Università degli Studi di Catania
Corso di Laurea in INFORMATICA
**Prima Prova di Fine Capitolo di Elementi di Analisi Matematica 2**
4 Novembre 2020

PARTE A (TEORIA)

Rispondere alle seguenti domande.

i) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definire una funzione integrale di $f$.

ii) Dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

PARTE E (ESERCIZI)

**[E1]** Calcolare, se esiste il

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt.$$

**[E2]** Determinare tutte le funzioni primitive in $]-\infty, +\infty[$ della funzione

$$f(x) = x|x-1| + \log(3 + 2x^2).$$

i) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione cont. in $x_0 \in (a,b)$

$\forall x \in (a,b) \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)\,dt \Rightarrow$ fun. integrale

ii) Teorema fondament. del calcolo integrale

HP $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} \qquad a, b \in (\alpha, \beta) \qquad F$ prim. di $f$ in $(a,b)$

TS $F(x) = \int_{b}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[ F(x) \right]_{a}^{b}$

DIM Sia $F$ una primitiva di $f$. Sia ora $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ un'altra primitiva

Per il teorema delle primitive $\exists K \in \mathbb{R} \mid F(x) = G(x) + K$

se $x = a$ si ha $F(a) = \int_{a}^{a} f(t)\,dt + K = K$

$\Rightarrow F(x) = G(x) + F(a)$

se $x = b$ si ha $F(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt + F(a) \Rightarrow$ TS

B) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 \, dt$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} \underbrace{\int_0^0 \sin t^2 \, dt}_{= 0} = [\infty \cdot 0] \quad \text{F I}$$

Applico de L'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 \, dt}{x^2} = \text{Faccio il lim. delle der.}$$

$$\frac{\sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{x}}}_{\to +\infty} = +\infty$$

Primitive in $]-\infty, +\infty[$ di $f(x) = x|x-1| + \log(3+2x^2)$

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 + \log(3+2x^2) & \text{in } ]-\infty, 1[ \\ x^2 - x + \log(3+2x^2) & \text{in } [1, +\infty[ \end{cases}$$

$f$ continua in $x=1$ ?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\log 5 = \log 5 \quad \checkmark \quad \Rightarrow f \text{ ammette primitive}$$

$$I = \int x^2 - x + \log(3+2x^2)\,dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx + \underbrace{\int \log(3+2x^2)\,dx}_{J}$$

$$J = \int \log(3+2x^2)\,dx = x\log(2x^2+3) - \int \frac{4x^2}{2x^2+3}\,dx$$

$$= x\log(2x^2+3) - 2\int \frac{2x^2 +3 -3}{2x^2+3}\,dx$$

$$= x\log(2x^2+3) - 2\left(\int dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}}\right)$$

$$= x\log(2x^2+3) - 2x + \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + K$$

$$I = \int x^2\,dx - \int x\,dx + \int \log\left(3+2x^2\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\log\left(2x^2+3\right) - 2x + \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + K$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x\log(2x^2+3) - 2x + \dfrac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + K & \text{in } ]-\infty, 1[ \\ \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\log(2x^2+3) - 2x + \dfrac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + c & \text{in } ]1, +\infty[ \end{cases}$$

impongo la cont. in $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cancel{\log 5} - \cancel{2} + \cancel{\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}} + K = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cancel{\log 5} - \cancel{2} + \cancel{\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}} + c$$

$$1 - \frac{2}{3} + K = c$$

$$\frac{1}{3} + K = c$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x\log(2x^2+3) - 2x + \dfrac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + K & \text{in } ]-\infty, 1[ \\ \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\log(2x^2+3) - 2x + \dfrac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + \dfrac{1}{3} + K & \text{in } ]1, +\infty[ \end{cases}$$