CONTROL LINEAL

Función de transferencia a espacios de estado.

A mano.

$$G(s) = \frac{Num}{Den} = \frac{a}{s^3 + bs^2 + cs + d}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Num}{Den} = \frac{a}{s^3 + bs^2 + cs + d}$$

$$y(s) * (s^3 + bs^2 + cs + d) = U(s) * (a)$$

$$\dddot{y} + b\ddot{y} + c\dot{y} + dy = au(t)$$

$$\dddot{y} = au(t) - b\ddot{y} - c\dot{y} - dy$$

$$\dddot{y} = au(t) - bx_3 - cx_2 - dx_1$$

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$

$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y}$

$\dot{x}_3 = \dddot{y}$

Matrices de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

Matriz de salida.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

MATLAB

```
%Funcion de transferencia, numerador = b,
denominador =a.
b = [2 5 6];
a = [1 1 2];
%Matrices de estados
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a)
sys = ss(A,B,C,D);
```

Función de transferencia a espacios de estado.

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} * \frac{z(s)}{z(s)}$$

$$y(s) = (b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) * z(s)$$

$$u(s) = (s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) * z(s)$$

$$y = b_3 \dddot{z} + b_2 \ddot{z} + b_1 \dot{z} + b_0 z$$

$$u = \ddddot{z} + a_3 \dddot{z} + a_2 \ddot{z} + a_1 \dot{z} + a_0 z$$

$$\ddddot{z} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u$$

$x_1 = z \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$
$x_2 = \dot{z} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{z} = x_3$
$x_3 = \ddot{z} \rightarrow \dot{x}_3 = \dddot{z} = x_4$

$x_4 = \dddot{z} \rightarrow \dot{x}_1 = \dddot{z}$
$= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u$

$$y = b_3 x_4 + b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = cx + bu$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + 0u$$

Espacios de estado a función de transferencia.

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) = Cx(t) + Du(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [D]u$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

1. $(SI - A)$

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad SI = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 - s & A_2 - 0\\ A_3 - 0 & A_4 - s\end{bmatrix}$$

2. $(SI - A)^{-1} = \frac{adj(SI-A)}{\det(SI-A)}$

$$\det(SI - A) = \begin{bmatrix}A_1 - s & A_2\\ A_3 & A_4 - s\end{bmatrix}$$

$$\det(SI - A) = \big((A_1 - s)(A_4 - s)\big) - \big((A_2)(A_3)\big)$$

$$adj(SI - A) = \big(cof(SI - A)\big)^T$$

$cof(SI - A) = 1. \begin{bmatrix}A_1 - s & A_2\\ A_3 & A_4 - s\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}A_1 - s & A_2\\ A_3 & A_4 - s\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}A_1 - s & A_2\\ A_3 & A_4 - s\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}A_1 - s & A_2\\ A_3 & A_4 - s\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}+ & -\\ - & +\end{bmatrix} Positivo\ par\ (+), negativo\ inpar\ (-)$$

$$\big(cof(SI - A)\big)^T = \begin{bmatrix}A_4 - s & A_2\\ A_3 & A_1 - s\end{bmatrix}$$

$$adj(SI - A) = \big(cof(SI - A)\big)^T = \begin{bmatrix}A_4 - s & A_2\\ A_3 & A_1 - s\end{bmatrix}$$

$(SI - A)^{-1} =$

$$\frac{1}{\big((A_1 - s)(A_4 - s)\big) - \big((A_2)(A_3)\big)} * \begin{bmatrix}A_4 - s & A_2\\ A_3 & A_1 - s\end{bmatrix}$$

$G(S) =$

$$\begin{bmatrix}D_1 & D_2\end{bmatrix} * \frac{1}{\big((A_1 - s)(A_4 - s)\big) - \big((A_2)(A_3)\big)} * \begin{bmatrix}A_4 - s & A_2\\ A_3 & A_1 - s\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

MATLAB

```
%Espacios de estado a función de
transferencia.
clc;
A = [-1 0.5; 0 -2]
B = [1; 0.5]
C = [1 0]
D = 0
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
tf_sys = tf(num,den)
```

Controlabilidad.

$$C = \begin{bmatrix}B & AB & AB^{n-1}\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}$$

Observabilidad.

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^{n-1}\end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}$$

MATLAB

```
%Observabilidad
Ob = obsv(sys)
rank(Ob)
%Controlabilidad
Co = ctrb(sys)
rank(Co)
co = ctrb(A,B);
Unco = length(A) - rank(co);
if Unco == 0
    men = 'Es controlable';
else
    men = 'No es controlable';
end
disp(men)

Ob = obsv(A,C);
Unobsv = length(A)-rank(Ob);
if Unobsv == 0
    men2 = 'Es observable';
else
    men2 = 'No es observable';
end
disp(men2)
```

Routh – Hurwitz.

$$T(S) = \frac{N(s)}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

T(s) será estable si:

1. D(s) no tiene raíces en el semi plano derecho.
2. D(s) no tiene raíces repetidas sobre el eje jw.
3. T(s) será asintóticamente estable si todas las raíces de D(s) están en el semiplano izquierdo del plano complejo.

$$D(s) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-4} s^{n-4} + \cdots + a_1 s + a_0$$

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
s^2	e_1	e_2		
s^1	f_1			
s^0	g_1			

$$b_1 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2})-(a_n)(a_{n-3})}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-4})-(a_n)(a_{n-5})}{a_{n-1}}$$

$$C_1 = \frac{(b_1)(a_{n-3})-(a_{n-1})(b_2)}{b_1} \quad C_2 = \frac{(b_1)(a_{n-5})-(a_{n-1})(b_3)}{b_1}$$

El número de cambios de signo en la primera columna corresponde al número de polos inestables.

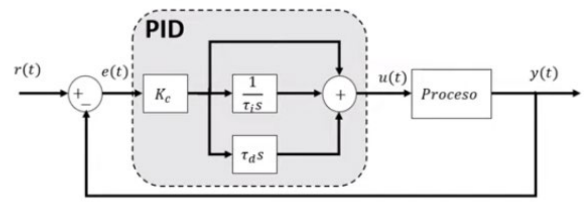
MATLAB

```
%Criterio de estabilidad Routh Hurwitz.
clc;
clear
Num = [10 2 1];
Den = [6 8 12];
roots(Den)
G = tf(Num,Den)
%Grafica de raices, polos y ceros
pzmap(G)
%Grafica de impulso
impulse(G)
```

Ziegler – Nichols

Lazo abierto.

Control PID.



Función de transferencia del PID.

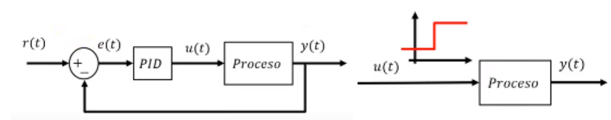
$$G_C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right) \rightarrow G_C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Si el controlador recibe la señal de error e(t) como entrada, la salida del controlador u(t) es dada por:

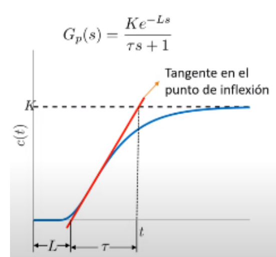
$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^t e(t)dt + \tau_d \frac{de(t)}{dt}\right]$$

METODO 1.

Se realiza con el sistema en lazo abierto.



$$Primer\ orden\ con\ retardo.\ G_p(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s+1}$$



$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)$$

Control	K_P	τ_i	τ_d
P	$\frac{\tau}{KL}$	∞	0
PI	$0{,}9\frac{\tau}{KL}$	$\frac{L}{0{,}3}$	0
PID	$1{,}2\frac{\tau}{KL}$	2L	0,5L

Factor de incontrolabilidad. $0.1 \leq \frac{L}{\tau} \leq 0.3$

Para PID $G(s) = 0.6\tau * \frac{\left(s+\frac{1}{L}\right)^2}{s}$

Para controladores analogicos y no digitales. Sii el periodo de muestreo T_s del sistema es grande, las formulas anteriormente vistas pueden generar un declino mayor al 25% tendiendo para la inestabilidad. Una opcion es aumentar el retardo a un valor igual a la mitad del periodo de muestreo.

$$L' = L + \frac{T_s}{2}$$

Antes de utilizar los valores de la tabla.

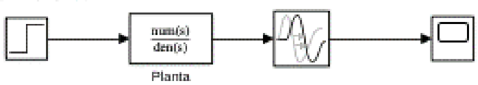
Muchas veces para mejorar la respuesta del sistema, deberemos disminuir la ganancia del controlador. Una práctica común es dividir la ganancia del controlador a la mitad para obtener una respuesta más suave.

$$\frac{K_p}{2}$$

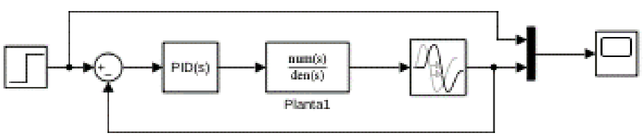
$$Si\ \left(\frac{L}{\tau}\right)\ es\ grande, es\ dificil\ de\ controlar.$$

MATLAB

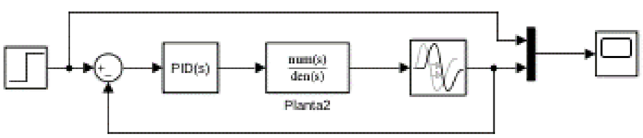
Lazo Abierto



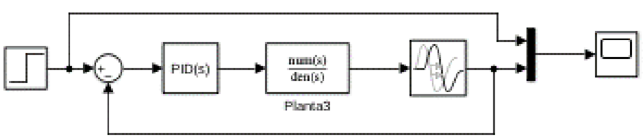
Lazo Cerrado Control P



Lazo Cerrado Control PI

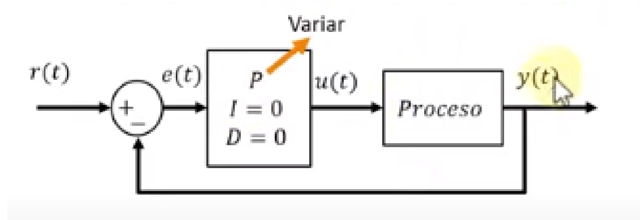


Lazo Cerrado Control PID



Ziegler – Nichols

Metodo 2. Se realiza en lazo cerrado.



Ganancia limite, ganancia ultima o ganancia critica.

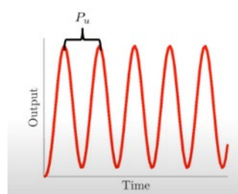
$$K_u$$

Y a partir del grafico Podemos calcular el period critico.

$$P_u$$

O apartir de la frecuencia.

$$P_u = \frac{2\pi}{W_u}$$



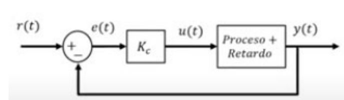
$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)$$

Control	K_p	τ_i	τ_d
P	$0{,}5K_u$	∞	0
PI	$0{,}45K_u$	$\frac{1}{1{,}2}P_u$	0
PID	$0{,}6K_u$	$0{,}5P_u$	$0{,}125P_u$

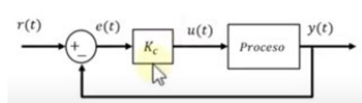
Para PID $$G_c(s) = 0.075K_uP_u\frac{\left(s+\frac{4}{P_u}\right)^2}{s}$$

Cuando el Sistema llega a la ganancia critica o ganancia limite, indica que esta el borde de la inestabilidad. Gráficamente en el diagrama de polos y ceros, nos indica que los polos del Sistema de lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario y un pequeño incremento en la ganancia provocara la inestabilidad.

Para que el sistema oscile, deberá tener un orden igual o superior a 3 (tener polos complejos conjugados, por ejemplo), o por lo menos deberá tener un retardo de tiempo, que hará que los polos crucen por el eje imaginario.

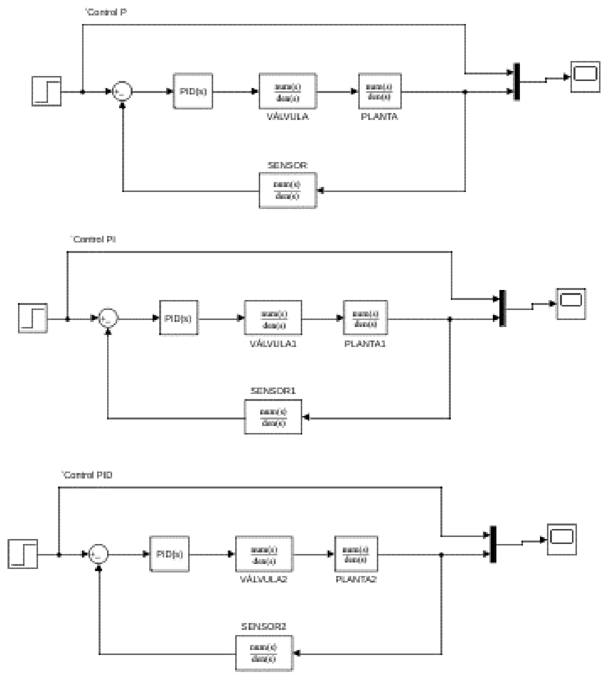


$$e^{-Ls} = \frac{1-\frac{L}{2s}}{1+\frac{L}{2s}}$$



$$G_{LC} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

MATLAB


Control P
PID(s)
VÁLVULA
PLANTA
SENSOR
Control PI
PID(s)
VÁLVULA1
PLANTA1
SENSOR1
Control PID
PID(s)
VÁLVULA2
PLANTA2
SENSOR2