Appunti di Elaborazione dei Segnali

By *@Thisisfava*

2024/2025

Contents

1 Numeri Complessi

Lezione 1
24/9/2024

Definizione. Il campo complesso $\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di un polinomio di grado n a coefficienti reali.

Un numero $z \in \mathbb{C}$ è definito dall'*unità immaginaria*:

$$i = j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

1.1 Rappresentazioni

Un complesso z, che può essere scritto in diverse forme, viene rappresentato sul *Piano di Gauss*, un piano definito dall'asse orizzontale $\mathbb{R}e$ e dall'asse verticale $\mathbb{I}m$

1.1.1 Coordinate Rettangolari

Un complesso può essere rappresentato come un punto (x, y) sul piano di Gauss, con x e $y \in \mathbb{R}$. La forma che lo rappresenta è la forma *algebrica*:

$$z = x + jy \tag{2}$$

Con x la parte reale (ossia $\mathbb{R}e(z) = x$) e y la parte immaginaria (ossia $\mathbb{I}m(z) = y$)

1.1.2 Coordinate Polari

Un complesso z può essere anche rappresentato in *forma polare* sul piano in funzione della lunghezza ρ del vettore che parte dall'origine (ossia il *modulo*) e dell'angolo spazzato θ (ossia la *fase*).

$$z = \langle \rho, \theta \rangle = \rho\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right) \tag{3}$$

In realtà, un'altra forma che permette di esprimere un complessi in coordinate polari è la forma *esponenziale*

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right) \tag{4}$$

1.2 Conversioni

1.2.1 Polare a Rettangolare

Dato $z = \langle \rho, \theta \rangle$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

1.2.2 Rettangolare a Polare

Dato $z = x + jy$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{6}$$

Dove

$$\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

1.3 Complesso Coniugato

1.3.1 Definizione

Dato un $z \in \mathbb{C}$ t.c $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$ allora il suo coniugato sarà

$$\overline{z} = x - jy \tag{8}$$

$$\overline{z} = \rho e^{-j\theta} \tag{9}$$

In parole povere, il coniugato di un complesso è il complesso che ha stessa parte reale ma opposta parte immaginaria

1.3.2 Proprietà

- $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}e(z)$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$

1.4 Operazioni nel campo dei complessi

1.4.1 Somme tra numeri complessi

Lezione 2 29/9/2024

Forma algebrica. Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ la somma sarà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{10}$$

Forma Esponenziale. La somma è banale

1.4.2 Scalatura

Forma algebrica. Dati $z = x + jy$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = ax + jay \tag{11}$$

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $a \in \mathbb{R}$ la scalatura sarà:

$$az = a\rho e^{j\theta} \tag{12}$$

1.4.3 Prodotto tra complessi

Forma algebrica. Dati $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{13}$$

Forma Esponenziale. Dati $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$ il prodotto sarà:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{14}$$

1.4.4 Inverso di un complesso

Forma algebrica. Dato $z = x + jy$ l'inverso sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\rho^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \tag{15}$$

Spiegazione della formula: un certo $w = z^{-1}$ con $z \in \mathbb{C}$ se il loro prodotto genera un numero con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla. Sappiamo che $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z| = \rho^2$. Quindi basta dividere il coniugato di z con il modulo quadro(ρ^2) e si ha l'inverso.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ il prodotto sarà:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} \tag{16}$$

1.4.5 Divisione tra numeri complessi

Dati $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$ possiamo riscrivere la divisione tra i 2 numeri come prodotto tra il primo e l'inverso del secondo, e ciò vale per entrambe le forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \tag{17}$$

1.4.6 Elevamento a potenza

Forma algebrica. L'elevamento ha potenza della forma algebrica non è particolarmente interessante.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{Z}$ l'elevamento a potenza sarà $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n volte}}$ ossia:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} \tag{18}$$

1.4.7 Estrazione di una radice n-esima

Dato un $z \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathbb{C}$, y è radice n-esima di z se e solo se $y^n = z$. La grande differenza con in numeri reali è che, nel campo complesso, esistono esattamente n y distinte di radici che soddisfano l'equazione $y^n - z = 0$ per il teorema fondamentale dell'algebra.

Forma algebrica. La radice n-esima della forma algebrica non è particolarmente interessante.

Forma Esponenziale. Dati $z = \rho e^{j\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$ la radice n-esima sarà:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta + 2\pi i}{n}\right)} \qquad \text{Con i = 0,1,..., n-1}$$

1.4.8 Funzione complessa di variabile reale

Definita come

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Oppure come $z = f(x)$ con $z \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$, è una funzione che mappa ad ogni reale un immaginario.

Rappresentazione. Graficamente una funzione complessa di variabile reale può essere rappresentata in un grafico a 3 dimensioni con un asse per la x (variabile indipendente) e gli altri 2 assi sono $\mathbb{I}m[z]$ e $\mathbb{R}e[z]$. Dal momento che sono difficili da rappresentare, si ricorre ad una semplificazione: il grafico tridimensionale si sdoppia in un grafico che mappa ad ogni x la parte Reale di z ed un altro grafico che mappa ad ogni x la parte Immaginaria di z. Se si lavora in coordinate polari, è possibile invece rappresentare il grafico che mappa ad ogni x il modulo del complesso corrispondente e un altro grafico che mappa ad ogni x la fase del complesso corrispondente. La particolarità di questi ultimi 2 grafici è che il primo grafico è sempre rappresentato sopra l'asse x (il modulo non può mai essere negativo) e il secondo grafico è sempre rappresentato tra $-\pi$ e π dal momento che poi la fase si ripete.

2 Segnali

Lezione 3
1/10/2024

In termini totalmente astratti, un segnale è un veicolo di informazione. L'informazione, a sua volta, possiamo definirla come tutto ciò che aggiunge conoscenza. Calato nel contesto del corso, un segnale può essere visto come una funzione

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f : A \longrightarrow B \end{cases}$$

Dove $x \in A$ è la variabile indipendente, $y \in B$ la variabile dipendente con A e B insiemi qualsiasi.

2.1 Classificazione dei segnali

2.1.1 Rispetto alla dimensionalità

Un segnale può essere classificato rispetto alla dimensionalità del dominio o del codominio.

Dominio. Un segnale rispetto alla dimensionalità del dominio può essere:

- **Monodimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}$
- **n-Dimensionale** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

Codominio. Un segnale rispetto alla dimensionalità del codominio può essere:

- **Scalare** se $B \subseteq \mathbb{R}$
- **Vettoriale** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n > 1$

2.1.2 Rispetto alla Continuità

Un segnale può essere classificato rispetto alla continuità di dominio o codominio.

Dominio. Un segnale rispetto alla continuità del dominio può essere:

- **Continuo** se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se A coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Discreto** se A coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

Codominio. Un segnale rispetto alla continuità del codominio può essere:

- **Ad Ampiezze Continue** se $B \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè se B coincide o è sottoinsieme di un insieme denso, continuo.
- **Ad Ampiezze Discrete** se B coincide o è sottinsieme di un insieme discreto (come $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$)

Nel caso in cui la variabile dipendente sia il tempo, i segnali vengono detti **tempo-contuinui** o **tempo-discreti**.

Esempi. Il *suono* può essere visto come la pressione dell'aria in funzione del tempo, ossia come:

$$p = f(t)$$

Dove $p \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Dunque il suono è un segnale **monodimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine in bianco e nero* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano la *Luminanza*:

$$L = f(x, y)$$

Dove $L \in \mathbb{R}$ e $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a scala di grigi è un segnale **bidimensionale** e **scalare**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

Un'*immagine a colori* può essere vista come una funzione che associa ad ogni punto del piano una tripletta di valori (interpretabili in base allo spazio colore scelto). Consideriamo lo spazio RGB:

$$\langle R, G, B\rangle = f(x, y)$$

Dove $\langle R, G, B\rangle \in \mathbb{R}^3$ e $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. Dunque un'immagine a colori è un segnale **bidimensionale** e **vettoriale**, **continuo** e **ad ampiezze continue**

2.2 Tipi di segnali

In base alle caratteristiche di un segnale, possiamo definire alcuni tipi di segnali:

Segnale	Dominio Continuo	Dominio Discreto
Codominio Continuo	Analogico	Campionato
Codominio Discreto	Quantizzato	Digitale

3 Segnali Continui

3.1 Operazioni Sui Segnali Continui

3.1.1 Traslazione

Lezione 4
7/10/2024

Dato un segnale $y = f(x)$ possiamo definire il segnale traslato y' come

- $y' = f(x - x_0)$ ossia una *traslazione in avanti* di x_0
- $y' = f(x + x_0)$ ossia una *traslazione all'indietro* di x_0

Quando la variabile indipendente x è il tempo, possiamo dire che il segnale è, rispettivamente, in *in ritardo* o *in anticipo*

3.1.2 Scalatura della variabile dipendente

Dato $y = f(x)$ e $x \in \mathbb{R}$ allora possiamo definire y' il segnale scalato come

$$y' = f(ax)$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ è detto *fattore di scala*. In base ai valori assunti da a, il segnale può:

- **Espandersi** se $|a| < 1$
- **Comprimersi** se $|a| > 1$
- **Specchiarsi** rispetto all'asse y se $a < 0$

3.2 Segnali Notevoli

Riporto di seguito alcune funzioni(segnali) che useremo spesso nel corso:

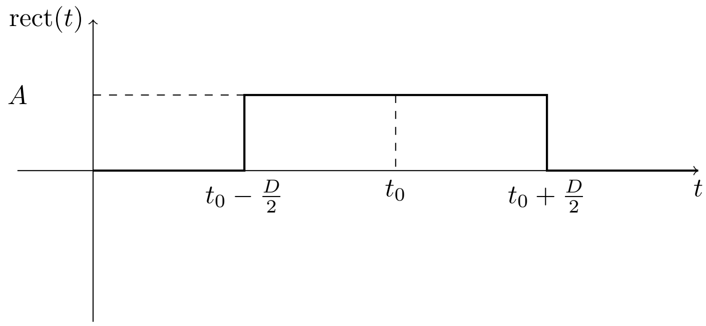
3.2.1 Funzione Rettangolo

Detta anche *Impulso Rettangolare*, è una funzione che ha un picco tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ e poi è sempre nulla. Possiamo definirla così:

$$y = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{19}$$

Formula Generalizzata. Data A l'ampiezza del segnale, t_0 il centro del rettangolo e D la durata dell'impulso, possiamo generalizzare la definizione precedente

$$y = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{D}\right) \tag{20}$$



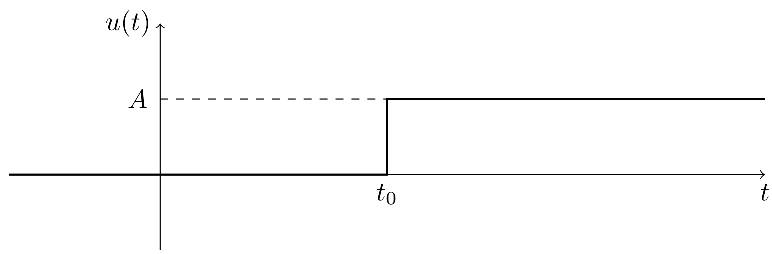
3.2.2 Gradino Unitario

Tale segnale è definibile come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \tag{21}$$

Formula Generalizzata. Data A l'ampiezza del segnale e t_0 il tempo di ritardo

$$y = A \cdot u(t - t_0) \tag{22}$$



3.2.3 Delta di Dirac (o Impulso Ideale)

Questo segnale si ottiene, a partire dall'impulso rettangolare, restringendo sempre di più T e aumentando sempre di più l'ampiezza di un termine $\frac{1}{T}$ (questo per mantenere l'area sottesa, o energia, invariata). Possiamo determinare la formula analitica di questa operazione:

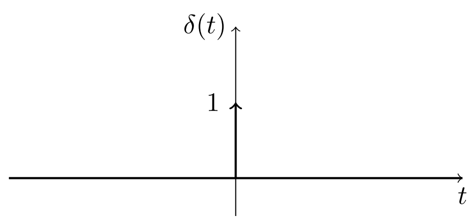
$$y(t) = \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Facendo tendere a 0 il termine T si ottiene proprio la *delta di Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{23}$$

Per com'è definita, la delta di Dirac non è una vera è propria funzione, è una funzione speciale, una distribuzione, che vale sempre 0 tranne quando $t = 0$; in quel caso la funzione va ad infinito, perchè sarebbe l'impulso (ideale) applicato in un istante infinitesimo. Dal momento che in questa funzione l'ampiezza è infinita, ha senso considerare, invece, l'area sottesa, ossia l'energia dell'impulso.

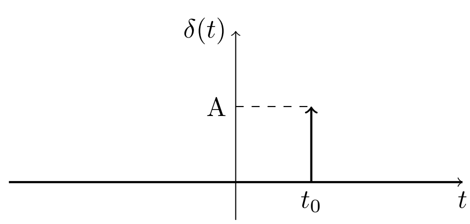
Rappresentazione Tradizionale. Tradizionalmente la funzione delta viene rappresentata in 0 con una freccia verso l'alto con la punta a 1. In ogni altro punto, è 0.



Formula Generalizzata. Data A l'area (e non l'ampiezza, che sarebbe infinita) e t_0 il ritardo, la formula sarà:

$$y(t) = A \cdot \delta\left(t - t_0\right)$$

E il grafico sarà:



3.2.4 Proprietà della Delta

- **Area Unitaria**: l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della delta è esattamente 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{24}$$

- **Proprietà del Campionamento**: per enunciare la proprietà è necessario introdurre il concetto di *prodotto scalare tra funzioni*:
  Si dice prodotto scalare tra le funzioni f e g come

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \tag{25}$$

  Detto ciò, la proprietà della campionatura afferma che, per ogni funzione $f(t)$:

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \tag{26}$$

  Da ciò possiamo capire il significato del termine "campionatura": quando noi effettuiamo il prodotto scalare con il delta, è come se scattassimo una istantanea alla funzione f in 0. Questa proprietà ci servira per discretizzare una funzione. Possiamo dunque generalizzare questa proprietà per un qualunque istante t_0:

$$\langle f(t), \delta(t - t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \tag{27}$$

- **Proprietà del Prodotto**: il prodotto tra una qualsiasi funzione $f(t)$ e il delta di dirac è sempre 0 laddove $t \neq t_0$:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{28}$$

- **Parità**:

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{29}$$

- **Integrazione**: la funzione integrale della delta di dirac è in realtà il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = u(t) \tag{30}$$

3.2.5 Segnali Periodici

Un segnale $s(t)$ si dice *periodico* se e solo se il suo valore si ripete ad ogni periodo, ossia:

$$s(t) = s(t + kT) \tag{31}$$

Dove $k \in \mathbb{Z}$ è il numero di volte e $T \in \mathbb{R}$ è il periodo.
Una cosa da tenere a mente è che, in segnali, solitamente, si normalizza in modo tale da mettere in evidenza direttamente nella formula la frequenza (che può essere molto utile).
Es:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Da questa formula sappiamo subito che il periodo di questo segnale è:

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} f_0} = \frac{1}{f_0}$$

E dunque la sua frequenza è proprio f_0

3.2.6 Fasore

Questa funzione è una funzione complessa di variabile reale, con la seguente formula analitica:

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \tag{32}$$

3.3 Proprietà dei Segnali

3.3.1 Durata

Lezione 5
8/10/2024

La durata di un segnale è, considerando un segnale nel tempo, la differenza tra il primo istante in cui il segnale non è nullo e l'ultimo istante.

3.3.2 Area

Si dice *Area di un Segnale* $s(t)$ l'area sottesa dallo stesso segnale, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \tag{33}$$

3.3.3 Valor Medio (o Media Temporale)

Il valor medio di un segnale $s(t)$ non è altro che quel valore $\tilde{s}$ tale che una funzione costante $s'(t) = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$, ossia:

$$\tilde{s} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)dt \tag{34}$$

3.3.4 Energia

Sebbene non stiamo parlando propriamente di lavoro e concetti fisici relativi, dobbiamo dire che un segnale è sempre associato ad una certa energia che il segnale stesso trasporta. Dunque *l'energia di un segnale* ($s(t)$) è:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \tag{35}$$

3.3.5 Potenza Istantanea

Per il discorso precedente, possiamo anche definire la Potenza Istantanea di un segnale (cioè la potenza in un istante del Segnale) come

$$P[s(t)] = \begin{cases} s(t_0)\overline{s(t_0)} & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{C} \\ s(t_0)^2 & \text{se } s(t_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{36}$$

3.3.6 Potenza Media

La potenza media possiamo, invece, vederla come il valore medio dell'energia, ossia:

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \tag{37}$$

3.3.7 Segnale Energia e Potenza

Innanzitutto possiamo notare come sia Potenza Media che Energia siano non negativi per costruzione; inoltre tra Potenza Media e Energia di un segnale è possibile vedere una correlazione: laddove l'energia del segnale è finita, allora la potenza è necessariamente nulla; laddove invece la potenza media è maggiore di 0, l'energia è infinita.

In base a questo concetto è possibile definire:

- **Segnale Energia** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < E_s < \infty$ e allora $P_s = 0$
- **Segnale Potenza** un segnale $s(t)$ se e solo se $0 < P_s < \infty$ e allora $E_s \to +\infty$

4 Segnali Discreti

A differenza dei segnali continui, i segnali discreti sono funzioni con Dominio discreto, solitamente rappresentate nella seguente maniera:

$$y = f(n),\ n \in Z$$

Enunciamo ora tutte le proprietà, in maniera speculare, che abbiamo già descritto per i segnali continui:

4.1 Operazione sui Segnali Discreti

4.1.1 Traslazione

Dato un segnale $y = f(n)$ definiamo $y' = f(n - n_0)$ traslazione in avanti di n_0; definiamo invece $y'' = f(n + n_0)$ traslazione indietro di n_0.

4.1.2 Decimazione/UpSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale decimato è:

$$y = f(an) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{38}$$

Questa operazione è detta *decimazione* dal momento che è come se prelevassi selettivamente i valori ogni a campioni del segnale di partenza

4.1.3 Interpolazione/DownSampling

Dato $y = f(n)$ il segnale con $n \in \mathbb{Z}$, il segnale interpolato è:

$$y = f\left(\frac{n}{a}\right) \text{ con } a \in Z \text{ e } |a| \geq 1 \tag{39}$$

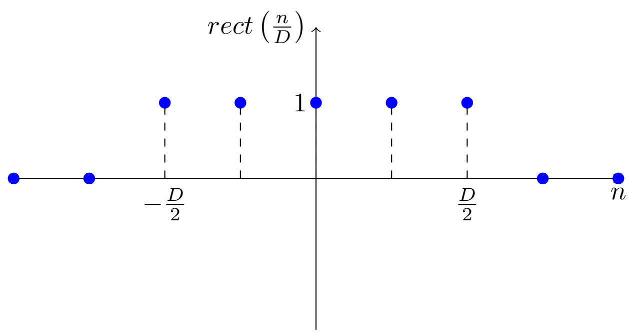
In parole povere, questa operazione non fa altro che distanziare ogni campione di a intervalli.

4.2 Segnali Notevoli

4.2.1 Rettangolo Discreto

Viene definito come:

$$rect\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\frac{n}{D}| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{40}$$



4.2.2 Gradino Unitario

Anche in questo caso, la formulazione è identica al Gradino Unitario continuo, ossia:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} \tag{41}$$

4.2.3 Impulso Discreto

Questo segnale è il parente "discreto" della *Delta di Dirac* (23) ma è più semplice da introdurre, dal momento che la sua formula è:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \tag{42}$$

Possiamo dunque notare che, a differenza della delta, l'impulso discreto è una vera e propria funzione.

4.2.4 Proprietà dell'Impulso Discreto

- **Area Unitaria**: è abbastanza ovvia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1 \tag{43}$$

- **Prodotto Scalare con** $\delta(n)$

$$\langle f, \delta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n) = f(0) \tag{44}$$

- **Prodotto con** $\delta(n)$:

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0) \tag{45}$$

- **Integrazione Discreta**:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases} = u(n) \tag{46}$$

4.2.5 Segnali Periodici Discreti

Dato $s(n)$ un segnale con $n \in \mathbb{Z}$ è periodico se e solo se

$$s(n) = s(n + kN), \text{ con periodo } N, \forall n, k \in \mathbb{Z} \tag{47}$$

Se N è il periodo di $s(n)$, allora la frequenza sarà $\frac{1}{N}$; Dal momento che $|N| \geq 1$ sempre (non ha senso avere periodo nullo), allora la frequenza è sempre frazionaria. Si può dimostrare che solo un segnale con frequenza razionale può essere periodico, mentre se è irrazionale non lo potrà mai essere.

4.2.6 Fasore Discreto

La funzione è molto simile al fasore continuo:

$$s(n) = e^{2\pi j f_0 n} \tag{48}$$

Dove f_0 dev'essere razionale altrimenti la funzione non sarà periodica.

4.3 Proprietà dei Segnali Discreti

4.3.1 Durata

Lezione 6
14/10/2024

La durata di un segnale discreto è la somma delle "stecche" non nulle di un grafico, o meglio, la lunghezza del supporto di $s(t)$

$$D = n_2 - n_1 + 1 \tag{49}$$

Dove n_2, n_1 sono gli estremi non nulli del segnale.

4.3.2 Area

Dato $s(n), n \in \mathbb{Z}$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \tag{50}$$

4.3.3 Valor Medio

Il valor medio è un $\tilde{s}$ tale che la funzione costante $s(t)' = \tilde{s}$ ha la stessa area di $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} s(n) \tag{51}$$

4.3.4 Potenza Istantanea

Non è altro che il modulo del segnale in un determinato istante n, ossia:

$$P_s(n) = \begin{cases} s(n)\overline{s(n)} \text{ se } s(n) \in \mathbb{C} \\ s(n)^2 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{52}$$

4.3.5 Energia

è l'area della Potenza Istantanea, ossia:

$$E_s = \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{53}$$

4.3.6 Potenza Media

è il valor medio della Potenza Istantanea, ossia:

$$P_s = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \tag{54}$$

4.3.7 Segnali Potenza ed Energia

Anche in questo caso possiamo fare la distinzione tra i segnali potenza e i segnali energia, la definizione è la stessa presentata alla sezione (3.3.7)

5 Sistemi

In forma generale, un sistema descrive una relazione/processo di Causa-Effetto tra un INPUT ed un OUTPUT. In particolare nel corso ci focalizzeremo sui sitemi di Elaborazione dei Segnali.
Un **Sistema di Elaborazione dei Segnali** può essere vista come una relazione o legge di trasformazione di un segnale in un altro, dunque, formalmente:
Dato un sistema $S[\cdot]$, possiamo dire che:

$$y(b) = S[x(t)] \tag{55}$$

Dove $y(b)$è il segnale in output mentre $x(t)$ è il segnale in input. In base alla continuità dei segnali e dei domini possiamo distinguere i sistemi in: **Continui, Discreti e Misti**

5.1 Sistemi Continui

Dato un sistema $y(b) = S[x(a)]$, con $b \in B, a \in A$ questo si dice continuo se e solo se:

- A, B sono insiemi continui
- $y(b), x(a)$ sono funzioni continue

Una classe importante di questi sistemi sono i **Sistemi Tempo-Continui** in cui la variabile è il tempo.

Esempi.

- **Ritardatori**
$$y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0) \tag{56}$$
Questo sistema non fa altro che ritardare il segnale $x(t)$ di una quantità di t_0 secondi.
- **Quantizzatore**
$$y(t) = \text{ROUND}(x(t)) \tag{57}$$
Questo sistema arrotonda ogni valore di $x(t)$ al suo intero più vicino.
- **Integratore**
$$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau \tag{58}$$
Questo sistema associa ad ogni istante t l'area compresa tra $t - T$ e t

5.2 Proprietà dei Sistemi Tempo-Continui

5.2.1 Non Dispersività

Un sistema $S[\cdot]$ è non dispersivo se e solo se il sistema dipende solo da t e dal valore attuale di $x(t)$, ossia:

$$y(t) = S[t; x(t)] \tag{59}$$

possiamo dire che questi sistemi sono senza memoria perchè non considerano per nulla il passato.

Esempio: Amplificatore Ideale

$$y(t) = A \cdot x(t) \tag{60}$$

5.2.2 Causalità

Un sistema $S[\cdot]$ è causale se e solo se:

$$y(t) = S[t; x(\tau) \text{ dove } \tau \leq T] \tag{61}$$

Questi sistemi associano ad ogni istante t un valore dipendente non soltanto dal tempo attuale e dal valore $x(t)$, ma anche della storia di $x(t)$. Bene o male tutti i sistemi reali sono causali, perchè dipendono anche dagli istanti passati di un segnale. Esistono (ma solo in teoria) i segnali **Anticausali**, in cui il sistema dipende dall'istante attuale e quelli futuri (e quindi il futuro causerebbe il presente, impossibile nella realtà)

5.2.3 Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un sistema è **Stabile** se e solo se per ogni input limitato, l'uscita è sempre limitata, ossia:
Dato $S[\cdot]$ dove $y(t) = S[x(t)]$ con $|x(t)| \leq K_x < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ allora:

$$|y(t)| \leq K_y < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{62}$$

Dove K_x, K_y sono rispettivamente il limite superiore/inferiore di $x(t), y(t)$

Esempi: L'Amplificatore Ideale (60).

5.2.4 Omogeneità

Lezione 7
15/10/2024

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s[x(t)]$, S è detto *omogeneo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $a \cdot x(t)$ con $a \in \mathbb{R}$ allora:

$$S[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \tag{63}$$

5.2.5 Additività

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\,[x(t)]$, S è detto *additivo* se e solo se vale questa proprietà:
Dato come input $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} y_i(t) \tag{64}$$

5.2.6 Linearità

Un sistema $S[\cdot] : y(t) = s\,[x(t)]$ è detto *lineare* se è sia omogeneo che additivo con gli stessi pesi, ossia se:
Dato $x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$ allora:

$$S[x(t)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{65}$$

Questa proprietà è dovuta, nei segnali, al *Principio di sovrapposizione degli Effetti*, ossia:
La risposta di un sistema ad una combinazione lineare degli ingressi è uguale alla combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle risposte ad ogni singolo ingresso

Esempi.

- **Integratore definito nel tempo**: grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, questo sistema è lineare:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_{t-T}^{t} a_i x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t) \tag{66}$$

5.2.7 Tempo-Invarianza

Dato un sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ tempo-continuo, S è tempo-invariante se e solo se:

$$seS[x(t-t_0)] = y(t-t_0)\ \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{67}$$

Questa proprietà afferma che il sistema non dipende da un eventuale ritardo(o anticipo) del segnale.

6 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI) Continui

Sia la linearità che la tempo invarianza sono così importanti che dedicheremo un intero capitolo ai sistemi LTI (o Lineari e Tempo-Invarianti), dal momento che tali proprietà implicano altre proprietà altrettanto interessanti, come quella legata alla risposta all'impulso. Riprendiamo la proprietà (26) della delta di Dirac e un segnale $x(t)$. Consideriamo ora il sistema

$$S\left[\int_{\mathbb{R}} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Se $S[\cdot]$ è lineare possiamo considerare $x(\tau)$ come coefficiente e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} x(\tau)S\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \tag{68}$$

Possiamo definire la *risposta all'impulso da parte del sistema* come $h(t) := S[\delta(t)]$. Se S è anche tempo-invariante, allora

$$h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)] \tag{69}$$

Possiamo riscrivere l'equazione di partenza se $S[\cdot]$ è lineare e tempo-invariante come:

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{70}$$

6.1 Prodotto/Integrale di Convoluzione

Definiamo:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{71}$$

E si dice *x(t) convoluto con h(t)*; è un'operazione molto importante in segnali, tanto da avere una definizione. L'importanza di $h(t)$ noi la possiamo apprezzare quando dobbiamo studiare un segnale ignoto: passando al sistema un impulso, e osservando l'output, tale output sarà proprio x(t) convoluto con h(t) (se il sistema è lineare e tempo invariante).

6.1.1 Proprietà

Lezione 8
21/10/2024

Commutativa. Dati 2 segnali f, g

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \tag{72}$$

Tale proprietà è facile da dimostrare:
Consideriamo la convoluzione $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Effettuiamo ora un cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = t-\tau \\ \tau = t-x \\ dx = -d\tau \end{cases}$$

Sostituiamo ora le τ per avere un integrale in x (NB: gli estremi di integrazione si invertono dal momento che x è un "ribaltamento" di τ):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau =\\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)g(x)(-dx) =\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx =\\ g(t) * f(t)\end{aligned}$$

Alla fine ho risolto il $-dx$ semplicemente invertendo ancora gli estremi di integrazione. Il significato di questa proprietà è importante: se è vero che è possibile studiare un sistema LTI rispetto alla sua risposta all'impulso, è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema rispetto ad un segnale $x(t)$.

Associativa. Dati 3 segnali f, g, h allora:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \tag{73}$$

Distributiva (rispetto alla somma). Dati 3 segnali f, g, h:

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \tag{74}$$

Durata della Convoluzione. Dati 2 segnali f, g con durata rispettivamente D_1, D_2 allora la durata di $f(t) * g(t)$ è $D_1 + D_2$.

Convoluzione con $\delta(t)$ Dato un segnale $f(t)$ allora:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \tag{75}$$

Possiamo infatti dire che $\delta(t)$ è l'operatore neutro dell'operazione di convoluzione, questo perchè il delta è una funzione che avviene tutta in un istante e quindi non altera la funzione di partenza; una sua eventuale traslazione, trasla la funzione $f(t)$. La dimostrazione è banale perchè si basa sulla proprietà del campionamento della delta (26).

6.2 Proprietà dei Sistemi LTI Continui

6.2.1 Causalità

Dato un sistema LTI $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$, S è causale se $y(t)$ accade DOPO il segnale $x(t)$, questo per il concetto stesso di causalità: $y(t)$ è la risposta all'impulso di $x(t)$ quindi DEVE accadere dopo, in particolare si dice che:

$$\text{Un sistema è causale} \iff h(t) = 0 \ \forall t < 0 \tag{76}$$

Proprio per questo motivo, dal momento che $y(t)$ può essere descritto come risposta all'impulso, ossia come convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$, se il sistema è causale allora possiamo ridefinire la $y(t)$ come integrale dall'infinito passato fino all'istante t presente, ossia:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{77}$$

Possiamo anche, per la proprietà commutativa (72), riscrivere la $y(t)$ come integrale tra la risposta $h(t)$ e il segnale $x(t)$ ribaltato e traslato di tutti i valori di τ da 0 fino all'infinito futuro

$$y(t) = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{78}$$

6.2.2 Stabilità BIBO

Dato un sistema LTI $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$, $S[\cdot]$ è BIBO se e solo se:

$$\forall x(t) : |x(t)| < M < \infty \rightarrow |y(t)| < N < \infty \tag{79}$$

In particolare possiamo osservare che:

$$|y(t)| = |S[x(t)]| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right|$$

Sappiamo inoltre che, data una qualsiasi $f(x)$ vale questa disuguaglianza:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

Dunque

$$y(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau$$

Per la proprietà del valore assoluto $|ab| = |a||b|$ allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

Ma $x(t-\tau) \leq M$ perchè abbiamo ipotizzato che il segnale in ingresso sia limitato, dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

In definitiva:

$$y(t) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Possiamo dunque affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema sia stabile BIBO è che $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$ converga, altrimenti $y(t)$ è illimitato.

Teorema. Se la risposta all'impulso del Sistema non è assolutamente convergente allora non è BIBO Stabile

Ipotesi. Ipotizziamo che:

1. Il sistema sia BIBO Stabile, $|y(t)| < N < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\tau = +\infty$
3. consideriamo una $x(t)$ limitata, ossia $x(t) = \text{sign}[h(-t)]$

Dimostrazione. Possiamo dire che per $t = 0$ la risposta all'impulso è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(0-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\text{sign}[h(-\tau)]d\tau$$

per $t = 0$, $\text{sign}[h(-\tau)] = 1$ dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\text{sign}[h(-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau$$

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = |y(t)|$$

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \infty$$

ASSURDO, allora $y(t)$ è instabile.
Possiamo dunque affermare che: Un sistema è BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \tag{80}$$

6.2.3 Risposta in frequenza

Consideriamo la risposta del sistema rispetto al fasore di frequenza f:

$$x_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

Dal momento che il sistema è LTI allora:

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x_f(t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi ft}e^{-j2\pi\tau}d\tau = \\ = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau \end{aligned}$$

Possiamo vedere $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau$ come una sorta di convoluzione in 0, che noi chiamiamo $H(f)$ e definiamo **Risposta in Frequenza**. Possiamo riscrivere l'equazione come:

$$y(t) = H(f)x_f(t) \tag{81}$$

Da $H(f)$ possiamo definire:

- **Risposta in Ampiezza**: $|H(f)|$
- **Risposta in Fase**: $\angle H(f)$

Questa proprietà dei LTI è molto importante poichè ci dice che la risposta in frequenza di un qualsiasi segnale $x(t)$ è un altro segnale **alla stessa frequenza**, magari traslato o amplificato, cioè la risposta di un fasore è ancora un fasore di frequenza f ma moltiplicato per un valore complesso $H(f)$

6.3 Proprietà Sistemi Discreti

Un sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)]$ è detto discreto se e solo se x, y sono segnali discreti; possiamo enunciare per tali sistemi le stesse proprietà dei sistemi LTI continui:

Causalità. Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.1)

Stabilità BIBO. Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (6.2.2)

Linearità. Ha la medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.6)

Tempo-Invarianza. La medesima formulazione dei sistemi LTI Continui (5.2.7)

7 Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (LTI) Discreti

Lezione 9
28/10/2024

Consideriamo un sistema $S[\cdot] : y(n) = S[x(n)]$ con $n \in \mathbb{Z}$ Lineare e Tempo-Invariante; possiamo riscrivere $x(n)$ come somma infinita tra i prodotti tra l'impulso ideale e il loro peso, ossia come:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Allora:

$$\begin{aligned} y(n) = S[x(n)] = \\ = S\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right] = \\ = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \underbrace{S[\delta(n-i)]}_{h(n)} \end{aligned}$$

Dal momento che $S[\cdot]$ è anche Tempo-Invariante, allora:

$$h(n-n_0) = S\left[\delta(n-n_0)\right]$$

In definitiva, anche nel caso discreto, possiamo enunciare la proprietà fondamentale dei sistemi LTI, ossia che un qualsiasi sistema LTI può essere descritto come convoluzione tra l'ingresso e la risposta all'impulso del sistema:

$$y(n) = S[x(n)] = x(n) * h(n) \tag{82}$$

7.1 Causalità

Un sistema $S[\cdot]$ LTI discreto è **Causale** se e solo se:

$$h(n) = 0 \ \forall n < 0, n \in \mathbb{Z} \tag{83}$$

Dunque, come avevamo detto nel continuo,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i)h(n-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \tag{84}$$

Ossia un sistema LTI causale può essere scritto come la somma infinita del prodotto degli ingressi e degli impulsi dall'infinito passato al presente o come somma infinita degli ingressi presenti e passati per l'impulso

7.2 Stabilità BIBO

Per definizione, un sistema LTI $S[\cdot]$ è stabile BIBO se e solo se:

$$\forall x(n) : |x(n)| \leq M < \infty \longrightarrow |y(n)| \leq N < \infty \tag{85}$$

Ma possiamo ricavare un'altra definizione:

$$|y(n)| = \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right|$$
$$\left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \right| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)|$$
$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(n-i)| \leq M \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(i)|$$

Allora $S[\cdot]$ è stabile BIBO se $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < \infty$, cioè se la risposta all'impulso è assolutamente sommabile
Ma è anche necessaria la condizione? Dimostriamo per assurdo

Ipotesi.

1. $y(n)$ è stabile
2. $x(n)$ è limitata, $x(n) = \text{sign}[h(-n)]$
3. $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \infty$

Dimostrazione. Calcoliamo $y(n)$ per $n = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)||x(-i)| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|\text{sign}[|h(i)|] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| \end{aligned}$$

Per ipotesi (3) $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = +\infty$ dunque y(t) non è stabile, ASSURDO! Allora $= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$ In definitiva possiamo affermare che:

$$\text{Un sistema LTI è BIBO} \Longleftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty \tag{86}$$

7.3 Convoluzione Discreta

Definiamo *a(n) convoluto con b(n)* la seguente operazione

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i)b(n-i) \tag{87}$$

7.3.1 Proprietà

Enunciamo qui anche le proprietà di cui gode la convoluzione discreta:

Commutativa: La convoluzione è commutativa, allora vale che

$$f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$$

Dimostrazione.

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i)$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} m = n - i \\ i = n - m \end{cases}$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)g(n-i) &= \sum_{n-m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)g(m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)f(n-m) = \\ &= g(m) * f(m) \end{aligned}$$

In questo caso possiamo scambiare senza problemi gli estremi della sommatoria dal momento che non dobbiamo preoccuparci del segno (mentre nell'integrale dovevamo considerare pure il $d\tau$ che dava un verso di integrazione).

Associativa Ha la stessa formulazione della Convoluzione Continua (72)

Distributiva (rispetto alla Somma) La stessa formulazione della Convoluzione Continua (74)

Convoluzione con $\delta(n)$ La stessa formulazione della Convoluzione Continua (75)

8 Analisi In Frequenza

Lezione 10
29/10/2024

I segnali visti finora sono stati presentati come funzioni descritte da un'espressione analitica; alcuni studiosi, tra cui Fourier, si accorsero che tali funzioni potevano essere scomposte in somme di altre funzioni (in particolare di fasori, seni e coseni), ossia è possibile vedere un segnale come **combinazione lineare** di segnali elementari. Uno strumento che permette di trasformare un segnale in una combinazione lineare di segnali elementari è lo **sviluppo in serie di Fourier**.

8.1 Sviluppo In Serie Di Fourier

Teorema. Data una funzione *periodica* $f(t) : f(t) = f(t + kT)\ \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ e *regolare* (ossia che rispetta le condizioni di Dirichlet), allora $f(t)$ piò essere riscritta come una combinazioni lineare di seni e coseni con i propri pesi e le cui frequenze sono multiple di $\frac{1}{T}$ (con T il periodo di $f(t)$).

Consideriamo ora i vari multipli:

- $n = 0 \longrightarrow f_0 = 0$ è la cosiddetta *componente continua* (un valore costante).
- $n = 1 \longrightarrow f_1 = \frac{1}{T}$ viene detta la *frequenza fondamentale*.
- $\forall |n| > 1 \longrightarrow f_n = \frac{n}{T}$ viene detta *armonica n-esima*.

Gli sviluppi in serie di fourier si presentano in forma **Trigonometrica** ed **Esponenziale**

8.1.1 Forma Esponenziale

Equazione di Sintesi. Nella forma esponenziale possiamo esprimere la funzione $f(t)$ come combinazione lineare di fasori (3.2.6) $p_n(t)$ a frequenza $f_n = \frac{1}{T}$ con T il periodo di f; è detta *di sintesi* perchè otteniamo f dalla combinazione di fasori

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Equazione di Analisi. Al contrario della sintesi, noi vogliamo *scomporre* f per ottenere i fasori che la combinano:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Dove $\int_T$ è un integrale *di durata* T, ossia che può andare da 0 a T, o da $-T/2$ a $T/2$

8.1.2 Forma Trigonometrica

Anche se storicamente è stato al contrario, possiamo derivare a partire dalla forma esponenziale, la forma trigonometrica dello sviluppo.

I Equazione di Sintesi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + c_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] \qquad \text{(separo i } c_n\text{)}$$

Consideriamo ora c_{-n}

$$\begin{aligned} c_{-n} =& \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \\ =& \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{e^{j2\pi \frac{n}{T} t}} dt = \overline{c_n} \end{aligned}$$

Possiamo vedere il complesso $-j$ come il coniugato del complesso di partenza, dunque:

$$\begin{aligned} f(t) =& c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ =& c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} + \overline{c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}}] = \\ =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] \qquad \text{(proprietà 1.3.2)} \end{aligned}$$

Possiamo dunque notare che, a partire dalla scomposizione di una funzione reale in fasori (complessi) otteniamo ancora qualcosa di completamente reale. Poniamo ora $c_n = \rho_n e^j \theta_n$, ossia in forma polare:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[\rho_n e^{j\theta_n} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}] = \\ &= c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e[\rho_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n}] = \end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbb{R}e[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$ allora:

$$f(t) = c_0 + 2 \int_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n\right) \qquad (88)$$

II Equazione di Sintesi. Ora poniamo $c_n = a_n - jb_n$:

$$\begin{aligned} f(t) =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[c_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] = \\ =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[(a_n - jb_n)e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] = \\ =& c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[a_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t} - jb_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\right] = \end{aligned}$$

Riscriviamo ora j come $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$f(t) = c_o + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathbb{R}e\left[a_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t} - b_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t + \frac{\pi}{2}}\right] =$$

Sapendo che, ancora una volta, $\mathbb{R}e[e^{j\theta}] = \cos(\theta)$ allora:

$$= c_o + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) - b_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

Dal momento che $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ allora:

$$f(t) = c_o + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right] \tag{89}$$

Cerchiamo, a questo punto, di derivare a_n, b_n a partire da c_n:

$$\begin{aligned} a_n =& \mathbb{R}e[c_n] = \mathbb{R}e\left[\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt\right] = \\ =& \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathbb{R}e\left[e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\right]dt = \\ =& \frac{1}{T}\int_T f(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n =& -\mathbb{I}m[c_n] = -\mathbb{I}m\left[\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt\right] = \\ =& -\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathbb{I}m\left[e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\right]dt = \\ =& -\frac{1}{T}\int_T f(t)\sin\left(-2\pi\frac{n}{T}t\right)dt = \end{aligned}$$

Per la proprietà antisimmetrica del seno $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ otteniamo:

$$b_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt$$

In definitiva, grazie allo sviluppo in serie di Fourier, possiamo trasformare una funzione **continua, periodica** e regolare in una somma **discreta** di fasori con con pesi $\{c_n\}$ nel periodo $[0, T]$; inoltre, grazie ai coefficienti c_n è possibile conoscere il contributo (o ampiezza) dell'n-esima armonica nello sviluppo di $f(t)$; proprio per questo motivo i c_n rappresentano lo **spettro di** $f(t)$. La funzione f di partenza esiste nel **dominio del tempo** mentre i c_n nel **dominio delle frequenze**

Una cosa che possiamo notare è che c_0 è il valor medio della funzione ed è il contributo che "solleva" la funzione; questo perchè seni/coseni che definiscono lo sviluppo hanno valor medio nullo.

Esempi. Vedi sul quaderno lo sviluppo del dente di sega e dell'onda quadra.

8.2 Trasformata di Fourier

Finora gli sviluppi in serie riguardano solo funzioni continue e periodiche, mentre tutte le altre funzioni non godono di questa proprietà. In realtà Fourier scoprì un modo per analizzare lo spettro di qualsiasi funzione reale:
Consideriamo una funzione $f(t)$ **continua e non periodica** e definiamo la sua versione periodica $f_T(t)$ come:

$$f_T(t) = f(t) \qquad (-\tfrac{T}{2} \le t \le \tfrac{T}{2})$$

Tale che $f_T(t) = f_T(t + kT)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e T il periodo. Quello che fa $f_T(t)$ è di replicare il comportamento di $f(t)$ nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ per tutto $\mathbb{R}$. Dal momento che $f_T(t)$ è periodica e continua, posso applicare lo sviluppo in serie di fourier:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j\frac{n}{T}t} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} \qquad (\text{con } f_n = \tfrac{n}{T}) \end{aligned}$$

Dove c_n è:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Consideriamo ora $\frac{1}{T} = \Delta f$ ossia il passo unitario con cui incrementano le frequenze delle armoniche:

$$c_n = \Delta f\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Facendo tendere il passo unitario a 0 (o meglio, il periodo all'infinito) la versione periodica $f_T(t)$ sarà sempre più simile alla funzione di partenza, per cui possiamo dire che:

$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t) \tag{90}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \to +\infty} f_T(t) = \\ &= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi j f_n t} = \\ &= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi f_n \tau} d\tau \right] e^{j2\pi j f_n t} \Delta f \end{aligned}$$

Dobbiamo osservare che:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi f_n \tau} d\tau$ è una sorta di **risposta in frequenza** e viene indicata con $F(f)$ (funzione di trasformazione di f)
- al tendere di T all'infinito, Δf diventa infinitesima, dunque la somma infinita di termini moltiplicati per un'infinitesimo è proprio un integrale

Antitrasformata di Fourier. Per cui:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(f_n) e^{j2\pi j f_n t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi j f t} df = \\ &= \mathscr{F}^{-1}\{F(f)\} \end{aligned}$$

E viene detta **Formula di Sintesi** o **Antitrasformata di Fourier**

Trasformata di Fourier. Mentre $F(f)$, anche detta **Trasformata di Fourier** o **Formula di Analisi**, è:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt = \mathscr{F}\{f(t)\} \tag{91}$$

Possiamo dunque vedere quest'importante relazione:

$$\boxed{f(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftarrows}} F(f)}$$

Con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sebbene quasi sempre lo spettro di una funzione f è complesso, quindi tridimensionale, possiamo raccontare **frequenze** e **ampiezze** tramite le funzioni:

- **Spettro d'Ampiezza** $|F(f)| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- **Spettro di Fase** $\angle F(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

8.2.1 Trasformate Notevoli

Lezione 11
4/11/2024

Rettangolo. La trasformata sicuramente più importante è quella del rettangolo:

$$\begin{aligned}
S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = \\
&= -\frac{1}{2j\pi f} \left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} \right) = \\
&= -\frac{1}{j\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} \right) = \\
&= \frac{\cancel{j}}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2\cancel{j}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f) = && \text{(per eq di Eulero)} \\
&= \mathrm{sinc}(t)
\end{aligned}$$

Delta di Dirac La trasformata di Fourier della Delta è molto particolare:

$$\begin{aligned}
S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\
&= e^{-j2\pi f 0} = 1 && \text{(per il campionamento (3.2.4))}
\end{aligned}$$

Possiamo interpretare questo risultato dicendo che lo spettro della delta è costituita da infiniti seni di frequenze che vanno da $-\infty$ a $+\infty$ tutti di modulo unitario

Delta di Dirac Traslata Anche la trasformata della Delta Traslata di t_0 è interessante:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= e^{-j2\pi f t_0} && \text{(per il campionamento (3.2.4))} \end{aligned}$$

8.3 Trasformata di Fourier di Segnali Reali

Consideriamo $s(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\cos(-j2\pi f t) + j \sin(-j2\pi f t)\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(-j2\pi f t) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi f t) dt = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(j2\pi f t) dt}_{\in \mathbb{R}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi f t) dt}_{\in \mathbb{R}} = \\ &= \mathbb{R}e\left[S(f)\right] - j\mathbb{I}m\left[S(f)\right] && \text{(per simmetrie)} \end{aligned}$$

8.3.1 Proprietà Trasformata di Segnali Reali

Simmetria Hermitiana. Consideriamo ora $S(-f)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}e[S(-f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(-j2\pi f t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(j2\pi f t) dt = \mathbb{R}e[S(f)] && \text{(simmetria pari)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}m[S(-f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(-j2\pi f t) dt = \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(j2\pi f t) dt = -\mathbb{I}m[S(f)] && \text{(simmetria dispari)} \end{aligned}$$

Un'altra simmetria simile la possiamo notare per **modulo** e **fase** di $S(f)$:

- $|S(f)| = |S(-f)|$
- $\angle S(f) = -\angle S(-f)$

Da ciò possiamo notare che la trasformata della frequenza opposta ha lo stesso modulo della trasformata di partenza ma fase opposta; questa è proprio la definizione di **coniugato** e definisce la **Simmetria Hermitiana**:

$$S(-f) = \overline{S(f)} \qquad \text{(se } s(t) \in \mathbb{R}\text{)}$$

Normalmente un grafico di un segnale si rappresenta in forma **bilatera**, considerando sia i tempi negativi sia positivi. Da questi calcoli abbiamo dimostrato che la trasformata di un qualsiasi segnale reale è sempre simmetrico rispetto alle ordinate per cui molto spesso la trasformata viene rappresentata in forma **monolatera**, cioè solo per $t > 0$.

Linearità. La trasformata di Fourier è un operatore lineare:

$$\mathscr{F}\left[ax(t) + by(t)\right] = a\mathscr{F}\left[x(t)\right] + b\mathscr{F}\left[y(t)\right] \tag{92}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[ax(t) + by(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ax(t) + by(t)\right] e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t)e^{-j2\pi ft} + by(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} + b\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= a\mathscr{F}\left[x(t)\right] + b\mathscr{F}\left[y(t)\right]
\end{aligned}$$

Dualità. Dato un segnale $s(t)$ tale che $\mathscr{F}[s(t)] = S(f)$, allora:

$$\mathscr{F}[S(t)] = s(-f) \tag{93}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[S(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{j2\pi(-f)t} dt = s(-f)
\end{aligned}$$

Ossia otteniamo la formula di sintesi.

Traslazione dei Tempi. Dato un segnale $s(t)$ tale che $\mathscr{F}[s(t)] = S(f)$, allora:

$$\mathscr{F}[s(t - t_0)] = S(f)e^{-j2\pi ft_0} \tag{94}$$

Dimostrazione. Iniziamo a considerare:

$$\mathscr{F}[s(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$$

Effettuiamo ora questo scambio di variabili $\begin{cases} t' = t - t_0 \\ dt' = dt \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)}dt' = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t')e^{-j2\pi ft'} \underbrace{e^{-j2\pi ft_0}}_{costante} dt' = \\
&= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t')e^{-j2\pi ft'}dt' = \\
&= S(f)e^{-j2\pi ft_0}
\end{aligned}$$

Traslazione nelle Frequenze. Dato $\mathscr{F}[s(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$ allora si dimostra per dualità che:

$$\mathscr{F}[s(t)e^{-j2\pi ft_0}] = S(f+f_0) \tag{95}$$

Modulazione d'Ampiezza Dato $S(f) = \mathscr{F}[s(t)]$ e il segnale modulato $s_m(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t)$ allora

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{s(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2}dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\frac{1}{2}(e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t})dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(s(t)e^{j2\pi f_c t} + s(t)e^{-j2\pi f_c t})dt = \\
&= \frac{1}{2}(S(f+f_0) + S(f-f_0))
\end{aligned}$$

Banda di un Segnale Data una coppia $s(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S(f)$ si definisce **Banda di un Segnale** B il supporto delle frequenze,ossia l'insieme delle frequenze per le quali il modulo non è nullo:

$$B = \{f \in \mathbb{R} : |S(f)| \neq 0\} \tag{96}$$

Bandwidth La Bandwidth o **Larghezza di Banda** BW rappresenta **l'estensione** di B, ossia:

$$BW = f_2 - f_1 \tag{97}$$

Dove f_2, f_1 sono le frequenze estremità della Banda. NB: Dal momento che la trasformata di un segnale reale è, per la simmetria Hermitiana, simmetrica rispetto alle y, allora la BW viene definito sullo **Spettro Monolatero**. Possiamo definire una nuova classificazione dei segnali:

Segnali In Banda Base. Sono segnali che contengono l'origine nella Banda.

Segnali In Banda Passante. Sono segnali che non contengono l'origine nella Banda.

Lezione 12
05/11/2024

Scalatura. Data una coppia $s(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S(f)$ allora:

$$s(at) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \tag{98}$$

Dimostrazione Consideriamo $a > 0$:

$$\mathscr{F}\{s(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-j2\pi f t} dt$$

Ora consideriamo questo cambio di variabili $\begin{cases} \tau = at \\ d\tau = adt \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \tau} \tau = \\ &= \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Poi in maniera simile, per $a < 0$ possiamo dimostrare che $\mathscr{F}\{s(at)\} = \frac{1}{-a} S\left(\frac{f}{a}\right)$. Allora possiamo unificare i 2 risultati considerando la a in valore assoluto.

Derivazione Data una coppia $s(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S(f)$ allora:

$$\frac{d}{dt} s(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j2\pi f S(f) \tag{99}$$

Dimostrazione

$$\frac{d}{dt}s(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\frac{d}{dt}e^{j2\pi ft}df = \qquad \text{(formula di Sintesi)}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)j2\pi f e^{j2\pi ft}df =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [j2\pi f S(f)]e^{j2\pi ft}df$$

Allora abbiamo trovato la coppia di fourier $\frac{d}{dt}s(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} j2\pi f S(f)$

Convoluzione Date le seguenti coppie di Fourier $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f)$ e $y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} Y(f)$ allora:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y(f) \tag{100}$$

Dimostrazione

$$\mathscr{F}\{x(t) * y(t)\} =$$
$$= \mathscr{F}\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau e^{-j2\pi ft}dt$$

Consideriamo ora $e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f(t-\tau+\tau)} = e^{-j2\pi f(t-\tau)}e^{-j2\pi\tau}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}e^{-j2\pi\tau}d\tau dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{x(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau\}y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)y(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}dt =$$
$$= X(f)Y(f)$$

Per **Dualità** si ottiene anche che:

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f) * Y(f) \tag{101}$$

Integrazione Data la coppia di Fourier $s(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S(f)$ e data la funzione $p(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau$ allora:

$$p(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j\pi f}S(f) + \underbrace{\frac{S(0)}{2}S(f)}_{\text{costante integrazione}} \tag{102}$$

8.4 Teorema Di Parseval (Energia)

Il teorema di Parseval per Segnali Energia (vedi paragrafo 3.3.7) afferma che la trasformata di un segnale conserva sempre l'energia, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \tag{103}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\overline{s(t)} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df\right] dt = && \text{(per eq. di Sintesi)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} e^{j2\pi ft} dt\right] df =
\end{aligned}$$

Sfruttiamo ora la seguente proprietà: $a \cdot b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)} e^{j2\pi ft} dt\right] df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt} df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\overline{S(f)} df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df
\end{aligned}$$

Intuitivamente, possiamo dire che, l'energia di un segnale è proprio uguale alla somma dell'energia trasportata da ogni contributo dei seni a tutte le frequenze della trasformata. Proprio per questo motivo $|S(f)|^2$ viene anche detta **Densità Spettrale di Energia**

8.5 Teorema di Parseval (Potenza)

Similmente al Teorema per i segnali energia, ne esiste uno simile per i segnali potenza:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \tag{104}$$

$|S(f)|^2$ viene anche detta **Densità spettrale di frequenza**

8.6 Sistemi nel Dominio delle Frequenze

Abbiamo visto che, per la proprietà fondamentale dei sistemi LTI (82), l'output di un sistema può essere visto come il risultato della convoluzione tra l'input e la risposta all'impulso. Per la proprità commutativa della convoluzione abbiamo scoperto che è vero anche il contrario, è possibile studiare un sistema studiando la risposta all'ingresso, che è un segnale. Per questo motivo ha senso estendere l'analisi in Frequenza anche per i Sistemi LTI.

Ricordando la proprietà di risposta all'impulso (6.2.3), possiamo dire che $H(f)$ sia a tutti gli effetti la trasformata di Fourier della risposta all'impulso e può essere vista come risposta ad un Fasore. Cerchiamo di definire uno schema generale dei sistemi LTI nel dominio delle frequenze e del tempo:

$$\begin{tikzcd}
 & S[\cdot]\ \text{LTI} & \\
x(t) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{F}"'] & \boxed{h(t)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{F}"'] & y(t) = x(t) * h(t) \arrow[d, "\mathscr{F}"'] \\
X(f) \arrow[r] & \boxed{H(f)} \arrow[r] & Y(f) = X(f)H(f)
\end{tikzcd}$$

L'analisi in frequenza di un sistema è importantissimo per 2 grandi proprietà:

- Dal momento che $Y(f) = X(f)H(f)$, possiamo dire che per ogni frequenza f, la risposta in frequenza $H(f)$ amplifica, diminuisce, o annulla l'ampiezza dell'ingresso $X(f)$, tuttavia $Y(f)$ continua ad essere un fasore con la stessa frequenza dell'ingresso. Possiamo dunque dire che $H(f)$ agisce da **Filtro** per le frequenze che compongono l'ingresso $x(t)$.

- Dal punto di vista di **calcolo numerico**, calcolare per tutti gli istanti la convoluzione di $x(t) * h(t)$ non è proprio semplice; Grazie all'analisi in frequenza, però, possiamo fare un'escamotage: calcolare le 2 trasformate, moltiplicarle e antitrasformarle. Operazione di gran lunga più semplice che calcolare la convoluzione.

Dall'analisi in frequenza di un sistema notiamo che:

- $|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$
- $\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$

9 Filtri

9.1 Filtri Ideali

Lezione 13
11/11/2024

I filtri ideali sono filtri descritti matematicamente e con proprietà difficilmente replicabili con esattezza tramite circuiti reali.
Consideriamo un **Sistema senza Distorsione** nella seguente forma:

$$y(t) = Ax(t - t_0) \tag{105}$$

La trasformata di questo sistema è la seguente:

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi f t_0} \qquad \text{(proprietà (94))}$$

Con $H(f) = Ae^{-j2\pi f t_0} = \begin{cases} |H(f)| = A \\ \angle H(f) = (-2\pi t_0)f \end{cases}$

9.2 Filtri Lineari Ideali

Definiamo **Filtro Lineare Ideale** un filtro nella seguente forma:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f t_0} & \text{se } f \in B \\ 0 & \text{se } f \notin B \end{cases} \tag{106}$$

Dove B è detta **Banda Passante di Un filtro**, perchè non annulla la frequenza del segnale in ingresso.

9.2.1 Filtro Passa-Basso (Ideale)

Questo filtro fa passare tutte le frequenze al di sotto di una **Frequenza di Taglio** f_T, ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f t_0} & \text{se } |f| < f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{107}$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando $A = 1, t_0 = 0$):

$$H_{LP} = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t}{2f_T}\right)$$

$$\underbrace{\text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right)}_{H(f)} \xleftrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \underbrace{2f_T\text{sinc}(2f_T t)}_{h(t)}$$

9.2.2 Filtro Passa-Alto (Ideale)

Questo filtro fa passare, al contrario, tutte le frequenze al di sopra di una **Frequenza di Taglio** f_T, ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f t_0} & \text{se } |f| \geq f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{108}$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando $A = 1, t_0 = 0$):

$$H_{HP} = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| \geq f_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1 - \text{rect}\left(\frac{t}{2f_T}\right)$$

$$\underbrace{1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right)}_{H(f)} \overset{\mathscr{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\delta(t) - 2f_T \text{sinc}(2f_T t)}_{h(t)}$$

9.2.3 Filtro Passa-Banda (Ideale)

Questo filtro fa passare tutte le frequenze entro un intervallo $[f_m, f_M]$, ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f t_0} & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{109}$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando $A = 1, t_0 = 0$):

$$H_{BP} = \begin{cases} 1 & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)$$

$$\underbrace{\text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)}_{H(f)} \overset{\mathscr{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \underbrace{2B\text{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_c t)}_{h(t)}$$

9.2.4 Filtro Arresta-Banda (Ideale)

Questo filtro fa passare, al contrario, tutte le frequenze al di fuori di un intervallo $[f_m, f_M]$, ossia:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{-j2\pi f t_0} & \text{se } \leq f_m \textbf{ o } |f| \geq f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{110}$$

Possiamo calcolare la sua **risposta all'impulso** (Considerando $A = 1, t_0 = 0$):

$$H_{BS} = \begin{cases} 1 & \text{se } f_m < |f| < f_M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1 - \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)$$

$$\underbrace{1 - \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)}_{H(f)} \overset{\mathscr{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\delta(t) - 2B\text{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_c t)}_{h(t)}$$

9.3 Filtri Reali

I filtri reali, sono invece, quelli costruiti tramite componenti circuitali. I circuiti analogici, per chiare limitazioni fisiche, non potranno mai riprodurre fedelmente i comportamenti dei filtri ideali.

9.3.1 Circuito RC

Il circuito RC corrisponde ad un **Filtro Passa-Basso Reale** per il fatto che la risposta all'impulso assomiglia a quella di un filtro passa-basso. In un circuito possiamo immaginare un impulso come una scarica di intensità infinita che attraversa il circuito in un tempo infinitesimo e carica il condensatore instantaneamente di $1A$, e poi si scarica seguendo un andamento **esponenziale decrescente** (circa). La risposta all'impulso possiamo descriverla cosi:

$$h(t) = u(t)e^{-\frac{t}{RC}} \tag{111}$$

Con R la **resistenza del circuito** e C la **capacità del condensatore**. RC viene detto **tempo caratteristico** del sistema. La trasformata di questa risposta all'impulso è la seguente:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Se consideriamo la frequenza di taglio $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$ abbiamo che:

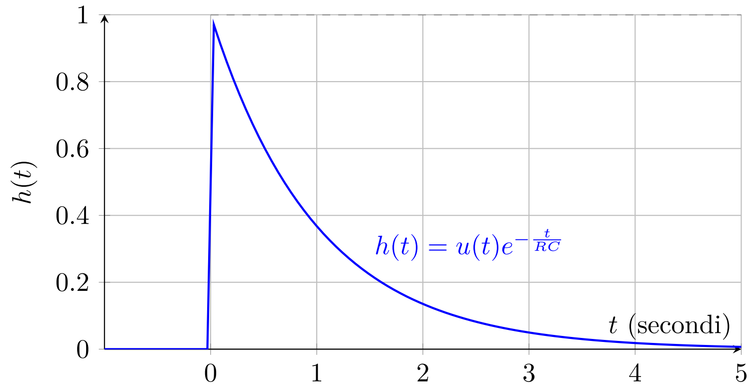
$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_T}} \tag{112}$$

Analizziamo modulo e frequenza di questa risposta in frequenza:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{se } f \ll f_T \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } f = f_T \\ \ll 1 & \text{se } f \gg f_T \end{cases} \tag{113}$$

$$\angle H(f) = \begin{cases} \approx 0 & \text{se } f \ll f_T \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } f = f_T \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } f \gg f_T \end{cases} \tag{114}$$

Il grafico di risposta all'impulso dovrebbe essere:



Dal momento che per $f > f_T$ la risposta in frequenza decresce per $1/f$ ogni volta, questo filtro viene detto **filtro del I ordine**.

Ordine n-esimo di un Filtro. Si definisce Ordine n-esimo di un Filtro, un filtro che decresce al di fuori della banda di $1/f^n$

10 Elaborazione di Segnali Digitali (DSP)

Questa branca della teoria dei segnali si occupa della conversione dal mondo analogico a digitale e viceversa e sull'elaborazione numerica dei segnali digitali. Questa branca è nata e si è sviluppata molto rapidamente perchè permette molto facilmente di manipolare i segnali come se fossero numeri, mentre con i circuiti analogici tutto ciò richiedeva uno sforzo concettuale e costi davvero elevati.

10.1 Conversione Analogico/Digitale

Il primo passo per entrare nel mondo digitale è definire la conversione di un segnale reale in discreto ma incontriamo 2 grandi **ostacoli**:

- **Istanti Infiniti**: se volessimo rendere digitale un segnale $s(t), t \in \mathbb{R}$, ci accorgeremmo che questo trasporta informazione infinita, poichè il numero di istanti t_i in un intervallo $[t_{min}, t_{max}]$ è **denso**. Dunque il primo passo per ottenere un segnale digitale è **Campionare**
- **Ampiezze Infinite**: anche se riuscissimo a confinare il segnale entro un intervallo limite di ampiezze, il numero di ampiezze disponibili sarebbe comunque infinito. Per questo motivo dovremo discretizzare anche il dominio delle ampiezze $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ detto **dizionario di quantizzazione**

Possiamo riassumere il processo di conversione nella seguente maniera:

$$s(t) \longrightarrow \boxed{\text{Campionatore}} \longrightarrow \boxed{\text{Quantizzatore}} \longrightarrow s_q[n]$$

E matematicamente ciò corrisponde a:

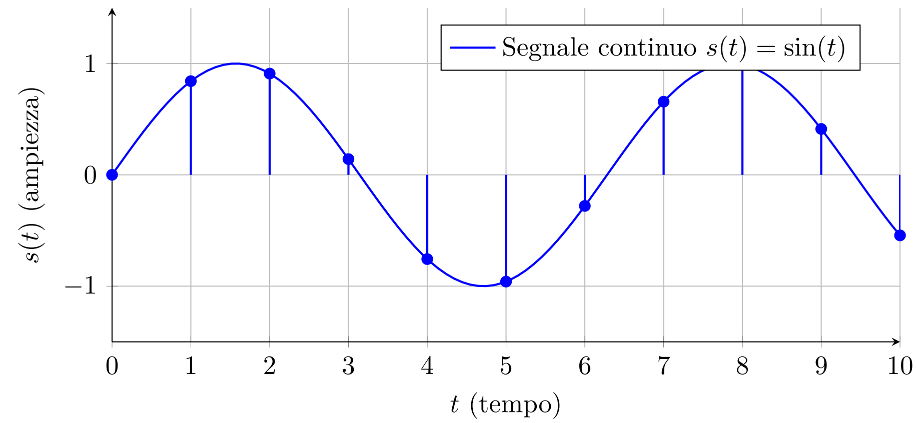
$$\begin{cases} s(t) \\ t \in \mathbb{R} \\ t_m \leq t \leq t_M \end{cases} \xrightarrow{\text{Conversione A/D}} \begin{cases} s_q(t_i) \\ t_m \leq t_i \leq t_M \\ \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

10.2 Campionamento (Sampling)

Campionare significa registrare, di infiniti istanti, solo di un segnale di alcuni istanti. In generale a noi interessa campionare il segnale per passi costanti di tempo T_S detto **Periodo di Campionamento**. Questa tecnica viene detta **Campionamento Uniforme** e possiamo formalizzarlo così:

$$s(t), t \in \mathbb{R} \longrightarrow s(nT_S) = s_n$$

Dove $n \in \mathbb{Z}$ rappresenta l'i-esimo istante.



Dal grafico possiamo riconoscere come questi siano tanti impulsi di Dirac, ognuno traslato di un certo nT_S e con una determinata ampiezza:

$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) \tag{115}$$

Grazie a ciò possiamo definire il **Campionamento Ideale**:

$$\begin{aligned} s_c(t) = s(t) \cdot \delta_{T_S}(t) = \\ &= s(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT_S)\delta(t - nT_S) \end{aligned}$$

Nella realtà, tuttavia, un campionamento del genere non è possibile (non è possibile proprio generare un impulso di dirac) queste formalizzazioni tuttavia servono per permetterci di studiare meglio i segnali digitali.

10.3 Spettro del Segnale Campionato

Grazie alla formalizzazione precedente possiamo determinare lo spettro del segnale $s_c(t)$, ossia:

$$s_c(t) = s(t)\delta_{T_S}(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} S(f) * \Delta_{T_S}(f) = S_c(f) \tag{116}$$

Dal momento che $\delta_{T_S}(t)$ possiamo vederla come una funzione periodica di periodo T_S, allora possiamo esprimere la funzione tramite lo **sviluppo in serie di fourier**:

$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t} \tag{117}$$