# aula 11

Gabriel de Freitas Pereira

## Índice



## 1 Definição PO (Pesquisa Operacional)

PO é o campo de estudos em que são aplicados métodos analíticos para ajudar os executivos a tomar as melhores decisões.

Importante: a solução ótima matemática não retira a necessidade da avaliação da viabilidade técnica de eventos modeláveis ou não modeláveis.

## 2 Metodologias

### 2.1 Programação linear

Metodologia mais popular, sendo as principais características:

a) combinações de variáveis que podem ser maximizadas ou minimizadas. Para estas combinações dá-se o nome função objetivo. Ex.: (a + b + c).

b) Um certo nº de restrições, expressas na forma de equações ou inequações matemáticas. Ex.: (a + b + c) e suas restrições para alcançar menor custo (ou qualquer que seja o objetivo).

### 2.1.1 Ideia geral

Maximizar ou minimizar a função objetivo ao mesmo tempo obedecendo a todas as restrições. O nome linear vem do fato de que tanto a expressão que forma a função objetivo e quanto as restrições são expressas linearmente, ou seja, todas as **variáves** aparecem com expoente igual a unidade (elevado a 1).

### 2.1.2 Exercício 1

| Produto | Máquina 1 (horas gastas) | Máquina 2 (horas gastas) | Demanda | Lucro Unitário (reais) |
|---|---|---|---|---|
| x | 4 | 4 | Ilimitada | 80 |
| y | 6 | 2 | 3 | 60 |
| Disponíveis | 24 | 16 | | |

Função Objetivo (FO): maximizar $80x + 60y$

Sujeito A:

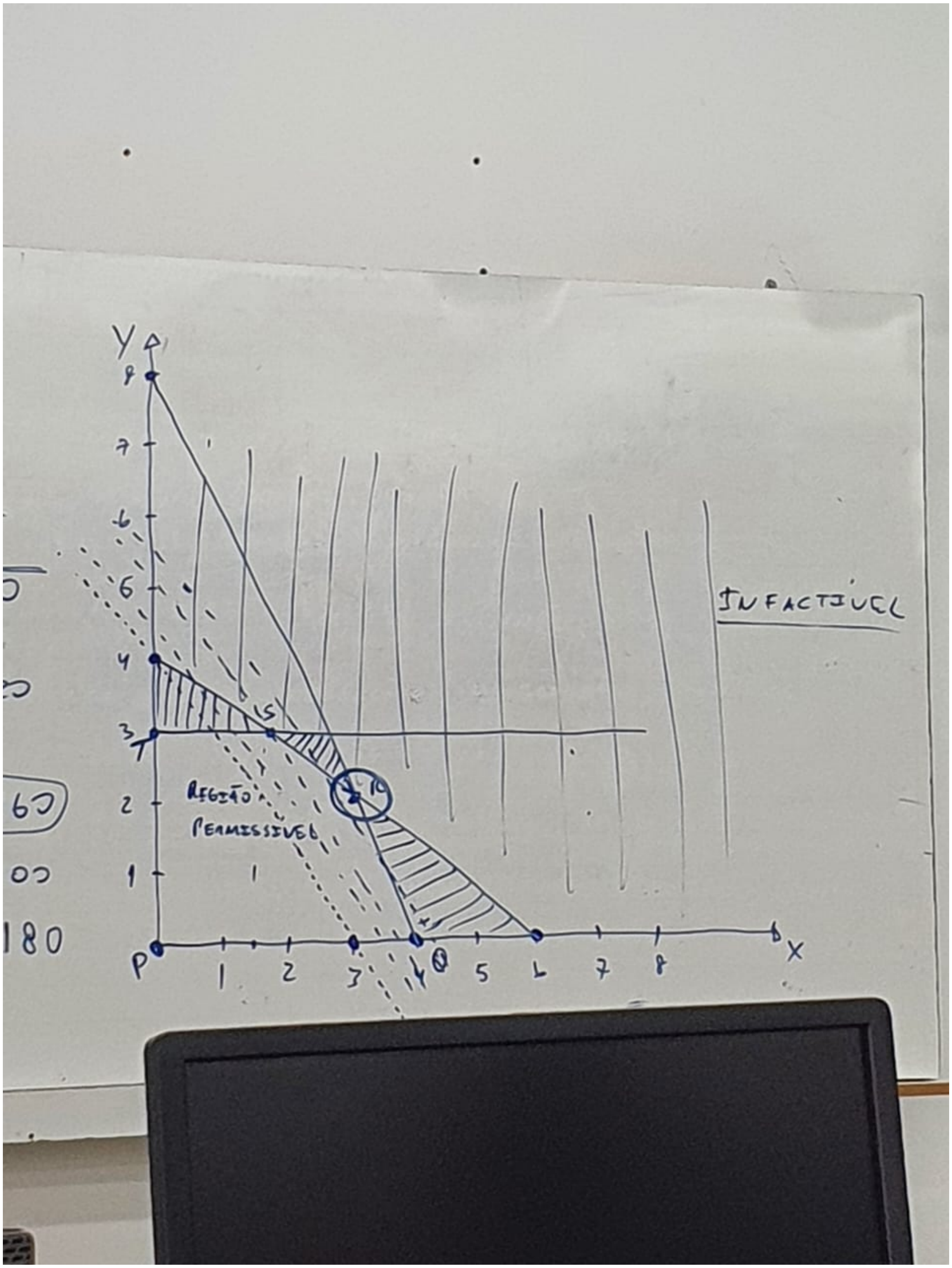
$4x + 6y \leq 24$

$4x + 2y \leq 16$

$0x + 1y \leq 3$

Resolvendo primeira equação graficamente: Se y = 0, x = 6; se x = 0, y = 4. Só traçar a reta. Resolvendo segunda equação graficamente: Se y = 0, x = 4; se x = 0, y = 8. Só traçar a reta. Resolvendo terceira equação graficamente: Se y = 0, x = 0; se x = 0, y = 3. Só traçar a reta.

Agora basta ver onde as retas se cruzaram, como na figura abaixo, e eliminar regiões posteriores à reta:



INFACTIVEL
REGIÃO
PERMISSIVEL
X
Y
P

| | x | y | FO |
|---|---|---|---|
| P | 0 | 0 | 0 |
| Q | 4 | 0 | 320 |
| **R** | **3** | **2** | **360** |
| S | 1.5 | 3 | 300 |
| T | 0 | 3 | 180 |

Sendo assim a solução seria comprar 3 de 80 e 2 de 60.

### 2.1.3 Exercício 2

| Nutriente | Adubo 1 (reais) | Adubo 2 (reais) | Composição mínima |
|---|---|---|---|
| N | 10 | 20 | 180 |
| P | 40 | 40 | 600 |
| K | 45 | 25 | 450 |
| Custo por kg | 6 | 8 | |

Função Objetivo (FO): minimizar $6x + 8y$

Sujeito A:

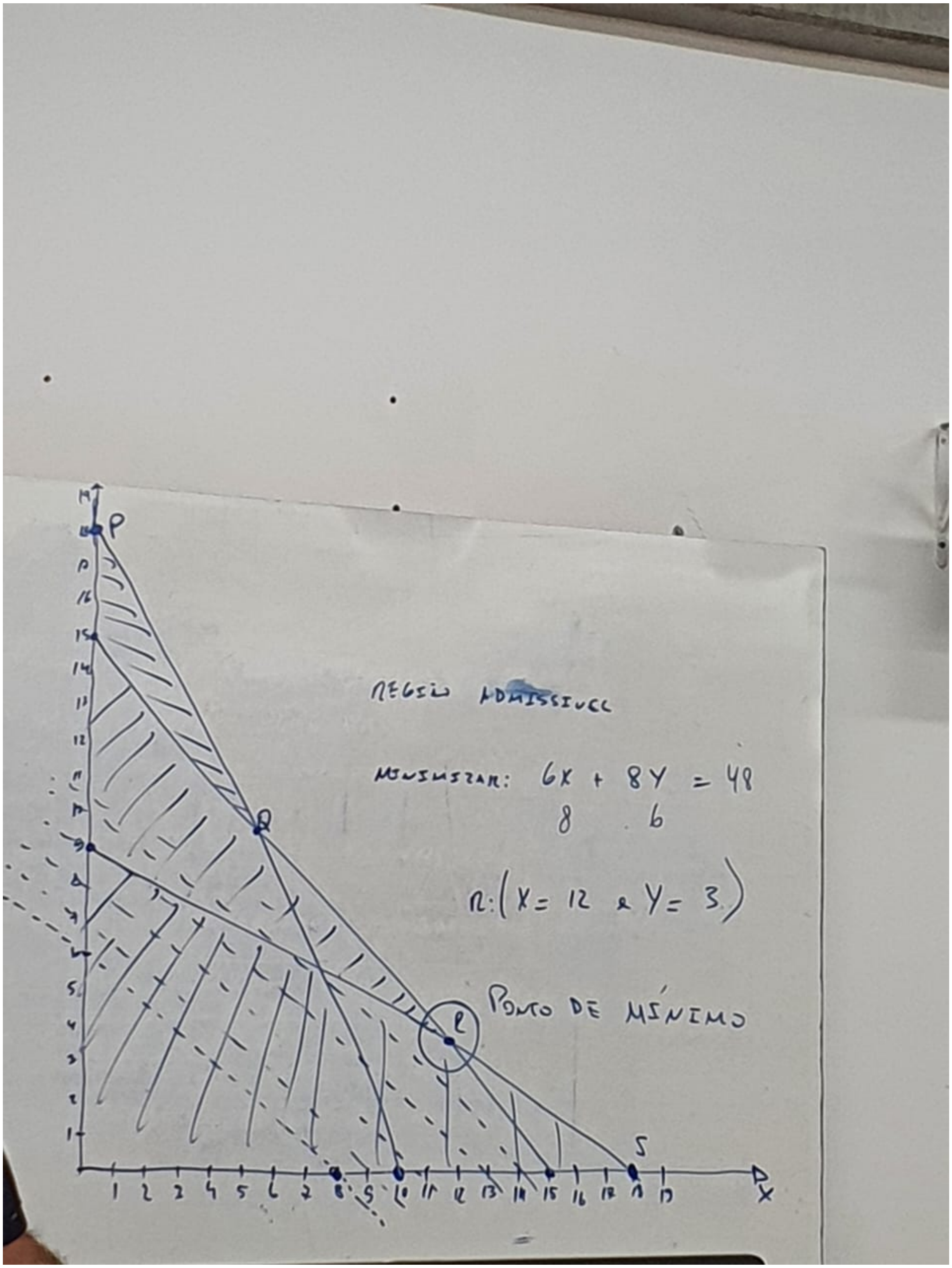
$10x + 20y \geq 180$

$40x + 40y \geq 600$

$45x + 25y \geq 450$

Resolvendo primeira equação graficamente: Se y = 0, x = 18; se x = 0, y = 9. Só traçar a reta. Resolvendo segunda equação graficamente: Se y = 0, x = 15; se x = 0, y = 15. Só traçar a reta. Resolvendo terceira equação graficamente: Se y = 0, x = 10; se x = 0, y = 18. Só traçar a reta.

Agora basta ver onde as retas se cruzaram, como na figura abaixo, e eliminar regiões anteriores à reta. Para isso é necessário escolher um valor qualquer para igualar a função objetiva, como $6x + 8y = 48$ e encontrar os valores de x e y, como fizemos anteriormente, com isso temos:


REGIÃO ADMISSIVEL
MINIMIZAR: 6X + 8Y = 48
8 6
R: (X = 12 e Y = 3)
PONTO DE MÍNIMO
P
Q
R
S
X

A solução portanto é gastar 12 kg do adubo 1 e 3 kg do adubo 2, que chegamos com as retas paralelas.

### 2.1.4 Alguns casos especiais da Programação linear (PL)

1) Restrições incompatíveis

maximizar: $1x + 1y$

Sujeito A:

$4x + 3y \leq 12$

$y \geq 5$

$x \geq 4$

2) Solução sem fronteira

maximizar: $4x + 1y$

Sujeito A:

$x \geq 2$

$y \leq 3$

Pois, x tende ao infinito, necessitaria alguma restrição para x.

3) Redundância

Maximizar: $3x + 2y$

Sujeito A:

$10x + 5y \leq 50$

$1x + 1y \leq 7$

$0x + 1y \leq 15$

4) Soluções alternativas

Quando tem mais de uma resposta, e possivelmente as restrições devem ser incrementadas.

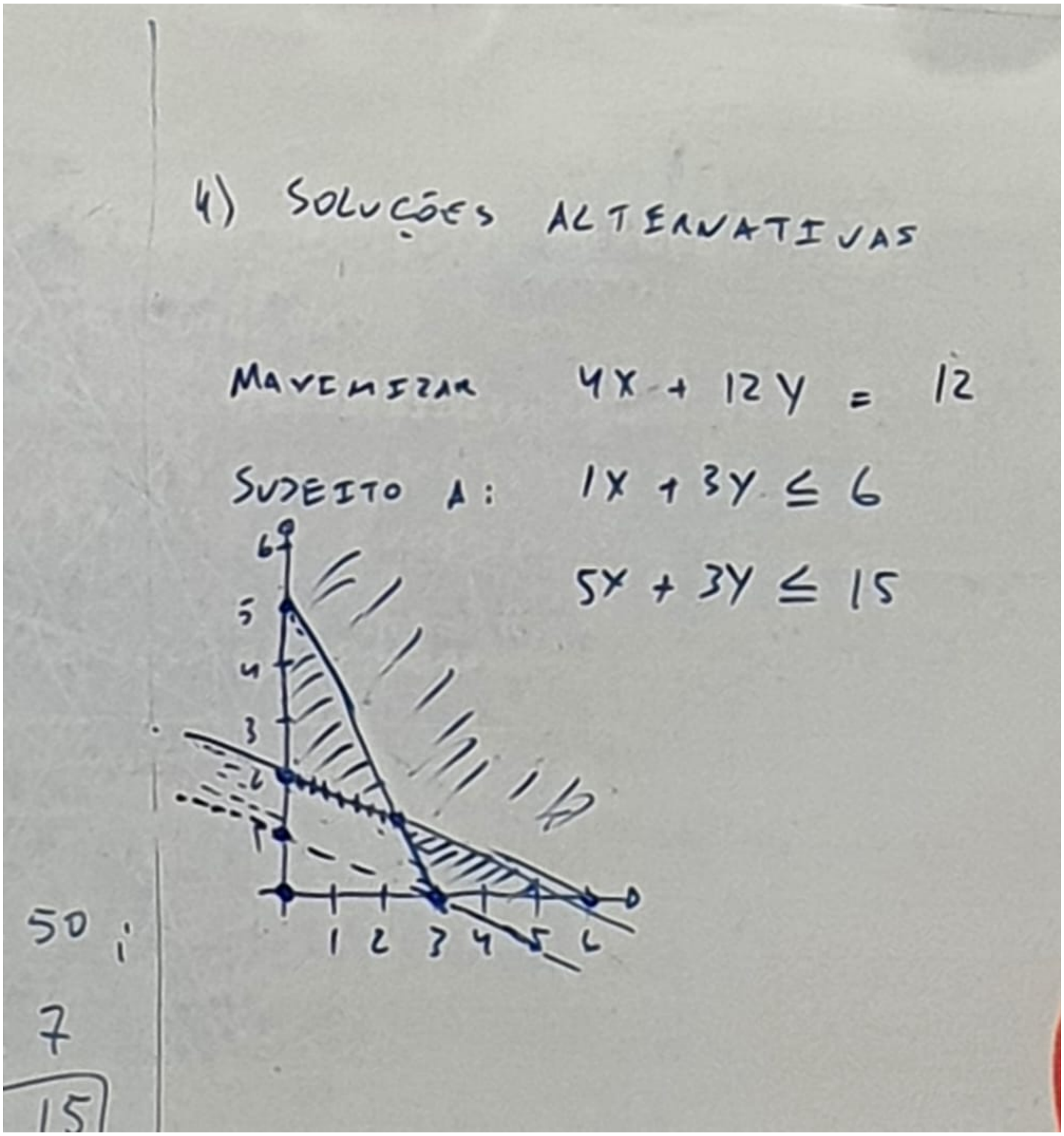
Maximizar: $4x + 12y$

Sujeito A:

$1x + 3y \leq 6$

$5x + 3y \leq 15$

Repetir o passo a passo que fizemos nos outros exercícios. Com isso, chegamos em qualquer valor, das duas retas, pois a reta paralela passa em cima dos 2. Resolução a seguir:




### 2.1.5 Exercício 3

Problemas de transporte e designação

10000 F1 D1 8000

15000 F2 D2 4000

5000 F3 D3 7000 D4 11000

| Col1 | D1 | D2 | D3 | D4 | Produção |
|---|---|---|---|---|---|
| F1 | 13 | 8 | 9 | 12 | 10000 |
| F2 | 12 | 9 | 10 | 14 | 15000 |
| F3 | 8 | 8 | 9 | 6 | 5000 |
| Demanda | 8000 | 4000 | 7000 | 11000 | |

Minimizar: $13x11 + 8x12 + 9x13 + 12x14 + 12x21 + 9x22 + 10x23 + 14x24 + 8x31 + 8x32 + 9x33 + 6x34$

Sujeito A:

$X11 + X12 + X13 + X14 \leq 10000$

$X21 + X22 + X23 + X24 \leq 15000$

$X31 + X32 + X33 + X34 \leq 5000$

$X11 + X21 + X31 = 8000$

$X12 + X22 + X32 = 4000$

$X13 + X23 + X33 = 7000$

$X14 + X24 + X34 = 11000$

Resolver esse problema no R ou Lingo ou Lindo.

### 2.2 Programação linear inteira

### 2.3 Programação dinâmica

- garante otimalidade;
- não possui algoritmo próprio, cada formulação usa um algoritmo novo;
- consta de estágios, estados, “labels” e uma equação recursiva;
  - estágios: são etapas consecutivas
  - estados: são alternativas de cada etapa
  - labels: são resultados parciais da decisão

PCE (Problemas de corte e empacotamento), tem como ideia geral pegar peças grandes uniformes e transformar em peças menores de tamanhos variados.

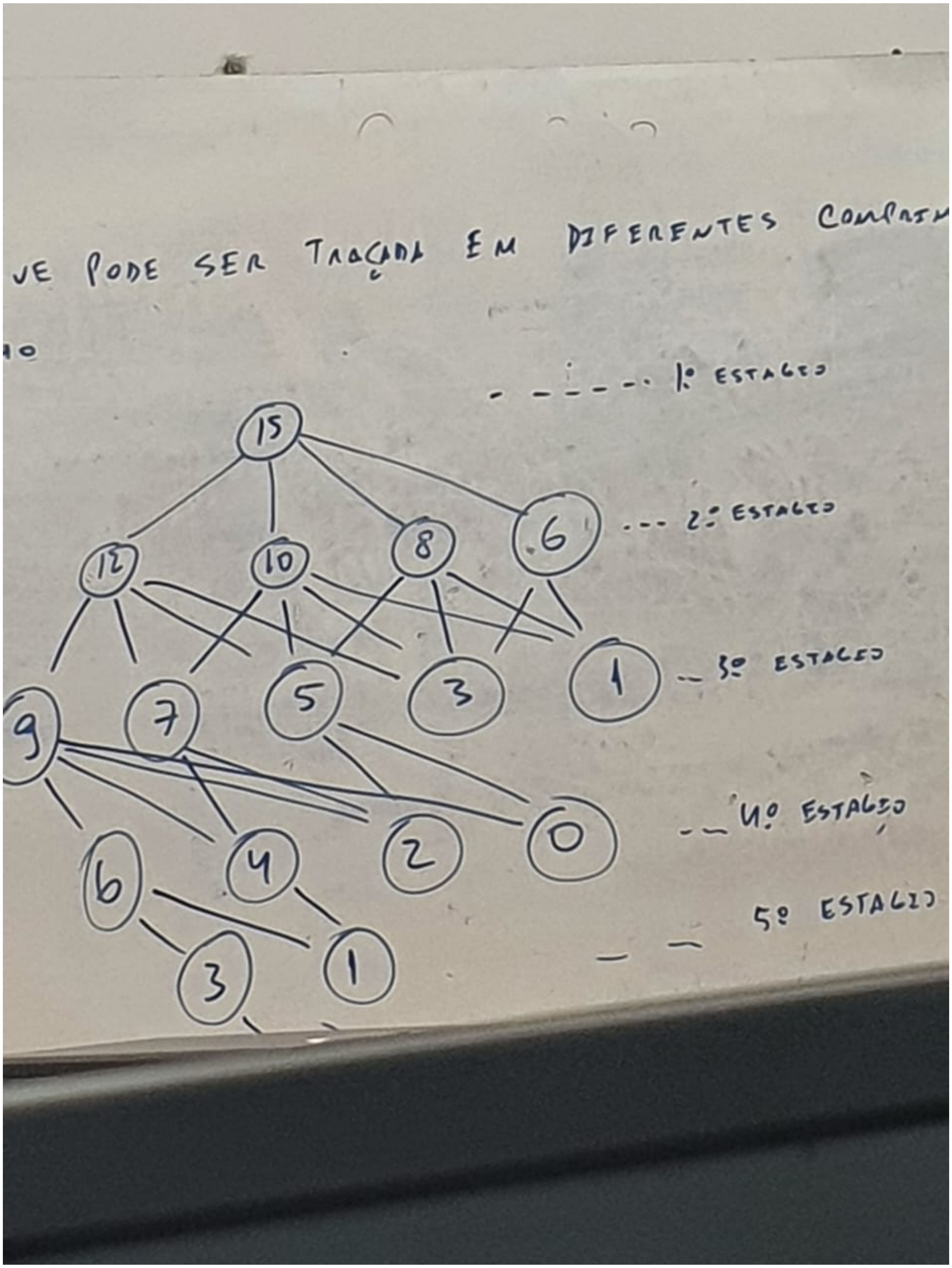
PCE pode ser:

- uni-dimensiona: fustes das árvores, caso elétrico, barra de aço, etc.
- bi-dimensional: vidro, chapa (aço, MDF, MDP, OSB, painéis, etc)
- tri-dimensional: navios, conteineres, baús, etc.

Exemplos

Considere uma tora de 15 metros que pode ser traçada em diferentes comprimentos com valores em função do tamanho

| Comprimento (m) | Preço (R$) |
|---|---|
| 3 | 40 |
| 5 | 70 |
| 7 | 130 |
| 9 | 150 |


VE PODE SER TRAÇADA EM DIFERENTES
1º ESTAGIO
2º ESTAGIO
3º ESTAGIO
4º ESTAGIO
5º ESTAGIO
15
12
10
8
6
9
7
5
3
1
4
2
0

Qual caminho traçar pra ter o maior retorno financeiro?

Estágio 5:

y5/3 = 40

Estágio 4:

| S | 3 | 1 | yx4 | xy4 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 40 + 40 | 70 + 0 | 80 | 3 |
| 4 | | 40 | 40 | 1 |

Estágio 3:

| S | 6 | 4 | 2 | 0 | yy3 | xy3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 40 + 80 | 70 + 40 | 130 | 150 | 150 | 0 |
| 7 | | 40 + 40 | 70 | 130 | 130 | 0 |
| 5 | | | 40 | 70 | 70 | 0 |
| 3 | | | | 40 | 40 | 0 |
| 1 | | | | | | |

Estágio 2:

| S | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | yx2 | xy2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 40 + 150 | 70 + 130 | 130 + 70 | 190 + 40 | | 200 | 7, 5 |
| 10 | | 40 + 130 | 70 + 70 | 130 + 40 | 150 | 170 | 7, 3 |
| 8 | | | 40 + 70 | 70 + 40 | 130 | 130 | 1 |
| 6 | | | | 40 | 70 | 80 | 3 |

Estágio 1:

| S | 12 | 10 | 8 | 6 | yx1 | xy1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 40 + 200 | 70 + 170 | 130 + 130 | 180 + 80 | 260 | 8 |

## 2.4 Heurística

## 2.5 Redes neurais

## 2.6 Algoritmos genéticos