

# Appunti di Elaborazione dei Segnali

By *@Thisisfava*

2024/2025

# Contents

|   |           |
|---|-----------|
|   | <b>1</b>  |
| <b>1 Numeri Complessi</b>                             | <b>5</b>  |
| 1.1 Rappresentazioni . . . . .                        | 5         |
| 1.1.1 Coordinate Rettangolari . . . . .               | 5         |
| 1.1.2 Coordinate Polari . . . . .                     | 5         |
| 1.2 Conversioni . . . . .                             | 5         |
| 1.2.1 Polare a Rettangolare . . . . .                 | 5         |
| 1.2.2 Rettangolare a Polare . . . . .                 | 6         |
| 1.3 Complesso Coniugato . . . . .                     | 6         |
| 1.3.1 Definizione . . . . .                           | 6         |
| 1.3.2 Proprietà . . . . .                             | 6         |
| 1.4 Operazioni nel campo dei complessi . . . . .      | 7         |
| 1.4.1 Somme tra numeri complessi . . . . .            | 7         |
| 1.4.2 Scalatura . . . . .                             | 7         |
| 1.4.3 Prodotto tra complessi . . . . .                | 7         |
| 1.4.4 Inverso di un complesso . . . . .               | 7         |
| 1.4.5 Divisione tra numeri complessi . . . . .        | 8         |
| 1.4.6 Elevamento a potenza . . . . .                  | 8         |
| 1.4.7 Estrazione di una radice n-esima . . . . .      | 8         |
| 1.4.8 Funzione complessa di variabile reale . . . . . | 8         |
| <b>2 Segnali</b>                                      | <b>10</b> |
| 2.1 Classificazione dei segnali . . . . .             | 10        |
| 2.1.1 Rispetto alla dimensionalità . . . . .          | 10        |
| 2.1.2 Rispetto alla Continuità . . . . .              | 10        |
| 2.2 Tipi di segnali . . . . .                         | 11        |
| <b>3 Segnali Continui</b>                             | <b>12</b> |
| 3.1 Operazioni Sui Segnali Continui . . . . .         | 12        |
| 3.1.1 Traslazione . . . . .                           | 12        |
| 3.1.2 Scalatura della variabile dipendente . . . . .  | 12        |
| 3.2 Segnali Notevoli . . . . .                        | 13        |
| 3.2.1 Funzione Rettangolo . . . . .                   | 13        |
| 3.2.2 Gradino Unitario . . . . .                      | 13        |
| 3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale) . . . . .     | 14        |
| 3.2.4 Proprietà della Delta . . . . .                 | 15        |
| 3.2.5 Segnali Periodici . . . . .                     | 15        |
| 3.2.6 Fasore . . . . .                                | 16        |
| 3.3 Proprietà dei Segnali . . . . .                   | 17        |
| 3.3.1 Durata . . . . .                                | 17        |
| 3.3.2 Area . . . . .                                  | 17        |
| 3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale) . . . . .       | 17        |
| 3.3.4 Energia . . . . .                               | 17        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.3.5    | Potenza Istantanea . . . . .                             | 17        |
| 3.3.6    | Potenza Media . . . . .                                  | 17        |
| 3.3.7    | Segnale Energia e Potenza . . . . .                      | 18        |
| <b>4</b> | <b>Segnali Discreti</b>                                  | <b>19</b> |
| 4.1      | Operazione sui Segnali Discreti . . . . .                | 19        |
| 4.1.1    | Traslazione . . . . .                                    | 19        |
| 4.1.2    | Decimazione/UpSampling . . . . .                         | 19        |
| 4.1.3    | Interpolazione/DownSampling . . . . .                    | 19        |
| 4.2      | Segnali Notevoli . . . . .                               | 20        |
| 4.2.1    | Rettangolo Discreto . . . . .                            | 20        |
| 4.2.2    | Gradino Unitario . . . . .                               | 20        |
| 4.2.3    | Impulso Discreto . . . . .                               | 20        |
| 4.2.4    | Proprietà dell'Impulso Discreto . . . . .                | 20        |
| 4.2.5    | Segnali Periodici Discreti . . . . .                     | 21        |
| 4.2.6    | Fasore Discreto . . . . .                                | 21        |
| 4.3      | Proprietà dei Segnali Discreti . . . . .                 | 22        |
| 4.3.1    | Durata . . . . .   | 22        |
| 4.3.2    | Area . . . . .   | 22        |
| 4.3.3    | Valor Medio . . . . .                                    | 22        |
| 4.3.4    | Potenza Istantanea . . . . .                             | 22        |
| 4.3.5    | Energia . . . . .  | 22        |
| 4.3.6    | Potenza Media . . . . .                                  | 22        |
| 4.3.7    | Segnali Potenza ed Energia . . . . .                     | 22        |
| <b>5</b> | <b>Sistemi</b>   | <b>23</b> |
| 5.1      | Sistemi Continui . . . . .                               | 23        |
| 5.2      | Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui . . . . .           | 24        |
| 5.2.1    | Non Dispersività . . . . .                               | 24        |
| 5.2.2    | Causalità . . . . .                                      | 24        |
| 5.2.3    | Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output) . . . . . | 24        |
| 5.2.4    | Omogeneità . . . . .                                     | 24        |
| 5.2.5    | Additività . . . . .                                     | 25        |
| 5.2.6    | Linearità . . . . .                                      | 25        |
| 5.2.7    | Tempo-Invarianza . . . . .                               | 25        |
| <b>6</b> | <b>Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui</b> | <b>25</b> |
| 6.1      | Prodotto/Integrale di Convoluzione . . . . .             | 26        |
| 6.1.1    | Proprietà . . . . .                                      | 26        |
| 6.2      | Proprietà dei Sistemi LTI Continui . . . . .             | 28        |
| 6.2.1    | Causalità . . . . .                                      | 28        |
| 6.2.2    | Stabilità BIBO . . . . .                                 | 28        |
| 6.2.3    | Risposta in frequenza . . . . .                          | 30        |
| 6.3      | Proprietà Sistemi Discreti . . . . .                     | 30        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>7</b>  | <b>Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti</b> | <b>31</b> |
| 7.1       | Causalità . . . . .                                      | 31        |
| 7.2       | Stabilità BIBO . . . . .                                 | 32        |
| 7.3       | Convoluzione Discreta . . . . .                          | 33        |
| 7.3.1     | Proprietà . . . . .                                      | 33        |
| <b>8</b>  | <b>Analisi In Frequenza</b>                              | <b>34</b> |
| 8.1       | Sviluppo In Serie Di Fourier . . . . .                   | 34        |
| 8.1.1     | Forma Esponenziale . . . . .                             | 34        |
| 8.1.2     | Forma Trigonometrica . . . . .                           | 35        |
| 8.2       | Trasformata di Fourier . . . . .                         | 37        |
| 8.2.1     | Trasformate Notevoli . . . . .                           | 39        |
| 8.3       | Trasformata di Fourier di Segnali Reali . . . . .        | 40        |
| 8.3.1     | Proprietà Trasformata di Segnali Reali . . . . .         | 40        |
| 8.4       | Teorema Di Parseval (Energia) . . . . .                  | 46        |
| 8.5       | Teorema di Parseval (Potenza) . . . . .                  | 46        |
| 8.6       | Sistemi nel Dominio delle Frequenze . . . . .            | 47        |
| <b>9</b>  | <b>Filtri</b>  | <b>48</b> |
| 9.1       | Filtri Ideali . . . . .                                  | 48        |
| 9.2       | Filtri Lineari Ideali . . . . .                          | 48        |
| 9.2.1     | Filtro Passa-Basso (Ideale) . . . . .                    | 48        |
| 9.2.2     | Filtro Passa-Alto (Ideale) . . . . .                     | 49        |
| 9.2.3     | Filtro Passa-Banda (Ideale) . . . . .                    | 49        |
| 9.2.4     | Filtro Arresta-Banda (Ideale) . . . . .                  | 49        |
| 9.3       | Filtri Reali . . . . .                                   | 50        |
| 9.3.1     | Circuito RC . . . . .                                    | 50        |
| <b>10</b> | <b>Elaborazione di Segnali Digitali (DSP)</b>            | <b>52</b> |
| 10.1      | Conversione Analogico/Digitale . . . . .                 | 52        |
| 10.2      | Campionamento (Sampling) . . . . .                       | 52        |
| 10.3      | Spettro del Segnale Campionato . . . . .                 | 53        |
| 10.3.1    | Teorema di Nyquist-Shannon . . . . .                     | 55        |
| 10.3.2    | Ricostruzione nel dominio delle frequenze . . . . .      | 55        |
| 10.3.3    | Ricostruzione nel dominio dei tempi . . . . .            | 56        |
| 10.3.4    | Aliasing . . . . .                                       | 57        |
| 10.4      | Quantizzazione . . . . .                                 | 57        |
| 10.4.1    | Errore di Quantizzazione . . . . .                       | 59        |
| 10.4.2    | Potenza Del Disturbo . . . . .                           | 60        |
| 10.4.3    | Decibel . . . . .  | 62        |
| 10.5      | Discrete Time Fourier Transform (DTFT) . . . . .         | 63        |
| 10.6      | DTFT Normalizzata . . . . .                              | 64        |
| 10.6.1    | Proprietà della DTFT . . . . .                           | 64        |
| 10.7      | Risoluzione e Durata di Campionamento . . . . .          | 65        |
| 10.8      | Discrete Fourier Transform (DFT) . . . . .               | 65        |
| 10.8.1    | Forma Matriciale della DFT . . . . .                     | 66        |

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 10.8.2  | Proprietà della DFT . . . . .                | 67 |
| 10.9    | Trasformata Zeta . . . . .                   | 67 |
| 10.9.1  | Proprietà . . . . .                          | 68 |
| 10.9.2  | Relazione tra DTFT e Z . . . . .             | 69 |
| 10.9.3  | Famiglie di Trasformate . . . . .            | 69 |
| 10.10   | Antitrasformata di forme razionali . . . . . | 69 |
| 10.11   | Sistemi LTI Discreti nel Dominio Z . . . . . | 70 |
| 10.11.1 | Poli e Zeri . . . . .                        | 71 |
| 10.11.2 | Proprietà . . . . .                          | 71 |
| 10.11.3 | Analisi Di Sistemi Discreti . . . . .        | 72 |
| 10.12   | Stabilità dei Filtri FIR . . . . .           | 74 |
| 10.13   | Stabilità dei Filtri IIR . . . . .           | 75 |
| 10.14   | Sintesi di Filtri Digitali . . . . .         | 76 |
| 10.15   | Filtri a Pettine . . . . .                   | 77 |
| 10.16   | Filtri Notch . . . . .                       | 78 |

# 1 Numeri Complessi

**Definizione.** Il campo complesso  $\mathbb{C}$  è la chiusura algebrica di un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali.

Un numero  $z \in \mathbb{C}$  è definito dall'*unità immaginaria*:

$$i = j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

## 1.1 Rappresentazioni

Un complesso  $z$ , che può essere scritto in diverse forme, viene rappresentato sul *Piano di Gauss*, un piano definito dall'asse orizzontale  $\mathbb{R}e$  e dall'asse verticale  $\mathbb{I}m$

### 1.1.1 Coordinate Rettangolari

Un complesso può essere rappresentato come un punto  $(x, y)$  sul piano di Gauss, con  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ . La forma che lo rappresenta è la forma *algebrica*:

$$z = x + jy \quad (2)$$

Con  $x$  la parte reale (ossia  $\mathbb{R}e(z) = x$ ) e  $y$  la parte immaginaria (ossia  $\mathbb{I}m(z) = y$ )

### 1.1.2 Coordinate Polari

Un complesso  $z$  può essere anche rappresentato in *forma polare* sul piano in funzione della lunghezza  $\rho$  del vettore che parte dall'origine (ossia il *modulo*) e dell'angolo spazzato  $\theta$  (ossia la *fase*).

$$z = \langle \rho, \theta \rangle = \rho (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad (3)$$

In realtà, un'altra forma che permette di esprimere un complesso in coordinate polari è la forma *esponenziale*

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad (4)$$

## 1.2 Conversioni

### 1.2.1 Polare a Rettangolare

Dato  $z = \langle \rho, \theta \rangle$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad (5)$$

### 1.2.2 Rettangolare a Polare

Dato  $z = x + jy$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (6)$$

Dove

$$\text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

## 1.3 Complesso Coniugato

### 1.3.1 Definizione

Dato un  $z \in \mathbb{C}$  t.c  $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$  allora il suo coniugato sarà

$$\bar{z} = x - jy \quad (8)$$

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta} \quad (9)$$

In parole povere, il coniugato di un complesso è il complesso che ha stessa parte reale ma opposta parte immaginaria

### 1.3.2 Proprietà

- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$

## 1.4 Operazioni nel campo dei complessi

### 1.4.1 Somme tra numeri complessi

**Forma algebrica.** Dati  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$  la somma sarà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (10)$$

**Forma Esponenziale.** La somma è banale

### 1.4.2 Scalatura

**Forma algebrica.** Dati  $z = x + jy$  e  $a \in \mathbb{R}$  la scalatura sarà:

$$az = ax + jay \quad (11)$$

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $a \in \mathbb{R}$  la scalatura sarà:

$$az = a\rho e^{j\theta} \quad (12)$$

### 1.4.3 Prodotto tra complessi

**Forma algebrica.** Dati  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$  il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (13)$$

**Forma Esponenziale.** Dati  $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$  il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (14)$$

### 1.4.4 Inverso di un complesso

**Forma algebrica.** Dato  $z = x + jy$  l'inverso sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\rho^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \quad (15)$$

Spiegazione della formula: un certo  $w = z^{-1}$  con  $z \in \mathbb{C}$  se il loro prodotto genera un numero con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla. Sappiamo che  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = \rho^2$ . Quindi basta dividere il coniugato di  $z$  con il modulo quadro( $\rho^2$ ) e si ha l'inverso.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  il prodotto sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} \quad (16)$$



#### 1.4.5 Divisione tra numeri complessi

Dati  $z_1 \in \mathbb{C}$  e  $z_2 \in \mathbb{C}$  possiamo riscrivere la divisione tra i 2 numeri come prodotto tra il primo e l'inverso del secondo, e ciò vale per entrambe le forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \quad (17)$$

#### 1.4.6 Elevamento a potenza

**Forma algebrica.** L'elevamento a potenza della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  l'elevamento a potenza sarà  $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ volte}}$  ossia:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} \quad (18)$$

#### 1.4.7 Estrazione di una radice n-esima

Dato un  $z \in \mathbb{C}$  e  $y \in \mathbb{C}$ ,  $y$  è radice n-esima di  $z$  se e solo se  $y^n = z$ . La grande differenza con i numeri reali è che, nel campo complesso, esistono esattamente  $n$  y distinte di radici che soddisfano l'equazione  $y^n - z = 0$  per il teorema fondamentale dell'algebra.

**Forma algebrica.** La radice n-esima della forma algebrica non è particolarmente interessante.

**Forma Esponenziale.** Dati  $z = \rho e^{j\theta}$  e  $n \in \mathbb{N}$  la radice n-esima sarà:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta+2\pi i}{n}\right)} \quad \text{Con } i = 0, 1, \dots, n-1$$

#### 1.4.8 Funzione complessa di variabile reale

Definita come

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Oppure come  $z = f(x)$  con  $z \in \mathbb{C}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , è una funzione che mappa ad ogni reale un immaginario.

**Rappresentazione.** Graficamente una funzione complessa di variabile reale può essere rappresentata in un grafico a 3 dimensioni con un asse per la  $x$  (variabile indipendente) e gli altri 2 assi sono  $\text{Im}[z]$  e  $\text{Re}[z]$ . Dal momento che sono difficili da rappresentare, si ricorre ad una semplificazione: il grafico tridimensionale si sdoppia in un grafico che mappa ad ogni  $x$  la parte Reale di  $z$  ed un altro grafico che mappa ad ogni  $x$  la parte Immaginaria di  $z$ . Se si lavora in coordinate polari, è possibile invece rappresentare il grafico che mappa ad

ogni  $x$  il modulo del complesso corrispondente e un altro grafico che mappa ad ogni  $x$  la fase del complesso corrispondente. La particolarità di questi ultimi 2 grafici è che il primo grafico è sempre rappresentato sopra l'asse  $x$  (il modulo non può mai essere negativo) e il secondo grafico è sempre rappresentato tra  $-\pi$  e  $\pi$  dal momento che poi la fase si ripete.

## 2 Segnali

In termini totalmente astratti, un segnale è un veicolo di informazione. L'informazione, a sua volta, possiamo definirla come tutto ciò che aggiunge conoscenza. Calato nel contesto del corso, un segnale può essere visto come una funzione

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f : A \longrightarrow B \end{cases}$$

Dove  $x \in A$  è la variabile indipendente,  $y \in B$  la variabile dipendente con  $A$  e  $B$  insiemi qualsiasi.

### 2.1 Classificazione dei segnali

#### 2.1.1 Rispetto alla dimensionalità

Un segnale può essere classificato rispetto alla dimensionalità del dominio o del codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del dominio può essere:

- **Monodimensionale** se  $A \subseteq \mathbb{R}$
- **n-Dimensionale** se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$

**Codominio.** Un segnale rispetto alla dimensionalità del codominio può essere:

- **Scalare** se  $B \subseteq \mathbb{R}$
- **Vettoriale** se  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$

#### 2.1.2 Rispetto alla Continuità

Un segnale può essere classificato rispetto alla continuità di dominio o codominio.

**Dominio.** Un segnale rispetto alla continuità del dominio può essere:

- **Continuo** se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , cioè se  $A$  coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Discreto** se  $A$  coincide o è sottoinsieme di un insieme discreto (come  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ )

**Codominio.** Un segnale rispetto alla continuità del codominio può essere:

- **Ad Ampiezze Continue** se  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , cioè se  $B$  coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Ad Ampiezze Discrete** se  $B$  coincide o è sottoinsieme di un insieme discreto (come  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ )

Nel caso in cui la variabile dipendente sia il tempo, i segnali vengono detti **tempo-continuui** o **tempo-discreti**.

**Esempi.** Il *suono* può essere visto come la pressione dell'aria in funzione del tempo, ossia come:

$$p = f(t)$$

Dove  $p \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dunque il suono è un segnale **monodimensionale e scalare, continuo e ad ampiezze continue**

Un'*immagine in bianco e nero* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano la *Luminanza*:

$$L = f(x, y)$$

Dove  $L \in \mathbb{R}$  e  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ . Dunque un'immagine a scala di grigi è un segnale **bidimensionale e scalare, continuo e ad ampiezze continue**

Un'*immagine a colori* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano una tripletta di valori (interpretabili in base allo spazio colore scelto). Consideriamo lo spazio RGB:

$$\langle R, G, B \rangle = f(x, y)$$

Dove  $\langle R, G, B \rangle \in \mathbb{R}^3$  e  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ . Dunque un'immagine a colori è un segnale **bidimensionale e vettoriale, continuo e ad ampiezze continue**

## 2.2 Tipi di segnali

In base alle caratteristiche di un segnale, possiamo definire alcuni tipi di segnali:

| Segnale            | Dominio Continuo | Dominio Discreto |
|--------------------|------------------|------------------|
| Codominio Continuo | Analogico        | Campionato       |
| Codominio Discreto | Quantizzato      | Digitale         |

## 3 Segnali Continui

### 3.1 Operazioni Sui Segnali Continui

#### 3.1.1 Traslazione

Dato un segnale  $y = f(x)$  possiamo definire il segnale traslato  $y'$  come

- $y' = f(x - x_0)$  ossia una *traslazione in avanti* di  $x_0$
- $y' = f(x + x_0)$  ossia una *traslazione all'indietro* di  $x_0$

Quando la variabile indipendente  $x$  è il tempo, possiamo dire che il segnale è, rispettivamente, in *in ritardo* o *in anticipo*

#### 3.1.2 Scalatura della variabile dipendente

Dato  $y = f(x)$  e  $x \in \mathbb{R}$  allora possiamo definire  $y'$  il segnale scalato come

$$y' = f(ax)$$

Dove  $a \in \mathbb{R}$  è detto *fattore di scala*. In base ai valori assunti da  $a$ , il segnale può:

- **Espandersi** se  $|a| < 1$
- **Comprimersi** se  $|a| > 1$
- **Specchiarsi** rispetto all'asse  $y$  se  $a < 0$

## 3.2 Segnali Notevoli

Riporto di seguito alcune funzioni(segnali) che useremo spesso nel corso:

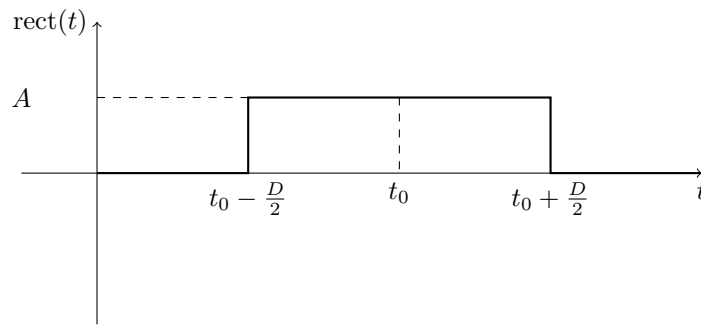
### 3.2.1 Funzione Rettangolo

Detta anche *Impulso Rettangolare*, è una funzione che ha un picco tra  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  e poi è sempre nulla. Possiamo definirla così:

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (19)$$

**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'ampiezza del segnale,  $t_0$  il centro del rettangolo e  $D$  la durata dell'impulso, possiamo generalizzare la definizione precedente

$$y = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{D}\right) \quad (20)$$



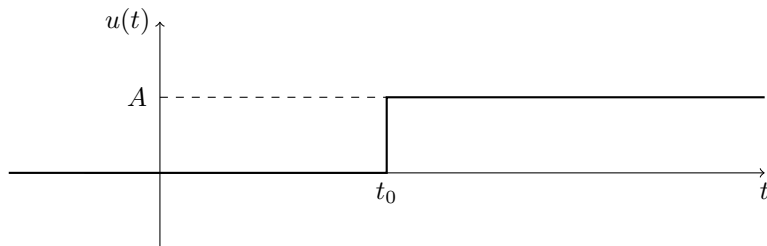
### 3.2.2 Gradino Unitario

Tale segnale è definibile come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'ampiezza del segnale e  $t_0$  il tempo di ritardo

$$y = A \cdot u(t - t_0) \quad (22)$$



### 3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale)

Questo segnale si ottiene, a partire dall'impulso rettangolare, restringendo sempre di più  $T$  e aumentando sempre di più l'ampiezza di un termine  $\frac{1}{T}$  (questo per mantenere l'area sottesa, o energia, invariata). Possiamo determinare la formula analitica di questa operazione:

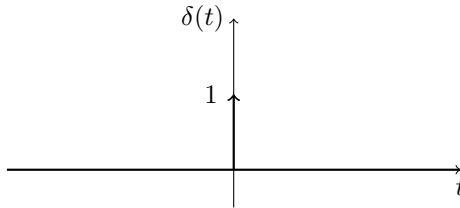
$$y(t) = \frac{1}{T} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right)$$

Facendo tendere a 0 il termine  $T$  si ottiene proprio la *delta di Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \quad (23)$$

Per com'è definita, la delta di Dirac non è una vera e propria funzione, è una funzione speciale, una distribuzione, che vale sempre 0 tranne quando  $t = 0$ ; in quel caso la funzione va ad infinito, perchè sarebbe l'impulso (ideale) applicato in un istante infinitesimo. Dal momento che in questa funzione l'ampiezza è infinita, ha senso considerare, invece, l'area sottesa, ossia l'energia dell'impulso.

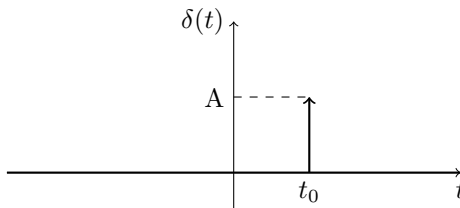
**Rappresentazione Tradizionale.** Tradizionalmente la funzione delta viene rappresentata in 0 con una freccia verso l'alto con la punta a 1. In ogni altro punto, è 0.



**Formula Generalizzata.** Data  $A$  l'area (e non l'ampiezza, che sarebbe infinita) e  $t_0$  il ritardo, la formula sarà:

$$y(t) = A \cdot \delta(t - t_0)$$

E il grafico sarà:



### 3.2.4 Proprietà della Delta

- **Area Unitaria:** l'integrale su tutto  $\mathbb{R}$  della delta è esattamente 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (24)$$

- **Proprietà del Campionamento:** per enunciare la proprietà è necessario introdurre il concetto di *prodotto scalare tra funzioni*:

Si dice prodotto scalare tra le funzioni  $f$  e  $g$  come

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad (25)$$

Detto ciò, la proprietà della campionatura afferma che, per ogni funzione  $f(t)$ :

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (26)$$

Da ciò possiamo capire il significato del termine "campionatura": quando noi effettuiamo il prodotto scalare con il delta, è come se scattassimo una istantanea alla funzione  $f$  in 0. Questa proprietà ci servirà per discretizzare una funzione. Possiamo dunque generalizzare questa proprietà per un qualunque istante  $t_0$ :

$$\langle f(t), \delta(t - t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (27)$$

- **Proprietà del Prodotto:** il prodotto tra una qualsiasi funzione  $f(t)$  e il delta di dirac è sempre 0 laddove  $t \neq t_0$ :

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (28)$$

- **Parità:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (29)$$

- **Integrazione:** la funzione integrale della delta di dirac è in realtà il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (30)$$

### 3.2.5 Segnali Periodici

Un segnale  $s(t)$  si dice *periodico* se e solo se il suo valore si ripete ad ogni periodo, ossia:

$$s(t) = s(t + kT) \quad (31)$$



Dove  $k \in \mathbb{Z}$  è il numero di volte e  $T \in \mathbb{R}$  è il periodo.

Una cosa da tenere a mente è che, in segnali, solitamente, si normalizza in modo tale da mettere in evidenza direttamente nella formula la frequenza (che può essere molto utile).

Es:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Da questa formula sappiamo subito che il periodo di questo segnale è:

$$\frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$$

E dunque la sua frequenza è proprio  $f_0$

### 3.2.6 Fasore

Questa funzione è una funzione complessa di variabile reale, con la seguente formula analitica:

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \quad (32)$$

### 3.3 Proprietà dei Segnali

#### 3.3.1 Durata

La durata di un segnale è, considerando un segnale nel tempo, la differenza tra il primo istante in cui il segnale non è nullo e l'ultimo istante.

#### 3.3.2 Area

Si dice *Area di un Segnale*  $s(t)$  l'area sottesa dallo stesso segnale, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \quad (33)$$

#### 3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale)

Il valor medio di un segnale  $s(t)$  non è altro che quel valore  $\bar{s}$  tale che una funzione costante  $s'(t) = \bar{s}$  ha la stessa area di  $s(t)$ , ossia:

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)dt \quad (34)$$

#### 3.3.4 Energia

Sebbene non stiamo parlando propriamente di lavoro e concetti fisici relativi, dobbiamo dire che un segnale è sempre associato ad una certa energia che il segnale stesso trasporta. Dunque *l'energia di un segnale* ( $s(t)$ ) è:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (35)$$

#### 3.3.5 Potenza Istantanea

Per il discorso precedente, possiamo anche definire la Potenza Istantanea di un segnale (cioè la potenza in un istante del Segnale) come

$$P[s(t)] = \begin{cases} s(t_0)\overline{s(t_0)} & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{C} \\ s(t_0)^2 & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (36)$$

#### 3.3.6 Potenza Media

La potenza media possiamo, invece, vederla come il valore medio dell'energia, ossia:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \quad (37)$$

### 3.3.7 Segnale Energia e Potenza

Innanzitutto possiamo notare come sia Potenza Media che Energia siano non negativi per costruzione; inoltre tra Potenza Media e Energia di un segnale è possibile vedere una correlazione: laddove l'energia del segnale è finita, allora la potenza è necessariamente nulla; laddove invece la potenza media è maggiore di 0, l'energia è infinita.

In base a questo concetto è possibile definire:

- **Segnale Energia** un segnale  $s(t)$  se e solo se  $0 < E_s < \infty$  e allora  $P_s = 0$
- **Segnale Potenza** un segnale  $s(t)$  se e solo se  $0 < P_s < \infty$  e allora  $E_s \rightarrow +\infty$

## 4 Segnali Discreti

A differenza dei segnali continui, i segnali discreti sono funzioni con Dominio discreto, solitamente rappresentate nella seguente maniera:

$$y = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Enunciamo ora tutte le proprietà, in maniera speculare, che abbiamo già descritto per i segnali continui:

### 4.1 Operazione sui Segnali Discreti

#### 4.1.1 Traslazione

Dato un segnale  $y = f(n)$  definiamo  $y' = f(n - n_0)$  traslazione in avanti di  $n_0$ ; definiamo invece  $y'' = f(n + n_0)$  traslazione indietro di  $n_0$ .

#### 4.1.2 Decimazione/UpSampling

Dato  $y = f(n)$  il segnale con  $n \in \mathbb{Z}$ , il segnale decimato è:

$$y = f(an) \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ e } |a| \geq 1 \quad (38)$$

Questa operazione è detta *decimazione* dal momento che è come se prelevassi selettivamente i valori ogni  $a$  campioni del segnale di partenza

#### 4.1.3 Interpolazione/DownSampling

Dato  $y = f(n)$  il segnale con  $n \in \mathbb{Z}$ , il segnale interpolato è:

$$y = f\left(\frac{n}{a}\right) \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ e } |a| \geq 1 \quad (39)$$

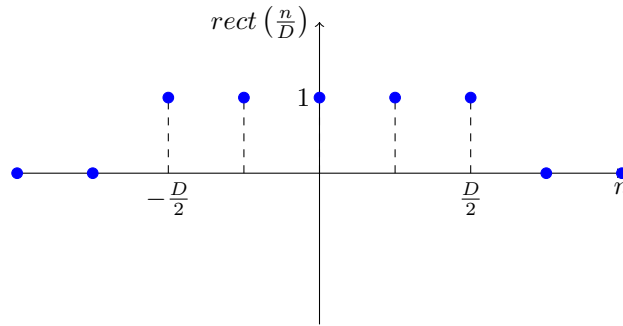
In parole povere, questa operazione non fa altro che distanziare ogni campione di  $a$  intervalli.

## 4.2 Segnali Notevoli

### 4.2.1 Rettangolo Discreto

Viene definito come:

$$\text{rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\frac{n}{D}| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (40)$$



### 4.2.2 Gradino Unitario

Anche in questo caso, la formulazione è identica al Gradino Unitario continuo, ossia:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \quad (41)$$

### 4.2.3 Impulso Discreto

Questo segnale è il parente "discreto" della *Delta di Dirac* (23) ma è più semplice da introdurre, dal momento che la sua formula è:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (42)$$

Possiamo dunque notare che, a differenza della delta, l'impulso discreto è una vera e propria funzione.

### 4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto

- **Area Unitaria:** è abbastanza ovvia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1 \quad (43)$$

- **Prodotto Scalare con  $\delta(n)$**

$$\langle f, \delta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n) = f(0) \quad (44)$$

- **Prodotto con  $\delta(n)$ :**

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0) \quad (45)$$

- **Integrazione Discreta:**

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} = u(n) \quad (46)$$

#### 4.2.5 Segnali Periodici Discreti

Dato  $s(n)$  un segnale con  $n \in \mathbb{Z}$  è periodico se e solo se

$$s(n) = s(n + kN), \text{ con periodo } N, \forall n, k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

Se  $N$  è il periodo di  $s(n)$ , allora la frequenza sarà  $\frac{1}{N}$ ; Dal momento che  $|N| \geq 1$  sempre (non ha senso avere periodo nullo), allora la frequenza è sempre frazionaria. Si può dimostrare che solo un segnale con frequenza razionale può essere periodico, mentre se è irrazionale non lo potrà mai essere.

#### 4.2.6 Fasore Discreto

La funzione è molto simile al fasore continuo:

$$s(n) = e^{2\pi j f_0 n} \quad (48)$$

Dove  $f_0$  dev'essere razionale altrimenti la funzione non sarà periodica.

## 4.3 Proprietà dei Segnali Discreti

### 4.3.1 Durata

La durata di un segnale discreto è la somma delle "stecche" non nulle di un grafico, o meglio, la lunghezza del supporto di  $s(t)$

$$D = n_2 - n_1 + 1 \quad (49)$$

Dove  $n_2, n_1$  sono gli estremi non nulli del segnale.

### 4.3.2 Area

Dato  $s(n), n \in \mathbb{Z}$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \quad (50)$$

### 4.3.3 Valor Medio

Il valor medio è un  $\tilde{s}$  tale che la funzione costante  $s(t)' = \tilde{s}$  ha la stessa area di  $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} s(n) \quad (51)$$

### 4.3.4 Potenza Istantanea

Non è altro che il modulo del segnale in un determinato istante  $n$ , ossia:

$$P_s(n) = \begin{cases} s(n)\overline{s(n)} & \text{se } s(n) \in \mathbb{C} \\ s(n)^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (52)$$

### 4.3.5 Energia

è l'area della Potenza Istantanea, ossia:

$$E_s = \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \quad (53)$$

### 4.3.6 Potenza Media

è il valor medio della Potenza Istantanea, ossia:

$$P_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \quad (54)$$

### 4.3.7 Segnali Potenza ed Energia

Anche in questo caso possiamo fare la distinzione tra i segnali potenza e i segnali energia, la definizione è la stessa presentata alla sezione (3.3.7)

## 5 Sistemi

In forma generale, un sistema descrive una relazione/processo di Causa-Effetto tra un INPUT ed un OUTPUT. In particolare nel corso ci focalizzeremo sui sistemi di Elaborazione dei Segnali.

Un **Sistema di Elaborazione dei Segnali** può essere vista come una relazione o legge di trasformazione di un segnale in un altro, dunque, formalmente:

Dato un sistema  $S[\cdot]$ , possiamo dire che:

$$y(b) = S[x(t)] \quad (55)$$

Dove  $y(b)$  è il segnale in output mentre  $x(t)$  è il segnale in input. In base alla continuità dei segnali e dei domini possiamo distinguere i sistemi in: **Continui, Discreti e Misti**

### 5.1 Sistemi Continui

Dato un sistema  $y(b) = S[x(a)]$ , con  $b \in B, a \in A$  questo si dice continuo se e solo se:

- $A, B$  sono insiemi continui
- $y(b), x(a)$  sono funzioni continue

Una classe importante di questi sistemi sono i **Sistemi Tempo-Continui** in cui la variabile è il tempo.

**Esempi.**

- **Ritardatori**

$$y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0) \quad (56)$$

Questo sistema non fa altro che ritardare il segnale  $x(t)$  di una quantità di  $t_0$  secondi.

- **Quantizzatore**

$$y(t) = \text{ROUND}(x(t)) \quad (57)$$

Questo sistema arrotonda ogni valore di  $x(t)$  al suo intero più vicino.

- **Integratore**

$$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (58)$$

Questo sistema associa ad ogni istante  $t$  l'area compresa tra  $t - T$  e  $t$



## 5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui

### 5.2.1 Non Dispersività

Un sistema  $S[\cdot]$  è non dispersivo se e solo se il sistema dipende solo da  $t$  e dal valore attuale di  $x(t)$ , ossia:

$$y(t) = S[t; x(t)] \quad (59)$$

possiamo dire che questi sistemi sono senza memoria perchè non considerano per nulla il passato.

**Esempio: Amplificatore Ideale**

$$y(t) = A \cdot x(t) \quad (60)$$

### 5.2.2 Causalità

Un sistema  $S[\cdot]$  è causale se e solo se:

$$y(t) = S[t; x(\tau) \text{ dove } \tau \leq T] \quad (61)$$

Questi sistemi associano ad ogni istante  $t$  un valore dipendente non soltanto dal tempo attuale e dal valore  $x(t)$ , ma anche della storia di  $x(t)$ . Bene o male tutti i sistemi reali sono causali, perchè dipendono anche dagli istanti passati di un segnale. Esistono (ma solo in teoria) i segnali **Anticausali**, in cui il sistema dipende dall'istante attuale e quelli futuri (e quindi il futuro causerebbe il presente, impossibile nella realtà)

### 5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un sistema è **Stabile** se e solo se per ogni input limitato, l'uscita è sempre limitata, ossia:

Dato  $S[\cdot]$  dove  $y(t) = S[x(t)]$  con  $|x(t)| \leq K_x < +\infty \forall t \in \mathbb{R}$  allora:

$$|y(t)| \leq K_y < +\infty \forall t \in \mathbb{R} \quad (62)$$

Dove  $K_x, K_y$  sono rispettivamente il limite superiore/inferiore di  $x(t), y(t)$

**Esempi:** L'Amplificatore Ideale (60).

### 5.2.4 Omogeneità

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$ ,  $S$  è detto *omogeneo* se e solo se vale questa proprietà:

Dato come input  $a \cdot x(t)$  con  $a \in \mathbb{R}$  allora:

$$S[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \quad (63)$$

### 5.2.5 Additività

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$ ,  $S$  è detto *additivo* se e solo se vale questa proprietà:

Dato come input  $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$  allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^N x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N y_i(t) \quad (64)$$

### 5.2.6 Linearità

Un sistema  $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$  è detto *lineare* se è sia omogeneo che additivo con gli stessi pesi, ossia se:

Dato  $x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$  allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \quad (65)$$

Questa proprietà è dovuta, nei segnali, al *Principio di sovrapposizione degli Effetti*, ossia:

*La risposta di un sistema ad una combinazione lineare degli ingressi è uguale alla combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle risposte ad ogni singolo ingresso*

#### Esempi.

- **Integratore definito nel tempo:** grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, questo sistema è lineare:

$$y(t) = \int_{t-T}^t \sum_{i=1}^N a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_{t-T}^t a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \quad (66)$$

### 5.2.7 Tempo-Invarianza

Dato un sistema  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$  tempo-continuo,  $S$  è tempo-invariante se e solo se:

$$seS[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (67)$$

Questa proprietà afferma che il sistema non dipende da un eventuale ritardo(o anticipo) del segnale.

## 6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui

Sia la linearità che la tempo invarianza sono così importanti che dedicheremo un intero capitolo ai sistemi LTI (o Lineari e Tempo-Invarianti), dal momento

che tali proprietà implicano altre proprietà altrettanto interessanti, come quella legata alla risposta all'impulso. Riprendiamo la proprietà (26) della delta di Dirac e un segnale  $x(t)$ . Consideriamo ora il sistema

$$S \left[ \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]$$

Se  $S[\cdot]$  è lineare possiamo considerare  $x(\tau)$  come coefficiente e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (68)$$

Possiamo definire la *risposta all'impulso da parte del sistema* come  $h(t) := S[\delta(t)]$ . Se  $S$  è anche tempo-invariante, allora

$$h(t - t_0) = S[\delta(t - t_0)] \quad (69)$$

Possiamo riscrivere l'equazione di partenza se  $S[\cdot]$  è lineare e tempo-invariante come:

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (70)$$


## 6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione

Definiamo:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (71)$$

E si dice  $x(t)$  *convoluto con  $h(t)$* ; è un'operazione molto importante in segnali, tanto da avere una definizione. L'importanza di  $h(t)$  noi la possiamo apprezzare quando dobbiamo studiare un segnale ignoto: passando al sistema un impulso, e osservando l'output, tale output sarà proprio  $x(t)$  convoluto con  $h(t)$  (se il sistema è lineare e tempo invariante).

### 6.1.1 Proprietà

 Lezione 8  
21/10/2024

**Commutativa.** Dati 2 segnali  $f, g$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (72)$$

Tale proprietà è facile da dimostrare:

Consideriamo la convoluzione  $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ . Effettuiamo ora un cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = t - \tau \\ \tau = t - x \\ dx = -d\tau \end{cases}$$

Sostituiamo ora le  $\tau$  per avere un integrale in  $x$  (NB: gli estremi di integrazione si invertono dal momento che  $x$  è un "ribaltamento" di  $\tau$ ):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)g(x)(-dx) &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx &= \\ g(t) * f(t)\end{aligned}$$

Alla fine ho risolto il  $-dx$  semplicemente invertendo ancora gli estremi di integrazione. Il significato di questa proprietà è importante: se è vero che è possibile studiare un sistema LTI rispetto alla sua risposta all'impulso, è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema rispetto ad un segnale  $x(t)$ .

**Associativa.** Dati 3 segnali  $f, g, h$  allora:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (73)$$

**Distributiva (rispetto alla somma).** Dati 3 segnali  $f, g, h$ :

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (74)$$

**Durata della Convoluzione.** Dati 2 segnali  $f, g$  con durata rispettivamente  $D_1, D_2$  allora la durata di  $f(t) * g(t)$  è  $D_1 + D_2$ .

**Convoluzione con  $\delta(t)$**  Dato un segnale  $f(t)$  allora:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (75)$$

Possiamo infatti dire che  $\delta(t)$  è l'operatore neutro dell'operazione di convoluzione, questo perchè il delta è una funzione che avviene tutta in un istante e quindi non altera la funzione di partenza; una sua eventuale traslazione, trasla la funzione  $f(t)$ . La dimostrazione è banale perchè si basa sulla proprietà del campionamento della delta (26).

## 6.2 Proprietà dei Sistemi LTI Continui

### 6.2.1 Causalità

Dato un sistema LTI  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ ,  $S$  è causale se  $y(t)$  accade DOPO il segnale  $x(t)$ , questo per il concetto stesso di causalità:  $y(t)$  è la risposta all'impulso di  $x(t)$  quindi DEVE accadere dopo, in particolare si dice che:

$$\text{Un sistema è causale} \iff h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (76)$$

Proprio per questo motivo, dal momento che  $y(t)$  può essere descritto come risposta all'impulso, ossia come convoluzione tra  $x(t)$  e  $h(t)$ , se il sistema è causale allora possiamo ridefinire la  $y(t)$  come integrale dall'infinito passato fino all'istante  $t$  presente, ossia:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (77)$$

Possiamo anche, per la proprietà commutativa (72), riscrivere la  $y(t)$  come integrale tra la risposta  $h(t)$  e il segnale  $x(t)$  ribaltato e traslato di tutti i valori di  $\tau$  da 0 fino all'infinito futuro

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (78)$$

### 6.2.2 Stabilità BIBO

Dato un sistema LTI  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ ,  $S[\cdot]$  è BIBO se e solo se:

$$\forall x(t) : |x(t)| < M < \infty \rightarrow |y(t)| < N < \infty \quad (79)$$

In particolare possiamo osservare che:

$$|y(t)| = |S[x(t)]| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right|$$

Sappiamo inoltre che, data una qualsiasi  $f(x)$  vale questa disuguaglianza:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

Dunque

$$y(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau$$

Per la proprietà del valore assoluto  $|ab| = |a||b|$  allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

Ma  $x(t-\tau) \leq M$  perchè abbiamo ipotizzato che il segnale in ingresso sia limitato, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

In definitiva:

$$y(t) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Possiamo dunque affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema sia stabile BIBO è che  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$  converga, altrimenti  $y(t)$  è illimitato.

**Teorema.** Se la risposta all'impulso del Sistema non è assolutamente convergente allora non è BIBO Stabile

**Ipotesi.** Ipotizziamo che:

1. Il sistema sia BIBO Stabile,  $|y(t)| < N < \infty$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = +\infty$
3. consideriamo una  $x(t)$  limitata, ossia  $x(t) = \text{sign}[h(-t)]$

**Dimostrazione.** Possiamo dire che per  $t = 0$  la risposta all'impulso è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(0-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sign}[h(-\tau)] d\tau$$

per  $t = 0$ ,  $\text{sign}[h(-\tau)] = 1$  dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sign}[h(-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = |y(t)| \\ |y(t)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty \end{aligned}$$

ASSURDO, allora  $y(t)$  è instabile.

Possiamo dunque affermare che: Un sistema è BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (80)$$

### 6.2.3 Risposta in frequenza

Consideriamo la risposta del sistema rispetto al fasore di frequenza  $f$ :

$$x_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

Dal momento che il sistema è LTI allora:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x_f(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi \tau} d\tau = \\ &= e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \tau} d\tau \end{aligned}$$

Possiamo vedere  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \tau} d\tau$  come una sorta di convoluzione in 0, che noi chiamiamo  $\hat{H}(f)$  e definiamo **Risposta in Frequenza**. Possiamo riscrivere l'equazione come:

$$y(t) = H(f)x_f(t) \quad (81)$$

Da  $H(f)$  possiamo definire:

- **Risposta in Ampiezza:**  $|H(f)|$
- **Risposta in Fase:**  $\angle H(f)$

Questa proprietà dei LTI è molto importante poichè ci dice che la risposta in frequenza di un qualsiasi segnale  $x(t)$  è un altro segnale **alla stessa frequenza**, magari traslato o amplificato, cioè la risposta di un fasore è ancora un fasore di frequenza  $f$  ma moltiplicato per un valore complesso  $H(f)$

## 6.3 Proprietà Sistemi Discreti

Un sistema  $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$  è detto discreto se e solo se  $x, y$  sono segnali discreti; possiamo enunciare per tali sistemi le stesse proprietà dei sistemi LTI continui:

**Causalità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.1)

**Stabilità BIBO.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.2)

**Linearità.** Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.6)

**Tempo-Invarianza.** La medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.7)

## 7 Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti

Lezione 9  
28/10/2024

Consideriamo un sistema  $S[\cdot] : y(n) = S[x(n)]$  con  $n \in \mathbb{Z}$  Lineare e Tempo-Invariante; possiamo riscrivere  $x(n)$  come somma infinita tra i prodotti tra l'impulso ideale e il loro peso, ossia come:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Allora:

$$\begin{aligned} y(n) &= S[x(n)] = \\ &= S \left[ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i) \right] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \underbrace{S[\delta(n-i)]}_{h(n)} \end{aligned}$$

Dal momento che  $S[\cdot]$  è anche Tempo-Invariante, allora:

$$h(n - n_0) = S[\delta(n - n_0)]$$

In definitiva, anche nel caso discreto, possiamo enunciare la proprietà fondamentale dei sistemi LTI, ossia che un qualsiasi sistema LTI può essere descritto come convoluzione tra l'ingresso e la risposta all'impulso del sistema:

$$y(n) = S[x(n)] = x(n) * h(n) \quad (82)$$

### 7.1 Causalità

Un sistema  $S[\cdot]$  LTI discreto è **Causale** se e solo se:

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0, n \in \mathbb{Z} \quad (83)$$

Dunque, come avevamo detto nel continuo,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^n x(i)h(n-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \quad (84)$$

Ossia un sistema LTI causale può essere scritto come la somma infinita del prodotto degli ingressi e degli impulsi dall'infinito passato al presente o come somma infinita degli ingressi presenti e passati per l'impulso



## 7.2 Stabilità BIBO

Per definizione, un sistema LTI  $S[\cdot]$  è stabile BIBO se e solo se:

$$\forall x(n) : |x(n)| \leq M < \infty \longrightarrow |y(n)| \leq N < \infty \quad (85)$$

Ma possiamo ricavare un'altra definizione:

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| \\ \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| \\ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| &\leq M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Allora  $S[\cdot]$  è stabile BIBO se  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < \infty$ , cioè se la risposta all'impulso è assolutamente sommabile

**Ma è anche necessaria la condizione?** Dimostriamo per assurdo

**Ipotesi.**

1.  $y(n)$  è stabile
2.  $x(n)$  è limitata,  $x(n) = \text{sign}[h(-n)]$
3.  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \infty$

**Dimostrazione.** Calcoliamo  $y(n)$  per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(-i)| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|\text{sign}[|h(i)|] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Per ipotesi (3)  $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = +\infty$  dunque  $y(t)$  non è stabile, ASSURDO!  
Allora  $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$  In definitiva possiamo affermare che:

$$\text{Un sistema LTI è BIBO} \iff \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty \quad (86)$$

### 7.3 Convoluzione Discreta

Definiamo  $a(n)$  convoluto con  $b(n)$  la seguente operazione

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i)b(n-i) \quad (87)$$

#### 7.3.1 Proprietà

Enunciamo qui anche le proprietà di cui gode la convoluzione discreta:

**Commutativa:** La convoluzione è commutativa, allora vale che

$$f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$$

**Dimostrazione.**

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i)$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} m = n - i \\ i = n - m \end{cases}$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i) &= \sum_{n-m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)f(n-m) = \\ &= g(m) * f(m) \end{aligned}$$

In questo caso possiamo scambiare senza problemi gli estremi della sommatoria dal momento che non dobbiamo preoccuparci del segno (mentre nell'integrale dovevamo considerare pure il  $d\tau$  che dava un verso di integrazione).

**Associativa** Ha la stessa formulazione della Convoluzione Continua (72)

**Distributiva (rispetto alla Somma)** La stessa formulazione della Convoluzione Continua (74)

**Convoluzione con  $\delta(n)$**  La stessa formulazione della Convoluzione Continua (75)

## 8 Analisi In Frequenza

I segnali visti finora sono stati presentati come funzioni descritte da un'espressione analitica; alcuni studiosi, tra cui Fourier, si accorsero che tali funzioni potevano essere scomposte in somme di altre funzioni (in particolare di fasori, seni e coseni), ossia è possibile vedere un segnale come **combinazione lineare** di segnali elementari. Uno strumento che permette di trasformare un segnale in una combinazione lineare di segnali elementari è lo **sviluppo in serie di Fourier**.

### 8.1 Sviluppo In Serie Di Fourier

**Teorema.** Data una funzione *periodica*  $f(t) : f(t) = f(t + kT) \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$  e *regolare* (ossia che rispetta le condizioni di Dirichlet), allora  $f(t)$  può essere riscritta come una combinazione lineare di seni e coseni con i propri pesi e le cui frequenze sono multiple di  $\frac{1}{T}$  (con  $T$  il periodo di  $f(t)$ ).

Consideriamo ora i vari multipli:

- $n = 0 \rightarrow f_0 = 0$  è la cosiddetta *componente continua* (un valore costante).
- $n = 1 \rightarrow f_1 = \frac{1}{T}$  viene detta la *frequenza fondamentale*.
- $\forall |n| > 1 \rightarrow f_n = \frac{n}{T}$  viene detta *armonica n-esima*.

Gli sviluppi in serie di Fourier si presentano in forma **Trigonometrica** ed **Esponenziale**

#### 8.1.1 Forma Esponenziale

**Equazione di Sintesi.** Nella forma esponenziale possiamo esprimere la funzione  $f(t)$  come combinazione lineare di fasori (3.2.6)  $p_n(t)$  a frequenza  $f_n = \frac{1}{T}$  con  $T$  il periodo di  $f$ ; è detta *di sintesi* perchè otteniamo  $f$  dalla combinazione di fasori

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Equazione di Analisi.** Al contrario della sintesi, noi vogliamo *scomporre*  $f$  per ottenere i fasori che la combinano:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Dove  $\int_T$  è un integrale *di durata*  $T$ , ossia che può andare da 0 a  $T$ , o da  $-T/2$  a  $T/2$

### 8.1.2 Forma Trigonometrica

Anche se storicamente è stato al contrario, possiamo derivare a partire dalla forma esponenziale, la forma trigonometrica dello sviluppo.

#### I Equazione di Sintesi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + c_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] \quad (\text{separo i } c_n)$$

Consideriamo ora  $c_{-n}$

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{e^{j2\pi \frac{n}{T} t}} dt = \overline{c_n} \end{aligned}$$

Possiamo vedere il complesso  $-j$  come il coniugato del complesso di partenza, dunque:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}}] = \\ &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re[c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] \quad (\text{proprietà 1.3.2}) \end{aligned}$$

Possiamo dunque notare che, a partire dalla scomposizione di una funzione reale in fasori (complessi) otteniamo ancora qualcosa di completamente reale. Poniamo ora  $c_n = \rho_n e^{j\theta_n}$ , ossia in forma polare:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re[\rho_n e^{j\theta_n} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re[\rho_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n}] = \end{aligned}$$

Dal momento che  $\Re[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$  allora:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n\right) \quad (88)$$

**II Equazione di Sintesi.** Ora poniamo  $c_n = a_n - jb_n$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}] = \\ &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re [(a_n - jb_n) e^{j2\pi \frac{n}{T}t}] = \\ &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re [a_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} - jb_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}] = \end{aligned}$$

Riscriviamo ora  $j$  come  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ :

$$f(t) = c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Re [a_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} - b_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t + \frac{\pi}{2}}] =$$

Sapendo che, ancora una volta,  $\Re[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$  allora:

$$= c_o + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T}t\right) - b_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \right] =$$

Dal momento che  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$  allora:

$$f(t) = c_o + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T}t\right) \right] \quad (89)$$

Cerchiamo, a questo punto, di derivare  $a_n, b_n$  a partire da  $c_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \Re[c_n] = \Re \left[ \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \Re [e^{-j2\pi \frac{n}{T}t}] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T}t\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= -\Im[c_n] = -\Im \left[ \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt \right] = \\ &= -\frac{1}{T} \int_T f(t) \Im [e^{-j2\pi \frac{n}{T}t}] dt = \\ &= -\frac{1}{T} \int_T f(t) \sin\left(-2\pi \frac{n}{T}t\right) dt = \end{aligned}$$

Per la proprietà antisimmetrica del seno  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  otteniamo:

$$b_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

In definitiva, grazie allo sviluppo in serie di Fourier, possiamo trasformare una funzione **continua, periodica** e regolare in una somma **discreta** di fasori con pesi  $\{c_n\}$  nel periodo  $[0, T]$ ; inoltre, grazie ai coefficienti  $c_n$  è possibile conoscere il contributo (o ampiezza) dell' $n$ -esima armonica nello sviluppo di  $f(t)$ ; proprio per questo motivo i  $c_n$  rappresentano lo **spettro di  $f(t)$** . La funzione  $f$  di partenza esiste nel **dominio del tempo** mentre i  $c_n$  nel **dominio delle frequenze**

Una cosa che possiamo notare è che  $c_0$  è il valor medio della funzione ed è il contributo che "solleva" la funzione; questo perchè seni/coseni che definiscono lo sviluppo hanno valor medio nullo.

**Esempi.** Vedi sul quaderno lo sviluppo del dente di sega e dell'onda quadra.

## 8.2 Trasformata di Fourier

Finora gli sviluppi in serie riguardano solo funzioni continue e periodiche, mentre tutte le altre funzioni non godono di questa proprietà. In realtà Fourier scoprì un modo per analizzare lo spettro di qualsiasi funzione reale:

Consideriamo una funzione  $f(t)$  **continua e non periodica** e definiamo la sua versione periodica  $f_T(t)$  come:

$$f_T(t) = f(t) \quad \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right)$$

Tale che  $f_T(t) = f_T(t + kT)$  con  $k \in \mathbb{Z}$  e  $T$  il periodo. Quello che fa  $f_T(t)$  è di replicare il comportamento di  $f(t)$  nell'intervallo  $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$  per tutto  $\mathbb{R}$ . Dal momento che  $f_T(t)$  è periodica e continua, posso applicare lo sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j \frac{n}{T} t} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} \quad \left(\text{con } f_n = \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

Dove  $c_n$  è:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Consideriamo ora  $\frac{1}{T} = \Delta f$  ossia il passo unitario con cui incrementano le frequenze delle armoniche:

$$c_n = \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Facendo tendere il passo unitario a 0 (o meglio, il periodo all'infinito) la versione periodica  $f_T(t)$  sarà sempre più simile alla funzione di partenza, per cui possiamo dire che:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) \quad (90)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi j f_n \tau} d\tau \right] e^{j2\pi j f_n t} \Delta f \end{aligned}$$

Dobbiamo osservare che:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi j f_n \tau} d\tau$  è una sorta di **risposta in frequenza** e viene indicata con  $F(f)$  (funzione di trasformazione di  $f$ )
- al tendere di  $T$  all'infinito,  $\Delta f$  diventa infinitesima, dunque la somma infinita di termini moltiplicati per un'infinitesimo è proprio un integrale

**Antitrasformata di Fourier.** Per cui:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(f_n) e^{j2\pi j f_n t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi j f t} df = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{F(f)\} \end{aligned}$$

E viene detta **Formula di Sintesi** o **Antitrasformata di Fourier**

**Trasformata di Fourier.** Mentre  $F(f)$ , anche detta **Trasformata di Fourier** o **Formula di Analisi**, è:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi j f t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (91)$$

Possiamo dunque vedere quest'importante relazione:

$$\boxed{f(t) \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} F(f)}$$

Con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sebbene quasi sempre lo spettro di una funzione  $f$  è complesso, quindi tridimensionale, possiamo raccontare **frequenze** e **ampiezze** tramite le funzioni:

- **Spettro d'Ampiezza**  $|F(f)| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- **Spettro di Fase**  $\angle F(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 8.2.1 Trasformate Notevoli



Lezione 11  
4/11/2024

**Rettangolo.** La trasformata sicuramente più importante è quella del rettangolo:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= -\frac{1}{2j\pi f} (e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}) = \\ &= -\frac{1}{j\pi f} \left( \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} \right) = \\ &= \frac{j}{\pi f} \left( \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f) = \quad \quad \quad (\text{per eq di Eulero}) \\ &= \text{sinc}(f) \end{aligned}$$

**Delta di Dirac** La trasformata di Fourier della Delta è molto particolare:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= e^{-j2\pi f 0} = 1 \quad \quad \quad (\text{per il campionamento (3.2.4)}) \end{aligned}$$

Possiamo interpretare questo risultato dicendo che lo spettro della delta è costituita da infiniti seni di frequenze che vanno da  $-\infty$  a  $+\infty$  tutti di modulo



unitario

**Delta di Dirac Traslata** Anche la trasformata della Delta Traslata di  $t_0$  è interessante:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \quad (\text{per il campionamento (3.2.4)}) \end{aligned}$$

### 8.3 Trasformata di Fourier di Segnali Reali

Consideriamo  $s(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(-j2\pi ft) + j \sin(-j2\pi ft)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(-j2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi ft) dt = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(j2\pi ft) dt}_{\in \mathbb{R}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi ft) dt}_{\in \mathbb{R}} = \\ &= \Re[S(f)] - j \Im[S(f)] \quad (\text{per simmetrie}) \end{aligned}$$

#### 8.3.1 Proprietà Trasformata di Segnali Reali

**Simmetria Hermitiana.** Consideriamo ora  $S(-f)$ :

$$\begin{aligned} \Re[S(-f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(j2\pi ft) dt = \Re[S(f)] \quad (\text{simmetria pari}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im[S(-f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi ft) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(j2\pi ft) dt = -\Im[S(f)] \quad (\text{simmetria dispari}) \end{aligned}$$

Un'altra simmetria simile la possiamo notare per **modulo** e **fase** di  $S(f)$ :

- $|S(f)| = |S(-f)|$
- $\angle S(f) = -\angle S(-f)$

Da ciò possiamo notare che la trasformata della frequenza opposta ha lo stesso modulo della trasformata di partenza ma fase opposta; questa è proprio la definizione di **coniugato** e definisce la **Simmetria Hermitiana**:

$$S(-f) = \overline{S(f)} \quad (\text{se } s(t) \in \mathbb{R})$$

Normalmente un grafico di un segnale si rappresenta in forma **bilatera**, considerando sia i tempi negativi sia positivi. Da questi calcoli abbiamo dimostrato che la trasformata di un qualsiasi segnale reale è sempre simmetrico rispetto alle ordinate per cui molto spesso la trasformata viene rappresentata in forma **monolatera**, cioè solo per  $t > 0$ .

**Linearità.** La trasformata di Fourier è un operatore lineare:

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)] \quad (92)$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[ax(t) + by(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [ax(t) + by(t)] e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t)e^{-j2\pi ft} + by(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)] \end{aligned}$$

**Dualità.** Dato un segnale  $s(t)$  tale che  $\mathcal{F}[s(t)] = S(f)$ , allora:

$$\mathcal{F}[S(t)] = s(-f) \quad (93)$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[S(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{j2\pi(-f)t} dt = s(-f) \end{aligned}$$

Ossia otteniamo la formula di sintesi.

**Traslazione dei Tempi.** Dato un segnale  $s(t)$  tale che  $\mathcal{F}[s(t)] = S(f)$ , allora:

$$\mathcal{F}[s(t - t_0)] = S(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (94)$$

**Dimostrazione.** Iniziamo a considerare:

$$\mathcal{F}[s(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Effettuiamo ora questo scambio di variabili  $\begin{cases} t' = t - t_0 \\ dt' = dt \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f t'} \underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{\text{costante}} dt' = \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = \\ &= S(f) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

**Traslazione nelle Frequenze.** Dato  $\mathcal{F}[s(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$  allora si dimostra per dualità che:

$$\mathcal{F}[s(t) e^{-j2\pi f t_0}] = S(f + f_0) \quad (95)$$

**Modulazione d'Ampiezza** Dato  $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$  e il segnale modulato  $s_m(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$  allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t) \cos(2\pi f_c t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (s(t) e^{j2\pi f_c t} + s(t) e^{-j2\pi f_c t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} (S(f + f_0) + S(f - f_0)) \end{aligned}$$

**Banda di un Segnale** Data una coppia  $s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f)$  si definisce **Banda di un Segnale**  $B$  il supporto delle frequenze, ossia l'insieme delle frequenze per le quali il modulo non è nullo:

$$B = \{f \in \mathbb{R} : |S(f)| \neq 0\} \quad (96)$$

**Bandwidth** La Bandwidth o **Larghezza di Banda**  $BW$  rappresenta l'estensione di  $B$ , ossia:

$$BW = f_2 - f_1 \quad (97)$$

Dove  $f_2, f_1$  sono le frequenze estremità della Banda. NB: Dal momento che la trasformata di un segnale reale è, per la simmetria Hermitiana, simmetrica rispetto alle  $y$ , allora la  $BW$  viene definito sullo **Spettro Monolatero**. Possiamo definire una nuova classificazione dei segnali:

**Segnali In Banda Base.** Sono segnali che contengono l'origine nella Banda.

**Segnali In Banda Passante.** Sono segnali che non contengono l'origine nella Banda.

Lezione 12  
05/11/2024

**Scalatura.** Data una coppia  $s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f)$  allora:

$$s(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad (98)$$

**Dimostrazione** Consideriamo  $a > 0$ :

$$\mathcal{F}\{s(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-j2\pi ft} dt$$

Ora consideriamo questo cambio di variabili  $\begin{cases} \tau = at \\ d\tau = a dt \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Poi in maniera simile, per  $a < 0$  possiamo dimostrare che  $\mathcal{F}\{s(at)\} = \frac{1}{-a} S\left(\frac{f}{a}\right)$ . Allora possiamo unificare i 2 risultati considerando la  $a$  in valore assoluto.

**Derivazione** Data una coppia  $s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f)$  allora:

$$\frac{d}{dt} s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f S(f) \quad (99)$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}s(t) &= \\
&= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df = \quad (\text{formula di Sintesi}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) j2\pi f e^{j2\pi ft} df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [j2\pi f S(f)] e^{j2\pi ft} df
\end{aligned}$$

Allora abbiamo trovato la coppia di fourier  $\frac{d}{dt}s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f S(f)$

**Convoluzione** Date le seguenti coppie di Fourier  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$  e  $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(f)$  allora:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)Y(f) \quad (100)$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} &= \\
&= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau e^{-j2\pi ft} dt
\end{aligned}$$

Consideriamo ora  $e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f(t-\tau+\tau)} = e^{-j2\pi f(t-\tau)} e^{-j2\pi \tau}$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)} e^{-j2\pi \tau} d\tau dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(\tau)e^{-j2\pi \tau} d\tau\} y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt = \\
&= X(f)Y(f)
\end{aligned}$$

Per **Dualità** si ottiene anche che:

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * Y(f) \quad (101)$$

**Integrazione** Data la coppia di Fourier  $s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f)$  e data la funzione  $p(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$  allora:

$$p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j\pi f} S(f) + \underbrace{\frac{S(0)}{2} S(f)}_{\text{costante integrazione}} \quad (102)$$

## 8.4 Teorema Di Parseval (Energia)

Il teorema di Parseval per Segnali Energia (vedi paragrafo 3.3.7) afferma che la trasformata di un segnale conserva sempre l'energia, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (103)$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{s(t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right] dt = \quad (\text{per eq. di Sintesi}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} e^{j2\pi ft} dt \right] df = \end{aligned}$$

Sfruttiamo ora la seguente proprietà:  $a \cdot b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$ :

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} e^{j2\pi ft} dt \right] df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \overline{S(f)} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \end{aligned}$$

Intuitivamente, possiamo dire che, l'energia di un segnale è proprio uguale alla somma dell'energia trasportata da ogni contributo dei seni a tutte le frequenze della trasformata. Proprio per questo motivo  $|S(f)|^2$  viene anche detta **Densità Spettrale di Energia**

## 8.5 Teorema di Parseval (Potenza)

Similmente al Teorema per i segnali energia, ne esiste uno simile per i segnali potenza:

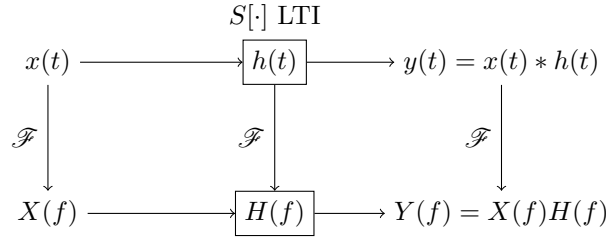
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (104)$$

$|S(f)|^2$  viene anche detta **Densità spettrale di frequenza**

## 8.6 Sistemi nel Dominio delle Frequenze

Abbiamo visto che, per la proprietà fondamentale dei sistemi LTI (82), l'output di un sistema può essere visto come il risultato della convoluzione tra l'input e la risposta all'impulso. Per la proprietà commutativa della convoluzione abbiamo scoperto che è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema studiando la risposta all'ingresso, che è un segnale. Per questo motivo ha senso estendere l'analisi in Frequenza anche per i Sistemi LTI.

Ricordando la proprietà di risposta all'impulso (6.2.3), possiamo dire che  $H(f)$  sia a tutti gli effetti la trasformata di Fourier della risposta all'impulso e può essere vista come risposta ad un Fasore. Cerchiamo di definire uno schema generale dei sistemi LTI nel dominio delle frequenze e del tempo:



L'analisi in frequenza di un sistema è importantissimo per 2 grandi proprietà:

- Dal momento che  $Y(f) = X(f)H(f)$ , possiamo dire che per ogni frequenza  $f$ , la risposta in frequenza  $H(f)$  amplifica, diminuisce, o annulla l'ampiezza dell'ingresso  $X(f)$ , tuttavia  $Y(f)$  continua ad essere un fasore con la stessa frequenza dell'ingresso. Possiamo dunque dire che  $H(f)$  agisce da **Filtro** per le frequenze che compongono l'ingresso  $x(t)$ .
- Dal punto di vista di **calcolo numerico**, calcolare per tutti gli istanti la convoluzione di  $x(t) * h(t)$  non è proprio semplice; Grazie all'analisi in frequenza, però, possiamo fare un'escamotage: calcolare le 2 trasformate, moltiplicarle e antitrasformarle. Operazione di gran lunga più semplice che calcolare la convoluzione.

Dall'analisi in frequenza di un sistema notiamo che:

- $|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$
- $\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$



## 9 Filtri

### 9.1 Filtri Ideali

Lezione 13  
11/11/2024

I filtri ideali sono filtri descritti matematicamente e con proprietà difficilmente replicabili con esattezza tramite circuiti reali.

Consideriamo un **Sistema senza Distorsione** nella seguente forma:

$$y(t) = Ax(t - t_0) \quad (105)$$

La trasformata di questo sistema è la seguente:

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (\text{proprietà (94)})$$

$$\text{Con } H(f) = Ae^{-j2\pi ft_0} = \begin{cases} |H(f)| = A \\ \angle H(f) = (-2\pi t_0)f \end{cases}$$

### 9.2 Filtri Lineari Ideali

Definiamo **Filtro Lineare Ideale** un filtro nella seguente forma:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi ft_0} & \text{se } f \in B \\ 0 & \text{se } f \notin B \end{cases} \quad (106)$$

Dove  $B$  è detta **Banda Passante di Un filtro**, perchè non annulla la frequenza del segnale in ingresso.

#### 9.2.1 Filtro Passa-Basso (Ideale)

Questo filtro fa passare tutte le frequenze al di sotto di una **Frequenza di Taglio**  $f_T$ , ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi ft_0} & \text{se } |f| < f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (107)$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando  $A = 1, t_0 = 0$ ):

$$H_{LP} = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right)$$
$$\underbrace{\text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right)}_{H(f)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \underbrace{2f_T \text{sinc}(2f_T t)}_{h(t)}$$

### 9.2.2 Filtro Passa-Alto (Ideale)

Questo filtro fa passare, al contrario, tutte le frequenze al di sopra di una **Frequenza di Taglio**  $f_T$ , ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi ft_0} & \text{se } |f| \geq f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (108)$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando  $A = 1, t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} H_{HP} &= \begin{cases} 1 & \text{se } |f| \geq f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right) \\ \underbrace{1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right)}_{H(f)} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \underbrace{\delta(t) - 2f_T \text{sinc}(2f_T t)}_{h(t)} \end{aligned}$$

### 9.2.3 Filtro Passa-Banda (Ideale)

Questo filtro fa passare tutte le frequenze entro un intervallo  $[f_m, f_M]$ , ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi ft_0} & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (109)$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando  $A = 1, t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} H_{BP} &= \begin{cases} 1 & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right) \\ \underbrace{\text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)}_{H(f)} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \underbrace{2B \text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_c t)}_{h(t)} \end{aligned}$$

### 9.2.4 Filtro Arresta-Banda (Ideale)

Questo filtro fa passare, al contrario, tutte le frequenze al di fuori di un intervallo  $[f_m, f_M]$ , ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi ft_0} & \text{se } \leq f_m \text{ o } |f| \geq f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (110)$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando  $A = 1, t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} H_{BS} &= \begin{cases} 1 & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1 - \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right) \\ \underbrace{1 - \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)}_{H(f)} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \underbrace{\delta(t) - 2B \text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_c t)}_{h(t)} \end{aligned}$$

### 9.3 Filtri Reali

I filtri reali, sono invece, quelli costruiti tramite componenti circuitali. I circuiti analogici, per chiare limitazioni fisiche, non potranno mai riprodurre fedelmente i comportamenti dei filtri ideali.

#### 9.3.1 Circuito RC

Il circuito RC corrisponde ad un **Filtro Passa-Basso Reale** per il fatto che la risposta all'impulso assomiglia a quella di un filtro passa-basso. In un circuito possiamo immaginare un impulso come una scarica di intensità infinita che attraversa il circuito in un tempo infinitesimo e carica il condensatore istantaneamente di  $1A$ , e poi si scarica seguendo un andamento **esponenziale decrescente** (circa). La risposta all'impulso possiamo descriverla così:

$$h(t) = u(t)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (111)$$

Con  $R$  la **resistenza del circuito** e  $C$  la **capacità del condensatore**.  $RC$  viene detto **tempo caratteristico** del sistema. La trasformata di questa risposta all'impulso è la seguente:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Se consideriamo la frequenza di taglio  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$  abbiamo che:

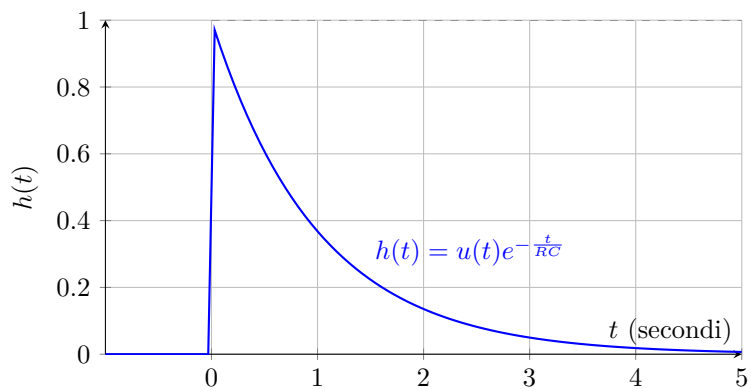
$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_T}} \quad (112)$$

Analizziamo modulo e frequenza di questa risposta in frequenza:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{se } f \ll f_T \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } f = f_T \\ \ll 1 & \text{se } f \gg f_T \end{cases} \quad (113)$$

$$\angle H(f) = \begin{cases} \approx 0 & \text{se } f \ll f_T \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } f = f_T \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } f \gg f_T \end{cases} \quad (114)$$

Il grafico di risposta all'impulso dovrebbe essere:



Dal momento che per  $f > f_T$  la risposta in frequenza decresce per  $1/f$  ogni volta, questo filtro viene detto **filtro del I ordine**.

**Ordine n-esimo di un Filtro.** Si definisce Ordine n-esimo di un Filtro, un filtro che decresce al di fuori della banda di  $1/f^n$

## 10 Elaborazione di Segnali Digitali (DSP)

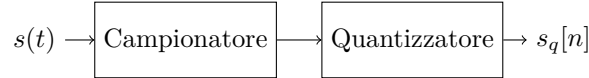
Questa branca della teoria dei segnali si occupa della conversione dal mondo analogico a digitale e viceversa e sull'elaborazione numerica dei segnali digitali. Questa branca è nata e si è sviluppata molto rapidamente perchè permette molto facilmente di manipolare i segnali come se fossero numeri, mentre con i circuiti analogici tutto ciò richiedeva uno sforzo concettuale e costi davvero elevati.

### 10.1 Conversione Analogico/Digitale

Il primo passo per entrare nel mondo digitale è definire la conversione di un segnale reale in discreto ma incontriamo 2 grandi **ostacoli**:

- **Istanti Infiniti**: se volessimo rendere digitale un segnale  $s(t), t \in \mathbb{R}$ , ci accorgeremmo che questo trasporta informazione infinita, poichè il numero di istanti  $t_i$  in un intervallo  $[t_{min}, t_{max}]$  è **denso**. Dunque il primo passo per ottenere un segnale digitale è **Campionare**
- **Ampiezze Infinite**: anche se riuscissimo a confinare il segnale entro un intervallo limite di ampiezze, il numero di ampiezze disponibili sarebbe comunque infinito. Per questo motivo dovremo discretizzare anche il dominio delle ampiezze  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  detto **dizionario di quantizzazione**

Possiamo riassumere il processo di conversione nella seguente maniera:



E matematicamente ciò corrisponde a:

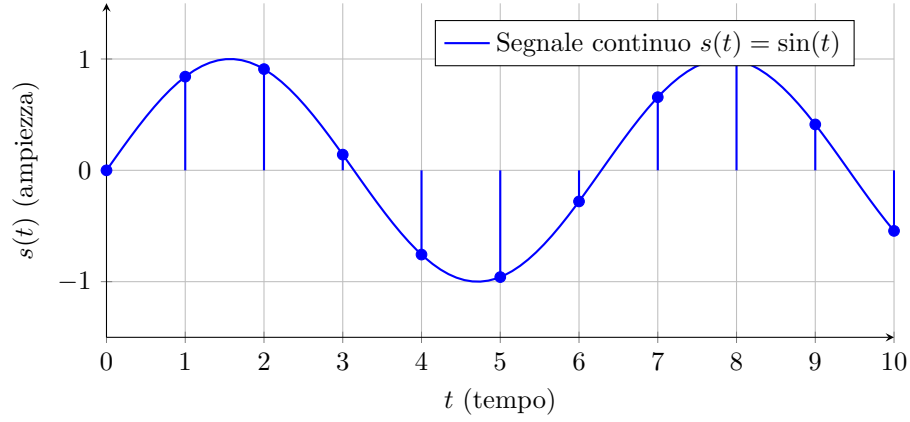
$$\begin{cases} s(t) \\ t \in \mathbb{R} \\ t_m \leq t \leq t_M \end{cases} \xrightarrow{\text{Conversione A/D}} \begin{cases} s_q(t_i) \\ t_m \leq t_i \leq t_M \\ \forall i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

### 10.2 Campionamento (Sampling)

Campionare significa registrare, di infiniti istanti, solo di un segnale di alcuni istanti. In generale a noi interessa campionare il segnale per passi costanti di tempo  $T_S$  detto **Periodo di Campionamento**. Questa tecnica viene detta **Campionamento Uniforme** e possiamo formalizzarlo così:

$$s(t), t \in \mathbb{R} \longrightarrow s(nT_S) = s_n$$

Dove  $n \in \mathbb{Z}$  rappresenta l'i-esimo istante.



Dal grafico possiamo riconoscere come questi siano tanti impulsi di Dirac, ognuno traslato di un certo  $nT_S$  e con una determinata ampiezza:

$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) \quad (115)$$

Grazie a ciò possiamo definire il **Campionamento Ideale**:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= s(t) \cdot \delta_{T_S}(t) = \\ &= s(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \delta(t - nT_S) \end{aligned}$$

Nella realtà, tuttavia, un campionamento del genere non è possibile (non è possibile proprio generare un impulso di dirac) queste formalizzazioni tuttavia servono per permetterci di studiare meglio i segnali digitali.

### 10.3 Spettro del Segnale Campionato

Grazie alla formalizzazione precedente possiamo determinare lo spettro del segnale  $s_c(t)$ , ossia:

$$s_c(t) = s(t)\delta_{T_S}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f) * \Delta_{T_S}(f) = S_c(f) \quad (116)$$

Dal momento che  $\delta_{T_S}(t)$  possiamo vederla come una funzione periodica di periodo  $T_S$ , allora possiamo esprimere la funzione tramite lo **sviluppo in serie di fourier**:


$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T_S} t} \quad (117)$$

Calcoliamoci dunque  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_S} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_{T_S}(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_S} t} dt = \\ &= \frac{1}{T_S} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_S} t} dt = \\ &= \frac{1}{T_S} e^{-j0} \quad (\text{per il campionamento}) \end{aligned}$$

Possiamo dunque notare come i coefficienti dello sviluppo in serie siano tutti  $\frac{1}{T_S}$ , ossia:

$$\delta_{T_S}(t) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T_S} t} \quad (118)$$

 Lezione 15  
18/11/2024

Calcoliamo ora la trasformata del *pettine di impulsi*  $\delta_{T_S}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{T_S}(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T_S} t}\right\} = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{e^{j2\pi \frac{n}{T_S} t}\} = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_S}\right) \end{aligned}$$

Possiamo dunque notare quest'importante coppia di Fourier:

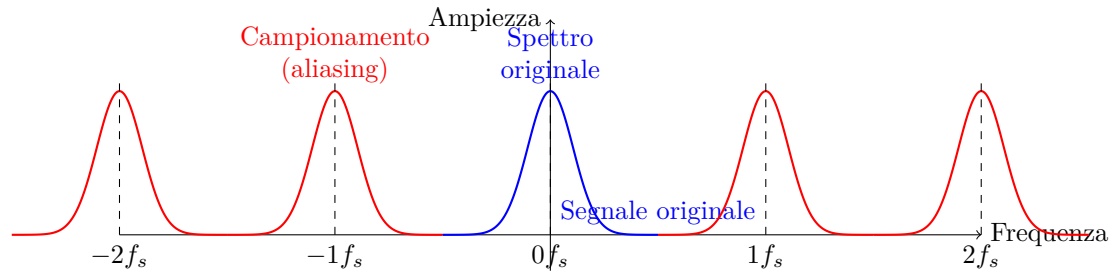
$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S)}_{\delta_{T_S}(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_S}\right)}_{\Delta_{T_S}(f)} \quad (119)$$

Da ciò possiamo notare come una serie di impulsi nei tempi corrisponde ad una serie di impulsi nelle frequenze.

**Spettro del Campionamento.** Da ciò possiamo dunque ricavarci lo spettro del segnale campionato:

$$\begin{aligned} S_C(f) &= S(f) * \Delta_{T_S}(f) = \\ &= S(f) * \left\{ \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_S}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{S(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_S}\right)\} = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T_S}\right) \end{aligned}$$

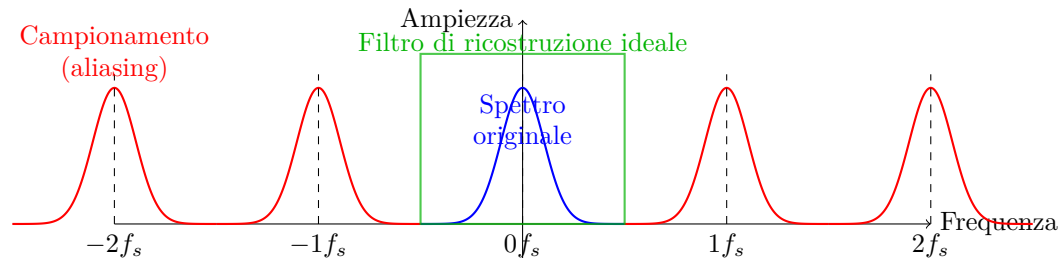
Cioè, campionando un segnale con periodo  $T_S$ , nel dominio delle frequenze lo spettro ottenuto è uguale a **infinite repliche del segnale di partenza**, ognuna delle quali centrata in  $n/T_S$ .



**Repliche Disgiunte e Sovrapposte.** Consideriamo ora i 2 possibili casi:

- $W < f_S/2$  (dove  $W$  è la banda del segnale,  $f_S$  è la frequenza di campionamento): otteniamo repliche disgiunte come nel grafico soprastante
- $W > f_S/2$  : otteniamo repliche che si sovrappongono in parte

Questa distinzione è importante perchè quando facciamo operazione di filtraggio del segnale e con un filtro passa-basso selezioniamo solo una di queste repliche, possiamo ottenere il segnale di partenza.



### 10.3.1 Teorema di Nyquist-Shannon

*Un segnale con banda limitata  $W$  superiormente può essere ricostruito univocamente a partire dai suoi campioni se e solo se il campionamento avviene a frequenza maggiore di  $2W$ , ossia:*

$$f_S > 2W \quad (120)$$

### 10.3.2 Ricostruzione nel dominio delle frequenze

Usando il filtro passa-basso come avevo mostrato prima con  $f_T = f_S/2 = f_N$  con  $f_N$  la *frequenza di Nyquist*, possiamo ricostruire il segnale di partenza.



Consideriamo il filtro:

$$H_R(f) = \begin{cases} T_S & |f| \leq f_N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = T_S \text{rect} \left( \frac{f}{f_S} \right) \quad (121)$$

Allora:

$$\begin{aligned} S_C(f)H_R(f) &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s \left( f - \frac{n}{T_S} \right) \cdot T_S \text{rect} \left( \frac{f}{f_S} \right) = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s \left( f - \frac{n}{T_S} \right) \cdot T_S \text{rect}(fT_S) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s \left( f - \frac{n}{T_S} \right) \cdot \text{rect}(fT_S) = \\ &= S(f) \end{aligned}$$

Riottenendo dunque  $S(f)$ , possiamo definire  $H_R(f)$  come il **filtro di ricostruzione ideale**

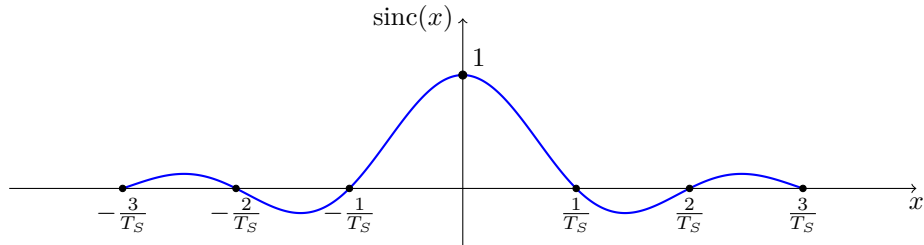
### 10.3.3 Ricostruzione nel dominio dei tempi

Per calcolare  $s(t)$  basta antitrasformare quanto calcolato prima:

$$S(f) = S_C(f)H_R(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} s_C(t) * h_R(t) \quad (122)$$

Dalle coppie notevoli, ci accorgiamo che  $h_R(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T_S} \right)$ , ossia la risposta all'impulso è un seno cardinale che si annulla in tutti i punti in cui abbiamo campionato, tranne che in 0, o meglio:

$$h_R(nT_S) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (123)$$



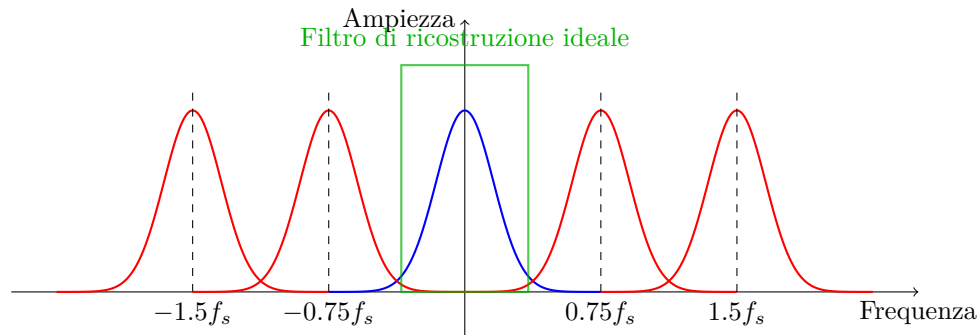
Calcoliamo ora  $s(t)$ :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s_C(t) * h_R(t) = \\
 &= \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \delta(t - nT_S) \right\} * \text{sinc} \left( \frac{t}{T_S} \right) = \\
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \left\{ \delta(t - nT_S) * \text{sinc} \left( \frac{t}{T_S} \right) \right\} = \\
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \text{sinc} \left( \frac{t - nT_S}{T_S} \right) \quad (\text{per (75)})
 \end{aligned}$$

Cioè il segnale ricostruito è dato dalla combinazione lineare di tanti seni cardinali.

### 10.3.4 Aliasing

Nel caso in cui avessimo campionato il segnale con frequenza di campionamento  $f_S < f_N$  si verifica questa situazione:



Dal grafico è possibile notare come le *frequenze illegali* che appartengono alla banda ma non vengono selezionate dal filtro, finiscono per essere sostituite dalla loro versione specchiata, cioè un'altra nota con lo stesso contributo. Per cui il suono si altera e perdiamo qualità. Questo effetto è detto **Aliasing** o Equivocazione. Per evitare questo effetto, spesso si effettua preprocessing sul segnale per *adattare* il segnale al campionamento che subirà successivamente tagliando le opportune frequenze. Questi filtri che svolgono ciò vengono detti **Anti-Aliasing**.

## 10.4 Quantizzazione

La quantizzazione può essere vista come l'operazione "gemella" del campionamento in quanto si occupa di discretizzare i valori del segnale ad ogni is-

tante/campione  $t$ . Anticipiamo già che questa operazione fa perdere irreversibilmente dei bit di informazione per cui è impossibile ricostruire esattamente il segnale di partenza dopo averlo quantizzato.

Consideriamo ora un segnale con un limitato  $x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max}$ . Discretizziamo l'intervallo  $[x_{\min}; x_{\max}]$  in un numero  $M$  di intervalli  $I = 0, 1, \dots, M - 1$ . Definiamo ora **soglia**  $t_i$  l'estremo di un intervallo, t.c.:

$$I_i = [t_i; t_{i+1}]$$

Inoltre  $t_0 = x_{\min}$  e  $t_M = x_{\max}$ . La quantizzazione consiste nel **sostituire** un valore  $x \in I_i$  con il valore rappresentativo dell'intervallo  $I_i$  detto  $x_i$ . Tutti i valori rappresentativi determinano il **dizionario di quantizzazione**  $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$ . Nella nostra trattazione, la quantizzazione che studieremo è **uniforme** ossia:

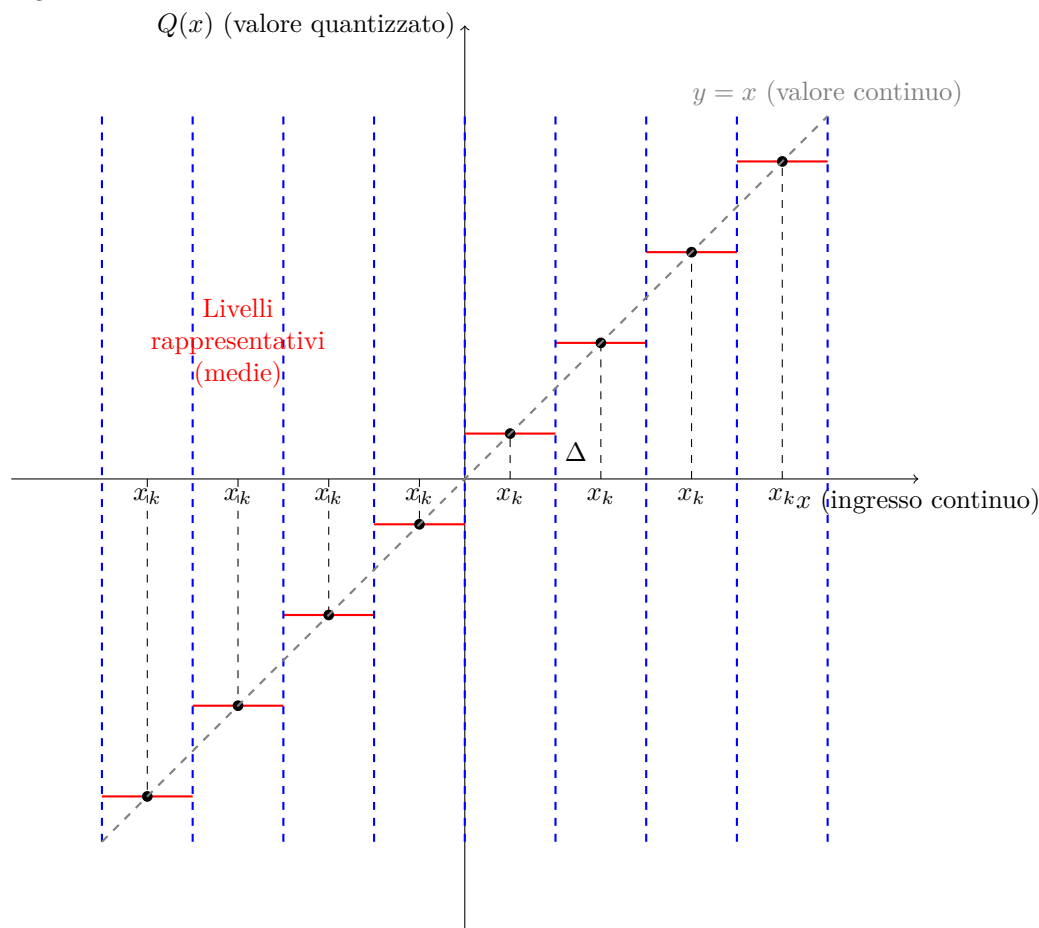
- Tutti gli intervalli hanno uguale ampiezza  $\Delta$  detto **passo di quantizzazione**:

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \quad (124)$$

- Il valore rappresentativo  $x_i$  è il valor medio:

$$x_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \quad (125)$$

**Grafico di Quantizzazione.** Possiamo rappresentare un grafico che aiuta a capire il grado di approssimazione, e dunque l'errore, della quantizzazione sul segnale:



Possiamo descrivere dunque la quantizzazione come un sistema  $x_q(t) = Q[x(t)] = x_i$  con  $x_t \in I_i$ . Da tutto ciò possiamo notare alcune cose:

- La quantizzazione è una relazione 1-a-molti (un valore rappresentativo a infiniti valori dell'intervallo)
- La quantizzazione introduce un errore  $e_q = x_q - x$

Per questi motivi, quest'operazione danneggia irreversibilmente la qualità del suono.

#### 10.4.1 Errore di Quantizzazione

Dell'errore di quantizzazione possiamo innanzitutto dire che  $-\frac{\Delta}{2} \leq e_q \leq \frac{\Delta}{2}$  con  $\Delta = \frac{x_{\text{MAX}} - x_{\text{min}}}{2}$ . Inoltre, dal momento che dovremo lavorare nel mondo digitale,

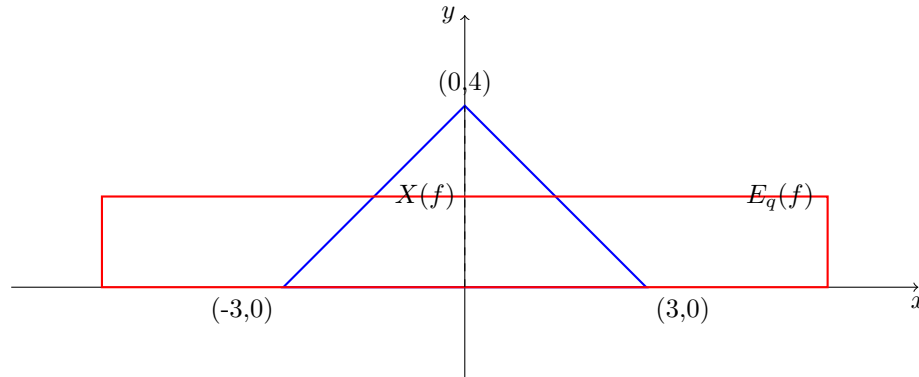
per agevolare la rappresentazione in bit del valore quantizzato si usa un  $M = 2^n$ , questa viene detta **quantizzazione su n bit**. Si può dimostrare che per intervalli sufficientemente piccoli, l'errore di quantizzazione ha distribuzione **uniforme discreta**, ossia ha una funzione di densità di probabilità  $f_{e_q} = \frac{1}{\Delta}$ . Consideriamo ora che possiamo riscrivere un valore rappresentativo nella seguente forma:

$$x_q(t) = x(t) + e_q(t) \quad (126)$$

Quindi possiamo vedere  $e_q(t)$  come un vero segnale e possiamo analizzarlo nel dominio delle frequenze. Dunque possiamo osservare ora che:

- Dal momento che  $-\frac{\Delta}{2} \leq e_q \leq \frac{\Delta}{2}$  (con  $\Delta \gg 1$ ) allora la potenza di  $e_q$  sarà molto minore della potenza di  $x(t)$
- Dal grafico che il professore ha reso disponibile sul suo sito emerge che  $e_q$  è molto "nervoso", ossia cambia repentinamente valore in intorni abbastanza piccoli, per questo motivo possiamo intuire che, nel dominio delle frequenze, questo errore sarà composto da frequenze molto alte e quindi avrà una banda MOLTO AMPIA.

Provando ad applicare un filtro passa-basso al segnale  $X(f)$  e all'errore  $E_q(f)$  otteniamo che, nel filtro, l'errore si ripiegherà su se stesso più volte (tante volte) fino ad esaurirsi. Possiamo accorgerci che la somma di tutti questi ripiegamenti è costante, dunque possiamo rappresentare la situazione nel dominio delle frequenze nella seguente maniera, cioè  $X_R(f) = X(f)E_q(f)$ :



Possiamo dunque vedere  $e_q(t)$  come un vero e proprio **rumore bianco** i cui contributi di ogni frequenza sono costanti

#### 10.4.2 Potenza Del Disturbo

Una volta individuata la forma e l'entità del disturbo, possiamo calcolare la potenza di questo segnale:

$$P_Q = \int_{-\infty}^{+\infty} e^2 f_{e_q}(e) de$$

Abbiamo visto prima che, se gli intervalli  $\Delta$  sono sufficientemente piccoli, possiamo assumere che  $f_{eq}(e)$  sia una funzione di densità di probabilità uniforme, che ha questa forma:

$$f_{eq}(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{se } -\frac{1}{\Delta} \leq e \leq \frac{1}{\Delta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (127)$$

Allora possiamo riscrivere l'equazione precedente:

$$\begin{aligned} P_Q &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24} \right) = \\ &= \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

Quello che abbiamo trovato è la **Potenza Media dell'errore di Quantizzazione**.

**Signal Noise Ratio.** La potenza Media dell'errore, tuttavia, ci dice ben poco poichè tale valore dev'essere sempre confrontato con la potenza del segnale disturbato, per questo motivo ha più senso parlare del rapporto, anche detto **Signal Noise Ratio (SNR)**:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \quad (128)$$

I possibili  $P_{\text{signal}}$  che possiamo scegliere per calcolare quel rapporto sono la **Potenza di Picco** o la **Potenza Media**

**Potenza Di Picco.** Sappiamo che il valore  $x$  del segnale da quantizzare è sempre limitato, ossia:

$$V_{MIN} \leq x < V_{MAX}$$

Dove  $\{V_{MIN}; V_{MAX}\}$  è detta **Escursione del Segnale**. Considereremo, per semplicità, **segnali bipolari** ossia segnali in cui vale che  $V_{MIN} = -V_{MAX}$ . Possiamo esprimere questi 2 valori in termini di **Escursione Picco-Picco**  $V_{pp}$ :

$$V_{pp} = V_{MAX} - V_{MIN} \quad (129)$$

$$V_{MAX} = \frac{V_{pp}}{2} \quad (130)$$

$$V_{MIN} = -\frac{V_{pp}}{2} \quad (131)$$

$$(132)$$

Grazie a ciò, possiamo calcolarci la **potenza di picco** del segnale:

$$P_{s,\text{picco}} = \left( \frac{V_{pp}}{2} \right)^2 = \frac{V_{pp}^2}{4} \quad (133)$$

Sappiamo inoltre che per come abbiamo introdotto la quantizzazione, vale che:

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{V_{pp}}{2^n} \Rightarrow V_{pp} = 2^n \Delta$$

Allora possiamo scrivere il **Signal Noise Ratio di Picco**:

$$\begin{aligned} SNR_{Q,\text{Peak}} &= \frac{\frac{V_{pp}^2}{4}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \\ &= \frac{\frac{\Delta^2 2^{2n}}{4}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \\ &= 3 \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

**Potenza Media.** Oltre alla potenza di picco, possiamo esprimere la potenza del segnale in termini di **potenza media del segnale**:

$$P_{s,\text{Media}} = f_{Picco} \cdot P_{s,\text{picco}} \quad (134)$$

Dove  $f_{Picco}$  è detto **fattore di picco**. Inoltre  $0 \leq f_{Picco} \leq 1$ . Grazie a ciò possiamo esprimere il **Signal Noise Ratio Medio**:

$$\begin{aligned} SNR_{Q,\text{Medio}} &= f_{Picco} \cdot \frac{P_{s,\text{picco}}}{P_Q} = \\ &= f_{Picco} \cdot SNR_{Q,\text{Peak}} = \\ &= f_{Picco} \cdot 3 \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

Riconducendo dunque il rapporto di potenza segnale rumore in funzione dei **bit di campionamento** possiamo intuire che più saranno i bit di campionamento, più il disturbo sarà minore, per questo motivo  $n$  è anche detta **Risoluzione di Quantizzazione**. Inoltre, ogni bit in più di quantizzazione migliora il rapporto di un fattore 4.

#### 10.4.3 Decibel

In generale, quando in fisica si ha a che fare con rapporto di potenze, ha più senso il confronto su scala logaritmica, per cui possiamo definire i **decibel** sia in riferimento alle ampiezze, sia in riferimento alle potenze.

$$dB_A = 20 \lg_{10} \frac{A_1}{A_2} \quad (135)$$

$$dB_P = 10 \lg_{10} \frac{P_1}{P_2} \quad (136)$$

Le 2 formule sono state scelte in modo tale che il decibel per le ampiezze e per le potenze siano **invarianti** (parlare dell'una o dell'altra non fa differenza).

### SNR in Decibel

$$\begin{aligned} dB(SBR_{Q,P}) &= 10 \lg_{10} \frac{P_{s,p}}{P_Q} = \\ &= 10 \lg_{10} 3 \cdot 2^{2n} = \\ &= 4,77 + 6,02n \end{aligned}$$

$$dB(SBR_{Q,Media}) = dB(f_{picco}) + 4,77 + 6,02n$$

Importante osservare che  $dB(f_{picco}) < 0$  dal momento che  $0 \leq f_{picco} \leq 1$

### 10.5 Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

Per mostrare il teorema di nyquist, eravamo riusciti, già in precedenza (??), a calcolare la trasformata di Fourier di un segnale campionato. Il limite di quella trasformata è che lo spettro del segnale campionato  $S_C(f)$  continuava ad essere legato, in qualche modo, allo spettro del segnale di partenza  $S(f)$ . Per cui, è necessario un altro strumento che permetta di calcolare lo spettro di un segnale **tempo-discreto**  $s(nT_S) \approx x(n)$  dove  $n \in \mathbb{Z}$ , in funzione dei campioni. Partendo dal segnale campionato  $s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_S)\delta(t - nT_S)$  la **trasformata discreta** sarà:

$$\begin{aligned} S_C(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_c(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \delta(t - nT_S) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_S) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Possiamo dire che  $\delta(t - nT_S) e^{-j2\pi ft}$  è non nulla solo per  $t = nT_S$ . A questo punto, scriviamo la **formula di Analisi della DTFT**:

$$S_C(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_S) e^{-j2\pi f n T_S} \quad (137)$$



**Spettro Periodico** Un'importante proprietà di questo spettro è che è periodico di periodo  $f_s = \frac{1}{T_s}$ . Dimostriamolo:

$$\begin{aligned}
 S_C(f + kf_s) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi(f+kf_s)nT_s} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} \underbrace{e^{-j2\pi k f_s n T_s}}_{e^{-j2\pi} = 1} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} = \\
 &= S_C(f)
 \end{aligned}$$

## 10.6 DTFT Normalizzata

Una volta effettuato il campionamento, sarebbe comodo pure dimenticarci il periodo di campionamento ed esprimere lo spettro in forma normalizzata, ossia le cui frequenze anzichè andare da 0 a  $f_s$  vanno da 0 a 1. Per fare ciò dovremo effettuare un cambio di variabile:

$$x(t' = n) = s(t = nT_s)$$

Dove  $t' = \frac{t}{T_s}$ . Allora la **formula di analisi normalizzata** sarà:

$$x(t' = n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f') = S_C(f' = fT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi f' n}$$

Solitamente  $f' = \frac{f}{f_s}$ , che è un numero puro, viene rappresentato come  $0 \leq \phi \leq 1$ , per cui:

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi)$$

Analogamente allo sviluppo in serie, possiamo individuare la "*formula inversa*", la **formula di Sintesi**:

$$x(n) = \frac{1}{T_\phi} \int_0^1 X(\phi) e^{+j2\pi\phi n} d\phi \quad (138)$$

### 10.6.1 Proprietà della DTFT

**Traslazione nei Tempi.** Data una coppia  $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi)$  allora:

$$x(n - m) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi) e^{-j2\pi\phi m} \quad (139)$$

**Traslazione nelle Frequenze.** Data una coppia  $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi)$  allora:

$$x(n) e^{j2\pi\phi n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi - \phi_0) \quad (140)$$

**Convoluzione.** Date le coppie  $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi)$  e  $y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\phi)$  allora:

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\phi)Y(\phi) \quad (141)$$

Quindi, grazie alla DTFT, siamo riusciti a rappresentare un segnale campionato come una **combinazione lineare di seni**.

## 10.7 Risoluzione e Durata di Campionamento

Dato un segnale  $s(n)$  rappresentato da  $N$  campioni, campionato a frequenza  $f_s = \frac{1}{T_s}$ , nei **tempi** la **risoluzione di campionamento** è la frequenza di campionamento  $f_s$ . Definiamo nei **tempi** **durata**  $N \cdot T_s$ , ossia il numero di campioni per il periodo di campionamento.

Nelle **frequenze** la **risoluzione** è  $\Delta f = \frac{1}{NT_s}$ , mentre la **durata**, nelle **frequenze**, corrisponde all'inverso del periodo. Per questo motivo, se vogliamo aumentare la risoluzione delle frequenze, dobbiamo ascoltare il segnale per più tempo.

## 10.8 Discrete Fourier Transform (DFT)

Dunque, grazie al campionamento/quantizzazione e alla DTFT normalizzata, siamo riusciti a tradurre un segnale in una sequenza di valori, ognuno dei quali rappresenta l'ampiezza del segnale per il campione  $n$ -esimo. Tuttavia, per la totale elaborazione di un segnale digitale, ciò non basta:  $X(\phi)$  continua infatti ad essere una funzione **continua**, ma noi, per rappresentare in un calcolatore ciò avremmo bisogno di un segnale che sia **discreto e periodico** in modo da poterlo raccontare solo con un numero finito di campioni che costituisce un periodo (tanto tutti gli altri infiniti campioni si ripetono).

Abbiamo dimostrato già che la  $X(\phi)$  sia **periodica**, manca solo la **discretezza**. Finora abbiamo osservato che la trasformata di un segnale continuo e periodico, è un segnale discreto (vedi lo sviluppo in serie); mentre la trasformata di un segnale discreto genera un segnale continuo e periodico (vedi la DTFT). Per questo motivo, se noi trasformiamo un segnale discreto e periodico dovremo ottenere uno spettro ancora discreto e periodico:

Solitamente un segnale elaborato digitalmente ha una **durata finita** (dal momento che l'elaboratore ha memoria finita), per cui sarà campionato con un numero  $N$  di campioni. Consideriamo ora la versione **periodicizzata** di  $x(n)$  con periodo  $N$ , la funzione che alla fine si ripete fino all'infinito, ossia la funzione tale che:

$$x(n) = x(n + iN) \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (142)$$

Analizziamo lo spettro di questo segnale **discreto e periodico**:

- Dal momento che è **discreto**, tramite **DTFT** otteniamo uno spettro che è **periodico** (di periodo  $f_s$  o 1 nel caso sia normalizzato)

- Dal momento che è **periodico**, tramite **Sviluppo in serie** otteniamo uno spettro che è **discreto**, ossia una combinazione lineare di fasori di coefficiente  $c_k$  di frequenza  $\frac{k}{T}$  (ossia la k-esima armonica), ossia:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt$$

Dove  $c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt$ . Dal momento che abbiamo discretizzato il periodo  $T$  in  $N$  campioni, possiamo riscrivere  $c_k$  come:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

L'espressione  $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$  ricorda molto  $X(\phi_k = \frac{k}{N})$ , per cui:

$$c_k = \frac{1}{N} X(k)$$

Dove  $k$  definisce la k-esima frequenza di  $\phi$ , dal momento che  $k = 0, 1, \dots, N-1$

In definitiva, possiamo enunciare le formule di **Discrete Fourier Transform (DFT)**:

**Analisi:**

$$x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (143)$$

**sintesi:**

$$X(k) \xrightarrow{\text{DFT}^{-1}} x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (144)$$

Siamo dunque riusciti a trasformare anche la  $X(k)$  in una sequenza numerica.

### 10.8.1 Forma Matriciale della DFT

Una forma alternativa (e forse computazionalmente più adatta) della DFT è in forma **matriciale**: Dato  $X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$  possiamo vedere  $X(k)$  e  $x(n)$  come vettori, mentre  $e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$  come una matrice  $W$  e il tutto come un prodotto matriciale tra matrice e vettore:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ij} = e^{-j2\pi \frac{ij}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (145)$$

Ossia:

$$\overline{X} = W\overline{x}$$

Calcolare un prodotto del genere ha complessità computazionale  $O(N^2)$ . Tuttavia, è stato scoperto un modo più agevole e furbo per tale calcolo, tramite la FFT (Fast Fourier Transform) che ha complessità computazionale  $O(N \log N)$

### 10.8.2 Proprietà della DFT

**Traslazione ciclica nei Tempi.** Data la coppia  $x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$  allora:

$$x(\langle n - a \rangle_N) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k) e^{j2\pi \frac{a}{N} k} \quad (146)$$

**Traslazione ciclica nelle Frequenze.** Data la coppia  $x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$  allora:

$$x(n) e^{j2\pi \frac{h}{N} n} \xrightarrow{\text{DFT}} X(\langle k - h \rangle_N) \quad (147)$$

**Convoluzione Ciclica.** Date le coppie  $x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$  e  $y(n) \xrightarrow{\text{DFT}} Y(k)$  allora:

$$x(n) \otimes y(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k) Y(k) \quad (148)$$

## 10.9 Trasformata Zeta

Per diversi semplificare i conti spesso potrebbe tornare utile ricondursi ad una forma della DTFT più "agevole". Consideriamo un  $s(n), n \in \mathbb{Z}$ , e calcoliamo lo spettro tramite DTFT:

$$x(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\phi n}$$

Possiamo riscrivere  $e^{-j2\pi\phi n}$  come  $(e^{j2\pi\phi})^{-n}$  e sostituiamo con  $z = e^{j2\pi\phi}$ , ottenendo:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (149)$$

L'equazione che abbiamo appena scritto è l'**equazione di analisi della trasformata z.**

Scriviamolo più formalmente:

**Definizione.** Dato un  $s(n), n \in \mathbb{Z}$  si definisce **Trasformata Z** di  $x(n)$  la funzione:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (150)$$

Con  $n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$ .  $X(z)$  sembra molto simile ad una **serie di potenza** per cui ha senso studiarne la regione di convergenza, detta **ROC**.

**Regione di Convergenza.** Data una  $X(z)$ , la sua **regione di convergenza** è il luogo dei punti per cui  $X(z)$  esiste (cioè la serie converge). Per cui, la trasformata è caratterizzata da:

- La funzione  $H(z)$
- La sua **ROC**

**Antitrasformata Zeta.** Come sempre, possiamo determinare la formula di sintesi o antitrasformata per ottenere il segnale di partenza. La sua formula analitica è:

$$X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_L X(z) z^{n-1} dz \quad (151)$$

Dove  $n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}, L \in ROC$ .  $L$ , in particolare, è una qualunque traiettoria chiusa che:

- **Contiene l'origine**
- è **interamente contenuta** nella ROC
- è percorsa in senso **antiorario**

### 10.9.1 Proprietà

**Linearità.** Dati  $x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z), y(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)$  allora:

$$ax(n) + by(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} aX(z) + bY(z) \quad (152)$$

**Traslazione nei Tempi.** Dato  $x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$  allora:

$$x(n-a) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) z^{-a} \quad (153)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n-a)\} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-a) z^{-n} = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-a) z^{-(n-a)} z^{-a} = \\ &= z^{-a} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-a) z^{-(n-a)} = \\ &= z^{-a} X(z) \end{aligned}$$

**Convoluzione.** Dati  $x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(z), y(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(z)$  allora:

$$x(n) * y(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(z)Y(z) \quad (154)$$

### 10.9.2 Relazione tra DTFT e Z

Possiamo vedere la trasformata  $z$  come una **generalizzazione** della DTFT, per cui, dato un segnale  $x(n)$ :

$$X_{DTFT}(\phi) = X_z(z = e^{-j2\pi\phi}) \quad (155)$$

Dove  $0 \leq \phi < 1$  è la frequenza normalizzata.

### 10.9.3 Famiglie di Trasformate

Dal momento che calcolare trasformata/antitrasformata spesso non è proprio semplice, sono utili alcune coppie di trasformate notevoli:

**Esponenziali.** Data la coppia  $x(n) = a^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-az^{-1}}$  allora possiamo risolvere una qualsiasi trasformata nella forma:

$$x(n) = \sum_i c_i a_i u(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(z) = \sum_i \frac{c_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad (156)$$

**Segnale Digitale.** Dato un segnale definito da  $N$  campioni  $x(n) = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ , possiamo riscrivere  $x(n)$  come **combinazione di impulsi traslati con peso**  $a_i$ :

$$\sum_{i=0}^N a_i \delta(n-i) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F} \left\{ \sum_{i=0}^N a_i \delta(n-i) \right\} = \sum_{i=0}^N a_i \underbrace{\mathcal{F}(\delta(n-i))}_{z^{-i}}$$

Dunque

$$\sum_{i=0}^N a_i \delta(n-i) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \quad (157)$$

## 10.10 Antitrasformata di forme razionali

Molto spesso l'antitrasformata calcolata con la formula analitica precedente è difficile se non impossibile. Per fortuna che nei casi del corso, dobbiamo calcolare l'antitrasformata di funzioni di trasferimenti che sono sempre in forma **razionale**. Dato  $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$   $N, D$  sono polinomi di grado rispettivamente  $M, N$ , per cui possiamo rappresentarlo nella seguente maniera:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{1 + a_1 z + \dots + a_N z^N}$$

Normalizziamo ora rispetto a  $z^N$  sia il numeratore che il denominatore per ottenere:

$$X(z) = \frac{b'_0 z^{M-N} + b'_1 z^{M-N-1} + \dots + b'_M z^{-N}}{1 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_N z^{-N}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

I casi possibili sono:

- $M < N$ : in questo caso la frazione è **propria** e per il **teorema fondamentale dell'algebra** possiamo fattorizzare il denominatore in frazioni parziali:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{B(z^{-1})}{1 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_N z^{-N}} = \\ &= \frac{B(z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})} = \\ &= \frac{B(z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \end{aligned}$$

Si può dimostrare che possiamo scomporre in somme la frazione appena ottenuta:

$$\frac{B(z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}}$$

Allora:

$$\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \left( \sum_{i=1}^N A_i p_i \right) u(n) \quad (158)$$

- $M \geq N$ : allora la frazione è **impropria**. Chiamiamo ora  $r = M - N$  il **grado relativo**, possiamo allora scomporre così:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_r z^{-r} + \frac{B_{N-1}(z)}{A_N(z)} \quad (159)$$

Allora l'antitrasformata sarà:

$$\begin{aligned} X(z) &= c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_r z^{-r} + \frac{B_{N-1}(z)}{A_N(z)} \\ &\quad \downarrow \mathcal{Z} \\ x(n) &= c_0 \delta(n) + \dots + c_r \delta(n-r) + u(n) \sum_{i=1}^N A_i p_i^N \end{aligned}$$

## 10.11 Sistemi LTI Discreti nel Dominio Z

Abbiamo già studiato, in precedenza, la proprietà fondamentale dei sistemi LTI (82). Nel dominio Z, l'equazione diventa:

$$x(n) * h(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)H(z) \quad (160)$$

Dove  $H(z)$  è detta **Funzione di Trasferimento** ossia:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} \quad (161)$$

### 10.11.1 Poli e Zeri

Importanti proprietà che si devono studiare della funzione di trasferimento sono i punti in cui si annulla e in cui diverge:

- Si definiscono **zeri** di  $H(z)$  i valori di  $z_i$  per cui  $H(z_i) = 0$
- Si definiscono **poli** di  $H(z)$  i valori di  $p_i$  per cui  $\lim_{z \rightarrow p_i} H(z) = \pm\infty$

Questi 2 insiemi di punti corrispondono rispettivamente agli zeri del numeratore e del denominatore rispettivamente. Dal momento che sia numeratore che denominatore possono essere scritti come prodotto delle loro radici, allora conoscendo i poli e gli zeri di  $H(z)$  conosciamo già tutta la funzione, ossia:

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} \quad (162)$$

Inoltre, una funzione di trasferimento è facilmente rappresentabile tramite il **diagramma poli-zeri**

### 10.11.2 Proprietà

**Causalità.** Un sistema  $S[\cdot]$  è causale nel dominio  $Z$  se  $h(n) = 0$  per  $n > 0$ , per cui:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}\{h(n)\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \end{aligned}$$

Per far convergere la serie, è necessario che  $z > |R|$ , dove  $R$  è un raggio della circonferenza centrata nell'origine. Per cui, tutte le trasformate  $Z$  di sistemi discreti e causali (cioè tutti i sistemi reali) avranno ROC esterna ad una circonferenza. In particolare, conoscendo la forma razionale della funzione di trasferimento, e dunque i suoi poli  $p_1, \dots, p_N$ , allora  $R$  sarà il massimo tra i moduli di tutti i poli:

$$ROC : |z| > \max_{i=0, \dots, N} \{|p_i|\} \quad (163)$$



**Stabilità BIBO.** Avevamo già visto che, dato un sistema  $S[\cdot]$  stabile BIBO, allora la somma infinita della risposta all'impulso doveva convergere assolutamente ((6.2.2)). Consideriamo ora la funzione di trasferimento del sistema:

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}|$$

Visto che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$  converge se il sistema è stabile, allora per far convergere l'intera trasformata è necessario che  $z \geq 1$ . Unendo le 2 proprietà (che non sono poi così impossibili), ne deduciamo che  $\forall i = 0, \dots, N \quad |p_i| < 1$ , ossia tutti i poli sono contenuti nel cerchio unitario.

**Risposta in Frequenza.** Avevamo già visto che per un sistema discreto, la risposta in frequenza è la DTFT della risposta all'impulso, ossia:

$$\text{DTFT}\{h(n)\} = H_{\text{DTFT}}(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j2\pi\phi n} \quad (164)$$

Dal momento che avevamo definito la funzione di trasferimento  $H(z)$  come:

$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

Allora, la risposta in frequenza nel dominio  $z$  corrisponde alla funzione di trasferimento di  $e^{j2\pi\phi}$ :

$$H_{\text{DTFT}} = H_z(e^{j2\pi\phi}) \quad (165)$$

### 10.11.3 Analisi Di Sistemi Discreti

Consideriamo il sistema discreto  $S[\cdot]$  t.c.  $y(n) = S[x(n)] = x(n) * h(n)$  dove

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i)$$

Dal momento che considereremo sistemi solo causali, la sommatoria diventa:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i)$$

Per il calcolo della convoluzione noi possiamo considerare 2 grandi casi:

- Risposta All'Impulso Finita (FIR)
- Risposta All'Impulso Infinita (IIR)

**Risposta All'Impulso Finita** In questo caso, il sistema non solo è causale ma la risposta all'impulso ha una durata **finita**, che noi possiamo scrivere come:

$$h(n) = \{h(0), h(1), \dots, h(D)\}$$

Dove  $D$  è la durata. Grazie a ciò la convoluzione possiamo calcolarla come:

$$\sum_{i=0}^D h(i)x(n-i) \quad (166)$$

Che noi possiamo calcolare campione per campione. Possiamo dunque vedere l'uscita come **combinazione lineare** tra ingresso attuale  $(h(0)x(n))$  e gli ingressi passati  $h(1)x(n-1), \dots, h(D)x(n-D)$ . Questa è la formulazione in forma di **equazione alle differenze** di un filtro FIR. Nel Dominio Z, dal momento che la risposta all'impulso è discreta, possiamo calcolarne la trasformata come combinazione lineare di trasformate di impulsi traslati, ossia:

$$h(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(z) = \sum_{i=0}^D h(i)z^{-i} \quad (167)$$

Conoscendo sia  $X(z)$  che  $H(z)$  posso conoscere facilmente  $Y(z)$  e dunque  $y(n)$  antritrasformando. Ciò permette di fare elaborazioni sia nel dominio delle frequenze che nel dominio dei tempi.

**Risposta All'Impulso Infinita** In questo caso, la risposta all'impulso ha durata infinita, per cui non è possibile *troncare* la serie e avere somme finite di termini. Dobbiamo trovare degli escamotage per riscrivere la serie sottoforma di equazione recursiva.

Consideriamo l'integratore discreto che ha risposta all'impulso  $h(n) = u(n)$  per cui il segnale in uscita del sistema è:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(n-i)$$

Possiamo riscriverlo come:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + \sum_{i=0}^{+\infty} x(n-i-1) = \\ &= x(n) + y(n-1) \end{aligned}$$

Conoscendo  $y(0)$  cioè all'istante iniziale, la computazione del segnale in uscita da questo sistema diventa davvero banale, ossia:

$$y(n) = \begin{cases} y(0) & \text{se } n = 0 \\ x(n) + y(n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad (168)$$

Consideriamo ora la risposta all'impulso  $h(n) = a^n u(n)$ , nel dominio Z la sua trasformata sarà  $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ . Nel dominio Z quindi, la trasformata è rappresentabile da una formula in forma chiusa, ossia, dal momento che  $Y(z) = X(z)H(z)$ , allora:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{Y(z)}{H(z)} = \\ &= Y(z) - \underbrace{az^{-1}Y(z)}_{\text{ritardo di 1}} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (169)$$

Allora, in generale, se abbiamo una  $H(z)$  in forma razionale:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$N(z)$  è la parte **FIR** che lega gli  $y(n)$  agli **input passati**.  $D(z)$  invece è la parte **IIR**, che lega l'uscita attuale alle uscite passate. Per questo motivo, se  $H(z)$  è in forma razionale possiamo ricavare molto facilmente le equazioni recursive che descrivono l'output di un sistema.

Più in generale:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

Inoltre, visto che  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  eguagliando entrambi i membri otteniamo:

$$\begin{aligned} Y(z) \left[ 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right] &= X(z) \left[ \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right] = \\ Y(z) &= Y(z) \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} + X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = \\ Y(z) &= \sum_{i=0}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \end{aligned}$$

Questa equazione appena ottenuta che descrive l'output di un sistema discreto viene detta **equazione alle differenze in forma recursiva di un IIR**.

## 10.12 Stabilità dei Filtri FIR

Consideriamo un filtro generico con risposta all'impulso finita, ossia  $h(n) = \{h(0), h(1), \dots, h(n)\}$ . Sappiamo che per la proprietà di convoluzione della

trasformata  $Z Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i}X(z)$ , allora possiamo riscrivere  $H(z)$  come:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} \cancel{X(z)}}{\cancel{X(z)}} = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i}$$

Dunque  $H(z)$  è un polinomio di grado  $M$  e in  $\mathbb{C}$  ha esattamente  $M$  radici. Riscriviamo allora  $H(z)$  in forma fattorizzata:

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0)(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_n z^{-1}) = \\ &= h(0) \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1}) \end{aligned}$$

Avevamo già detto che un filtro digitale è stabile se e solo se tutti i poli sono contenuti nella circonferenza unitaria. Dal momento che la funzione di trasferimento di un filtro FIR non ha poli, allora i FIR sono **intrinsecamente stabili** a prescindere da quale sia la funzione di trasferimento.

### 10.13 Stabilità dei Filtri IIR

Consideriamo ora un filtro con risposta all'impulso infinita nella sua forma ricorsiva:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) = \\ y(n) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) &= \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \end{aligned}$$

Nel **dominio Z** tutto ciò diventa:

$$\begin{aligned} Y(z) \left[ 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right] &= X(z) \left[ \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right] \\ \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \\ H(z) &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \end{aligned}$$

Da questa forma della funzione di trasferimento, possiamo notare che ha  $N$  poli e  $M$  zeri; riscriviamo il tutto come:

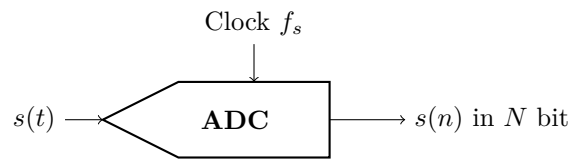
$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (170)$$

In questo caso, un filtro IIR è stabile se e solo se  $\forall i |p_i| < 1$

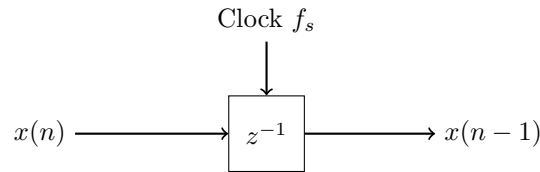
## 10.14 Sintesi di Filtri Digitali

In questo campo esistono molte tecniche diverse di sintesi di filtri; una delle più famose e importanti consiste nel *tradurre* l'equazione alle differenze del sistema nel filtro HW vero e proprio. Per la realizzazione di un filtro digitale sono necessari alcuni componenti base:

**Convertitore Analogico-Digitale** Come abbiamo visto, per poter trattare un segnale digitale dobbiamo prima **campionarlo** e **quantizzarlo**. Questa funzione viene svolta da un elemento ADC che possiamo rappresentare così:



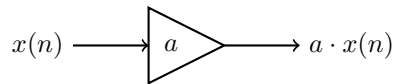
**Ritardatore** Il ritardatore è un elemento che ritarda di 1 clock un campione. Viene realizzato come un vero e proprio registro, ossia una batteria di flip-flop che al clock fanno passare in uscita i bit in entrata. Noi lo rappresentiamo come:



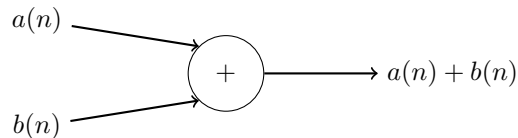
Un ritardatore viene anche chiamato  $z^{-1}$  poichè nel dominio Z:

$$x(n-1) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)z^{-1} \quad (171)$$

**Moltiplicazione** Un moltiplicatore a  $n$  bit moltiplica gli  $n$  bit del segnale in ingresso con una costante e in uscita ha  $n$  bit. Viene rappresentato così:



**Sommatore** Un sommatore somma i segnali in ingresso bit a bit, come un sommatore presente nelle ALU della CPU:



**Esempi di filtri digitali** Alcuni esempi di filtri digitali studiati sono i filtri a pettine (una sorta di filtro passa-basso reale) e i filtri notch (un filtro arresta-banda reale).

### 10.15 Filtri a Pettine

I filtri a pettine sono una famiglia di filtri che hanno la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \quad (172)$$

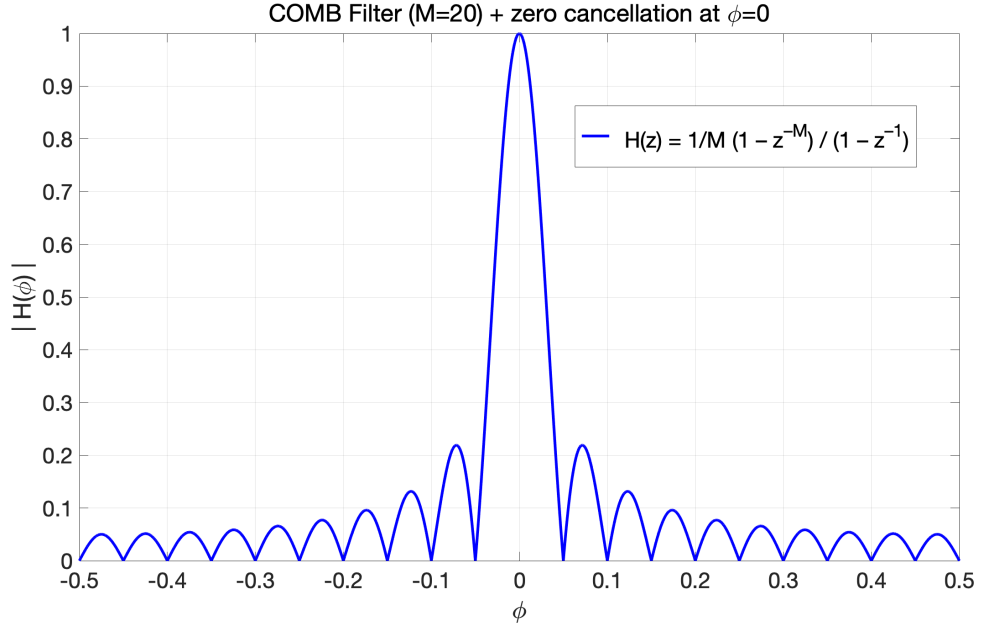
Dove  $M$  è l'**ordine del filtro**. Scriviamo l'equazione recursiva:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{M} \left( \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right) \\ Y(z) &= \frac{1}{M} X(z) \left( \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right) = \\ Y(z) &= \frac{1}{M} (X(z) - X(z)z^{-M} + Y(z)z^{-1}) \end{aligned}$$

Anritrasformando otteniamo:

$$y(n) = \frac{1}{M} (y(n-1) + x(n) - x(n-M)) \quad (173)$$

Dove  $\frac{1}{M}$  serve per normalizzare. Possiamo apprendere dalla funzione di trasferimento ha  $M$  zeri e 1 polo. Applicando un polo laddove c'è uno zero, possiamo annullare l'effetto dello zero e non annullare la frequenza in 0. L'utilità di questo filtro è che è un modesto filtro passa-basso, perchè ha la seguente risposta in frequenza:



Il lobo centrale fa passare tutto, mentre i lobi laterali attenuano sempre di più. Chiaramente le prestazioni di questi filtri non sono così alte. Nota Bene: in teoria il filtro appena creato è instabile, poichè un polo giace sulla circonferenza unitaria; nella stragrande maggioranza degli input il filtro risponde bene, sebbene il problema si possa verificare con alcuni segnali (come il gradino unitario).

## 10.16 Filtri Notch

I filtri Notch sono filtri digitali arresta-banda, cioè che annullano particolari frequenze. Per farlo dobbiamo imporre uno zero sulla frequenza da eliminare. Dal momento che per i segnali reali vale la simmetria hermitiana dobbiamo annullare anche il coniugato della frequenza da eliminare. Imponendo solo gli zeri, tuttavia, *abbassiamo* anche le frequenze vicine. Per cui dobbiamo imporre un polo molto vicino allo zero, con la stessa fase ma dentro il cerchio unitario, in modo da renderlo stabile. Da tutto ciò otteniamo la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{(1 - z_N z^{-1})(1 - \bar{z}_N z^{-1})}{(1 - p_N z^{-1})(1 - \bar{p}_N z^{-1})} \quad (174)$$

Dove  $p_N = \alpha z_n$  con  $0 \leq \alpha < 1$ . Cerchiamo ora di estrapolarci l'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1 - z_N z^{-1})(1 - \bar{z}_N z^{-1})}{(1 - \alpha z_n z^{-1})(1 - \alpha \bar{z}_n z^{-1})} = \\ &= \frac{1 - (z_N + \bar{z}_N)z^{-1} + z_N \bar{z}_N z^{-2}}{1 - \alpha(z_N + \bar{z}_N)z^{-1} + \alpha^2 z_N \bar{z}_N z^{-2}} = \end{aligned}$$

Sappiamo, dalle proprietà dei numeri complessi che  $z_N + \bar{z}_N = \mathbb{R}e[z]$  e che  $z_N \bar{z}_N = \|z\| = 1$  allora:

$$H(z) = \frac{1 - 2\mathbb{R}e[z_N]z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\alpha\mathbb{R}e[z_N]z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$$

Sappiamo inoltre che  $\mathbb{R}e[z_N] = \cos(2\pi\phi_N)$ , allora:

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos(2\pi\phi_N)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\alpha\cos(2\pi\phi_N)z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$$

Possiamo ricavarci dunque l'equazione alle differenze:

$$y(n) = \alpha(2\cos(2\pi\phi_N))y(n-1) - \alpha^2 y(n-2) + x(n) - 4\cos(2\pi\phi_N)x(n-1) + x(n-2) \quad (175)$$

La risposta in frequenza di questo filtro è la seguente, e possiamo notare come sia molto performante:

