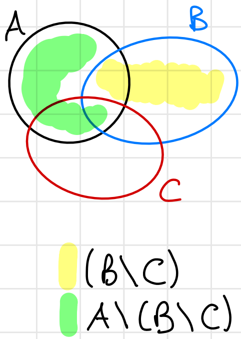
Prima parte

1. Data la formula $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \vee r))$, quali sono gli assegnamenti di valore alle variabili proposizionali p, q, r che soddisfano la formula ?

p	q	r	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge (q \vee r))$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge (q \vee r))$
F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T

6 ASSEGNAMENTI SU 8 SODDISFANO LA FORMULA

2. Dimostrare che $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$



$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

$x \in A \setminus (B \setminus C)$ QUINDI $x \in A$, $x \notin (B \setminus C)$

2 CASI — $x \in A, \notin B$ QUINDI $x \in (A \setminus B)$

$x \in A, B, C$ QUINDI $x \in (A \cap B \cap C)$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$

$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

2 CASI — $x \in (A \setminus B)$, QUINDI $x \in A$, $x \notin B \rightarrow x \notin (B \setminus C) \rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$

$x \in (A \cap B \cap C) \rightarrow x \in A$, $x \notin (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$

Seconda parte

3. Dimostrare che 2 interi consecutivi, n e $n+1$, sono coprimi.

SIANO n E $n+1$ DUE NUMERI INTERI CONSECUTIVI, ALLORA PER $h=1$ E $k=-1$ ABBIAMO $h(n+1)+kn = n+1-n = 1$

4. Calcolare $19^{40} \bmod 13$

PER IL TEOREMA DI EULERO $19^{40} \equiv 19^{40 \bmod \phi(13)} \equiv 19^{40 \bmod 12} \equiv 19^4 \bmod 13$

INOLTRE $19^4 \equiv (19 \bmod 13)^4 \equiv 6^4 \bmod 13$

$19^{40} \bmod 13 \equiv 6^4 \bmod 13$

$6^4 \bmod 13 \equiv (6^2)^2 \bmod 13$ E $(6^2)^2 \equiv (6^2 \bmod 13)^2 \equiv (36 \bmod 13)^2 \equiv 3^2 \bmod 13 = 9$

$19^{40} \bmod 13 = 9$

Terza parte

5. Dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \qquad m.c.m = k!(n-k)!$$

(n-1)! IN EVIDENZA

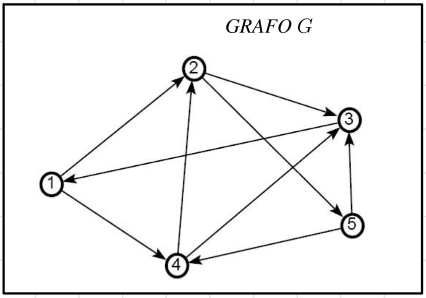
$$= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(k+(n-k))}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \underline{\underline{\binom{n}{k}}}$$

6. Lanciamo un dado speciale con 12 facce (dodecaedro regolare) numerate da 1 a 12. Sapendo che il dado non è truccato, e quindi ognuna delle 12 facce ha la stessa probabilità di risultare la faccia in alto dopo il lancio, calcolare il valore atteso del lancio di questo dado.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{12} i \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} i = \frac{1}{\cancel{12}}\,\frac{\cancel{12}\cdot 13}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Quarta parte

7. Dato il grafo orientato G in figura, quanti sono i percorsi di lunghezza 3 per ogni coppia di nodi?



A^3 DEVO TROVARE A

L'ELEMENTO IN $[i,J]$ DI A^3 CI DICE QUANTI SONO I CAMMINI DI LUNGH. 3 DA i A J

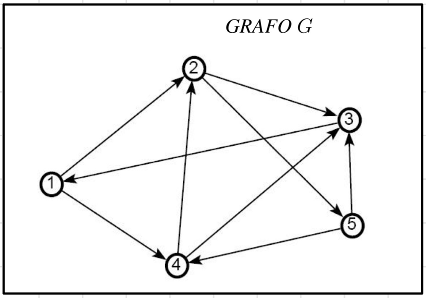
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

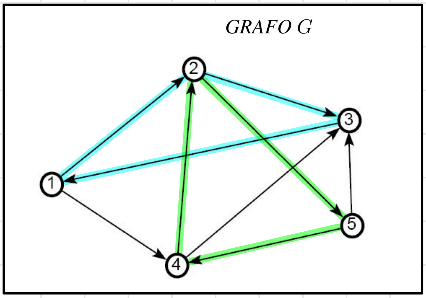
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dimostrare che il grafo è fortemente connesso.

UN GRAFO È FORTEMENTE CONNESSO SE HA UNA SOLA COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA.





SE CONSIDERIAMO I 2 CICLI DI LUNGHEZZA 3, FORMATI DAI VERTICI 1, 2, 3 E 2, 5, 4, POSSIAMO DIRE CHE I VERTICI 1,2,3 STANNO NELLA STESSA COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA, E I VERTICI 2,5,4 STANNO NELLA STESSA COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA. MA, LA CONNESSIONE FORTE TRA VERTICI È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA, QUINDI I VERTICI 1, 2, 3, 4, 5 STANNO TUTTI IN UN'UNICA COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA.