Método das Diferenças Finitas

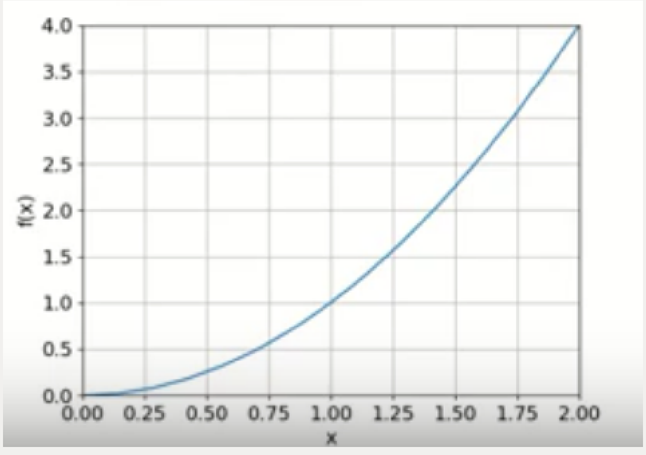
O método de diferenças finitas consiste na reformulação de um problema contínuo em um problema discreto.

Discretização

O processo de transformar um elemento (função, domínio, etc) contínuo em discreto é chamado de discretização

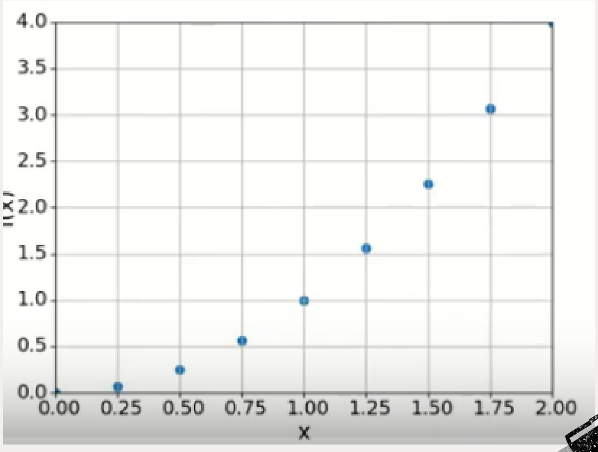
Função Contínua

É uma função onde há uma relação f(x) onde x pertence a um intervalo.



Função Discreta

É um conjunto de pontos (vetores) relacionados, ou seja, pontos do eixo x se relacionam com pontos do eixo y



Exemplo na vida real

Um uso comum do método das diferenças finitas é na criação de modelos 3D. Quanto mais elementos forem utilizados no domínio discreto, maior será a semelhança com o domínio contínuo. Entretanto, quanto maior o número de elementos, maior será o gasto computacional.

Nessa imagem, pode-se observar que quanto maior a quantidade de triângulos (elementos) utilizados, mais realista o modelo 3D se torna. Esses modelos 3D podem ser utilizados no desenvolvimento de jogos, e até mesmo para a impressão 3D de algum objeto.

Outra aplicação de diferenças finitas na vida real é no processamento de imagens. Sendo utilizados modelos para, dentre várias aplicações, a restauração de imagens.

Problema de Valores de Contorno (PVC)

Os problemas de valores de contorno podem ser resolvidos utilizando fórmulas de diferenças finitas

[Continua]

ETAPAS

Resolução de PVC com diferenças finitas

Com exemplo

Problema de valor de contorno com a seguinte equação: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + S = 0$

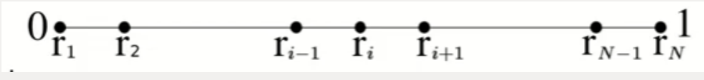
As condições de contorno são:

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{em} \quad r = 0$$

$$-k\frac{dT}{dr} = hR(T - T_\infty) \quad \text{em} \quad r = 1$$

1. Definir o domínio discreto

Dividimos o domínio da solução apresentado pelo problema (0 <= r <= 1) em N pontos distintos.



Os valores de cada ri serão definidos por:

$$r_i = (i-1)\Delta r \qquad i = 1, 2, 3 \ldots, N$$

onde: $\Delta r = 1/(N-1)$

O valor de N depende, e deve ser testado, pois diferentes Ns geram diferentes erros.

A representação discreta do domínio da solução é chamado de grid numérico.

2. Discretizar as derivadas da equação diferencial

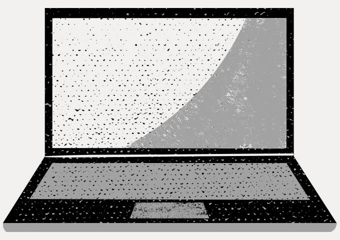
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

Primeira derivada:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_i} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r}$$

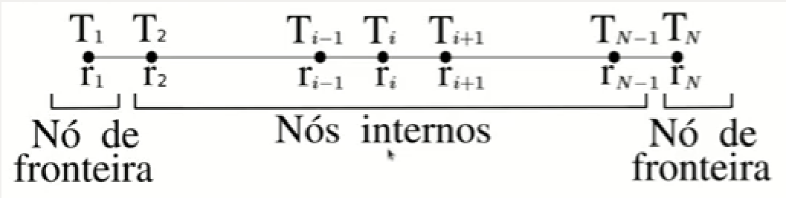
Segunda derivada:

$$\left.\frac{d^2T}{dr^2}\right|_{r_i} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2}$$



3. Obter uma equação algébrica para cada ponto do domínio discreto

No método das diferenças finitas, Pode-se utilizar expensão em série de Taylor para aproximar as equações diferencias por equações algébricas em cada ponto do domínio.

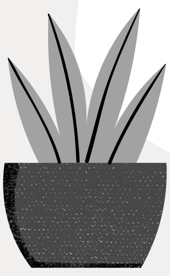


4. Resolução do sistema linear que foi obtido na etapa anterior

Soluciona-se o sistema algébrico obtido para obter a solução discretizada do PVC.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_{W,2} & A_{P,2} & A_{E,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{W,3} & A_{P,3} & A_{E,3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{W,N-1} & A_{P,N-1} & A_{E,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & A_{P,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix}$$

Por fim, avalia-se o erro da solução. Lembra do valor de N? Uma estratégia para redução de erros é a comparação da solução com valores de N cada vez maiores, até que a solução não tenha mais variação.



[Continua]

Vamos praticar!

Exercício Resolvido

Problema de valor de contorno com a seguinte equação e condições:

$$\begin{cases} y'' = 3xy' - y + x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Também temos que:

$h = 0{,}25$

E para definir n usaremos:

$$n = \frac{b - a}{h}$$

Resolvendo

Obtemos o valor de n:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \ a = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \ b = 1$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0{,}25} = 4$$

Com isso podemos discretizar o domínio. Como n=4, sabemos que teremos 4 intervalos espaçados.

Utilizando o passo h = 0.25 obtemos a seguinte discretização:

i	x_i	y_i
0	$a = 0$	0
1	0,25	
2	0,5	
3	0,75	
4	$b = 1$	0

Obtemos os valores das derivadas:

$$y_i' \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$$

$$y_i'' \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

E substituímos na equação original

$$y'' = 3xy' - y + x$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 3x\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - y + x$$

Multiplicamos h² nos dois lados da equação:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{3}{2}xh\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) - h^2y_i + h^2x_i$$

Colocamos y em evidência e substituímos h:

$$(1 - 0{,}375x_i)y_{i+1} - 1{,}9375y_i + (1 + 0{,}375x_i)y_{i-1} = 0{,}0625x_i$$

Analisamos a expressão para cada i:

Se i = 1: $(1 - 0{,}375x_1)y_2 - 1{,}9375y_1 + (1 + 0{,}375x_1)y_0 = 0{,}0625x_1$

Substituímos com os valores de y0 e x1 obtidos na tabela de discretização

$y_0 = 0$

$x_1 = 0{,}25$

$$0{,}90625y_2 - 1{,}9375y_1 = 0{,}015625$$

E assim temos a primeira equação do sistema linear.

Fazemos o mesmo para i = 2 e i = 3. E teremos as seguintes equações:

$i = 2$ $\quad 0{,}8125y_3 - 1{,}9375y_2 + 1{,}1875y_1 = 0{,}03125$

$i = 3$ $\quad -1{,}9375y_3 + 1{,}28125y_2 = 0{,}046875$

Agora temos um sistema linear com três incógnitas:

$$\begin{cases} 0{,}90625y_2 - 1{,}9375y_1 = 0{,}015625 \\ 0{,}8125y_3 - 1{,}9375y_2 + 1{,}1875y_1 = 0{,}03125 \\ -1{,}9375y_3 + 1{,}28125y_2 = 0{,}046875 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema com algum método aprendido anteriormente, teremos:

$y_1 = \ -0{,}04155$

$y_2 = \ -0{,}0716$

$y_3 = \ -0{,}0715$

E agora basta preenchermos nossa tabela com a solução:

i	x_i	y_i
0	$a = 0$	0
1	0,25	−0,04155
2	0,5	−0,0716
3	0,75	−0,0715
4	$b = 1$	0

Poderíamos testar diferentes valores maiores de N, para reduzir o erro. Vá em frente e experimente! Utilizar um código e um computador irá facilitar esse processo!

Referências

Disponível em: https://fontana.paginas.ufsc.br/files/2017/02/apostila_metII_20191.pdf. https://link.springer.com/article/10.1007/BF00932298 e Youtube canal: Eliton Fontana