Unicité de la limite d'une suite numérique

Gabriel Vandevoorde

February 8, 2026

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'on dispose de $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Ce $l \in \mathbb{R}$ est unique, et appelé limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$

On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on dispose de $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_2$

Alors d'après la définition de la convergence d'une suite, en posant $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$ On dispose de $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour $n >= N_1$ on ait $u_n \in [l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon]$ et pour $n >= N_2$ $u_n \in [l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon]$

Sans perte de généralités, on peut supposer que $l_1 < l_2$, on a alors en posant $N = max(N_1, N_2)$ il vient que $\forall n >= N$, $u_n \in [l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon] \cap [l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon]$ Or $[l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon] \cap [l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon] = \emptyset$

Ceci est absurde, achevant donc la démonstration.