Introduzione agli Alberi ed ai BST

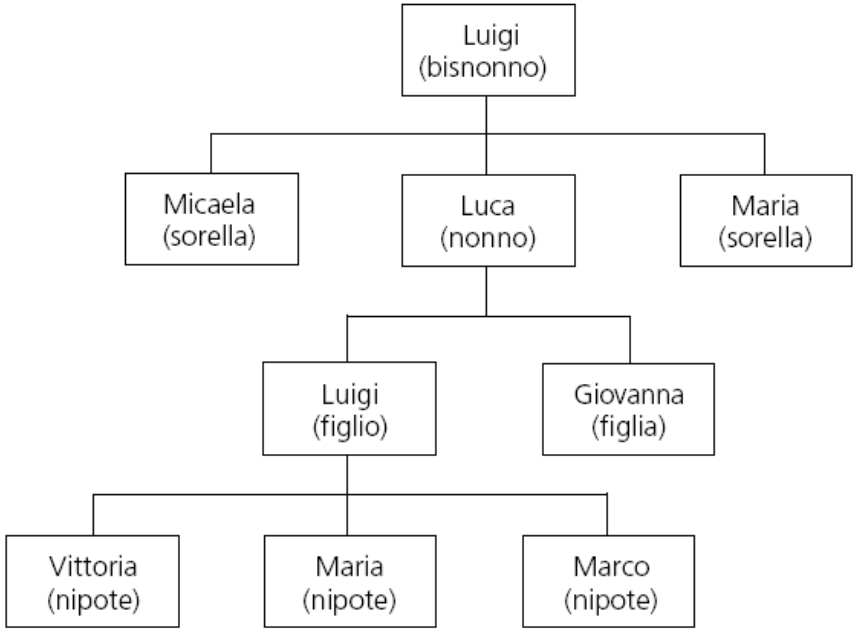
Massimo Orazio Spata
Image Processing Lab - iplab.dmi.unict.it

massimo.spata@unict.it
www.dmi.unict.it/spata/

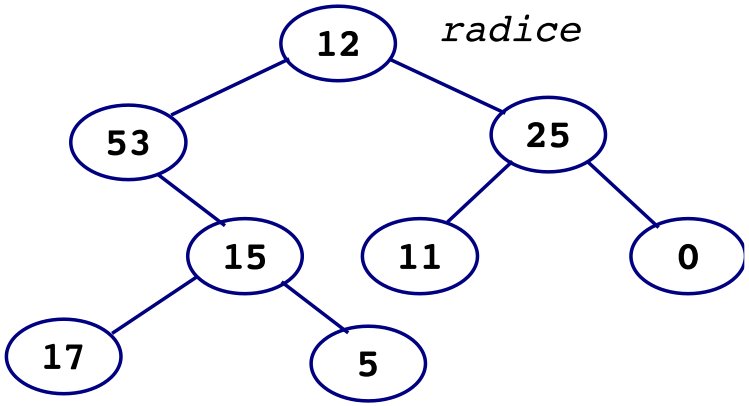
Albero

- si dice "grafo diretto" un insieme di nodi collegati mediante archi direzionati.

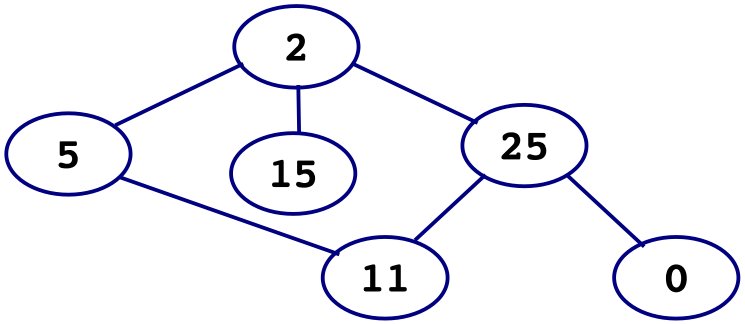
- un *albero* è un grafo diretto in cui ogni nodo può avere un solo arco entrante ed un qualunque numero di archi uscenti
- se un nodo non ha archi uscenti si dice "**foglia**"
- se un nodo non ha archi entranti si dice "**radice**"
- poiché in un albero non ci sono nodi con due o più archi entranti, per ogni albero vi deve essere una ed una sola radice



Esempi



Albero di interi

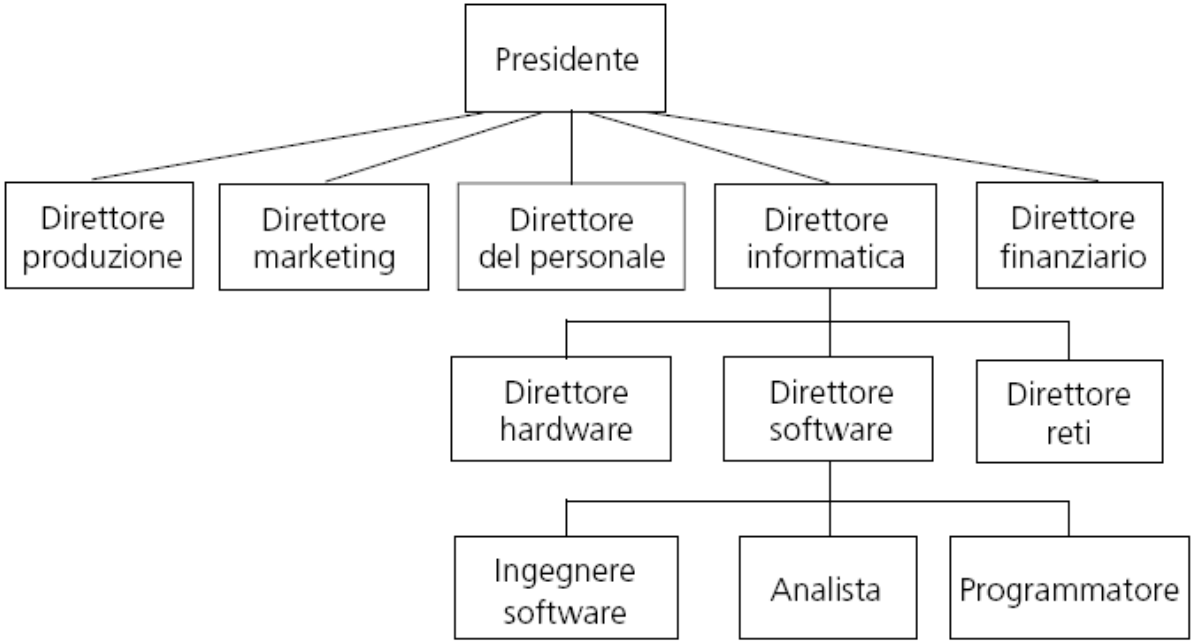


Struttura che non è un albero!

Alberi

- Generalizzazione delle liste.
  - Ogni elemento ha più di un solo successore.
  - Utili per rappresentare partizioni ricorsive di insiemi e strutture gerarchiche

Alberi e strutture gerarchiche

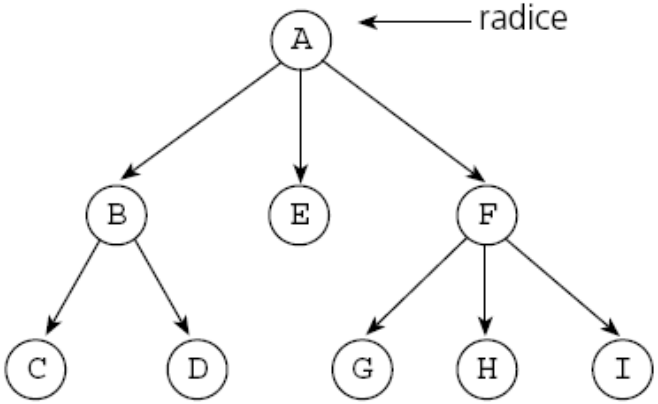


- il nodo da cui un arco parte si dice *padre*, un nodo a cui questo arriva si dice *figlio*
- due nodi con lo stesso padre sono detti fratelli
- da ogni nodo non-foglia di un albero si dirama un sottoalbero, quindi si intuisce la natura ricorsiva di questa struttura dati

Alberi come strutture ricorsive

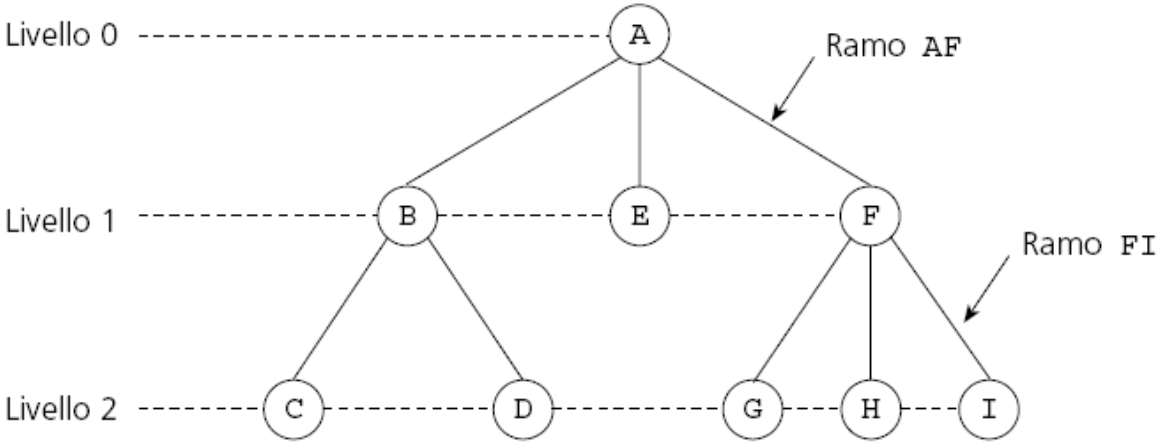
Definizione ricorsiva: un albero è un insieme di nodi che

- è vuoto
- oppure ha un nodo denominato *radice* da cui discendono zero o più sottoalberi che sono essi stessi alberi



- dato un nodo, i nodi che appartengono al suo sottoalbero si dicono suoi *discendenti*
- dato un qualunque nodo, i nodi che si trovano nel *cammino* dalla radice ad esso sono i suoi *ascendenti* (per esempio, B ed A sono ascendenti di C)

Cammini e livelli



Padri: A, B, F	Foglie: C, D, E, G, H, I
Figli: B, E, F, C, D, G, H, I	Nodi interni: B, F
Fratelli: {B, E, F}, {C, D}, {G, H, I}	

- il **livello** di un nodo è la sua distanza dalla radice
- la radice ha livello 0, i suoi figli livello 1, i suoi nipoti livello 2 e così via
- i fratelli hanno lo stesso livello ma non tutti i nodi dello stesso livello sono fratelli
- La **profondità** di un albero è la lunghezza del cammino più lungo dalla radice ad una foglia

Profondità di un nodo

- Definita ricorsivamente
  - La radice ha profondità 0 i figli (della radice) profondità 1, etc.

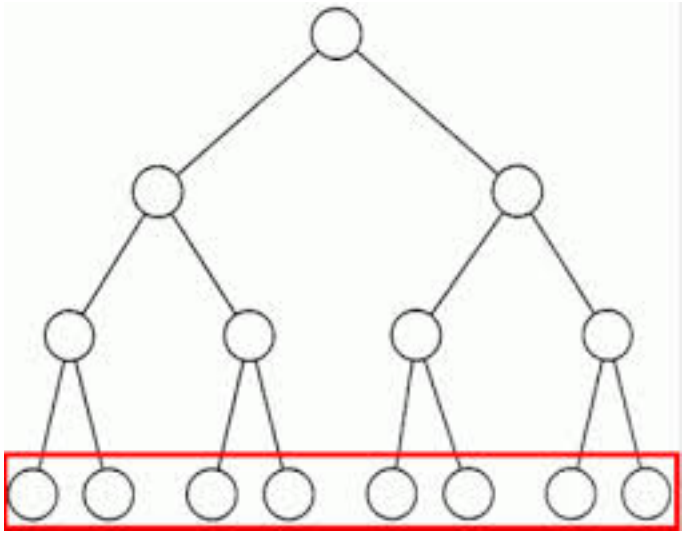
Profondità (u)

```
p=0;
while (u.padre != null) {
      p=p +1;
      u=u.padre;
}
```

Alberi equilibrati

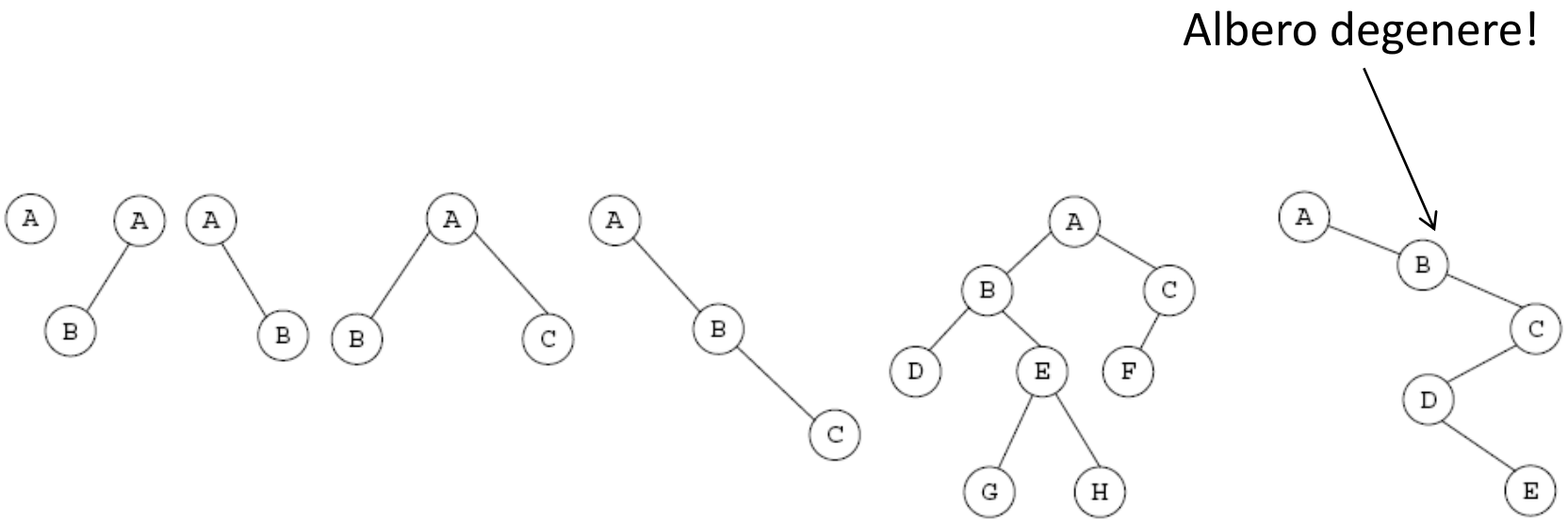
Un albero di profondità h è equilibrato (o bilanciato) se,

1. Tutte le foglie si trovano allo stesso livello.
2. Dato k numero massimo di figli per nodo, ogni nodo interno (inclusa la radice) ha esattamente k figli.



Albero binario

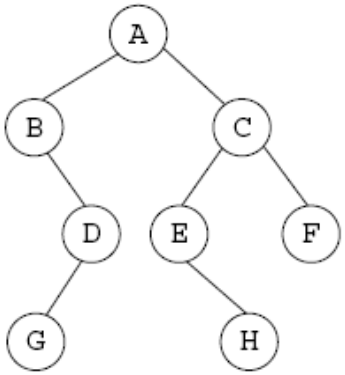
- un albero è *binario* se ogni nodo non ha più di due figli (sottoalberi), il sinistro ed il destro



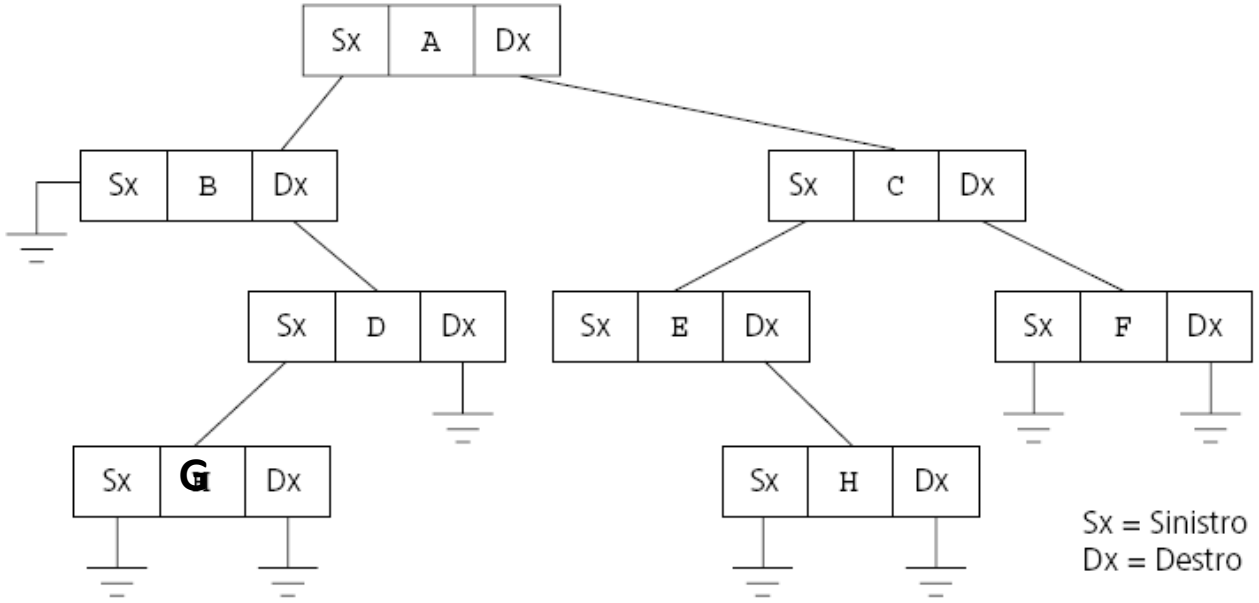
Un albero binario non vuoto si definisce **degenere** se ogni nodo diverso da una foglia ha un solo figlio (per convenzione, si assume che l'albero vuoto sia degenere).

- Ad ogni livello n un albero binario può contenere (al più) 2^n nodi
- Il numero totale di nodi di un albero (incluse le foglie) di profondità n è al massimo $2^{(n+1)}-1$

Implementazione di un albero



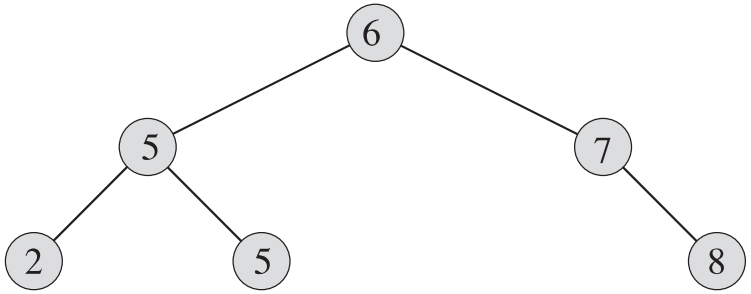
(a) Albero



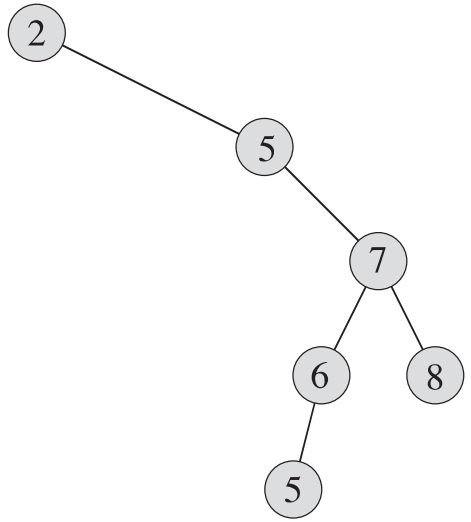
(b) Struttura

Albero binario di ricerca

- Proprietà fondamentale:
  - x nodo generico. Se y è un nodo nel sottoalbero sinistro di radice x allora y.valore < x.valore. Altrimenti y.valore ≥ x.valore



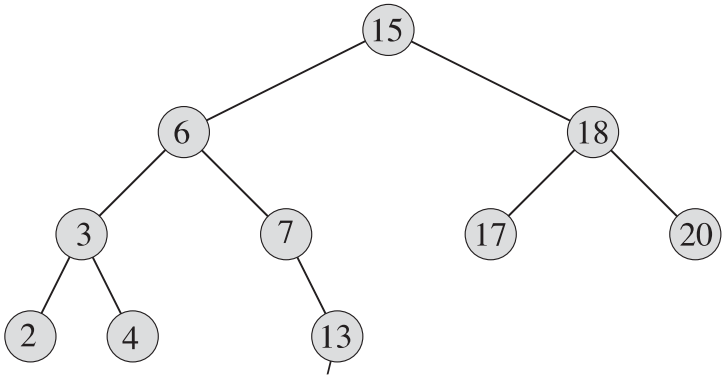
(a)

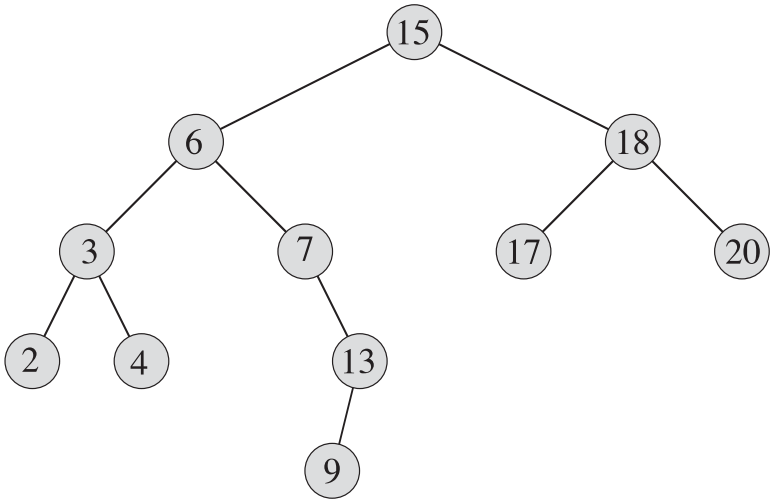


(b)

Inserimento in un albero binario di ricerca

I nuovi elementi vengono sempre inseriti come nuove foglie.
In che punto inseriremo l'elemento 9?





Inserimento in un albero binario di ricerca

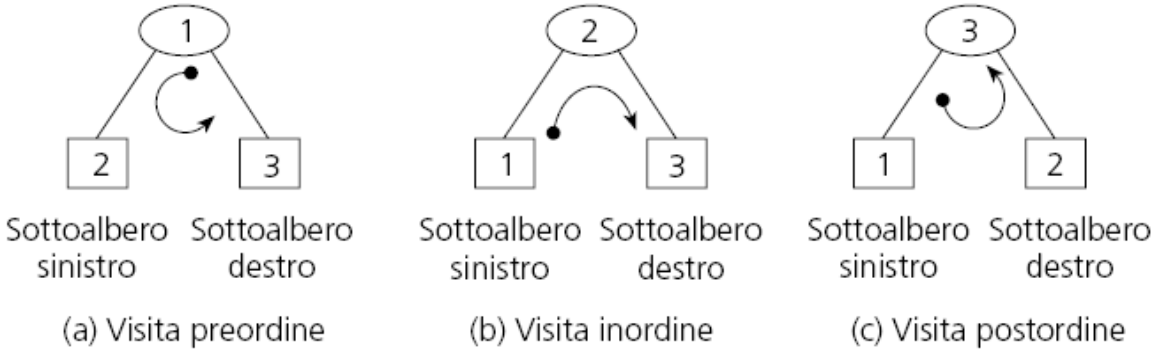
```
Insert(T, elemento)
1.  x=T.root;
2.  y=NULL;
3.  while (x!= NULL)
4.        y=x;                        // y serve a mantenere il padre di x
5.        if (elemento < x.val)    // confronto con la chiave di x
6.              then x=x.left;
7.              else  x=x.right;
8.  new nodo;        // x occupa la posizione dove inserire il nodo
9.  nodo.padre=y; nodo.val=elemento;
10. if (y==NULL) // L'albero è vuoto
11.             T.root=nodo;
12. else if (nodo.val < y.val) y.left=nodo;
13. else y.right=nodo;
```

Inserimento in un albero binario di ricerca

```
Insert(T, elemento)
1.  x=T.root;
2.  y=NULL;
3.  while (x!= NULL)
4.      y=x;                    // y serve a
    mantenere il padre di x
5.      if (elemento < x.val)   // confronto con
    la chiave di x
6.          then x=x.left;
7.      else  x=x.right;
8.  new nodo;       // x occupa la posizione
    dove inserire il nodo
9.  nodo.padre=y; nodo.val=elemento;
10. if (y==NULL) // L'albero è vuoto
11.         T.root=nodo;
12. else if (nodo.val < y.val) y.left=nodo;
13. else y.right=nodo;
```

Visita di un albero binario

- esistono tre strategie di visita notevoli



- la visita *preorder* visita prima la radice, quindi il sottoalbero sinistro e da ultimo quello destro
- la visita *inorder* processa prima il sottoalbero sinistro, quindi la radice ed infine il sottoalbero destro
- la visita *postorder* processa prima il sottoalbero sinistro, poi quello destro ed infine la radice

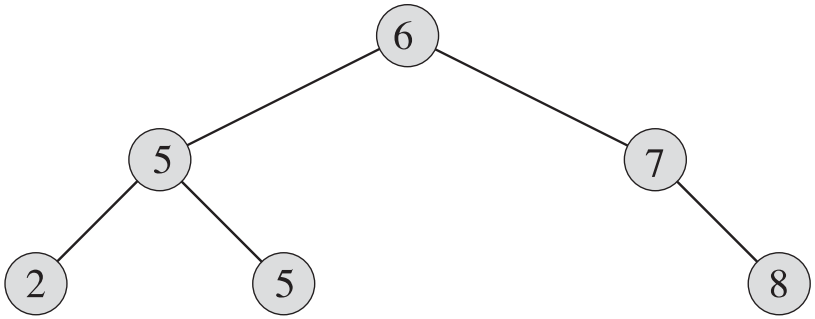
Visita di un albero binario in C++

```
void preOrder(Nodo* p)
{
   if (p){
      cout << p -> valore << '';     // visita la radice
      preOrder(p -> sinistro);    // visita il sottoalbero sinistro
      preOrder(p -> destro);      // visita il sottoalbero destro
   }
}
```

```
void inOrder(Nodo *p)
{
   if (p){
      inOrder(p -> sinistro);    // visita il sottoalbero sinistro
      cout << p -> valore << '';    // visita la radice
      inOrder(p -> destro);      // visita il sottoalbero destro
   }
}
```

```
void postOrder(Nodo *p)
{
   if (p){
      postOrder(p -> sinistro);    // visita il sottoalbero sinistro
      postOrder(p -> destro);      // visita il sottoalbero destro
      cout << p -> valore << '';      // visita la radice
   }
}
```

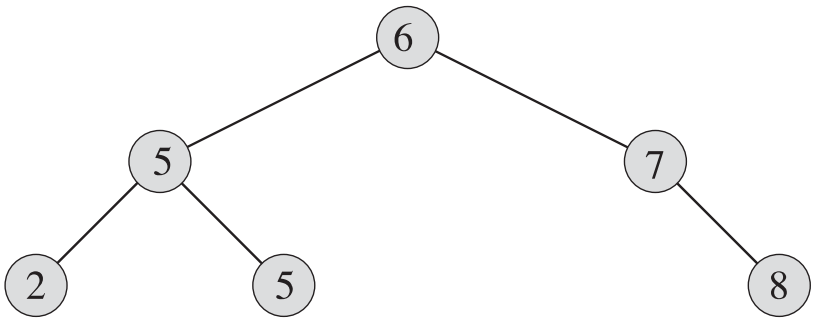
Esempio



- Visita Inorder:
  - Visitiamo prima il sottoalbero sinistro, quindi la radice ed infine il sottoalbero destro.

- Nel caso in questione l'ordine di lettura sarebbe 2, 5, 5, 6, 7, 8

Costo della visita




```
void inOrder(Nodo *p)
{
  if (p!=nullptr)
  {
    inOrder(p -> sinistro);
    cout << p -> valore << ' ';
    inOrder(p -> destro);
  }
}
```

Complessità: T(n)=Θ(n)

- Devono essere fatti almeno n passi, dunque T(n)= Ω(n)
- Rimane da provare che T(n)=O(n)

- Se n=0
  T(0)=c (c>0) (la procedura deve testare se il puntatore è diverso da NULL)

- Se n>0
  …

Ricerca in un albero binario di ricerca

Ricerca(T,elemento) // *T è tipicamente un puntatore alla radice*

1. **if** (T== NULL) **or** (elemento==T.val)) **return** T;
2. **if** (elemento < T.val) **return** Ricerca(T.left, elemento)
3. **else return** Ricerca(T.right, elemento)

Complessità: T(n)=O(h) (h profondità dell'albero)

Ricerca iterativa

```
Ricerca(T,elemento)  // T tipicamente è un puntatore alla radice
1. x=T;
2. while ((x!= NULL) and (elemento!=x.val))
3.         if (elemento < x.val)  x=x.left;
4.         else x=x.right;
5. return x
```

Massimo e minimo

Massimo(T) // *T è tipicamente un puntatore alla radice*

1. x=T;
2. **while** (x.right!= NULL) x=x.right;
3. **return** x

Minimo(T) // *T è tipicamente un puntatore alla radice*

1. x=T;
2. **while** (x.left!= NULL) x=x.left;
3. **return** x

Complessità: T(n)=O(h) (h profondità dell'albero)

Successore di x

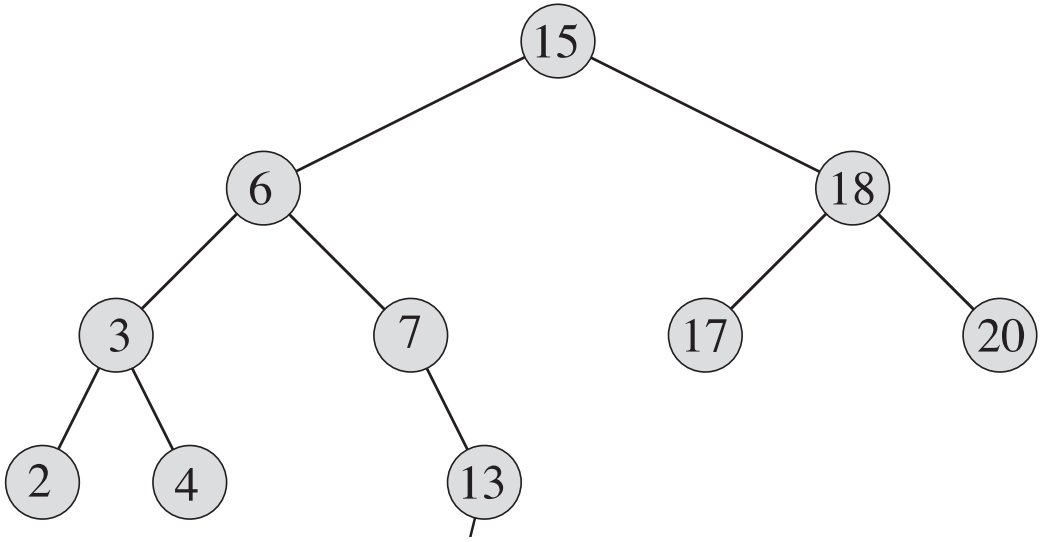
Due casi da considerare

1. Il sottoalbero destro di x è non vuoto: caso banale

2. Il sottoalbero destro di x è vuoto
   - Minimo antenato di x il cui figlio sinistro è anche un antenato di x
   - Ogni nodo è antenato di se stesso

Successore di x

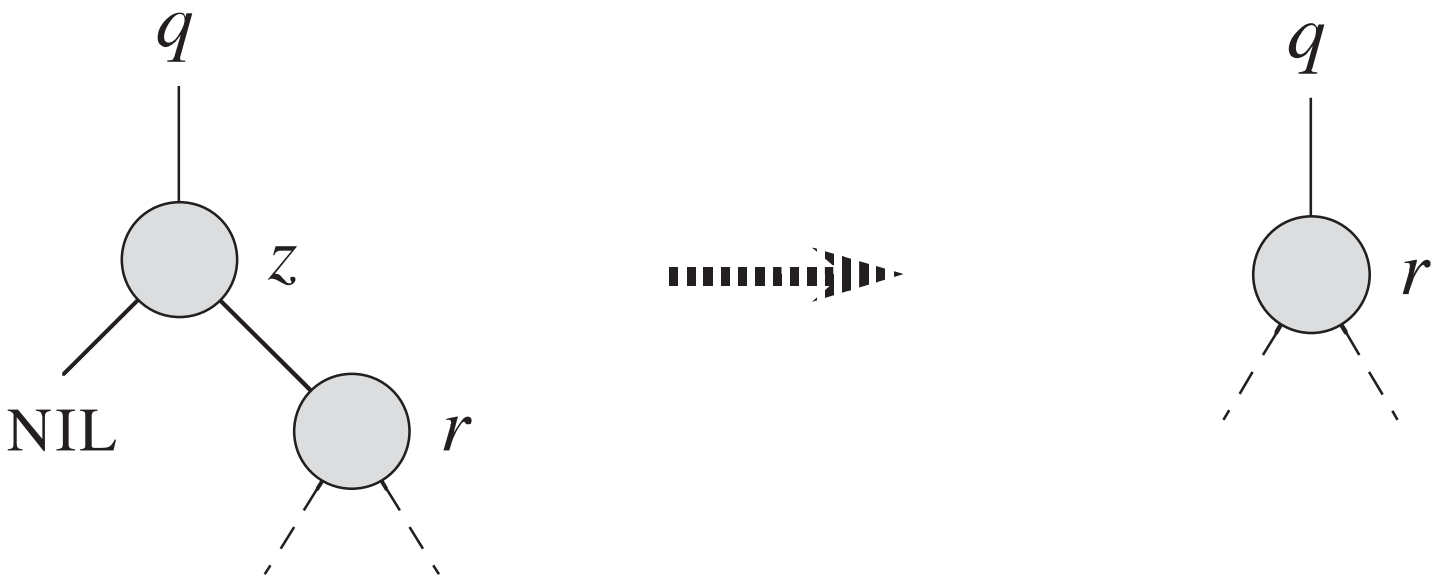
```
Successore(x)
1.  if (x.right!=NULL)
2.        return Minimo(x.right);   // Caso banale
3.  y=x.padre;   // risaliamo l'albero fino a trovare un figlio sx di suo padre
4.  while (y!=NULL) && (x==y.right)
5.        x=y;
6.        y=y.padre;
7.  return y;
```



Cancellazione di un nodo z

- Procedura più complicata delle precedenti
- Tre casi da considerare
  1. z non ha figli
  2. z ha un solo figlio
  3. z ha due figli
- Nel caso in cui z non abbia figli la procedura è banale: eliminiamo z e modifichiamo il padre in modo che il puntatore a z diventi un puntatore a NULL.
- Il caso più complesso da gestire è il 3

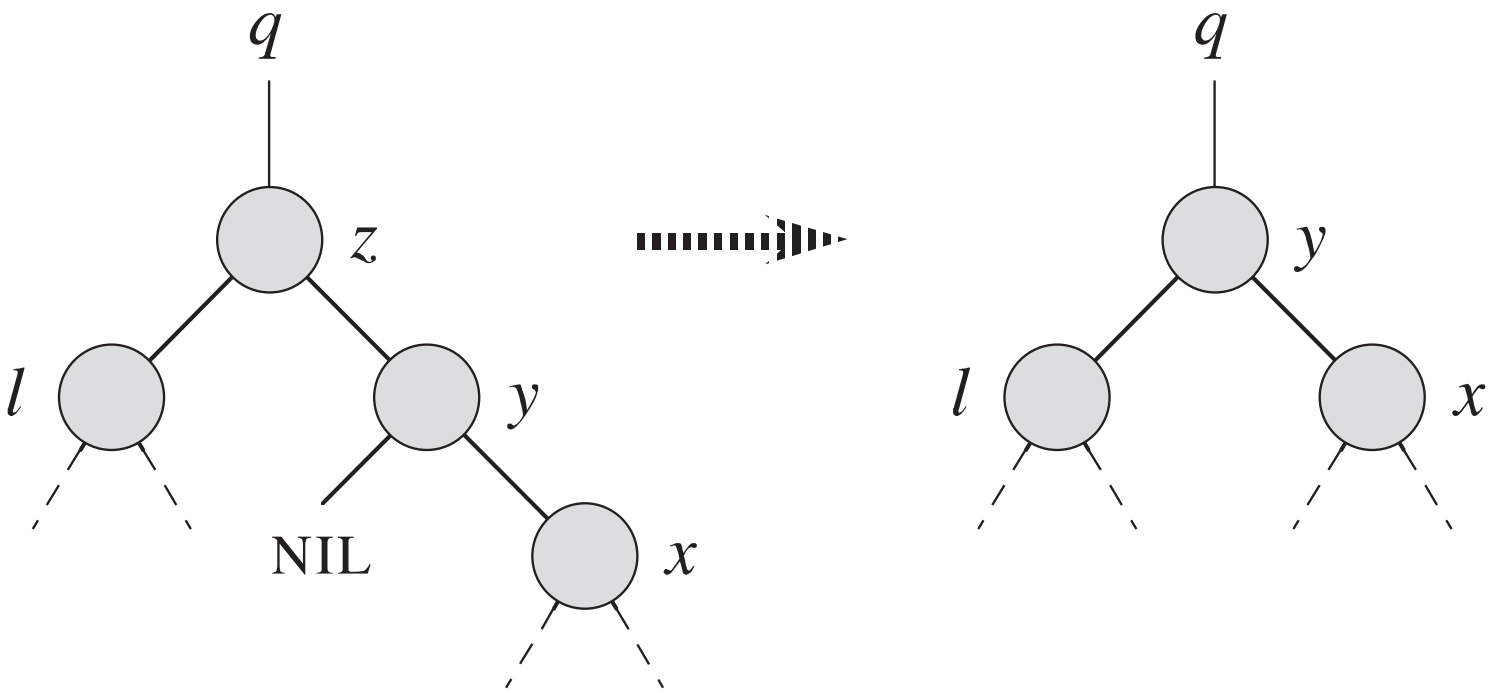
Caso 2: z ha un solo figlio



Caso 3: z ha due figli

- Cerchiamo il successore y di z
  - Si troverà certamente nel sottoalbero destro di radice z
- y prende la posizione di z nell'albero
- La rimanente parte del sottoalbero destro (di z) diventa il nuovo albero destro di y

Caso 3a: y è figlio di z



Cancellazione: procedura “Trapianta”

- Permette di spostare sottoalberi
- Rimpiazza un sottoalbero di radice u con un altro di radice v

```
Trapianta(root,u,v)
1. if u.padre==NULL
2.         root=v;                          // u è proprio la radice
3. else if (u==u.padre.left)                // u è figlio sinistro di suo padre
4.         u.padre.left=v;
5. else
6.         u.padre.right=v;
7. if (v!=NULL)                             // aggiorniamo il padre di v
8.          v.padre=u.padre;
```

Cancellazione

```
Delete(root, z)
1. if (z.left==NULL)
2.       Trapianta(T, z , z.right);    // z non ha figlio sinistro -> sposto il suo
                                       figlio destro 'in alto' al posto di z
3. else if (z.right==NULL)             // analogamente se z non ha figlio destro
4.       Trapianta(T,z,z.left);
5. else
6.          y=Minimo(z.right);   //uguale a successor poiché z.right!=NULL
7.          if (y.padre!=z)          // se y non è figlio (destro) di z …
8.                Trapianta(T, y , y.right); // sposto y.right in y …
9.                y.right=z.right;   // … e z.right come figlio dx di y
10.               y.right.padre=y;
11.         Trapianta(T, z , y);   // ora sposto y in z (dopo aver settato y.right)
12.         y.left=z.left;           // sistemo il sottoalbero sx di z in y.left
13.         y.left.padre=y;
```