Cognome e Nome: ______________________ ______________________ **Matricola:** ______________________

Esame di Strutture Discrete
27 Luglio 2021
Soluzioni

Prima parte

1. Trasformare la formula $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$, in CNF (forma normale congiuntiva).

   Risposta: *Utilizzando la proprietà distributiva*

$$(p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee r \vee p) \wedge (p \vee r \vee r) \wedge$$
$$(q \vee q \vee p) \wedge (q \vee q \vee r) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee r)$$

   Da cui otteniamo

$$(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge$$
$$(q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r)$$

   E quindi, semplificando

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

2. Dimostrare che $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

   Risposta: *Dimostriamo prima che $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ e poi il viceversa. Sia allora $x \in (A \cup B) \setminus C$, abbiamo che $x \in A \cup B$ e $x \notin C$. Due casi sono possibili:*

   1. *$x \in A$ e quindi $x \in A \setminus C$ da cui $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$*
   2. *$x \in B$ e quindi $x \in B \setminus C$ da cui $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$*

   Dimostriamo adesso che $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$. Sia $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Due casi sono possibili:

   1. *$x \in A \setminus C$ e quindi $x \in A$ e $x \notin C$. Ne segue che $x \in (A \cup B)$ e quindi $x \in (A \cup B) \setminus C$*
   2. *$x \in B \setminus C$ e quindi $x \in B$ e $x \notin C$. Ne segue che $x \in (A \cup B)$ e quindi $x \in (A \cup B) \setminus C$*

Seconda parte

3. Calcolare $101^{-1} \bmod 11$ ossia, l'inverso di 101 modulo 11.

   Risposta: *Come prima cosa notiamo che 101 e 11 sono coprimi e, in effetti, entrambi primi, quindi l'inverso esiste. Per il Teorema di Eulero $101^{\phi(11)} \equiv 1 \bmod 11$. Ne segue che l'inverso di 101 modulo 11 è $101^{\phi(11)-1} \bmod 11 = 101^9 \bmod 11$. Calcoliamo*

$$101^9 \equiv (101 \bmod 11)^9 \equiv 2^9 \bmod 11$$

   E

$$2^9 \equiv (2^4 \bmod 11) \cdot (2^5 \bmod 11) \equiv 5 \cdot 10 \equiv 50 \equiv 6 \bmod 11.$$

   Quindi, $101^{-1} \bmod 11 = 6$.

4. Calcolare $26^{50} \bmod 21$

   Risposta: *Come prima cosa notiamo che $26 = 2 \cdot 13$ e $21 = 3 \cdot 7$ sono coprimi. Inoltre, $\phi(21) = 2 \cdot 6 = 12$. Quindi*

$$26^{50} \equiv 26^{50 \bmod \phi(21)} \equiv 26^{50 \bmod 12} \equiv 26^2 \bmod 21$$

   E

$$26^2 \equiv (26 \bmod 21)^2 \equiv 5^2 \equiv 4 \bmod 21.$$

   Quindi, $26^{50} \bmod 21 = 4$.

Terza parte

5. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$ è possibile definire una funzione iniettiva dall'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 di A nell'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 7 di B?

   Risposta: *I sottoinsiemi di cardinalità 5 di A sono $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$. I sottoinsiemi di cardinalità 7 di B sono $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$. Quindi, non è possibile definire una funzione iniettiva dall'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 di A nell'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 7 di B?*

6. Se in un'urna abbiamo 6 palline rosse, 5 palline verdi e 4 palline bianche, qual è la probabilità di estrarre 3 palline tutte dello stesso colore, senza reintroduzione?

   Risposta: *Le palline sono 15, ne estraiamo* 3 *senza reintroduzione, l'ordine di estrazione non è importante, quindi il numero di casi possibili è* $\binom{15}{3} = 455$. *Il numero di possibili estrazioni di* 3 *palline tutte rosse è* $\binom{6}{3} = 20$. *Il numero di possibili estrazioni di* 3 *palline tutte verdi è* $\binom{5}{3} = 10$. *Infine, il numero di possibili estrazioni di* 3 *palline tutte bianche è* $\binom{4}{3} = 4$. *Ne segue che il numero possibile di estrazioni di* 3 *palline tutte dello stesso colore è* $20 + 10 + 4$ *e quindi la probabilità che ciò avvenga è*

$$\frac{34}{455}$$

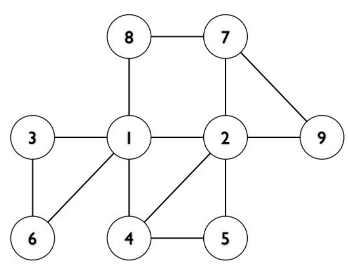
   Commento EXTRA: *Possibile risposta alternativa. Lo stesso risultato si ottiene calcolando la probabilità di estrarre* 3 *palline di uno dei* 3 *colori e poi sommando tali probabilità. La probabilità di estrarre* 3 *palline rosse è* $\frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}\frac{4}{13} = \frac{120}{2730}$. *La probabilità di estrarre* 3 *palline verdi è* $\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14}\frac{3}{13} = \frac{60}{2730}$. *La probabilità di estrarre* 3 *palline bianche è* $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14}\frac{2}{13} = \frac{24}{2730}$. *In totale abbiamo allora*

$$\frac{120}{2730} + \frac{60}{2730} + \frac{24}{2730} = \frac{204}{2730} = \frac{34 \cdot 6}{455 \cdot 6} = \frac{34}{455}$$

Quarta parte

7. Dato il grafo G_1 in figura, quanti sono gli archi che bisogna aggiungere per renderlo massimale?

   GRAFO G_1

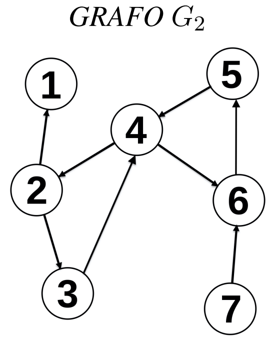


   Risposta: *Un grafo planare massimale con* v *vertici ha esattamente* $3v - 6$ *archi. Il grafo* G_1 *ha* 9 *vertici, quindi per essere massimale dovrebbe avere* $27 - 6 = 21$ *archi. Ne ha* 13 *e quindi ne dobbiamo aggiungere ancora* 8.

   Commento EXTRA: *Nello specifico, tali archi potrebbero essere per cominciare:* $(2, 8), (3, 8), (4, 6), (5, 9), (3, 7), (3, 4), (4, 9)$. *A questo punto tutte le facce sarebbero definite tra* 3 *archi, tranne quella esterna definita dagli archi* $(3, 4), (4, 9), (9, 7), (7, 3)$. *Se aggiungiamo come ottavo arco* $(3, 9)$ *oppure* $(4, 7)$ *anche la faccia esterna diventa triangolare.*

8. Dato il grafo orientato G_2 in figura, si può rendere fortemente connesso aggiungendo 1 arco? Se si, quale? Altrimenti, quanti archi servono?

   GRAFO G_2



   Risposta: *Il grafo* G_2 *ha* 3 *componenti fortemente connesse, ossia* $\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $\{7\}$. *Se aggiungiamo l'arco orientato* $[1, 7]$ *creiamo un ciclo* $1 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ *che coinvolge i vertici* 1 *e* 7 *e vertici della terza componente fortemente connessa. Quindi, tutti i vertici del grafo apparterrebbero ad un'unica componente fortemente connessa.*