

Unfolding the Billiard

Introduzione

È stata sviluppata una simulazione volta a mostrare i risultati ottenuti nel paper *“Trajectory tracking in rectangular billiards by unfolding the billiard table”* dell’Università di Roma Tor Vergata. In particolare, il moto di una pallina all’interno di un biliardo, con pareti elastiche, può essere mappato sulla superficie di un toroide.

Tavolo del Biliardo

Innanzitutto, mediante l’uso di Matplot Lib, una libreria di Python, vengono tracciate delle linee di riferimento che individuano il perimetro di un quadrilatero. Tale oggetto rappresenta il “campo da gioco” della simulazione ossia il *biliardo*. Successivamente, si definiscono le coordinate di un punto detto *spawn point*, il quale giace all’interno del *biliardo* definito precedentemente, che costituisce il punto di partenza della simulazione, di fatto una pallina.

Il moto della pallina è costruito analiticamente: si fissa una direzione arbitraria e si traccia una retta che ne indica la traiettoria. È chiaro che, durante il moto, la pallina urterà le pareti del *biliardo*. Per cui, piuttosto che far rimbalzare la pallina, è stato implementato l’effetto pac-man sulle pareti, in questo modo la pallina sbucherà fuori dalla parte opposta.

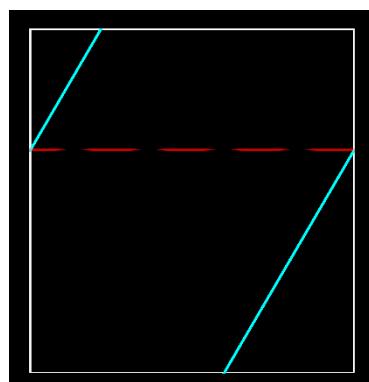


Figura 1: La pallina sbuca fuori dalla parte opposta, senza far variare la sua direzione.

Costruzione delle traiettorie

A partire dalla prima traiettoria vengono tracciate le successive sulla base della seguente logica;

```
if side_hitted == "Right Side":  
    starting_point = [0, new_point[1]]  
elif side_hitted == "Up Side":  
    starting_point = [new_point[0], 0]  
elif side_hitted == "Bottom Side":  
    starting_point = [new_point[0], height_rect]  
elif side_hitted == "Left Side":  
    starting_point = [base_rect, new_point[1]]  
  
intercept = starting_point[1] - slope * starting_point[0]
```

Figura 2: Tale logica implementa l'effetto pac-man: il punto d'intersezione con la parete del biliardo viene traslato dalla parte opposta per disegnare la nuova traiettoria. La pendenza non viene cambiata mentre tramite formula inversa si ricava l'intercetta.

È importante notare che l'angolo d'incidenza traiettoria-parete, rispetto alla normale della parete stessa, non può essere pari a $\Rightarrow \frac{\pi}{2}$ per due motivi. Il primo è che la pallina continuerebbe a rimbalzare da bordo a bordo (orizzontalmente o verticalmente) e le traiettorie sarebbero tutte sovrapposte, quindi un caso banale privo di interesse. Il secondo motivo, decisamente più matematico, è che la pendenza di una retta è pari alla tangente dell'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse:

$$\Rightarrow m = \operatorname{tg}(\alpha)$$

Ricordando il dominio della funzione tangente risulta chiaro che l'angolo di incidenza non può essere mai pari a $\Rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Inoltre, si precisa che: nel caso in cui la pallina urti perfettamente uno degli spigoli del *biliardo*, le traiettorie sarebbero tutte sovrapposte e quindi un ulteriore caso privo d'interesse.

Traiettorie Dense

Innanzitutto si osservi l'animazione riportata di seguito:

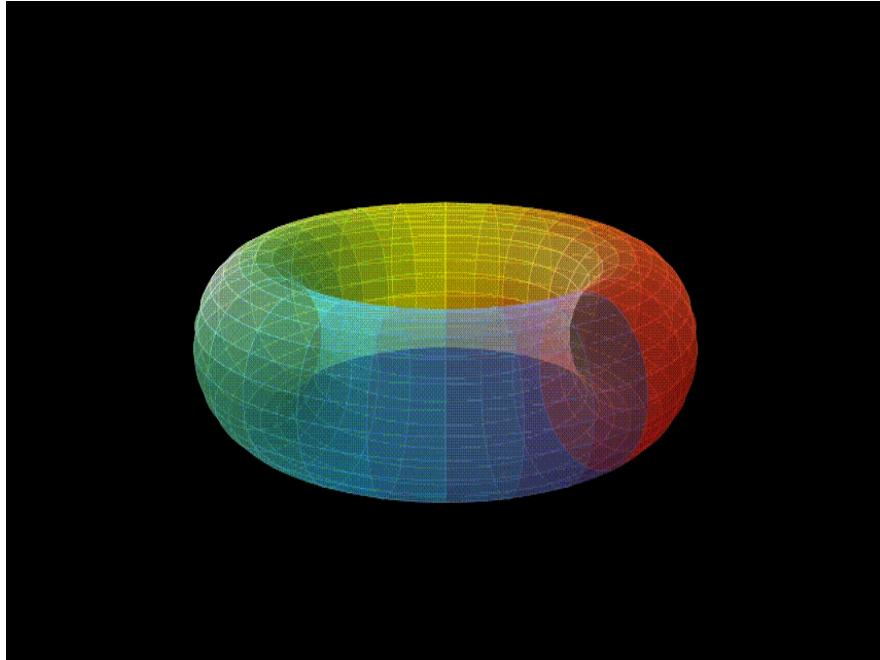


Figura 3: Animazione realizzata in Python che mette in collegamento il caso più semplice unidimensionale del segmento a quello più complesso in 3D del Toroide.

Si nota che a partire da un segmento, unendo le due estremità, si giunge ad una circonferenza. Si passa poi ad un Toroide facendo ruotare la circonferenza attorno ad un asse e preservandone la traccia durante il suo moto (colorata in arcobaleno).

Tale animazione è intesa come strumento esemplificativo per comprendere che le considerazioni relative al caso unidimensionale possono essere estese al caso tridimensionale.

Si consideri dunque la funzione:

$$\Rightarrow T_\theta: [0,1) \rightarrow [0,1) \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto \{x + \theta\}$$

Per semplicità si considera un segmento di lunghezza unitaria e si fissa un punto di partenza $x \in [0,1)$. Vale che:

$$\Rightarrow T_\theta^0(x) = x$$

$$\Rightarrow T_\theta^1(x) = T_\theta^0(x)$$

$$\Rightarrow T_\theta^2(x) = T_\theta^1(T_\theta^0(x))$$

$$\Rightarrow T_\theta^n = (T_\theta \circ T_\theta \circ \dots \circ T_\theta)(x)$$

Lemma 1

Sia $\Rightarrow T_\theta^n(x) = \{x + n\theta\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostra per induzione.

Per $n = 0$, si ha per definizione che:

$$\Rightarrow T_\theta^0(x) = x$$

Al passo n si ha:

$$\Rightarrow T_\theta^n(x) = \{x + n\theta\}$$

Si applica T_θ ambo i membri:

$$\Rightarrow T_\theta \circ T_\theta^n(x) = T_\theta(\{x + n\theta\})$$

$$\Rightarrow T_\theta^{n+1}(x) = \{\{x + n\theta\} + \theta\}$$

$$= \{(x + n\theta) - [x + n\theta] + \theta\}$$

$$= \{x + (n + 1)\theta - [x + n\theta]\}$$

$$= x + (n + 1)\theta - [x + n\theta] - [x + (n + 1)\theta - [x + n\theta]]$$

$$= x + (n + 1)\theta - [x + n\theta] - [x + (n + 1)\theta] + [x + n\theta]$$

$$= \{x + (n + 1)\theta\}$$

□

Si definisce inoltre l'immagine della successione $\{T_\theta^n(x)\}_n$, l'insieme $\Rightarrow \tau(x) = \{T_\theta^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Vale che $\Rightarrow \tau(x) \subseteq [0,1]$.

Teorema 1

La successione $\{T_\theta^n(x)\}_n$ è periodica $\Leftrightarrow \theta \in \mathbb{Q}$.

DIM:

Se la successione è periodica, allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\Rightarrow T_\theta^0(x) = x = T_\theta^N(x) = x + N\theta - [x + N\theta]$$

Da cui:

$$\Rightarrow \theta = \frac{[x + N\theta]}{N}$$

Essendo θ dato dal rapporto di due numeri interi, allora è un numero razionale e si può scrivere più in generale:

$$\Rightarrow \theta = \frac{N}{M} \in \mathbb{Q} \text{ con } N, M \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Per $\theta = 0$, si ha il caso base della definizione ed il teorema è chiaramente verificato. Mentre per dimostrare il teorema globalmente basta considerare anche un solo caso in cui si nota la periodicità. Per esempio, al passo M si avrà:

$$\Rightarrow T_\theta^M(x) = \{x + M\theta\} = \left\{x + M \frac{N}{M}\right\} = \{x + N\} = \{x\} = x = T_\theta^0(x)$$

□

Lemma 2

Si definisce in $\tau(x)$ la distanza tra due punti $x, y \in [0,1]$, la quantità:

$$\Rightarrow d(x, y) = \min\{|x - y|, |x - y + 1|, |x - y - 1|\}$$

E si scrive:

$$\Rightarrow d(x, y) = d(T_\theta^n(x), T_\theta^n(y)) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

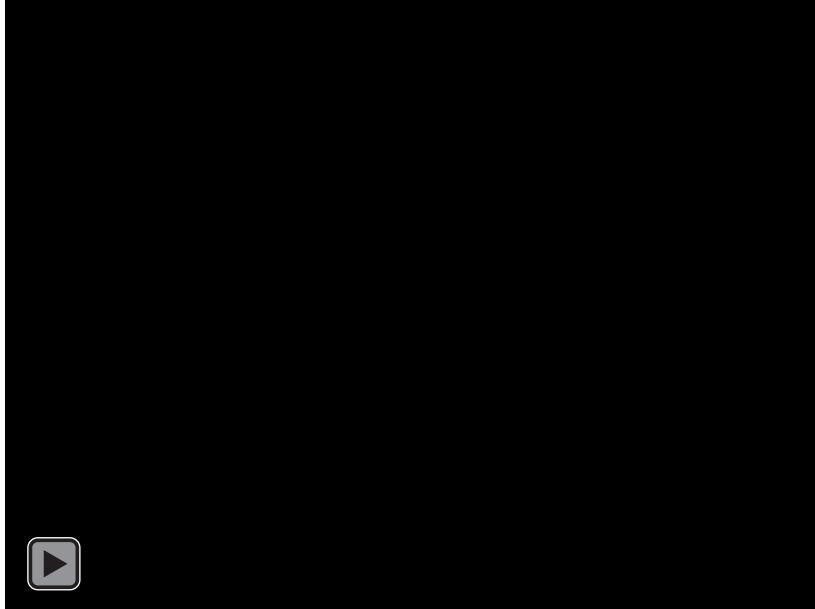


Figura 4: Animazione esemplificativa realizzata in Python.

Quando a partire dal segmento si giunge alla circonferenza, si hanno due modi per collegare due punti: si formano due archi. La distanza è data quindi dall'arco di lunghezza minima. La facoltà di scegliere il percorso minore è contemplata quando si considera l'offset di ± 1 a seconda dei casi.

Teorema 2

La successione $\{T_\theta^n(x)\}_n$ non è periodica $\Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. In altre parole l'immagine $\tau(x)$ è densa in $[0,1]$.

DIM:

- i. Si verifica innanzitutto che elementi di $T_\theta^n(x)$ siano tutti diversi.
Se così non fosse sarebbe:

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_\theta^n(x) &= T_\theta^m(x) \text{ per qualche } n, m \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \{x + n\theta\} &= \{x + m\theta\} \\ \Rightarrow x + n\theta - [x + n\theta] &= x + m\theta - [x + m\theta] \\ \Rightarrow \theta &= \frac{[x + n\theta] - [x + m\theta]}{n - m}\end{aligned}$$

In questo caso θ è dato dal rapporto di due numeri interi per cui $\Rightarrow \theta \in \mathbb{Q}$. Ma si era detto che $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Quindi gli elementi della successione sono tutti diversi $\Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, altrimenti si ricadrebbe nel caso del *Teorema 1*, ossia la successione è periodica.

- ii. Si verifica adesso che l'immagine $\tau(x)$ sia densa in $[0,1]$.
Si divida il segmento unitario, in cui è definita la successione, in N intervallini di lunghezza $\frac{1}{N}$. Se si considera il fatto che la successione parte dal passo $T_\theta^0(x)$ ed arriva al passo $T_\theta^n(x)$, allora saranno generati $N + 1$ numeri. Affinché questi stiano all'interno della precedente suddivisione, deve essere che almeno un intervallino ne contenga almeno due. Siano questi:

$$\Rightarrow T_\theta^{n_0}(x) \text{ e } T_\theta^{m_0}(x) \text{ con } n_0, m_0 \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

Vale quindi che:

$$\Rightarrow |T_\theta^{n_0}(x) - T_\theta^{m_0}(x)| < \frac{1}{N}$$

Tenendo conto del *Lemma 2* si ottiene che:

$$\Rightarrow d(T_\theta^{m_0}(x), T_\theta^{n_0}(x)) < \frac{1}{N}$$

Si applica $T_\theta^{-m_0}$ (con $n_0 > m_0$):

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(T_\theta^{-m_0}(x) \circ T_\theta^{m_0}(x), T_\theta^{-m_0} \circ T_\theta^{n_0}(x)) &< \frac{1}{N} \\ \Rightarrow d(x, T_\theta^{n_0-m_0}(x)) &< \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Si consideri ora la successione:

$$\Rightarrow \{x_j\}_j = \left\{ T_\theta^{j(n_0-m_0)}(x) \right\}$$

Si nota che questa è una sotto-successione di $\{T_{\theta^{(x)}}^n\}_n$.

Si applichi ora il *Lemma 2* tra due punti della sotto-successione:

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(T_\theta^{j(n_0-m_0)}(x), T_\theta^{(j+1)(n_0-m_0)}(x)) \\ = d(T_\theta^{j(n_0-m_0)}(x), T_\theta^{j(n_0-m_0)}(T_\theta^{n_0-m_0}(x))) \end{aligned}$$

Si applica $T_\theta^{-j(n_0-m_0)}$:

$$= d(x, T_\theta^{n_0-m_0}(x)) < \frac{1}{N}$$

Quindi si è ottenuta una sotto-successione che ha un passo più breve di quella di partenza. Poiché è possibile scegliere N grande quanto si vuole, allora anche il passo può essere piccolo quanto si vuole.

$\Rightarrow \tau(x)$ è densa in $[0,1]$.

□

Mappatura sul Toroide

Un Toroide può essere definito mediante le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(\omega, \varphi) = (R + r \cdot \cos \omega) \cos \varphi \\ y(\omega, \varphi) = (R + r \cdot \cos \omega) \sin \varphi \\ z(\omega, \varphi) = r \cdot \sin \omega \end{cases} \quad \text{con } \omega, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Dove ω, φ sono gli angoli di rotazione, r è il raggio del tubo del Toroide, R è la distanza dal centro del tubo al centro di rotazione del Toroide.

Il motivo per il quale si giunge al Toroide è dato dalla seguente animazione esemplificativa:

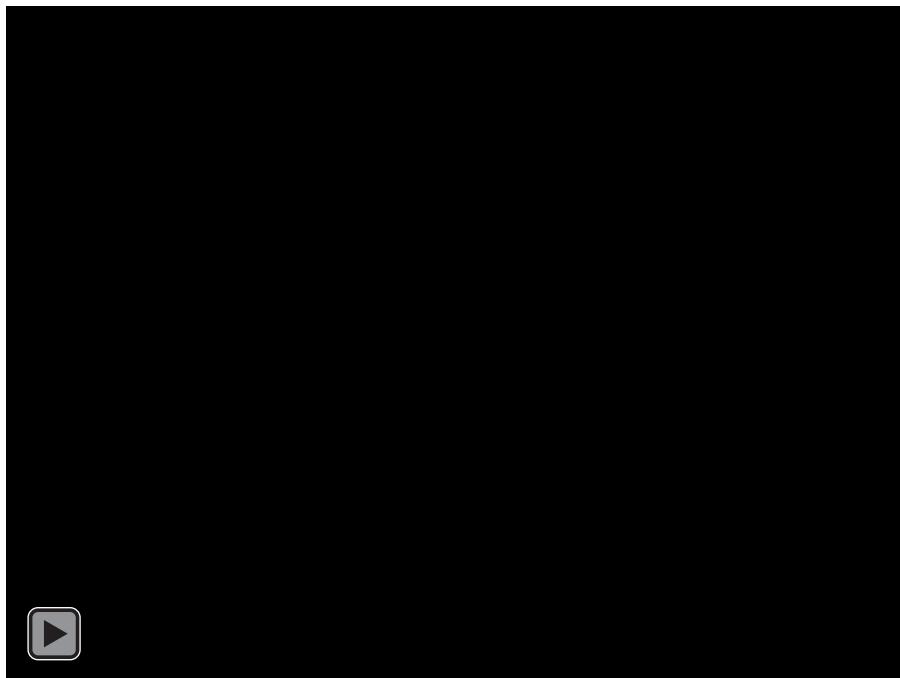


Figura 5: È possibile ottenere un Toroide a partire da un rettangolo se si incollano tra di loro il bordo superiore e inferiore e poi quello destro e sinistro.

Ricordando che la traiettoria della pallina è costruita mediante rette, e che queste vengono disegnate operativamente unendo dei punti tra di loro, è possibile sfruttare tali punti per mappare una traiettoria curvilinea sul Toroide. Passando quindi da un grafico in 2D ad uno tridimensionale mediante le seguenti proporzioni:

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta: 2\pi = x: b \\ \varphi: 2\pi = y: h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi \cdot x}{b} \\ \varphi = \frac{2\pi \cdot y}{h} \end{cases}$$

Dove b e h sono rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo. Infine sfruttando le coordinate parametriche di prima si costruisce il Toroide.

Toroide denso

Si consideri un punto $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ e due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Quindi si definisce la mappa:

$$\Rightarrow \phi: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]^2$$
$$t \mapsto (\{x_0 + \alpha t\}, \{y_0 + \beta t\})$$

Tale mappa rappresenta un moto di natura continua sul Toroide, con velocità:

$$\Rightarrow \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

Per semplicità si scrive:

$$\Rightarrow \phi_1(t) = \{x_0 + \alpha t\}$$
$$\Rightarrow \phi_2(t) = \{y_0 + \beta t\}$$
$$\Rightarrow \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

Teorema 3

$\phi(t)$ è periodica $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

DIM:

Se $\phi(t) = (x_0, y_0)$ allora $\Rightarrow \phi_1(t) = x_0$ e $\Rightarrow \phi_2(t) = y_0$.

Dalla prima si ha che:

$$\Rightarrow \{x_0 + \alpha t\} = x_0$$
$$\Rightarrow x_0 + \alpha t - [x_0 + \alpha t] = x_0$$
$$\Rightarrow t = \frac{[x_0 + \alpha t]}{\alpha}$$

O più in generale:

$$\Rightarrow t = \frac{n}{\alpha} \text{ con } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Dalla seconda si ha che:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \{y_0 + \beta t\} &= y_0 \\ \Rightarrow y_0 + \beta t - [y_0 + \beta t] &= y_0 \\ \Rightarrow t &= \frac{[y_0 + \beta t]}{\beta}\end{aligned}$$

O più in generale:

$$\Rightarrow t = \frac{m}{\beta} \text{ con } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Essendo che la t è la stessa in entrambi i casi, si possono eguagliare le equazioni:

$$\begin{aligned}\Rightarrow t &= \frac{n}{\alpha} = \frac{m}{\beta} \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

Quindi preso $t = \frac{n}{\alpha}$ (ma lo stesso avviene con $t = \frac{m}{\beta}$) risulta che:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \phi(t) &= \left(\{x_0 + n\}, \left\{ y_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right\} \right) \\ &= \left(\{x_0 + n\}, \left\{ y_0 + \frac{m}{n} \right\} \right) = (x_0, y_0) \text{ per ogni } n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Teorema 4

$\phi(t)$ riempie densamente $[0,1]^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DIM:

Sia $(x_1, y_1) \in [0,1]^2$, essendo $\beta > 0$ supponiamo sia $\Rightarrow \phi_2(t_0) = y_1$.

Allora si avrà ad un istante di tempo successivo che:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \phi_2 \left(t_0 + \frac{n}{\beta} \right) &= \{y_0 + \beta t_0 + n\} = \{y_0 + \beta t_0\} \\ &= \phi_2(t_0) = y_1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

In altre parole, ad intervalli di tempo $\frac{1}{\beta}$ la traiettoria della pallina interseca la retta $y = y_1$.

Considerando la coordinata $\phi_1(t_0)$ al tempo $\frac{n}{\beta}$, si ha che:

$$\Rightarrow \phi_1\left(t_0 + \frac{n}{\beta}\right) = \left\{x_0 + \alpha t_0 + n \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right\} = T_{\frac{\alpha}{\beta}}^n(x_0 + \alpha t_0)$$

Dal *Teorema 2* è noto che $\left\{T_{\frac{\alpha}{\beta}}^n(x_0 + \alpha t_0)\right\}_n$ è densa in $[0,1)$ se $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Se ne conclude che:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \phi\left(t_0 + \frac{n}{\alpha}\right) \in [0,1)^2$$

Riempie densamente il segmento (x, y_1) con $x \in [0,1)$.

Ma allora $t \mapsto \phi(t)$ si avvicina quanto si vuole anche a (x_1, y_1) .

Relazione tra Biliardo e Intervallo

Sulla base dei precedenti teoremi è possibile ora mettere in relazione $\frac{\alpha}{\beta}$ del caso tridimensionale, con il passo θ del caso unidimensionale.

Si ricorda che la traiettoria della pallina viene definita impostando una determinata pendenza, e che se non ci fosse alcuna parete si avrebbe una retta. Le limitazioni del calcolatore trattano tale retta come un grande segmento, in particolare tale segmento rappresenta l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Il passo θ del caso unidimensionale può essere calcolato considerando la proiezione dell'ipotenusa sull'asse delle ascisse.

$$\Rightarrow \theta = i \cos \gamma$$

Dove γ è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.

Per quanto riguarda la pendenza, si ricorda che:

$$\Rightarrow \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

Per cui se si considera l'equazione della traiettoria si deduce che:

$$\Rightarrow f'(x) = m = \beta$$

Un'ulteriore conferma di ciò si può ricavare dal *Teorema 4*:

ad intervalli di tempo $\frac{1}{\beta}$ la traiettoria della pallina interseca

la retta $y = y_1$. Dunque si può ricavare β come:

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{\theta}$$

Infine α può essere ricavato in due modi differenti: considerando il reciproco della proiezione dell'ipotenusa sull'asse delle ordinate, oppure considerando che $\frac{\alpha}{\beta} = \theta$.

```
def get_teta(m: float, sum_of_segments: list):
    """Calculate step of onedimensional case"""
    return cos(atan(m)) * fsum(sum_of_segments)

def get_beta(m: float, sum_of_segments: list):
    """Returns velocity on y"""
    return 1 / (get_teta(m=slope, sum_of_segments=sum_of_segments))

def get_alpha(m: float, sum_of_segments: list):
    """Returns velocity on x"""
    return 1 / (cos(np.pi / 2) - atan(m)) * fsum(sum_of_segments)
```

Figura 6: Funzioni utilizzate per calcolare i parametri θ , β e α .

Simulazioni

Di seguito si riporta una simulazione relativa al caso di moto periodico.

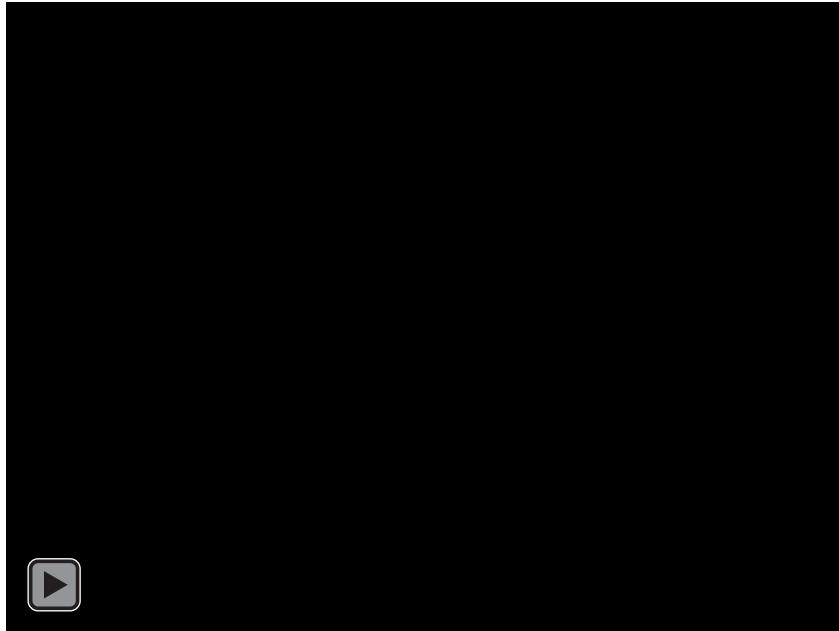


Figura 7: Il moto periodico produce una linea chiusa sul Toroide. Il punto di spawn della pallina è (0.2,0.4), mentre la pendenza è 0.2 .

Si riportano inoltre i valori che caratterizzano tale simulazione.

Intersezione	m	α	β	θ
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0
(0.2, 0.4)	0.2	1	0.2	5.0

Di seguito si riporta una simulazione relativa al caso di moto non periodico.

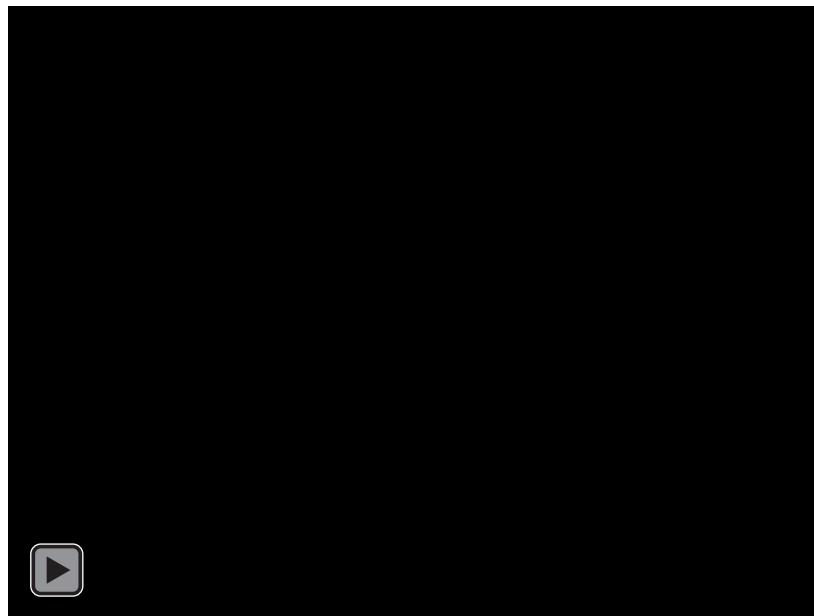


Figura 8: Il moto non periodico riempie densamente il Toroide. Il punto di spawn della pallina è (0.2,0.4), mentre la pendenza è π .

Si riportano inoltre alcuni valori che caratterizzano tale simulazione.

Intersezione	m	α	β	θ
(0.882, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086
(0.563, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086
(0.245, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086
(0.927, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086
(0.608, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086
(0.290, 0.4)	π	1	π	0.31830988618379086

Riferimenti bibliografici

Fonti Utilizzate

Appunti presi durante le lezioni di Analisi I tenute dal Professore Matteo Dalla Riva

Paper scientifico di riferimento:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S240589632032317X>

Codice sorgente: https://github.com/Gabro29/Billiard_Torus