Modelagem de Sistemas Dinâmicos – Professor Fernando Lizarralde

Modelagem Pêndulo Invertido

Gabriel José Souza e Silva

Introdução

No terceiro trabalho da disciplina de Modelagem de Sistemas Dinâmicos, deseja-se modelar o um pêndulo invertido montado em uma plataforma de duas rodas. Em seguida, o sistema será simulado utilizando diferentes técnicas possíveis através do Matlab. Depois, deverá ser comparada a resposta do sistema linearizado com a do sistema não linear. Finalmente, será aplicado um controle realimentado no sistema a fim de estabilizá-lo ao redor do ponto de equilíbrio instável.

1. Equações dinâmicas

1.a) Relação entre as coordenadas e as forças generalizadas

Seja o sistema dinâmico definido pela figura abaixo de um pêndulo invertido montado numa plataforma de duas rodas conforme as figuras abaixo:

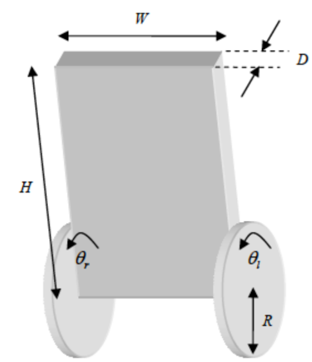


Figura 1: Ilustração do sistema

e seja também o sistema de coordenadas definido na Figura 2

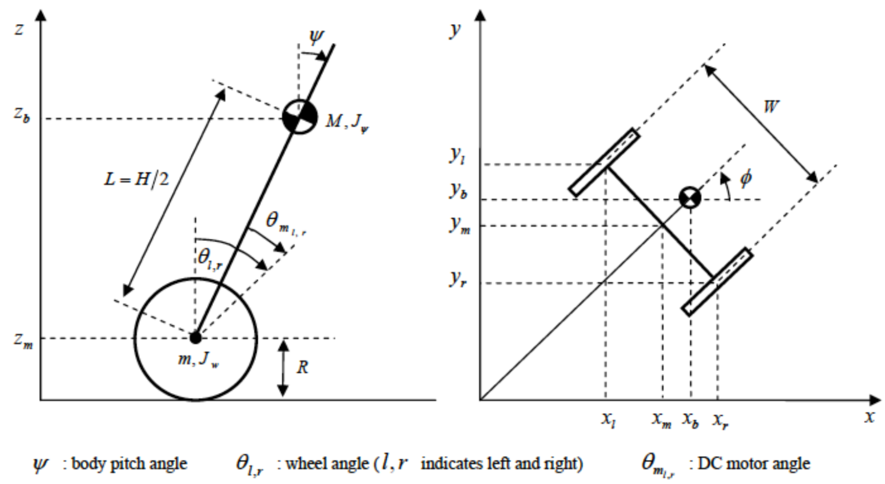


Figura 2: vista lateral e superior do sistema

Dados as seguintes constantes:

- $g = 9.8\ m/s^2$: gravidade;
- $m = 0.03\ kg$: peso da roda;
- $R = 0.04m$: raio da roda;
- $J_w = \frac{mR^2}{2}\ kg$: momento de inércia da roda;
- $M = 0.6\ kg$: peso do corpo;
- $W = 0.14\ m$: largura do corpo;
- $D = 0.04\ m$: profundidade do corpo;
- $H = 0.144\ m$: altura do corpo;
- $L = \frac{H}{2}$: distância entre o centro de massa do corpo ao eixo da roda;
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\ kgm^2$: Momento de inércia do corpo em *pitch*;
- $J_\varphi = \frac{M(W^2 + D^2)}{12} kgm^2$: Momento de inércia do corpo em rumo;
- J_m : Momento de inércia do motor desprezível;
- $R_m = 6.69\Omega$: Resistência do motor DC;
- L_m: Indutância do motor desprezível;
- $K_t = K_e = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/ rad) ;
- $f_m = 0.0022$: Atrito entre o corpo e o motor;
- $n = 1$: Redução do motor.

Deseja-se calcular as equações de movimento dinâmicas do sistema utilizando o método de Lagrange. O Lagrangiano será representado pela letra $\mathcal{L}$ a fim de evitar uma possível ambiguidade com a distância entre o centro de massa do corpo ao eixo da roda(L) .

Além disso, será aplicada a aproximação do ângulo médio das rodas como indicado no apêndice do guia deste relatório. Por isso:

- $\theta = \theta_l * 0.5 + \theta_r * 0.5$

E pela definição da equação de Euler-Lagrange:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = F_\theta$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = F_\psi$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = F_\varphi$

O Lagrangiano será calculado pela soma das energias cinéticas (de translação mais a de rotação) subtraído da energia potencial do sistema. Dessa forma:

- $\mathcal{L} = T_1 + T_2 - U$
- $T_1 = E_{roda\ esquerda} + E_{roda\ direira} + E_{roda\ corpo}$, sendo necessário considerar o movimento em todas as direções e com $E_{cinética\ translação} = \frac{1}{2} massa * velocidade^2$
  - $T_1 = \frac{1}{2} m(\dot{x}_l + \dot{y}_l + \dot{z}_l + \dot{x}_r + \dot{y}_r + \dot{z}_r) + \frac{1}{2} M(\dot{x}_b + \dot{y}_b + \dot{z}_b)$
- $T_2 = E_{roda\ esquerda} + E_{roda\ direira} + E_{roda\ corpo}$, sendo $E_{cinética\ rotação} = \frac{1}{2} J * velocidade\ angular^2$ e considerando J_m desprezível:
  - $T_2 = \frac{1}{2} J_w\left(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2\right) + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2\ \frac{1}{2} J_\varphi \dot{\varphi}^2$
- Já a única forma de energia potencial presente no sistema é a potencial gravitacional, sendo assim: $U = E_{pg\ roda\ direita} + E_{pg\ roda\ esquerda} + E_{pg\ corpo\ de\ massa\ concentrada}$
  - $U = mg(z_l + z_r) + Mgz_b$

Como deseja-se calcular a relação entre os ângulos e as forças, é necessário definir $\{ x_l, y_l, z_l, x_r, y_r, z_r\ x_b, y_b, z_b \}$ em função de $\{ \psi, \theta_l, \theta_r, \varphi \}$ sendo assim:

- $(\theta, \varphi) = \left(\left(\frac{\theta_l}{2} + \frac{\theta_r}{2}\right), \frac{R\theta_l}{W} - \frac{R\theta_r}{W}\right)$
- $(\dot{x}_m, \dot{y}_m) = \left(R\dot{\theta}\cos(\varphi), R\dot{\theta}\sin(\varphi)\right);\ z_m = R$
- $(x_l, y_l, z_l) = \left(x_m - \frac{W}{2}\sin(\varphi), y_m + \frac{W}{2}\cos(\varphi),\ z_m\right)$
- $(x_r, y_r, z_r) = \left(x_m + \frac{W}{2}\sin(\varphi), y_m - \frac{W}{2}\cos(\varphi),\ z_m\right)$
- $(x_b, y_b, z_b) = (x_m + L\sin(\varphi)\cos(\varphi), y_m + L\sin(\varphi)\sin(\psi),\ z_m + L\cos(\varphi))$

Calculando as derivadas

- $(\dot{x}_l,\ \dot{y}_l,\ \dot{z}_l) = \left(R\dot{\theta}\cos(\varphi) - \frac{W}{2}\cos(\varphi),\ \ R\dot{\theta}\sin(\varphi) - \frac{W}{2}\sin(\varphi),\ \ 0\right)$
- $(\dot{x}_r,\ \dot{y}_r,\ \dot{z}_r) = \left(R\dot{\theta}\cos(\varphi) + \frac{W}{2}\cos(\varphi),\ \ R\dot{\theta}\sin(\varphi) + \frac{W}{2}\sin(\varphi),\ \ 0\right)$
- $(\dot{x}_b,\ \dot{y}_b,\ \dot{z}_b) = \left(R\dot{\theta}\cos(\varphi) + L\cos(2\varphi),\ \ R\dot{\theta}\sin(\varphi) + L\cos(\varphi)\sin(\psi) + L\sin(\varphi)\cos(\psi),\ -Lsin(\varphi)\right)$

Com a relação definida entre as coordenadas e os ângulos, pode-se aplicar a substituição na equação do Lagrangiano:

- $\mathcal{L} = T_1 + T_2 - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_l + \dot{y}_l + \dot{z}_l + \dot{x}_r + \dot{y}_r + \dot{z}_r) + \frac{1}{2}M(\dot{x}_b + \dot{y}_b + \dot{z}_b) + \frac{1}{2}J_w\left(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2\right) + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 \; \frac{1}{2}J_\varphi\dot{\varphi}^2 - mg(z_l + z_r) + Mgz_b$

Em seguida, os componentes dos vetores $\widetilde{x_l}$, $\widetilde{x_r}$ e $\widetilde{x_b}$ serão substituídos pelos seus equivalentes em função de ψ, θ e φ. Além disso, será aplicada a seguinte aproximação: $J_w\left(\dot{\theta}^2\right) \approx \frac{1}{2}J_w\left(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2\right)$ e $J_m \approx 0$:

- $\boldsymbol{\mathcal{L} = \left[0.5\, J_\varphi\dot{\varphi}^2\right] + \left[0.5\, J_\psi\dot{\psi}^2\right] + \left[J_w\left(\dot{\theta}^2\right)\right] + \left[0.5\, L^2M\dot{\varphi}^2\right] + \left[0.5L^2M\, \dot{\psi}^2\right] + \left[0.5MR^2\dot{\theta}^2\right] + \left[mR^2\dot{\theta}^2\right] + \left[0.25W^2\dot{\varphi}^2m\right] - [MRg] - [2Rgm] - [L\, M\, g\cos(\psi)] - \left[0.5L^2M\dot{\varphi}^2\cos^2(\psi)\right] + \left[\frac{0.25}{R^2}\, J_wW^2\dot{\varphi}^2\right] + [LMR\dot{\psi}\dot{\theta}\cos(\psi)]}$

O próximo passo é aplicar a equação de Euler-Lagrange para obter cada um dos torques do sistema:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T_1+T_2-U)}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial(T_1+T_2-U)}{\partial\theta} = F_\theta$
- $\frac{\partial T_1}{\partial\dot{\theta}} = \frac{m}{2}(R\cos(\varphi) + R\sin(\varphi) + R\cos(\varphi) + R\sin(\varphi)) + \frac{M}{2}(R\cos(\varphi) + R\dot{\theta}\sin(\varphi)) = m\,R\cos(\varphi)\,\sin(\varphi) + \frac{MR}{2}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{R}{2}\,\dot{\varphi}(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))(M + 2\,m\,sin(\varphi) + 2\,m\,cos(\varphi))$

- $\frac{\partial T_1}{\partial\theta} = 0$

O cálculo dessas derivadas foi muito facilitado pela utilização de variáveis simbólicas do Matlab, uma vez que dada uma função simbólica, esta pode ser derivada com respeito a uma variável simbólica através da função *diff*. Na figura abaixo está demostrado o cálculo de $\frac{\partial T_1}{\partial\dot{\theta}}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{\theta}}\right)$ e $\frac{\partial T_1}{\partial\theta}$.

```
syms theta(t) psi(t) fi(t) R W m M L y

theta_dot = diff(theta);

x_m_dot = R * cos(fi) * theta_dot;
y_m_dot = R * sin(fi) * theta_dot;
z_m = R;

x_l_dot = x_m_dot - W/2*diff(sin(fi));
y_l_dot = y_m_dot + W/2*diff(cos(fi));
z_l_dot = diff(R);

x_r_dot = x_m_dot + W/2*diff(sin(fi));
y_r_dot = y_m_dot - W/2*diff(cos(fi));
z_r_dot = diff(R);

x_b_dot = x_m_dot + diff(m*sin(fi)*cos(fi));
y_b_dot = y_m_dot + diff(m*sin(fi)*sin(psi));
z_b_dot = diff(z_m) + diff(L*cos(fi));

T_1 = m/2*(x_l_dot + y_l_dot + z_l_dot + x_r_dot + y_r_dot +
z_r_dot)+ M/2*(x_b_dot + y_b_dot + z_b_dot);

ro_T_1_ro_theta_dot = diff(T_1, theta_dot)
dt_ro_T_1_ro_theta_dot = diff(ro_T_1_ro_theta_dot)
ro_T_1_ro_theta = diff(T_1, theta)
```

Figura 3: Derivadas de T_1

Aplicando o mesmo procedimento dos 3 passos acima para T_2 e U,

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = F_\theta = [(2m+M)R^2 + 2J_w]\ddot{\theta} + [MLR\cos(\psi)]\ddot{\psi} - MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi)$

E aplicando o mesmo procedimento para os demais torques, obtém-se:

- $F_\psi = [MLR\cos(\psi)]\ddot{\theta} + [ML^2 + J_\psi]\ddot{\psi} - M\,g\,L\sin(\psi) - ML^2\dot{\varphi}^2\sin(\psi)\cos(\psi)$
- $F_\varphi = \left[\frac{1}{2}\,m\,W^2 + J_\varphi + \frac{W^2}{2R^2}J_w + ML^2\sin^2(\psi)\right]\ddot{\varphi} + 2ML^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\psi)\cos(\psi)$

Escrevendo as 3 equações acima na forma matricial:

- $F = (F_\theta, F_\psi, F_\varphi)$
- $F = \begin{pmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MLR\cos(\psi) & 0 \\ MLR\cos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\,m\,W^2 + J_\varphi + \frac{W^2}{2R^2}J_w + ML^2\sin^2(\psi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi) \\ -M\,g\,L\sin(\psi) - ML^2\dot{\varphi}^2\sin(\psi)\cos(\psi) \\ 2ML^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\psi)\cos(\psi) \end{pmatrix}$

1.b) Relação entre as forças generalizas e o torque de cada uma das rodas

O ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é definido pelo torque $\boldsymbol{F_{\theta}}$, sendo este por sua vez definido como

- $F_{\theta} = F_l + F_r$

Já a força de rotação do eixo z dependerá da diferença entre o torque da roda direita e o torque da esquerda da seguinte forma:

- $F_{\varphi} = \frac{W}{2R}\,(F_r - F_l)$

E finalmente:

- $F_{\psi} + F_r + F_l = 0 => F_{\psi} = -(F_r + F_l)$

Escrevendo as equações acima na forma matricial:

- $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_{\theta}} \\ \boldsymbol{F_{\psi}} \\ \boldsymbol{F_{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ -\frac{\boldsymbol{W}}{\mathbf{2}\boldsymbol{R}} & \frac{\boldsymbol{W}}{\mathbf{2}\boldsymbol{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_l} \\ \boldsymbol{F_r} \end{pmatrix}$

1.c) Relação entre as forças generalizas e a tensão aplicada

Para determinar a relação entre os torques e a tensão aplicada, será utilizada a lei do motor: $T_m = K_t i$ **considerando apenas o atrito entre o corpo e o motor.** Dessa forma:

- $F_l = K_t i_l + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l)$
- $F_r = K_t i_r + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r)$
- $F_{\psi} + F_r + F_l = 0 => F_{\psi} = -K_t i_r - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - K_t i_l - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l)$

Além disso, a corrente do motor esquerdo, ao desprezar a indutância, é dada considerando a tensão fornecida e a força contra eletromotriz da seguinte forma:

- $i_l = \frac{v_l}{R_m} + \frac{K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l)}{R_m}$

Analogamente:

- $i_r = \frac{v_l}{R_m} + \frac{K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r)}{R_m}$

Em seguida, define-se as seguintes constantes

- $\alpha = \frac{K_t}{R_m}; \beta = \frac{K_t K_b}{R_m} + f_m$
- $F_\theta = \alpha(v_r + v_l) - 2\beta\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi}$
- $F_\psi = -\alpha(v_r + v_l) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi}$
- $F_\varphi = \frac{W}{2R}\,\alpha(v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2}\,\beta\dot{\varphi}$

Finalmente, escreve-se o vetor dos torques na forma matricial:

- $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_\theta} \\ \boldsymbol{F_\psi} \\ \boldsymbol{F_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{\beta} & 2\boldsymbol{\beta} & 0 \\ 2\boldsymbol{\beta} & -2\boldsymbol{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\boldsymbol{W}^2}{2\boldsymbol{R}^2}\,\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\alpha} \\ -\frac{\boldsymbol{W}}{2\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\alpha} & \frac{\boldsymbol{W}}{2\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_l} \\ \boldsymbol{v_r} \end{pmatrix}$

2. Equações de estado

Nessa seção, deseja-se obter as equações de estado do sistema **não linear**. Relembrando que até o momento, essas foram as equações obtidas:

1. $\boldsymbol{F_\theta} = [(2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{M})\boldsymbol{R}^2 + 2\boldsymbol{J_w}]\ddot{\boldsymbol{\theta}} + [\boldsymbol{MLR}\cos(\psi)]\ddot{\psi} - \boldsymbol{MLR}\dot{\psi}^2\sin(\psi)$
2. $\boldsymbol{F_\psi} = [\boldsymbol{MLR}\cos(\psi)]\ddot{\boldsymbol{\theta}} + [\boldsymbol{ML}^2 + \boldsymbol{J_\psi}]\ddot{\psi} - \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{L}\sin(\psi) - \boldsymbol{ML}^2\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2\sin(\psi)\cos(\psi)$
3. $\boldsymbol{F_\varphi} = \left[\frac{1}{2}\,\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{J_\varphi} + \frac{\boldsymbol{W}^2}{2\boldsymbol{R}^2}\boldsymbol{J_w} + \boldsymbol{ML}^2\sin^2(\psi)\right]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + 2\boldsymbol{ML}^2\dot{\boldsymbol{\varphi}}\dot{\psi}\sin(\psi)\cos(\psi)$
4. $\boldsymbol{F_\theta} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v_r} + \boldsymbol{v_l}) - 2\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + 2\boldsymbol{\beta}\dot{\psi}$
5. $\boldsymbol{F_\psi} = -\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v_r} + \boldsymbol{v_l}) + 2\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\theta}} - 2\boldsymbol{\beta}\dot{\psi}$
6. $\boldsymbol{F_\varphi} = \frac{\boldsymbol{W}}{2\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v_r} - \boldsymbol{v_l}) - \frac{\boldsymbol{W}^2}{2\boldsymbol{R}^2}\,\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\varphi}}$
7. $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{K_t}}{\boldsymbol{R_m}}; \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{K_t K_b}}{\boldsymbol{R_m}} + \boldsymbol{f_m}$

Para determinar a equação de estados, o valor de $\boldsymbol{F_\theta}$ encontrado em 1. será substituído em 4. e o mesmo será feito para os demais Torques. O desafio dessa abordagem, é o algebrismo associado a resolução desse sistema de equações.

- Seja o vetor de estados: $x = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$ e o vetor de entradas $u = \begin{pmatrix} v_l \\ v_r \end{pmatrix}$
- É trivial afirmar que $\dot{x_1} = x_4$, $\dot{x_2} = x_5$ e $\dot{x_3} = x_6$

E igualando as equações aplicando substituição de variáveis conforme feito no código abaixo

```
1. syms W m M g J_w L R J_psi J_fi psi psi_dot psi_dot_dot theta_dot theta_dot_dot fi_dot
   fi_dot_dot beta alfa v_r v_l

2. eq1 = (M*L*R*cos(psi)) * theta_dot_dot + (M*L^2+J_psi) * psi_dot_dot - M*g*L*sin(psi) -
   (M*L^2) * (fi_dot^2 ) * sin(psi) * cos(psi) == -alfa*(v_r + v_l) + 2*beta*theta_dot -
   2*beta*psi_dot;
3. novo_theta_dot_dot = solve(eq1, [theta_dot_dot]);

4. eq2 = ((2*m+M) * R^2 + 2*J_w )*novo_theta_dot_dot+(M*L*R*cos(psi))*psi_dot_dot -
   M*L*R*(psi_dot^2)*sin(psi) == alfa*(v_r+v_l ) - 2*beta*theta_dot + 2*beta*psi_dot;
5. psi_dot_dot_final = solve(eq2, [psi_dot_dot])

6. eq3 = (M*L*R*cos(psi)) * theta_dot_dot + (M*L^2+J_psi) * psi_dot_dot_final -
   M*g*L*sin(psi) - (M*L^2) * (fi_dot^2 ) * sin(psi) * cos(psi) == -alfa*(v_r + v_l) +
   2*beta*theta_dot - 2*beta*psi_dot;
7. theta_dot_dot_final = solve(eq3, [theta_dot_dot])

8. eq4 = (((1/2)*m*(W^2) + J_fi + ((W^2)/(2*(R^2)))*J_w +
   M*(L^2)*(((sin(psi))^2)))*fi_dot_dot) + 2*M*(L^2)*fi_dot*psi_dot*sin(psi)*cos(psi) ==
   ((W/(2*R)) * alfa*(v_r-v_l)) - ((W^2)/(2*(R^2)))*beta*fi_dot;
9. fi_dot_dot_final = solve(eq4, [fi_dot_dot])
```

Figura 4: Encontrando espaço de estados

- $\ddot{\theta} = \dfrac{\left\{ \begin{matrix} -[-\alpha(v_l+v_r)+2\beta\dot{\theta}-2\beta\dot{\psi}+M\,g\,L\sin(\psi)+ML^2\dot{\varphi}^2\sin(\psi)\cos(\psi)]*MLR\cos(\psi) \\ [ML^2+J_\psi]*[MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi)+\alpha(v_r+v_l)-2\beta\dot{\theta}+2\beta\dot{\psi}] \end{matrix} \right\}}{\{(MLR\cos(\psi))^2-[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)\}}$
  - $\dot{x_4} = \dfrac{\left\{ \begin{matrix} -[-\alpha(u_1+u_2)+2\beta x_4-2\beta x_5+M\,g\,L\sin(x_2)+ML^2x_6^2\sin(x_2)\cos(x_2)]*MLR\cos(x_2) \\ [ML^2+J_\psi]*[MLRx_5^2\sin(x_2)+\alpha(u_1+u_2)-2\beta x_4+2\beta x_5] \end{matrix} \right\}}{\{(MLR\cos(x_2))^2-[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)\}}$

- $$\ddot{\psi} = \frac{\begin{Bmatrix} -\left[\alpha(v_l+v_r)-2\beta\dot{\theta}+2\beta\dot{\psi}+MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi)\right]*MLR\cos(\psi) \\ \left[(2m+M)R^2+2J_w\right]*\left[MgL\sin(\psi)+ML^2\dot{\varphi}^2\sin(\psi)\cos(\psi)-\alpha(v_r+v_l)+2\beta\dot{\theta}-2\beta\dot{\psi}\right] \end{Bmatrix}}{\left\{(MLR\cos(\psi))^2-\left[(2m+M)R^2+2J_w\right]\left(ML^2+J_\psi\right)\right\}}$$
    - $$\dot{x}_5 = \frac{\begin{Bmatrix} -\left[\alpha(u_1+u_2)-2\beta x_4+2\beta x_5+MLRx_5^2\sin(x_2)\right]*MLR\cos(x_2) \\ \left[(2m+M)R^2+2J_w\right]*\left[MgL\sin(x_2)+ML^2x_6^2\sin(x_2)\cos(x_2)-\alpha(u_1+u_2)+2\beta x_4-2\beta x_5\right] \end{Bmatrix}}{\left\{(MLR\cos(x_2))^2-\left[(2m+M)R^2+2J_w\right]\left(ML^2+J_\psi\right)\right\}}$$

- $$\ddot{\varphi} = \frac{2ML^2\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin(\psi)\cos(\psi)+\frac{W}{2R}(v_r-v_l)-\frac{W^2}{2R^2}\beta\dot{\varphi}}{\frac{1}{2}mW^2+J_\varphi+\frac{W^2}{2R^2}J_w+ML^2\sin^2(\psi)}$$
    - $$\dot{x}_6 = \frac{2ML^2x_5x_6\sin(x_2)\cos(x_2)+\frac{W}{2R}(u_2-u_1)-\frac{W^2}{2R^2}\beta x_6}{\frac{1}{2}mW^2+J_\varphi+\frac{W^2}{2R^2}J_w+ML^2\sin^2(x_2)}$$

3. Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do pêndulo invertido montado numa plataforma de duas rodas ocorrem quando este encontra-se com a massa concentrada encontra-se ereta (z_b é máximo = $z_{b_{max}}$) na posição vertical. Caso apenas as rodas estivessem apoiadas no chão e houvesse um vão entre elas outro ponto de equilíbrio seria com o pêndulo em posição vertical e a massa concentrada posicionada em $-z_{b_{max}}$. Essa segunda situação hipotética poderia ocorrer caso o sistema fosse apoiado sobre trilhos, por exemplo.

Analiticamente o ponto de equilíbrio pode ser demostrado da seguinte forma:

- $\dot{x_1} = 0 => x_4 = 0$
- $\dot{x_2} = 0 => x_5 = 0$
- $\dot{x_3} = 0 => x_6 = 0$

O mesmo é valido para $\dot{x_4}, = \dot{x_5} = \dot{x_6} = 0$, portanto os numeradores das expressões das acelerações angulares devem ser analisados. Assume-se também entradas nulas no ponto de equilíbrio.

- $\dot{x_4} = 0 = \dfrac{\begin{Bmatrix} -[-\alpha(u_1+u_2)+2\beta x_4 - 2\beta x_5 + M\,g\,L\sin(x_2) + ML^2 x_6^2 \sin(x_2)\cos(x_2)] * MLR\cos(x_2) \\ [ML^2 + J_\psi]*[MLRx_5^2 \sin(x_2) + \alpha(u_1+u_2) - 2\beta x_4 + 2\beta x_5] \end{Bmatrix}}{\{(MLR\cos(x_2))^2 - [(2m+M)R^2 + 2J_w](ML^2+J_\psi)\}}$
    - $\dot{x_4} = 0 \Rightarrow M\,g\,L\sin(x_2) * MLR\cos(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = n*\pi \; ou \; x = \frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro.
- $\dot{x_5} = 0 = \dfrac{\begin{Bmatrix} -[\alpha(u_1+u_2) - 2\beta x_4 + 2\beta x_5 + MLRx_5^2 \sin(x_2)] * MLR\cos(x_2) \\ [(2m+M)R^2 + 2J_w]*[M\,g\,L\sin(x_2) + ML^2 x_6^2 \sin(x_2)\cos(x_2) - \alpha(u_1+u_2) + 2\beta x_4 - 2\beta x_5] \end{Bmatrix}}{\{(MLR\cos(x_2))^2 - [(2m+M)R^2 + 2J_w](ML^2+J_\psi)\}}$
    - $\dot{x_5} = 0 \Rightarrow -[(2m+M)R^2 + 2J_w][M\,g\,L\sin(x_2)] = 0 \Rightarrow x_2 = n*\pi$

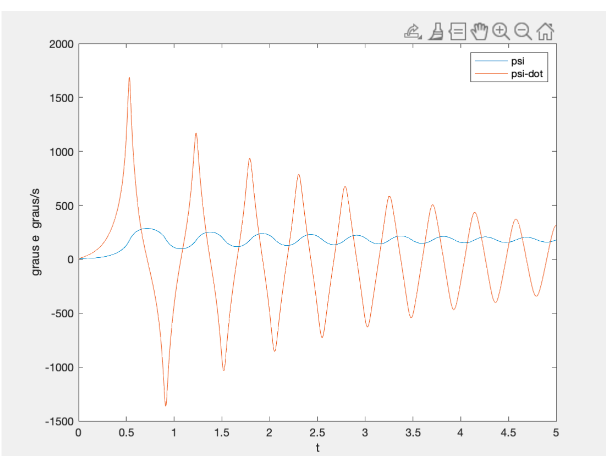
Fazendo a interseção entre as duas soluções acima: $\boldsymbol{\psi = x_2 = n*\pi; n} \in \mathbb{Z}$ é o ponto de equilíbrio do sistema.

4. Simulação

4.a) ODE45

Simulando o modelo utilizando o *solver* ODE45 do Matlab os seguintes gráficos são obtidos. A inversão de sinal ocorrer devido a rotação do pêndulo invertido que hora acontece no sentido horário, hora no anti-horário. *Psi* se refere ao movimento de *pitch* do robô.

Nas duas imagens abaixo é possível perceber a convergência para 180 e -180 graus.



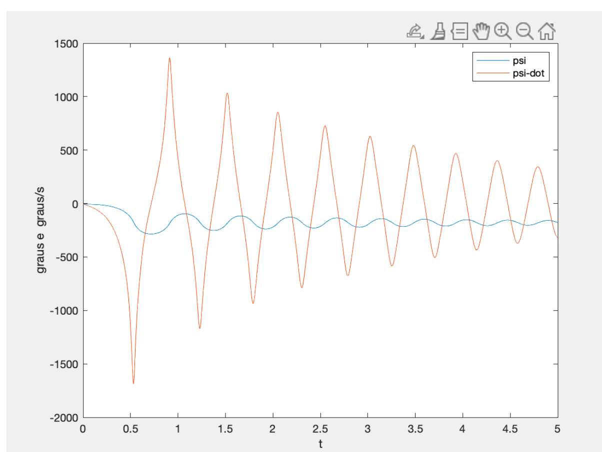


Figura 5: Convergência para ponto de equilíbrio estável. CIs = 0.1 e -0.1

Em seguida, foi dado zoom nas imagens acima e plotado apenas o ângulo psi para facilitar a visualização.

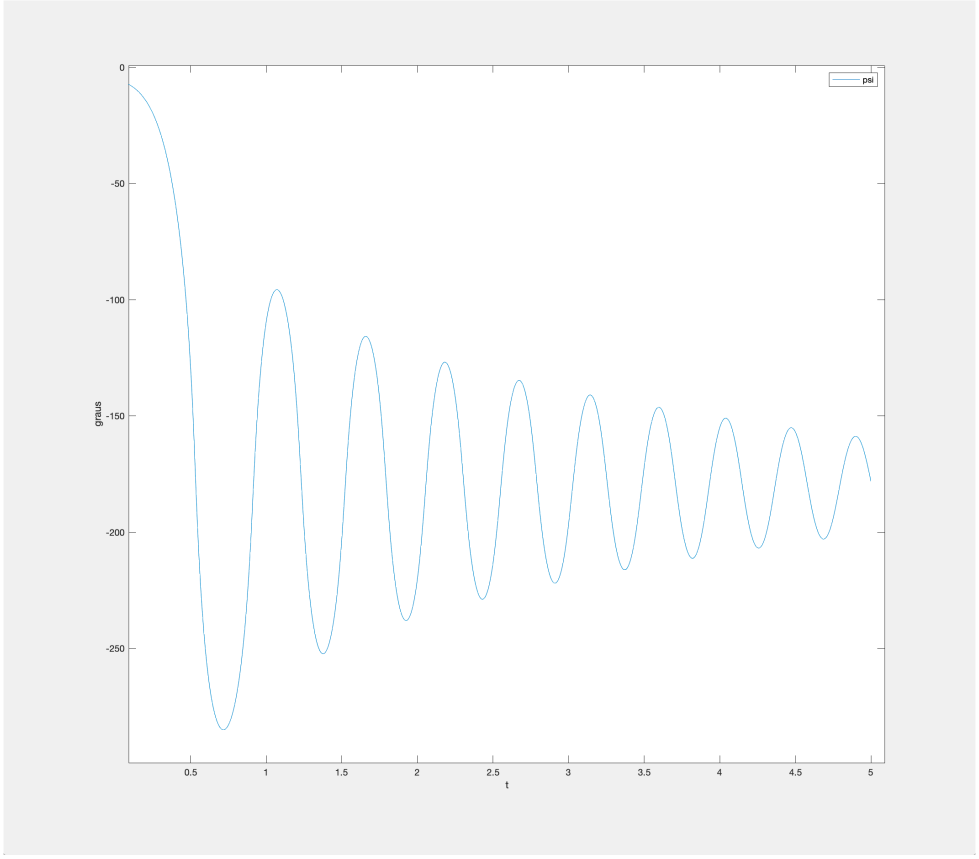


Figura 6: CI = -0.1

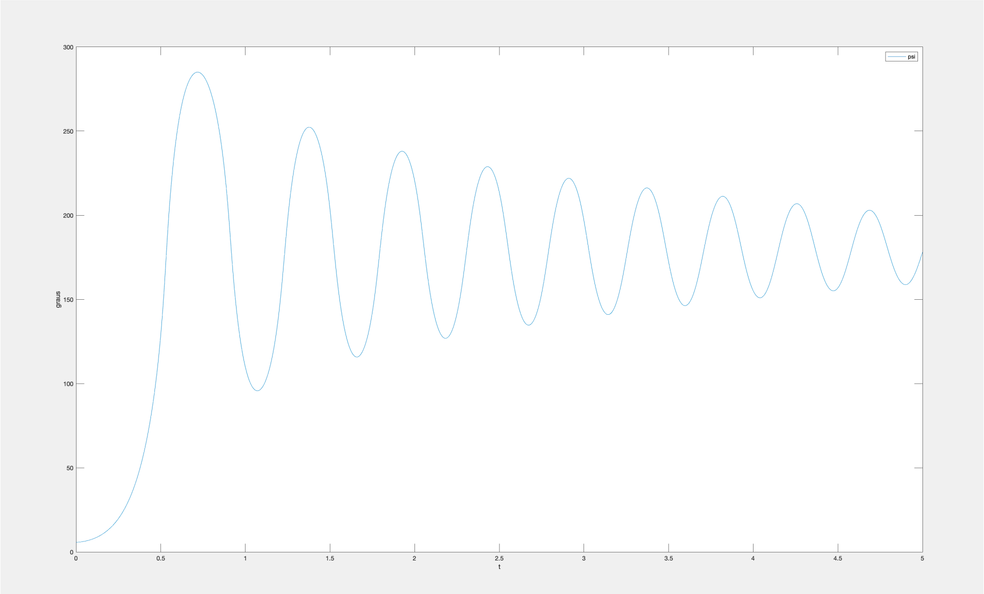


Figura 7: CI = 0.1

4.b) S-functions

A simulação por S-functions é feita de forma similar ao ODE45, porém a equação diferencial do sistema deve ser encapsulada em um arquivo dedicado. Abaixo, um *snippet* da equação diferencial:

```
function dx = pendulo_nao_linear(t,x)
g = 9.8 ;
m = 0.03 ;
R = 0.04 ;
J_w = m*(R^2)/2;
M = 0.6 ;
W = 0.14 ;
D = 0.04 ;
H = 0.144;
L = H/2;
J_psi = M*(L^2)/3;
J_fi = M*((W^2)+(D^2 ) ) /12;
Jm = 10^-5;
Rm = 6.69 ;
Kb = 0.4 ;
Kt = 0.4 ;
fm = 0.0022 ;
alfa = 1*Kt/Rm;
beta=(1*Kt*Kb/Rm)+fm ;
v1 = 0 ;
v2 = 0;


dx1 = x(4); %theta
dx2 = x(5); %psi
dx3 = x(6); % fi
dx4 = -(alfa*(v1 + v2) + 2*beta*x(5) - 2*beta*x(4) + ((M*L^2 + J_psi)*(alfa*(v1 + v2) +
2*beta*x(5) - 2*beta*x(4) + L*M*R*x(5)^2*sin(x(2)) - (((M + 2*m)*R^2 +
2*J_w)*(M*cos(x(2))*sin(x(2))*L^2*x(6)^2 + M*g*sin(x(2))*L - alfa*(v1 + v2) - 2*beta*x(5)
+ 2*beta*x(4)))/(L*M*R*cos(x(2)))))/(L*M*R*cos(x(2)) - ((M*L^2 + J_psi)*((M + 2*m)*R^2 +
2*J_w))/(L*M*R*cos(x(2)))) - L*M*g*sin(x(2)) -
L^2*M*x(6)^2*cos(x(2))*sin(x(2)))/(L*M*R*cos(x(2)));
dx5 = (alfa*(v1 + v2) + 2*beta*x(5) - 2*beta*x(4) + L*M*R*x(5)^2*sin(x(2)) - (((M +
2*m)*R^2 + 2*J_w)*(M*cos(x(2))*sin(x(2))*L^2*x(6)^2 + M*g*sin(x(2))*L - alfa*(v1 + v2) -
2*beta*x(5) + 2*beta*x(4)))/(L*M*R*cos(x(2))))/(L*M*R*cos(x(2)) - ((M*L^2 + J_psi)*((M +
2*m)*R^2 + 2*J_w))/(L*M*R*cos(x(2))));
dx6 = -((W*alfa*(v1 - v2))/(2*R) + (W^2*beta*x(6))/(2*R^2) +
2*L^2*M*x(6)*x(5)*cos(x(2))*sin(x(2)))/(J_fi + (W^2*m)/2 + (J_w*W^2)/(2*R^2) +
L^2*M*sin(x(2))^2);

dx = [dx1; dx2; dx3; dx4; dx5; dx6];
```

Figura 8: Equações diferenciais do pêndulo

Em seguida, é preciso criar um arquivo de configurações definindo o comportamento do sistema de acordo com as flags. Esse comportamento foi definido conforme o *snippet* abaixo.

```
function [sys,x0,str,ts] = pendulo(t,x,u,flag,theta, psi, fi, theta_dot, psi_dot, fi_dot)
switch flag
case 0 % initialize
str=[] ;
ts = [0 0] ;
s = simsizes ;
s.NumContStates = 6 ;
s.NumDiscStates = 0 ;
s.NumOutputs = 6 ;
s.NumInputs = 1 ;
s.DirFeedthrough = 0 ;
s.NumSampleTimes = 1 ;
sys = simsizes(s) ;
x0 = [theta, psi, fi, theta_dot, psi_dot, fi_dot];
case 1 % derivatives
sys = pendulo_nao_linear(t,x) ;
case 3 % output
sys = x
case {2 4 9} % 2:discrete
% 4:calcTimeHit
% 9:termination
sys =[];
otherwise
error(['unhandled flag =',num2str(flag)]) ;
end
```

Figura 9: Configuração S-functions

Finalmente, o diagrama de blocos é montado e o estado do sistema pode ser observado através do *scope*.

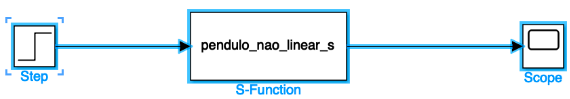


Figura 10: Configuração S-functions

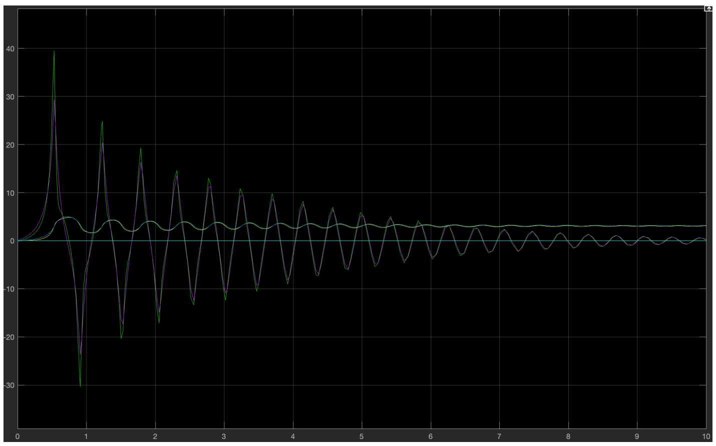


Figura 11: Scope da simulação por S-functions

Um demultiplexador poderia ser usado para separar os diferentes sinais. No presente relatório a escolha foi por exportar os dados do scope e plotá-los no Matlab conforme o diagrama de blocos abaixo.

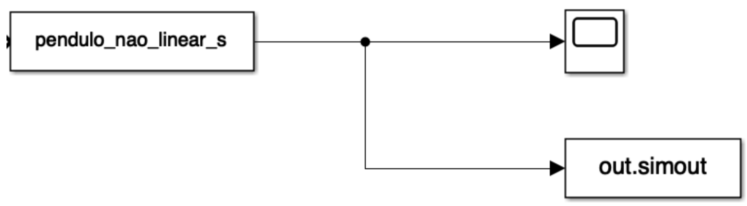


Figura 12: Diagrama de blocos para exportar resultado S-functions

Acessando o resultado guardado no *workspace*, pode-se plotar o ângulo de *pitch* e perceber que o resultado concorda com o obtido através do ODE45.

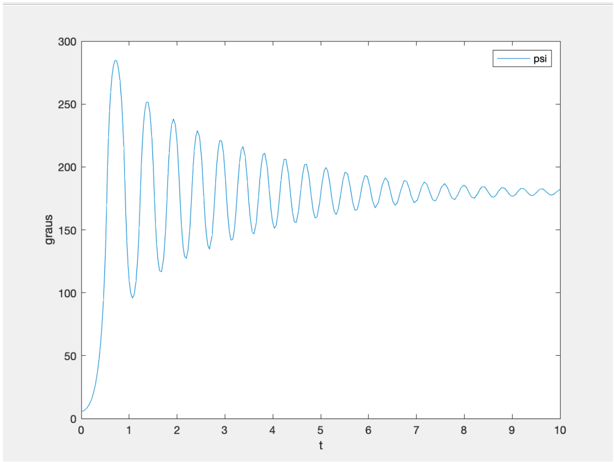


Figura 13: Plot resultado por S-functions

5. Linearização

O sistema será linearizado em relação ao ponto de equilíbrio instável quando ψ é igual a zero. Nessa situação, pode-se assumir que:

- $\psi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(\psi) \approx \psi$
- $\psi \rightarrow 0 \Rightarrow \cos(\psi) \approx 1$

E utilizando as mesmas variáveis de estado definidas no item 3:

- $x_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(x_2) \approx x_2$
- $x_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos(x_2) \approx 1$

Sendo assim, as seguintes equações

1. $F_\theta = [(2m+M)R^2 + 2J_w]\ddot{\theta} + [MLR\cos(\psi)]\ddot{\psi} - MLR\dot{\psi}^2\sin(\psi)$
2. $F_\psi = [MLR\cos(\psi)]\ddot{\theta} + [ML^2 + J_\psi]\ddot{\psi} - M\,g\,L\sin(\psi) - ML^2\dot{\varphi}^2\sin(\psi)\cos(\psi)$
3. $F_\varphi = \left[\frac{1}{2}\,m\,W^2 + J_\varphi + \frac{W^2}{2R^2}J_w + ML^2\sin^2(\psi)\right]\ddot{\varphi} + 2ML^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\psi)\cos(\psi)$
4. $F_\theta = \alpha(v_r + v_l) - 2\beta\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi}$
5. $F_\psi = -\alpha(v_r + v_l) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi}$
6. $F_\varphi = \frac{W}{2R}\,\alpha(v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2}\,\beta\dot{\varphi}$
7. $\alpha = \frac{K_t}{R_m}; \beta = \frac{K_t K_b}{R_m} + f_m$

Poderão ser transformadas em

1. $\boldsymbol{F_\theta = [(2m+M)R^2 + 2J_w]\ddot{\theta} + [MLR]\ddot{\psi}}$
2. $\boldsymbol{F_\psi = [MLR]\ddot{\theta} + [ML^2 + J_\psi]\ddot{\psi} - M\,g\,L\,\psi}$
3. $\boldsymbol{F_\varphi = \left[\frac{1}{2}\,m\,W^2 + J_\varphi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right]\ddot{\varphi}}$
4. $\boldsymbol{F_\theta = \alpha(v_r + v_l) - 2\beta\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi}}$
5. $\boldsymbol{F_\psi = -\alpha(v_r + v_l) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi}}$
6. $\boldsymbol{F_\varphi = \frac{W}{2R}\,\alpha(v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2}\,\beta\dot{\varphi}}$
7. $\boldsymbol{\alpha = \frac{K_t}{R_m}; \beta = \frac{K_t K_b}{R_m} + f_m}$

6. Sistema linear vs não linear

O sistema não linear foi simulado com condições iniciais $\psi = 0.1$ e $\psi = -0.1$ e os resultados obtidos foram os seguintes conforme já explicitado anteriormente.

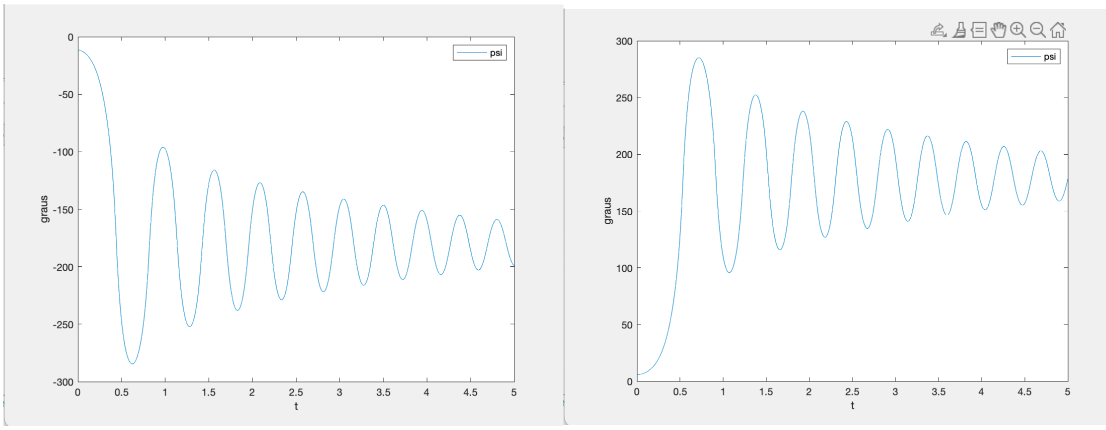


Figura 14: Sistema não linear

Agora, simulando o sistema linearizado conforme as mesmas condições, o resultado obtido foi o seguinte:

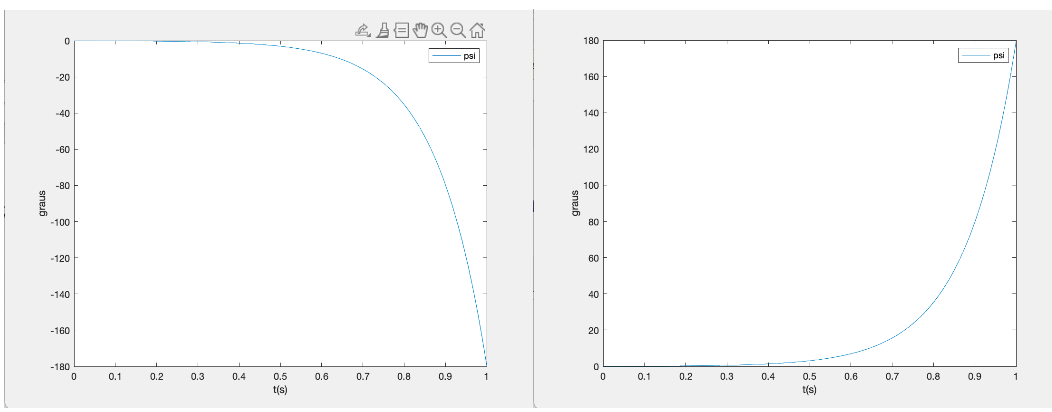


Figura 14: Sistema linearizado

Analisando os resultados, percebe-se que o modelo linearizado não é capaz de capturar as oscilações do sistema, sendo assim pode-se afirmar que ele não representa de maneira satisfatória o comportamento do sistema analisado.

7. Controle realimentado

Como observado nas simulações anteriores, o ponto de equilíbrio em $\psi = 0$ é instável, e, portanto, para condições iniciais diferentes de 0, o sistema tende a estabilizar em relação ao ponto de equilíbrio estável em $\psi = \pi$ ou $\psi = -\pi$. Sendo assim, uma entrada de controle realimentado será fornecida ao sistema de forma a estabilizá-lo ao redor do $\psi = 0$. Abaixo estão definas as entradas desse controle.

- $x = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} v_l \\ v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0224 & 25.4867 & 0.7071 & 1.0362 & 2.2530 & 0.0076 \\ 0.0224 & 25.4867 & -0.7071 & 1.0362 & 2.2530 & -0.0076 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix} r$

Em seguida encontram-se os resultados desse controle para o ângulo de pitch.

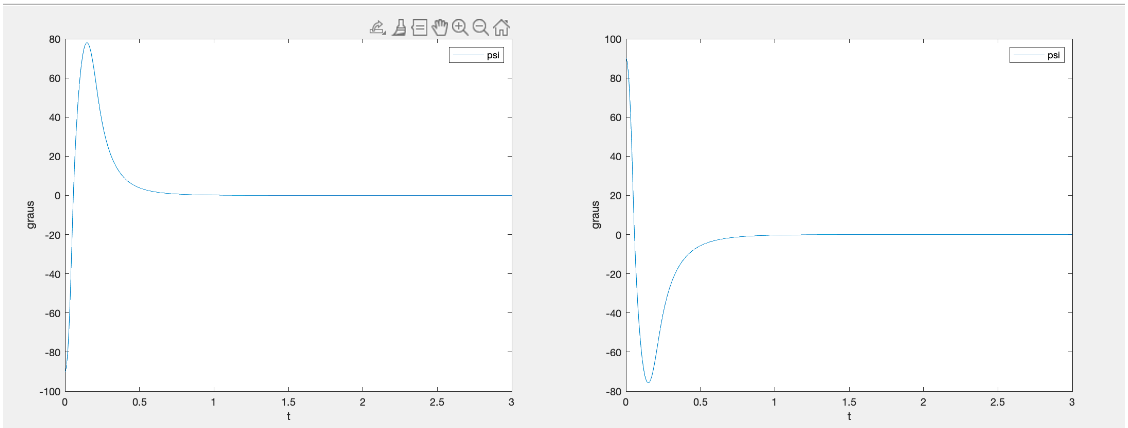


Figura 15: Sistema estabilizado ao redor do 0