

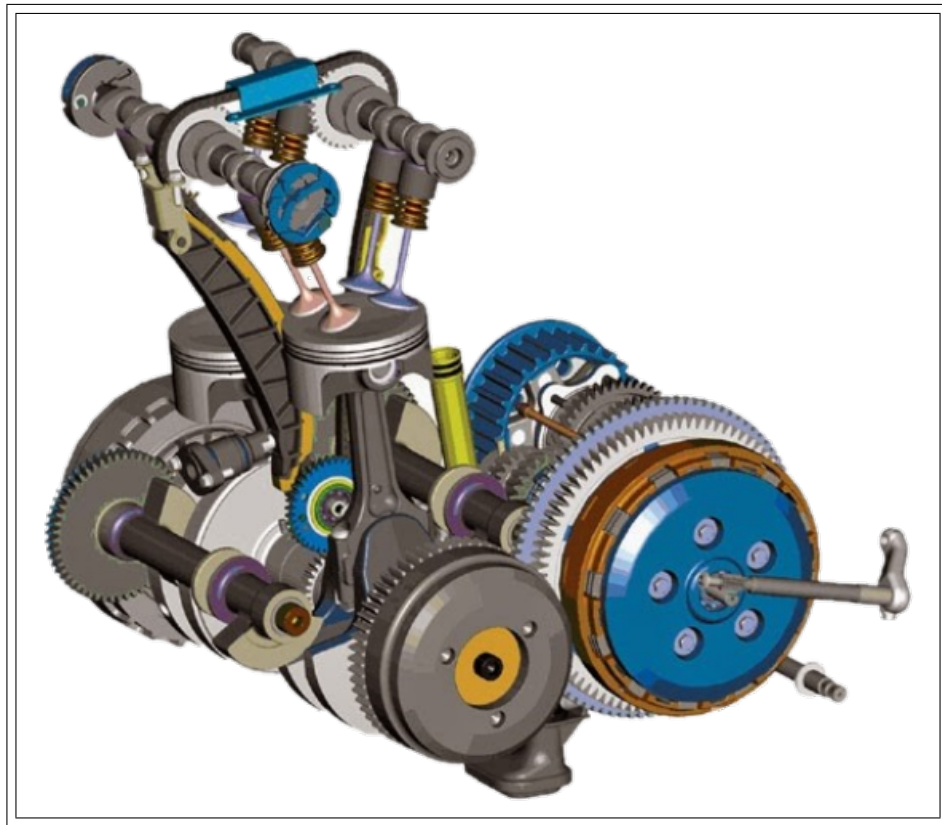
Progetto di Controlli Automatici T, gruppo A  
Progetto Tipologia C - Traccia 1

---

Controllo del motore di un'automobile

Andrea Belano  
Gabriele Ceccolini  
Filippo Loddo  
Simone Merenda

2021/2022



# Indice

<b>0</b>	<b>Introduzione e specifiche</b>	<b>3</b>
0.1	Dinamica del sistema . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Linearizzazione del sistema</b>	<b>4</b>
1.1	Dinamica in forma di stato . . . . .	4
1.2	Ricerca coppia di equilibrio . . . . .	4
1.3	Linearizzazione del sistema non lineare nell'equilibrio . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Funzione di trasferimento</b>	<b>6</b>
2.1	Impostazione equazione di trasferimento . . . . .	6
2.2	Calcolo di $G(s)$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Mappatura delle specifiche</b>	<b>7</b>
3.1	Specifiche da rispettare . . . . .	7
3.2	Errore a regime . . . . .	7
3.3	Sovraelongazione . . . . .	7
3.4	Tempo di assestamento . . . . .	7
3.5	Attenuazione deidisturbi di uscita . . . . .	8
3.6	Attenuazione deidisturbi di misura . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Sintesi del regolatore</b>	<b>8</b>
4.1	Sintesi del regolatore statico . . . . .	9
4.2	Sintesi del regolatore dinamico . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Test del regolatore sul sistema linearizzato</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Test del regolatore sul sistema non lineare</b>	<b>12</b>

## 0 Introduzione e specifiche

Si consideri la modellazione di un motore a scoppio con una massa d'aria nel collettore di aspirazione del pistone pari a  $m(t)$  e una velocità angolare dell'albero di trasmissione pari a  $\omega(t)$ .

### 0.1 Dinamica del sistema

Consideriamo la dinamica del sistema composta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{m} = \gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi)) - \gamma_2\omega m \quad (1a)$$

$$J\dot{\omega} = \delta_1 m - \delta_2\omega - \delta_3\omega^3 \quad (1b)$$

Dove:

- $\theta(t)$  rappresenta l'angolo di accelerazione
- $\gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi))$  modella la caratteristica intrinseca della valvola.
- $J$  rappresenta il momento d'inerzia equivalente del sistema automobile.
- $\delta_1 m$  descrive la coppia trasmessa all'albero motore.
- $\delta_2\omega$ , con modella l'attrito nel motore.
- $\delta_3\omega^2$  descrive la resistenza dell'aria.

Con  $\gamma_1, \gamma_2, \psi, J, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R$ .

Si suppone inoltre di potere misurare la velocità angolare dell'albero di trasmissione  $\omega(t)$ .

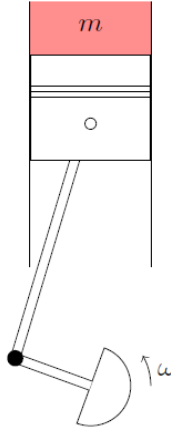


Figura 1: Schema illustrativo della dinamica del motore.

# 1 Linearizzazione del sistema

## 1.1 Dinamica in forma di stato

Per prima cosa si vuole portare il sistema (1) nella forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Definiamo la variabile di stato come

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3)$$

Imponiamo  $\theta$  e  $\omega$  rispettivamente come variabile d'ingresso e di uscita

$$\theta = u \quad (4a)$$

$$\omega = y \quad (4b)$$

La funzione di stato di  $f(x)$  si presenta nella forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(1 - \cos(\beta u(t) - \psi)) - \gamma_2 x_1 x_2 \\ \frac{\delta_1}{J} x_1 - \frac{\delta_2}{J} x_2 - \frac{\delta_3}{J} x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{pmatrix} = f(x, u) \quad (5a)$$

$$y(t) = h(x, u) = x_2(t) \quad (5b)$$

Notare come la funzione di uscita  $y(t)$  dipende solo da  $x_2$  in quanto  $y(t) = \omega(t)$ .

## 1.2 Ricerca coppia di equilibrio

A questo punto partendo dal valore di equilibrio della pulsazione  $\omega_e$  si deve trovare l'intera coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$ .

Per fare questo riscriviamo le equazioni (5) sostituendo  $x_2$  con il corrispettivo equilibrio  $\omega_e$

$$x_{2e} = \omega_e = 10 \quad (6)$$

Similmente le costanti verranno sostituite con i valori indicati nella tabella

$\gamma_1$	0,5
$\gamma_2$	0,1
$\beta$	1,1
$\psi$	0,02
$\delta_1$	$5 \cdot 10^4$
$\delta_2$	0,1
$\delta_3$	0,01
$J$	40
$\omega_e$	10

Otteniamo quindi un sistema di due equazioni in due incognite  $(x_{1e}, u_e)$

$$\begin{cases} 0,5(1 - \cos(1,1u_e - 0,02)) - 0,1x_{1e}10 = 0 \\ \frac{50 \cdot 10^4}{40}x_{1e} - \frac{0,1}{40}10 - \frac{0,01}{40}10^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Risolviendo il sistema otteniamo i valori di equilibrio cercati

$$\begin{cases} x_{1e} = 0,00004 \\ u_e = 0,02968 \end{cases} \quad (8)$$

In particolare l'equazione da cui si ricava la  $u_e$

$$0,5 - 0,5 \cos(1,1u_e - 0,02) - \frac{1}{25000} = 0 \quad (9)$$

ha due radici, ingorando le ripetizioni successive, ha due radici, una in  $u_e = 0,00668$  e l'altra in  $u_e = 0,02968$ . Scegliamo arbitrariamente la radice in  $u_e = 0,02968$  in quanto nella linearizzazione è l'unica che dà un guadagno statico positivo.

$$(x_e, u_e) = ((x_{1e} = 0,00004, x_{2e} = 10), u_e = 0,02968) \quad (10)$$

### 1.3 Linearizzazione del sistema non lineare nell'equilibrio

Avendo trovato la coppia di equilibrio, procediamo nel linearizzare il sistema non lineare (2), così da ottenere un sistema linearizzato del tipo

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad (11a)$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u \quad (11b)$$

Per trovare  $\delta x_e$  si imposta l'equazione alle derivate parziali

$$\delta \dot{x}_e = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=(0,00004,10) \\ u=0,02968}} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=(0,00004,10) \\ u=0,02968}} \delta u(t) \quad (12)$$

Si calcola la Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1x_2 & -0,1x_1 \\ 1250 & -0,1/40 - 0,02/40x_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Ora calcolando la Jacobiana nell'equilibrio ottengo la matrice  $A_e$

$$A_e = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=(0,00004,10) \\ u=0,02968}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1250 & -0,0075 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Similmente si calcola la Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial u}$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \sin(1,1u - 0,02) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Calcolando la Jacobiana nell'equilibrio si ottiene la matrice  $B_e$

$$B_e = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=(0,00004,10) \\ u=0,02968}} = \begin{pmatrix} 0,00696 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Similmente calcolo  $C_e$

$$C_e = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\substack{x=(0,00004,10) \\ u=0,02968}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

La matrice  $D_e$  invece è nulla.

$$D_e = 0 \quad (18)$$

## 2 Funzione di trasferimento

### 2.1 Impostazione equazione di trasferimento

E' necessario calcolare la funzione di trasferimento da  $\delta u$  a  $\delta y$ , ovvero la funzione  $G(s)$  tale che

$$\delta Y(s) = G(s)\delta U(s) \quad (19)$$

Ricordiamo che la funzione di trasferimento  $G(s)$  si può scrivere come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (20)$$

### 2.2 Calcolo di G(s)

Si sostituiscono alle matrici A B C e D le matrici calcolate in precedenza

$$G(s) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} s+1 & 0.00004 \\ -1250 & s+0,0075 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,00696 \\ 0 \end{pmatrix} = \quad (21a)$$

$$= \frac{(0 \quad 1) \operatorname{adj} \begin{pmatrix} s+1 & 0.00004 \\ -1250 & s+0,0075 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,00696 \\ 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} s+1 & 0.00004 \\ -1250 & s+0,0075 \end{pmatrix}} \quad (21b)$$

Si calcola il determinante al denominatore

$$\det \begin{pmatrix} s+1 & 0.00004 \\ -1250 & s+0,0075 \end{pmatrix} = (s+1)(s+0,0075) \quad (21c)$$

E la matrice aggiunta

$$\operatorname{adj} \begin{pmatrix} s+1 & 0.00004 \\ -1250 & s+0,0075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+0,0075 & 1250 \\ 0.00004 & s+1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s+0,0075 & -0.00004 \\ 1250 & s+1 \end{pmatrix} \quad (21d)$$

Possiamo quindi riscrivere  $G(s)$  come

$$G(s) = \frac{(0 \quad 1) \begin{pmatrix} s+0,0075 & 0.00004 \\ 1250 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,00696 \\ 0 \end{pmatrix}}{s^2 + 1,0075s + 0.0125} = \quad (21e)$$

$$= \frac{(1250 \quad s+1) \begin{pmatrix} 0,00696 \\ 0 \end{pmatrix}}{s^2 + 1,0075s + 0.0125} = \quad (21f)$$

$$= \frac{8,695}{s^2 + 1,0075s + 0.0125} = \quad (21g)$$

Moltiplico numeratore e denominatore per 5 e ottengo la forma finale di  $G(s)$

$$\boxed{G(s) = \frac{695}{(1.005s + 1)(80s + 1)}} \quad (21h)$$

## 3 Mappatura delle specifiche

### 3.1 Specifiche da rispettare

Il regolatore deve rispettare le seguenti specifiche:

1. Errore a regime  $|e_\infty| \leq e^* = 0.1$  in risposta al gradino  $w(t) = 15 \cdot 1(t)$
2. Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase  $M_f \geq 35^\circ$ .
3. Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo dell'1% :  $S\% \leq 1\%$ .
4. Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$  deve essere inferiore al valore fissato:  $T_{a,\epsilon} = 0.05s$ .
5. Il disturbo sull'uscita  $d(t)$ , con una banda limitata nel range di pulsazioni  $[0, 0.075]$ , deve essere abbattuto di almeno 45 dB.
6. Il rumore di misura  $n(t)$ , con una banda limitata nel range di pulsazioni  $[5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^6]$ , deve essere abbattuto di almeno 45 dB.

### 3.2 Errore a regime

Per la specifica sull'errore a regime, in risposta ad un gradino  $w(t) = W \cdot 1(t)$  questo è dato da  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{W s^g}{s^g + \mu}$ .

Nel caso del sistema linearizzato questo vale  $\frac{W}{1+\mu} = \frac{15}{1+695} = 0.022 < 0.1$  per cui la specifica è già rispettata.

### 3.3 Sovraelongazione

Per la specifica sulla sovraelongazione, per l'approssimazione a poli dominanti della funzione di sensitività complementare si ha che, essendo  $S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ , per avere una sovraelongazione percentuale inferiore all'1% bisogna fare in modo che  $\xi^* \geq 83$ , da cui  $M_f = 100\xi^* = 83$ , molto maggiore del vincolo dato precedentemente.

### 3.4 Tempo di assestamento

Il tempo di assestamento, sempre per l'approssimazione a poli dominanti, è dato da  $T_{a,5} \approx 3/\xi\omega_n$  per cui si ottiene  $\omega_n \geq 72$

### 3.5 Attenuazione deidisturbi di uscita

La trasformata della compoenente dell'uscita causata dai disturbi di uscita è data da  $Y_d(s) = S(s)D(s)$ . Essendo  $|S(j\omega)|_{dB} \leq -45dB$  e dato che  $|S(j\omega)|_{dB} \approx -|L(j\omega)|_{dB}$  a basse frequenze, segue che  $|L(j\omega)|_{dB} \geq 45dB$  per  $\omega \leq \omega_{dmax}$ .

### 3.6 Attenuazione deidisturbi di misura

La trasformata della compoenente dell'uscita causata dai disturbi di misura è data da  $Y_n(s) = -F(s)N(s)$ .

Essendo  $|F(j\omega)|_{dB} \leq -45dB$  e dato che  $F(s) \approx |L(jw)|$  ad alte frequenze, segue che  $|L(jw)|_{dB} \leq -45dB$  per  $\omega \geq \omega_{nmin}$ .

## 4 Sintesi del regolatore

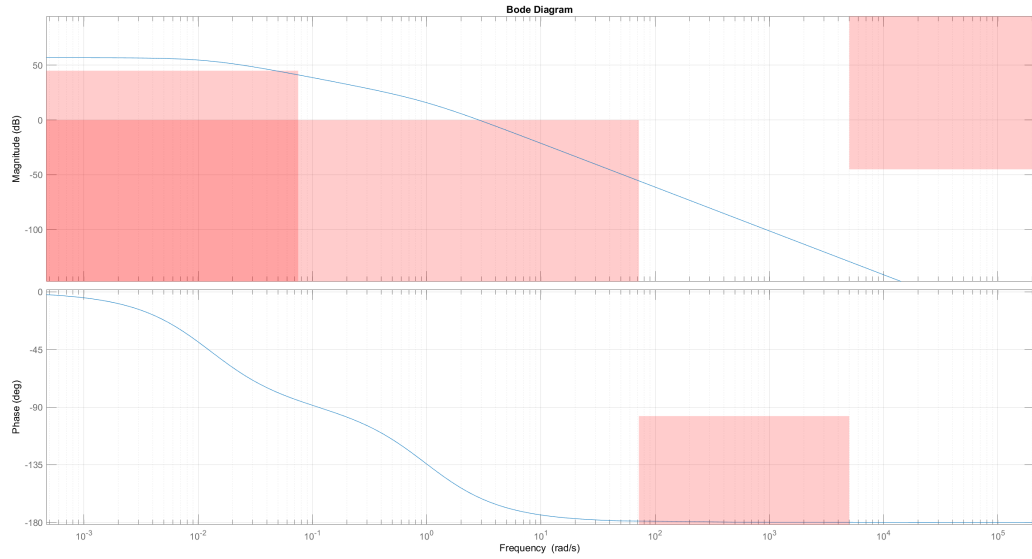


Diagramma di bode del sistema non regolato

Dal diagramma di bode del sistema si nota che la quasi totalità delle specifiche non è rispettata, ad eccezione della specifica sull'attenuazione dei disturbi di misura.



## 4.1 Sintesi del regolatore statico

Si progetta innanzitutto il regolatore statico in modo da rispettare i vincoli su attenuazione dei disturbi di uscita e sull'errore a regime. In questo caso essendo la specifica sull'errore a regime già rispettata basta inserire un regolatore statico senza poli e con guadagno statico  $\mu_s = 1,6$ , sufficiente a far rispettare la specifica sull'attenuazione dei disturbi di uscita.

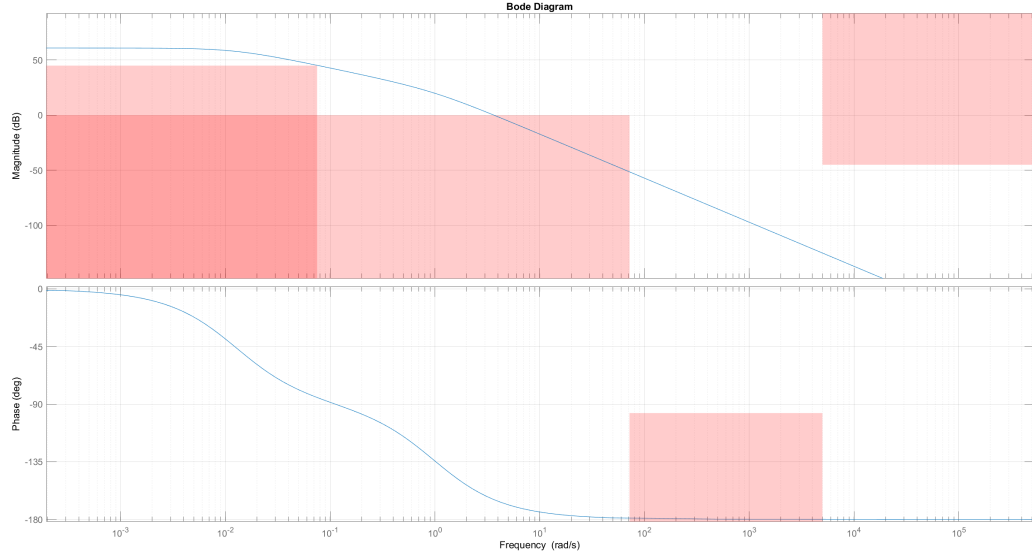


Diagramma di bode con regolatore statico

## 4.2 Sintesi del regolatore dinamico

A questo punto si nota che il sistema è in uno scenario di tipo B in quanto non esistono frequenze di passaggio dell'asse a 0 dB tali che il vincolo sul margine di fase sia rispettato.

È necessario quindi progettare una rete di anticipo, facendo attenzione a non avere un aumento di guadagno tale che il vincolo sull'attenuazione dei disturbi di misura non sia più rispettato. La funzione di trasferimento di una rete di anticipo è la seguente

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad (22)$$

Dove  $\alpha$  e  $\tau$  sono dati da

$$M_R^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \quad (23a)$$

$$\varphi_R^* = M_f^* - 180^\circ - \arg(G_e(j\omega_c^*)) \quad (23b)$$

$$\tau = \frac{M_R^* - \cos \varphi_R^*}{\omega_c^* \sin \varphi_R^*} \quad (23c)$$

$$\alpha \tau = \frac{\cos \varphi_R^* - 1/M_R^*}{\omega_c^* \sin \varphi_R^*} \quad (23d)$$

Facendo attenzione che

$$\cos \varphi_R^* > 1/M_R^* \quad (23e)$$

Scegliendo la pulsazione di passaggio  $\omega_c^* = 120$  si riesce a rispettare il vincolo sul margine di fase rimanendo sotto la soglia data dal vincolo sull'attenuazione dei disturbi di misura.

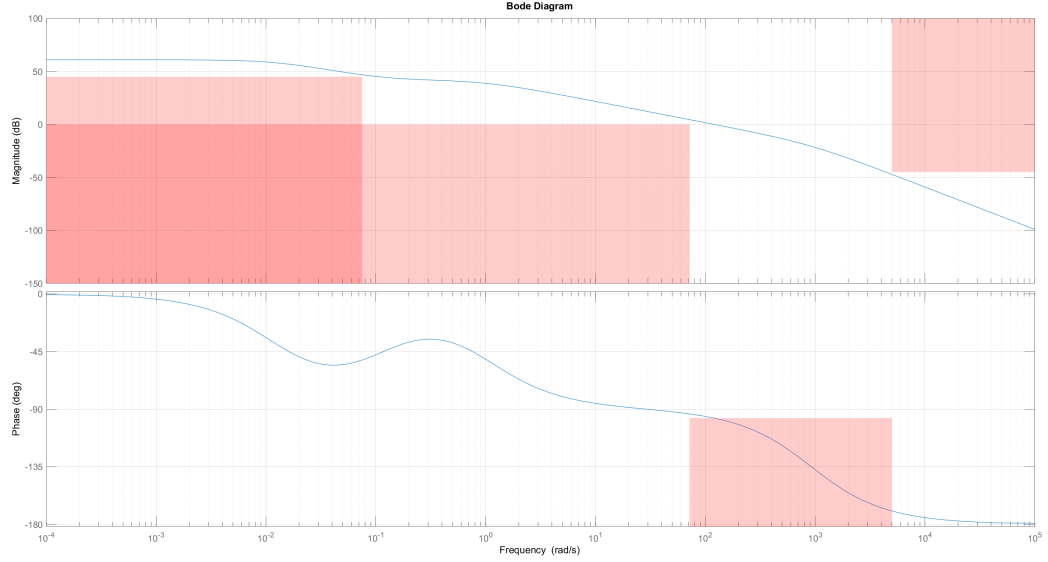
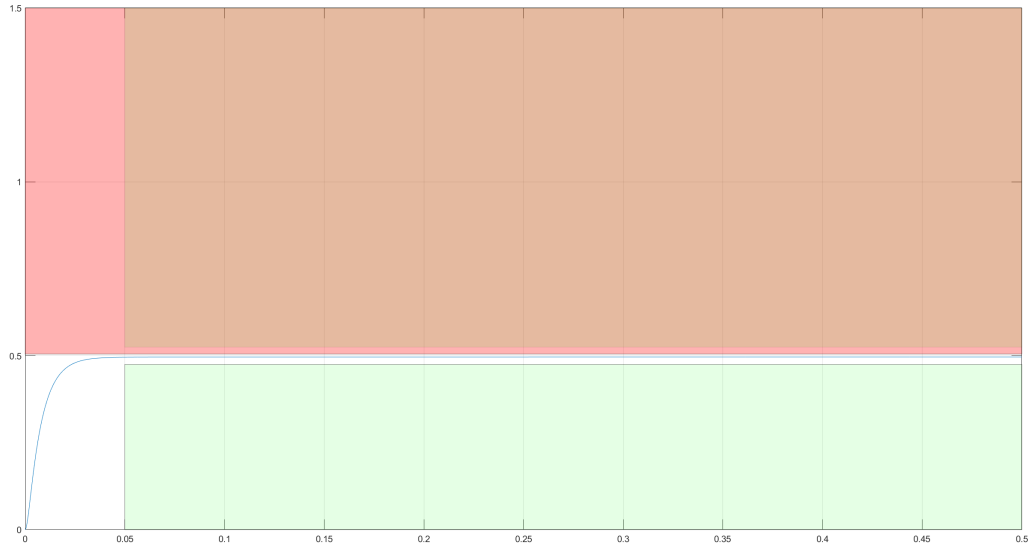


Diagramma di bode finale

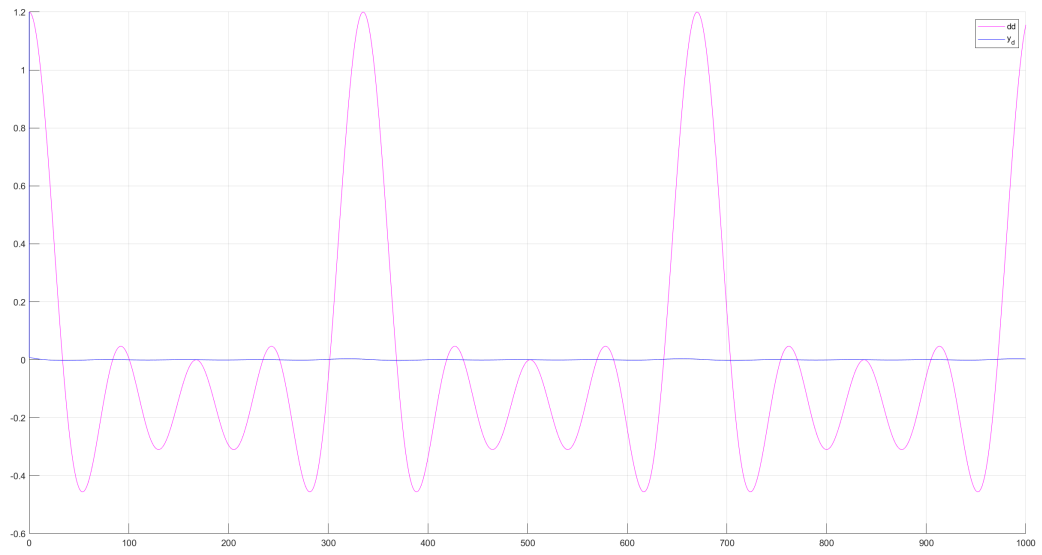
## 5 Test del regolatore sul sistema linearizzato

Andando a testare il sistema in risposta ad un gradino  $w(t) = 0.5 \cdot 1(t)$ , si vede che i vincoli su tempo di assestamento e sovraelongazione percentuale sono effettivamente rispettati.

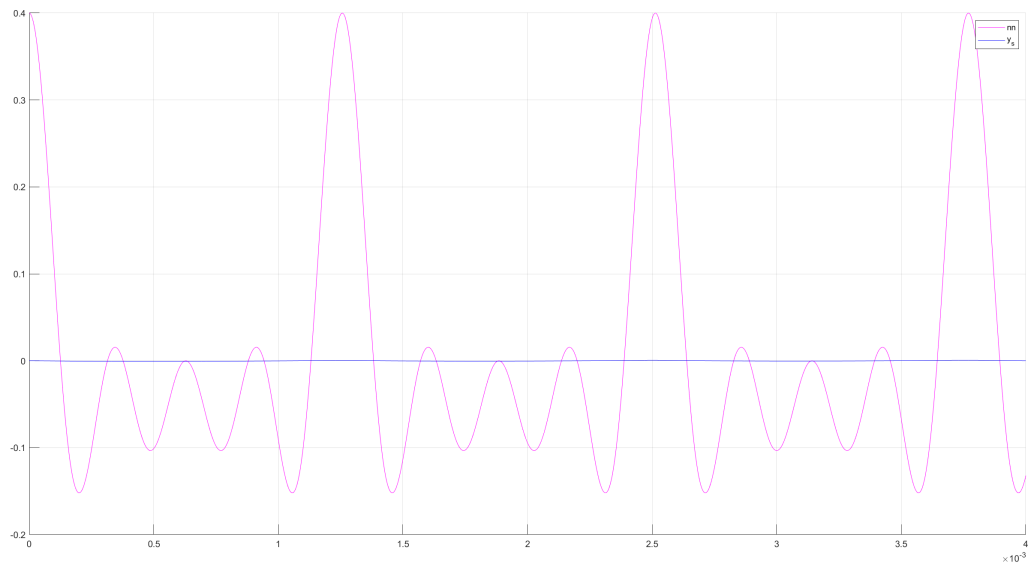


Risposta al gradino

Inoltre, con  $n(t) = \sum_{k=1}^4 0.1 \cdot \sin(5 \cdot 10^3 kt)$  e  $d(t) = \sum_{k=1}^4 0.3 \cdot \sin(0.01875 kt)$ , sia disturbi di uscita che di misura sono sufficientemente attenuati.



Disturbo uscita



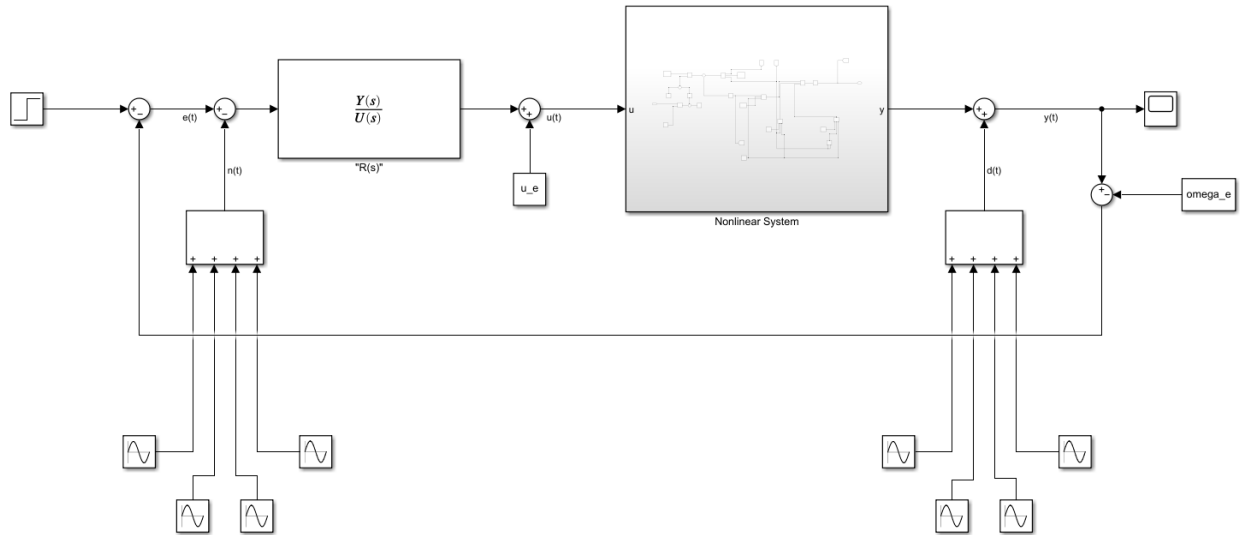
Disturbo misura

## 6 Test del regolatore sul sistema non lineare

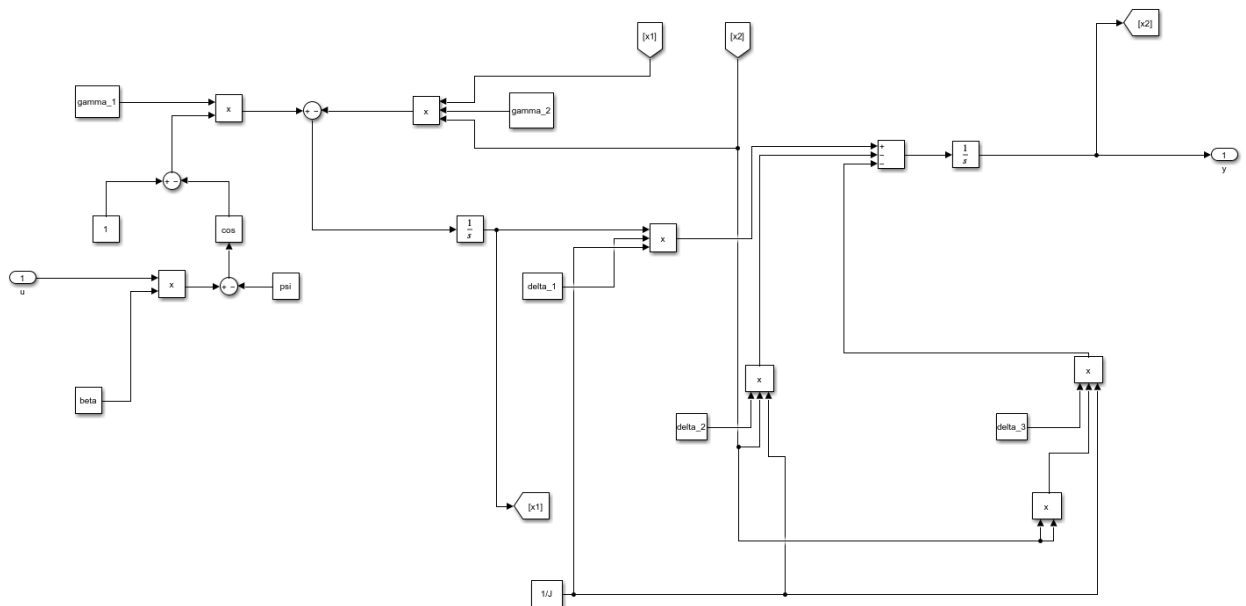
Per testare il regolatore sul sistema non lineare questo è stato ricostruito in Simulink. Essendo l'uscita del regolatore  $\delta u(t)$  ed essendo

$$u(t) = u_e + \delta u(t) \quad (24)$$

Per utilizzare il regolatore sul sistema non lineare è necessario aggiungere alla sua uscita  $u_e$ .

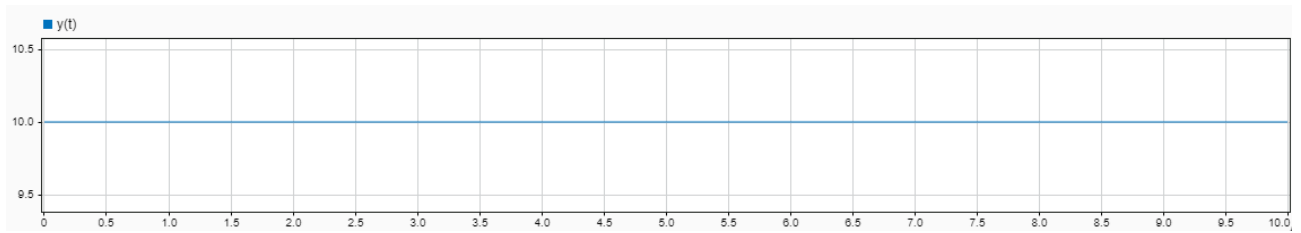


Modello simulink



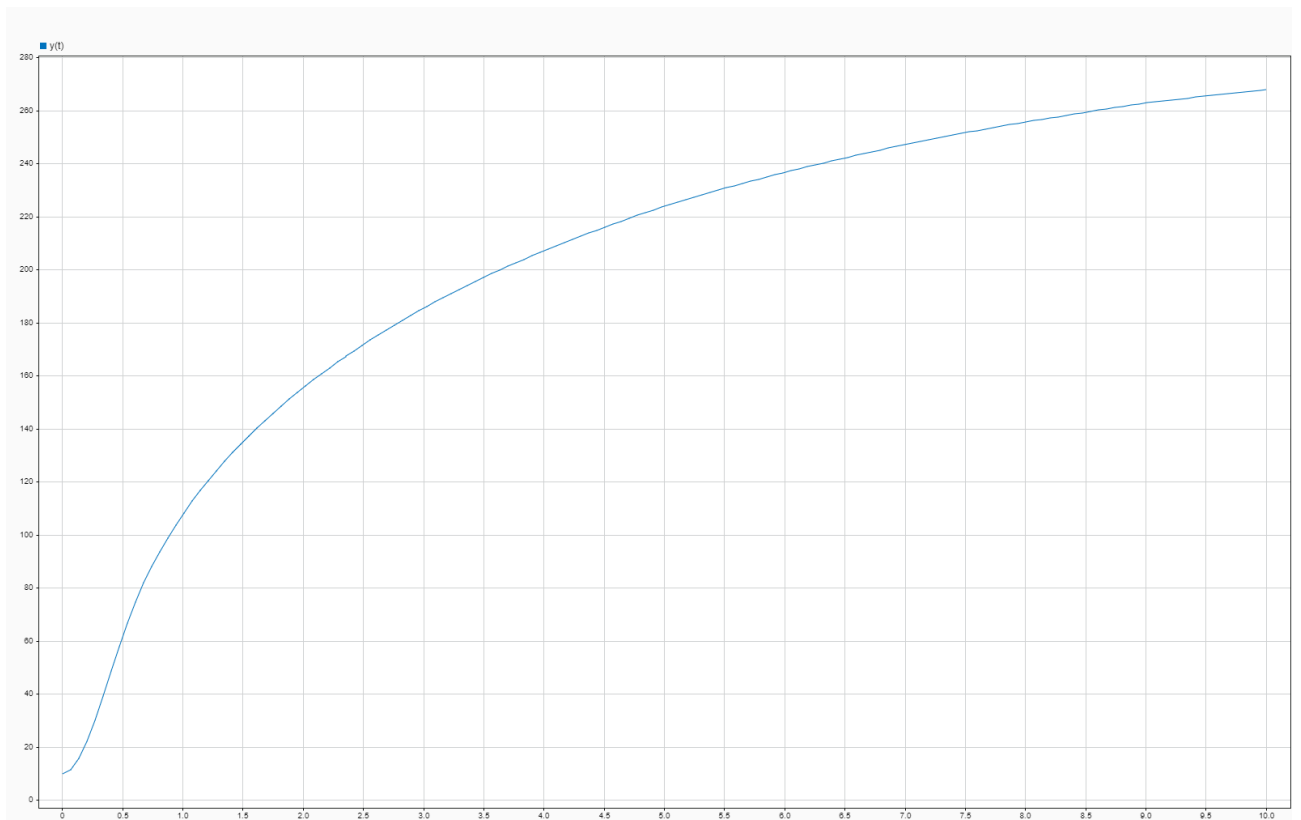
## Ricostruzione del sistema non lineare

Testando il sistema in retroazione senza disturbi di uscita e di misura e con segnale di riferimento nullo questo rimane stabile all'equilibrio.



Uscita del sistema con riferimento nullo e senza disturbi

Tuttavia, se vengono inseriti i disturbi, il sistema si discosta rapidamente dall'equilibrio.



Evoluzione del sistema non lineare in presenza di disturbi

Anche rimuovendo i disturbi e inserendo un riferimento a gradino, si vede che gli unici che il sistema riesce a seguire sono quelli con un'ampiezza  $\leq 6.82 \cdot 10^{-6}$ .



Risposte a gradini di ampiezza crescente del sistema non lineare

Infine, il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile intorno all'equilibrio  $\omega_e = 10$  solo se la differenza  $\Delta x_0$  tra stato iniziale e stato di equilibrio è tale che  $\Delta x_0 \in [-6,82 \cdot 10^{-6}, 7,97 \cdot 10^{-6}]$ .



Evoluzioni del sistema intorno all'equilibrio  $\omega_e$

La così bassa tolleranza a discostamenti dall'equilibrio è probabilmente dovuta ad equilibri non previsti che vanno a catturare l'uscita quando si allontana anche solo di poco dall'equilibrio. Si vede infatti, nel caso della risposta ad un gradino, che l'uscita, quando l'ampiezza è superiore dell'ampiezza massima consentita, questa converge sempre ad una certa  $\omega \approx 305$ .

