Prima parte

1. Trasformare la formula $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$, in CNF (forma normale congiuntiva).

$$(p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee r \vee p) \wedge (p \vee r \vee r) \wedge$$
$$(q \vee q \vee p) \wedge (q \vee q \vee r) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee r)$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \cancel{q} \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge (\cancel{p \vee r}) \wedge (\cancel{q \vee p}) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \cancel{r} \vee p) \wedge$$
$$(\cancel{q \vee r})$$

ELIMINAZIONE RIPETIZIONI

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad \boxed{\text{CNF}}$$

$\boxed{\text{2. Dimostrare che } (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}$

$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$$x \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \cup B),\ x \notin C \begin{cases} x \in A \rightarrow x \in (A \setminus C) \\ x \in B \rightarrow x \in (B \setminus C) \end{cases}$$

$\boxed{\text{c.v.d.}}$

$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$

$$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \begin{cases} x \in (A \setminus C) \rightarrow x \in A,\ x \notin C \\ x \in (B \setminus C) \rightarrow x \in B,\ x \notin C \end{cases} x \in (A \cup B)$$

$\boxed{\text{c.v.d.}}$

Seconda parte

3. Calcolare 101^{-1} mod 11 ossia, l'inverso di 101 modulo 11.

101 E 11 SONO COPRIMI, QUINDI L'INVERSO ESISTE. PER IL TEOREMA DI EULERO

$101^{\phi(11)} \equiv 1 \bmod 11$. NE SEGUE CHE L'INVERSO DI $101 \bmod 11$ È $101^{\phi(11)-1} \bmod 11 = 101^{9} \bmod 11$

$101^{9} \equiv (101 \bmod 11)^{9} \equiv 2^{9} \bmod 11$

$2^{9} \equiv (2^{4} \bmod 11)\cdot(2^{5} \bmod 11) \equiv 5\cdot 10 \equiv 50 \equiv 6 \bmod 11$

$\boxed{\text{QUINDI } 101^{-1} \bmod 11 = 6}$

4. Calcolare 26^{50} mod 21

26 E 21 SONO COPRIMI, PERCHÉ $26 = 2\cdot 13$; $21 = 3\cdot 7$.

INOLTRE $\phi(21) = 2\cdot 6 = 12$

$26^{50} \equiv 26^{50 \bmod \phi(21)} \equiv 26^{50 \bmod 12} \equiv 26^{2} \bmod 21$

$26^{2} \equiv (26 \bmod 21)^{2} \equiv 5^{2} \equiv 4 \bmod 21$

$\boxed{26^{50} \bmod 21 = 4}$

Terza parte

5. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$ è possibile definire una funzione iniettiva dall'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 di A nell'insieme di tutti i sottoinsiemi di cardinalità 7 di B?

SOTTOINSIEMI DI CARDINALITÀ 5 DI A SONO: $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$

SOTTOINSIEMI DI CARDINALITÀ 7 DI B SONO: $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$

NON È POSSIBILE DEFINIRE UNA FUNZIONE INIETTIVA DALL'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI CARDINALITÀ 5 DI A NELL'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI CARDINALITÀ 7 DI B.

6. Se in un'urna abbiamo 6 palline rosse, 5 palline verdi e 4 palline bianche, qual è la probabilità di estrarre 3 palline tutte dello stesso colore, senza reintroduzione?

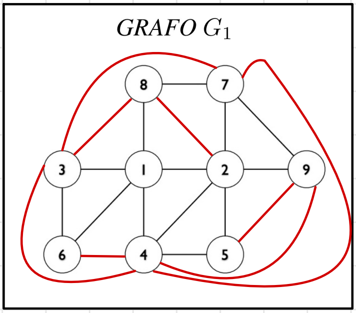
LE PALLINE SONO 15, NE ESTRAIAMO 3 SENZA REINTRODUZIONE, L'ORDINE DI ESTRAZIONE NON È IMPORTANTE, QUINDI IL NUMERO DI CASI POSSIBILI È $\binom{15}{3} = 455$. N° ESTR. POSSIBILI DI 3 ROSSE $= \binom{6}{3} = 20$; 3 VERDI $= \binom{5}{3} = 10$

3 BIANCHE $= \binom{4}{3} = 4$

RIS $= 20 + 10 + 4 = 34$ QUINDI $\frac{34}{455}$

Quarta parte

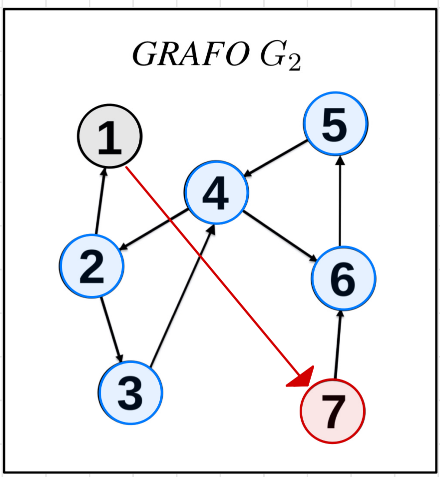
7. Dato il grafo G_1 in figura, quanti sono gli archi che bisogna aggiungere per renderlo massimale?



UN GRAFO PLANARE MASSIMALE CON V VERTICI HA ALLORA 3V−6 ARCHI E 2V−4 FACCE.

G_1 HA 9 VERTICI, QUINDI PER ESSERE MASSIMALE DOVREBBE AVERE 27−6=21 ARCHI.
HA 13 ARCHI QUINDI BISOGNA AGGIUNGERNE 8.

8. Dato il grafo orientato G_2 in figura, si può rendere fortemente connesso aggiungendo 1 arco? Se si, quale? Altrimenti, quanti archi servono?



G_2 HA 3 COMPONENTI FORTEMENTE CONNESSE, $\{1\};\{2,3,4,5,6\};\{7\}$. SE AGGIUNGIAMO L'ARCO ORIENTATO $[1,7]$ CREIAMO UN CICLO $1 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ CHE COINVOLGE I VERTICI 1 E 7 E VERTICI DELLA TERZA COMP. FORT. CONNESSA. QUINDI, TUTTI I VERTICI DEL GRAFO APPARTERREBBERO AD UN'UNICA COMP. FORT. CONNESSA.