# Appunti di Elaborazione dei Segnali

By *@Thisisfava*

2024/2025

# Contents

# 1 Numeri Complessi

**Definizione.** Il campo complesso $\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di un polinomio di grado $n$ a coefficienti reali. Un numero $z \in \mathbb{C}$ è definito dall'*unità immaginaria*:

$$i = j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

## 1.1 Rappresentazioni

Un complesso $z$, che può essere scritto in diverse forme, viene rappresentato sul *Piano di Gauss*, un piano definito dall'asse orizzontale $\mathbb{R}e$ e dall'asse verticale $\mathbb{I}m$

### 1.1.1 Coordinate Rettangolari

Un complesso può essere rappresentato come un punto $(x, y)$ sul piano di Gauss, con $x$ e $y \in \mathbb{R}$ . La forma che lo rappresenta è la forma *algebrica*:

$$z = x + jy \tag{2}$$

Con $x$ la parte reale (ossia $\mathbb{R}e(z) = x$) e $y$ la parte immaginaria (ossia $\mathbb{I}m(z) = y$)

### 1.1.2 Coordinate Polari

Un complesso $z$ può essere anche rappresentato in *forma polare* sul piano in funzione della lunghezza $\rho$ del vettore che parte dall'origine (ossia il *modulo*) e dell'angolo spazzato $\theta$ (ossia la *fase*).

$$z = \langle \rho, \theta \rangle = \rho \left( \cos(\theta) + j \sin(\theta) \right) \tag{3}$$

In realtà, un'altra forma che permette di esprimere un complessi in coordinate polari è la forma *esponenziale*

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho \left( \cos(\theta) + j \sin(\theta) \right) \tag{4}$$

## 1.2 Conversioni

### 1.2.1 Polare a Rettangolare

Dato $z = \langle \rho, \theta \rangle$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

### 1.2.2 Rettangolare a Polare

Dato $z = x + jy$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{atan2}\left( \frac{y}{x} \right) \end{cases} \tag{6}$$

Dove

$$\text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

## 1.3 Complesso Coniugato

### 1.3.1 Definizione

Dato un $z \in \mathbb{C}$ t.c $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$ allora il suo coniugato sarà

$$\overline{z} = x - jy \tag{8}$$

$$\overline{z} = \rho e^{-j\theta} \tag{9}$$

In parole povere, il coniugato di un complesso è il complesso che ha stessa parte reale ma opposta parte immaginaria

### 1.3.2 Proprietà

- $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}e(z)$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$

## 1.4 Operazioni nel campo dei complessi

### 1.4.1 Somme tra numeri complessi

**Forma algebrica.** Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ la somma sarà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{10}$$

**Forma Esponenziale.** La somma è banale

### 1.4.2 Scalatura

**Forma algebrica.** Dati $z = x + jy$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = ax + jay \tag{11}$$

**Forma Esponenziale.** Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = a\rho e^{j\theta} \tag{12}$$

### 1.4.3 Prodotto tra complessi

**Forma algebrica.** Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{13}$$

**Forma Esponenziale.** Dati $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{14}$$

### 1.4.4 Inverso di un complesso

**Forma algebrica.** Dato $z = x + jy$ l'inverso sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\rho^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \tag{15}$$

Spiegazione della formula: un certo $w = z^{-1}$ con $z \in \mathbb{C}$ se il loro prodotto genera un numero con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla. Sappiamo che $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z| = \rho^2$. Quindi basta dividere il coniugato di z con il modulo quadro($\rho^2$) e si ha l'inverso.

**Forma Esponenziale.** Dati $z = \rho e^{j\theta}$ il prodotto sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} \tag{16}$$

### 1.4.5 Divisione tra numeri complessi

Dati $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$ possiamo riscrivere la divisione tra i 2 numeri come prodotto tra il primo e l'inverso del secondo, e ciò vale per entrambe le forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \tag{17}$$

### 1.4.6 Elevamento a potenza

**Forma algebrica.** L'elevamento ha potenza della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{Z}$ l'elevamento a potenza sarà $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n volte}}$ ossia:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} \tag{18}$$

### 1.4.7 Estrazione di una radice n-esima

Dato un $z \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathbb{C}$, $y$ è radice n-esima di z se e solo se $y^n = z$. La grande differenza con in numeri reali è che, nel campo complesso, esistono esattamente $n$ y distinte di radici che soddisfano l'equazione $y^n - z = 0$ per il teorema fondamentale dell'algebra.

**Forma algebrica.** La radice n-esima della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$ la radice n-esima sarà:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta + 2\pi i}{n}\right)} \qquad \text{Con i = 0,1,..., n-1}$$

### 1.4.8 Funzione complessa di variabile reale

Definita come

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Oppure come $z = f(x)$ con $z \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$, è una funzione che mappa ad ogni reale un immaginario.

**Rappresentazione.** Graficamente una funzione complessa di variabile reale può essere rappresentata in un grafico a 3 dimensioni con un asse per la x (variabile indipendente) e gli altri 2 assi sono $\mathbb{I}m[z]$ e $\mathbb{R}e[z]$. Dal momento che sono difficili da rappresentare, si ricorre ad una semplificazione: il grafico tridimensionale si sdoppia in un grafico che mappa ad ogni $x$ la parte Reale di z ed un altro grafico che mappa ad ogni x la parte Immaginaria di z. Se si lavora in coordinate polari, è possibile invece rappresentare il grafico che mappa ad ogni x il modulo del complesso corrispondente e un altro grafico che mappa ad ogni x la fase del complesso corrispondente. La particolarità di questi ultimi 2 grafici è che il primo grafico è sempre rappresentato sopra l'asse x (il modulo non può mai essere negativo) e il secondo grafico è sempre rappresentato tra $-\pi$ e $\pi$ dal momento che poi la fase si ripete.

# 2 Segnali

In termini totalmente astratti, un segnale è un veicolo di informazione. L'informazione, a sua volta, possiamo definirla come tutto ciò che aggiunge conoscenza. Calato nel contesto del corso, un segnale può essere visto come una funzione

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f : A \longrightarrow B \end{cases}$$

Dove $x \in A$ è la variabile indipendente, $y \in B$ la variabile dipendente con $A$ e $B$ insiemi qualsiasi.

## 2.1 Classificazione dei segnali

### 2.1.1 Rispetto alla dimensionalità

Un segnale può essere classificato rispetto alla dimensionalità del dominio o del codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del dominio può essere:

- **Monodimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}$
- **n-Dimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

**Codominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del codominio può essere:

- **Scalare** se $B \subseteq \mathbb{R}$
- **Vettoriale** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

### 2.1.2 Rispetto alla Continuità

Un segnale può essere classificato rispetto alla continuità di dominio o codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla continuità del dominio può essere:

- **Continuo** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se $A$ coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Discreto** se $A$ coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

**Codominio.** Un segnale rispetto alla continuità del codominio può essere:

- **Ad Ampiezze Continue** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se $B$ coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Ad Ampiezze Discrete** se $B$ coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

Nel caso in cui la variabile dipendente sia il tempo, i segnali vengono detti **tempo-contuinui** o **tempo-discreti**.

**Esempi.** Il *suono* può essere visto come la pressione dell'aria in funzione del tempo, ossia come:

$$p = f(t)$$

Dove $p \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Dunque il suono è un segnale **monodimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine in bianco e nero* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano la *Luminanza*:

$$L = f(x, y)$$

Dove $L \in \mathbb{R}$ e $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a scala di grigi è un segnale **bidimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine a colori* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano una tripletta di valori (interpretabili in base allo spazio colore scelto). Consideriamo lo spazio RGB:

$$\langle R, G, B \rangle = f(x, y)$$

Dove $\langle R, G, B \rangle \in \mathbb{R}^3$ e $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a colori è un segnale **bidimensionale** e **vettoriale**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

## 2.2 Tipi di segnali

In base alle caratteristiche di un segnale, possiamo definire alcuni tipi di segnali:

| Segnale | Dominio Continuo | Dominio Discreto |
|---|---|---|
| Codominio Continuo | Analogico | Campionato |
| Codominio Discreto | Quantizzato | Digitale |

# 3 Segnali Continui

## 3.1 Operazioni Sui Segnali Continui

### 3.1.1 Traslazione

Dato un segnale $y = f(x)$ possiamo definire il segnale traslato $y'$ come

- $y' = f(x - x_0)$ ossia una *traslazione in avanti* di $x_0$
- $y' = f(x + x_0)$ ossia una *traslazione all'indietro* di $x_0$

Quando la variabile indipendente $x$ è il tempo, possiamo dire che il segnale è, rispettivamente, in *in ritardo* o *in anticipo*

### 3.1.2 Scalatura della variabile dipendente

Dato $y = f(x)$ e $x \in \mathbb{R}$ allora possiamo definire $y'$ il segnale scalato come

$$y' = f(ax)$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ è detto *fattore di scala*. In base ai valori assunti da $a$, il segnale può:

- **Espandersi** se $|a| < 1$
- **Comprimersi** se $|a| > 1$
- **Specchiarsi** rispetto all'asse $y$ se $a < 0$

## 3.2 Segnali Notevoli

Riporto di seguito alcune funzioni(segnali) che useremo spesso nel corso:

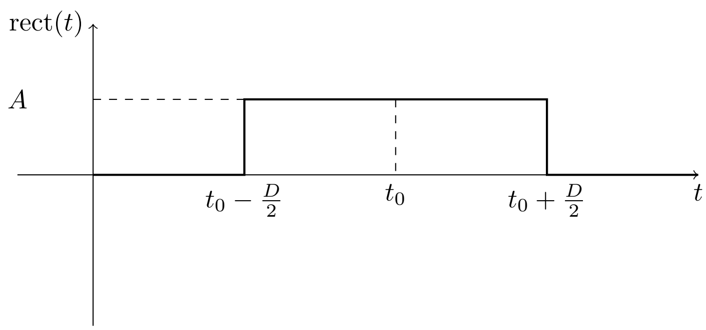
### 3.2.1 Funzione Rettangolo

Detta anche *Impulso Rettangolare*, è una funzione che ha un picco tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ e poi è sempre nulla. Possiamo definirla così:

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{19}$$

**Formula Generalizzata.** Data $A$ l'ampiezza del segnale, $t_0$ il centro del rettangolo e $D$ la durata dell'impulso, possiamo generalizzare la definizione precedente

$$y = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{D}\right) \tag{20}$$



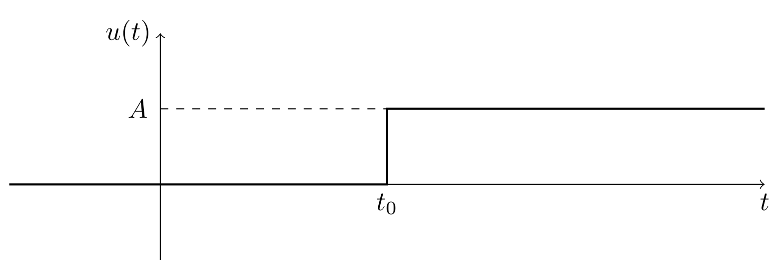

### 3.2.2 Gradino Unitario

Tale segnale è definibile come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \tag{21}$$

**Formula Generalizzata.** Data $A$ l'ampiezza del segnale e $t_0$ il tempo di ritardo

$$y = A \cdot u(t - t_0) \tag{22}$$



### 3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale)

Questo segnale si ottiene, a partire dall'impulso rettangolare, restringendo sempre di più $T$ e aumentando sempre di più l'ampiezza di un termine $\frac{1}{T}$ (questo per mantenere l'area sottesa, o energia, invariata). Possiamo determinare la formula analitica di questa operazione:

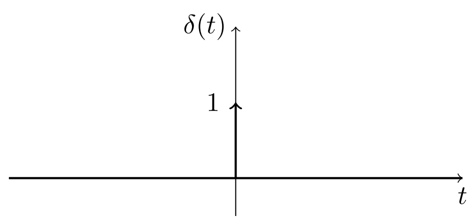
$$y(t) = \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Facendo tendere a 0 il termine $T$ si ottiene proprio la *delta di Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{23}$$

Per com'è definita, la delta di Dirac non è una vera è propria funzione, è una funzione speciale, una distribuzione, che vale sempre 0 tranne quando $t = 0$; in quel caso la funzione va ad infinito, perchè sarebbe l'impulso (ideale) applicato in un istante infinitesimo. Dal momento che in questa funzione l'ampiezza è infinita, ha senso considerare, invece, l'area sottesa, ossia l'energia dell'impulso.

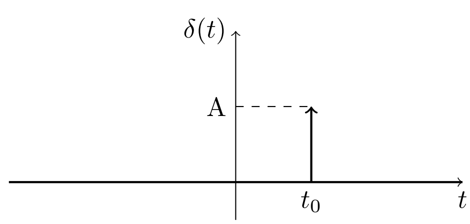
**Rappresentazione Tradizionale.** Tradizionalmente la funzione delta viene rappresentata in 0 con una freccia verso l'alto con la punta a 1. In ogni altro punto, è 0.




**Formula Generalizzata.** Data $A$ l'area (e non l'ampiezza, che sarebbe infinita) e $t_0$ il ritardo, la formula sarà:

$$y(t) = A \cdot \delta\left(t - t_0\right)$$

E il grafico sarà:



### 3.2.4 Proprietà della Delta

- **Area Unitaria**: l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della delta è esattamente 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{24}$$

- **Proprietà del Campionamento**: per enunciare la proprietà è necessario introdurre il concetto di *prodotto scalare tra funzioni*:
  Si dice prodotto scalare tra le funzioni $f$ e $g$ come

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \tag{25}$$

  Detto ciò, la proprietà della campionatura afferma che, per ogni funzione $f(t)$:

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \tag{26}$$

  Da ciò possiamo capire il significato del termine "campionatura": quando noi effettuiamo il prodotto scalare con il delta, è come se scattassimo una istantanea alla funzione $f$ in 0. Questa proprietà ci servira per discretizzare una funzione. Possiamo dunque generalizzare questa proprietà per un qualunque istante $t_0$:

$$\langle f(t), \delta(t - t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \tag{27}$$

- **Proprietà del Prodotto**: il prodotto tra una qualsiasi funzione $f(t)$ e il delta di dirac è sempre 0 laddove $t \neq t_0$:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{28}$$

- **Parità**:

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{29}$$

- **Integrazione**: la funzione integrale della delta di dirac è in realtà il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = u(t) \tag{30}$$

### 3.2.5 Segnali Periodici

Un segnale $s(t)$ si dice *periodico* se e solo se il suo valore si ripete ad ogni periodo, ossia:

$$s(t) = s(t + kT) \tag{31}$$

Dove $k \in \mathbb{Z}$ è il numero di volte e $T \in \mathbb{R}$ è il periodo.
Una cosa da tenere a mente è che, in segnali, solitamente, si normalizza in modo tale da mettere in evidenza direttamente nella formula la frequenza (che può essere molto utile).
Es:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Da questa formula sappiamo subito che il periodo di questo segnale è:

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} f_0} = \frac{1}{f_0}$$

E dunque la sua frequenza è proprio $f_0$

#### 3.2.6 Fasore

Questa funzione è una funzione complessa di variabile reale, con la seguente formula analitica:

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \tag{32}$$

## 3.3 Proprietà dei Segnali

### 3.3.1 Durata

La durata di un segnale è, considerando un segnale nel tempo, la differenza tra il primo istante in cui il segnale non è nullo e l'ultimo istante.

### 3.3.2 Area

Si dice *Area di un Segnale* $s(t)$ l'area sottesa dallo stesso segnale, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \tag{33}$$

### 3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale)

Il valor medio di un segnale $s(t)$ non è altro che quel valore $\tilde{s}$ tale che una funzione costante $s'(t) = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$, ossia:

$$\tilde{s} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)dt \tag{34}$$

### 3.3.4 Energia

Sebbene non stiamo parlando propriamente di lavoro e concetti fisici relativi, dobbiamo dire che un segnale è sempre associato ad una certa energia che il segnale stesso trasporta. Dunque *l'energia di un segnale* ($s(t)$) è:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \tag{35}$$

### 3.3.5 Potenza Istantanea

Per il discorso precedente, possiamo anche definire la Potenza Istantanea di un segnale (cioè la potenza in un istante del Segnale) come

$$P[s(t)] = \begin{cases} s(t_0)\overline{s(t_0)} & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{C} \\ s(t_0)^2 & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{36}$$

### 3.3.6 Potenza Media

La potenza media possiamo, invece, vederla come il valore medio dell'energia, ossia:

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \tag{37}$$

### 3.3.7 Segnale Energia e Potenza

Innanzitutto possiamo notare come sia Potenza Media che Energia siano non negativi per costruzione; inoltre tra Potenza Media e Energia di un segnale è possibile vedere una correlazione: laddove l'energia del segnale è finita, allora la potenza è necessariamente nulla; laddove invece la potenza media è maggiore di 0, l'energia è infinita.

In base a questo concetto è possibile definire:

- **Segnale Energia** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < E_s < \infty$ e allora $P_s = 0$
- **Segnale Potenza** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < P_s < \infty$ e allora $E_s \to +\infty$

# 4 Segnali Discreti

A differenza dei segnali continui, i segnali discreti sono funzioni con Dominio discreto, solitamente rappresentate nella seguente maniera:

$$y = f(n),\ n \in Z$$

Enunciamo ora tutte le proprietà, in maniera speculare, che abbiamo già descritto per i segnali continui:

## 4.1 Operazione sui Segnali Discreti

### 4.1.1 Traslazione

Dato un segnale $y = f(n)$ definiamo $y' = f(n - n_0)$ traslazione in avanti di $n_0$; definiamo invece $y'' = f(n + n_0)$ traslazione indietro di $n_0$.

### 4.1.2 Decimazione/UpSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale decimato è:

$$y = f(an) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{38}$$

Questa operazione è detta *decimazione* dal momento che è come se prelevassi selettivamente i valori ogni $a$ campioni del segnale di partenza

### 4.1.3 Interpolazione/DownSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale interpolato è:

$$y = f\left(\frac{n}{a}\right) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{39}$$

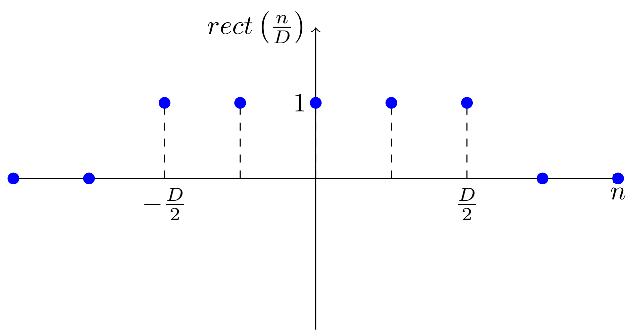
In parole povere, questa operazione non fa altro che distanziare ogni campione di $a$ intervalli.

## 4.2 Segnali Notevoli

### 4.2.1 Rettangolo Discreto

Viene definito come:

$$rect\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\frac{n}{D}| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{40}$$




### 4.2.2 Gradino Unitario

Anche in questo caso, la formulazione è identica al Gradino Unitario continuo, ossia:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \tag{41}$$

### 4.2.3 Impulso Discreto

Questo segnale è il parente "discreto" della *Delta di Dirac* (23) ma è più semplice da introdurre, dal momento che la sua formula è:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \tag{42}$$

Possiamo dunque notare che, a differenza della delta, l'impulso discreto è una vera e propria funzione.

### 4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto

- **Area Unitaria**: è abbastanza ovvia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1 \tag{43}$$

- **Prodotto Scalare con** $\delta(n)$

$$\langle f, \delta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n) = f(0) \tag{44}$$

- **Prodotto con** $\delta(n)$:

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0) \tag{45}$$

- **Integrazione Discreta**:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} = u(n) \tag{46}$$

#### 4.2.5 Segnali Periodici Discreti

Dato $s(n)$ un segnale con $n \in \mathbb{Z}$ è periodico se e solo se

$$s(n) = s(n + kN), \text{ con periodo } N, \forall n, k \in \mathbb{Z} \tag{47}$$

Se $N$ è il periodo di $s(n)$, allora la frequenza sarà $\frac{1}{N}$; Dal momento che $|N| \geq 1$ sempre (non ha senso avere periodo nullo), allora la frequenza è sempre frazionaria. Si può dimostrare che solo un segnale con frequenza razionale può essere periodico, mentre se è irrazionale non lo potrà mai essere.

#### 4.2.6 Fasore Discreto

La funzione è molto simile al fasore continuo:

$$s(n) = e^{2\pi j f_0 n} \tag{48}$$

Dove $f_0$ dev'essere razionale altrimenti la funzione non sarà periodica.

## 4.3 Proprietà dei Segnali Discreti

### 4.3.1 Durata

La durata di un segnale discreto è la somma delle ”stecche” non nulle di un grafico, o meglio, la lunghezza del supporto di $s(t)$

$$D = n_2 - n_1 + 1 \tag{49}$$

Dove $n_2, n_1$ sono gli estremi non nulli del segnale.

### 4.3.2 Area

Dato $s(n), n \in \mathbb{Z}$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \tag{50}$$

### 4.3.3 Valor Medio

Il valor medio è un $\tilde{s}$ tale che la funzione costante $s(t)' = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} s(n) \tag{51}$$

### 4.3.4 Potenza Istantanea

Non è altro che il modulo del segnale in un determinato istante $n$, ossia:

$$P_s(n) = \begin{cases} s(n)\overline{s(n)} \text{ se } s(n) \in \mathbb{C} \\ s(n)^2 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{52}$$

### 4.3.5 Energia

è l’area della Potenza Istantanea, ossia:

$$E_s = \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{53}$$

### 4.3.6 Potenza Media

è il valor medio della Potenza Istantanea, ossia:

$$P_s = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{54}$$

### 4.3.7 Segnali Potenza ed Energia

Anche in questo caso possiamo fare la distinzione tra i segnali potenza e i segnali energia, la definizione è la stessa presentata alla sezione (3.3.7)

# 5 Sistemi

In forma generale, un sistema descrive una relazione/processo di Causa-Effetto tra un INPUT ed un OUTPUT. In particolare nel corso ci focalizzeremo sui sitemi di Elaborazione dei Segnali.
Un **Sistema di Elaborazione dei Segnali** può essere vista come una relazione o legge di trasformazione di un segnale in un altro, dunque, formalmente:
Dato un sistema $S[\cdot]$, possiamo dire che:

$$y(b) = S[x(t)] \tag{55}$$

Dove $y(b)$è il segnale in output mentre $x(t)$ è il segnale in input. In base alla continuità dei segnali e dei domini possiamo distinguere i sistemi in: **Continui, Discreti e Misti**

## 5.1 Sistemi Continui

Dato un sistema $y(b) = S[x(a)]$, con $b \in B, a \in A$ questo si dice continuo se e solo se:

- $A, B$ sono insiemi continui
- $y(b), x(a)$ sono funzioni continue

Una classe importante di questi sistemi sono i **Sistemi Tempo-Continui** in cui la variabile è il tempo.

**Esempi.**

- **Ritardatori**
$$y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0) \tag{56}$$
Questo sistema non fa altro che ritardare il segnale $x(t)$ di una quantità di $t_0$ secondi.
- **Quantizzatore**
$$y(t) = \text{ROUND}(x(t)) \tag{57}$$
Questo sistema arrotonda ogni valore di $x(t)$ al suo intero più vicino.
- **Integratore**
$$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau \tag{58}$$
Questo sistema associa ad ogni istante $t$ l'area compresa tra $t - T$ e $t$

## 5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui

### 5.2.1 Non Dispersività

Un sistema $S[\cdot]$ è non dispersivo se e solo se il sistema dipende solo da $t$ e dal valore attuale di $x(t)$, ossia:

$$y(t) = S[t; x(t)] \tag{59}$$

possiamo dire che questi sistemi sono senza memoria perchè non considerano per nulla il passato.

**Esempio: Amplificatore Ideale**

$$y(t) = A \cdot x(t) \tag{60}$$

### 5.2.2 Causalità

Un sistema $S[\cdot]$ è causale se e solo se:

$$y(t) = S[t; x(\tau) \text{ dove } \tau \leq T] \tag{61}$$

Questi sistemi associano ad ogni istante t un valore dipendente non soltanto dal tempo attuale e dal valore $x(t)$, ma anche della storia di $x(t)$. Bene o male tutti i sistemi reali sono causali, perchè dipendono anche dagli istanti passati di un segnale. Esistono (ma solo in teoria) i segnali **Anticausali**, in cui il sistema dipende dall'istante attuale e quelli futuri (e quindi il futuro causerebbe il presente, impossibile nella realtà)

### 5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un sistema è **Stabile** se e solo se per ogni input limitato, l'uscita è sempre limitata, ossia:
Dato $S[\cdot]$ dove $y(t) = S[x(t)]$ con $|x(t)| \leq K_x < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ allora:

$$|y(t)| \leq K_y < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{62}$$

Dove $K_x, K_y$ sono rispettivamente il limite superiore/inferiore di $x(t), y(t)$

**Esempi:** L'Amplificatore Ideale (60).

### 5.2.4 Omogeneità

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$, $S$ è detto *omogeneo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $a \cdot x(t)$ con $a \in \mathbb{R}$ allora:

$$S[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \tag{63}$$

### 5.2.5 Additività

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\left[x(t)\right]$, $S$ è detto *additivo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} y_i(t) \tag{64}$$

### 5.2.6 Linearità

Un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\left[x(t)\right]$ è detto *lineare* se è sia omogeneo che additivo con gli stessi pesi, ossia se:
Dato $x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{65}$$

Questa proprietà è dovuta, nei segnali, al *Principio di sovrapposizione degli Effetti*, ossia:
*La risposta di un sistema ad una combinazione lineare degli ingressi è uguale alla combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle risposte ad ogni singolo ingresso*

**Esempi.**

- **Integratore definito nel tempo**: grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, questo sistema è lineare:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_{t-T}^{t} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{66}$$

### 5.2.7 Tempo-Invarianza

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ tempo-continuo, S è tempo-invariante se e solo se:

$$se S[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{67}$$

Questa proprietà afferma che il sistema non dipende da un eventuale ritardo(o anticipo) del segnale.

# 6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui

Sia la linearità che la tempo invarianza sono così importanti che dedicheremo un intero capitolo ai sistemi LTI (o Lineari e Tempo-Invarianti), dal momento che tali proprietà implicano altre proprietà altrettanto interessanti, come quella legata alla risposta all'impulso. Riprendiamo la proprietà (26) della delta di Dirac e un segnale $x(t)$. Consideriamo ora il sistema

$$S\left[\int_{\mathbb{R}} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Se $S[\cdot]$ è lineare possiamo considerare $x(\tau)$ come coefficiente e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau)S\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \tag{68}$$

Possiamo definire la *risposta all'impulso da parte del sistema* come $h(t) := S[\delta(t)]$. Se S è anche tempo-invariante, allora

$$h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)] \tag{69}$$

Possiamo riscrivere l'equazione di partenza se $S[\cdot]$ è lineare e tempo-invariante come:

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{70}$$

## 6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione

Definiamo:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{71}$$

E si dice *x(t) convoluto con h(t)*; è un'operazione molto importante in segnali, tanto da avere una definizione. L'importanza di $h(t)$ noi la possiamo apprezzare quando dobbiamo studiare un segnale ignoto: passando al sistema un impulso, e osservando l'output, tale output sarà proprio x(t) convoluto con h(t) (se il sistema è lineare e tempo invariante).

### 6.1.1 Proprietà

- **Commutativa:**dati 2 segnali $f, g$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \tag{72}$$

  Tale proprietà è facile da dimostrare:
  Consideriamo la convoluzione $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Effettuiamo ora un cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = t-\tau \\ \tau = t-x \\ dx = -d\tau \end{cases}$$

Sostituiamo ora le $\tau$ per avere un integrale in $x$ (NB: gli estremi di integrazione si invertono dal momento che $x$ è un "ribaltamento" di $\tau$):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)g(x)(-dx) &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx &= \\ g(t) * f(t)\end{aligned}$$

Alla fine ho risolto il $-dx$ semplicemente invertendo ancora gli estremi di integrazione. Il significato di questa proprietà è importante: se è vero che è possibile studiare un sistema LTI rispetto alla sua risposta all'impulso, è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema rispetto ad un segnale $x(t)$

- **Associativa**: dati 3 segnali $f, g, h$ allora:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \tag{73}$$

- **Distributiva (rispetto alla somma)**: dati 3 segnali $f, g, h$:

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \tag{74}$$

- **Durata della Convoluzione**: dati 2 segnali $f, g$ con durata rispettivamente $D_1, D_2$ allora la durata di $f(t) * g(t)$ è $D_1 + D_2$

- **Convoluzione con $\delta(t)$**: dato un segnale $f(t)$ allora:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \tag{75}$$

Possiamo infatti dire che $\delta(t)$ è l'operatore neutro dell'operazione di convoluzione, questo perchè il delta è una funzione che avviene tutta in un istante e quindi non altera la funzione di partenza; una sua eventuale traslazione, trasla la funzione $f(t)$. La dimostrazione è banale perchè si basa sulla proprietà del campionamento della delta (26)

## 6.2 Proprietà dei Sistemi LTI Continui

### 6.2.1 Causalità

Dato un sistema LTI $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$, $S$ è causale se $y(t)$ accade DOPO il segnale $x(t)$, questo per il concetto stesso di causalità: $y(t)$ è la risposta all'impulso di $x(t)$ quindi DEVE accadere dopo, in particolare si dice che:

$$\text{Un sistema è causale} \iff h(t) = 0 \ \forall t < 0 \tag{76}$$

Proprio per questo motivo, dal momento che $y(t)$ può essere descritto come risposta all'impulso, ossia come convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$, se il sistema è causale allora possiamo ridefinire la $y(t)$ come integrale dall'infinito passato fino all'istante $t$ presente, ossia:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{77}$$

Possiamo anche, per la proprietà commutativa (72), riscrivere la $y(t)$ come integrale tra la risposta $h(t)$ e il segnale $x(t)$ ribaltato e traslato di tutti i valori di $\tau$ da 0 fino all'infinito futuro

$$y(t) = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{78}$$

### 6.2.2 Stabilità BIBO

Dato un sistema LTI $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$, $S[\cdot]$ è BIBO se e solo se:

$$\forall x(t) : |x(t)| < M < \infty \rightarrow |y(t)| < N < \infty \tag{79}$$

In particolare possiamo osservare che:

$$|y(t)| = |S[x(t)]| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right|$$

Sappiamo inoltre che, data una qualsiasi $f(x)$ vale questa disuguaglianza:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

Dunque

$$y(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau$$

Per la proprietà del valore assoluto $|ab| = |a||b|$ allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

Ma $x(t-\tau) \leq M$ perchè abbiamo ipotizzato che il segnale in ingresso sia limitato, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

In definitiva:

$$y(t) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Possiamo dunque affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema sia stabile BIBO è che $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$ converga, altrimenti $y(t)$ è illimitato.

**Teorema.** Se la risposta all'impulso del Sistema non è assolutamente convergente allora non è BIBO Stabile

**Ipotesi.** Ipotizziamo che:

1. Il sistema sia BIBO Stabile, $|y(t)| < N < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\tau = +\infty$
3. consideriamo una $x(t)$ limitata, ossia $x(t) = \text{sign}[h(-t)]$

**Dimostrazione.** Possiamo dire che per $t = 0$ la risposta all'impulso è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(0-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\text{sign}[h(-\tau)]d\tau$$

per $t = 0$, $\text{sign}[h(-\tau)] = 1$ dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\text{sign}[h(-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau$$

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = |y(t)|$$

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \infty$$

ASSURDO, allora $y(t)$ è instabile.
Possiamo dunque affermare che: Un sistema è BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \tag{80}$$

### 6.2.3 Risposta in frequenza

Consideriamo la risposta del sistema rispetto al fasore di frequenza $f$:

$$x_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

Dal momento che il sistema è LTI allora:

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x_f(t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi ft}e^{-j2\pi\tau}d\tau = \\ = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau \end{aligned}$$

Possiamo vedere $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau$ come una sorta di convoluzione in 0, che noi chiamiamo $H(f)$ e definiamo **Risposta in Frequenza**. Possiamo riscrivere l'equazione come:

$$y(t) = H(f)x_f(t) \tag{81}$$

Da $H(f)$ possiamo definire:

- **Risposta in Ampiezza**: $|H(f)|$
- **Risposta in Fase**: $\angle H(f)$

Questa proprietà dei LTI è molto importante poichè ci dice che la risposta in frequenza di un qualsiasi segnale $x(t)$ è un altro segnale **alla stessa frequenza**, magari traslato o amplificato, cioè la risposta di un fasore è ancora un fasore di frequenza $f$ ma moltiplicato per un valore complesso $H(f)$

## 6.3 Proprietà Sistemi Discreti

Un sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ è detto discreto se e solo se $x, y$ sono segnali discreti; possiamo enunciare per tali sistemi le stesse proprietà dei sistemi LTI continui:

**Causalità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.1)

**Stabilità BIBO.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.2)

**Linearità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.6)

**Tempo-Invarianza.** La medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.7)

# 7 Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti

Consideriamo un sistema $S[\cdot] : y(n) = S[x(n)]$ con $n \in \mathbb{Z}$ Lineare e Tempo-Invariante; possiamo riscrivere $x(n)$ come somma infinita tra i prodotti tra l'impulso ideale e il loro peso, ossia come:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Allora:

$$\begin{aligned} y(n) &= S[x(n)] = \\ &= S\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\underbrace{S[\delta(n-i)]}_{h(n)} \end{aligned}$$

Dal momento che $S[\cdot]$ è anche Tempo-Invariante, allora:

$$h(n-n_0) = S\left[\delta(n-n_0)\right]$$

In definitiva, anche nel caso discreto, possiamo enunciare la proprietà fondamentale dei sistemi LTI, ossia che un qualsiasi sistema LTI può essere descritto come convoluzione tra l'ingresso e la risposta all'impulso del sistema:

$$y(n) = S[x(n)] = x(n) * h(n) \tag{82}$$

## 7.1 Causalità

Un sistema $S[\cdot]$ LTI discreto è **Causale** se e solo se:

$$h(n) = 0 \ \forall n < 0, n \in \mathbb{Z} \tag{83}$$

Dunque, come avevamo detto nel continuo,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i)h(n-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \tag{84}$$

Ossia un sistema LTI causale può essere scritto come la somma infinita del prodotto degli ingressi e degli impulsi dall'infinito passato al presente o come somma infinita degli ingressi presenti e passati per l'impulso

## 7.2 Stabilità BIBO

Per definizione, un sistema LTI $S[\cdot]$ è stabile BIBO se e solo se:

$$\forall x(n) : |x(n)| \leq M < \infty \longrightarrow |y(n)| \leq N < \infty \tag{85}$$

Ma possiamo ricavare un'altra definizione:

$$|y(n)| = \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right|$$

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)|$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| \leq M \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(i)|$$

Allora $S[\cdot]$ è stabile BIBO se $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < \infty$, cioè se la risposta all'impulso è assolutamente sommabile
**Ma è anche necessaria la condizione?** Dimostriamo per assurdo

**Ipotesi.**

1. $y(n)$ è stabile
2. $x(n)$ è limitata, $x(n) = \text{sign}[h(-n)]$
3. $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \infty$

**Dimostrazione.** Calcoliamo $y(n)$ per $n = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(-i)| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|\text{sign}[|h(i)|] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Per ipotesi (3) $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = +\infty$ dunque y(t) non è stabile, ASSURDO! Allora $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$ In definitiva possiamo affermare che:

$$\text{Un sistema LTI è BIBO} \Longleftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty \tag{86}$$

## 7.3 Convoluzione Discreta

Definiamo *a(n) convoluto con b(n)* la seguente operazione

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i)b(n-i) \tag{87}$$

### 7.3.1 Proprietà

Enunciamo qui anche le proprietà di cui gode la convoluzione discreta:

**Commutativa:** La convoluzione è commutativa, allora vale che

$$f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$$

**Dimostrazione.**

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i)$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} m = n - i \\ i = n - m \end{cases}$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i) &= \sum_{n-m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)f(n-m) = \\ &= g(m) * f(m) \end{aligned}$$

In questo caso possiamo scambiare senza problemi gli estremi della sommatoria dal momento che non dobbiamo preoccuparci del segno (mentre nell'integrale dovevamo considerare pure il $d\tau$ che dava un verso di integrazione).

**Associativa** Ha la stessa formulazione della Convoluzione Continua (72)

**Distributiva (rispetto alla Somma)** La stessa formulazione della Convoluzione Continua (6.1.1)

**Convoluzione con $\delta(n)$** La stessa formulazione della Convoluzione Continua (6.1.1)

October 30, 2024

# 8 Analisi Armonica

I segnali visti finora sono stati presentati come funzioni descritte da un'espressione analitica; alcuni studiosi, tra cui Fourier, si accorsero che tali funzioni potevano essere scomposte in somme di altre funzioni (in particolare di fasori, seni e coseni), ossia è possibile vedere un segnale come **combinazione lineare** di segnali elementari. Uno strumento che permette di trasformare un segnale in una combinazione lineare di segnali elementari è lo **sviluppo in serie di Fourier**.

## 8.1 Sviluppo In Serie Di Fourier

**Teorema.** Data una funzione *periodica* $f(t) : f(t) = f(t + kT)\ \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ e *regolare* (ossia che rispetta le condizioni di Dirichlet), allora $f(t)$ piò essere riscritta come una combinazioni lineare di seni e coseni con i propri pesi e le cui frequenze sono multiple di $\frac{1}{T}$ (con $T$ il periodo di $f(t)$).

Consideriamo ora i vari multipli:

- $n = 0 \longrightarrow f_0 = 0$ è la cosiddetta *componente continua* (un valore costante).
- $n = 1 \longrightarrow f_1 = \frac{1}{T}$ viene detta la *frequenza fondamentale*.
- $\forall |n| > 1 \longrightarrow f_n = \frac{n}{T}$ viene detta *armonica n-esima*.

Gli sviluppi in serie di fourier si presentano in forma **Trigonometrica** ed **Esponenziale**

### 8.1.1 Forma Esponenziale

**Equazione di Sintesi.** Nella forma esponenziale possiamo esprimere la funzione $f(t)$ come combinazione lineare di fasori (3.2.6) $p_n(t)$ a frequenza $f_n = \frac{1}{T}$ con $T$ il periodo di $f$; è detta *di sintesi* perchè otteniamo $f$ dalla combinazione di fasori

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

**Equazione di Analisi.** Al contrario della sintesi, noi vogliamo *scomporre* $f$ per ottenere i fasori che la combinano:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Dove $\int_T$ è un integrale *di durata* $T$, ossia che può andare da 0 a $T$, o da $-T/2$ a $T/2$

### 8.1.2 Forma Trigonometrica

Anche se storicamente è stato al contrario, possiamo derivare a partire dalla forma esponenziale, la forma trigonometrica dello sviluppo.

#### I Equazione di Sintesi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + c_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] \qquad \text{(separo i } c_n\text{)}$$

Consideriamo ora $c_{-n}$

$$\begin{aligned} c_{-n} =& \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \\ =& \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{e^{j2\pi \frac{n}{T} t}} dt = \overline{c_n} \end{aligned}$$

Possiamo vedere il complesso $-j$ come il coniugato del complesso di partenza, dunque:

$$\begin{aligned} f(t) =& c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ =& c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}}] = \\ =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] \qquad \text{(proprietà 1.3.2)} \end{aligned}$$

Possiamo dunque notare che, a partire dalla scomposizione di una funzione reale in fasori (complessi) otteniamo ancora qualcosa di completamente reale. Poniamo ora $c_n = \rho_n e^j \theta_n$, ossia in forma polare:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[\rho_n e^{j\theta_n} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[\rho_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n}] = \end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbb{R}e[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$ allora:

$$f(t) = c_0 + 2 \int_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n\right) \tag{88}$$

**II Equazione di Sintesi.** Ora poniamo $c_n = a_n - jb_n$:

$$\begin{aligned}
f(t) =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[c_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] = \\
=& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[(a_n - jb_n) e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] = \\
=& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[a_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t} - jb_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] =
\end{aligned}$$

Riscriviamo ora $j$ come $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$f(t) = c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[a_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t} - b_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t+\frac{\pi}{2}}\right] =$$

Sapendo che, ancora una volta, $\mathbb{R}e[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$ allora:

$$= c_o + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) - b_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

Dal momento che $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ allora:

$$f(t) = c_o + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right] \tag{89}$$

Cerchiamo, a questo punto, di derivare $a_n, b_n$ a partire da $c_n$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \mathbb{R}e[c_n] = \mathbb{R}e\left[\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt\right] = \\
&= \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathbb{R}e\left[e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\right]dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_T f(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= -\mathbb{I}m[c_n] = -\mathbb{I}m\left[\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt\right] = \\
&= -\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathbb{I}m\left[e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\right]dt = \\
&= -\frac{1}{T}\int_T f(t)\sin\left(-2\pi\frac{n}{T}t\right)dt =
\end{aligned}$$

Per la proprietà antisimmetrica del seno $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ otteniamo:

$$b_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt$$

In definitiva, grazie allo sviluppo in serie di Fourier, possiamo trasformare una funzione **continua, periodica** e regolare in una somma **discreta** di fasori con con pesi $\{c_n\}$ nel periodo $[0, T]$; inoltre, grazie ai coefficienti $c_n$ è possibile conoscere il contributo (o ampiezza) dell'n-esima armonica nello sviluppo di $f(t)$; proprio per questo motivo i $c_n$ rappresentano lo **spettro di** $f(t)$. La funzione $f$ di partenza esiste nel **dominio del tempo** mentre i $c_n$ nel **dominio delle frequenze**

Una cosa che possiamo notare è che $c_0$ è il valor medio della funzione ed è il contributo che "solleva" la funzione; questo perchè seni/coseni che definiscono lo sviluppo hanno valor medio nullo.

**Esempi.** Vedi sul quaderno lo sviluppo del dente di sega e dell'onda quadra.

## 8.2 Trasformata di Fourier

Finora gli sviluppi in serie riguardano solo funzioni continue e periodiche, mentre tutte le altre funzioni non godono di questa proprietà. In realtà Fourier scoprì un modo per analizzare lo spettro di qualsiasi funzione reale:
Consideriamo una funzione $f(t)$ **continua e non periodica** e definiamo la sua versione periodica $f_T(t)$ come:

$$f_T(t) = f(t) \qquad (-\tfrac{T}{2} \leq t \leq \tfrac{T}{2})$$

Tale che $f_T(t) = f_T(t + kT)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $T$ il periodo. Quello che fa $f_T(t)$ è di replicare il comportamento di $f(t)$ nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ per tutto $\mathbb{R}$. Dal momento che $f_T(t)$ è periodica e continua, posso applicare lo sviluppo in serie di fourier:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j\frac{n}{T}t} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} \qquad (\text{con } f_n = \tfrac{n}{T}) \end{aligned}$$

Dove $c_n$ è:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Consideriamo ora $\frac{1}{T} = \Delta f$ ossia il passo unitario con cui incrementano le frequenze delle armoniche:

$$c_n = \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Facendo tendere il passo unitario a 0 (o meglio, il periodo all'infinito) la versione periodica $f_T(t)$ sarà sempre più simile alla funzione di partenza, per cui possiamo dire che:

$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t) \tag{90}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \to +\infty} f_T(t) = \\ &= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} = \\ &= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi f_n \tau} d\tau \right] e^{j2\pi j f_n t} \Delta f \end{aligned}$$

Dobbiamo osservare che:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi f_n \tau} d\tau$ è una sorta di **risposta in frequenza** e viene indicata con $F(f)$ (funzione di trasformazione di f)
- al tendere di T all'infinito, $\Delta f$ diventa infinitesima, dunque la somma infinita di termini moltiplicati per un'infinitesimo è proprio un integrale

**Antitrasformata di Fourier.** Per cui:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(f_n) e^{j2\pi j f_n t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi j f t} df = \\ &= \mathscr{F}^{-1}\{F(f)\} \end{aligned}$$

E viene detta **Formula di Sintesi** o **Antitrasformata di Fourier**

**Trasformata di Fourier.** Mentre $F(f)$, anche detta **Trasformata di Fourier** o **Formula di Analisi**, è:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt = \mathscr{F}\{f(t)\} \tag{91}$$

Possiamo dunque vedere quest'importante relazione:

$$\boxed{f(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftarrows}} F(f)}$$

Con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sebbene quasi sempre lo spettro di una funzione f è complesso, quindi tridimensionale, possiamo raccontare **frequenze** e **ampiezze** tramite le funzioni:

- **Spettro d'Ampiezza** $|F(f)| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- **Spettro di Fase** $\angle F(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$