Profesora: Cecilé Gauthier 22 de febrero de 2021

Variable Compleja: Variable Compleja Taller No. 2

Autor: Gabriela Cortes, Juan Camilo Rodríguez, David Santiago Moreno

La palabra fractal proviene del latín fractus que significa fragmentado. Los fractales son autosimilares, esto quiere decir que si vemos la foto de un fractal a mayor escala, es igual, no hay un cambio en la imagen si tenemos una mayor o menor escala. Hay muchos objetos cotidianos que gracias a su estructura son considerados fractales. Otra definición para fractal podría ser ***"Modelos infinitos comprimidos de alguna manera en un espacio finito"***. Algunas de las propiedades de los fractales son:

- Dimensión no entera
- Compleja estructura
- Son infinitos
- Son autosimilares

Una forma de hacer fractales es por medio de recursión, ya que con las tecnicas de recursividad aparece la autosimilitud

1.1. Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es el mas estudiado de los conjuntos de fractales. Recibe este nombre gracias a su creador Benoit Mandelbrot quien lo creo en los años setenta.

El conjunto esta definido en el plano complejo. Tomamos un número complejo c y a partir de este c se construye una sucesión recursiva, la cual cumple lo siguiente:

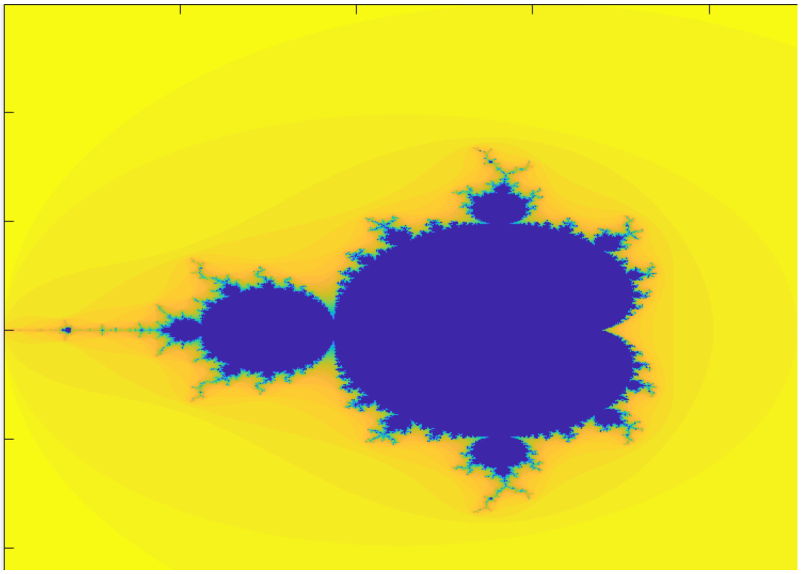
$$z_0 = 0 \in \mathbb{C}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Si esta sucesión queda acotada, se dice que el complejo c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, no se tiene en cuenta para el conjunto.

A menudo se representa el conjunto mediante el algoritmo de tiempo de escape. Aquí se usan colores, si un punto diverge o no tomará diferentes colores y tambien se tiene en cuenta la velocidad con la que diverge, en este caso nuestra representación de la velocidad es la cantidad de iteraciones, que es nuestro "límite". Ponemos este límite y decidir que si los n primeros términos de la sucesión están acotados entonces se considera que el punto pertenece al conjunto. Al aumentar el valor de n se mejora la calidad de la imagen.

Por otra parte, los puntos cuya distancia al orígen es superior a 2, no pertenecen al conjunto. Por lo tanto basta encontrar un solo término de la sucesión que cumpla $|z_n| > 2$ para estar seguro de que c no está en el conjunto.



La imagen fue hecha con un programa de Matlab y tiene un n=3000.

1.2. Conjunto de Julia

Los conjuntos de Julia son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa. Una función homolorfa es una función que se define sobre un subconjunto del plano complejo que son diferenciables en algún punto de de su dominio, y para estos puntos se dice que la función es holomorfa.

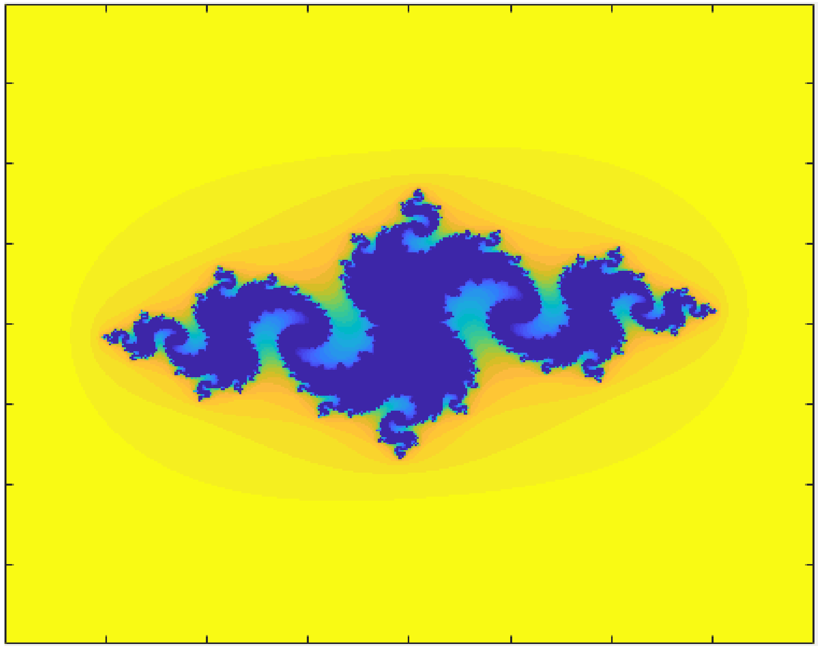
El conjunto de Julia es llamado asi por el matemático Gaston Julia, quien fue uno de los primeros en realizar estudios sobre funciones complejas, que generaban conjuntos extraños practicamente imposible dibujarlos a pulso, debido a que su longitud era infinita.

El conjunto de Julia y el conjunto de Futau son dos conjuntos complementarios definidos por una función. De manera informal en conjunto de la función de Fatou consiste en valores con la propiedad de que todos los valores cercanos se comportan de manera similar bajo iteración repetida de la función, y el conjunto de Julia consiste en valores tales que una perturbación arbitrariamente pequeña puede causar cambios drásticos en la secuencia de la función iterada.Por lo tanto, el comportamiento de la función en el conjunto Fatou es regular", mientras que en el conjunto Julia su comportamiento es çaótico".

El conjunto de Julia de una función f se denota comúnmente como $J(f)$, y el conjunto de Fatou se denota como $F(f)$. Estos conjuntos llevan el nombre de los matemáticos franceses Gaston Julia y Pierre Fatou.
Dado un sistema dinámico complejo, se define el conjunto de Julia asociado a $f, J(f)$ como el conjunto de puntos periodicos repulsivos. Existen varias metodos asociados a cada sistema dinámico, que dependen de la función. Se va contrar los conjuntos de Julia asociados a los sistemas dinámicos complejos con un exponente arbitrario.

$$f(z) = z^n + c$$

con c complejo.



1.3. Demostaciones

MANDELBROT

Vamos a demostrar que para que valores de c, el conjunto de mandelbrot converge.
Tenemos la función $f(z) = z^2 + c$, comenzando por 0, donde c es un número complejo fijo.Pero el conjunto de mandelbrot consiste en los numeros tales que z_n es acotado.Vamos a ver dos casos:

1.3.1. Caso 1:

Supongamos que $|c| \leq 2$,luego $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| > 2|z_n| - 2$,Por lo tanto

$$|z_{n+1} - 2| - 2 > 2(|z_n| - 2)$$

Y en consecuencia $|z_n| - 2$ tiende a infinito.

1.3.2. Caso 2:

Supongamos que $|c| > 2$ además note que $|z_1| = |c^2 + c| \leq |c^2| - |c| > |c|$ (por desigualdad triangular),asi:

$$|z_{n+1}| \geq |z_n^2| - |c| \geq |c||z_n| - |c| \geq |z_n| + (|c| - 1)|z_n| - |c| > |z_n| + (|c| - 1)|c| - |c|$$

Además $(|c| - 1)|c| - |c|$ es una constante positiva,luego podemos escribir que $|z_n| > |c|$ y por lo tanto acotada.

JULIA

Vamos a demostrar que para valores de un complejo c, el conjunto de Julia converge.

Si $R \in \mathbb{C}(z)$ es una función racional, luego para el conjunto de Fatou $F(R)$, que consiste de todos los puntos $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que z_0 tiene un vecino $\mathbf{U}$ en $\mathbb{C}$, luego la secuencia $(R^n(z))$ forma una familia normal en $\mathbf{U}$, por lo tanto toda subsecuencia contiene una subsecuencia mas lejana cuya restricción a $\mathbf{U}$ converge uniformemente a una función holomorfica. $U \to \hat{\mathbb{C}}$.Y así el complemento es llamado el conjunto de Julia:

$$J(R) = \hat{\mathbb{C}} - F(R)$$

Sabemos que para la funcion $R(z) = z^k$ el conjunto de Fatou $F(R)$ contiene

$$\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$$

La prueba de esto es basada en un ejercicio de calculo estandar: Si a es un numero complejo tal que $|a| < 1$ luego

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

Mientas que si $|a| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

La convergencia es uniforme en los compactos en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y en $D^* = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$ respectivamente.

Por lo tanto queda por mostrar que $F(R)$ es disjunto por el circulo unitario $S = z : |z| = 1$. Esto implicaria que $J(R) = S$.

Aqui hay una prueba de los conjuntos disjuntos.

Considere un disco abierto $U = B(a, r)$ con radio $r > 0$ centrado en $a \in S,\ |a| = 1$.

Luego por cada

$$z \in U_0 = B(a, r) \cap D \neq \emptyset$$

Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} R(z)^n = 0$$

Mientras que para cada

$$z \in U_1 = B(a, r) \cap D^* \neq \emptyset$$

Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} R(z)^n = \infty$$

Lo mismo es valido para cualquier subsecuencia $R^n(z)$.Por lo tanto tal subsecuencia no puede converger en **U** (Incluso puntualmente) a una funcion continua $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$

$$f(a) = 0 = \lim_{j\to\infty} f(z_j), z_j \in U_0, z_j \to a,$$

$$f(a) = \infty = \lim_{j\to\infty} f(z_j), z_j \in U_1, z_j \to a,$$

Por lo tanto, $S \cap F(R) = \emptyset$, por eso, $J(R) = S$

Referencias

[1] https://webs.um.es/jmz/DiseGrafSimula/alumnos˙08˙09/german˙ros/index.files/fractal1˙Intro

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto˙de˙Mandelbrot.

[3] http://mrob.com/pub/muency/escaperadius.html

[4] http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1998/3/Valdes˙Vasquez˙Patricio.pdf

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Julia˙setGeneralizations

[] https://math.stackexchange.com/questions/2447013/julia-sets-of-zk