

# Appunti di Elaborazione dei Segnali

By *@Thisisfava*

2024/2025

# Contents

	<b>1</b>
<b>1 Numeri Complessi</b>	<b>4</b>
1.1 Rappresentazioni . . . . .	4
1.1.1 Coordinate Rettangolari . . . . .	4
1.1.2 Coordinate Polari . . . . .	4
1.2 Conversioni . . . . .	4
1.2.1 Polare a Rettangolare . . . . .	4
1.2.2 Rettangolare a Polare . . . . .	4
1.3 Complesso Coniugato . . . . .	5
1.3.1 Definizione . . . . .	5
1.3.2 Proprietà . . . . .	5
1.4 Operazioni nel campo dei complessi . . . . .	6
1.4.1 Somme tra numeri complessi . . . . .	6
1.4.2 Scalatura . . . . .	6
1.4.3 Prodotto tra complessi . . . . .	6
1.4.4 Inverso di un complesso . . . . .	6
1.4.5 Divisione tra numeri complessi . . . . .	7
1.4.6 Elevamento a potenza . . . . .	7
1.4.7 Estrazione di una radice n-esima . . . . .	7
1.4.8 Funzione complessa di variabile reale . . . . .	7
<b>2 Segnali</b>	<b>9</b>
2.1 Classificazione dei segnali . . . . .	9
2.1.1 Rispetto alla dimensionalità . . . . .	9
2.1.2 Rispetto alla Continuità . . . . .	9
2.2 Tipi di segnali . . . . .	10
<b>3 Segnali Continui</b>	<b>11</b>
3.1 Operazioni Sui Segnali Continui . . . . .	11
3.1.1 Traslazione . . . . .	11
3.1.2 Scalatura della variabile dipendente . . . . .	11
3.2 Segnali Notevoli . . . . .	12
3.2.1 Funzione Rettangolo . . . . .	12
3.2.2 Gradino Unitario . . . . .	12
3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale) . . . . .	13
3.2.4 Proprietà della Delta . . . . .	14
3.2.5 Segnali Periodici . . . . .	14
3.2.6 Fasore . . . . .	15
3.3 Proprietà dei Segnali . . . . .	16
3.3.1 Durata . . . . .	16
3.3.2 Area . . . . .	16
3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale) . . . . .	16
3.3.4 Energia . . . . .	16

3.3.5	Potenza Istantanea . . . . .	16
3.3.6	Potenza Media . . . . .	16
3.3.7	Segnale Energia e Potenza . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Segnali Discreti</b>	<b>18</b>
4.1	Operazione sui Segnali Discreti . . . . .	18
4.1.1	Traslazione . . . . .	18
4.1.2	Decimazione/UpSampling . . . . .	18
4.1.3	Interpolazione/DownSampling . . . . .	18
4.2	Segnali Notevoli . . . . .	19
4.2.1	Rettangolo Discreto . . . . .	19
4.2.2	Gradino Unitario . . . . .	19
4.2.3	Impulso Discreto . . . . .	19
4.2.4	Proprietà dell'Impulso Discreto . . . . .	19
4.2.5	Segnali Periodici Discreti . . . . .	20
4.2.6	Fasore Discreto . . . . .	20
4.3	Proprietà dei Segnali Discreti . . . . .	21
4.3.1	Durata . . . . .	21
4.3.2	Area . . . . .	21
4.3.3	Valor Medio . . . . .	21
4.3.4	Potenza Istantanea . . . . .	21
4.3.5	Energia . . . . .	21
4.3.6	Potenza Media . . . . .	21
4.3.7	Segnali Potenza ed Energia . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Sistemi</b>	<b>22</b>
5.1	Sistemi Continui . . . . .	22
5.2	Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui . . . . .	23
5.2.1	Non Dispersività . . . . .	23
5.2.2	Causalità . . . . .	23
5.2.3	Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output) . . . . .	23
5.2.4	Omogeneità . . . . .	23
5.2.5	Additività . . . . .	24
5.2.6	Linearità . . . . .	24
5.2.7	Tempo-Invarianza . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui</b>	<b>24</b>
6.1	Prodotto/Integrale di Convoluzione . . . . .	25
6.1.1	Proprietà . . . . .	25
6.2	Proprietà dei Sistemi LTI Continui . . . . .	27
6.2.1	Causalità . . . . .	27
6.2.2	Stabilità BIBO . . . . .	27
6.2.3	Risposta in frequenza . . . . .	29
6.3	Proprietà Sistemi Discreti . . . . .	29

<b>7</b>	<b>Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti</b>	<b>30</b>
7.1	Causalità . . . . .	30
7.2	Stabilità BIBO . . . . .	31
7.3	Convoluzione Discreta . . . . .	32
7.3.1	Proprietà . . . . .	32

# 1 Numeri Complessi

**Definizione.** Il campo complesso  $\mathbb{C}$  è la chiusura algebrica di un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali. Un numero  $z \in \mathbb{C}$  è definito dall'*unità immaginaria*:

$$i = j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

## 1.1 Rappresentazioni

Un complesso  $z$ , che può essere scritto in diverse forme, viene rappresentato sul *Piano di Gauss*, un piano definito dall'asse orizzontale  $\mathbb{R}e$  e dall'asse verticale  $\mathbb{I}m$

### 1.1.1 Coordinate Rettangolari

Un complesso può essere rappresentato come un punto  $(x, y)$  sul piano di Gauss, con  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ . La forma che lo rappresenta è la forma *algebrica*:

$$z = x + jy \quad (2)$$

Con  $x$  la parte reale (ossia  $\mathbb{R}e(z) = x$ ) e  $y$  la parte immaginaria (ossia  $\mathbb{I}m(z) = y$ )

### 1.1.2 Coordinate Polari

Un complesso  $z$  può essere anche rappresentato in *forma polare* sul piano in funzione della lunghezza  $\rho$  del vettore che parte dall'origine (ossia il *modulo*) e dell'angolo spazzato  $\theta$  (ossia la *fase*).

$$z = \langle \rho, \theta \rangle = \rho (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad (3)$$

In realtà, un'altra forma che permette di esprimere un complesso in coordinate polari è la forma *esponenziale*

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad (4)$$

## 1.2 Conversioni

### 1.2.1 Polare a Rettangolare

Dato  $z = \langle \rho, \theta \rangle$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad (5)$$

### 1.2.2 Rettangolare a Polare

Dato  $z = x + jy$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (6)$$

Dove

$$\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

### 1.3 Complesso Coniugato

#### 1.3.1 Definizione

Dato un  $z \in \mathbb{C}$  t.c  $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$  allora il suo coniugato sarà

$$\bar{z} = x - jy \quad (8)$$

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta} \quad (9)$$

In parole povere, il coniugato di un complesso è il complesso che ha stessa parte reale ma opposta parte immaginaria

#### 1.3.2 Proprietà

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$

## 1.4 Operazioni nel campo dei complessi

### 1.4.1 Somme tra numeri complessi

**Forma algebrica.** Dati  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$  la somma sarà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (10)$$

**Forma Esponenziale.** La somma è banale

### 1.4.2 Scalatura

**Forma algebrica.** Dati  $z = x + jy$  e  $a \in \mathbb{R}$  la scalatura sarà:

$$az = ax + jay \quad (11)$$

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $a \in \mathbb{R}$  la scalatura sarà:

$$az = a\rho e^{j\theta} \quad (12)$$

### 1.4.3 Prodotto tra complessi

**Forma algebrica.** Dati  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$  il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (13)$$

**Forma Esponenziale.** Dati  $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$  il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (14)$$

### 1.4.4 Inverso di un complesso

**Forma algebrica.** Dato  $z = x + jy$  l'inverso sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\rho^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \quad (15)$$

Spiegazione della formula: un certo  $w = z^{-1}$  con  $z \in \mathbb{C}$  se il loro prodotto genera un numero con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla. Sappiamo che  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = \rho^2$ . Quindi basta dividere il coniugato di  $z$  con il modulo quadro( $\rho^2$ ) e si ha l'inverso.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  il prodotto sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} \quad (16)$$

#### 1.4.5 Divisione tra numeri complessi

Dati  $z_1 \in \mathbb{C}$  e  $z_2 \in \mathbb{C}$  possiamo riscrivere la divisione tra i 2 numeri come prodotto tra il primo e l'inverso del secondo, e ciò vale per entrambe le forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \quad (17)$$

#### 1.4.6 Elevamento a potenza

**Forma algebrica.** L'elevamento a potenza della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  l'elevamento a potenza sarà  $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ volte}}$  ossia:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} \quad (18)$$

#### 1.4.7 Estrazione di una radice n-esima

Dato un  $z \in \mathbb{C}$  e  $y \in \mathbb{C}$ ,  $y$  è radice n-esima di  $z$  se e solo se  $y^n = z$ . La grande differenza con i numeri reali è che, nel campo complesso, esistono esattamente  $n$  y distinte di radici che soddisfano l'equazione  $y^n - z = 0$  per il teorema fondamentale dell'algebra.

**Forma algebrica.** La radice n-esima della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $n \in \mathbb{N}$  la radice n-esima sarà:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta+2\pi i}{n}\right)} \quad \text{Con } i = 0, 1, \dots, n-1$$

#### 1.4.8 Funzione complessa di variabile reale

Definita come

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Oppure come  $z = f(x)$  con  $z \in \mathbb{C}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , è una funzione che mappa ad ogni reale un immaginario.

**Rappresentazione.** Graficamente una funzione complessa di variabile reale può essere rappresentata in un grafico a 3 dimensioni con un asse per la  $x$  (variabile indipendente) e gli altri 2 assi sono  $\text{Im}[z]$  e  $\text{Re}[z]$ . Dal momento che sono difficili da rappresentare, si ricorre ad una semplificazione: il grafico tridimensionale si sdoppia in un grafico che mappa ad ogni  $x$  la parte Reale di  $z$  ed un altro grafico che mappa ad ogni  $x$  la parte Immaginaria di  $z$ . Se si lavora in coordinate polari, è possibile invece rappresentare il grafico che mappa ad



ogni  $x$  il modulo del complesso corrispondente e un altro grafico che mappa ad ogni  $x$  la fase del complesso corrispondente. La particolarità di questi ultimi 2 grafici è che il primo grafico è sempre rappresentato sopra l'asse  $x$  (il modulo non può mai essere negativo) e il secondo grafico è sempre rappresentato tra  $-\pi$  e  $\pi$  dal momento che poi la fase si ripete.

## 2 Segnali

In termini totalmente astratti, un segnale è un veicolo di informazione. L'informazione, a sua volta, possiamo definirla come tutto ciò che aggiunge conoscenza. Calato nel contesto del corso, un segnale può essere visto come una funzione

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f : A \longrightarrow B \end{cases}$$

Dove  $x \in A$  è la variabile indipendente,  $y \in B$  la variabile dipendente con  $A$  e  $B$  insiemi qualsiasi.

### 2.1 Classificazione dei segnali

#### 2.1.1 Rispetto alla dimensionalità

Un segnale può essere classificato rispetto alla dimensionalità del dominio o del codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del dominio può essere:

- **Monodimensionale** se  $A \subseteq \mathbb{R}$
- **n-Dimensionale** se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$

**Codominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del codominio può essere:

- **Scalare** se  $B \subseteq \mathbb{R}$
- **Vettoriale** se  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$

#### 2.1.2 Rispetto alla Continuità

Un segnale può essere classificato rispetto alla continuità di dominio o codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla continuità del dominio può essere:

- **Continuo** se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , cioè se  $A$  coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Discreto** se  $A$  coincide o è sottoinsieme di un insieme discreto (come  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ )

**Codominio.** Un segnale rispetto alla continuità del codominio può essere:

- **Ad Ampiezze Continue** se  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , cioè se  $B$  coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Ad Ampiezze Discrete** se  $B$  coincide o è sottoinsieme di un insieme discreto (come  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ )

Nel caso in cui la variabile dipendente sia il tempo, i segnali vengono detti **tempo-continuui** o **tempo-discreti**.

**Esempi.** Il *suono* può essere visto come la pressione dell'aria in funzione del tempo, ossia come:

$$p = f(t)$$

Dove  $p \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dunque il suono è un segnale **monodimensionale e scalare, continuo e ad ampiezze continue**

Un'*immagine in bianco e nero* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano la *Luminanza*:

$$L = f(x, y)$$

Dove  $L \in \mathbb{R}$  e  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ . Dunque un'immagine a scala di grigi è un segnale **bidimensionale e scalare, continuo e ad ampiezze continue**

Un'*immagine a colori* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano una tripletta di valori (interpretabili in base allo spazio colore scelto). Consideriamo lo spazio RGB:

$$\langle R, G, B \rangle = f(x, y)$$

Dove  $\langle R, G, B \rangle \in \mathbb{R}^3$  e  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ . Dunque un'immagine a colori è un segnale **bidimensionale e vettoriale, continuo e ad ampiezze continue**

## 2.2 Tipi di segnali

In base alle caratteristiche di un segnale, possiamo definire alcuni tipi di segnali:

Segnale	Dominio Continuo	Dominio Discreto
Codominio Continuo	Analogico	Campionato
Codominio Discreto	Quantizzato	Digitale

## 3 Segnali Continui

### 3.1 Operazioni Sui Segnali Continui

#### 3.1.1 Traslazione

Dato un segnale  $y = f(x)$  possiamo definire il segnale traslato  $y'$  come

- $y' = f(x - x_0)$  ossia una *traslazione in avanti* di  $x_0$
- $y' = f(x + x_0)$  ossia una *traslazione all'indietro* di  $x_0$

Quando la variabile indipendente  $x$  è il tempo, possiamo dire che il segnale è, rispettivamente, in *in ritardo* o *in anticipo*

#### 3.1.2 Scalatura della variabile dipendente

Dato  $y = f(x)$  e  $x \in \mathbb{R}$  allora possiamo definire  $y'$  il segnale scalato come

$$y' = f(ax)$$

Dove  $a \in \mathbb{R}$  è detto *fattore di scala*. In base ai valori assunti da  $a$ , il segnale può:

- **Espandersi** se  $|a| < 1$
- **Comprimersi** se  $|a| > 1$
- **Specchiarsi** rispetto all'asse  $y$  se  $a < 0$

## 3.2 Segnali Notevoli

Riporto di seguito alcune funzioni(segnali) che useremo spesso nel corso:

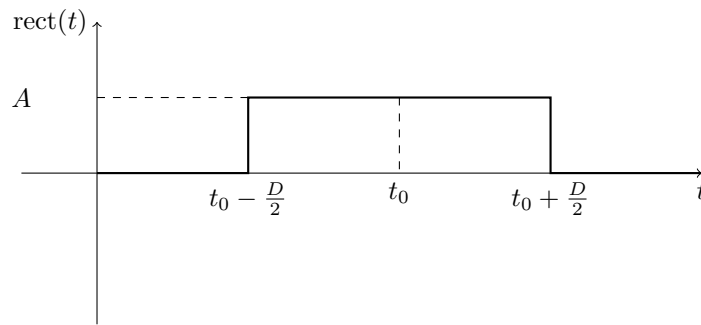
### 3.2.1 Funzione Rettangolo

Detta anche *Impulso Rettangolare*, è una funzione che ha un picco tra  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  e poi è sempre nulla. Possiamo definirla così:

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (19)$$

**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'ampiezza del segnale,  $t_0$  il centro del rettangolo e  $D$  la durata dell'impulso, possiamo generalizzare la definizione precedente

$$y = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{D}\right) \quad (20)$$



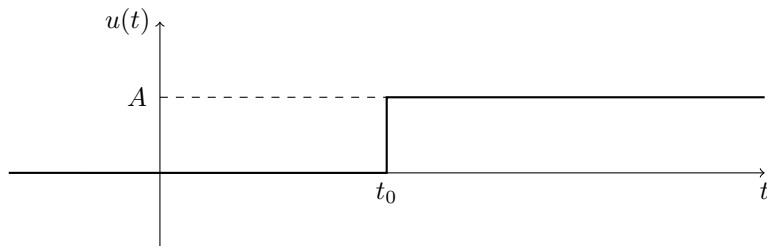
### 3.2.2 Gradino Unitario

Tale segnale è definibile come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'ampiezza del segnale e  $t_0$  il tempo di ritardo

$$y = A \cdot u(t - t_0) \quad (22)$$



### 3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale)

Questo segnale si ottiene, a partire dall'impulso rettangolare, restringendo sempre di più  $T$  e aumentando sempre di più l'ampiezza di un termine  $\frac{1}{T}$  (questo per mantenere l'area sottesa, o energia, invariata). Possiamo determinare la formula analitica di questa operazione:

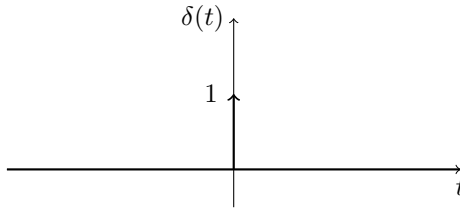
$$y(t) = \frac{1}{T} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right)$$

Facendo tendere a 0 il termine  $T$  si ottiene proprio la *delta di Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \quad (23)$$

Per com'è definita, la delta di Dirac non è una vera e propria funzione, è una funzione speciale, una distribuzione, che vale sempre 0 tranne quando  $t = 0$ ; in quel caso la funzione va ad infinito, perchè sarebbe l'impulso (ideale) applicato in un istante infinitesimo. Dal momento che in questa funzione l'ampiezza è infinita, ha senso considerare, invece, l'area sottesa, ossia l'energia dell'impulso.

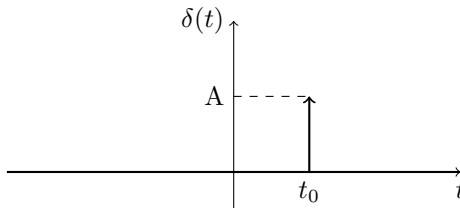
**Rappresentazione Tradizionale.** Tradizionalmente la funzione delta viene rappresentata in 0 con una freccia verso l'alto con la punta a 1. In ogni altro punto, è 0.



**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'area (e non l'ampiezza, che sarebbe infinita) e  $t_0$  il ritardo, la formula sarà:

$$y(t) = A \cdot \delta(t - t_0)$$

E il grafico sarà:



### 3.2.4 Proprietà della Delta

- **Area Unitaria:** l'integrale su tutto  $\mathbb{R}$  della delta è esattamente 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (24)$$

- **Proprietà del Campionamento:** per enunciare la proprietà è necessario introdurre il concetto di *prodotto scalare tra funzioni*:

Si dice prodotto scalare tra le funzioni  $f$  e  $g$  come

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad (25)$$

Detto ciò, la proprietà della campionatura afferma che, per ogni funzione  $f(t)$ :

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (26)$$

Da ciò possiamo capire il significato del termine "campionatura": quando noi effettuiamo il prodotto scalare con il delta, è come se scattassimo una istantanea alla funzione  $f$  in 0. Questa proprietà ci servirà per discretizzare una funzione. Possiamo dunque generalizzare questa proprietà per un qualunque istante  $t_0$ :

$$\langle f(t), \delta(t - t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (27)$$

- **Proprietà del Prodotto:** il prodotto tra una qualsiasi funzione  $f(t)$  e il delta di dirac è sempre 0 laddove  $t \neq t_0$ :

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (28)$$

- **Parità:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (29)$$

- **Integrazione:** la funzione integrale della delta di dirac è in realtà il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (30)$$

### 3.2.5 Segnali Periodici

Un segnale  $s(t)$  si dice *periodico* se e solo se il suo valore si ripete ad ogni periodo, ossia:

$$s(t) = s(t + kT) \quad (31)$$

Dove  $k \in \mathbb{Z}$  è il numero di volte e  $T \in \mathbb{R}$  è il periodo.

Una cosa da tenere a mente è che, in segnali, solitamente, si normalizza in modo tale da mettere in evidenza direttamente nella formula la frequenza (che può essere molto utile).

Es:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Da questa formula sappiamo subito che il periodo di questo segnale è:

$$\frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$$

E dunque la sua frequenza è proprio  $f_0$

### 3.2.6 Fasore

Questa funzione è una funzione complessa di variabile reale, con la seguente formula analitica:

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \quad (32)$$



### 3.3 Proprietà dei Segnali

#### 3.3.1 Durata

La durata di un segnale è, considerando un segnale nel tempo, la differenza tra il primo istante in cui il segnale non è nullo e l'ultimo istante.

#### 3.3.2 Area

Si dice *Area di un Segnale*  $s(t)$  l'area sottesa dallo stesso segnale, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \quad (33)$$

#### 3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale)

Il valor medio di un segnale  $s(t)$  non è altro che quel valore  $\bar{s}$  tale che una funzione costante  $s'(t) = \bar{s}$  ha la stessa area di  $s(t)$ , ossia:

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)dt \quad (34)$$

#### 3.3.4 Energia

Sebbene non stiamo parlando propriamente di lavoro e concetti fisici relativi, dobbiamo dire che un segnale è sempre associato ad una certa energia che il segnale stesso trasporta. Dunque *l'energia di un segnale* ( $s(t)$ ) è:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (35)$$

#### 3.3.5 Potenza Istantanea

Per il discorso precedente, possiamo anche definire la Potenza Istantanea di un segnale (cioè la potenza in un istante del Segnale) come

$$P[s(t)] = \begin{cases} s(t_0)\overline{s(t_0)} & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{C} \\ s(t_0)^2 & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (36)$$

#### 3.3.6 Potenza Media

La potenza media possiamo, invece, vederla come il valore medio dell'energia, ossia:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \quad (37)$$

### 3.3.7 Segnale Energia e Potenza

Innanzitutto possiamo notare come sia Potenza Media che Energia siano non negativi per costruzione; inoltre tra Potenza Media e Energia di un segnale è possibile vedere una correlazione: laddove l'energia del segnale è finita, allora la potenza è necessariamente nulla; laddove invece la potenza media è maggiore di 0, l'energia è infinita.

In base a questo concetto è possibile definire:

- **Segnale Energia** un segnale  $s(t)$  se e solo se  $0 < E_s < \infty$  e allora  $P_s = 0$
- **Segnale Potenza** un segnale  $s(t)$  se e solo se  $0 < P_s < \infty$  e allora  $E_s \rightarrow +\infty$

## 4 Segnali Discreti

A differenza dei segnali continui, i segnali discreti sono funzioni con Dominio discreto, solitamente rappresentate nella seguente maniera:

$$y = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Enunciamo ora tutte le proprietà, in maniera speculare, che abbiamo già descritto per i segnali continui:

### 4.1 Operazione sui Segnali Discreti

#### 4.1.1 Traslazione

Dato un segnale  $y = f(n)$  definiamo  $y' = f(n - n_0)$  traslazione in avanti di  $n_0$ ; definiamo invece  $y'' = f(n + n_0)$  traslazione indietro di  $n_0$ .

#### 4.1.2 Decimazione/UpSampling

Dato  $y = f(n)$  il segnale con  $n \in \mathbb{Z}$ , il segnale decimato è:

$$y = f(an) \quad \text{con } a \in \mathbb{Z} \text{ e } |a| \geq 1 \quad (38)$$

Questa operazione è detta *decimazione* dal momento che è come se prelevassi selettivamente i valori ogni  $a$  campioni del segnale di partenza.

#### 4.1.3 Interpolazione/DownSampling

Dato  $y = f(n)$  il segnale con  $n \in \mathbb{Z}$ , il segnale interpolato è:

$$y = f\left(\frac{n}{a}\right) \quad \text{con } a \in \mathbb{Z} \text{ e } |a| \geq 1 \quad (39)$$

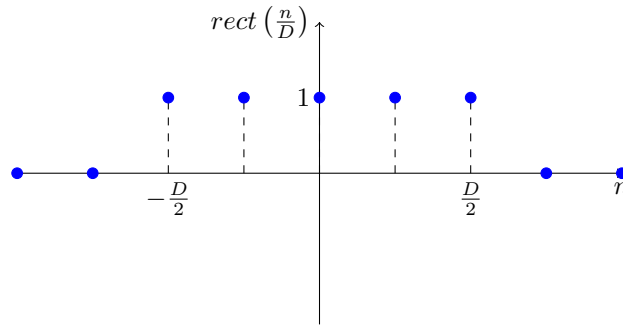
In parole povere, questa operazione non fa altro che distanziare ogni campione di  $a$  intervalli.

## 4.2 Segnali Notevoli

### 4.2.1 Rettangolo Discreto

Viene definito come:

$$\text{rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \left|\frac{n}{D}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (40)$$



### 4.2.2 Gradino Unitario

Anche in questo caso, la formulazione è identica al Gradino Unitario continuo, ossia:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \quad (41)$$

### 4.2.3 Impulso Discreto

Questo segnale è il parente "discreto" della *Delta di Dirac* (23) ma è più semplice da introdurre, dal momento che la sua formula è:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (42)$$

Possiamo dunque notare che, a differenza della delta, l'impulso discreto è una vera e propria funzione.

### 4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto

- **Area Unitaria:** è abbastanza ovvia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1 \quad (43)$$

- **Prodotto Scalare con  $\delta(n)$**

$$\langle f, \delta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n) = f(0) \quad (44)$$

- **Prodotto con  $\delta(n)$ :**

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0) \quad (45)$$

- **Integrazione Discreta:**

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} = u(n) \quad (46)$$

#### 4.2.5 Segnali Periodici Discreti

Dato  $s(n)$  un segnale con  $n \in \mathbb{Z}$  è periodico se e solo se

$$s(n) = s(n + kN), \text{ con periodo } N, \forall n, k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

Se  $N$  è il periodo di  $s(n)$ , allora la frequenza sarà  $\frac{1}{N}$ ; Dal momento che  $|N| \geq 1$  sempre (non ha senso avere periodo nullo), allora la frequenza è sempre frazionaria. Si può dimostrare che solo un segnale con frequenza razionale può essere periodico, mentre se è irrazionale non lo potrà mai essere.

#### 4.2.6 Fasore Discreto

La funzione è molto simile al fasore continuo:

$$s(n) = e^{2\pi j f_0 n} \quad (48)$$

Dove  $f_0$  dev'essere razionale altrimenti la funzione non sarà periodica.

## 4.3 Proprietà dei Segnali Discreti

### 4.3.1 Durata

La durata di un segnale discreto è la somma delle "stecche" non nulle di un grafico, o meglio, la lunghezza del supporto di  $s(t)$

$$D = n_2 - n_1 + 1 \quad (49)$$

Dove  $n_2, n_1$  sono gli estremi non nulli del segnale.

### 4.3.2 Area

Dato  $s(n), n \in \mathbb{Z}$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \quad (50)$$

### 4.3.3 Valor Medio

Il valor medio è un  $\tilde{s}$  tale che la funzione costante  $s(t)' = \tilde{s}$  ha la stessa area di  $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} s(n) \quad (51)$$

### 4.3.4 Potenza Istantanea

Non è altro che il modulo del segnale in un determinato istante  $n$ , ossia:

$$P_s(n) = \begin{cases} s(n)\overline{s(n)} & \text{se } s(n) \in \mathbb{C} \\ s(n)^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (52)$$

### 4.3.5 Energia

è l'area della Potenza Istantanea, ossia:

$$E_s = \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \quad (53)$$

### 4.3.6 Potenza Media

è il valor medio della Potenza Istantanea, ossia:

$$P_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \quad (54)$$

### 4.3.7 Segnali Potenza ed Energia

Anche in questo caso possiamo fare la distinzione tra i segnali potenza e i segnali energia, la definizione è la stessa presentata alla sezione (3.3.7)

## 5 Sistemi

In forma generale, un sistema descrive una relazione/processo di Causa-Effetto tra un INPUT ed un OUTPUT. In particolare nel corso ci focalizzeremo sui sistemi di Elaborazione dei Segnali.

Un **Sistema di Elaborazione dei Segnali** può essere vista come una relazione o legge di trasformazione di un segnale in un altro, dunque, formalmente:

Dato un sistema  $S[\cdot]$ , possiamo dire che:

$$y(b) = S[x(t)] \quad (55)$$

Dove  $y(b)$  è il segnale in output mentre  $x(t)$  è il segnale in input. In base alla continuità dei segnali e dei domini possiamo distinguere i sistemi in: **Continui, Discreti e Misti**

### 5.1 Sistemi Continui

Dato un sistema  $y(b) = S[x(a)]$ , con  $b \in B, a \in A$  questo si dice continuo se e solo se:

- $A, B$  sono insiemi continui
- $y(b), x(a)$  sono funzioni continue

Una classe importante di questi sistemi sono i **Sistemi Tempo-Continui** in cui la variabile è il tempo.

**Esempi.**

- **Ritardatori**

$$y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0) \quad (56)$$

Questo sistema non fa altro che ritardare il segnale  $x(t)$  di una quantità di  $t_0$  secondi.

- **Quantizzatore**

$$y(t) = \text{ROUND}(x(t)) \quad (57)$$

Questo sistema arrotonda ogni valore di  $x(t)$  al suo intero più vicino.

- **Integratore**

$$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (58)$$

Questo sistema associa ad ogni istante  $t$  l'area compresa tra  $t - T$  e  $t$

## 5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui

### 5.2.1 Non Dispersività

Un sistema  $S[\cdot]$  è non dispersivo se e solo se il sistema dipende solo da  $t$  e dal valore attuale di  $x(t)$ , ossia:

$$y(t) = S[t; x(t)] \quad (59)$$

possiamo dire che questi sistemi sono senza memoria perchè non considerano per nulla il passato.

**Esempio: Amplificatore Ideale**

$$y(t) = A \cdot x(t) \quad (60)$$

### 5.2.2 Causalità

Un sistema  $S[\cdot]$  è causale se e solo se:

$$y(t) = S[t; x(\tau) \text{ dove } \tau \leq T] \quad (61)$$

Questi sistemi associano ad ogni istante  $t$  un valore dipendente non soltanto dal tempo attuale e dal valore  $x(t)$ , ma anche della storia di  $x(t)$ . Bene o male tutti i sistemi reali sono causali, perchè dipendono anche dagli istanti passati di un segnale. Esistono (ma solo in teoria) i segnali **Anticausali**, in cui il sistema dipende dall'istante attuale e quelli futuri (e quindi il futuro causerebbe il presente, impossibile nella realtà)

### 5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un sistema è **Stabile** se e solo se per ogni input limitato, l'uscita è sempre limitata, ossia:

Dato  $S[\cdot]$  dove  $y(t) = S[x(t)]$  con  $|x(t)| \leq K_x < +\infty \forall t \in \mathbb{R}$  allora:

$$|y(t)| \leq K_y < +\infty \forall t \in \mathbb{R} \quad (62)$$

Dove  $K_x, K_y$  sono rispettivamente il limite superiore/inferiore di  $x(t), y(t)$

**Esempi:** L'Amplificatore Ideale (60).

### 5.2.4 Omogeneità

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$ ,  $S$  è detto *omogeneo* se e solo se vale questa proprietà:

Dato come input  $a \cdot x(t)$  con  $a \in \mathbb{R}$  allora:

$$S[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \quad (63)$$



### 5.2.5 Additività

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$ ,  $S$  è detto *additivo* se e solo se vale questa proprietà:

Dato come input  $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$  allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^N x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N y_i(t) \quad (64)$$

### 5.2.6 Linearità

Un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$  è detto *lineare* se è sia omogeneo che additivo con gli stessi pesi, ossia se:

Dato  $x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$  allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \quad (65)$$

Questa proprietà è dovuta, nei segnali, al *Principio di sovrapposizione degli Effetti*, ossia:

*La risposta di un sistema ad una combinazione lineare degli ingressi è uguale alla combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle risposte ad ogni singolo ingresso*

#### Esempi.

- **Integratore definito nel tempo:** grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, questo sistema è lineare:

$$y(t) = \int_{t-T}^t \sum_{i=1}^N a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_{t-T}^t a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \quad (66)$$

### 5.2.7 Tempo-Invarianza

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$  tempo-continuo,  $S$  è tempo-invariante se e solo se:

$$se S[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (67)$$

Questa proprietà afferma che il sistema non dipende da un eventuale ritardo(o anticipo) del segnale.

## 6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui

Sia la linearità che la tempo invarianza sono così importanti che dedicheremo un intero capitolo ai sistemi LTI (o Lineari e Tempo-Invarianti), dal momento

che tali proprietà implicano altre proprietà altrettanto interessanti, come quella legata alla risposta all'impulso. Riprendiamo la proprietà (26) della delta di Dirac e un segnale  $x(t)$ . Consideriamo ora il sistema

$$S \left[ \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]$$

Se  $S[\cdot]$  è lineare possiamo considerare  $x(\tau)$  come coefficiente e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (68)$$

Possiamo definire la *risposta all'impulso da parte del sistema* come  $h(t) := S[\delta(t)]$ . Se  $S$  è anche tempo-invariante, allora

$$h(t - t_0) = S[\delta(t - t_0)] \quad (69)$$

Possiamo riscrivere l'equazione di partenza se  $S[\cdot]$  è lineare e tempo-invariante come:

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (70)$$

## 6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione

Definiamo:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (71)$$

E si dice  $x(t)$  *convoluto con*  $h(t)$ ; è un'operazione molto importante in segnali, tanto da avere una definizione. L'importanza di  $h(t)$  noi la possiamo apprezzare quando dobbiamo studiare un segnale ignoto: passando al sistema un impulso, e osservando l'output, tale output sarà proprio  $x(t)$  convoluto con  $h(t)$  (se il sistema è lineare e tempo invariante).

### 6.1.1 Proprietà

- **Commutativa:** dati 2 segnali  $f, g$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (72)$$

Tale proprietà è facile da dimostrare:

Consideriamo la convoluzione  $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ . Effettuiamo ora un cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = t - \tau \\ \tau = t - x \\ dx = -d\tau \end{cases}$$

Sostituiamo ora le  $\tau$  per avere un integrale in  $x$  (NB: gli estremi di integrazione si invertono dal momento che  $x$  è un "ribaltamento" di  $\tau$ ):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)g(x)(-dx) &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx &= \\ g(t) * f(t)\end{aligned}$$

Alla fine ho risolto il  $-dx$  semplicemente invertendo ancora gli estremi di integrazione. Il significato di questa proprietà è importante: se è vero che è possibile studiare un sistema LTI rispetto alla sua risposta all'impulso, è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema rispetto ad un segnale  $x(t)$

- **Associativa:** dati 3 segnali  $f, g, h$  allora:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (73)$$

- **Distributiva (rispetto alla somma):** dati 3 segnali  $f, g, h$ :

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (74)$$

- **Durata della Convoluzione:** dati 2 segnali  $f, g$  con durata rispettivamente  $D_1, D_2$  allora la durata di  $f(t) * g(t)$  è  $D_1 + D_2$
- **Convoluzione con  $\delta(t)$ :** dato un segnale  $f(t)$  allora:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (75)$$

Possiamo infatti dire che  $\delta(t)$  è l'operatore neutro dell'operazione di convoluzione, questo perchè il delta è una funzione che avviene tutta in un istante e quindi non altera la funzione di partenza; una sua eventuale traslazione, trasla la funzione  $f(t)$ . La dimostrazione è banale perchè si basa sulla proprietà del campionamento della delta (26)

## 6.2 Proprietà dei Sistemi LTI Continui

### 6.2.1 Causalità

Dato un sistema LTI  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ ,  $S$  è causale se  $y(t)$  accade DOPO il segnale  $x(t)$ , questo per il concetto stesso di causalità:  $y(t)$  è la risposta all'impulso di  $x(t)$  quindi DEVE accadere dopo, in particolare si dice che:

$$\text{Un sistema è causale} \iff h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (76)$$

Proprio per questo motivo, dal momento che  $y(t)$  può essere descritto come risposta all'impulso, ossia come convoluzione tra  $x(t)$  e  $h(t)$ , se il sistema è causale allora possiamo ridefinire la  $y(t)$  come integrale dall'infinito passato fino all'istante  $t$  presente, ossia:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (77)$$

Possiamo anche, per la proprietà commutativa (72), riscrivere la  $y(t)$  come integrale tra la risposta  $h(t)$  e il segnale  $x(t)$  ribaltato e traslato di tutti i valori di  $\tau$  da 0 fino all'infinito futuro

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (78)$$

### 6.2.2 Stabilità BIBO

Dato un sistema LTI  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ ,  $S[\cdot]$  è BIBO se e solo se:

$$\forall x(t) : |x(t)| < M < \infty \rightarrow |y(t)| < N < \infty \quad (79)$$

In particolare possiamo osservare che:

$$|y(t)| = |S[x(t)]| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right|$$

Sappiamo inoltre che, data una qualsiasi  $f(x)$  vale questa disuguaglianza:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

Dunque

$$y(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t - \tau)|d\tau$$

Per la proprietà del valore assoluto  $|ab| = |a||b|$  allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t - \tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau$$

Ma  $x(t-\tau) \leq M$  perchè abbiamo ipotizzato che il segnale in ingresso sia limitato, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

In definitiva:

$$y(t) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Possiamo dunque affermare che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile BIBO è che  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$  converga, altrimenti  $y(t)$  è illimitato.

**Teorema.** Se la risposta all'impulso del Sistema non è assolutamente convergente allora non è BIBO Stabile

**Ipotesi.** Ipotizziamo che:

1. Il sistema sia BIBO Stabile,  $|y(t)| < N < \infty$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = +\infty$
3. consideriamo una  $x(t)$  limitata, ossia  $x(t) = \text{sign}[h(-t)]$

**Dimostrazione.** Possiamo dire che per  $t = 0$  la risposta all'impulso è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(0-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sign}[h(-\tau)] d\tau$$

per  $t = 0$ ,  $\text{sign}[h(-\tau)] = 1$  dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sign}[h(-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = |y(t)| \\ |y(t)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty \end{aligned}$$

ASSURDO, allora  $y(t)$  è instabile.

Possiamo dunque affermare che: Un sistema è BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (80)$$

### 6.2.3 Risposta in frequenza

Consideriamo la risposta del sistema rispetto al fasore di frequenza  $f$ :

$$x_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

Dal momento che il sistema è LTI allora:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x_f(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi \tau} d\tau = \\ &= e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \tau} d\tau \end{aligned}$$

Possiamo vedere  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \tau} d\tau$  come una sorta di convoluzione in 0, che noi chiamiamo  $H(f)$  e definiamo **Risposta in Frequenza**. Possiamo riscrivere l'equazione come:

$$y(t) = H(f)x_f(t) \quad (81)$$

Da  $H(f)$  possiamo definire:

- **Risposta in Ampiezza:**  $|H(f)|$
- **Risposta in Fase:**  $\angle H(f)$

Questa proprietà dei LTI è molto importante poichè ci dice che la risposta in frequenza di un qualsiasi segnale  $x(t)$  è un altro segnale **alla stessa frequenza**, magari traslato o amplificato, cioè la risposta di un fasore è ancora un fasore di frequenza  $f$  ma moltiplicato per un valore complesso  $H(f)$

### 6.3 Proprietà Sistemi Discreti

Un sistema  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$  è detto discreto se e solo se  $x, y$  sono segnali discreti; possiamo enunciare per tali sistemi le stesse proprietà dei sistemi LTI continui:

**Causalità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.1)

**Stabilità BIBO.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.2)

**Linearità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.6)

**Tempo-Invarianza.** La medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.7)

## 7 Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti

Consideriamo un sistema  $S[\cdot] : y(n) = S[x(n)]$  con  $n \in \mathbb{Z}$  Lineare e Tempo-Invariante; possiamo riscrivere  $x(n)$  come somma infinita tra i prodotti tra l'impulso ideale e il loro peso, ossia come:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Allora:

$$\begin{aligned} y(n) &= S[x(n)] \\ &= S\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \underbrace{S[\delta(n-i)]}_{h(n)} \end{aligned}$$

Dal momento che  $S[\cdot]$  è anche Tempo-Invariante, allora:

$$h(n - n_0) = S[\delta(n - n_0)]$$

In definitiva, anche nel caso discreto, possiamo enunciare la proprietà fondamentale dei sistemi LTI, ossia che un qualsiasi sistema LTI può essere descritto come convoluzione tra l'ingresso e la risposta all'impulso del sistema:

$$y(n) = S[x(n)] = x(n) * h(n) \quad (82)$$

### 7.1 Causalità

Un sistema  $S[\cdot]$  LTI discreto è **Causale** se e solo se:

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0, n \in \mathbb{Z} \quad (83)$$

Dunque, come avevamo detto nel continuo,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^n x(i)h(n-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \quad (84)$$

Ossia un sistema LTI causale può essere scritto come la somma infinita del prodotto degli ingressi e degli impulsi dall'infinito passato al presente o come somma infinita degli ingressi presenti e passati per l'impulso

## 7.2 Stabilità BIBO

Per definizione, un sistema LTI  $S[\cdot]$  è stabile BIBO se e solo se:

$$\forall x(n) : |x(n)| \leq M < \infty \longrightarrow |y(n)| \leq N < \infty \quad (85)$$

Ma possiamo ricavare un'altra definizione:

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| \\ \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| \\ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| &\leq M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Allora  $S[\cdot]$  è stabile BIBO se  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < \infty$ , cioè se la risposta all'impulso è assolutamente sommabile

**Ma è anche necessaria la condizione?** Dimostriamo per assurdo

**Ipotesi.**

1.  $y(n)$  è stabile
2.  $x(n)$  è limitata,  $x(n) = \text{sign}[h(-n)]$
3.  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \infty$

**Dimostrazione.** Calcoliamo  $y(n)$  per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(-i)| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|\text{sign}[|h(i)|] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Per ipotesi (3)  $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = +\infty$  dunque  $y(t)$  non è stabile, ASSURDO!  
Allora  $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$  In definitiva possiamo affermare che:

$$\text{Un sistema LTI è BIBO} \iff \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty \quad (86)$$



### 7.3 Convoluzione Discreta

Definiamo  $a(n)$  convoluto con  $b(n)$  la seguente operazione

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i)b(n-i) \quad (87)$$

#### 7.3.1 Proprietà

Enunciamo qui anche le proprietà di cui gode la convoluzione discreta:

**Commutativa:** La convoluzione è commutativa, allora vale che

$$f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$$

**Dimostrazione.**

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i)$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} m = n - i \\ i = n - m \end{cases}$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i) &= \sum_{n-m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)f(n-m) = \\ &= g(m) * f(m) \end{aligned}$$

In questo caso possiamo scambiare senza problemi gli estremi della sommatoria dal momento che non dobbiamo preoccuparci del segno (mentre nell'integrale dovevamo considerare pure il  $d\tau$  che dava un verso di integrazione).

**Associativa** Ha la stessa formulazione della Convoluzione Continua (72)

**Distributiva (rispetto alla Somma)** La stessa formulazione della Convoluzione Continua (6.1.1)

**Convoluzione con  $\delta(n)$**  La stessa formulazione della Convoluzione Continua (6.1.1)