Appunti di Elaborazione dei Segnali

By *@Thisisfava*

2024/2025

Contents

1

1 Numeri Complessi 3
1.1 Rappresentazioni . . . 3
1.1.1 Coordinate Rettangolari . . . 3
1.1.2 Coordinate Polari . . . 3
1.2 Conversioni . . . 3
1.2.1 Polare a Rettangolare . . . 3
1.2.2 Rettangolare a Polare . . . 3
1.3 Complesso Coniugato . . . 4
1.3.1 Definizione . . . 4
1.3.2 Proprietà . . . 4
1.4 Operazioni nel campo dei complessi . . . 5
1.4.1 Somme tra numeri complessi . . . 5
1.4.2 Scalatura . . . 5
1.4.3 Prodotto tra complessi . . . 5
1.4.4 Inverso di un complesso . . . 5
1.4.5 Divisione tra numeri complessi . . . 6
1.4.6 Elevamento a potenza . . . 6
1.4.7 Estrazione di una radice n-esima . . . 6
1.4.8 Funzione complessa di variabile reale . . . 6

2 Segnali 8
2.1 Classificazione dei segnali . . . 8
2.1.1 Rispetto alla dimensionalità . . . 8
2.1.2 Rispetto alla Continuità . . . 8
2.2 Tipi di segnali . . . 9

3 Segnali Continui 10
3.1 Operazioni Sui Segnali Continui . . . 10
3.1.1 Traslazione . . . 10
3.1.2 Scalatura della variabile dipendente . . . 10
3.2 Segnali Notevoli . . . 11
3.2.1 Funzione Rettangolo . . . 11
3.2.2 Gradino Unitario . . . 11
3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale) . . . 12
3.2.4 Proprietà della Delta . . . 13
3.2.5 Segnali Periodici . . . 13
3.2.6 Fasore . . . 14
3.3 Proprietà dei Segnali . . . 15
3.3.1 Durata . . . 15
3.3.2 Area . . . 15
3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale) . . . 15
3.3.4 Energia . . . 15

3.3.5 Potenza Istantanea 15
3.3.6 Potenza Media 15
3.3.7 Segnale Energia e Potenza 16

4 Segnali Discreti **17**
4.1 Operazione sui Segnali Discreti 17
4.1.1 Traslazione 17
4.1.2 Decimazione/UpSampling 17
4.1.3 Interpolazione/DownSampling 17
4.2 Segnali Notevoli 18
4.2.1 Rettangolo Discreto 18
4.2.2 Gradino Unitario 18
4.2.3 Impulso Discreto 18
4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto 18
4.2.5 Segnali Periodici Discreti 19
4.2.6 Fasore Discreto 19
4.3 Proprietà dei Segnali Discreti 20
4.3.1 Durata 20
4.3.2 Area 20
4.3.3 Valor Medio 20
4.3.4 Potenza Istantanea 20
4.3.5 Energia 20
4.3.6 Potenza Media 20
4.3.7 Segnali Potenza ed Energia 20

5 Sistemi **21**
5.1 Sistemi Continui 21
5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui 22
5.2.1 Non Dispersività 22
5.2.2 Causalità 22
5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output) 22
5.2.4 Omogeneità 22
5.2.5 Additività 23
5.2.6 Linearità 23
5.2.7 Tempo-Invarianza 23

6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) **23**
6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione 24

1 Numeri Complessi

Definizione. Il campo complesso $\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di un polinomio di grado n a coefficienti reali. Un numero $z \in \mathbb{C}$ è definito dall'*unità immaginaria*:

$$i = j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

1.1 Rappresentazioni

Un complesso z, che può essere scritto in diverse forme, viene rappresentato sul *Piano di Gauss*, un piano definito dall'asse orizzontale $\mathbb{R}e$ e dall'asse verticale $\mathbb{I}m$

1.1.1 Coordinate Rettangolari

Un complesso può essere rappresentato come un punto (x, y) sul piano di Gauss, con x e $y \in \mathbb{R}$. La forma che lo rappresenta è la forma *algebrica*:

$$z = x + jy \tag{2}$$

Con x la parte reale (ossia $\mathbb{R}e(z) = x$) e y la parte immaginaria (ossia $\mathbb{I}m(z) = y$)

1.1.2 Coordinate Polari

Un complesso z può essere anche rappresentato in *forma polare* sul piano in funzione della lunghezza ρ del vettore che parte dall'origine (ossia il *modulo*) e dell'angolo spazzato θ (ossia la *fase*).

$$z = \langle \rho, \theta \rangle = \rho \left(\cos(\theta) + j \sin(\theta) \right) \tag{3}$$

In realtà, un'altra forma che permette di esprimere un complessi in coordinate polari è la forma *esponenziale*

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho \left(\cos(\theta) + j \sin(\theta) \right) \tag{4}$$

1.2 Conversioni

1.2.1 Polare a Rettangolare

Dato $z = \langle \rho, \theta \rangle$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

1.2.2 Rettangolare a Polare

Dato $z = x + jy$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{6}$$

Dove

$$\text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

1.3 Complesso Coniugato

1.3.1 Definizione

Dato un $z \in \mathbb{C}$ t.c $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$ allora il suo coniugato sarà

$$\overline{z} = x - jy \tag{8}$$

$$\overline{z} = \rho e^{-j\theta} \tag{9}$$

In parole povere, il coniugato di un complesso è il complesso che ha stessa parte reale ma opposta parte immaginaria

1.3.2 Proprietà

- $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}e(z)$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$

1.4 Operazioni nel campo dei complessi

1.4.1 Somme tra numeri complessi

Forma algebrica. Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ la somma sarà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{10}$$

Forma Esponenziale. La somma è banale

1.4.2 Scalatura

Forma algebrica. Dati $z = x + jy$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = ax + jay \tag{11}$$

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = a\rho e^{j\theta} \tag{12}$$

1.4.3 Prodotto tra complessi

Forma algebrica. Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{13}$$

Forma Esponenziale. Dati $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \tag{14}$$

1.4.4 Inverso di un complesso

Forma algebrica. Dato $z = x + jy$ l'inverso sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\rho^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \tag{15}$$

Spiegazione della formula: un certo $w = z^{-1}$ con $z \in \mathbb{C}$ se il loro prodotto genera un numero con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla. Sappiamo che $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z| = \rho^2$. Quindi basta dividere il coniugato di z con il modulo quadro(ρ^2) e si ha l'inverso.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ il prodotto sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} \tag{16}$$

1.4.5 Divisione tra numeri complessi

Dati $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$ possiamo riscrivere la divisione tra i 2 numeri come prodotto tra il primo e l'inverso del secondo, e ciò vale per entrambe le forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \tag{17}$$

1.4.6 Elevamento a potenza

Forma algebrica. L'elevamento ha potenza della forma algebrica non è particolarmente interessante.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{Z}$ l'elevamento a potenza sarà $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n volte}}$ ossia:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} \tag{18}$$

1.4.7 Estrazione di una radice n-esima

Dato un $z \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathbb{C}$, y è radice n-esima di z se e solo se $y^n = z$. La grande differenza con in numeri reali è che, nel campo complesso, esistono esattamente n y distinte di radici che soddisfano l'equazione $y^n - z = 0$ per il teorema fondamentale dell'algebra.

Forma algebrica. La radice n-esima della forma algebrica non è particolarmente interessante.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$ la radice n-esima sarà:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta + 2\pi i}{n}\right)} \qquad \text{Con i = 0,1,\ldots, n-1}$$

1.4.8 Funzione complessa di variabile reale

Definita come

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Oppure come $z = f(x)$ con $z \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$, è una funzione che mappa ad ogni reale un immaginario.

Rappresentazione. Graficamente una funzione complessa di variabile reale può essere rappresentata in un grafico a 3 dimensioni con un asse per la x (variabile indipendente) e gli altri 2 assi sono $\mathbb{I}m[z]$ e $\mathbb{R}e[z]$. Dal momento che sono difficili da rappresentare, si ricorre ad una semplificazione: il grafico tridimensionale si sdoppia in un grafico che mappa ad ogni x la parte Reale di z ed un altro grafico che mappa ad ogni x la parte Immaginaria di z. Se si lavora in coordinate polari, è possibile invece rappresentare il grafico che mappa ad ogni x il modulo del complesso corrispondente e un altro grafico che mappa ad ogni x la fase del complesso corrispondente. La particolarità di questi ultimi 2 grafici è che il primo grafico è sempre rappresentato sopra l'asse x (il modulo non può mai essere negativo) e il secondo grafico è sempre rappresentato tra $-\pi$ e π dal momento che poi la fase si ripete.

2 Segnali

In termini totalmente astratti, un segnale è un veicolo di informazione. L'informazione, a sua volta, possiamo definirla come tutto ciò che aggiunge conoscenza. Calato nel contesto del corso, un segnale può essere visto come una funzione

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f : A \longrightarrow B \end{cases}$$

Dove $x \in A$ è la variabile indipendente, $y \in B$ la variabile dipendente con A e B insiemi qualsiasi.

2.1 Classificazione dei segnali

2.1.1 Rispetto alla dimensionalità

Un segnale può essere classificato rispetto alla dimensionalità del dominio o del codominio.

Dominio. Un segnale rispetto alla dimensionalità del dominio può essere:

- **Monodimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}$
- **n-Dimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

Codominio. Un segnale rispetto alla dimensionalità del codominio può essere:

- **Scalare** se $B \subseteq \mathbb{R}$
- **Vettoriale** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

2.1.2 Rispetto alla Continuità

Un segnale può essere classificato rispetto alla continuità di dominio o codominio.

Dominio. Un segnale rispetto alla continuità del dominio può essere:

- **Continuo** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se A coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Discreto** se A coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

Codominio. Un segnale rispetto alla continuità del codominio può essere:

- **Ad Ampiezze Continue** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se B coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Ad Ampiezze Discrete** se B coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

Nel caso in cui la variabile dipendente sia il tempo, i segnali vengono detti **tempo-contuinui** o **tempo-discreti**.

Esempi. Il *suono* può essere visto come la pressione dell'aria in funzione del tempo, ossia come:

$$p = f(t)$$

Dove $p \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Dunque il suono è un segnale **monodimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine in bianco e nero* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano la *Luminanza*:

$$L = f(x, y)$$

Dove $L \in \mathbb{R}$ e $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a scala di grigi è un segnale **bidimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine a colori* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano una tripletta di valori (interpretabili in base allo spazio colore scelto). Consideriamo lo spazio RGB:

$$\langle R, G, B\rangle = f(x, y)$$

Dove $\langle R, G, B\rangle \in \mathbb{R}^3$ e $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a colori è un segnale **bidimensionale** e **vettoriale**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

2.2 Tipi di segnali

In base alle caratteristiche di un segnale, possiamo definire alcuni tipi di segnali:

Segnale	Dominio Continuo	Dominio Discreto
Codominio Continuo	Analogico	Campionato
Codominio Discreto	Quantizzato	Digitale

3 Segnali Continui

3.1 Operazioni Sui Segnali Continui

3.1.1 Traslazione

Dato un segnale $y = f(x)$ possiamo definire il segnale traslato y' come

- $y' = f(x - x_0)$ ossia una *traslazione in avanti* di x_0
- $y' = f(x + x_0)$ ossia una *traslazione all'indietro* di x_0

Quando la variabile indipendente x è il tempo, possiamo dire che il segnale è, rispettivamente, in *in ritardo* o *in anticipo*

3.1.2 Scalatura della variabile dipendente

Dato $y = f(x)$ e $x \in \mathbb{R}$ allora possiamo definire y' il segnale scalato come

$$y' = f(ax)$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ è detto *fattore di scala*. In base ai valori assunti da a, il segnale può:

- **Espandersi** se $|a| < 1$
- **Comprimersi** se $|a| > 1$
- **Specchiarsi** rispetto all'asse y se $a < 0$

3.2 Segnali Notevoli

Riporto di seguito alcune funzioni(segnali) che useremo spesso nel corso:

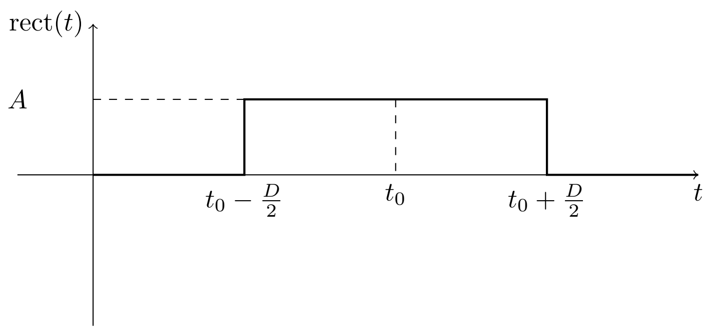
3.2.1 Funzione Rettangolo

Detta anche *Impulso Rettangolare*, è una funzione che ha un picco tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ e poi è sempre nulla. Possiamo definirla così:

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{19}$$

Formula Generalizzata. Data A l'ampiezza del segnale, t_0 il centro del rettangolo e D la durata dell'impulso, possiamo generalizzare la definizione precedente

$$y = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{D}\right) \tag{20}$$



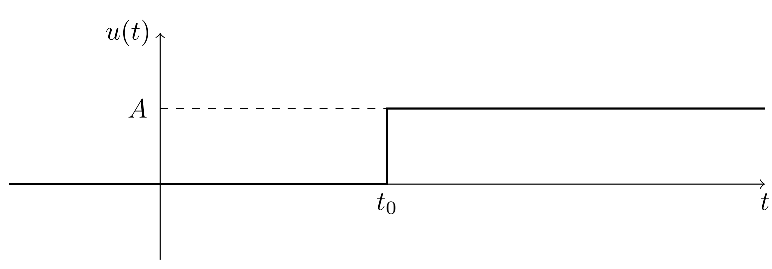
3.2.2 Gradino Unitario

Tale segnale è definibile come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \tag{21}$$

Formula Generalizzata. Data A l'ampiezza del segnale e t_0 il tempo di ritardo

$$y = A \cdot u(t - t_0) \tag{22}$$



3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale)

Questo segnale si ottiene, a partire dall'impulso rettangolare, restringendo sempre di più T e aumentando sempre di più l'ampiezza di un termine $\frac{1}{T}$ (questo per mantenere l'area sottesa, o energia, invariata). Possiamo determinare la formula analitica di questa operazione:

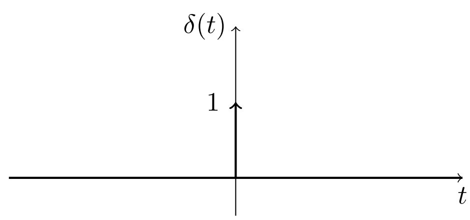
$$y(t) = \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Facendo tendere a 0 il termine T si ottiene proprio la *delta di Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{23}$$

Per com'è definita, la delta di Dirac non è una vera è propria funzione, è una funzione speciale, una distribuzione, che vale sempre 0 tranne quando $t = 0$; in quel caso la funzione va ad infinito, perchè sarebbe l'impulso (ideale) applicato in un istante infinitesimo. Dal momento che in questa funzione l'ampiezza è infinita, ha senso considerare, invece, l'area sottesa, ossia l'energia dell'impulso.

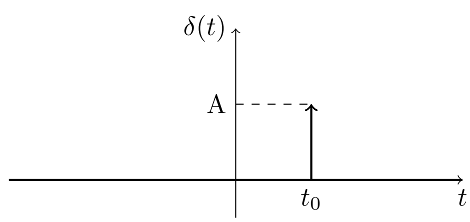
Rappresentazione Tradizionale. Tradizionalmente la funzione delta viene rappresentata in 0 con una freccia verso l'alto con la punta a 1. In ogni altro punto, è 0.



Formula Generalizzata. Data A l'area (e non l'ampiezza, che sarebbe infinita) e t_0 il ritardo, la formula sarà:

$$y(t) = A \cdot \delta\left(t - t_0\right)$$

E il grafico sarà:



3.2.4 Proprietà della Delta

- **Area Unitaria**: l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della delta è esattamente 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{24}$$

- **Proprietà del Campionamento**: per enunciare la proprietà è necessario introdurre il concetto di *prodotto scalare tra funzioni*:
  Si dice prodotto scalare tra le funzioni f e g come

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \tag{25}$$

  Detto ciò, la proprietà della campionatura afferma che, per ogni funzione $f(t)$:

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \tag{26}$$

  Da ciò possiamo capire il significato del termine "campionatura": quando noi effettuiamo il prodotto scalare con il delta, è come se scattassimo una istantanea alla funzione f in 0. Questa proprietà ci servira per discretizzare una funzione. Possiamo dunque generalizzare questa proprietà per un qualunque istante t_0:

$$\langle f(t), \delta(t - t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \tag{27}$$

- **Proprietà del Prodotto**: il prodotto tra una qualsiasi funzione $f(t)$ e il delta di dirac è sempre 0 laddove $t \neq t_0$:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{28}$$

- **Parità**:

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{29}$$

- **Integrazione**: la funzione integrale della delta di dirac è in realtà il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = u(t) \tag{30}$$

3.2.5 Segnali Periodici

Un segnale $s(t)$ si dice *periodico* se e solo se il suo valore si ripete ad ogni periodo, ossia:

$$s(t) = s(t + kT) \tag{31}$$

Dove $k \in \mathbb{Z}$ è il numero di volte e $T \in \mathbb{R}$ è il periodo.
Una cosa da tenere a mente è che, in segnali, solitamente, si normalizza in modo tale da mettere in evidenza direttamente nella formula la frequenza (che può essere molto utile).
Es:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Da questa formula sappiamo subito che il periodo di questo segnale è:

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} f_0} = \frac{1}{f_0}$$

E dunque la sua frequenza è proprio f_0

3.2.6 Fasore

Questa funzione è una funzione complessa di variabile reale, con la seguente formula analitica:

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \tag{32}$$

3.3 Proprietà dei Segnali

3.3.1 Durata

La durata di un segnale è, considerando un segnale nel tempo, la differenza tra il primo istante in cui il segnale non è nullo e l'ultimo istante.

3.3.2 Area

Si dice *Area di un Segnale* $s(t)$ l'area sottesa dallo stesso segnale, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \tag{33}$$

3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale)

Il valor medio di un segnale $s(t)$ non è altro che quel valore $\tilde{s}$ tale che una funzione costante $s'(t) = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$, ossia:

$$\tilde{s} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)dt \tag{34}$$

3.3.4 Energia

Sebbene non stiamo parlando propriamente di lavoro e concetti fisici relativi, dobbiamo dire che un segnale è sempre associato ad una certa energia che il segnale stesso trasporta. Dunque *l'energia di un segnale* ($s(t)$) è:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \tag{35}$$

3.3.5 Potenza Istantanea

Per il discorso precedente, possiamo anche definire la Potenza Istantanea di un segnale (cioè la potenza in un istante del Segnale) come

$$P[s(t)] = \begin{cases} s(t_0)\overline{s(t_0)} & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{C} \\ s(t_0)^2 & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{36}$$

3.3.6 Potenza Media

La potenza media possiamo, invece, vederla come il valore medio dell'energia, ossia:

$$P_s = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \tag{37}$$

3.3.7 Segnale Energia e Potenza

Innanzitutto possiamo notare come sia Potenza Media che Energia siano non negativi per costruzione; inoltre tra Potenza Media e Energia di un segnale è possibile vedere una correlazione: laddove l'energia del segnale è finita, allora la potenza è necessariamente nulla; laddove invece la potenza media è maggiore di 0, l'energia è infinita.

In base a questo concetto è possibile definire:

- **Segnale Energia** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < E_s < \infty$ e allora $P_s = 0$
- **Segnale Potenza** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < P_s < \infty$ e allora $E_s \to +\infty$

4 Segnali Discreti

A differenza dei segnali continui, i segnali discreti sono funzioni con Dominio discreto, solitamente rappresentate nella seguente maniera:

$$y = f(n),\ n \in Z$$

Enunciamo ora tutte le proprietà, in maniera speculare, che abbiamo già descritto per i segnali continui:

4.1 Operazione sui Segnali Discreti

4.1.1 Traslazione

Dato un segnale $y = f(n)$ definiamo $y' = f(n - n_0)$ traslazione in avanti di n_0; definiamo invece $y'' = f(n + n_0)$ traslazione indietro di n_0.

4.1.2 Decimazione/UpSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale decimato è:

$$y = f(an) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{38}$$

Questa operazione è detta *decimazione* dal momento che è come se prelevassi selettivamente i valori ogni a campioni del segnale di partenza

4.1.3 Interpolazione/DownSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale interpolato è:

$$y = f\left(\frac{n}{a}\right) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{39}$$

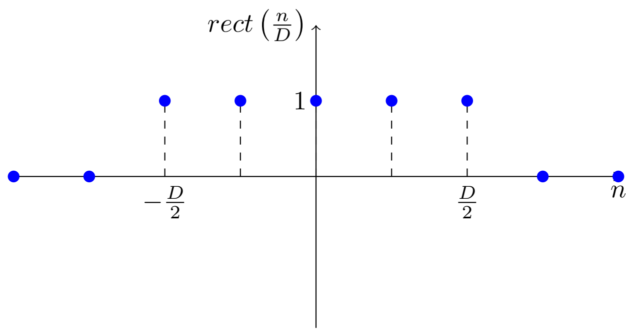
In parole povere, questa operazione non fa altro che distanziare ogni campione di a intervalli.

4.2 Segnali Notevoli

4.2.1 Rettangolo Discreto

Viene definito come:

$$rect\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\frac{n}{D}| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{40}$$



4.2.2 Gradino Unitario

Anche in questo caso, la formulazione è identica al Gradino Unitario continuo, ossia:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \tag{41}$$

4.2.3 Impulso Discreto

Questo segnale è il parente ”discreto” della *Delta di Dirac* (23) ma è più semplice da introdurre, dal momento che la sua formula è:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \tag{42}$$

Possiamo dunque notare che, a differenza della delta, l'impulso discreto è una vera e propria funzione.

4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto

- **Area Unitaria**: è abbastanza ovvia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1 \tag{43}$$

- **Prodotto Scalare con** $\delta(n)$

$$\langle f, \delta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n) = f(0) \tag{44}$$

- **Prodotto con** $\delta(n)$:

$$f(n)\delta(n-n_0) = f(n_0)\delta(n-n_0) \tag{45}$$

- **Integrazione Discreta**:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} = u(n) \tag{46}$$

4.2.5 Segnali Periodici Discreti

Dato $s(n)$ un segnale con $n \in \mathbb{Z}$ è periodico se e solo se

$$s(n) = s(n+kN), \text{ con periodo } N, \forall n, k \in \mathbb{Z} \tag{47}$$

Se N è il periodo di $s(n)$, allora la frequenza sarà $\frac{1}{N}$; Dal momento che $|N| \geq 1$ sempre (non ha senso avere periodo nullo), allora la frequenza è sempre frazionaria. Si può dimostrare che solo un segnale con frequenza razionale può essere periodico, mentre se è irrazionale non lo potrà mai essere.

4.2.6 Fasore Discreto

La funzione è molto simile al fasore continuo:

$$s(n) = e^{2\pi j f_0 n} \tag{48}$$

Dove f_0 dev'essere razionale altrimenti la funzione non sarà periodica.

4.3 Proprietà dei Segnali Discreti

4.3.1 Durata

La durata di un segnale discreto è la somma delle ”stecche” non nulle di un grafico, o meglio, la lunghezza del supporto di $s(t)$

$$D = n_2 - n_1 + 1 \tag{49}$$

Dove n_2, n_1 sono gli estremi non nulli del segnale.

4.3.2 Area

Dato $s(n), n \in \mathbb{Z}$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \tag{50}$$

4.3.3 Valor Medio

Il valor medio è un $\tilde{s}$ tale che la funzione costante $s(t)' = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} s(n) \tag{51}$$

4.3.4 Potenza Istantanea

Non è altro che il modulo del segnale in un determinato istante n, ossia:

$$P_s(n) = \begin{cases} s(n)\overline{s(n)} \text{ se } s(n) \in \mathbb{C} \\ s(n)^2 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{52}$$

4.3.5 Energia

è l’area della Potenza Istantanea, ossia:

$$E_s = \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{53}$$

4.3.6 Potenza Media

è il valor medio della Potenza Istantanea, ossia:

$$P_s = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{54}$$

4.3.7 Segnali Potenza ed Energia

Anche in questo caso possiamo fare la distinzione tra i segnali potenza e i segnali energia, la definizione è la stessa presentata alla sezione (3.3.7)

5 Sistemi

In forma generale, un sistema descrive una relazione/processo di Causa-Effetto tra un INPUT ed un OUTPUT. In particolare nel corso ci focalizzeremo sui sitemi di Elaborazione dei Segnali.
Un **Sistema di Elaborazione dei Segnali** può essere vista come una relazione o legge di trasformazione di un segnale in un altro, dunque, formalmente:
Dato un sistema $S[\cdot]$, possiamo dire che:

$$y(b) = S[x(t)] \tag{55}$$

Dove $y(b)$è il segnale in output mentre $x(t)$ è il segnale in input. In base alla continuità dei segnali e dei domini possiamo distinguere i sistemi in: **Continui, Discreti e Misti**

5.1 Sistemi Continui

Dato un sistema $y(b) = S[x(a)]$, con $b \in B, a \in A$ questo si dice continuo se e solo se:

- A, B sono insiemi continui
- $y(b), x(a)$ sono funzioni continue

Una classe importante di questi sistemi sono i **Sistemi Tempo-Continui** in cui la variabile è il tempo.

Esempi.

- **Ritardatori**
$$y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0) \tag{56}$$
Questo sistema non fa altro che ritardare il segnale $x(t)$ di una quantità di t_0 secondi.
- **Quantizzatore**
$$y(t) = \mathrm{ROUND}(x(t)) \tag{57}$$
Questo sistema arrotonda ogni valore di $x(t)$ al suo intero più vicino.
- **Integratore**
$$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau \tag{58}$$
Questo sistema associa ad ogni istante t l'area compresa tra $t - T$ e t

5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui

5.2.1 Non Dispersività

Un sistema $S[\cdot]$ è non dispersivo se e solo se il sistema dipende solo da t e dal valore attuale di $x(t)$, ossia:

$$y(t) = S[t; x(t)] \tag{59}$$

possiamo dire che questi sistemi sono senza memoria perchè non considerano per nulla il passato.

Esempio: Amplificatore Ideale

$$y(t) = A \cdot x(t) \tag{60}$$

5.2.2 Causalità

Un sistema $S[\cdot]$ è causale se e solo se:

$$y(t) = S[t; x(\tau) \text{ dove } \tau \leq T] \tag{61}$$

Questi sistemi associano ad ogni istante t un valore dipendente non soltanto dal tempo attuale e dal valore $x(t)$, ma anche della storia di $x(t)$. Bene o male tutti i sistemi reali sono causali, perchè dipendono anche dagli istanti passati di un segnale. Esistono (ma solo in teoria) i segnali **Anticausali**, in cui il sistema dipende dall'istante attuale e quelli futuri (e quindi il futuro causerebbe il presente, impossibile nella realtà)

5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un sistema è **Stabile** se e solo se per ogni input limitato, l'uscita è sempre limitata, ossia:
Dato $S[\cdot]$ dove $y(t) = S[x(t)]$ con $|x(t)| \leq K_x < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ allora:

$$|y(t)| \leq K_y < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{62}$$

Dove K_x, K_y sono rispettivamente il limite superiore/inferiore di $x(t), y(t)$

Esempi: L'Amplificatore Ideale (60).

5.2.4 Omogeneità

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$, S è detto *omogeneo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $a \cdot x(t)$ con $a \in \mathbb{R}$ allora:

$$S[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \tag{63}$$

5.2.5 Additività

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\left[x(t)\right]$, S è detto *additivo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} y_i(t) \tag{64}$$

5.2.6 Linearità

Un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\left[x(t)\right]$ è detto *lineare* se è sia omogeneo che additivo con gli stessi pesi, ossia se:
Dato $x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{65}$$

Questa proprietà è dovuta, nei segnali, al *Principio di sovrapposizione degli Effetti*, ossia:
La risposta di un sistema ad una combinazione lineare degli ingressi è uguale alla combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle risposte ad ogni singolo ingresso

Esempi.

- **Integratore definito nel tempo**: grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, questo sistema è lineare:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_{t-T}^{t} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{66}$$

5.2.7 Tempo-Invarianza

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ tempo-continuo, S è tempo-invariante se e solo se:

$$se S[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{67}$$

Questa proprietà afferma che il sistema non dipende da un eventuale ritardo(o anticipo) del segnale.

6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

Sia la linearità che la tempo invarianza sono così importanti che dedicheremo un intero capitolo ai sistemi LTI (o Lineari e Tempo-Invarianti), dal momento che tali proprietà implicano altre proprietà altrettanto interessanti, come quella legata alla risposta all'impulso. Riprendiamo la proprietà (25) della delta di Dirac e un segnale $x(t)$. Consideriamo ora il sistema

$$S\left[\int_{\mathbb{R}} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Se $S[\cdot]$ è lineare possiamo considerare $x(\tau)$ come coefficiente e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau)S\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \tag{68}$$

Possiamo definire la *risposta all'impulso da parte del sistema* come $h(t) := S[\delta(t)]$. Se S è anche tempo-invariante, allora

$$h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)] \tag{69}$$

Possiamo riscrivere l'equazione di partenza se $S[\cdot]$ è lineare e tempo-invariante come:

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{70}$$

6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione

Definiamo:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{71}$$

E si dice *x(t) convoluto con h(t)*; è un'operazione molto importante in segnali, tanto da avere una definizione. L'importanza di $h(t)$ noi la possiamo apprezzare quando dobbiamo studiare un segnale ignoto: passando al sistema un impulso, e osservando l'output, tale output sarà proprio x(t) convoluto con h(t) (se il sistema è lineare e tempo invariante).