PARTE A

1. Dare la definizione di serie numerica convergente.

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e considero s_n la somma parziale di posto n.

Se $s_n \to s$, ovvero $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = s$ allora la serie converge ed ha somma s.

2. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

Cosa si puó dire del carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n?$$

Dato che la serie verifica le ipotesi del criterio del confronto ed $l > 1$, posso concludere che la serie diverge positivamente.

E del carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n?$$

Possiamo dire che la serie è a segni alterni quindi non può divergere.

Se a_n è monotona allora possiamo applicare uno dei seguenti teoremi:

Leibniz.

Se a_n è decrescente e $\lim a_n \to 0$ allora la serie converge

e posso indicare la sua somma "s" commettendo un errore di approssimazione

minore del primo termine

$$|s - s_n| < a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Criterio di non Regolarità

Se verifico:

a) a_n crescente ed ha almeno un termine positivo

opp.

B) a_n decrescente e $\lim a_n \neq 0$

allora la serie non è regolare

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro reale $x \neq 0$ il carattere della seguente serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{n+1}}{x^{3n+2}}.$$
In caso di convergenza, calcolarne la somma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{n+1}}{x^{3n+2}}$$

$\underline{x = 1}$ $\quad \pi^{n+1} \quad \Rightarrow$ diverge positiv.

$\underline{x > 1}$ è a term. positivi (crit. del rapp)

$$\frac{\pi^{n+2}}{x^{3n+3}} \cdot \frac{x^{3n+2}}{\pi^{n+1}} = \frac{\pi}{x}$$

- $\frac{\pi}{x} > 1 \quad \Rightarrow \quad x < \pi$ diverge
- $\frac{\pi}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad x > \pi$ converge
- $x = \pi \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{\pi^{n+1}}{\pi^{3n+2}} \to \frac{1}{3}$ converge

$\underline{X < 1}$

$$\sum \frac{\pi^{n+1}}{X^{3n+2}} \qquad \text{cons.} \qquad \left| \ldots \right| = \frac{\pi^{n+1}}{|X|^{3n+2}}$$

$$\frac{\pi^{n+2}}{|X|^{3n+3}} \cdot \frac{|X|^{3n+2}}{\pi^{n+1}} = \frac{\pi}{|X|}$$

per $|x| < \pi$ Converge

per $|x| > \pi$ Diverge

2. Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}$$

Considero la serie dei valori assoluti

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right|$$

Studio la monotonia:

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right| > \left|\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2+3n+3}}{(n+1)^3+\sin^2(n+1)}\right|$$

$$\frac{n^2+3n}{(n^3+\sin^2 n)^2} > \frac{(n+1)^2+3n+3}{\left((n+1)^3+\sin^2(n+1)\right)^3}$$

$$(n^2+3n)\left((n+1)^3+\sin^2(n+1)\right)^3 > (n^2+2n+1+3n+3)(n^3+\sin^2 n)^2$$

vera

$\Downarrow$

decrescente

$$\lim \left|\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3+\sin^2 n}\right| \to 0$$

Per Leibniz converge