Normas
Número de condición

Algebra Lineal Computacional

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2do Cuatrimestre 2024

Normas

Normas Vectoriales: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Normas

Normas Matriciales: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

Para cualquier $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$, se cumple:

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Propiedad submultiplicativa

- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Consistencia de una norma matricial respecto de una norma vectorial

- $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

Normas Matriciales

Algunos ejemplos:

- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$ (Norma Frobenius)
- $\|A\|_M = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

Normas Matriciales

Algunos ejemplos:

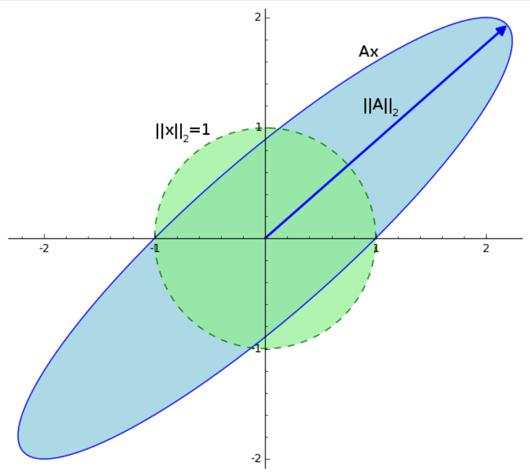
- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$ (Norma Frobenius)
- $\|A\|_M = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

Normas matriciales inducidas por norma vectorial $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$

- $\|A\|_{\mathbf{v}} := \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_{\mathbf{v}}}{\|x\|_{\mathbf{v}}} = \max\limits_{\|x\|_{\mathbf{v}}=1} \|Ax\|_{\mathbf{v}}$

Normas Matriciales

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$



Normas Matriciales

Normas p matriciales, $p = 1, 2, \ldots, \infty$

- $\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$

Casos particulares

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Número de Condición

Número de Condición $\kappa(\cdot)$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y una norma matricial $\| \cdot \| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

- $\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

Número de Condición

Ejemplo

Resolvemos el siguiente sistema $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 0.8566 & 0.6183 \\ 0.8415 & 0.6074 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.4749 \\ 1.4489 \end{pmatrix}$$

- $x = (1, 1)$ es solución

Definiciones

- $\tilde{x} = x + \delta x$
  $\tilde{x}$ es la versión aproximada de x perturbada por δx
- Error absoluto: $\|x - \tilde{x}\|$
- Error relativo: $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$

Número de Condición

Consideremos el sistema perturbado $Ax = \tilde{b}$

- $\tilde{b} = b + \delta b$
- $\delta b = (0.0001, -0.0001)$
- La perturbación es pequeña: $\dfrac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \approx 0.000678 \approx 7 \cdot 10^{-5}$

Sistema original $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 0.8566 & 0.6183 \\ 0.8415 & 0.6074 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.4749 \\ 1.4489 \end{pmatrix}$$

Sistema perturbado $Ax = \tilde{b}$:

$$\begin{pmatrix} 0.8566 & 0.6183 \\ 0.8415 & 0.6074 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.4750 \\ 1.4488 \end{pmatrix}$$

- ¿Cómo esperamos que sea la solución $\tilde{x}$ del sistema perturbado?

Número de Condición

Veamos

- Solución x del sistema $Ax = b$: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Solución $\tilde{x}$ del sistema perturbado $Ax = \tilde{b}$: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -199.934 \\ 279.377 \end{pmatrix}$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -199.934 \\ 279.377 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200.93 \\ 278.37 \end{pmatrix} = x + \delta x$$

Error relativo

- $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 278.37$

Número de Condición

Propiedad

- $$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

En nuestro ejemplo

- $$\underbrace{\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}}_{278.37} \leq \kappa(A)\underbrace{\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}}_{7\cdot 10^{-5}}$$
- Matriz mal *condicionada* (número de condición grande)

$$\kappa(A) \approx 4105783$$

- Una 'pequeña' perturbación al sistema no asegura una solución cercana a la del sistema original.