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow \text{LA SERIE DIVERGE A } +\infty$$

PUO' ESSERE UTILE RICORDARE CHE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ E $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

CRITERIO DEL CONFRONTO

SUPPONIAMO CHE $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE. ALLORA VALGONO LE SEGUENTI IMPLICAZIONI

1) $\sum b_n$ CONVERGE $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE
2) $\sum a_n$ DIVERGE A $+\infty$ $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE A $+\infty$

NB: LE IMPLICAZIONI INVERSE IN GENERALE NON VALGONO

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$, DIVERGE SE $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta > 1$, DIVERGE SE $\alpha < 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta \leq 1$

ESEMPIO 3: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$

$$0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{PER OGNI } n \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, DUNQUE IL CRITERIO DEL CONFRONTO CI ASSICURA CHE ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$ CONVERGE.

ESEMPIO 4: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

$$0 \leq \frac{1}{n^{\log n}} < \frac{1}{n^2} \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

$\log n > 2$ DEFINITIVAMENTE QUINDI $n^{\log n} > n^2$ DEFINITIVAMENTE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE E QUINDI IL CRITERIO DEL CONFRONTO CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$ CONVERGE

(1) Sia $a_n > 0 \quad \forall n$

i) $\sum \frac{1}{a_n}$ diverg. $\Rightarrow \sum a_n$ conv. ? FALSA

ii) $\sum \frac{1}{a_n}$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ diverg ?

(2) $$\sum \left(\frac{1}{n^2} + |x-3|^n \right)$$

(3) $$\sum \frac{3^n}{4^n + n!}$$

(4) $$\sum \frac{3^n}{2^n + n!}$$

---

1) Considero $a_n = n$

i) è falsa: $\frac{1}{n}$ diverge $\to$ n diverge

ii) è vera perché se $\frac{1}{a_n}$ conv. allora $\frac{1}{a_n} \to 0$

allora $a_n \to \frac{1}{0} = \infty$

2) $\sum \left(\frac{1}{n^2} + |x-3|^n \right)$

La serie è espressa come somma di due serie

$\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge ed ha somma 2

Quindi il carattere della somma è dato dal carattere della seconda serie

$|x-3|^n$ è la serie geometrica di ragione $x-3$

Converge se $|x-3| < 1$

$$-1 < x-3 < 1$$

$$2 < x < 4$$

Diverge se $x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 4$

3) $$\sum \frac{3^n}{4^n + n!}$$

$$4^n + n! > 4^n \Rightarrow \frac{3^n}{4^n + n!} < \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Serie geom. <u>CONVERGENTE</u>

Per confronto la serie converge perché maggiorata da una serie convergente

4) $$\sum \frac{3^n}{2^n + n!}$$

$$2^n + n! > n! \Rightarrow \frac{3^n}{2^n + n!} < \frac{3^n}{n!} \qquad \sum \frac{3^n}{n!} \ \underline{\text{conv.}}$$

la serie converge per confronto. ma non avrei potuto utilizzare l'altro addendo $2^n + n! > 2^n$

5) $\sum \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$

6) $\sum \left(\cos \frac{2n}{n^2+1} - 1 \right)$

7) $\sum \frac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}}$

8) $(\cos n\pi) \frac{\sqrt{n-2}}{n+3}$

---

5) $\sum \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$

Considero la serie degli opposti $\frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{3}}}$ che è la serie armonica generalizzata che diverge

Quindi la serie di partenza diverge

6) $\sum \left(\cos \frac{2n}{n^2+1} - 1 \right)$ è a termini negativi

Cons. $\sum \left(1 + \cos \frac{2n}{n^2+1} \right)$
$\downarrow$
0

$$\lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

LIM. NOTEV.

$$\frac{1 - \cos \frac{2n}{n^2+1}}{\left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^2} \underbrace{\left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^2}_{\to 0} \to 0$$

moltipl. per n^2 ottenere un limite diverso da 0

$$\frac{1 - \cos \frac{2n}{n^2+1}}{\left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^2} \left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^2 \to 2$$

$\Rightarrow$ Converge quindi la serie data converge

$$\sum \frac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}}$$ è a termini non negativi

Guardare pag. 19

- Se $x=0$ la serie converge ed ha somma 0
- Se $x>0$ $\lim a_n = \frac{1}{3}$, essendo a termini positivi di certo diverge
- Se $x<0$ comunque la serie è a termini posit. e sono nel caso precedente

---

$$\sum (\cos n\pi) \frac{\sqrt{n-2}}{n+3}$$ è a segni alterni

$\lim a_n = 0$

Provo che la monotonia è decrescente

$$\frac{\sqrt{n-2}}{n+3} > \frac{\sqrt{n-1}}{n+4}$$

$$\frac{n-2}{(n+3)^2} > \frac{n-1}{(n+4)^2}$$

$$(n-2)(n^2+8n+16) > (n-1)(n^2+6n+9)$$

$$\cancel{n^3}+8n^2+\cancel{16n}-2n^2-\cancel{16n}-32 > \cancel{n^3}+6n^2+9n-n^2-6n-9$$

$$6n^2-32 > 5n^2+3n-9$$

$$n^2+5n+5 > 0$$

Vera $\Rightarrow$ Per Leibniz la serie è regolare

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{3n^2+1}{(n+2)^2},}$$

è a termini positivi perché $\log \alpha > 0$

se $\alpha > 1$

$$\lim \frac{3n^2+1}{(n+2)^2} \Rightarrow \log 3$$ quindi la serie $\to +\infty$ Diverge

---

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3},}$$

è a termini positivi

$\lim a_n \to 2$

la serie Diverge perché non soddisfa la condiz. necessaria per la convergenza

---

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+3},}$$

è a termini positivi (criterio del rapporto)

$\lim a_n \to 0$

$$\lim \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}^{\leq 1} \; \frac{2n+3}{2n+1}^{\to 1} = 1 \quad \underline{\text{NO}}$$

(Crit. dell'ordine dell'infinitesimo) $\lim n^x \cdot a_n = l > 0$

$x = 2-1 = 1$ Diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^2)}$$

$\lim (1 - n^2) = -\infty$

Diverge perché non verifica $\lim a_n \to 0$ e quindi non converge

---

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2},}$$

$\lim a_n = 0$ è a term. positivi

$x = \frac{1}{2} \leq 1$ diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^4 + 8},}$$

Criterio della serie armonica generalizzata

$x = 4 - \frac{1}{2} > 1$ Converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 6},}$$

Considero $\sum_{n=2}^{\infty}$ (Termini positivi)

$x = 3 - 2 = 1$ Diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{n^2+3}\right)}{n\sqrt{n}},}$$

$$\cos\left(\frac{2n+1}{n^2+3}\right) \leq 1$$

$$\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{n^2+3}\right)}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\rightarrow \frac{3}{2}$ (serie arm. gener.)

La serie converge per confronto

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n-1}{n^2+3}\right)}{n^2+5},}$$

$$\sin\left(\frac{n-1}{n^2+3}\right) \leq 1$$

$$\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n^2+3}\right)}{n^2+5} \leq \frac{1}{n^2+5}$$

$x = 2 > 1$ Converge

Per confronto la serie data converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}},}$$

$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} \cdot \frac{4n}{n^4} \rightarrow 0$$

$\frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{4n}{n^4} \rightarrow 0$

$$n^3 \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} \cdot \frac{4n}{n^4} \rightarrow 4 > 1$$

Converge $\Rightarrow$ La serie data converge per confronto

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1},}$$

è a segni alterni

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

$$\cancel{n^3} + 2n^2 + 2n > \cancel{n^3} + n + n^2 + 1$$

$$2n^2 + 2n > n^2 + n + 1$$

Vera definitivamente

$\Downarrow$

successione decrescente

$\lim a_n = 0$

$\Bigg\}$ Serie convergente (Leibniz)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{n^2+4},}$$

$\lim a_n = 0$

$$\frac{n+5}{n^2+4} > \frac{n+6}{(n+1)^2+4}$$

$$(n^2+2n+5)(n+5) > (n+6)(n^2+4)$$

$$\cancel{n^3} + 2n^2 + 5n + 5n^2 + 10n + 25 > \cancel{n^3} + 4n + 6n^2 + 24$$

$$7n^2 + 15n + 25 > 6n^2 + 4n + 24$$

Vera $\Rightarrow$ Converge per Leibniz.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+8}{n+1},}$$

$\lim a_n = 2 \neq 0$

Provo che a_n è decrescente

$$\frac{2n+8}{n+1} > \frac{2n+10}{n+2}$$

$$(n+2)(2n+8) > (2n+10)(n+1)$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{8n} + \cancel{4n} + 16 > \cancel{2n^2} + \cancel{2n} + 10\cancel{n} + 10$$ Vera $\Rightarrow$ La serie è indeterm.

$$\sum \frac{(2x-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$2x-1=0$

$\hookrightarrow$ • per $x = \frac{1}{2}$ la serie converge ed ha somma 0

$2x-1>0$

$\hookrightarrow$ • per $x > \frac{1}{2}$ la serie è a termini positivi (criterio del rapporto)

$$\frac{(2x-1)^{n+1}}{(2x-1)^n} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = (2x-1) \underbrace{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}_{<1} \to 2x-1$$

• $2x-1 > 1$, $x > 1$ La serie diverge positivamente

• $2x-1 < 1$, $x < 1$ La serie converge

• $x = 1$ $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ cioè $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ La serie converge a $\frac{3}{2}$

(serie armonica generalizzata)

$2x-1<0$

↳ • per $x<\frac{1}{2}$ è a termini negativi $\Rightarrow$ considero $|a_n|$

$$\left|\frac{(2x-1)^n}{n\sqrt{n}}\right|$$

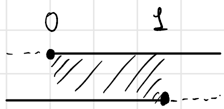
• per $|2x-1|\le 1$, $0\le x\le 1$ ma era $x<\frac{1}{2}$ quindi

$$\begin{cases} 2x-1\le 1 \\ -2x+1\le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 1 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$0\le x<\frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$



$$|\ldots| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to \text{Converge}$$

La serie converge assolutam.

• per $x<0$ la serie è a segni alterni $\Rightarrow$ considero la serie $|a_n|$

Provo che la successione è monotona

$$\frac{|2x-1|^n}{n^{\frac{3}{2}}} > \frac{|2x-1|^{n+1}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\underbrace{\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}}_{\to 1} > \underbrace{\frac{|2x-1|^{\cancel{n+1}}}{|\cancel{2x-1}|^n}}_{>1}$$

Vera definitivamente

↓

success. crescente $\Rightarrow$ Serie indeterminata

$$\sum \frac{(2x)^n}{\sqrt{n+3}}$$

- $x=0$ Converge ed ha somma 0
- $x>0$ è a termini positivi (criterio del rapporto)

$$\frac{(2x)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(2x)^n}} \underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4}}}_{\to 1} \to 2x$$

- $x > \frac{1}{2}$ la serie diverge pos.
- $(0<) x < \frac{1}{2}$ la serie converge
- $x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ criterio di ordine degli infinitesimi

  $x = \frac{1}{2} (<1)$ La serie diverge

- $x<0$ è a segni alterni

$$\frac{|(2x)^n|}{\sqrt{n+3}} < \frac{|(2x)^{n+1}|}{\sqrt{n+4}}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}}}_{\to 1} < \underbrace{|(2x)^n|}_{>1}$$ Vera definitivamente

↓

crescente

$\Rightarrow$ La serie è indeterminata

$$\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n} x^n$$

- $x=0$ Serie convergente, ha somma 0
- $x>0$ A termini positivi (crit. del rapp.)

$$\frac{x^{\cancel{n+1}}\sqrt{n+3}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{x^n}\sqrt{n+2}} = x^n \underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} = x$$

  - $x>1$ Diverge posit.
  - $0<x<1$ Converge
  - $x=1$ $\frac{\sqrt{n+2}}{n}$ (Crit. ordine degli infinitesimi) Diverge posit. $\left(\frac{1}{2}<1\right)$

- $x<0$ La serie è a segni alterni

Considero $|a_n|$ $\qquad \frac{\sqrt{n+2}}{n}|x|^n$

- $-1<|x|^n<1$ $(x<0)$

$\Downarrow$

$-1<|x|^n<0$ Serie geom. Converge

- $x=-1$ Serie a segni alterni $\to$ Studio la monotonia

$$(-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n} \qquad \lim a_n = 0$$

Provo la decrescenza della $\{a_n\}$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n} > \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}$$

$$\frac{n+2}{n^2} > \frac{n+3}{(n+1)^2}$$

$$(n^2+2n+1)(n+2) > n^3 + 3n^2$$

$$\cancel{n^3} + 2n^2 + 2n^2 + 4n + n + 2 > \cancel{n^3} + 3n^2 \qquad \text{Vera}$$

$\Downarrow$

Successione decresc. $\Rightarrow$ Converge

- $x < -1$ Considero $|a_n|$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n} |x|^n < \frac{\sqrt{n+3}}{n+1} |x|^{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n+2}{n+3}} < |x| \qquad \text{Vera def.}$$

$$\to 1 \qquad \to 1 \qquad > 1$$

$\Downarrow$

- Succes. crescente $\Rightarrow$ indeterminata
- ha almeno un termine positivo

$$\sum \frac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}} \Rightarrow \frac{(2x^2)^3}{\pi} \left(\frac{2x^2}{\pi^3}\right)^n$$

$\Downarrow$

Serie geometrica $x = \frac{2x^2}{\pi^3}$

$$\text{Conv.} \iff -1 < \frac{2x^2}{\pi^3} < 1 \qquad \begin{cases} \frac{2x^2}{\pi^3} > -1 \\ \frac{2x^2}{\pi^3} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x^2+\pi^3}{\pi^3} > 0 \\ \frac{2x^2-\pi^3}{\pi^3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 > -\frac{\pi^3}{2} \quad \text{Vera} \\ x^2 < \frac{\pi^3}{2} \end{cases}$$

$$-\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}$$

$$s = \left(\frac{1}{1-\frac{2x^2}{\pi^3}} - 1\right) = \frac{8x}{\pi^3}$$

$\Downarrow$

-1 Perché essendo il primo resto dovevo un $+1$ che ho cancellato perché l'esponente della ragione è "n" e non "$n-1$"

Per tutti gli altri valori di x diverge

$$\sum \frac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}} \Rightarrow \frac{(2x^2)^3}{\pi} \quad \frac{(2x^2)^n}{\pi^{3n}} = \frac{2x^6}{\pi} \sum \left(\frac{2x^2}{\pi^3}\right)^n$$

I resto serie geom.

ragione $\frac{2x^2}{\pi^3}$

- $\frac{2x^2}{\pi^3} \geq 1$, $x^2 \geq \frac{\pi^3}{2}$

$x \leq -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \vee x \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}$ Diverge

- $\frac{2x^2}{\pi^3} \leq -1$, $x^2 \leq -\frac{\pi^3}{2}$ Mai $\varnothing$ non è mai indeterminata

- $-1 < \frac{2x^2}{\pi^3} < 1$, $-\frac{\pi^3}{2} < x^2 < \frac{\pi^3}{2}$

$$\begin{cases} x^2 > -\frac{\pi^3}{2} &]-\infty, +\infty[\\ x^2 < \frac{\pi^3}{2} & -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \end{cases}$$

er $-\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}$ Converge

$$s = \left(\frac{1}{1-\frac{2x^2}{\pi^3}} - 1\right) = \frac{8x}{\pi^3}$$

$$\sum \frac{\pi^{n+1}}{x^{3n+2}} \Rightarrow \frac{\pi}{x^2}\left(\frac{\pi}{x^3}\right)^n$$

$\Rightarrow$ I resto della serie geom di ragione $\frac{\pi}{x^3}$

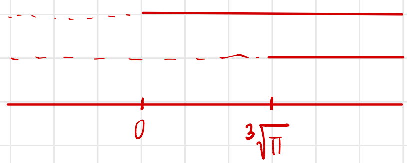
Converge $\iff -1 < \frac{\pi}{x^3} < 1$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{x^3} > -1 \\ \frac{\pi}{x^3} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\pi + x^3}{x^3} > 0 \\ \frac{\pi - x^3}{x^3} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \sqrt[3]{-\pi} & (x>0) \\ x > \sqrt[3]{\pi} & (x<0) \end{cases}$$

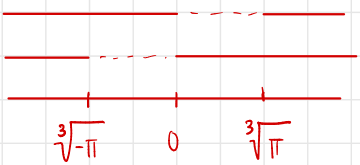
$x^3 + \pi > 0$ quando $x > \sqrt[3]{-\pi}$

$x^3 - \pi > 0$ quando $x > \sqrt[3]{\pi}$

I diseq



II diseq



- per $x < \sqrt[3]{-\pi} \vee x > \sqrt[3]{\pi}$ la serie converge $s = \left(\frac{1}{1 - \frac{\pi}{x^3}} - 1\right)$
- per $\frac{\pi}{x^3} \geq 1$ cioè $0 < x < \sqrt[3]{\pi}$ la serie diverge
- per $\frac{\pi}{x^3} \leq -1$ cioè $\sqrt[3]{-\pi} < x < 0$ la serie è indeterm.

2. Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}$$

Considero la serie dei valori assoluti

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right|$$

Studio la monotonia:

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right| > \left|\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2+3n+3}}{(n+1)^3+\sin^2(n+1)}\right|$$

$$\frac{n^2+3n}{(n^3+\sin^2 n)^2} > \frac{(n+1)^2+3n+3}{((n+1)^3+\sin^2(n+1))^3}$$

$$(n^2+3n)\left((n+1)^3+\sin^2(n+1)\right)^3 > (n^2+2n+1+3n+3)(n^3+\sin^2 n)^2$$

vera

$\Downarrow$

decrescente

$$\lim \left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right| \to 0$$

Per Leibniz converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+1}{n+3},}$$

é a segni alterni

Provo la decrescenza

$$\frac{n+1}{n+3} > \frac{n+2}{n+4}$$

$$(n+4)(n+1) > (n+2)(n+3)$$

$$\cancel{n^2} + n + 4n + 4 > \cancel{n^2} + 3n + 2n + 6$$

$$\cancel{5n} + 4 > \cancel{5n} + 6$$

$4 > 6$ Falsa $\Rightarrow$ Crescente

$\exists_i : d_i > 0$ $\Rightarrow$ Non é regolare

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \, \sin \frac{1}{2^n},}$$

é a term. posit.

$$\lim \cancel{4^n}^{\,2^n} \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} = +\infty$$

$\Downarrow$

La serie diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{4^n},}$$

è a term. pos.

$$\lim a_n = \cancel{2}^n \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}^n_{\,2^n}} = \lim \frac{1}{2^n} = 0$$

Criterio del rapporto

$$\underbrace{\frac{2^{n\cancel{+1}}}{\cancel{2}^n}}_{2} \quad \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^{n+1}}}}_{\to 1} \quad \underbrace{\frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\sin\frac{1}{4^n}}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \text{Converge}$$

$$\sum \frac{5+n^3}{3^n+n^2\cdot 2^n}$$ è a term. posit.

$$3^n+n^2 2^n > 3^n \qquad \frac{5+n^3}{3^n+n^2\cdot 2^n} < \frac{5+n^3}{3^n}$$

$$\underbrace{\frac{3^n}{3^{n+1}}}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\frac{5+(n+1)^3}{5+n^3}}_{\to 1} = \frac{1}{3} \ (<1)$$

Converge $\rightarrow$ La serie data conv. per confront

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^n,}$$

- per $x=\frac{1}{2}$ la serie converge e $s=0$
- per $x>\frac{1}{2}$ la serie è a term. positivi (Crit. del rapp.)

$$\lim \frac{(1-2x)^{n+1}}{(1-2x)^n} = 1-2x$$ opp. serie geom. di rag. $(1-2x)$

opp. crit. della radice

- $1-2x>1$, $x<0$ Diverge
- $\frac{1}{2}<1-2x<1$, $x>0$ Converge
- per $x=0$ Diverge posit.

- per $x < \frac{1}{2}$ è a segni alterni

Cons. $|a_n| = |1-2x|^n$ serie geom. di ragione $(1-2x)$

- $x < 0$ Diverge po
- $0 < x < 1$, ma era $x < \frac{1}{2}$ quindi

$0 < x < \frac{1}{2}$ Converge ed ha somma

$$s = \left(\frac{1}{1-(1-2x)} - 1\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 3^{4nx-1}}$$

$3^{4nx} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3}\left(3^{4x}\right)^n$ I° resto serie geom ragione $\underline{3^{4x}}$

- $x = 0$ $\sum \frac{1}{3}$ Diverge posit.
- $x > 0$ è a term posit.
- $3^{4x} \geq 1$, $3^{4x} > 3^0$, $4x > 0$, $x > 0$

Diverge pos.

- $x < 0$ Converge e ha somma $s = \left(\frac{1}{1-3^{4x}} - 1\right)$
- $3^{4x} < -1$ indeterm. MAI

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{(n+1)^5}}$$

è a termini positivi

$\lim a_n = 0$ (potrebbe convergere)

Crit confronto con SAG $\quad \lim n^x a_n = l \ (>0) \to$ Diverge pos. per $0 < l \leq 1$

$\to$ Converge per $l > 1$

$$n^4 \cdot \frac{4n+2}{(n+1)^5} = l > 0$$

$x = 5 - 1 = 4 > 0$ La serie Converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+6)^8},}$$

Confronto con la SAG

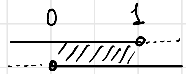
per $x = 6$ $\quad n^x a_n = l (> 0)$ $\quad$ La serie converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (1-2x)^n,}$$

I resti della serie geom. di ragione $(1-2x)$

- $x = \frac{1}{2}$ $\quad$ Serie conv. $s = 0$
- $x > \frac{1}{2}$ $\quad$ Serie a term. posit. (studio come serie geom.)

- $x \leq 0$ $\quad$ Diverge
- $x > 0$ $\quad$ Indeterm.



$\Uparrow$

- $-1 < (1-2x) < 1$ $\quad \begin{cases} 1-2x > -1 \\ 1-2x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\quad s = \left(\frac{1}{1-(1-2x)} - 1\right)$

$0 < x < 1$ Converge

- $x < \frac{1}{2}$ Segni alterni

$(1-2x)^n \Rightarrow$ Consid. $|a_n|$

$|1-2x|^n$ Serie geom.

- $1-2x \geq 1$

$x \leq 0$ Diverge

- $-1 < 1-2x < 1$

$0 < x < 1$

$\Downarrow$

$0 < x < \frac{1}{2}$ Converge ass. $s = \left(\frac{1}{1-(1-2x)} - 1\right)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 3^{4nx-1}}$$

$3^{-1} \cdot \left(3^{4x}\right)^n \Rightarrow$ I° resto serie geom. di ragione 3^{4x}

- $x = 0$ $\sum 1^n \Rightarrow$ Diverge positiv.

- $x > 0$ è a term. posit.

  - $x \geq 0$ Diverge pos

  - $3^{4x} < -1$ MAI

  - $\begin{cases} 3^{4x} < 1 \\ 3^{4x} > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ ]-\infty, +\infty[\end{cases}$ $x < 0$ Converge $s = \left(\frac{1}{1-3^{4x}} - 1\right)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} x^n,}$$

- $x = 0$ Converge $s = 0$
- $x > 0$ Term. positivi (crit. del rapp.)

$$\lim \underbrace{\frac{x^{n+1}\sqrt{n+1}}{x^n \sqrt{n}}}_{\to x} \ \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\to 1} = x$$

- $x > 1$ Diverge pos.
- $x < 1$ Converge
- $x = 1$ $\quad \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ Crit. del confr. con SAG Diverge

  $x = \frac{1}{2} \ (<1)$

- $x < 0$

Serie a segni alterni

Cons. $|a_n|$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{\to 0} |x|^n$$

x^n serie geom.

- $-1 < x < 1$. Converge
- $x < -1$ Indet.

- $x = -1$

$$(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$ A segni alterni

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)^2$$

$$n(n+2)^2 > (n+1)(n+1)^2$$

$$n(n^2+2n+4) > (n+1)(2n+n^2+1)$$

$$\cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + 4n > \cancel{2n^2} + \cancel{n^3} + n + 2n + n^2 + 1$$

$$4n > n^2 + 3n + 1$$ Falsa def. crescente $\Rightarrow$ Non reg.

$\exists i : a_i > 0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}x^n}$$

- $x = 0$ Converge $s=0$
- $x > 0$ Serie a termini positivi (crit. del rapporto)

$$\frac{x^{n+1}}{x^n}\underset{\to x}{} \quad \frac{(n+1)^2}{n^2}\underset{\to 1}{} \cdot \frac{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}{(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}}\underset{\to 1}{} = x$$

- $x > 1$ Diverge pos
- $x < 1$ Converge
- $x = 1$ $\lim \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}} = +\infty$ Diverge

- $x < 0$

Serie a segni alterni

Cons. $|a_n|$

$$\frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\underset{\to 0}{} \quad |x|^n$$

x^n serie geom.

- $-1 < x < 1$. Converge
- $x < -1$ Indet.

• $x = -1$ $\quad (-1)^n \dfrac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}$ Segni alterni

$$\frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}} > \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}}$$

$$(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}\; n^2 > (2n+1)\sqrt{n^5+6}\;(n+1)^2$$

$$\cancel{2n^3}+\cancel{2n^2}\sqrt{\ldots} > \cancel{2n^3}+n^2+4n^2+\cancel{2n^2}+2n+1\;\sqrt{\ldots}$$

$$(n+1)^5+6 > (5n^2+2n+1)(n^5+6)$$ Vera Decresc.

Non regolare

$\lim a_n \neq 0$

• $x < -1$ Indeterm.

$$\sum \frac{(2x-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

- $x = \frac{1}{2}$ Serie converge $s=0$
- $x > \frac{1}{2}$ Term. pos. (crit. del rapp.)

$$\lim \frac{(2x-1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(2x-1)^n}} \underbrace{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}_{\to 1} = 2x-1$$

- $2x-1 > 1$
  $x > 1$ Diverge
- $2x-1 < 1$
  $x < 1$ Converge
- $x = 1$ $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $S_{AG} \to$ Converge a $\frac{3}{2}$

- $x < \frac{1}{2}$ è a segni alterni

  cons $|a_n|$ $\frac{|2x-1|^n}{n^{3/2}}$

  - se $|2x-1| < 1$ $\begin{cases} 2x-1 < 1 \\ 2x-1 > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$$0 < x < 1$$
$$\downarrow$$
$$0 < x < \frac{1}{2}$$ La serie converge ass.

- $x < 0$ Serie a segni alterni

$$\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} < \frac{|2x-1|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{|2x-1|^{n}}}$$ Vera def. Crescente $\Rightarrow$ Non è regolare

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad > 1$$
$$1$$

$$\sum \frac{(2x)^n}{\sqrt{n+3}}$$

- $x = 0$ Converge $s = 0$
- $x > 0$ Serie a term. posit. (crit del rapp)

$$\lim_n \frac{(2x)^{\cancel{n+1}}}{\sqrt{n+4}} \frac{\sqrt{n+3}}{\cancel{(2x)^n}} = 2x$$

- $2x > 1$, $x > \frac{1}{2}$ Diverge
- $2x < 1$, $x < \frac{1}{2}$ Converge

- $x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ Divergere pos

- $x < 0$ Segni alterni

cons $|a_n|$ $\dfrac{|2x|^n}{\sqrt{n+3}}$

$|2x| < 1$ $\begin{cases} 2x < 1 \\ 2x > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{2} < x < 0$ Converge assolutam.

- $x < -\frac{1}{2}$

$\dfrac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}} < \dfrac{|2x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{|2x|^n}}$ Vera def. $\Rightarrow$ Non regolare

$\downarrow$

1 $\qquad > 1$

$$\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n} x^n$$

- $x = 0$ Converge $s = 0$
- $x > 0$ Rapp. (Term. pos.)

$$\lim \frac{x^{\cancel{n+1}}}{\cancel{x^n}} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} \frac{n}{n+1} \to x$$

- $x > 1$ Diverge
- $x < 1$ Converge

- $x=1$ $\qquad \frac{\sqrt{n+2}}{n}$ Diverge

- $x<0$ $\qquad \frac{\sqrt{n+2}}{n} x^n$ è a segni altern

cons $|a_n|$

$$|x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

$$\Downarrow$$

$$-1 < x < 0 \quad \text{Conv. ass.}$$

- $x=-1$ $\qquad (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n}$ A segni alterni

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n} < \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}$$

$$(n+1)^2 (n+2) < n^2 (n+3)$$

$$(2n + n^2 + 1)(n+2) < n^3 + 3n^2$$

$$2n^2 + \cancel{n^3} + n + 4n + 2n^2 + 2 < \cancel{n^3}\ 3n^2 \quad \text{Falsa}$$

$$\Downarrow$$

Decrescente

$\lim a_n = 0$ $\Rightarrow$ Converge

- $x < -1$ Segni alterni

$$|x|^n \frac{\sqrt{n+2}}{n} < \frac{\sqrt{n+3}}{n+1} |x|^{n+1}$$

$$\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}}}_{\to 1} < \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{|x|^n}}$$

> 1 Vera def. $\Rightarrow$ Non determ.

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2^{n+3}}$$

- $x = 0$ Converge $s = 0$
- $x > 0$ Serie a term positivi (crit. rapp)

$$\lim \frac{x^{2\cancel{n+3}}}{\cancel{x^{2n+1}}} \cdot \underbrace{\frac{2^{n+3}}{2^{n+4}}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2}$$

- $\frac{x^2}{2} > 1 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ Diverge

- $\frac{x^2}{2} < 1 \Rightarrow x < \sqrt{2}$ Converge

- $x = \sqrt{2}$ $\qquad \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{2^{n+3}} = \frac{(\sqrt{2})^{2n} \cdot \sqrt{2}}{2^n \cdot 2^3} = \frac{\cancel{2^n}\sqrt{2}}{\cancel{2^n} \cdot 8}$

$\Downarrow$

Diverge

- $x < 0$ Segni negativi

Cons. gli opposti $\qquad \frac{|x|^{2n+1}}{2^{n+3}}$ $\qquad$ • $|x|^{2n+1} < 1$

$-1 < x < 1$

$\Downarrow$

$-1 < x < 0$ Converge assolut

- $x = -1$ Segni alterni

$\frac{|x|^{2n+1}}{2^{n+3}}$

$(-1)^{2n+1} \quad \frac{1}{2^{n+3}} > \frac{1}{2^{n+4}}$ Vera def.

$\left.\begin{array}{l} \text{Vera def.} \\ \lim a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Converge

- $x < -1$

$\frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} < \frac{|x|^{2n+3}}{|x|^{2n+1}}$ Vera (crescente) $\Rightarrow$ Indeterm.

$\Downarrow \qquad\qquad > 1$

1

$$\sum \operatorname{tg} \frac{2n+3}{n^4+4}$$

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} \dfrac{2n+3}{n^4+4}}{\dfrac{2n+3}{n^4+5}} \qquad \frac{2n+3}{n^4+5} \Rightarrow \text{La serie converge}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

1 Conv. per il crit. confronto SAG $(4-1=3>1)$

$$\sum \frac{\pi^{n+1}}{x^{3n+2}} \Rightarrow \frac{\pi}{x^2}\sum \frac{\pi^n}{x^{3n}} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{x^3}\right)^n$$

I resto serie geom. ragione $\frac{\pi}{x^3}$

- $\frac{\pi}{x^3} \geq 1$, $\frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{\pi}$, $x^3 \leq \pi$

$\Downarrow$

$0 < x \leq \sqrt[3]{\pi}$ Diverge

- $-1 < \frac{\pi}{x^3} < 1$, $-\frac{1}{\pi} < \frac{1}{x^3} < \frac{1}{\pi}$ $\begin{cases} \frac{1}{x^3} > -\frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{x^3} < \frac{1}{\pi} \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 < -\pi \\ x^3 > \pi \end{cases}$

$\begin{cases} x < -\sqrt[3]{\pi} \\ x > \sqrt[3]{\pi} \end{cases}$

- per $x < \sqrt[3]{-\pi}$ $\vee$ $x > \sqrt[3]{\pi}$ la serie converge $s = \left(\frac{1}{1-\frac{\pi}{x^3}} - 1\right)$

- per $\frac{\pi}{x^3} \leq -1$, $x^3 \geq -\pi$, $x \geq -\sqrt[3]{\pi}$ è indet.

$\sqrt[3]{\pi} \leq x < 0$

$$\sum 2^n \operatorname{sen} \frac{1}{4^n}$$

$$\lim \frac{\cancel{2}^n \operatorname{sen} \frac{1}{4^n}}{\underbrace{\frac{1}{4^n}}_{\to 1}} \quad \frac{1}{\cancel{4}^n_{2}} \to \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}$$

Può convergere

Crit. del rapporto

$$\lim \underbrace{\frac{2^{\cancel{n+1}}}{\cancel{2}^n}}_{\to 2} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{4^{n+1}}}{\operatorname{sen} \frac{1}{4^n}} = 2 \underbrace{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^{n+1}}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{4^n}{4^{n+1}}}_{\to \frac{1}{4}} \underbrace{\frac{\frac{1}{4^n}}{\operatorname{sen} \frac{1}{4^n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{2}$$

Converge

$$\sum \frac{n+1}{n\sqrt{n}+1}\,(x^2)^n$$

- $x=0$ Converge e ha somma 0
- $x \neq 0$ La serie è a termini positivi

$$\lim \frac{(x^2)^{\cancel{n+1}}\,(n+2)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}+1}\cdot\frac{n^{\frac{3}{2}}+1}{(\cancel{x^2})^n\,(n+1)} = x^2$$

- $(x^2<1)$ $\quad -1<x<1$ Converge
- $(x^2>1)$ $\quad x<-1 \vee x>1$ Diverge
- $(x^2=1)$ $\quad x=1$ $\quad \sum \frac{n+1}{n^{\frac{3}{2}}+1}$ Confronto con SAG

$\alpha = \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$ (<1) Diverge

$$\sum \frac{x^n}{n(e^n-1)} \qquad \text{Cons. } \frac{|x|^n}{n(e^n-1)}$$

$$\lim \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{|x|^n}}\cdot\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(e^n-1)}{(e^{n+1}-1)}}_{\to \frac{1}{e}} \to \frac{|x|}{e}$$

- Se $\frac{|x|}{e}<1$ quindi $-e<x<e$ Converge

La serie di part. è ass. Convergente

- Se $\frac{|x|}{e} > 1$ $\begin{cases} x > e & \text{diverge} \\ x < -e & \text{è a segni alterni} \end{cases}$

$$\sum (-1)^n \frac{|x|^n}{n(e^n-1)}$$

... TO BE CONTINUED

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{\sqrt{2}}{n!}}{n! + \log n},}$$

è a termini positivi

lim $a_n \to 0$

$$\frac{n \sin \frac{\sqrt{2}}{n!}}{n! + \log n} \leq \frac{n}{n!}$$

$$\leq \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{n^2}$$ Serie arm. gen.

$\to 2$

La serie data converge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sin \frac{\sqrt{2}}{n!}}{n! + \log n}.}$$

$$\lim a_n = 0 \qquad \left(\frac{n!}{n!} \cdot \underbrace{\frac{\text{sen}(\ldots)}{\log n}}_{\to 0} = 0 \right)$$

$$\frac{n! \ \text{sen}\frac{\sqrt{2}}{n!}}{n! + \log n}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 \implies \text{per } x \to 0 \quad \text{sen}\, x \sim x$$

$$\Downarrow$$

$$\lim \frac{\text{sen}\frac{\sqrt{2}}{n!}}{\frac{\sqrt{2}}{n!}} \to 1 \implies \sum \underbrace{\text{sen}\frac{\sqrt{2}}{n!}}_{a_n} \sim \sum \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{n!}}_{b_n}$$

$$\sim \frac{n! \ \frac{\sqrt{2}}{n!}}{n! + \log n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2} \sum \frac{1}{n! + \log n} \quad (\text{Crit. del rapp.})$$

$$\lim \frac{(n+1)! + \log(n+1)}{n! + \log n} = 0 \quad (<1) \quad \text{Converge}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt[4]{n}(n^2+1)}(x+3)^n,}$$

- $x = -3$ Converge $s=0$

- $x > -3$ Term. posit (crit rapp)

$$\lim \frac{2n+2}{2n+1} \frac{\sqrt[4]{n}\,(n^2+1)}{\sqrt[4]{n+1}\,(n^2+2)} \frac{(x+3)^{\cancel{n+1}}}{(\cancel{x+3})^n} = x+3$$

$\rightarrow 1$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow 1$

  - $x+3 > 1$

    $x > -2$ Diverge

  - $x+3 < 1$ Converge

    $x < -2$

  - $x = -2$ $\quad \dfrac{2n+1}{\sqrt[4]{n}\,(n^2+1)}$ $\quad x = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}\ (>1)$ Converge

    $$\| \qquad n^{\frac{9}{4}} + n^{\frac{1}{4}}$$

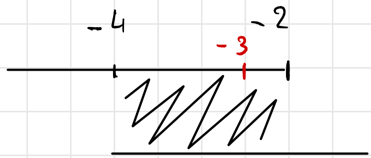
- $x < -3$

  è a segni alterni

$$\frac{|x+3|^n (2n+1)}{\sqrt[4]{n}\,(n^2+1)}$$

$$|x+3| < 1$$

$$\begin{cases} x+3 < 1 \\ x+3 > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x > -4 \end{cases}$$



$-4 < x < -2$

$-4 < x < -3$ Converge

- $x+3 = -1$

$x = -4$ La serie è a segni alterni

$$(-1)^n \frac{2n+1}{\sqrt[4]{n}\,(n^2+1)}$$ guardo la monot.

$$\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \; \frac{(n^2+2)}{(n^2+1)} > \frac{2n+2}{2n+1}$$ Vera def.

$\to n \qquad \to 1 \qquad \to 1$

$\left.\begin{array}{l} \text{decrescente} \\ \lim a_n = 0 \end{array}\right\}$ Per Leibniz Converge

- $x+3 < -1$ è a segni alterni

$x < -4$ Cons. $|a_n|$ $\frac{|x+3|^n (2n+1)}{\sqrt[4]{n}\,(n^2+1)}$

$$\underbrace{\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n}}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{(n^2+2)}{(n^2+1)}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{(2n+1)}{(2n+2)}}_{\to 1} < \frac{|x+3|^{n+1}}{|x+3|^{n}} = |x+3|$$

Vera $\Downarrow$ Crescente Serie non regolare

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx^2}}{nx},\ x \neq 0.}$$

- se $x > 0$ è a term. positivi

$$\lim \frac{2^{\cancel{nx^2}+x^2}}{\cancel{2^{nx^2}}} \cdot \underbrace{\frac{nx}{(n+1)x}}_{=1} = 2^{x^2}$$

- $2^{x^2} > 1$

$2^{x^2} > 1^0 \quad x^2 > 0 \;,\; x > 0$ Diverge

- se $x < 0$ è a segni negativi

Cons $|a_n|$

$$\frac{2^{nx^2}}{n|x|} \qquad |x| < 1 \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$-1 < x < 1$$

$$\Downarrow$$

$-1 < x < 0$ Converge

• se $x = -1$

$$\sum \frac{2^n}{-n} \quad \text{cons } |a_n|$$

$$\sum \frac{2^n}{|n|} \Rightarrow 2^n \sum \frac{1}{n}$$ Serie arm. Diverge ass.

• se $x < -1$ é a term. reg.

Cons. $$\frac{2^{nx^2}}{n|x|} < \frac{2^{nx^2+x^2}}{(n+1)|x|}$$

$$\underbrace{\frac{(n+1)}{n}}_{\to 1} < \underbrace{\frac{2^{nx^2+x^2}}{2^{nx^2}}}_{= 2x^2} \underbrace{\frac{|x|}{|x|}}_{=1}$$ Vera def. $\Downarrow$ Non regolare

---

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n^2+1)}(3x-1)^n.}$$

• $x = \frac{1}{3}$ Converge $s=0$

• $x > \frac{1}{3}$ é a Term positivi (crit rapp)

$$\lim \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{(3x-1)^{n+1}}{(3x-1)^n}}_{= 3x-1} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)}{(n+2)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{(n^2+1)}{(n+1)^2+1}}_{\to 1} = 3x-1$$

- $3x-1>1$

  $x>\frac{2}{3}$ Diverge

- $3x-1<1$

  $x<\frac{2}{3}$ Converge

- $x=\frac{2}{3}$ $\quad \frac{n^2}{(n+1)(n^2+1)}$ Criterio confronto SAG $\Rightarrow (\leq 1)$ Diverge

- $x<\frac{1}{3}$ $\quad \frac{n^2}{(n+1)(n^2+1)}(3x-1)^n$ Segni alterni

Cons $\quad |a_n| = \frac{n^2}{(n+1)(n^2+1)}|3x-1|^n$

$$|3x-1|<1 \qquad \begin{cases} 3x-1<1 \\ 3x-1>-1 \end{cases}$$

$$0<x<\frac{2}{3} \qquad \begin{cases} x<\frac{2}{3} \\ x>0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$0<x<\frac{1}{3}$$

Converge

- $3x-1=-1$ Serie a segni alterni

  $x=0$

$$\frac{n^2}{(n+1)(n^2+1)} < \frac{(n+1)^2}{(n+2)((n+1)^2+1)}$$

$$((n+2)((n+1)^2+1))\, n^2 < (n+1)^2((n+1)(n^2+1))$$

$$((n+2)(n^2+2n+2))\, \cancel{n^2} < (\cancel{n^2}+2n+2)(n^3+n+n^2+1)$$

$$n^3+\cancel{2n^2}+2n+\cancel{2n^2}+4n+4 < 2n^4+\cancel{2n^2}+2n^3+2n+2n^3+2n+\cancel{2n^2}+2$$

$$n^3+6n+4 < 2n^4+4n^3+4n+2$$ Vera def.

Crescente $\Rightarrow$ Indeterminata

- $3x-1 < -1$

$x < 0$ è a segni alterni Costante

$$\frac{n^2(n+1)(n^2+1)}{n^2(n+1)(n^2+1)} < \frac{(3x-1)^{\cancel{n}+1}}{(3x\cancel{-1})^n}$$ Vera

$$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\quad 1 \qquad\qquad\quad 3x-1$$

$\downarrow$

Indeterminata