Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2024

Práctica N° 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución es única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando np.linalg.solve[1].

(a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

Ejercicio 3. En `Python`, importar la librería numpy con el siguiente comando: `import numpy as np`, y probar los siguientes comandos:

```python
import numpy as np

1 + 3
a = 7
b = a + 1
print("b = ", b)

# Vectores
v = np.array([1,2,3,-1])
w = np.array([2,3,0,5])
print("v + w = ", v + w)
print("2*v = ", 2*v)
print("v**2 = ", v**2)

# Matrices (ejecutar los comandos uno a uno para ver los resultados)
A = np.array([[1,2,3,4,5],[0,1,2,3,4],[2,3,4,5,6],[0,0,1,2,3],[0,0,0,0,1]])
print(A)
A[0:2,3:5]
A[:2,3:]
```

[1] `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html`

```
A[[0,2,4],:]
ind = np.array([0,2,4])
A[ind,ind]
A[ind,ind[:,None]]

# Numeros complejos
1j*1j
(1+2j)*1j
```

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar el resultado obtenido usando `Python`. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt #libreria para graficar

# ...
# Aca, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a,b y c.
# ...

xx = np.array([1,2,3])
yy = np.array([1,2,0])
x  = np.linspace(0,4,100) #genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f  = lambda t: a*t**2+b*t+c #esto genera una funcion f de t.
plt.plot(xx,yy,'*')
plt.plot(x,f(x))
plt.show()
```

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0; \, x - y = 0\}$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times3} : \ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3} : \ tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : \ x_1 + x_2 - ix_4 = 0, \ ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4/x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4/x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3, \quad S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle \qquad T = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \;\forall\, i,j\} \qquad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3, \quad S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle \qquad T = \{x \in \mathbb{C}^3 : \; (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$.

(b) $S \cap T = \langle (0,1,1) \rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1,k,2), (-1,2,k) \rangle$.

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1,4,-1,3)\,,\, (2,1,-3,-1)\,,\, (0,2,1,-5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i, i)\,,\, (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S. Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1,1,2),\, (1,3,5),\, (1,1,4),\, (5,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3, \; K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}, \; K = \mathbb{C}$

Ejercicio 12. Sean $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ satisface que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 \;\forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = 0$. Deducir que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ satisfacen que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \;\forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$ con $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{AB} = (\,\boldsymbol{AB}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{AB}_r)$ (es decir, $\boldsymbol{AB}_j$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{AB}$).

Ejercicio 14. Sean las siguientes matrices de 3×3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ en bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

(a) $A_{11} = [a_{11}],\ A_{12} = [a_{12},\ a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12},\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(b) $A_{11} = [a_{11}\ \ a_{12}],\ A_{12} = [a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ \ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ A_{21} = [a_{31}],\ A_{11} = [a_{32}\ a_{33}]$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

Ejercicio 15. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$

(a) Calcular $[(1,1,0)]_B$ y $[(1,1,0)]_{B'}$.

(b) Calcular la matriz de cambio de base $C(B,B')$.

(c) Comprobar que $C(B,B')[(1,1,0)]_B = [(1,1,0)]_{B'}$.

Ejercicio 16. Sean $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}' \in K^{m\times n}$; $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$; $\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')^t = \boldsymbol{A}^t + (\boldsymbol{A}')^t$

(b) $(\alpha\boldsymbol{A})^t = \alpha\boldsymbol{A}^t$

(c) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$

(d) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t$ y $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ son matrices simétricas.

(e) $tr(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}) + tr(\boldsymbol{D}')$

(f) $tr(\alpha\boldsymbol{D}) = \alpha tr(\boldsymbol{D})$

(g) $tr(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})$

Ejercicio 17. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

(a) $S_1 = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{A} \text{ es triangular inferior}\}$ (b) $S_2 = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{A} \text{ es simétrica}\}$

Ejercicio 18. Calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Cuando sea posible, verificar utilizando `Python`, con el comando np.linalg.inv.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{M} \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

Probar que si $\boldsymbol{A}$ es inversible, entonces

(a) $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$

(b) $\det(\boldsymbol{M}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$. Concluir que si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{M}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B})$.

Ejercicio 21. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes operaciones:

(a) Calcular la traza de una matriz.

(b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.

(c) Determinar si la sumatoria de elementos positivos es mayor que la sumatoria (en módulo) de los elementos negativos de una matriz.

Temas:

- Eliminación Gaussiana: Burden, capítulos 6.1, 6.2.
- Espacios vectoriales y Subespacios Sistemas de generadores e independencia lineal, bases, dimensión: Strang capítulos 2.1, 2.2, 2.3.
- Suma y suma directa: Lipchutz capítulo 5.9.
- Matrices (producto, inversa, determinante): Burden, capítulos 6.3 y 6.4.
- Ordenes: Kincaid, capítulo 1.2.

Todos estos temas están incluidos en los Capítulos 2 y 3 del apunte Acosta-Laplagne.

Bibliografía:

1. Numerical Analysis. D.R. Kincaid, E.W. Cheney. Brooks/Cole Publishing Company. 1991.
2. Linear Algebra and Its Applications. Gilbert Strang. Cengage Learning, 2006.
3. Algebra lineal. Seymour Lipschutz, Editorial Mcgraw Hill Editorial, Serie Schaum, 1992.
4. Análisis Numérico. R. Burden. Cengage Learning, 2017.