Planificación - Lógica Musical: Pitágoras

1. Introducción

- Presentación de los alumnos uno por uno
  - Nombre
  - Dónde estudian
  - Qué música escuchan
  - Qué esperan del curso
- Presentación mía.

2. Aspectos de la "Lógica Musical"

¿Qué aspectos creen que están involucrados con la lógica musical?
Bueno yo he pensado bastante y me parece que principalmente son 4:

- Biológicos
- Físicos
- Geométricos
- Artístico-Filosóficos

2.1. Aspectos Biológicos

- Tienen que ver con la percepción auditiva y nuestras reacciones fisiológicas. Es decir, cómo percibimos y reaccionamos al sonido.

2.2. Aspectos Físicos

- Tienen que ver con la naturaleza mecánica del sonido. Cómo este se produce y se propaga así como sus métodos y propiedades.

2.3. Aspectos Geométricos

- Tienen que ver con las relaciones y proporciones entre los diferentes sonidos. Los aspectos físicos son un poco la continuación de los geométricos.
- Estos aspectos se relacionan con los orígenes de la teoría musical y naturaleza de las vibraciones

2.4. Aspectos Artístico-Filosóficos

- Estos aspectos tienen que ver con la cosmovisión de las diferentes épocas y de cómo los humanos nos relacionamos con la forma de crear y consumir música.

- Esto suele causar muchas frustraciones porque hay aspectos de la teoría musical que no tienen lógica directa, pero sí una razón histórica de ser. Los profesores suelen quedarse en el "es así porque sí" o con suerte con "Por razones históricas".

3. Pitágoras

¿Cuáles creen que fueron los primeros aspectos en desarrollarse?
Fueron los Artístico-Filosóficos en una combinación con los Geométricos.
¿Han oído hablar de Pitágoras?
Fue un "matemático" y "filósofo" griego. Pero generalmente se tiene una figura diferente de él.
¿Cómo creen que era Pitágoras?
Dados a escoger, Pitágoras era más parecido al influencer fitness de una secta que un matemático riguroso.

De hecho es muy probable que el famoso teorema de Pitágoras no sea de Pitágoras. Sino que de algún alumno que quería potenciar la figura de su líder. Una suerte de propaganda pitagórica

Este sujeto era el líder de una suerte de religión que rendía culto al número. Para los pitagóricos los diferentes números eran una suerte de deidad. Sentían que la lógica seguía el universo se regía por los números de forma literal.

4. Mito de la música de las esferas

¿Por qué piensan que estoy hablando sobre Pitágoras?
Bueno, se lo considera a él (o a algún alumno) el padre de las notas musicales. Se le atribuye la invención del monocordio (Ese lindo instrumento que tengo ahí). Y supuestamente sentó las bases de la música occidental.

Además era un fiel defensor de el "Mito de la música de las esferas"
¿Han oído hablar de este?
El mito de la música de las esferas fue una idea muy popular en la antigüedad. Una suerte de "new age".

Según el mito de la música de las esferas, los cuerpos celestes al desplazarse emiten sonidos que se rigen por la armonía musical.

Es decir que el universo emite música armónica dado que sus cuerpos celestes se mueven siguiendo reglas de la armonía musical.

¿Y por qué no suena?

Depende de quien responda. Hay quien dijo que como el universo está constantemente sonando, ya nos acostumbramos y lo ignoramos. Sin embargo los pitagóricos pensaban la música de las esferas era una armonía perfecta y divina al que el ser humano solo podría acceder a través de las matemáticas y el razonamiento.
¿Y cuáles eran estas reglas de la armonía?
Bueno en Grecia el sonido de los instrumentos musicales tenía dos propiedades principales, duración y altura.

Como veremos cuando veamos los aspectos físicos, el sonido tiene diversas propiedades. Sin embargo en la antigua Grecia solo contaban con estos dos parámetros para estudiar.

5. Duración

¿Qué es la duración de un sonido?

Efectivamente. Es la diferencia entre el momento inicial y el momento final de un sonido.

Si el sonido comenzó el segundo 6 y terminó el segundo 8, la duración del sonido fueron 2 segundos.

Los griegos en música, poesía y danza usaban dos conceptos para organizar el tiempo.

arsis y tesis

5.1. Arsis (Ἄρσις)

Es el momento débil. Tiene que ver con el movimiento y dinamismo. En danza el momento de arsis implicaba levantar el pie y entrar en un momento de movimiento e inestabilidad o tensión

5.2. Tesis (Θέσις)

El momento de tesis se asocia al punto de llegada, al reposo y la estabilidad. En danza implicaba apoyar el pie quedando en una postura estable.

Estos dos conceptos nos van a acompañar a lo largo de toda la historia de la música.

En cuanto a ritmo tenemos dos tipos de duración en la música de la antigua Grecia. La nota larga y la nota corta. La nota larga se relaciona con la tesis y la nota corta con el arsis.

La nota larga es un punto autosuficiente. Es tranquila y puede ser un punto de llegada. La nota corta es una suerte de desplazamiento entre dos notas largas.

Voy a utilizar la - para indicar la nota larga y el . para indicar la nota corta.

```
-..
..-
.-
-.
```

Estos son algunos modos rítmicos. Pero podemos crear ritmos más largos

```
-..--...-.---
```

Esos son ejemplos. Me gustaría que alguien venga a la pizarra y cree un pequeño ritmo pensando en los conceptos de arsis y tesis

INTERACCIÓN

Super. Vamos a profundizar más en los ritmos pronto. Por ahora quédense con esto y vamos a pasar a ver las alturas.

6. Alturas

Con alturas en música nos referimos a si un sonido es más grave o más agudo. Si una nota es más aguda tiene más altura.

Pitágoras creó el monocordio para estudiar las alturas y sus proporciones. Es solo una cuerda pero que podemos dividir para producir diferentes sonidos.

Si toco un poco esto podemos concluir que cuando modifico la distancia de la cuerda, esta produce diferentes sonidos.

7. Funciones “o” y “od”

$$o(x) = \frac{x}{2}$$

“o” es una función que como vemos en el monocordio nos arroja la nota inicial pero que suena más aguda pero igual.

Si hago $o(o(o(x)))$ anidando llamados a la función siempre obtendré la misma nota pero cada vez más aguda. (la mitad de la mitad, la mitad de la mitad de la mitad)

Si bien o recibe como parámetro x también puede recibir un segundo parámetro.

$$o(x, y := 1) = \frac{x}{2^y}$$

y es por defecto 1 por ende si no la pongo subentendemos que $y = 1$ (la función original).

Pero si añado el valor y me modifica el resultado. y representa la cantidad de veces que anidariamos la función original. Es decir

$$o(o(x)) = o(x, 2)$$

Este parámetro por defecto es solo para no tener que confundirnos anidando funciones como locos.

Esta función es muy interesante. Pero ¿qué pasa si tengo una longitud corta y quiero hacer el cambio inverso? Por ejemplo, tengo la mitad de la longitud de esta cuerda y quiero saber el doble?

Para eso tenemos “od”:

$$od(x) = o^{-1}(x) = 2x$$

Esta es la función inversa de o. También podemos pasarle un valor por defecto:

$$od(x, y := 1) = o^{-1}(x, y) = 2^y \cdot x$$

Así que $od(od(x)) = od(x, 2)$

Esto nos va a ser de utilidad.

8. Función “q” y “qd”

Si bien estas funciones son muy interesantes, siempre obtenemos la misma nota, solo que más grave o más aguda. Pero ¿qué pasa si queremos obtener otra nota diferente?

Bueno a Pitágoras se le ocurrió dividir la cuerda en $\frac{2}{3}$ y pudo obtener otra nota:

Como escucharon en el monocordio, tenemos una nota diferente cuando dividimos la cuerda en tres y hacemos vibrar dos de estos tercios. Así que voy a crear la función q que dada una longitud x nos va a devolver una longitud nueva para producir esta nota.

$$q(x) = \frac{2x}{3}$$

Si reemplazamos la x por el largo de la cuerda (Que en este caso son 100cm) nos da que

$$q(100) = \frac{2 \cdot 100}{3}$$
$$q(100) = \frac{200}{3}$$
$$q(100) = 66{,}666666 \text{ cm}$$

Ahora sabemos que para producir esta nota nueva desde ahora nota_b debemos dividir la cuerda de modo que vibre una sección de 66.6 centímetros.

¿Cómo se les ocurre que podemos obtener más notas?
TIEMPO PARA QUE PIENSEN
Una linda forma es buscando una nota_b a partir de esta nota_b.

$$q(q(x))$$

$$q(q(x)) = q\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$q(q(x)) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)}{3}$$

$$q(q(x)) = \frac{4x}{9}$$

Y si $x = 100\text{cm}$

$$q(q(100\text{cm})) = \frac{4 \cdot 100\text{cm}}{9}$$

$$q(q(100\text{cm})) = \frac{400\text{cm}}{9}$$

$$q(q(100\text{cm})) = 44{,}44444 \text{ cm}$$

Y si queremos otra nota podemos hacer

$$q(q(q(x)))$$

Pero se nos están anidando las funciones y si quisiéramos obtener muchas notas puede que se nos queme la cabeza.

Así como en o teníamos un valor y que por defecto era igual a 1 que nos permitía modificar el comportamiento de la función asumiendo que quiero encontrar la mitad de la mitad de la mitad. En "q" podríamos encontrar una forma de hacer lo mismo y obtener la nota_b de la nota_b de la nota_b

TIEMPO PARA BUSCAR ESTA FUNCIÓN

Podemos ver que si anidamos 3 veces la función "q" nos queda una expresión como esta

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)}{3}\right)}{3}$$

Simplificando los dos se multiplican en el numerador y los 3 se multiplican en el denominador.

Quedando $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x}{3 \cdot 3 \cdot 3}$

Vemos que como anidamos 3 veces la función "q" obtenemos que el 2 del numerador se multiplica por sí mismo 3 veces y lo mismo para el denominador.

Por ende

$$q(x, y := 1) = \frac{2^y \cdot x}{3^y}$$

$$q(x, y := 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^y \cdot x$$

Entonces podemos deducir que

$$q(q(x)) = q(x, 2)$$

Así como la función inversa de "o" es "od", la función inversa de q es "qd".

$$qd(x, y := 1) = q^{-1}(x, y)$$
$$qd(x, y := 1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{y} \cdot x$$

Esta función nos permite deshacer "q" o encontrar otra nota. Si ejecuto "qd" a partir del largo total voy a tener un problema porque $qd(x) > x$; y no puedo estirar la cuerda en este monocordio. Pero podemos aplicar $o(qd(x))$ o $qd(o(x))$ que es lo mismo. De esta forma encontramos una nota que es menor que el largo de x aprovechándonos de que $o(x)$ nos permite obtener la misma nota pero más aguda.

$$o(qd(x)) = \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)}{2} = \frac{3x}{4}$$

Esta función $o(qd(x))$ es típica en música así que le voy a poner un nombre

$$c(x) = o(qd(x)) = \frac{3x}{4}$$

Voy a dividir la cuerda en 4 cuartos y pondré mi dedo en el primer cuarto, luego hago vibrar los $\frac{3}{4}$ restantes y escuchamos.

Tenemos una tercera nota.

9. Encontrando una escala

Dadas estas definiciones quiero que encontremos 8 notas distintas. Ya sabemos que la función "o" no nos trae notas nuevas. Solo versiones más agudas de la misma nota. Así que para obtener notas nuevas debemos usar "q" o "c".

Lo primero que voy a hacer es un listado de las notas que ya tenemos

$$\text{notas}(x) = \begin{bmatrix} x \\ q(x) = \frac{2x}{3} \\ c(x) = \frac{3x}{4} \\ o(x) = \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

Con esto ya tenemos 4 notas para nuestra escala. Solo faltan 4.

¿Cómo creen que podríamos obtenerlas?

Podemos usar "q" o "c" ya que estas nos traen notas nuevas. Porque "q" es la más simple vamos a usar solo "q"

$$\text{notas\_restantes}(x) = \begin{bmatrix} q(q(x)) \\ q(q(q(x))) \\ q(q(q(q(x)))) \\ q(q(q(q(q(x))))) \end{bmatrix}$$

Esto es muy difícil de leer. **¿A alguien se le ocurre una forma de simplificar esto?** Efectivamente, usando el valor por defecto

$$\text{notas\_restantes}(x) = \begin{bmatrix} q(x, 2) \\ q(x, 3) \\ q(x, 4) \\ q(x, 5) \end{bmatrix}$$

Desarrollemos esto un poco

$$\text{notas\_restantes}(x) = \begin{bmatrix} q(x,2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x = \frac{4x}{9} \\ q(x,3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x = \frac{8x}{27} \\ q(x,4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot x = \frac{16x}{81} \\ q(x,5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot x = \frac{32x}{243} \end{bmatrix}$$

Super, entonces juntemos todas las notas en una única lista

$$\text{notas}(x) = \begin{bmatrix} x \\ q(x) = \frac{2x}{3} \\ c(x) = \frac{3x}{4} \\ o(x) = \frac{x}{2} \\ q(x,2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x = \frac{4x}{9} \\ q(x,3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x = \frac{8x}{27} \\ q(x,4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot x = \frac{16x}{81} \\ q(x,5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot x = \frac{32x}{243} \end{bmatrix}$$

Si tengo una cuerda que mide un metro obtengan las notas.
¡A calcular!
TIEMPO PARA QUE CALCULEN

$$\text{notas}(100) = \begin{bmatrix} 100 \\ 66{,}66666666666666 \\ 75 \\ 50 \\ 44{,}44444444444444 \\ 29{,}629629629629623 \\ 19{,}75308641975308 \\ 13{,}168724279835386 \end{bmatrix}$$

Como ven tenemos una serie de números bastante interesantes pero cada vez más pequeños dado que estamos dividiendo por tres en cada iteración.

Podemos tocar más o menos las notas. Pero no están más o menos alejadas unas de otras.

Aquí es donde debo poner una regla:

$$\text{nota\_1} = x$$

$$(\ldots)$$

$$\text{nota\_8} = o(x)$$

La nota_1 es toda la cuerda y la nota_8 que está justo en la mitad de la cuerda. (50cm);

Quiero que las notas desde la 2 hasta la 7 estén ordenadas y entre la nota 1 y la 8... es decir. El largo máximo de la cuerda va a ser su total ($x = 100$cm) y el mínimo va a ser la mitad de la cuerda ($o(100\text{cm}) = 50$cm);

Hey pero ya calculamos las notas una por una siguiendo las fórmulas. ¿Cómo hacemos que una nota que no entra en estos márgenes sí entre?

QUE ALGUIEN DÉ IDEAS

Ejemplo: nota_t = 30cm

No está dentro de las reglas es más corta que 50cm.

Lo que puedo hacer es usar la función “od” que nos trae la misma nota pero más grave.

Entonces vemos que la nota que medía 30cm es igual a la nota que mide 60cm pero más grave y con 60cm ya cumplimos con la condición. Así que tienen libertad para usar la función “od” para modificar las notas del listado que tenemos aquí pero que sí cumplan con la condición.

Si usan "od" pero aún así el resultado no encaja. Va a haber que aplicar "od" al resultado varias veces (o incrementar el valor de y).

Ej:

$$od(15) = 30 \text{ \# aún no cumple}$$

$$od(od(15)) = od(15, 2) = 60 \text{ \# esta sí cumple}$$

Quiero que encuentren las funciones para todas estas notas

TIEMPO

$$\text{notas}(x) = \begin{bmatrix} x \\ q(x) = \frac{2x}{3} \\ c(x) = \frac{3x}{4} \\ od(q(x,2)) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x \cdot 2 = \frac{4x}{9} \cdot 2 = \frac{8x}{9} \\ od(q(x,3)) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x \cdot 2 = \frac{8x}{27} \cdot 2 = \frac{16x}{27} \\ od(q(x,4),2) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot x \cdot 2^2 = \frac{16x}{81} \cdot 4 = \frac{64x}{81} \\ od(q(x,5),2) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot x \cdot 2^2 = \frac{32x}{243} \cdot 4 = \frac{128x}{243} \\ o(x) = \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora quiero que dada esta función que obtiene notas me obtengan las distancias para la cuerda del monocordio que mide 100cm **TIEMPO**

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 66{,}66666666666666 \\ 88{,}88888888888889 \\ 59{,}259259259259245 \\ 79{,}01234567901233 \\ 52{,}674897119341544 \\ 70{,}23319615912207 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Ahora solo nos queda ordenar el listado

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 88{,}88888888888889 \\ 79{,}01234567901233 \\ 70{,}23319615912207 \\ 66{,}66666666666666 \\ 59{,}259259259259245 \\ 52{,}674897119341544 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Si tocamos el monocordio nos damos cuenta de que tenemos configurada una linda escala. Musicalmente las funciones que descubrimos hoy se llamarían

- o = octavador_ascendente (por lo que también podemos llamar oa)
- od = octavador_descendente
- q = quintador_ascendente (por lo que también podemos llamar qa)
- qd = quintador_descendente
- c = cuartador

Y la función escala diatónica sería la que nos trae todas las distancias ya ordenadas de mayor a menor

$$\text{diatonica}(x) = \begin{bmatrix} x \\ od(q(x,2)) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x \cdot 2 = \frac{4x}{9} \cdot 2 = \frac{8x}{9} \\ od(q(x,4),2) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot x \cdot 2^2 = \frac{16x}{81} \cdot 4 = \frac{64x}{81} \\ c(x) = \frac{3x}{4} \\ q(x) = \frac{2x}{3} \\ od(q(x,3)) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x \cdot 2 = \frac{8x}{27} \cdot 2 = \frac{16x}{27} \\ od(q(x,5),2) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot x \cdot 2^2 = \frac{32x}{243} \cdot 4 = \frac{128x}{243} \\ o(x) = \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

Esta función usa las mismas expresiones que la anterior pero ordenándolas de mayor a menor distancia.

10. ¿Por qué se llama octavador y quintador las funciones?

Si vemos la función diatónica que creamos y les ponemos números a las notas vemos lo siguiente

$$\text{diatonica}(x) = \begin{bmatrix} x & \text{\# primera} \\ od(q(x,2)) & \text{\# segunda} \\ od(q(x,4),2) & \text{\# tercera} \\ c(x) & \text{\# cuarta} \\ q(x) & \text{\# quinta} \\ od(q(x,3)) & \text{\# sexta} \\ od(q(x,5),2) & \text{\# séptima} \\ o(x) & \text{\# octava} \end{bmatrix}$$

Vemos que la primera es la función identidad de x (toda la cuerda).

Si miramos la quinta es $q(x)$. Y la octava es $o(x)$

Por eso tienen esos nombres. No es algo azaroso. Simplemente partimos con una longitud inicial y su mitad

Luego buscamos 6 nuevas notas utilizando la función $\frac{2x}{3}$ de forma concatenada.

Nos aseguramos de que estas seis notas estén entre x y $o(x)$, es decir normalizamos dentro de un rango. Para lograrlo usamos la función od que nos permite duplicar la longitud sabiendo que esto hace que la nota sea más grave pero suene igual.

Finalmente cuando tenemos estas 8 notas en rango las ordenamos. Ahí nos damos cuenta que la nota que queda quinta es $q(x)$.

Y la nota que queda octava es $o(x)$.

Esto es muy bonito ya que de aquí podemos derivar las funciones para cada grado.

$$\text{primera}(x) = x$$

$$\text{segunda}(x) = \frac{8x}{9}$$

$$\text{tercera}(x) = \frac{64x}{81}$$

$$\text{cuarta}(x) = \frac{3x}{4}$$

$$\text{quinta}(x) = \frac{2x}{3}$$

$$\text{sexta}(x) = \frac{16x}{27}$$
$$\text{séptima}(x) = \frac{128x}{243}$$
$$\text{octava}(x) = \frac{x}{2}$$

Con estas definiciones ahora podemos simplificar

$$\text{diatonica}(x) = \begin{bmatrix} \text{primera}(x) \\ \text{segunda}(x) \\ \text{tercera}(x) \\ \text{cuarta}(x) \\ \text{quinta}(x) \\ \text{sexta}(x) \\ \text{séptima}(x) \\ \text{octava}(x) \end{bmatrix}$$

En la antigua Grecia a las notas se les llamaba por estos símbolos.
FOTO
Así que igual sería bueno que marcáramos esos nombres en el monocordio.
Ahora marcamos en el monocordio de la longitud que sea y podemos construir una escala.
Tengo este otro monocordio que mide 70cm
Quiero que calculen todos sus grados y marquen en él los largos de la cuerda.

11. Final

Hemos aprendido sobre ritmos y alturas en esta clase. Ahora antes de terminar estamos en condiciones de componer una pequeña pieza al estilo de la antigua Grecia.

Simplemente debemos usar estos símbolos uno tras otro para crear una melodía. Si ponemos una línea sobre este tendremos una nota larga y si no ponemos nada tendremos una nota corta.

Hay un par de reglas. Si tengo una nota después de una nota corta, esta debe ser una nota adyacente o igual a la nota corta. Si tengo una nota larga la siguiente puede saltar pero no más de 5 espacios.

Adelante doctores

INTERACCIÓN, TOCAMOS SUS COMPOSICIONES ETC