

Appunti di Intelligenza Artificiale

By *@Thisisfava*

2024/2025

Contents

	1
1 Intelligenza	2
1.1 Definizione Operativa	2
1.2 Problema dell'agire umanamente	2
1.3 Test di Turing	3
2 Storia dell'IA	4
2.1 Nascita	4
2.2 Prima era: l'Approccio Simbolico	4
2.3 Seconda era: I Sistemi Esperti	4
2.4 Un Nuovo Approccio	5
3 Agenti	6
3.1 Definizione	6
3.2 Caratteristiche dell'Ambiente	6
3.3 Tipi di Agenti	7
3.3.1 Agente Reflex	7
3.3.2 Agente Reflex con Modello	7
3.3.3 Agente basato su Goal	7
3.3.4 Agente basato su Utilità	8
3.4 Relazione di Preferenza	8
3.4.1 Definizioni	8
3.4.2 Proprietà	8
3.5 Teorema di Neumann-Morgenstein	9
4 Problemi di Search	10
4.1 Formulazione del Problema	10
4.2 Classificazione dei problemi	10
4.3 Approccio Esaustivo/Esplicito	11
4.4 Approccio Implicito	11
4.5 Caratteristiche di un Algoritmo	11
4.6 Problema di Riferimento	12
4.7 Ricerca Non Informata	12
4.7.1 Depth-First-Search	12
4.7.2 Breath-First-Search	13
4.7.3 DFS/BFS Ottimizzati	13
4.8 UCS (Uniform Cost Search)	15
4.8.1 Algoritmo (Ad alto livello)	15
4.8.2 Ottimalità di UCS	16
4.8.3 UCS con EXL	16
4.9 Ricerca Informata	16
4.9.1 A*	17
4.9.2 A* con EXL	17

4.9.3	Monotonicità di f	17
4.9.4	Ottimalità di A^*	18
4.10	Progettare un'Euristica	18
4.10.1	Problema Rilassato	19
4.10.2	Limiti di A^*	19
4.11	Focal Search	19
4.11.1	Terminologia	19
4.11.2	Descrizione Algoritmo	20
4.11.3	Limiti di Focal: Trashing	21

1 Intelligenza

Dare una definizione generale e universale di intelligenza è davvero difficile, dal momento che l'intelligenza può manifestarsi in diversi modi e atteggiamenti. È stata data, tuttavia una **definizione operativa** che permette di descrivere diverse intelligenze rispetto a **come fare** e **cosa fare**.

1.1 Definizione Operativa

La definizione operativa di cui parlavo prima è riassumibile nella seguente tabella

	Umanamente	Razionalmente
Pensare	Codificare il funzionamento della mente in un programma	Un programma che usa deduzioni logiche per risolvere il problema
Agire	Un programma che ha comportamento umano	Un programma che prende "buone" decisioni

Pensare Umanamente. Consiste nel ottenere un programma che pensa come il nostro cervello; è impossibile dal momento che ancora oggi non lo conosciamo del tutto.

Pensare Razionalmente. Consiste nel formalizzare tutta la conoscenza tramite assiomi/regole logiche per poter dedurre/inferire ragionamenti

Agire Umanamente. Consiste nell'emulare il comportamento umano (sbagliando, commettendo imprecisioni, ecc...). I captcha sfruttano questa capacità per distinguere i bot dagli umani.

Agire Razionalmente. Consiste nella capacità da parte dell'agente di prendere delle decisioni che lo portano al raggiungimento dei suoi obiettivi.

Nota Bene: Questa è la definizione che utilizzeremo nel corso.

1.2 Problema dell'agire umanamente

Per quanto possa essere facile da realizzare e utile un agente che agisce umanamente (perché quest'intelligenza è profondamente legata al task per il quale sono costruiti), esiste un problema che li affligge (soprattutto nei casi più complessi): l'impossibilità di determinare il percorso di ragionamento che ha portato l'agente a prendere questa o quella decisione. Il problema è così critico che l'intera industria dell'autonomous driving è stata rallentata.

1.3 Test di Turing

Spesso, tuttavia, la tabella sopra proposta risulta essere poco pratica e molto astratta. Alan Turing propose, invece, un esperimento che permettesse di determinare se l'agente è intelligente o meno a partire dall'essere intelligente (si spera) per definizione: l'essere umano. Una formulazione del Test di Turing è la seguente:

Dati A e B agenti intelligenti (tipicamente un uomo e una donna), e C l'agente di cui testare l'intelligenza:

- C deve indovinare il sesso di A e B
- B collabora con C
- A inganna C

Se swappando A con B si ottengono le stesse percentuali di successo, l'agente pensa umanamente. Questo perchè, per superare il test l'agente dovrebbe possedere le seguenti capacità:

- **interpretazione del linguaggio naturale** per comunicare con l'esaminatore nel suo linguaggio umano
- **rappresentazione della conoscenza** per memorizzare quello che sa o sente
- **ragionamento automatico** per utilizzare la conoscenza memorizzata in modo da rispondere alle domande e trarre nuove conclusioni
- **apprendimento** per adattarsi a nuove circostanze, individuare ed estrapolare pattern

2 Storia dell'IA

Studiare la storia dell'Intelligenza Artificiale è utile per capire quali sono stati i problemi agli approcci usati in passato per capire il successo dei nuovi approcci più moderni.

2.1 Nascita

A differenza di molte altre discipline, l'IA ha una data e un luogo di nascita: il convegno di Dartmouth, organizzato dallo scienziato McCarty, nel **1956**. A quel convegno parteciparono molti informatici, psicologi, statistici, matematici, che avevano il sentore di star affrontando tutti lo stesso problema ma da punti di vista differenti. Alla fine del convegno, questo sentore venne confermato e si diede un nome a questo importante problema: **Artificial Intelligence**

2.2 Prima era: l'Approccio Simbolico

Dal 1956 alla fine degli anni '60 ci fu il primo boom dell'IA: tale successo è dovuto alla realizzazione di agenti che "ragionassero" tramite manipolazioni simboliche e sintattiche, e tramite regole di inferenza logica. I primi risultati furono così tanto promettenti che si investì molto in questa tecnologia. Il fatto è che il grande entusiasmo, col tempo, non venne assecondato dai grandi limiti di questa tecnologia:

- **Nessuna conoscenza specifica:** tali tecnologie si basavano SOLO ed ESCLUSIVAMENTE sulla manipolazione sintattica e regole logiche, per cui problemi reali, di dimensioni nemmeno troppo grandi, risultavano impossibili dal momento che queste intelligenze non avevano alcuna conoscenza del dominio applicativo
- **Esplosione combinatoria:** alcuni problemi venivano risolti dall'IA provando diverse combinazioni dei dati di un problema; tuttavia questo approccio portava spesso a tempi di calcolo impraticabili (es: problemi NP-HARD). Dunque su istanze di problemi leggermente più grandi tali intelligenze non scalavano.
- **Limiti di rappresentazione della conoscenza:** l'approccio simbolico usato risultava davvero difficile da implementare per far fronte all'incertezza della realtà e alle situazioni ambigue. Per cui i sistemi realizzati erano molto rigidi e poco scalabili.

Di fronte a tutti questi limiti, i fondi alla ricerca sull'IA vennero immediatamente congelati e si assistette al **primo inverno**

2.3 Seconda era: I Sistemi Esperti

Verso la fine degli anni '70, si pensò che il problema riscontrato nell'approccio precedente fosse dovuto solo alla poca conoscenza del dominio applicativo. Per

cui iniziarono a diffondersi agenti detti **Sistemi esperti** poichè **conoscevano** specificatamente il dominio per cui erano realizzati (quindi non vi era alcuna forma di ragionamento). Erano dotati di un sistema di reasoning (IF-THEN-ELSE) per assistere la gestione aziendale e per altre operazioni. I risultati ottenuti da questi sistemi furono così incredibili che si decise di reinvestire TANTISSIMO. Alcune aziende già negli anni '80 aveva realizzato team IA, per lo sviluppo di sistemi esperti, con centinaia di membri. Ma ecco che, nuovamente, l'Hype generato non fu accompagnato dai risultati sperati:

- **Nessun Apprendimento Automatico:** queste macchine, dal momento che mappavano staticamente ad ogni situazione una risposta, non potevano adattarsi alle varie situazioni per cui, ad ogni nuova situazione era necessario che degli esperti aggiornassero le regole di reasoning
- **Non scalabilità:** anche quest'approccio è affetto dal problema di scalabilità; se il primo approccio permetteva una certa forma di ragionamento logico, questo approccio è fondato solo ed unicamente sulla conoscenza. Il fatto è che tale forma di conoscenza rigida (IF-THEN) non può tener conto delle infinite situazioni incerte della realtà.
- **Difficile formalizzazione:** con la crescita di dimensioni dei sistemi esperti, gli scienziati iniziarono ad avere difficoltà a formalizzare regole sensate e coerenti con le precedenti (il ragionamento umano non è quasi mai algoritmico e lineare).
- **Costi Elevati:** per tutti questi motivi, la manutenzione e aggiornamento di questi sistemi risultò essere, nel tempo, COSTOSISSIMA.

Ed ecco che arrivò il **secondo inverno dell'IA**.

2.4 Un Nuovo Approccio

In generale, possiamo dire, che i primi due approcci esplorati per l'IA fossero fallimentari perchè cercavano di risolvere problemi tipicamente umani con il paradigma tradizionale dell'informatica:

1. Analizzo il problema
2. Creo l'algoritmo
3. Passo i dati del problema all'algoritmo
4. Ottengo il risultato

Il nuovo approccio usato è invece detto **Machine Learning**:

1. Passo i dati di un problema e le soluzioni corrispondenti (detta Esperienza) ad un computer
2. Tale genererà un programma che possa trasformare i dati in input nelle soluzioni date

3. Tale programma potrà essere eseguito su nuovi input (con o senza buoni risultati)

Purtroppo nei primi anni un tale approccio non era minimamente affrontabile per alcuni motivi:

- **Mancanza di Dati:** per addestrare bene una rete neurale è necessaria una quantità di dati umani IMMENSA, cosa che negli anni 60-80 era impossibile. Oggi, grazie ad internet e ai social network, in rete sono disponibili una quantità quasi infinita di dati (soprattutto testuale).
- **Mancanza di Potenza Computazionale:** per addestrare in tempi utili una rete è necessaria una grande potenza computazionale, potenza che nei decenni successivi si è sviluppata grazie all'industria dei Videogames e delle Schede Grafiche.

3 Agenti

3.1 Definizione

*"Un agente è un ente immerso nell'ambiente. L'agente percepisce l'ambiente tramite **percettori** ed agisce tramite **attuatori**"¹.*

Tramite la percezione, l'ambiente modifica lo stato dell'agente. Tramite l'azione, l'agente modifica lo stato dell'ambiente. Percezioni e azioni possono essere concepite come flussi di informazioni.

3.2 Caratteristiche dell'Ambiente

Un ambiente può essere:

- **Fully/Partially Observable:** nel primo caso l'agente conosce tutto lo stato dell'ambiente (es: a scacchi). Nel secondo caso, l'agente ne conosce solo una parte (es: il mondo reale)
- **Single/Multi Agent:** in un ambiente l'agente può essere unico e indipendente oppure deve interagire con altri agenti (in competizione, in cooperazione, ecc...)
- **Deterministico/Stocastico:** nel primo caso, l'agente conosce apriori l'effetto di ogni azione sull'ambiente. Nel secondo caso, l'effetto può essere solo stimato.
- **Statico/Dinamico:** l'ambiente può non cambiare o cambiare
- **A tempo discreto/continuo**
- **Conosciuto/Sconosciuto:** l'agente può conoscere le regole e le caratteristiche del dominio in cui opera o deve scoprirle man mano.

¹Definizione di Russel-Navig

3.3 Tipi di Agenti

3.3.1 Agente Reflex

L'agente reattivo è sicuramente quello più semplice (ma anche usato): è basato sulla statica mappatura di percezione-azione. La particolarità di questo agente è l'assenza di stato: la mappatura non cambierà mai perché non viene tenuta in considerazione lo storico delle percezioni (è come se fosse un circuito combinatorio, una funzione ben definita).

3.3.2 Agente Reflex con Modello

Più adatto in ambienti parzialmente osservabili, l'Agente Reflex con Modello tiene traccia della parte dell'ambiente che non può osservare nell'istante corrente. Per poter far ciò, l'agente deve poter conoscere:

- **Le leggi che descrivono l'ambiente:** (o quelle sufficienti) per poter determinare come può evolvere l'ambiente a prescindere dalle azioni
- **Gli effetti delle azioni:** per poter determinare l'effetto delle azioni dell'agente sull'ambiente

Questi 2 tipi di conoscenza vengono detti **Modelli del Mondo**

3.3.3 Agente basato su Goal

Un altro tipo di Agente è quello basato su Goal, ossia, quello che conosce l'obiettivo da raggiungere e deve poter calcolare, per ogni azione quanto l'agente si avvicina a tale obiettivo. Questa operazione è semplice se il calcolo si può fare in pochi passi, ma se si deve valutare lo storico delle azioni, in questo caso non lo è più. Esiste un'intera branca dell'IA che si occupa della Ricerca e Pianificazione.

Il concetto di obiettivo, tuttavia, è limitante: in base ad un obiettivo si possono scartare gli stati che ci allontanano e gli stati che ci fanno avvicinare all'obiettivo, ma ancora è difficile **quantificare** la distanza dall'obiettivo. Esistono diversi parametri che possiamo utilizzare per quantificare la bontà di un'azione:

- **Valore Atteso:** Un primo che viene usato per quantificare la bontà di un'opzione tra le tante è il valore atteso (il prodotto tra la vincita e la sua probabilità, prendendo come esempio quello della lotteria)
- **Propensione/Avversione al rischio:** un altro parametro riguarda quanto è propenso al rischio l'agente; in base a quello si può prediligere la minima vincita con alta probabilità o massima vincita con bassa probabilità
- **Utilità:** questo parametro permette di quantificare quanto è utile un premio rispetto ad un altro (es: 100\$ per un povero sono molto utili. Per un ricco, invece, sono poco utili).

3.3.4 Agente basato su Utilità

Un agente basato su Utilità è un agente con modello le cui decisioni vengono prese non per raggiungere un obiettivo, ma per massimizzare il grado di "contentezza" dell'agente stesso. Per apprezzare meglio il concetto di Utilità e come questo abbia avuto importanti ripercussioni in ambito IA è necessario introdurre una serie di formalismi.

3.4 Relazione di Preferenza

3.4.1 Definizioni

- $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ insieme degli stati possibili
- $s_i \succeq s_j$ è detta **preferenza debole** di s_i a s_j
- $s_i \succ s_j$ è detta **preferenza (stretta)** di s_i a s_j
- $s_i \sim s_j$ è detta **indifferenza** di s_i a s_j

Grazie alla probabilità e alle definizioni precedenti è possibile definire il concetto di **Lotteria** l (che può essere vista anche come una funzione di massa):

$$l = [p_1 : s_1, p_2 : s_2, \dots] \quad (1)$$

dove s_i è il possibile esito della lotteria, $p_i : s_i$ è la probabilità che si verifichi s_i . Inoltre è necessario che $\sum_i p_i = 1$

3.4.2 Proprietà

Affinchè una relazione sia di preferenza deve rispettare le seguenti proprietà

- **Completezza:** è necessario che ogni preferenza sia comparabile

$$s_1 \succ s_2 \vee s_1 \succeq s_2 \vee s_1 \sim s_2 \quad \forall s_1, s_2 \quad (2)$$

- **Transitività:** Dati $s_1 \succ s_2$ e $s_2 \succ s_3$ allora:

$$s_1 \succ s_3 \quad (3)$$

- **Sostituibilità:** Dati 2 stati s_a e s_b indifferenti, le lotterie, che contengono sia il primo stato che il secondo stato con la stessa probabilità q , devono essere altrettanto indifferenti

$$[q : s_a, p_1 : s_1, \dots] \sim [q : s_b, p_1 : s_1, \dots] \quad \text{se } s_a \sim s_b \quad (4)$$

Inoltre è necessario che $q + \sum_i p_i = 1$

- **Decomponibilità (Not Fun In Gambling):** giocare alle varie lotterie in una qualsiasi sequenza non deve influenzare le probabilità di vincita. In parole povere, le varie sottolotterie di una lotteria devono essere indipendenti tra loro. Formalizzando:
Detta p_i^e la probabilità con cui la lotteria e seleziona lo stato s_i , allora date 2 lotterie l_1, l_2 se $l_1 \sim l_2$ allora

$$p_i^{l_1} = p_i^{l_2} \quad (5)$$

- **Monotonicità:** Dati stati preferibili e delle probabilità, la lotteria preferibile è quella che assegna la probabilità maggiore allo stato più preferibile, ossia:
Se $s_1 \succ s_2$ e $p > q$ allora:

$$[p : s_1, (1-p) : s_2] \succ [q : s_1, (1-q) : s_2] \quad (6)$$

- **Continuità:** Dati 3 stati, uno più preferibile dell'altro, esisterà sempre un valore tra 0 e 1 che renda la lotteria, tra il più preferibile e il meno preferibile, indifferente allo stato "intermedio", ossia:
Dati $s_1 \succ s_2 \succ s_3$, $\exists p \in [0, 1]$ tale che:

$$s_2 \sim [p : s_1, (1-p) : s_3] \quad (7)$$

3.5 Teorema di Neumann-Morgenstein

Data una relazione di preferenza che rispetta le proprietà (2),(3),(4),(5),(6),(7) allora $\exists u : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ (dove \mathcal{L} è l'insieme delle possibili lotterie) tale che:

$$s_1 \succ s_2 \iff u(s_1) > u(s_2) \quad (8)$$

$$u([p_1 : s_1, \dots]) = \sum_i p_i u(s_i) \quad (9)$$

La u viene detta *funzione di utilità* mentre $u(s_i)$ è detta *utilità dello stato i* . In parole povere, il teorema afferma che, data una relazione di preferenza che rispetta quelle proprietà, è possibile definire una funzione che associa ad ogni stato un'utilità, dunque se uno stato è preferibile ad un altro, la sua utilità sarà maggiore; inoltre l'utilità di una lotteria è definibile come il valore atteso della funzione utilità. Dunque, per raggiungere lo stato di massima felicità, l'agente deve massimizzare una funzione (che è appunto u). Dunque, grazie a questo importante teorema, siamo riusciti a ricondurre una forma di ragionamento nella massimizzazione di una funzione (che è un problema facilmente attaccabile)

4 Problemi di Search

L'insieme dei problemi di Search è un insieme di problemi legati all'inferenza (piuttosto che al Machine Learning). Tali problemi vengono formulati e risolti da un agente per trovare il percorso che li porterà ad uno stato obiettivo; per fare ciò, considereremo un ambiente che è:

- **Statico** dal momento che assumiamo che durante la ricerca il mondo non cambi (altrimenti la ricerca sarà inutile)
- **A Singolo Agente** per semplificare la situazione
- **Completamente Osservabile** per poter conoscere lo stato iniziale dell'agente
- **Discreto** in modo da poter descrivere i passi risolutivi in maniera discreta
- **Deterministico** perchè ad ogni azione devo essere sicuro del suo effetto per la computazione dello stato successivo

4.1 Formulazione del Problema

Per la descrizione dei problemi di Search useremo queste convenzioni:

- $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ è detto *Insieme degli stati* (deve essere finito)
- $s_i \in S$ è detto *stato iniziale*
- $s_G \in S$ è detto *stato di Goal* (può essere più di uno)
- $A(s_i) = \{a, b, c, \dots\}$ è l'*insieme delle azioni possibili allo stato i*
- $f(s_i, a)$ con $s_i \in S$ e $a \in A(s_i)$ è detto *modello di Transizione* o *Funzione Successore*; corrisponde allo stato successivo
- $c(s_i, a, f(s_i, a))$ è detto *costo Additivo*. Una cosa da tenere a mente per il costo additivo è che i vari costi devono poter essere tutti sommabili (non possono essere grandezze diverse)

Un'altra formulazione interessante del problema usa il *Grafo degli Stati*, dove gli archi sono le azioni e i nodi sono gli stati.

4.2 Classificazione dei problemi

In base a cosa cercare, i problemi di Search possono essere di 3 tipi:

- **Fattibilità**
I problemi di Fattibilità hanno come obiettivo di rispondere la domanda: *Esiste un percorso che mi porta da s_i ad un s_G ?*. In questi problemi bisogna quindi esplorare un qualunque percorso che mi porti all'uscita del labirinto, senza sapere necessariamente la sequenza di azioni o quella più efficiente/interessante.

- **Approssimazione**

I problemi di Approssimazione, invece, ricercano una soluzione che soddisfi alcune garanzie (es: "il percorso trovato dev'essere al massimo il 30% peggiore dell'ottimo"). Chiaramente questi tipi di algoritmi sono difficili da progettare dal momento che dimostrare tali garanzie è davvero arduo.

- **Ottimizzazione**

Sono problemi che richiedono il percorso più bello/efficiente/interessante rispetto a tutti gli altri (e di dimostrarlo) che mi porti allo stato obiettivo.

In generale dobbiamo dire che, negli ultimi 2 casi, il risultato del problema di Search è un albero la cui radice è lo stato iniziale e in cui un ramo porta allo stato obiettivo.

4.3 Approccio Esaustivo/Esplicito

Un primo approccio che potremmo formulare, per risolvere tali problemi, è quello di precalcolare tutti i possibili percorsi e selezionare quello più efficiente. Chiaramente questo approccio è INUTILIZZABILE in problemi di dimensione reale (ma nemmeno troppo grandi): tutti i possibili passi per la risoluzione del Cubo di Rubik, per esempio, sono circa $4,33 \cdot 10^{43}$ permutazioni, cosa che non è possibile contenere tutta in memoria.

4.4 Approccio Implicito

In questo caso, invece, piuttosto che enumerare tutti i possibili percorsi, si esplorano solo quelli più "interessanti" a partire dallo stato iniziale. Dunque, piuttosto che tenere in memoria tutti i possibili percorsi, tengo solo quelli che effettivamente ho esplorato ed eventualmente scarto quelli non ottimi.

4.5 Caratteristiche di un Algoritmo

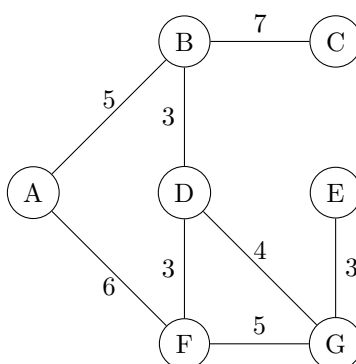
D'ora in poi, gli algoritmi di Search che mostreremo nel corso verranno valutati in base ai seguenti parametri:

- **Correttezza:** questa proprietà afferma che, se l'algoritmo restituisce un risultato, questo dev'essere conforme alle specifiche (cioè, se si richiede, per esempio, di trovare il percorso migliore, il risultato dell'algoritmo DEVE RESTITUIRE IL PERCORSO MIGLIORE)
- **Completezza:** se esiste una soluzione al problema, l'algoritmo la troverà sempre. In altri termini, l'algoritmo deve sempre terminare con una risposta in un tempo finito. Nel caso in cui i passi del problema sono infiniti (ovviamente contabili), la completezza viene detta **Sistematicità** e va dimostrata.
- **Complessità Spaziale:** l'uso (nel caso peggiore) della risorsa spaziale (memoria disponibile) per la risoluzione del problema in funzione della dimensione dell'input

- **Complessità Temporale:** l'uso (nel caso peggiore) della risorsa temporale (passi da eseguire) per la risoluzione del problema in funzione della dimensione dell'input

4.6 Problema di Riferimento

Per presentare i seguenti algoritmi, ci riferiremo sempre a questo grafo, in cui gli archi sono bidirezionali (ossia, per ogni X, Y stati del problema $c(X, a, Y) = c(Y, b, X)$ con a l'arco di transizione da X a Y e b l'arco di transizione da Y ad X)



I vari algoritmi che presenteremo differiscono per come rispondono alla domanda: "Dato che ho ispezionato il nodo, proseguo o vado indietro?"

4.7 Ricerca Non Informata

4.7.1 Depth-First-Search

Un algoritmo classico di ricerca su grafo è la ricerca in profondità. In questa versione, la DFS è dotata di *Backtracking*. Possiamo dire in generale che l'approccio di questo algoritmo è aggressiva, poichè ricerca subito in profondità la soluzione (potrebbe metterci molto o potrebbe metterci poco), ossia non c'è garanzia. Inoltre possiamo osservare che gli alberi generati dalla DFS sono stretti e lunghi.

Funzionamento:

1. Si parte dal nodo iniziale A (che sarà poi radice dell'albero finale)
2. Se il nodo da esplorare ha dei figli, si aggiungono all'albero i vari figli; in caso ve ne sia più di uno, un *Tie-Breaker* spesso usato è basato sull'ordine lessicografico (quindi, per esempio, se esploriamo A, il primo figlio da esplorare sarà B)
3. Si torna indietro se: il nodo è foglia, oppure se il nodo è già stato visitato

Analisi:

- **Correttezza:** La dfs restituisce sempre un albero (grazie all'uso del Backtracking e all'eliminazione dei loop)
- **Completezza:** La dfs restituisce sempre un albero in cui un ramo contiene lo stato obiettivo (se esiste il percorso)
- **Complessità Temporale:** Dato b il *Branching Factor* e d la *profondità massima*, la complessità di tale algoritmo è esponenziale, ossia $O(b^d)$
- **Complessità Spaziale:** La memoria usata è quella necessaria per generare l'albero; in questo caso la complessità è $O(d)$ ossia la profondità massima del percorso dallo start al goal.

4.7.2 Breath-First-Search

Un altro algoritmo classico di ricerca su grafo è la ricerca in ampiezza. Anche la BFS è dotata di *Backtracking*. Possiamo dire in generale che l'approccio di questo algoritmo è conservativa, poichè ricerca sempre allo stesso livello, garantendo di visitare tutti i nodi. Possiamo inoltre dire che gli alberi generati dalla BFS sono larghi e corti.

Funzionamento:

1. Si parte dal nodo iniziale A (che sarà poi radice dell'albero finale)
2. Se il nodo padre ha dei figli da esplorare, vengono tutti aggiunti all'albero; Si prosegue poi ai figli del primo nodo figlio e così via. Il *Tie-Breaker* che possiamo usare è ancora quello basato sull'ordine lessicografico.
3. Si torna indietro se: il nodo è foglia, oppure se il nodo è già stato visitato

Analisi:

- **Correttezza:** Per lo stesso motivo della DFS
- **Completezza:** Per lo stesso motivo della DFS
- **Complessità Temporale:** Dato b il *Branching Factor* e q la *profondità minima*, la complessità di tale algoritmo è esponenziale, ossia $O(b^q)$ (quindi sempre minore, nel caso peggiore, della DFS)
- **Complessità Spaziale:** In questo caso, dato che non viene allocata altra memoria se non il grafo stesso, la complessità spaziale sarà $O(n)$ con n il numero di nodi.

4.7.3 DFS/BFS Ottimizzati

Gli ultimi 2 algoritmi possono essere ottimizzati introducendo nuove strutture dati, usate per evitare di rivisitare i nodi e quindi per generare alberi più piccoli:

EQL (Enqueued List). La EQL, anche detta *lista di accodamento*, è una lista che tiene traccia di tutti i nodi già visitati; è detta di accodamento perchè ad ogni nuova visita, il nodo visitato viene aggiunto alla fine; quando si deve visitare un nodo si verifica che questo non sia già nella lista; se lo è, tutto il sottoalbero relativo non verrà esplorato. Questa operazione è detta **Potatura** o **Pruning**

Frontiera. Definiamo frontiera l'insieme dei nodi foglia non ancora espansi dell'albero; è detta così dal momento che, per la **Separation Property**, separa la parte dell'albero esplorata da quella ancora non esplorata.
Implementazioni della Frontiera:

- **Caso BFS:** la frontiera viene implementata come **Queue** (una coda FIFO)
- **Caso DFS:** la frontiera viene implementata come **Stack** (una coda LIFO)

Analisi:

- **Correttezza:** L'uso delle EQL pota solo i sottoalberi già esplorati, per cui la correttezza non viene compromessa
- **Completezza:** L'algoritmo è ancora completo per il motivo precedente
- **Complessità Temporale/Spaziale:** anche se abbiamo introdotto queste strutture dati per ottimizzare le operazioni, in realtà la complessità nel caso peggiore non cambia. Grazie a queste ottimizzazioni, tuttavia, è possibile usare in un tempo ragionevole i 2 algoritmi

4.8 UCS (Uniform Cost Search)

Nella presentazione di BFS e DFS, abbiamo sempre ipotizzato di dover risolvere problemi di Fattibilità (paragrafo 4.2), per cui i 2 algoritmi hanno dovuto solo esplorare il grafo fino a generare un nodo obiettivo del problema. Per risolvere il problema di Ottimizzazione, invece, dovremo utilizzare l'approccio conservativo della BFS per progettare un algoritmo che trovi sempre il percorso ottimo.

Cost To Go Function. Per descrivere l'implementazione della UCS è necessario innanzitutto definire la *Cost-to-Go Function* $g(V)$. Dato un vertice V , $g(V)$ è il costo complessivo per arrivare dallo stato A allo stato V tramite un percorso p .

4.8.1 Algoritmo (Ad alto livello)

Inizialmente si aggiunge alla Frontiera il nodo di Partenza A e dopodichè

- Si calcolano per ogni nodo della frontiera il $g(V)$
- Si seleziona il nodo da espandere con $g(V)$ più piccolo
- Ci si ferma solo quando **espandiamo** un nodo Goal

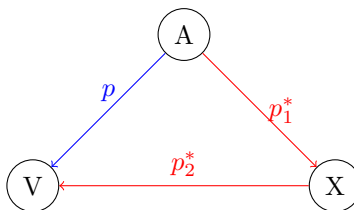
4.8.2 Ottimalità di UCS

Si può dimostrare che UCS non solo è **corretto** e **completo** e che seleziona il percorso **ottimo**, ma che *"Ogni volta che UCS seleziona per la prima volta un nodo per l'espansione, il percorso che porta ha quel nodo ha costo minimo"*

Ipotesi.

1. UCS seleziona sempre per la prima volta dalla frontiera un nodo V da espandere ottenuto tramite percorso p con costo minore
2. Il percorso p non è ottimo

Dimostrazione. Se p non è ottimo, allora deve esistere sulla frontiera un nodo X tale che la somma dei percorsi $p_1^* = A \rightarrow X$ e $p_2^* = X \rightarrow V$ sia $p^* = p_1^* + p_2^*$ e $g(p^*) < g(p)$. Dal momento che $g(p^*) = g(p_1^*) + \Delta p_2^*$ allora $g(p_1^*) + \Delta p_2^* < g(p)$; Δp_2^* è per definizione una quantità non negativa, dunque $g(p_1^*) < g(p)$, ossia UCS ha selezionato prima un percorso p che è peggiore di p_1^* , e ciò porta ad un **assurdo** perchè noi abbiamo definito l'algoritmo in maniera diversa, viene violata la prima ipotesi. Allora $p = p^*$.



4.8.3 UCS con EXL

Una prima forma di ottimizzazione della UCS la otteniamo introducendo una struttura dati detta *Expansion List* o *Lista delle Espansioni*. Questa lista è molto simile alla EQL, solo che in questo caso si aggiunge un nodo solo quando deve essere espanso, e non quando viene generato.

4.9 Ricerca Informata

Si parla di ricerca **non informata** quando dobbiamo affrontare un problema di Search avendo a disposizione **solo** il grafo e il criterio di scelta del prossimo nodo da esplorare.

Si parla, invece, di ricerca **informata** quando oltre alle informazioni precedenti abbiamo anche una stima $f(V)$ della bontà del nodo V , ossia quanto è distante tale nodo dall'obiettivo. Tramite queste stime è possibile realizzare algoritmi con approccio **Best-First** in cui il criterio di scelta di un nodo da esplorare avviene in base alla minimizzazione di $f(V)$.

4.9.1 A*

L'algoritmo A* è un algoritmo nato negli anni '60 per permettere al primo prototipo di Robot autonomo (Shakey) di arrivare da un punto A ad un punto B col percorso più breve possibile. A* è praticamente identico a UCS, tranne per il fatto che il cost-to-go da ottimizzare è $f(s) = g(s) + h(s)$ dove $h(s)$ è detta **euristica di distanza** dall'ottimo. L'euristica dev'essere una funzione:

- Computabile in tempo costante
- Ammissibile (ossia deve sottostimare il vero valore, o meglio la stima dev'essere ottimista)

Trovare un'euristica sensata al problema, tuttavia, potrebbe non essere semplice.

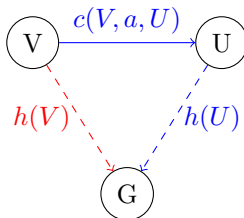
4.9.2 A* con EXL

Dal momento che A* può essere visto come una generalizzazione di UCS (UCS è il caso in cui l'euristica è sempre nulla), possiamo equipaggiare anche A* con una lista delle espansioni per ottimizzare il tempo di ricerca. Purtroppo, in questo caso, non è sempre detto che con la EXL e l'euristica si conservi sempre l'ottimalità (perchè è possibile che si selezionino prima percorsi da espandere più lunghi di altri) ed è per questo che l'euristica h debba essere anche **consistente**.

Euristica Consistente La consistenza (o monotonicità) di un'euristica è una proprietà più forte dell'ammissibilità (quindi la implica) e afferma che: Dati 2 nodi V, U e un'azione a , allora

$$h(V) \leq c(V, a, U) + h(U) \quad \forall V, U \quad (10)$$

La proprietà può essere interpretata come una disuguaglianza triangolare in questa forma (G è il nodo goal):



Ossia, la stima di un nodo non può essere peggiore del costo per arrivare al nodo successivo + la stima del nodo successivo.

4.9.3 Monotonicità di f

Assumendo che h sia consistente, allora possiamo dimostrare che f sia monotona non decrescente.

Dimostrazione. Consideriamo i nodi V, U e un arco che li collega a (simili al disegno precedente) generati dopo p passi dall'algoritmo A^* . Sappiamo che $f(U) = g(U) + h(U)$ e che $g(U) = g(V) + c(V, a, U)$; sostituendo otteniamo che $f(U) = h(U) + g(V) + c(V, a, U)$. Allora dalla definizione di consistenza sappiamo che

$$\begin{array}{c} c(V, a, U) + h(U) \geq h(V) \\ \underbrace{h(U) + c(V, a, U) + g(V)}_{f(U)} \geq \underbrace{h(V) + g(V)}_{f(V)} \end{array}$$

Dunque

$$f(U) \geq f(V)$$

4.9.4 Ottimalità di A^*

Ipotesi

1. A^* seleziona come primo nodo da espandere V , ottenuto tramite un percorso p
2. p non è ottimo ($p \neq p^*$)

Dimostrazione Se p non è ottimo per ipotesi 2, allora deve esistere necessariamente sulla frontiera un nodo X che si trova sul cammino ottimo p^* verso V . Lungo ogni percorso, abbiamo dimostrato prima, che f è monotona non decrescente dunque $f(V) \geq f(X)$; allora V non può essere stato scelto prima di X : ASSURDO, $p = p^*$

4.10 Progettare un'Euristica

$$\forall S, h(S) = 0 \bullet \xrightarrow{h(S)} \bullet \xrightarrow{h(S)} \bullet \forall S, h(S) = g^*(S)$$

Per progettare un'euristica, come abbiamo detto, è necessario non solo che sia ammissibile ma che la sua computazione sia efficiente (computata in tempo costante). Chiaramente, più è efficiente l'euristica, meno stretta è, quindi dobbiamo trovare il compromesso giusto per avere una buona euristica. Tale ha come estremi:

- L'Estremo sinistro (caso in cui l'euristica è **triviale**)
- L'Estremo destro (caso in cui è il problema ad essere **triviale** e l'euristica conosce già il percorso completo)

Realizzare una buona euristica per A^* ci permette di diminuire di molto la dimensione degli alberi e permette di risparmiare tempo e spazio occupati, quindi il nostro obiettivo è di ottenere l'euristica migliore, ossia:

Dati h_1, h_2 euristiche tali che $\forall S, h_1(S) \leq h_2(S)$ allora h_2 domina h_1 . Inoltre, anche se non per tutti gli S un'euristica domina l'altra, è possibile creare un'euristica dominante su h_1, h_2 , ossia:

$$h_3 = \max\{h_1, h_2\}$$

Un modo che abbiamo per progettare un'euristica è risolvendo un **Problema Rilassato**

4.10.1 Problema Rilassato

Dato un problema P , il suo rilassamento \hat{P} è una sua versione più semplice, ottenuta *rilassando* alcuni suoi vincoli; per esempio, in una mappa, il problema rilassato della ricerca del percorso l'abbiamo ignorando tutti gli ostacoli, ipotizzando di poter attraversare gli edifici. Per questo motivo vale che per ogni S, U nodi e a azione:

$$\hat{c}(S, a, U) \leq c(S, a, U)$$

Risolvere un problema rilassato può essere una buona euristica.

4.10.2 Limiti di A^*

Il problema di A^* è, essenzialmente, che è troppo rigido: nel caso in cui sulla frontiera vi siano MOLTI nodi tutti con un valore di f molto simile, allora A^* perderà molto tempo a espanderli tutti quanti. Può essere anche che un nodo arrivi all'ottimo in un certo numero di passi, mentre un altro nodo ci arrivi con un numero di passi decisamente inferiore. La formulazione di A^* più flessibile è il **Focal Search**

4.11 Focal Search

Per l'implementazione del Focal Search è necessario implementare una nuova euristica $\hat{h}_F(n)$ che stima il costo **computazionale** (e non in termini di passi) per raggiungere un goal. Questa euristica poi, rispetto all'euristica h , deve **sovrastimare** (quindi essere pessimista). Possiamo risolvere diversi problemi NP-HARD con questa tecnica (vedi il TSP, potrebbe chiederlo all'esame)

4.11.1 Terminologia

Ai fini di spiegare il funzionamento del Focal Search è necessario introdurre un po' di notazione:

- F la frontiera (la stessa di A^*)
- $n_{\text{best}} = \arg \min_{n \in F} f(n)$ è il nodo in frontiera che minimizza la f (non necessariamente l'ottimo n^*)

- $\omega \geq 1$ è un parametro che impostiamo noi, in funzione del quale possiamo definire il limite di subottimalità della soluzione
- **OPT** è il costo del percorso minimo
- $\text{FOCAL} \subseteq F$ la lista focale, che è una sottolista definita nella seguente maniera:

$$\text{FOCAL} = \{n \in F \mid f(n) \leq \omega f(n_{\text{best}})\}$$

Sulla base di ciò possiamo definire anche la **regola di espansione**:

$$n_{\text{boxnext}} = \arg \min_{n \in \text{FOCAL}} \hat{h}_F(n)$$

Tale regola impone l'espansione del nodo che è più vicina alla soluzione, ossia che richiede meno passi computazionali per arrivare alla soluzione; dal momento che ci stiamo facendo guidare dall'euristica di costo computazionale $\hat{h}_F(n)$ e non dall'euristica di costo $h(n)$, sicuramente l'ottimalità viene perduta ma tale subottimalità può essere quantificata in funzione di ω

4.11.2 Descrizione Algoritmo

Il focal search procede nella stessa maniera di A* con l'unica differenza che i nodi da espandere non sono tutti quelli in frontiera, ma quelli in lista focale; in particolare definiamo il nodo selezionato per l'espansione e (nodo che minimizza l'euristica di costo computazionale). Possiamo dunque notare che:

1. $f(n^*) \leq \text{OPT}$ per definizione, dal momento che l'euristica di costo dev'essere SEMPRE ammissibile (quindi deve sottostimare).
2. $f(n_{\text{best}}) \leq f(n^*)$ perchè, per definizione, n_{best} deve minimizzare la funzione di costo f
3. $f(e) \leq \omega f(n_{\text{best}})$ questo perchè $e \in \text{FOCAL}$ e quindi per definizione ha questa proprietà

Unendo tutte queste osservazioni, possiamo affermare che:

$$f(e) = g(e) \leq \omega f(n_{\text{best}}) \leq \omega f(n^*) \leq \omega \text{OPT} \quad (11)$$

Allora deduciamo che

$$g(e) \leq \omega \text{OPT} \quad (12)$$

Ossia $g(e)$ è al massimo ω volte il costo dell'ottimo; questa proprietà è davvero interessante perchè ci permette di impostare ω in base al problema e avere il giusto trade-off prestazioni/subottimalità. Per questo motivo il focal search è un algoritmo **BSS (Bounded Suboptimal Search)** perchè la subottimalità è limitata in questo caso da ω ; è possibile esprimere $\omega = 1 + \epsilon$ con ϵ la percentuale di subottimalità massima attesa.

4.11.3 Limiti di Focal: Trashing

Un grande problema del focal search è che, quando all'inizio cominciamo a valutare le $f(n)$ e a realizzare la lista focale, è possibile che un n_{best} rimanga in lista focale con basso $f(n)$ (poichè ancora il costo computato $g(n)$ è basso), ma l'euristica di costo computazionale $\hat{h}_F(n)$ è molto alta (poichè ci troviamo all'inizio, quindi molto distanti dal goal). A causa di ciò, eventuali nodi figli espansi non entreranno in lista focale perchè avranno una $f(n) > \omega f(n_{\text{best}})$ per cui vi entreranno solo dopo molto tempo.

Per questo motivo la regola di espansione del focal search è stata rivista: piuttosto che usare $f(n)$ per realizzare la lista focale, vengono prese in considerazione un'euristica h ammissibile e un'euristica \hat{h} inammissibile. Solo dopo viene valutata la $f(n)$. Questo approccio è detto **EES (Explicit Estimation Search)**