

Algebra lineal aplicada

Tercera Edición

BEN NOBLE
University of Wisconsin

JAMES W. DANIEL
University of Texas at Austin

Traducción:
Virgilio González Pozo
Ingeniero Químico-Consultor

Revisión Técnica:
Mary Glazman Nowolski
Maestra en Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S. A.

México, Englewood Cliffs, Nueva Delhi, Londres,
Río de Janeiro, Sidney, Singapur, Tokio, Toronto

160415

EDICION EN ESPAÑOL

EDITOR:
SUPERVISOR DE
TRADUCCION Y CORRECCION
DE ESTILO:
SUPERVISOR DE PRODUCCION:
DIRECTOR:

Hugo Acevedo Espinosa
F. Antonio Sánchez y Herrera
Juan Carlos Hernández García
Raymundo Cruzado González

QA 18 11

N6-29

C. 4

EDICION EN INGLES

Editorial/production: Nicholas C. Romanelli
Manufacturing buyer: Harry Baisley

ALGEBRA LINEAL APLICADA

Traducido de la tercera edición en inglés de:

APPLIED LINEAR ALGEBRA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio o método sin autorización escrita del editor

**DERECHOS RESERVADOS ©1989 respecto a la primera edición en español por
PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.**

Enrique Jacob No. 20
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

ISBN 968-880-173-9

Original English language edition published by
Copyright © MCMLXXXVIII by Prentice-Hall, Inc.
All Rights Reserved

ISBN 0-13-041260-0

IMPRESO EN MEXICO/PRINTED IN MEXICO



PROGRAMAS EDUCATIVOS
CALZ. CHABACANO No. 65 LOCAL A
COL. ASTURIAS, DELEG. CUAUHTEMOC, D.F.
C.P. 06850

1000



1995



A Denise, Anna y John Ben

A Adam y Joshua, y Ann y Susan

Contenido

PREFACIO xi

SOBRE EL USO DE LAS COMPUTADORAS xv

Capítulo 1: ALGEBRA MATRICIAL 1

- 1.1 Introducción 1
- 1.2 Igualdad, suma y multiplicación por un escalar 3
- 1.3 Multiplicación de matrices 9
- 1.4 Inversa de una matriz 23
- 1.5 Matrices separadas 36
- 1.6 Problemas varios 44

**Capítulo 2: ALGUNAS APLICACIONES SIMPLES
Y PREGUNTAS 46**

- 2.1 Introducción 46
- 2.2 Competencia entre negocios: cadenas de Markov 47
- 2.3 Crecimiento de la población: potencias de una matriz 55
- 2.4 Equilibrio en redes: ecuaciones lineales 60
- 2.5 Sistemas oscilatorios: eigenvalores 66
- 2.6 Modelos generales: mínimos cuadrados 73
- 2.7 Planeación de producción: programas lineales 81
- 2.8 Problemas varios 87

**Capítulo 3: SOLUCION DE ECUACIONES Y CALCULO
DE INVERSAS: METODOS 90**

- 3.1 Introducción 90
- 3.2 Solución de ecuaciones mediante la eliminación de Gauss 91

- 3.3 Existencia de soluciones a sistemas de ecuaciones:
algunos ejemplos y procedimientos 104
- 3.4 Cómo encontrar una inversa mediante la eliminación de Gauss 109
- 3.5 Operaciones de renglón y matrices elementales 112
- 3.6 Selección de pivotes y eliminación de Gauss en la práctica 117
- 3.7 La descomposición-LU 127
- 3.8 Medidas de trabajo y solución de sistemas ligeramente
modificados 138
- 3.9 Programas computacionales para la eliminación de Gauss 147
- 3.10 Problemas varios 150

**Capítulo 4: SOLUCION DE ECUACIONES Y CALCULO
DE INVERSAS: TEORIA 153**

- 4.1 Introducción 153
- 4.2 Forma reducida de Gauss y rango 154
- 4.3 Posibilidad de solución y conjuntos de soluciones
para sistemas de ecuaciones 162
- 4.4 Inversas y rango 171
- 4.5 Determinantes y sus propiedades 174
- 4.6 Representación de inversas y soluciones mediante
el uso de determinantes 185
- 4.7 Problemas varios 190

Capítulo 5: VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES 194

- 5.1 Introducción; vectores geométricos 194
- 5.2 Concepto general de espacios vectoriales 201
- 5.3 Dependencia lineal e independencia lineal 208
- 5.4 Base, dimensión y coordenadas 216
- 5.5 Bases y matrices 230
- 5.6 Longitud y distancia en espacios vectoriales: normas 240
- 5.7 Ángulo en los espacios vectoriales: productos interiores 245
- 5.8 Proyecciones ortogonales y bases: espacios generales
y Gram-Schmidt 252
- 5.9 Proyecciones ortogonales y bases: \mathbb{R}^p , \mathbb{C}^p , QR
y mínimos cuadrados 261
- 5.10 Problemas varios 274

Capítulo 6: TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES 277

- 6.1 Introducción; transformaciones lineales 277
- 6.2 Representaciones matriciales de transformaciones lineales 286

6.3	Normas de transformaciones lineales y matrices	292
6.4	Inversas de matrices perturbadas: condición de ecuaciones lineales	299
6.5	Problemas varios	308

Capítulo 7: EIGENVALORES Y EIGENVECTORES: UNA PANORAMICA 310

7.1	Introducción	310
7.2	Definiciones y propiedades básicas	316
7.3	Eigensistemas, factorizaciones y representaciones de transformaciones	326
7.4	Transformaciones de semejanza; forma de Jordan	332
7.5	Matrices unitarias y semejanza unitaria; formas de Schur y diagonal	338
7.6	Programas de computadora para encontrar eigensistemas	351
7.7	Condición del problema de los eigensistemas	353
7.8	Problemas varios	358

**Capítulo 8: EIGENSISTEMAS DE MATRICES SIMETRICAS, HERMITIANAS
Y NORMALES, CON APLICACIONES** 361

8.1	Introducción	361
8.2	Forma y descomposición de Schur; matrices normales	362
8.3	Eigensistemas de matrices normales	368
8.4	Aplicación: descomposición en valores singulares	375
8.5	Aplicación: mínimos cuadrados y pseudoinversa	385
8.6	Problemas varios	392

**Capítulo 9: EIGENSISTEMAS DE MATRICES ARBITRARIAS GENERALES,
CON APLICACIONES** 394

9.1	Introducción	394
9.2	Forma de Jordan	396
9.3	Eigensistemas para matrices arbitrarias generales	404
9.4	Aplicación: evolución de sistemas discretos y potencias de matrices	409
9.5	Aplicación: evolución de sistemas continuos y exponenciales de matrices	419
9.6	Aplicación: solución iterativa de ecuaciones lineales	430
9.7	Problemas varios	437

**Capítulo 10: FORMAS CUADRATICAS Y CARACTERIZACIONES VARIACIONALES
DE EIGENVALORES** 440

10.1	Introducción	440
10.2	Formas cuadráticas en \mathbb{R}^2	443
10.3	Formas cuadráticas en \mathbb{R}^p y en \mathbb{C}^p	450

x Contenido

10.4	Valores extremos de formas cuadráticas: el principio de Rayleigh	459
10.5	Valores extremos de formas cuadráticas: el principio de minimax	468
10.6	Problemas varios	474

Capítulo 11: PROGRAMACION LINEAL 479

11.1	Análisis de un ejemplo sencillo	479
11.2	Un programa lineal general	495
11.3	Resolución de un programa lineal general	501
11.4	Dualidad	514
11.5	Problemas varios	524

Apéndice 1: RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS 529

Apéndice 2: BIBLIOGRAFIA 553

INDICE DE SIMBOLOS 556

INDICE ANALITICO 559

Prefacio

Plan general

El álgebra lineal es parte esencial de la herramienta matemática que se requiere en la actualidad para el estudio de muchas áreas de las ciencias del comportamiento, naturales, físicas y sociales, de la ingeniería, los negocios, la computación, y, por supuesto, de las matemáticas puras y aplicadas. Nuestro objetivo en este libro es el de desarrollar los conceptos fundamentales del álgebra lineal, haciendo hincapié en los que tienen mayor importancia práctica e ilustrando su aplicabilidad mediante numerosos ejemplos y ejercicios. Sin embargo, aunque se expongan aplicaciones con propósitos ilustrativos y a fin de despertar el interés del lector, nuestra meta principal es presentar matemáticas que puedan aplicarse.

Hemos tenido gran cuidado en presentar la teoría del álgebra lineal de un modo más bien general, aunque desde el punto de vista más concreto posible. Por consiguiente, comenzamos con el manejo concreto del álgebra lineal y vectorial (capítulo 1) y con la eliminación de Gauss (capítulo 3) antes de la *teoría* de las ecuaciones lineales (capítulo 4) o de las nociones abstractas de los espacios vectoriales (capítulo 5) y de las transformaciones lineales (capítulo 6). De manera similar, los eigensistemas y varias descomposiciones y formas canónicas relacionadas se presentan (capítulo 7 y, con más detalle, en los capítulos 8 y 9) como herramientas para facilitar el estudio de las transformaciones lineales que modelan el comportamiento de sistemas complicados.

Además de presentar brevemente cierto número de aplicaciones en todo el libro, hemos reunido en el capítulo 2 un conjunto especial de aplicaciones para motivar el estudio del material posterior; suponiendo una familiaridad del lector con el álgebra matricial básica del capítulo uno. Por otra parte, no sólo mostramos cómo surgen las matrices en la práctica sino que también formulamos preguntas acerca de las matrices y de sus propiedades que despiertan interés en ideas ulteriores. Los capítulos posteriores hacen referencia a estos ejemplos a manera de estímulo; y para quienes prefieran omitirlo, el capítulo dos es de hecho independiente del resto del libro.

Todo el texto se desarrolla a partir de la noción de las operaciones elementales de renglón y de la eliminación de Gauss. El contenido del capítulo 3 es

fundamental para casi todos los temas teóricos como aplicados. Es *absolutamente esencial* que el estudiante aprenda estas técnicas.

Novedades en la tercera edición

Creamos esta nueva edición con el objetivo principal de facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el libro. A excepción de algunos agregados, el contenido es prácticamente el mismo que el de la segunda edición; sin embargo, se ha rediseñado la presentación para lograr mejor estilo y más acercamiento. Las formas triangulares producidas por la eliminación de Gauss con frecuencia reemplazan a las de renglón reducido que se destacan en el trabajo teórico de las ediciones anteriores.

Se han aumentado los conjuntos de problemas, pues esta edición (tercera del inglés, primera en español) contiene más de 1100 problemas, a diferencia de los pocos más de 600 de la segunda edición del inglés. Al final de cada sección, aparece un conjunto de problemas en lugar de estar esparcidos a través del texto como ejercicios (mezcla de ejemplos y problemas). El primer apéndice contiene respuestas o sugerencias para más de un tercio de los problemas (indicados con el símbolo ▷ que precede al número del problema).

Enumeramos el material expuesto de manera consecutiva para que, por ejemplo, el enunciado (4.15) se encuentre entre el ejemplo 4.14 y el **teorema clave 4.16**. En las secciones más largas aparecen lineamientos que indican cuáles problemas pueden resolverse utilizando el material presentado hasta ese punto. Al inicio del capítulo 1 aparece también un breve repaso sobre los números complejos; los resultados se indican por separado para los casos complejos y reales para quienes deseen concentrarse en uno u otro.

En esta edición aparecen muchos temas en el texto principal en vez de aparecer únicamente en la sección de problemas. Se le ha dado, por tanto, mayor importancia al teorema de Cayley-Hamilton, el teorema de Perron-Frobenius, la descomposición-LU, las proyecciones ortogonales y proyección matricial, mejor aproximación, frecuencias fundamentales de sistemas oscilatorios, y así sucesivamente. Asimismo se ha incluido material nuevo, con temas tales como transformaciones adjuntas, métodos similares al de Karmarkar para la programación lineal, teoría de las desigualdades lineales, convergencia de sucesiones de vectores y matrices e isomorfismos.

Se han añadido ejemplos y algunos problemas (alrededor del 6 %) que hacen uso explícito de la programación por computadora para cálculos matriciales. Aunque el libro aun pueda utilizarse completamente independiente de las computadoras, quienes deseen aprovechar la programación por microcomputadora y su procesador central encontrarán que es fácil hacerlo. Para mayor información al respecto, véase el material que sigue a este prefacio.

Nos damos cuenta de que este libro se ha utilizado en sus dos ediciones previas para varios cursos. La nueva edición se ha diseñado para continuar con esta opción, que por supuesto delega especial responsabilidad al instructor para seleccionar el material apropiado. Se dan en seguida algunas indicaciones al

respecto. Aquellos interesados en el uso de las computadoras para apoyo de este texto, también deberán examinar la sección antes mencionada.

Uso para los cursos elementales de álgebra lineal teórica

Quienes deseen hacer énfasis en las comprobaciones, según el enfoque clásico del tipo teorema-demostración, pueden hacerlo fácilmente. La teoría es fundamental para el álgebra lineal aplicada y por tanto se presenta con gran cuidado (y afecto). El curso estándar de segundo año, con duración de un semestre, cubriría el capítulo 1 sobre álgebra matricial, secciones 1 a 5 del capítulo 3 sobre las técnicas para las ecuaciones e inversas, la mayor parte del capítulo 4 sobre la teoría para las ecuaciones e inversas (incluyendo determinantes); las secciones 1, 5, 7 y 8 del capítulo 5 sobre espacios vectoriales; las primeras dos secciones sobre transformaciones lineales en el capítulo 6, y posiblemente las primeras tres secciones sobre eigensistemas en el capítulo 7. Esperamos que tales cursos también incluyan algún material orientado hacia la aplicación: la sección del capítulo 2 que ilustra una aplicación, la descomposición-*LU* de la sección 3.7, y las normas y mínimos cuadrados de las secciones 5.6 y 5.9 son buenas posibilidades.

Uso para los cursos elementales de álgebra lineal aplicada

Junto con las versiones intermedia/avanzada, los cursos introductorios de álgebra lineal han sido el contexto principal en los cuales se han utilizado las dos ediciones previas de este libro durante cerca de veinte años. Hay muchas variaciones posibles en estos cursos, dependiendo de las áreas de aplicación que se desean enfatizar (ingeniería? ciencias sociales? etcétera) y cuántas demostraciones se deberán llevar a cabo (ninguna? teoremas clave seleccionados? etcétera). A continuación bosquejamos un procedimiento básico que ofrece una buena selección.

El capítulo 1 sobre álgebra matricial deberá cubrirse cuidadosamente, seguido por dos aplicaciones del capítulo 2 (seleccionamos los que se relacionan con los temas que más adelante se enfatizan). Procederíamos después con el capítulo 3 sobre los métodos para ecuaciones e inversas, seguido por un ligero tratamiento de la teoría en el capítulo 4 (especialmente en lo referente a determinantes); la mayor parte del tiempo se usaría para explicar la teoría, con una demostración instructiva ocasional presentada con detalles.

Haciendo hincapié en los hechos, más que en las demostraciones, se cubrirían espacios vectoriales y transformaciones lineales en los capítulos 5 y 6 (la mayoría de las secciones); dándole bastante tiempo a los estudiantes para que retengan los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Ya que el capítulo 7 presenta un amplio repaso de la teoría y uso de los eigensistemas, por lo general lo cubriríamos en lugar de los capítulos 8 y 9, que son más detallados y especializados, aunque estos capítulos sean una buena alternativa para quienes deseen ejercitarse en tipos particulares de aplicaciones.

Dependiendo de la disponibilidad de tiempo, podríamos introducir algunos temas de capítulos posteriores: mínimos cuadrados (sección 8.5), ecuaciones diferenciales (sección 9.5), formas cuadráticas (sección 10.3) o programas lineales (sección 11.1).

Esto cubre una considerable cantidad de material y la clave para hacerlo radica en darle importancia plena a los *conceptos y técnicas*; con este método el material podrá cubrirse de manera considerablemente rápida.

Uso para cursos subsecuentes de álgebra lineal aplicada

En muchos cursos se ha utilizado nuestro libro por estudiantes que ya tienen alguna introducción al álgebra lineal –frecuentemente en un curso. En tales cursos pueden usarse dos o tres temas del capítulo 2 como primera motivación, seguidos por un rápido repaso de los capítulos 1, 3 y 4 (depende de lo que el profesor crea que el estudiante recuerda); las secciones posteriores del capítulo 3 sobre aspectos prácticos de la solución de ecuaciones –en particular la descomposición-*LU*–rara vez son del conocimiento del estudiante y deberán estudiarse a conciencia. Después de repasar brevemente la información básica sobre espacios vectoriales en la primera mitad del capítulo 5, nos concentraríamos en el material referente a normas, productos interiores, proyecciones y mínimos cuadrados. De manera análoga en el caso del capítulo 6 que presenta material sobre normas y matrices cambiadas y que muy probablemente resulte nuevo.

La base de tal curso deberá fundamentarse del capítulo 7 al 11. De ello depende igualmente el interés de los estudiantes y si aprendieron eigensistemas en sus cursos previos de álgebra lineal.

Ben Noble y James W. Daniel

Sobre el uso de las computadoras

No partimos del supuesto de que los estudiantes o instructores usarán computadoras para apoyar su aprendizaje o enseñanza del álgebra lineal. Como siempre ha sido cierto, con las ediciones anteriores, este libro puede utilizarse independientemente del aspecto computacional, e independientemente del interés del estudiante por la computación. Sin embargo, observamos que cada año es mayor el número de estudiantes en nuestras clases que tienen conocimientos de computación y están acostumbrados a utilizar computadoras –procesadores centrales o microcomputadoras– para ayudarse en sus trabajos de varias maneras, incluyendo procesamiento de palabras, cálculo, análisis de datos, y así por el estilo.

Esta edición de *Algebra lineal aplicada* se ha escrito para facilitar, a quienes lo deseen, el aprendizaje y enseñanza interactivos con la computadora.

Ejemplos y problemas

Para reflejar el hecho de que actualmente se realizan cálculos científicos en computadoras, muchos de nuestros ejemplos numerados se basan en su uso. *Dicho material es independiente: suponemos que no existe un conocimiento computacional por parte del estudiante o del instructor.* El hecho de que utilicemos computadoras simplemente nos permite considerar y presentar ejemplos mucho más reales e interesantes, que si tuviéramos que restringirnos a ejemplos arbitrarios que pueden ser resueltos enteramente a mano. Tales ejemplos se indican en el margen por el símbolo \mathfrak{M} .

De los más de 1100 problemas que presentamos, aproximadamente el 6% se señala con el símbolo \mathfrak{M} . La solución de estos problemas requiere tener acceso a material de computación, en particular a programas diseñados para facilitar los cálculos matriciales. *Los estudiantes e instructores no deberán de escribir sus propios programas para la solución de problemas de álgebra lineal –los problemas involucran aspectos sutiles que no son obvios al inexperto.* Se disponen de programas magníficos esencialmente donde se pide: véanse secciones 3.9 y 7.6 sobre cómo obtener programas de alta calidad para los cómputos matriciales. Ya que en varias instituciones educativas se provee de centros de microcomputado-

ras para el uso del estudiante, tratamos con un poco más de detalles algunos programas excelentes que están disponibles para usarse en este medio.

MATLAB

Nuestro símbolo \mathfrak{M} proviene de la letra inicial en MATLAB, que significa laboratorio matricial. A lo largo de algunos años, MATLAB fue desarrollado por Cleve Moler; al principio para la enseñanza en cursos de álgebra lineal y análisis numérico, utilizando programas basados en aquéllos de los proyectos LINPACK y EISPACK (por sus siglas en inglés), descritos en las secciones del texto ya mencionadas. MATLAB salió al mercado, y fue ampliamente distribuido en versión FORTRAN para computadoras de marco principal. Varias organizaciones comerciales desarrollaron versiones mejoradas para aplicaciones especiales tales como la teoría de control.

El siguiente paso evolutivo fue el PC-MATLAB –una versión de la segunda generación; altamente optimizada del MATLAB, desarrollada especialmente para el uso en la microcomputadora IBM PC. A éste, a su vez, le han seguido otras versiones para microcomputadora para usarse con otros sistemas operativos y otras máquinas. Para simplificar, nos referimos a todo el aspecto de la programación –desde marcos principales hasta las últimas versiones de microcomputadoras– por el término genérico “MATLAB”.

Personalmente hemos encontrado el MATLAB fácil de aprender (especialmente para quien se interese en los sistemas de computación), fácil de usar y muy completo. Aún más, el MATLAB *puede encontrarse en versiones especiales a costos bastante rebajados para su uso en la instrucción*: [contacte con The Math Works, Inc., Suite 250, 20 North Main St., Sherborn, MA 01770, (617) 653-1415]. Uno no necesita aprender a programar con este sistema altamente flexible e interactivo. Las matrices se insertan fácilmente; tecleando

$$A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6; 7 \ 8 \ 9]$$

se crea precisamente la matriz de 3×3 que se espera. Tecleando

$$\text{inv}(A)$$

produce su inversa,

$$\text{eig}(A)$$

su valor característico,

$$\text{lu}(A)$$

su descomposición-*LU*, y así sucesivamente. Es por lo tanto tan fácil de usar que es excelente para la asociación aun para un curso primario de álgebra lineal. Por

otra parte, es una herramienta importante para cualquiera cuyo trabajo requiere de cálculos matriciales, ya sea que involucren ecuaciones, sistemas característicos, mínimos cuadrados, análisis de datos, procesamiento de señales o lo que sea.

Nos gusta el MATLAB. Se lo recomendamos. Y no tenemos ningún interés de tipo financiero en su éxito.

Algebra matricial

Este primer capítulo es fundamental: su meta es la de dar a conocer las matrices y aquellas manipulaciones algebraicas básicas que el estudiante debe de entender **completamente** antes de seguir adelante. Es importante practicar la adición y multiplicación de matrices hasta que estas operaciones se vuelvan automáticas. El teorema 1.44 es un **teorema clave**, que proporciona la base para métodos computacionales posteriores; la demostración del teorema 1.35 es una **demostración clave** porque ilustra un argumento general útil.

1.1 INTRODUCCION

Las matrices representan herramientas convenientes para la sistematización de cálculos laboriosos, ya que proveen una notación compacta para almacenar información y describir relaciones complicadas.

- (1.1) **Definición.** Una matriz $p \times q$ (léase “ p por q ”) es un arreglo rectangular A de pq números (o símbolos que representan números) encerrados en corchetes cuadrados; los números en el arreglo se llaman *elementos* y están colocados en p *renglones* horizontales y q *columnas* verticales. El *elemento* (i, j) se denota como $\langle A \rangle_{ij}$ y es lo que se encuentra en el cruce del i -ésimo renglón con la j -ésima columna, enumerando las columnas de izquierda a derecha y los renglones de arriba abajo; si A es de $p \times 1$ (una *matriz columna*) o de $1 \times q$ (una *matriz renglón*), entonces se utiliza $\langle A \rangle_i$ en vez de $\langle A \rangle_{i1}$ o $\langle A \rangle_{1i}$.

Las matrices se denotan con letras negritas A , x , y así sucesivamente. Mediante el último dispositivo nemónico de describir los elementos (i, j) de una matriz utilizando subíndices con letras minúsculas de la letra negrita mayúscula que denota a la matriz, escribimos la matriz general $p \times q$ como

$$(1.2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}.$$

Los elementos de las matrices pueden ser números reales o complejos; aquellos lectores que estén inseguros sobre las propiedades básicas de los números complejos, pueden consultar el breve repaso del final de esta página. Debido a que frecuentemente surgen matrices con varias estructuras especiales, introducimos alguna terminología para describirlas.

(1.3) **Definición.**

- a) Una *matriz cuadrada* \mathbf{A} es $p \times q$ con $p = q$; los elementos (i, i) para $1 \leq i \leq p$ forman la *diagonal principal* de la matriz \mathbf{A} .
- b) Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada cuyos elementos que *no* están en la diagonal principal son iguales a cero. Por $\text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ se entiende que la matriz diagonal $p \times p$ cuyos elementos (i, i) equivalen a d_i para $1 \leq i \leq p$.
- c) Una *matriz triangular inferior* \mathbf{L} de $p \times q$ satisface $\langle \mathbf{L} \rangle_{ij} = 0$ si $i < j$, para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq q$.
- d) Una *matriz triangular superior* \mathbf{U} de $p \times q$ satisface $\langle \mathbf{U} \rangle_{ij} = 0$ si $i > j$, para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq q$.
- e) Una *matriz triangular inferior* o *superior*– *unidad* \mathbf{T} es una matriz triangular inferior (o superior) que satisface $\langle \mathbf{T} \rangle_{ii} = 1$ para $1 \leq i \leq \min(p, q)$.

El uso de la notación matricial nos permite considerar un arreglo de muchos números como un solo objeto, designado por un solo símbolo. Se pueden expresar así de manera concisa relaciones entre los grandes conjuntos de números que surgen con frecuencia en las aplicaciones. Entre más complicado es el problema, más útiles resultan las matrices. Quizá sea aún más importante el hecho de que las matrices proporcionan conocimientos que no podrían obtenerse fácilmente –si es que se pudiera– mediante otros medios.

Un breve repaso sobre los números complejos. Recuerde que un *número complejo* tiene la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i denota $\sqrt{-1}$. Por lo tanto, $3 + 2i$, $-6 + 4.7i$, y $e - \pi i$ son números complejos. También lo son todos los números reales r –ya que son iguales a $r + 0i$ – y todos los *números imaginarios puros* $t i$ para t real –ya que son iguales a $0 + ti$. Los números complejos se suman y multiplican de manera muy parecida a los números reales, pero se debe tener en cuenta que $i \cdot i = -1$. Así

$$\begin{aligned} (3 - 2i)(-5 + 7i) &= -15 + 21i + 10i - 14ii = -15 + 31i - 14(-1) \\ &= -1 + 31i. \end{aligned}$$

El *conjugado* \bar{z} de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo $\bar{z} = a - bi$. La *magnitud* $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ se define como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por lo tanto para $z = 3 - 2i$ tenemos

$$\bar{z} = 3 + 2i \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{13}.$$

PROBLEMAS 1.1

▷ 1. Sea $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + 5i$, $z_3 = 2i$, y $z_4 = -7$. Evalúe lo siguiente, escribiendo cada respuesta en la forma estándar $a + bi$, con a y b reales.

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| a) $z_1 + 2z_2$ | b) $(1 + i)\bar{z}_1$ | c) $z_3 z_4$ |
| d) $\bar{z}_1 \bar{z}_3$ | e) $\bar{z}_1 z_3$ | f) $(z_2)^2$ |
| g) $(z_1)^3$ | h) $ z_1 $ | i) $ i\bar{z}_2 $ |
| j) $1/z_2$ | k) z_1/z_3 | |

2. Demuestre que para todos los números complejos z y w , $\bar{z}\bar{w} = \bar{z}\bar{w}$.

3. a) ¿Cuántos elementos hay en una matriz de $p \times q$?
 b) ¿Cuántos en su primer renglón?
 c) ¿Cuántos en su última columna?

▷ 4. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & x \\ 2 & y & -3 \end{bmatrix}.$$

Dé cada uno de los siguientes:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) El elemento (1,2) de \mathbf{A} | b) el elemento (2, 2) de \mathbf{B} |
| c) El elemento (2, 2) de \mathbf{A} | d) $\langle \mathbf{A} \rangle_{21}$ |
| e) $\langle \mathbf{B} \rangle_{23}$ | f) $\langle \mathbf{A} \rangle_{32}$ |
5. Escriba la matriz general \mathbf{A} de 3×2 con elementos a_{ij} en la forma (1.2).
 Escriba la matriz general \mathbf{B} de 2×3 con elementos b_{ij} en la forma (1.2).
6. Escriba la matriz general de 3×3 de cada tipo que se menciona en la definición 1.3.

1.2 IGUALDAD, SUMA Y MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

En la mayoría de las aplicaciones, las matrices deben combinarse de varias formas, de manera similar a como se combinan los números en aritmética. De

hecho, se necesita de conceptos que correspondan a las operaciones aritméticas básicas de los números. En esta sección se define la suma, la resta, la negación, una forma de multiplicación, y –la clave para todos ellos– la igualdad.

- (1.4) **Definición.** Dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son *iguales* si y sólo si:

- \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen el mismo número de renglones y el mismo número de columnas.
- Todos los elementos correspondientes son iguales: $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} \rangle_{ij}$ para toda i y j .

Esta definición utiliza la frase “si y sólo si”, que se verá a lo largo del libro. Recuerde que si P representa algún enunciado o condición y Q representa otro, entonces “ P si y sólo si Q ” significa: ya sea que P o Q sea verdadero, también el otro lo será; si cualquiera de los dos es falso, el otro también lo es. Como gemelos siameses, P y Q siempre aparecen juntos.

Ahora podemos definir la suma matricial.

- (1.5) **Definición.** Dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se pueden sumar si y sólo si tienen el mismo número p de renglones y el mismo número q de columnas. La *suma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ de dos matrices $p \times q$ es la matriz $p \times q$ que se obtiene sumando los elementos de \mathbf{A} y \mathbf{B} correspondientes. En símbolos,

$$\langle \mathbf{A} + \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{B} \rangle_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq q.$$

- (1.6) **Ejemplo.** Suponga que las matrices de 2×2 \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & x+2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9+y & x \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Propiedades de la suma de matrices

Para las dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} anteriores, se vio que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Ya que la suma de matrices se realiza sumando sus elementos correspondientes (que son números) y ya que $a + b = b + a$ vale para los números a y b puede esperarse que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ sea igual a $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ en el caso de las *matrices*. Una demostración rigurosa de este hecho debe ser un argumento que sea válido para todas las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , para todo entero positivo p , para todo entero positivo q , para todas las matrices \mathbf{A} de $p \times q$, y para todas las matrices \mathbf{B} de $p \times q$. El ejemplo 1.6 no es una demostración general; sólo es válido cuando $p = 2$ y $q = 2$, y aquellas matrices específicas \mathbf{A} y \mathbf{B} dados en él.

El argumento

$$[u \ v] + [x \ y] = [u+x \ v+y] = [x+u \ y+v] = [x \ y] + [u \ v]$$

tampoco es una demostración general; sólo prueba el resultado para matrices arbitrarias de 1×2 (“arbitrarias” ya que u, v, x, y , pueden tomar cualquier valor posible). Más adelante se da una demostración general. Aunque sean esenciales algunos ejemplos específicos para nuestra comprensión, de las matemáticas, debemos tener en mente la diferencia entre una demostración general y un ejemplo específico.

Notación convencional importante. Generalmente omitimos enunciar los números de renglones y de columnas en los teoremas de las matrices, suponiendo que son tales, que todas las operaciones indicadas tienen sentido.

- (1.7) **Teorema** (leyes de la adición). La suma de matrices es tanto *conmutativa* como *asociativa*. Esto es:

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (ley conmutativa)
- b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (ley asociativa)

DEMOSTRACION

- a) La clave consiste en demostrar que $\langle \mathbf{A} + \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} + \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para toda i y j . Para demostrar esto se utiliza la definición de la suma de matrices y la conmutatividad de la suma *de los números*:

$$\langle \mathbf{A} + \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = (\text{¿por qué?}) \langle \mathbf{B} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} + \mathbf{A} \rangle_{ij}$$

para toda i y j ; hemos demostrado que la adición de matrices es conmutativa.

- b) Problema 5. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 6.

El cero y negación para las matrices

Hay más que aprender del ejemplo 1.6. Nótese que la matriz **C**, cuyos elementos son iguales a 0, se comporta de manera muy parecida a como lo hace el *número cero* con respecto a la suma: $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{A}$ para todas las matrices **A**, 2×2 , al igual que $a + 0 = a$. De manera más general, si **A** es una matriz arbitraria, $p \times q$ y **0** es la *matriz cero* (o *nulo*) $p \times q$, cada uno de cuyos elementos es 0, entonces

$$(1.8) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

En el problema 8 se pide que demuestre la ecuación (1.8), y el problema 9 muestra otra manera en la que $\mathbf{0}$ se comporta como el número 0.

Una vez que se conoce el cero, se puede visualizar la negación $-a$ de un número a como aquel número para el cual $a + (-a) = 0$. De manera similar, para una matriz \mathbf{A} queremos que $-\mathbf{A}$ indique una matriz para la cual $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$; las definiciones de la suma de matrices y de la matriz cero muestran entonces que $-\mathbf{A}$ debe ser la matriz cuyos elementos sean sólo las negociaciones de los de \mathbf{A} : $\langle -\mathbf{A} \rangle_{ij} = -\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$. Y a partir de la negación, podemos definir la sustracción por medio de $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

(1.9) **Definición.**

- a) La matriz $p \times q$ cero (o nula), $\mathbf{0}$, es aquella matriz $p \times q$ con

$$\langle \mathbf{0} \rangle_{ij} = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq q.$$

- b) La negación $-\mathbf{A}$ de una matriz \mathbf{A} es aquella matriz $p \times q$ con

$$\langle -\mathbf{A} \rangle_{ij} = -\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq q.$$

- c) Se define la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} si y sólo si ambos, \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times q$, y entonces $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es aquella matriz $p \times q$ con $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ y

$$\langle \mathbf{A} - \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} - \langle \mathbf{B} \rangle_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq q.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 12.

Múltiplos escalares de matrices

Parece natural escribir $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ como $2\mathbf{A}$, el producto del número 2 y la matriz \mathbf{A} . Por supuesto,

$$\langle \mathbf{A} + \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = 2\langle \mathbf{A} \rangle_{ij},$$

así que también parece natural definir el producto $2\mathbf{A}$ mediante $\langle 2\mathbf{A} \rangle_{ij} = 2\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$. Esto origina la definición general del producto $r\mathbf{A}$ de un número r –ya sea real o complejo– y una matriz \mathbf{A} .

(1.10) **Definición.** Sea \mathbf{A} una matriz de $p \times q$ y r un número real o complejo (frecuentemente llamado *escalar*). Entonces el *múltiplo escalar* $r\mathbf{A}$ de r y \mathbf{A} es la matriz $p \times q$ con

$$\langle r\mathbf{A} \rangle_{ij} = r\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq q.$$

(1.11) **Ejemplo.** Sean \mathbf{E} y \mathbf{F} las matrices de 2×3

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 + 2i \\ x & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 & y & -4 \\ 1 & 3 & -3i \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$4\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -8 & 16 & 12 + 8i \\ 4x & 24 & -28 \end{bmatrix},$$

$$2\mathbf{E} - 3\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -19 & 8 - 3y & 18 + 4i \\ 2x - 3 & 3 & -14 + 9i \end{bmatrix}.$$

La suma, negación y sustracción de matrices se combinan con la multiplicación por medio de escalares de una manera simple, como puede mostrarse de las definiciones de la igualdad de matrices y de las diferentes operaciones. En el problema 15 se pide que demuestre lo siguiente.

(1.12) **Teorema** (leyes del múltiplo escalar)

- a) $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$
- b) $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$
- c) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$
- d) $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$
- e) $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$
- f) $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Hasta ahora las matrices se han comportado de manera muy similar a símbolos que representan números. Las sorpresas se han reservado para la siguiente sección, donde se considera la multiplicación de matrices por matrices.

PROBLEMAS 1.2

- ▷ 1. Interprete el enunciado $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ elemento por elemento para encontrar los valores de x , y , z y w , si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & -3 \\ 2 & y \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & w \\ z & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Suponga que P y Q representan, cada uno, un enunciado, y se sabe que es un hecho que “ P si y sólo si Q ”. ¿Qué se puede concluir del hecho adicional de que Q es falso?

3. Sean las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{F} definidas como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 + i & 6 \\ 3 & i \end{bmatrix}.$$

Evalué (o conteste “indefinido”).

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- b) $\mathbf{B} + \mathbf{F}$
- c) $\mathbf{C} + \mathbf{D}$
- d) $\mathbf{D} + \mathbf{E}$
- e) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$
- f) $\mathbf{C} + \mathbf{E}$ y compare con $\mathbf{E} + \mathbf{C}$
- g) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{F}$ y compare con $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{F})$
- h) $\mathbf{F} + \mathbf{D}$

- ▷ 4. a) Demuestre que $\langle \mathbf{A} + \mathbf{A} \rangle_{ij} = 2 \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para todas las matrices \mathbf{A} de 2×3 .
b) Demuestre el mismo resultado para todas las matrices $p \times q$.
- 5. Demuestre el teorema 1.7(b), la ley asociativa de la suma de matrices.
- 6. La *traza* $\text{tr}(\mathbf{A})$ de una matriz \mathbf{A} $p \times q$ es la suma de los elementos sobre la diagonal principal de \mathbf{A} . Demuestre que $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$.
- 7. Sean las matrices de la A a la F las mismas del problema 3. Evalué (o conteste “indefinido”).
 - a) $\mathbf{A} - \mathbf{D}$
 - b) $-\mathbf{D}$
 - c) $-\mathbf{F}$
 - d) $\mathbf{B} - \mathbf{F}$
 - e) $\mathbf{E} - \mathbf{C}$
 - f) $-(\mathbf{A} - \mathbf{B})$
 - g) $-\mathbf{B} - \mathbf{C}$
 - h) $-\mathbf{B} - \mathbf{A}$
 - i) $-(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y compare con $-\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- ▷ 8. Demuestre (1.8): $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ para toda \mathbf{A} .
- 9. Para matrices \mathbf{A} $p \times q$, demuestre que $\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ si y sólo si \mathbf{A} es la matriz cero.
- 10. Demuestre que $\text{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) - \text{tr}(\mathbf{B})$, donde $\text{tr}(\mathbf{A})$ es la *traza* del problema 6.
- ▷ 11. Examinando los elementos, demuestre que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
- 12. Examinando los elementos demuestre que $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- 13. Sean las matrices de la A a la F las mismas del problema 3. Evalué (o conteste “indefinido”).
 - a) $5\mathbf{A}$
 - b) $(2 - 3i)\mathbf{B}$
 - c) $(-3)\mathbf{C}$ y compare con $-(3\mathbf{C})$
 - d) $2\mathbf{D} - \mathbf{C}$
 - e) $-10\mathbf{E}$
 - f) $6\mathbf{F}$
 - g) $(2 + i)\mathbf{F}$
 - h) $0\mathbf{A}$
 - i) $0\mathbf{B} + \mathbf{C}$
- ▷ 14. Demuestre que $(-r)\mathbf{A} = -(r\mathbf{A})$.
- 15. Demuestre el teorema 1.12 sobre las leyes de los múltiplos escalares.

16. Demuestre que $\text{tr}(r\mathbf{A}) = r\{\text{tr}(\mathbf{A})\}$, donde $\text{tr}(\mathbf{A})$ es la *traza* definida en el problema 6.

1.3 MULTIPLICACION DE MATRICES

Hay varias nociones diferentes del producto de dos matrices, dependiendo del uso con el que se aplique el concepto. Aquí se presenta la definición con el rango más amplio de aplicaciones; para otras nociones sobre el producto, vea los problemas 9, 10, 11 y 49. El producto \mathbf{AB} de dos matrices se definirá en términos de los productos de los *renglones* de \mathbf{A} y las *columnas* de \mathbf{B} , así que primeramente se define el producto \mathbf{uv} entre una *matriz de renglón* de $1 \times q$, \mathbf{u} y una *matriz de columna* \mathbf{v} de $q \times 1$.

- (1.13) **Definición.** Sea \mathbf{u} de $1 \times q$ y \mathbf{v} de $q \times 1$. Entonces \mathbf{uv} es la matriz 1×1 cuyo elemento es

$$\langle \mathbf{u} \rangle_1 \langle \mathbf{v} \rangle_1 + \langle \mathbf{u} \rangle_2 \langle \mathbf{v} \rangle_2 + \cdots + \langle \mathbf{u} \rangle_q \langle \mathbf{v} \rangle_q = \sum_{i=1}^q \langle \mathbf{u} \rangle_i \langle \mathbf{v} \rangle_i.$$

Por ejemplo,

$$[4 \quad -1 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = [(4)(2) + (-1)(1) + (3)(-5)] = [-8].$$

Observe que \mathbf{uv} es una *matriz* 1×1 , no un número; en el ejemplo anterior, el producto es la *matriz* $[-8]$, no el número -8 . Con base en esta definición construimos aquella para el caso general.

- (1.14) **Definición.** Sea \mathbf{A} una matriz $p \times q$ y \mathbf{B} una matriz $q \times r$. Entonces el producto \mathbf{AB} se define como la matriz $p \times r$ cuyo elemento (i, j) es el *elemento* de la matriz 1×1 que es el producto del i -ésimo renglón de \mathbf{A} y la j -ésima columna de \mathbf{B} . Esto es,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{AB} \rangle_{ij} &= \langle \mathbf{A} \rangle_{i1} \langle \mathbf{B} \rangle_{1j} + \langle \mathbf{A} \rangle_{i2} \langle \mathbf{B} \rangle_{2j} + \cdots + \langle \mathbf{A} \rangle_{iq} \langle \mathbf{B} \rangle_{qj} \\ &= \sum_{k=1}^q \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{B} \rangle_{kj}. \end{aligned}$$

Observe que, para que \mathbf{AB} esté definido, el número de columnas en \mathbf{A} debe ser igual al número de renglones en \mathbf{B} . No necesita memorizar esta regla tal y como se presenta; sólo recuerde que se multiplican los elementos de *izquierda a derecha de un renglón* de \mathbf{A} por los elementos de *arriba abajo de una columna* de \mathbf{B} , y que los elementos deben de terminarse al mismo tiempo. También puede recordar que $(p \times r)$ por $(r \times q)$ da $(p \times q)$ —los términos centrales (r) deben

concordar y además “cancelarse” en el resultado. Un ejemplo gráfico de cómo encontrar el elemento (3, 2) del producto C de una matriz A 6×5 y una matriz B 5×4 es

$$\begin{array}{c}
 \text{Tercer} \\
 \text{renglón} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x & \cdot & x & x \\
 x & \cdot & x & x
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x & x & x & x \\
 x & x & x & x \\
 x & \cdot & x & x \\
 x & x & x & x \\
 x & x & x & x \\
 x & x & x & x
 \end{bmatrix}
 \leftarrow \text{Tercer} \\
 \text{renglón}$$

$\uparrow \text{Segunda columna}$ $\uparrow \text{Segunda columna}$
A \times **B** $=$ **C**

El procedimiento es el de generar el producto \mathbf{AB} multiplicando cada renglón de \mathbf{A} por cada columna de \mathbf{B} . Una manera metódica de hacerlo es la de obtener el primer renglón de \mathbf{AB} multiplicando el primer renglón de \mathbf{A} por cada columna de \mathbf{B} ; después obtener el segundo renglón de \mathbf{AB} multiplicando el segundo renglón de \mathbf{A} por cada columna de \mathbf{B} ; y así sucesivamente, hasta obtener finalmente el último renglón de \mathbf{AB} multiplicando el último renglón de \mathbf{A} por cada columna de \mathbf{B} .

(1.15) *Ejemplo*

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 8 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Es importante practicar el procedimiento de renglón-columna para la multiplicación de matrices hasta que se vuelva automático. Además, deberá ser capaz de seleccionar inmediatamente el renglón de \mathbf{A} y la columna de \mathbf{B} que se combinan para dar un elemento particular de \mathbf{AB} .

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 8.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Se ha definido lo que es el producto de matrices; la siguiente tarea es aprender cómo se comporta –saber si es conmutativo, si es asociativo, etc. Considere primero la conmutatividad: ¿Es $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$?

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

entonces se define tanto \mathbf{AB} como \mathbf{BA} :

$$\mathbf{AB} = [5] \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Los productos \mathbf{AB} y \mathbf{BA} son bastante diferentes. En general y aun cuando se defina el producto \mathbf{AB} , no hay razón para que el producto \mathbf{BA} esté definido: \mathbf{AB} tiene sentido si \mathbf{A} es $p \times r$ y \mathbf{B} es $r \times q$, pero el producto \mathbf{BA} no tiene sentido a menos que $p = q$. Cuando por casualidad tanto \mathbf{AB} como \mathbf{BA} tienen sentido, como en el caso anterior, no es necesario que ambas sean $p \times q$: si \mathbf{A} es $p \times r$ y \mathbf{B} es $r \times p$, entonces \mathbf{AB} es $p \times p$ mientras que \mathbf{BA} es $r \times r$. Por último –vea los problemas 12 y 13– aun y cuando \mathbf{AB} y \mathbf{BA} sean $p \times p$, no necesariamente tienen que ser iguales (aunque en algunos casos podría serlo). Por lo tanto, el producto de matrices no es conmutativo.

Esto significa que al multiplicar matrices, deberá de tener cuidado con el orden de los términos en el producto. Para distinguir el orden en el producto \mathbf{AB} , se dice que \mathbf{A} *premultiplica* a \mathbf{B} o multiplica a \mathbf{B} *desde la izquierda*; de manera similar \mathbf{B} *postmultipllica* a \mathbf{A} o multiplica a \mathbf{A} *desde la derecha*. Entonces, si desea multiplicar ambos lados de una ecuación $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ por alguna matriz \mathbf{P} , es importante que, ya sea que *premultiplique ambos lados por P* o *postmultiplique ambos lados por P*; $\mathbf{PX} = \mathbf{PY}$, por ejemplo, será válido ya que $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ implica que $\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ y por lo tanto

$$\mathbf{0} = \mathbf{PO} = \mathbf{P}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{PX} - \mathbf{PY},$$

lo cual significa que $\mathbf{PX} = \mathbf{PY}$. (Hemos supuesto aquí la ley distributiva como cierta, y será presentada en breve.)

Existe un caso especial en el que el orden de la multiplicación no es importante: cuando cada matriz es alguna potencia entera positiva de la misma matriz cuadrada. Definimos aquí las potencias del modo natural:

$$(1.16) \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{AA} \cdots \mathbf{A} \quad (n \text{ factores}).$$

Entonces se sigue claramente que $\mathbf{A}^r \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s} = \mathbf{A}^s \mathbf{A}^r$; esto es, \mathbf{A}^r y \mathbf{A}^s comutan.

- M** (1.17) *Ejemplo.* Aun para matrices relativamente pequeñas 2×2 o 3×3 , digamos—el cálculo a mano de potencias más que pequeñas de la matriz, puede ser tedioso; para esto, un programa computacional como el MATLAB puede ser extremadamente útil. En las secciones 2.2 y 2.3 se verá que, en muchos tipos de aplicaciones, es esencial aprender cómo las potencias \mathbf{A}^r de una matriz cuadrada \mathbf{A} específica, se comportan para r grande entera. Para la matriz \mathbf{A} de 2×2 abajo, las potencias \mathbf{A}^2 y \mathbf{A}^3 por sí

solas indican poco sobre el comportamiento de A^r para una r grande. Pero el MATLAB, por ejemplo, calcula fácilmente las potencias mayores e indica que A^r tiende a $\mathbf{0}$ a medida que r tiende a infinito. Demostrar este hecho es un reto que se enfrentará en un capítulo posterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.18 & 1.2 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.9 \\ -0.324 & 1.35 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.215 \\ -0.437 & 1.458 \end{bmatrix},$$

$$A^{25} = \begin{bmatrix} -0.527 & 0.997 \\ -0.359 & 0.670 \end{bmatrix},$$

$$A^{50} = \begin{bmatrix} -0.081 & 0.143 \\ -0.052 & 0.09 \end{bmatrix},$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -0.0009 & 0.0015 \\ -0.0005 & 0.0009 \end{bmatrix},$$

$$A^{200} = 10^{-7} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.8 \\ -0.3 & 0.5 \end{bmatrix},$$

Aunque la multiplicación de matrices no es conmutativa, sí es distributiva—

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (B + C)A = BA + CA$$

—y asociativa—

$$A(BC) = (AB)C$$

—siempre que todos los productos tengan sentido. Antes de demostrar estas leyes, introducimos una matriz que juega el mismo papel en el producto de matrices que la matriz cero en la suma de matrices. El número 1 tiene la propiedad especial de que $1a = a1 = a$ para todos los números a ; se busca entonces una matriz con propiedades similares.

(1.18) **Definición.** La matriz *identidad* (o *unidad*) $r \times r$ es la matriz diagonal $I_r = \text{diag}(1, \dots, 1)$:

$$\langle I_r \rangle_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j, \quad \langle I_r \rangle_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j,$$

de modo que

$$I_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminaremos el subíndice r cuando no se necesite.

Es fácil ver que si A es $p \times q$, entonces $I_p A = A$. Esto significa que, las matrices I_p e I_q juegan el mismo papel que el número 1 en la multiplicación.

Ahora estamos preparados para enunciar los hechos clave concernientes a la multiplicación de matrices.

(1.19) **Teorema** (leyes de la multiplicación de matrices)

- a) $A(BC) = (AB)C$ (ley asociativa)
- b) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ (ley distributiva)
 $(A \pm B)C = AC \pm BC$ ley distributiva)
- c) $AI = A$
 $IA = A$
- d) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
- e) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
 $\mathbf{0}B = \mathbf{0}$
- f) Para una matriz A cuadrada:
 $(A)^0 = I$ (definición)
 $(A)^1 = A$ (definición)
 $(A)^{n+1} = (A)(A)^n$ (definición); (para n y m)
 $(A)^m(A)^n = (A)^{m+n}$ enteros positivos)
- g) La multiplicación de matrices no es conmutativa; por lo general AB no es igual a BA .
- h) En general la cancelación multiplicativa no es válida; si $AB = AC$ (o $BA = CA$), no se sigue necesariamente que $B = C$.

DEMOSTRACION. Cada prueba implica el demostrar que alguna matriz L es igual a alguna matriz R mediante la definición 1.4. Se demuestra por tanto la igualdad de los elementos correspondientes.

a) Suponga que A es $p \times q$, B es $q \times r$, y C es $r \times s$. Entonces para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq s$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle A(BC) \rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^q \langle A \rangle_{ik} \langle BC \rangle_{kj} \quad (\text{por definición 1.14}) \\
 &= \sum_{k=1}^q \langle A \rangle_{ik} \left\{ \sum_{n=1}^r \langle B \rangle_{kn} \langle C \rangle_{nj} \right\} \quad (\text{por definición 1.14}) \\
 &= \sum_{k=1}^q \sum_{n=1}^r \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kn} \langle C \rangle_{nj} \quad (\text{aritmética}) \\
 &= \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^q \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kn} \langle C \rangle_{nj} \quad (\text{orden inverso de sumatorias}) \\
 &= \sum_{n=1}^r \left\{ \sum_{k=1}^q \langle A \rangle_{ik} \langle B \rangle_{kn} \right\} \langle C \rangle_{nj} \quad (\text{aritmética}) \\
 &= \sum_{n=1}^r \langle AB \rangle_{in} \langle C \rangle_{nj} \quad (\text{por definición 1.14}) \\
 &= \langle (AB)C \rangle_{ij} \quad (\text{por definición 1.14})
 \end{aligned}$$

que completa la demostración de a).

b) Sólo se demuestra la primera de las formas, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, dejando las demás para el problema 21. Para ser precisos, suponga que \mathbf{A} es $p \times r$ y, \mathbf{B} y \mathbf{C} son $r \times q$. Para la igualdad de los elementos para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq q$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{B} + \mathbf{C} \rangle_{kj} \quad (\text{por definición 1.14}) \\ &= \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \{ \langle \mathbf{B} \rangle_{kj} + \langle \mathbf{C} \rangle_{kj} \} \quad (\text{por definición 1.5}) \\ &= \sum_{k=1}^r \{ \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{B} \rangle_{kj} + \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{C} \rangle_{kj} \} \quad (\text{aritmética}) \\ &= \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{B} \rangle_{kj} + \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A} \rangle_{ik} \langle \mathbf{C} \rangle_{kj} \quad (\text{aritmética}) \\ &= \langle \mathbf{AB} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{AC} \rangle_{ij} \quad (\text{por definición 1.14}) \\ &= \langle \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \rangle_{ij} \quad (\text{por definición 1.5})\end{aligned}$$

lo cual completa la demostración de esta parte de b).

c), d), e) y f) se dejan como problemas

g) ya se ha demostrado con un ejemplo.

h) Mediante un ejemplo, se demostró que la primera ley de la cancelación no se cumple. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

entonces \mathbf{AB} y \mathbf{AC} son iguales a \mathbf{C} , de modo que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$. Esto, junto con problemas, completa la demostración del teorema. ■

Un punto clave que hay que recordar, es el ser cuidadosos con el orden de la multiplicación de matrices. Las expresiones tales como $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ pueden, por supuesto, desarrollarse como $\mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} + \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2$, pero los términos medios no se cancelan.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 24.

Transpuestas de matrices

Una operación matricial que no tiene un análogo en la aritmética de los números es la de obtener la *transpuesta* o la *transpuesta hermitiana* de una matriz. La idea

básica consiste en crear una matriz nueva cuyos renglones sean las columnas de la original, lo que significa que sus columnas serían los renglones de la original; para la transpuesta hermitiana, también se tomaría el complejo conjugado. Estas operaciones serán muy útiles más adelante.

(1.20) **Definición.** Sea \mathbf{A} una matriz $p \times q$.

- a) La *transpuesta* \mathbf{A}^T de \mathbf{A} es la matriz $q \times p$ que se obtiene intercambiando los renglones y columnas de \mathbf{A} –el primer renglón se vuelve la primera columna, y así sucesivamente. Esto es

$$\langle \mathbf{A}^T \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ji} \quad \text{para } 1 \leq i \leq q \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq p.$$

- b) La *transpuesta hermitiana* \mathbf{A}^H de \mathbf{A} es la matriz $q \times p$ que se obtiene tomando el complejo conjugado de sus elementos en \mathbf{A}^T –la primera columna de \mathbf{A}^H consiste en los complejos conjugados del primer renglón de \mathbf{A} , y así sucesivamente. Esto es,

$$\langle \mathbf{A}^H \rangle_{ij} = \overline{\langle \mathbf{A} \rangle_{ji}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq q \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq p.$$

(1.21) **Ejemplo.** Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} como se muestra abajo; entonces \mathbf{A}^T , \mathbf{B}^T , \mathbf{A}^H y \mathbf{B}^H son como se indica.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Mediante la definición 1.20,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = [2 - 3i \quad 6],$$

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (= \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{B}^H = [2 + 3i \quad 6] \quad (\neq \mathbf{B}^T).$$

Las operaciones para las transpuestas interactúan de un modo muy simple con las operaciones aritméticas que ya fueron introducidas para las matrices.

(1.22) **Teorema** (leyes para las transpuestas)

- a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ y $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$
 b) $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$ y $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H \pm \mathbf{B}^H$
 c) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$ y $(c\mathbf{A})^H = \bar{c}\mathbf{A}^H$
 d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ y $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H$ (*Observe el orden invertido*)

DEMOSTRACION. a), b) y c) son inmediatas y se dejan en los problemas 28-30. Considere d), que muestra un resultado un tanto sorprendente. Por preci-

sión, suponga que \mathbf{A} es $p \times r$ y \mathbf{B} es $r \times q$, de manera que \mathbf{AB} esté definida y sea $p \times q$. Entonces, mediante la definición 1.20, $(\mathbf{AB})^T$ y $(\mathbf{AB})^H$ son $q \times p$, \mathbf{A}^T y \mathbf{A}^H son $r \times p$, y \mathbf{B}^T y \mathbf{B}^H son $q \times r$; por lo tanto $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ y $\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$ están de hecho definidas y son $q \times p$. Ahora sólo es necesario demostrar la igualdad de los elementos correspondientes. Se proporcionaron detalles sólo para el caso de la transpuesta T . Para $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq p$,

$$\langle (\mathbf{AB})^T \rangle_{ij} = \langle \mathbf{AB} \rangle_{ji} \quad (\text{por definición 1.20})$$

$$= \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A} \rangle_{jk} \langle \mathbf{B} \rangle_{ki} \quad (\text{por definición 1.14})$$

$$= \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{B}^T \rangle_{ik} \langle \mathbf{A}^T \rangle_{kj} \quad (\text{por definición 1.20})$$

$$= \langle \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \rangle_{ij} \quad (\text{por definición 1.14})$$

se ha demostrado la igualdad de los elementos (i, j) de $(\mathbf{AB})^T$ y de $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. ■

Observe que el teorema 1.22 d) puede extenderse arbitrariamente a los productos de varias matrices. Por ejemplo,

$(\mathbf{ABC})^T = \{(\mathbf{AB})\mathbf{C}\}^T = \mathbf{C}^T(\mathbf{AB})^T = \mathbf{C}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;
de manera similar, $(\mathbf{ABC})^H = \mathbf{C}^H\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$. Vea los problemas 32 y 33.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 33.

En términos de las transpuestas de matrices se pueden definir dos clases de matrices muy importantes –como se verá más adelante.

(1.23) **Definición.** Una matriz \mathbf{A} (cuadrada) para la cual $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, de modo que $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ji}$ para toda i y j , se dice que es *simétrica*. Una matriz \mathbf{B} (cuadrada) para la cual $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$, de modo que $\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} \rangle_{ji}$ para toda i y j se dice que es *hermitiana*.

La razón para escribir “matriz (cuadrada)” en la definición anterior es que una matriz simétrica (o hermitiana) *debe* ser cuadrada: Si \mathbf{A} es $p \times q$, entonces \mathbf{A}^T es $q \times p$, de modo que q debe ser igual a p para que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

(1.24) **Ejemplo.** Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 + 2i \\ 3 - 2i & -6 \end{bmatrix}.$$

Entonces **A** es simétrica y hermitiana; **B** no es simétrica ni hermitiana; y **C** es hermitiana pero no simétrica.

El producto de dos matrices simétricas en general no es simétrico así como tampoco el producto de dos matrices hermitianas es, generalmente, hermitiano: Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, entonces $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$ en general, así que $(\mathbf{AB})^T \neq \mathbf{AB}$ y \mathbf{AB} es no simétrica (ver problemas 38 y 39).

Si **A** es una matriz simétrica $p \times p$ y **B** es una matriz $p \times q$, entonces $\mathbf{B}^T \mathbf{AB}$ es simétrica, ya que

$$(1.25) \quad (\mathbf{B}^T \mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T)^T = \mathbf{B}^T \mathbf{AB};$$

de modo similar, $\mathbf{B}^H \mathbf{AB}$ es hermitiana si **A** es hermitiana. Observe que la demostración (1.25) hace un uso poderoso de las propiedades generales de las matrices que se habían derivado anteriormente, sin tener que escribir en detalle las sumas complicadas involucradas en el producto $\mathbf{B}^T \mathbf{AB}$. Esto ilustra la conveniencia y poder de la notación matricial y los resultados generales sobre matrices. A medida que continuemos presentando material sobre matrices, se aprovechará su poder de notación, evitando –cuando sea posible– escribir explícitamente los elementos de las matrices. El estudiante deberá seguir también este procedimiento.

PROBLEMAS 1.3

1. a) Verifique cada producto.

$$[1 \quad -3] \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = [-14]; \quad [2 \quad -7 \quad 6] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [19];$$

$$[0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [0]; \quad [3 \quad 2 - 4i] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [4 + 4i];$$

$$[i \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = [0].$$

b) Evalúe los productos.

$$[-1 \quad -1 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [6][3]; \quad [1 \quad 3 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$[i \quad -i] \begin{bmatrix} 2i \\ i \end{bmatrix}.$$

2. Evalúe cada producto.

(a) $[1 \quad 6] \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -3 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2+3i \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \quad -6]$

(g) $[2 \quad -6] \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Calcule \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, y compare $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ con $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 4. Demuestre que si el tercer renglón de \mathbf{A} equivale a cuatro veces su primer renglón, lo mismo se cumple para aquellos renglones de \mathbf{AB} para toda \mathbf{B} para la cual esté definido el producto.
5. Demuestre que si la tercera columna de \mathbf{A} equivale a dos veces su primera columna, entonces lo mismo se cumple para aquellas columnas de \mathbf{BA} para toda \mathbf{B} para la cual esté definido el producto.
6. Suponga que $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$. Demuestre que \mathbf{DA} se obtiene de la matriz $\mathbf{A} p \times q$, con sólo reemplazar el renglón i -ésimo de \mathbf{A} por d_i veces él mismo, para toda i . Enuncie y demuestre el resultado análogo para las columnas de \mathbf{AD} de la matriz $\mathbf{A} r \times p$.
- ▷ 7. Suponga que \mathbf{A} es $p \times q$ y que r es un número. Mientras que $r\mathbf{A}$ está por supuesto definida, demuestre que el producto de matrices $[r]\mathbf{A}$ tiene sentido si y sólo si $p = 1$; demuestre que si $p = 1$, entonces $[r]\mathbf{A} = r\mathbf{A}$. Enuncie y verifique los resultados similares concernientes a $\mathbf{A}[r]$. (Nota: Esto muestra que se debe tener cuidado al identificar r con $[r]$.)
8. Encuentre matrices *reales* \mathbf{X} y \mathbf{Y} 2×2 –ninguna de las cuales equivale a $\mathbf{0}$ – para el cual $\mathbf{XX} + \mathbf{YY} = \mathbf{0}$.
9. Un producto diferente de aquel de la definición 1.14 es importante en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería; se define entre dos matrices renglón 1×3 reales cualquiera

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

(aunque igualmente podría definirse entre dos matrices de columna de 3×1 .) Este producto es llamado el *producto cruz* (o *producto vectorial*); se denota mediante $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, y se define como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad a_1 b_2 - a_2 b_1],$$

otra matriz de renglón 1×3 .

- a) Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, de modo que \times no es conmutativa.
 - b) Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para toda \mathbf{a} .
 - c) Demuestre mediante un ejemplo que \times no es asociativa.
 - d) Demuestre que no puede existir una “matriz identidad para \times ”, esto es, que no puede existir una matriz \mathbf{e} especial 1×3 para la cual $\mathbf{e} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}$ para toda \mathbf{a} .
10. Un producto diferente de aquél de la definición 1.14 es importante en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería; se define entre dos matrices cualesquiera. Si \mathbf{A} es $p \times q$ y \mathbf{B} es $r \times s$, entonces el *producto Kronecker* (o *producto tensorial*) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ se define como la matriz $pr \times qs$ que contiene todos los productos de un elemento de \mathbf{A} con un elemento de \mathbf{B} , dispuestos de un modo especial: denotando $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ por a_{ij} , los primeros r renglones de $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ se crean escribiendo $a_{11}\mathbf{B}$ seguido por $a_{12}\mathbf{B}$ a su derecha seguido por $a_{13}\mathbf{B}$ a su derecha . . . seguido por $a_{1q}\mathbf{B}$ a su derecha; los segundos renglones r se generan de manera similar de $a_{21}\mathbf{B}$, $a_{22}\mathbf{B}$, y así sucesivamente; y esto continúa a lo largo del p -ésimo conjunto de r renglones. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 10 & 12 & 14 \\ 8 & 9 & 10 & 16 & 18 & 20 \\ 15 & 18 & 21 & 20 & 24 & 28 \\ 24 & 27 & 30 & 32 & 36 & 40 \end{bmatrix}.$$

- a) Demuestre mediante un ejemplo que \odot no es conmutativo.
 - b) Demuestre mediante un ejemplo que \odot no es asociativo.
 - c) Demuestre que $[1]$ es una “matriz identidad” en el sentido de que $[1] \odot \mathbf{A} = \mathbf{A} \odot [1] = \mathbf{A}$ para toda \mathbf{A} .
- ▷ 11. Un producto diferente de aquel de la definición 1.14 que es útil primordialmente en relación con el análisis discreto de Fourier (ver problemas 50 y 52) se define elemento a elemento entre dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} cualesquiera $p \times q$ mediante la definición de
- $$\langle \mathbf{A} \square \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \langle \mathbf{B} \rangle_{ij}.$$
- a) Demuestre que \square es conmutativo.
 - b) Demuestre que \square es asociativo.
 - c) Encuentre la “matriz identidad” \mathbf{E} $p \times q$ para que $\mathbf{E} \square \mathbf{A} = \mathbf{A} \square \mathbf{E} = \mathbf{A}$ para toda matriz \mathbf{A} $p \times q$.
12. Encuentre una matriz \mathbf{A} y una matriz \mathbf{B} para que tanto \mathbf{AB} como \mathbf{BA} estén definidas, para que \mathbf{AB} y \mathbf{BA} tengan la misma forma, pero que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
13. Encuentre dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} 2×2 con $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ pero con $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
- ▷ 14. Suponga que \mathbf{A} es una matriz 2×2 que se comunica con *toda* matriz 2×2 . Demuestre que \mathbf{A} debe ser un múltiplo escalar de \mathbf{I}_2 .

15. Calcule \mathbf{A}^2 y \mathbf{A}^3 para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Verifique que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ si

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{12}], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}].$$

▷ **17.** a) Escriba explícitamente \mathbf{I}_2 .

b) Demuestre que $\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$ para toda $\mathbf{A} 2 \times 3$

18. a) Escriba explícitamente \mathbf{I}_3 .

b) Demuestre que $\mathbf{BI}_3 = \mathbf{B}$ para toda $\mathbf{B} 2 \times 3$.

M 19. Utilice el MATLAB u otro programa para descubrir experimentalmente qué le sucede a \mathbf{A}^n para enteros positivos n grandes si \mathbf{A} es:

- | | |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| (a) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix}$ | (b) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.16 & 1.2 \end{bmatrix}$ |
| (c) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}$ | (d) $\begin{bmatrix} 0.9 & 1.0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ |
| (e) $\begin{bmatrix} 0.99 & 1.0 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}$ | (f) $\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$ |

▷ **20.** Determine, en términos del número real r , que le sucede a \mathbf{A}^n para enteros positivos n grandes si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

21. Demuestre el teorema 1.19 b) –de modo distinto a la versión demostrada en el texto– sobre la ley distributiva.

22. Demuestre el teorema 1.19 c) sobre \mathbf{I} como una identidad multiplicativa.

23. Demuestre el teorema 1.19 d) sobre los múltiplos escalares de productos de matrices.

▷ **24.** Demuestre el teorema 1.19 e) sobre la multiplicación de matrices con $\mathbf{0}$.

25. Calcule \mathbf{A}^T , \mathbf{B}^T , \mathbf{AB} , $(\mathbf{AB})^T$, y $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ y verifique que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

▷ **26.** Evalúe:

a) $[1 \ 2 \ 3][[-1 \ 3 \ 6]^T]$	b) $[1 \ 2 \ 3]^T[[-1 \ 3 \ 6]]$
c) $[-1 \ 3 \ 6][[1 \ 2 \ 3]^T]$	d) $[-1 \ 3 \ 6]^T[1 \ 2 \ 3]$

27. Suponga que \mathbf{A} es $p \times p$ y \mathbf{x} es $p \times 1$. Muestre que $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$ es de 1×1 . Si $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$, muestre que $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y}$.

28. Demuestre el teorema 1.22 a) sobre $(\mathbf{A}^T)^T$ y $(\mathbf{A}^H)^H$.
29. Demuestre el teorema 1.22 b) sobre $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T$ y $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^H$.
- ▷ 30. Demuestre el teorema 1.22 c) sobre $(c\mathbf{A})^T$ y $(c\mathbf{A})^H$.
31. Demuestre la parte del teorema 1.22 d) que no fue demostrada, de que $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H$.
32. Demuestre que $(\mathbf{ABC})^H = \mathbf{C}^H \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H$.
- ▷ 33. Demuestre la extensión del teorema 1.22 d) para aplicarse a un producto de un número finito arbitrario k de matrices $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$.
34. Demuestre que \mathbf{I}_p y la matriz cero $\mathbf{0}$ $p \times p$ son simétricas y hermitianas.
35. a) Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica.
b) Demuestre que la matriz diagonal \mathbf{D} es hermitiana si y sólo si todos los elementos en \mathbf{D} son reales.
36. Escriba explícitamente la matriz simétrica general 3×3 .
- ▷ 37. Escriba explícitamente la matriz hermitiana general 2×2 .
38. Demuestre que \mathbf{AB} no es necesariamente simétrica aunque \mathbf{A} y \mathbf{B} sean simétricas, utilizando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Demuestre mediante un ejemplo que \mathbf{AB} podría ser simétrica cuando \mathbf{A} es simétrica y \mathbf{B} es simétrica.
40. a) Demuestre que \mathbf{A} es simétrica si y sólo si \mathbf{A}^T es simétrica.
b) Demuestre que \mathbf{A} es hermitiana si y sólo si \mathbf{A}^H es hermitiana.
41. a) Demuestre que si \mathbf{A} es simétrica, entonces \mathbf{A}_2 es simétrica
b) Demuestre que si \mathbf{A} es simétrica, entonces \mathbf{A}^n es simétrica para todos los enteros positivos n .
c) ¿Qué sucede en cuanto al inverso de a)?
42. a) Demuestre que si \mathbf{A} es hermitiana, entonces \mathbf{A}^2 es hermitiana.
b) Demuestre que si \mathbf{A} es hermitiana, entonces \mathbf{A}^n es hermitiana para todos los enteros positivos n .
c) ¿Qué sucede en cuanto al inverso de a)?
43. Verifique que $\mathbf{B}^T \mathbf{AB}$ es simétrica, de acuerdo con (1.25). si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

44. Demuestre el análogo hermitiano de (1.25): $\mathbf{B}^H \mathbf{AB}$ es hermitiana si \mathbf{A} es hermitiana.
- ▷ 45. Se dice que una matriz \mathbf{A} es *antisimétrica* si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.
a) Demuestre que una matriz antisimétrica debe ser cuadrada y que sus elementos sobre la matriz diagonal deben ser ceros.

- b) Demuestre que, dada cualquier matriz cuadrada \mathbf{A} , la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ es antisimétrica, mientras que $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ es simétrica.
- c) Escribiendo $\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2 + (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$, demuestre que cada matriz cuadrada puede ser escrita de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.
46. Si \mathbf{x} es $p \times 1$, demuestre que $\mathbf{x}^H \mathbf{x}$ es real (aun y cuando \mathbf{x} tenga elementos complejos).
47. Generalice el problema 45 para el caso de las matrices *antihermitianas* \mathbf{A} , para las cuales $\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$.
- ▷ 48. Mediante la consideración de sus partes real e imaginaria pura demuestre que toda matriz hermitiana es la suma de una matriz simétrica real e i por una matriz antisimétrica real.
49. Un producto diferente de aquel en la definición 1.14 es importante en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería, especialmente en los problemas que involucran el procesamiento de señales discretas; la *convolución* $\mathbf{x} * \mathbf{y}$ se define entre dos matrices renglón cualesquiera $1 \times p$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p] \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]$$

y a su vez es una matriz renglón de $1 \times p$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} * \mathbf{y} \rangle_i &= x_1 y_i + x_2 y_{i-1} + \cdots + x_i y_1 \\ &\quad + x_{i+1} y_p + x_{i+2} y_{p-1} + \cdots + x_p y_{i+1}. \end{aligned}$$

Para $p = 2$, tenemos simplemente

$$[x_1 \quad x_2] * [y_1 \quad y_2] = [x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad x_1 y_2 + x_2 y_1].$$

- a) Encuentre la fórmula explícita para $[x_1 \quad x_2 \quad x_3] * [y_1 \quad y_2 \quad y_3]$.
- b) Demuestre que $*$ es conmutativa para una p general.
- c) Demuestre que $*$ es asociativa para una p general.
- d) Encuentre una “matriz identidad” $\mathbf{e} 1 \times p$ tal que $\mathbf{e} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{e} = \mathbf{x}$, para toda matriz $\mathbf{x} 1 \times p$.
- e) Encuentre $[3 \ 1 \ 2 \ 6] * [-2 \ 1 \ 3 \ 1]$.
50. Una técnica importante en las matemáticas aplicadas es la de aproximar una función dada $f(x)$ mediante una *serie de Fourier*: una sumatoria de términos de la forma $\sin kx$ o $\cos kx$ o, de modo equivalente, en forma compleja $e^{kix} = \cos kx + i \sin kx$. El análisis discreto de Fourier selecciona los coeficientes c_k de e^{kix} de manera que: 1) toda c_k , a excepción posiblemente de algunos coeficientes N específicos, es cero, y 2) que la serie y la función original f son iguales en N valores de x igualmente espaciados. Con $N = 3$, por ejemplo, se podría aproximar $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ mediante $s(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix}$, con los coeficientes c_k determinados mediante el requerimiento $f(x) = s(x)$ para $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = 2\pi/3$, y $x = x_3 = 2(2\pi/3)$. Denote $f(x)$ mediante f_i .

a) Demuestre que estos requerimientos sobre c_k pueden expresarse como

$$f_1 = c_0 + c_1 + c_2$$

$$f_2 = c_0 + c_1z + c_2z^2$$

$$f_3 = c_0 + c_1z^2 + c_2z^4$$

$$\begin{aligned} \text{donde } z &= e^{(2\pi/3)\epsilon} = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 \\ &= -1/2 + i\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

b) Demuestre que las ecuaciones anteriores pueden expresarse como $\mathbf{f} = \mathbf{Zc}$, donde $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$, $\mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \ c_2]^T$, y

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z^4 \end{bmatrix}.$$

c) Utilice explícitamente el valor z anterior para encontrar \mathbf{Z} .

d) \square y $*$ denotan los productos definidos en los problemas 11 y 49.

Demuestre que $\mathbf{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = \mathbf{Zx}^T \square \mathbf{Zy}^T$, primero para el caso de $\mathbf{x} = [3 \ -1 \ 2]$ y $\mathbf{y} = [-2 \ 2 \ 3]$, y después para toda matriz renglón $1 \times 3 \mathbf{x}$ y \mathbf{y} .

- ▷ 51. En el problema 50 se examinó el análisis discreto de Fourier con $N = 3$. Suponga que, de un modo más general, se desea aproximar $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ mediante una serie finita de Fourier $s(x)$ utilizando N términos:

$$s(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)ix}$$

y que los c_k se determinan mediante $s(x_j) = (x_j)$, donde se toma $x_j = (j-1)(2\pi/N)$ para $j = 1, 2, \dots, N$. Demuestre que el problema para encontrar los coeficientes c_k a partir de los valores dados $f_j = f(x_j)$ es el mismo que el resolver $\mathbf{Zc} = \mathbf{f}$, donde $\mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \ \cdots \ c_{N-1}]^T$, $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_N]^T$, y \mathbf{Z} es la matriz $N \times N$ con $\langle \mathbf{Z} \rangle_{jk} = z^{(j-1)(k-1)}$ y $z = e^{(2\pi/N)\epsilon}$. El producto \mathbf{Zc} se llama la *transformada discreta de Fourier* de la matriz renglón \mathbf{c} y es de extrema importancia dentro de las matemáticas aplicadas.

52. Sea \mathbf{Z} una matriz $N \times N$ que genera la transformada discreta de Fourier como en el problema 51, y \square y $*$ denotan los productos definidos en los problemas 11 y 49. Demuestre que $\mathbf{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = \mathbf{Zx}^T \square \mathbf{Zy}^T$ para todas las matrices renglón \mathbf{x} y \mathbf{y} $1 \times N$.

1.4 INVERSA DE UNA MATRIZ

Las secciones anteriores extendieron a las matrices muchas ideas asociadas con la aritmética de los números; una idea que se omitió fue el análogo matricial del inverso recíproco: calcular $1/3$ a partir de 3 , o de manera más general, calcular $1/a$ de un número a diferente a cero.

Una manera de describir el inverso o recíproco $1/a$ de a es la de notar que $1/a$ es la solución x de la ecuación $ax = 1$, donde por supuesto 1 es el “número identidad para la multiplicación numérica”: $1b = b1 = b$ para todo número b . Ya que las matrices identidad \mathbf{I} (véase la definición 1.18) son “matrices identidad para la multiplicación de matrices” — $\mathbf{IB} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}$ para toda matriz \mathbf{B} — el análogo natural para encontrar una x que resuelva la ecuación $a\mathbf{x} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{x}a = \mathbf{I}$ para una a dada, es el de buscar una matriz \mathbf{X} que resuelva $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ para una matriz \mathbf{A} dada.

(1.26) **Definición.** Sea \mathbf{A} una matriz dada.

- a) Cualquier matriz \mathbf{L} para la cual $\mathbf{LA} = \mathbf{I}$ se llama *inversa izquierda* de \mathbf{A} .
- b) Cualquier matriz \mathbf{R} para la cual $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$ se llama *inversa derecha* de \mathbf{A} .
- c) Cualquier matriz \mathbf{X} para la cual $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ se llama *inversa* de \mathbf{A} . (Para distinguirla claramente, esa \mathbf{X} con frecuencia se llama *inversa bilateral* de \mathbf{A} .)

Se puede determinar cuál —si es que alguno— de estos tipos de inversas tiene una matriz \mathbf{A} , mediante la solución de conjuntos de ecuaciones lineales; y las soluciones de estas ecuaciones dan como resultado las inversas.

(1.27) **Ejemplo.** Considere si existe una matriz inversa derecha \mathbf{R} para la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se busca entonces \mathbf{R} con $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$. Para que \mathbf{R} postmultiplique a la matriz \mathbf{A} 2×2 , \mathbf{R} debe de ser $2 \times q$ para cierta q , entonces \mathbf{AR} será $2 \times q$. Pero se necesita que \mathbf{AR} sea igual a una matriz identidad (cuadrada), así que $q = 2$ y \mathbf{R} debe ser 2×2 . Se busca entonces una matriz \mathbf{R} 2×2 de la forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

buscando x, y, z, w para que $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$, esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando las dos matrices del lado izquierdo e igualando los elementos del producto con los elementos correspondientes de \mathbf{I} se generan dos conjuntos de ecuaciones lineales, uno que involucra sólo x y y , y el otro que incluye sólo a z y w .

$$\begin{array}{rcl} x - y = 1 & & z - w = 0 \\ x + 2y = 0 & & z + 2w = 1. \end{array}$$

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente con los métodos aprendidos en álgebra en la secundaria, y se produce exactamente una solución $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, $w = \frac{1}{3}$. Esto significa que hay exactamente una matriz inversa derecha, que es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

El argumento del ejemplo 1.27 que determinó que \mathbf{R} es 2×2 también es válido para un caso más general (problema 7):

(1.28) **Teorema** Sea la matriz \mathbf{A} $p \times q$. Entonces:

- a) Cualquier inversa derecha \mathbf{R} de \mathbf{A} debe de ser $q \times p$.
- b) Cualquier inversa izquierda \mathbf{L} de \mathbf{A} debe de ser $q \times p$.

(1.29) **Ejemplo.** Ver si existe una inversa derecha \mathbf{R} para la matriz 2×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mediante el teorema 1.28 \mathbf{R} será 3×2 , por lo que se buscan x, y, z, u, v, w para que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que se traduce en las ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 & u - v + w &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 & u + v + 2w &= 1. \end{aligned}$$

Al resolverlas, se demuestra que, por ejemplo, se pueden dar valores arbitrarios $z = \alpha$ y $w = \beta$ para z y w ; resolviendo para las otras variables en términos de α y β finalmente resultan un número infinito de inversas derechas, una para cada selección de α y β ;

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} | & & & \\ \textcircled{o} & \frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3\beta}{2} \\ & -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 1.27 se presentó una matriz con *exactamente una* inversa derecha, y en el ejemplo 1.29 una con *infinitamente muchas* matrices inversas

derechas. Al demostrar cómo se encuentran las inversas *izquierdas*, se examina en seguida una matriz que no tiene *ninguna*.

(1.30) *Ejemplo.* Se busca una inversa izquierda \mathbf{L} para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ en forma de } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

de $\mathbf{LA} = \mathbf{I}$ se traduce que

$$\begin{array}{ll} x - 3y = 1 & z - 3w = 0 \\ -x + 3y = 0 & -z + 3w = 1. \end{array}$$

Cada conjunto de ecuaciones es inconsistente: el primero, por ejemplo, busca x y y para las cuales $1 = x - 3y$, que es igual a $-(-x + 3y) = -(0) = 0$, y ciertamente es imposible encontrar una x y y que hagan que 1 sea 0.

(1.31) *Ejemplo.* En los tres ejemplos anteriores se han utilizado matrices pequeñas porque resulta tedioso solucionar sistemas de ecuaciones a mano si éstas involucran muchas variables. Existen muchos buenos programas computacionales, sin embargo, que hacen esta tarea más fácil; el MATLAB por supuesto contiene estas facilidades, y en especial es muy fácil de usar cuando la matriz es cuadrada. Como ejemplo, considere la matriz simétrica \mathbf{A} de 7×7 con $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = 1/(i + j - 1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}.$$

El MATLAB tiene un comando $\mathbf{X} = \text{inv}(\mathbf{A})$ que busca una inversa (bilateral) de \mathbf{A} y genera

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 49 & -1,176 & 8,820 & -29,400 & 48,510 & -38,808 & 12,012 \\ -1,176 & 37,632 & -317,520 & 1,128,960 & -1,940,400 & 1,596,672 & -504,504 \\ 8,820 & -317,520 & 2,857,680 & -10,584,000 & 18,711,000 & -15,717,240 & 5,045,040 \\ -29,400 & 1,128,960 & -10,584,000 & 40,320,000 & -72,765,000 & 62,092,800 & -20,180,160 \\ 48,510 & -1,940,400 & 18,711,000 & -72,765,000 & 133,402,500 & -115,259,760 & 37,837,800 \\ -38,808 & 1,596,672 & -15,717,240 & 62,092,800 & -115,259,760 & 100,530,336 & -33,297,264 \\ 12,012 & -504,504 & 5,045,040 & -20,180,160 & 37,837,800 & -33,297,264 & 11,099,088 \end{bmatrix}$$

Estos cuatro ejemplos ilustran la manera de encontrar inversas al igual que el hecho de que las inversas –una o varias– pueden no existir. La teoría sobre las inversas será presentada más adelante; por el momento sólo se verán algunos de estos desarrollos básicos:

(1.32) **Vista previa sobre las inversas**

- Para una matriz cuadrada $A p \times p$, ya sea que:
 - A tiene una inversa (bilateral) única,
 - o bien
 - A no tiene inversa derecha ni izquierda. Realmente, si una matriz cuadrada A tiene ya sea una inversa izquierda o derecha, entonces ésa es de hecho un inversa (bilateral).
- Para una matriz *no cuadrada* $A p \times q$ con $p \neq q$:
 - No es posible que A tenga una inversa (bilateral).
 - Si $p < q$, entonces A posiblemente no tenga una inversa izquierda, pero posiblemente tenga una inversa derecha.
 - Si $p > q$, entonces posiblemente A no tenga una inversa derecha, pero posiblemente sí tenga una inversa izquierda.

Se tienen suficientes herramientas a mano para demostrar un teorema sobre los diferentes tipos de inversas.

(1.33) **Teorema** (inversas bilaterales). Sea A una matriz.

- Si existen para A una inversa izquierda L y una inversa derecha R , entonces son iguales y son una inversa (bilateral).
- Cualesquiera dos inversas (bilaterales) de A son idénticas.

DEMOSTRACION.

- Sean L y R inversas izquierda y derecha, respectivamente, de A , de manera que $LA = I$ y $AR = I$. Entonces

$$L = LI = L(AR) = (LA)R = (I)R = R,$$

de modo que $L = R$, como se pedía y esta matriz sirve como inversa izquierda y derecha –esto es, es una inversa (bilateral).

- Suponga que X y Y son inversas (bilaterales) de A . Entonces X es también una inversa izquierda de A y Y es también una inversa derecha de A ; de la parte a), podemos concluir que $X = Y$. ■

Matrices no singulares

Los ejemplos anteriores y el examen previo en (1.32) muestran que las inversas (bilaterales) son la excepción más que la regla. La propiedad de tener la inversa es tan importante que las matrices con tales inversas se distinguen con un nombre especial: el de *no singulares*.

(1.34) **Definición.**

- Una matriz *no singular* es una matriz (necesariamente cuadrada) A que tiene una inversa X : para una A no singular existe una X con $AX = XA = I$. Esta inversa se denota mediante A^{-1} .
- Una *matriz singular* es una matriz cuadrada que *no* tiene inversa.

La primera pregunta que surge con frecuencia cuando encontramos una matriz cuadrada es “¿es singular o no singular?” Más adelante se desarrollarán herramientas teóricas para responder a estas preguntas, pero, computacionalmente, se responde tratando de *encontrar* una inversa con los métodos de los ejemplos 1.27, 1.29, 1.30 y 1.31 –sin olvidar (1.32) a). Pero si de algún modo se tiene una matriz X que sea “la mejor *candidata*” para la inversa A^{-1} de A , puede verificarla tan sólo con comprobar si $AX = I$ y $XA = I$ –que es la herramienta clave utilizada en la demostración del siguiente teorema. En esa demostración verificamos *ambas* ecuaciones $AX = I$ y $XA = I$, aunque el examen previo 1.32 a) –todavía sin demostrar– muestra que sólo tenemos que probar *una* ecuación.

(1.35) **Teorema.** Sean A y B matrices no singulares $p \times p$. Entonces:

- AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T y A^H son no singulares con $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ y $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$.

Demostración clave.

- Sólo se tiene que demostrar que AB tiene una matriz X para la cual $(AB)X = X(AB) = I$. Ya que A y B son no singulares y $p \times p$, B^{-1} y A^{-1} existen y son $p \times p$, de modo que el producto $B^{-1}A^{-1}$ existe y se selecciona como candidato para X . Se comprueba si $(AB)X$ es igual a I :

$$(AB)X = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

como se deseaba. Se comprueba si $X(AB)$ es igual a I :

$$X(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

también como se deseaba. Por lo tanto, X es una inversa, así que AB es no singular y su inversa es como se enunció arriba.

- b) Como A es no singular, A^{-1} existe. Sea $X = A$ el candidato para la inversa de A^{-1} ; se tiene que comprobar si $X(A^{-1}) = I$ y $(A^{-1})X = I$. Véase el problema 14.
- c) Véase el problema 15. ■

La demostración anterior es **clave** porque es un modelo de demostraciones de que una matriz dada G es la inversa de una matriz dada H ; así, sólo demostramos que $GH = I$ y $HG = I$. En algunos casos sólo se tiene H y parte del problema consiste en determinar la fórmula para G . En a) del teorema 1.35, por ejemplo, si sólo se diera $H = AB$ y se tuviera que adivinar la fórmula para G , se razonaría de la siguiente manera: es necesaria una G tal que $G(AB) = I$; postmultiplicando esta ecuación por B^{-1} cambia a $GA = B^{-1}$, y después, postmultiplicando esta ecuación por A^{-1} cambia a $G = B^{-1}A^{-1}$, dando un *candidato* para la inversa de AB . Procederíamos entonces como en la demostración del inciso a), con el fin de demostrar que nuestra suposición para la inversa es, de hecho, correcta.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 23.

Matrices, inversas, y sistemas de ecuaciones

Recuerde que nuestra discusión se originó a partir de las inversas de matrices por analogía con las inversas numéricas $1/a$ para los números a . Un uso frecuente de las inversas numéricas es el de resolver ecuaciones: la ecuación $3x = 7$ se resuelve multiplicando ambos lados de la ecuación por $1/3$ para obtener $x = 7/3$. En seguida examinamos la solución de ecuaciones matriciales $Ax = b$ mediante el uso de A^{-1} .

Suponga que A es una matriz $p \times q$ de números conocidos, x es una matriz columna de $q \times 1$ de números desconocidos, y b es una matriz columna de $p \times 1$, de modo que la ecuación $Ax = b$ tiene sentido como un problema para encontrar una matriz x desconocida que satisfaga esta ecuación. Para ver lo que esta ecuación significa, se escribe en términos de los elementos de las matrices A , x , y b . Las definiciones de multiplicación de matrices e igualdad de matrices revelan que

$$(1.36) \quad \text{la ecuación } Ax = b \text{ con } A \text{ } p \times q \text{ conocida, con elementos } \langle A \rangle_{ij} = a_{ij}, \text{ } x \text{ } q \times 1 \text{ desconocida con elementos } \langle x \rangle_i = x_i \text{ y } b \text{ } p \times 1 \text{ conocida con elementos } \langle b \rangle_i = b_i$$

es equivalente a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2$$

.....

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_q$$

un sistema de p ecuaciones lineales en las q incógnitas x_1, x_2, \dots, x_q .

Así, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es una notación compacta para escribir un sistema de p ecuaciones lineales en q incógnitas. La notación matricial compacta también indica un método posible para solucionar tal sistema, mediante analogía con la solución de $3x = 7$ multiplicando ambos lados por $1/3$: multiplique ambos lados de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por \mathbf{A}^{-1} (si existe) para obtener una solución $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Por supuesto, esto sólo es válido si \mathbf{A} es no singular; en particular, \mathbf{A} debe ser cuadrada: el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas. El teorema 1.38 abajo explica qué sucede para una matriz \mathbf{A} no cuadrada con una inversa o derecha.

(1.37) **Ejemplo.** Considere el sistema de dos ecuaciones lineales

$$2x - 3y = -13$$

$$x + 4y = 10$$

con dos incógnitas x y y . Por (1.36), esto equivale a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

En este caso,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

se convierte en

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar que $x = -2$ y $y = 3$ que, efectivamente, resuelve el sistema de ecuaciones.

La situación general que relaciona la solución de sistemas de ecuaciones lineales con varias matrices es como sigue:

(1.38) **Teorema** (ecuaciones e inversas). Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ la representación del sistema de p ecuaciones lineales en q incógnitas como en (1.36).

- a) Suponga que A tiene una inversa izquierda L . Si existen soluciones x a la ecuación $Ax = b$, entonces deben ser iguales a Lb ; por lo tanto, existe *al mucho una solución*, es decir, Lb , pero posiblemente no exista ninguna.
- b) Suponga que A tiene una inversa derecha R . Entonces Rb es una solución a $Ax = b$; por lo tanto, existe *al menos una solución*, es decir Rb , pero podría haber más.
- c) Suponga que A es no singular. Entonces existe *exactamente una solución* a $Ax = b$, es decir $A^{-1}b$.

DEMOSTRACION

- a) Si existe alguna solución x_0 a $Ax = b$, entonces por supuesto $b = Ax_0$. Premultiplicando esta ecuación por L se tiene

$$Lb = L(Ax_0) = (LA)x_0 = Ix_0 = x_0,$$

que indica que x_0 debe ser igual a Lb si x_0 es una solución.

- b) Para mostrar que Rb es una solución, sólo se comprueba si $A(Rb)$ es igual a b :

$$A(Rb) = (AR)b = Ib = b,$$

por lo tanto Rb es una solución.

- c) Si A es no singular, entonces A^{-1} existe y sirve como una inversa izquierda y una inversa derecha de A . Ya que A^{-1} es una inversa derecha, el inciso b) muestra que $A^{-1}b$ es una solución; ya que A^{-1} es también una inversa izquierda, el inciso a) muestra que cualquier otra solución también debe ser igual a $A^{-1}b$. ■

Ahora se sabe que se pueden solucionar sistemas de ecuaciones mediante el uso de matrices inversas. Pero ¿cómo se obtienen las matrices inversas? Mediante la solución de sistemas de ecuaciones –¡exactamente el mismo tipo de problemas que se querían resolver desde un principio! En la práctica, como después se mostrará en detalle, es, por lo general, mucho más eficiente resolver el sistema de ecuaciones representado por $Ax = b$ directamente, que calcular primero A^{-1} y luego calcular $A^{-1}b$; véase el problema 27. Sin embargo, el *concepto y representación* de la solución como $x = A^{-1}b$ pueden ser muy poderosos para el entendimiento de ciertos aspectos de algunos problemas.

PROBLEMAS 1.4

- ▷ 1. Determine directamente si existe una inversa izquierda L para la matriz A del ejemplo 1.29; si existe, encuentre L .

2. Determine directamente si existe una inversa derecha \mathbf{R} para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 1.30; si existe, encuentre \mathbf{R} .
3. Demuestre que no existe una inversa izquierda ni una derecha para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 4. Encuentre todas las inversas izquierdas posibles para la matriz \mathbf{A} que aparece a continuación, y demuestre que no existe un inversa derecha para \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Utilice el MATLAB o algún programa similar para calcular \mathbf{XA} y \mathbf{AX} utilizando las matrices \mathbf{X} y \mathbf{A} del ejemplo 1.31 para probar si \mathbf{X} es la inversa exacta de \mathbf{A} o sólo una aproximación numérica muy cercana. (Note que es probable que la computadora no pueda representar de manera exacta a la matriz \mathbf{A} debido a las fracciones $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \dots$, etc.)
6. Utilice el MATLAB o algún programa similar para calcular la inversa de la matriz \mathbf{A} del ejemplo 1.31 y compare el resultado de su computadora con la matriz \mathbf{X} del ejemplo 1.31.
7. Demuestre el teorema 1.28 sobre las inversas izquierda y derecha.
- ▷ 8. a) Demuestre que \mathbf{L} es una inversa izquierda para la matriz \mathbf{A} si y sólo si \mathbf{L}^T es inversa derecha para \mathbf{A}^T .
 b) Demuestre que \mathbf{R} es una inversa derecha para la matriz \mathbf{A} si y sólo si \mathbf{R}^T es una inversa izquierda para \mathbf{A}^T .
9. La cancelación en las ecuaciones de matrices es válida si existen las inversas apropiadas.
 a) Suponga que \mathbf{A} tiene una inversa izquierda y que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$; demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
 b) Enuncie y demuestre un resultado análogo para las inversas derechas.
- ▷ 10. Para cada una de las matrices siguientes, determine si es una matriz no singular y –si lo es– encuentre su inversa.

a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. Muestre que \mathbf{A} es singular, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

▷ 12. Suponga que $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$.

a) Si $d_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq p$, demuestre que \mathbf{D} es no singular y que

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(1/d_1, \dots, 1/d_p).$$

b) Si algunos de los $d_i = 0$ demuestre que \mathbf{D} es singular.

13. Demuestre que la matriz general \mathbf{A} 2×2 mostrada abajo es no singular si y sólo si su determinante Δ —que se define como $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — no es cero, y que \mathbf{A}^{-1} es como se indica si $\Delta \neq 0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{si } \Delta \neq 0).$$

14. Complete la demostración del teorema 1.35 b) sobre la inversa de \mathbf{A}^{-1} .

▷ 15 Demuestre el teorema 1.35 c) sobre la inversa de \mathbf{A}^T y de \mathbf{A}^H .

16. Si \mathbf{A} es no singular, se puede definir la potencia matricial \mathbf{A}^r para enteros negativos r —aunque ciertamente no como el producto de r factores de \mathbf{A} como se hizo para enteros positivos r . Si n es un entero negativo y \mathbf{A} es no singular, entonces se define \mathbf{A}^n como $(\mathbf{A}^{-1})^{(-n)}$, donde el exponente $-n$ de la inversa de \mathbf{A} es ahora un entero positivo para el cual es válida la definición original. Demuestre que, para una \mathbf{A} no singular, el enunciado $\mathbf{A}^r \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$ es verdadero para todo entero r y s (independientemente de su signo).

17. Suponga que \mathbf{A} , \mathbf{B} , y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ son no singulares $p \times p$. Demuestre que $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ es también no singular, y que

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$$

y que esto a su vez es igual a $\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}$.

ℳ 18. Utilice el MATLAB o algún programa similar para verificar la fórmula del problema 17 cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 3\mathbf{I}_4.$$

▷ 19. Suponga que \mathbf{A} es no singular.

a) Demuestre que \mathbf{A} es simétrica si y sólo si \mathbf{A}^{-1} es simétrica.

b) Demuestre que \mathbf{A} es hermitiana si y sólo si \mathbf{A}^{-1} es hermitiana.

20. Suponga que \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices no singulares $p \times p$. Demuestre que \mathbf{ABC} es no singular y que

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

- ▷ 21. Suponga que $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ son matrices no singulares $p \times p$. Demuestre que el producto $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$ es no singular y que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

- ℳ 22. Sea \mathbf{B} la matriz simétrica 6×6 formada por los 36 elementos en la esquina superior izquierda de la matriz \mathbf{A} del ejemplo 1.31 –esto es, $\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para $1 \leq i \leq 6$ y $1 \leq j \leq 6$. Utilice el MATLAB o algún otro programa para calcular la inversa \mathbf{X} de \mathbf{B} y evaluar \mathbf{XB} y \mathbf{BX} para verificar si \mathbf{X} es una inversa exacta de \mathbf{B} o sólo una buena aproximación numérica.
- ℳ 23. Utilice el MATLAB o algún programa similar para estudiar las matrices simétricas 5×5

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & z \end{bmatrix}$$

y obtener diferentes valores reales de z como sigue:

- Demuestre que \mathbf{A}_5 es no singular, encontrando su inversa.
- Demuestre que \mathbf{A}_2 es no singular, encontrando su inversa.
- Demuestre que \mathbf{A}_0 es singular, intentando encontrar su inversa.
- Disminuyendo lentamente el valor de z desde 2, y tratando de encontrar los inversos de las matrices \mathbf{A}_z , encuentre el primer valor de z menor que 2 para el cual \mathbf{A}_z es singular.

(Nota: Las matrices \mathbf{A}_z en sus versiones $p \times p$ son importantes en la solución numérica de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, especialmente para una p muy grande.)

- ▷ 24. Encuentre las matrices \mathbf{A} , \mathbf{x} y \mathbf{b} para que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sea equivalente a las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y que se muestran abajo; además utilice la matriz \mathbf{A}^{-1} dada para resolver para x y y ; demuestre que \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{x} y \mathbf{y} son correctas.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -1 \\ 2x + 3y &= -1, \end{aligned} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

25. Encuentre las matrices \mathbf{A} , \mathbf{x} y \mathbf{b} para que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sea equivalente a las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y ; calcule y use \mathbf{A}^{-1} para resolver x y y .

$$3x - y = 2$$

$$-5x + y = -4$$

- ▷ 26. Calcule \mathbf{A}^{-1} y utilícela para resolver la ecuación $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escriba los sistemas de ecuaciones lineales en términos de x, y, u y v que sean equivalentes a $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

- PROBLEMA 27.** Considere el siguiente sistema de 10 ecuaciones lineales con 10 incógnitas x_1, x_2, \dots, x_{10} :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_4 + 2x_5 - x_6 &= 1 \\ -x_5 + 2x_6 - x_7 &= 1 \\ -x_6 + 2x_7 - x_8 &= 1 \\ -x_7 + 2x_8 - x_9 &= 1 \\ -x_8 + 2x_9 - x_{10} &= 1 \\ -x_9 + 2x_{10} &= 1. \end{aligned}$$

- a) Encuentre las matrices \mathbf{A} , \mathbf{x} y \mathbf{b} para que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sea equivalente a este sistema de ecuaciones.
- b) Utilice el MATLAB para calcular \mathbf{A}^{-1} y la solución como el producto de \mathbf{A}^{-1} y \mathbf{b} ; al introducir la instrucción *flops* del MATLAB tanto inmediatamente antes como inmediatamente después de este proceso de dos pasos, cuente el número de operaciones en punto flotante involucradas al encontrar a \mathbf{x} mediante este método.
- c) Utilice el MATLAB para encontrar \mathbf{x} directamente, introduciendo la instrucción del MATLAB $\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$, y utilice la instrucción *flops* del MATLAB como en el inciso b) para determinar el número de operaciones en punto flotante involucradas al encontrar a \mathbf{x} mediante este método.
- d) ¿Cuál es más eficiente, el método del inciso b) o el método del inciso c)?
28. Considere el análisis discreto de Fourier descrito para $N = 3$ en el problema 50 de la sección 1.3. La determinación de los coeficientes c_k a partir de los valores dados f_j requiere de la solución de $\mathbf{Zc} = \mathbf{f}$ en la notación de ese problema. Sea $\bar{\mathbf{Z}}$ la matriz 3×3 de los complejos conjugados de los elementos de \mathbf{Z} .
- a) Demuestre que $\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = 3\mathbf{I}_3$ y que $\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{3}\bar{\mathbf{Z}}$.
- b) Para la matriz \mathbf{Z} que se encontró explícitamente en el problema 50 c), utilice explícitamente el inciso a) para encontrar \mathbf{Z}^{-1} .
- c) Utilice \mathbf{Z}^{-1} para resolver la ecuación $\mathbf{Zc} = \mathbf{f}$ si $\mathbf{f} = [2 \quad -2 \quad 4]^T$.

▷ 29. En el problema 50 d) de la sección 1.3, se enunció que $\mathbf{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = \mathbf{Z}\mathbf{x}^T \square \mathbf{Z}\mathbf{y}^T$ en la notación de ese problema.

a) Mediante el problema 28 demuestre que la convolución $\mathbf{x} * \mathbf{y}$ puede calcularse como sigue

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = \frac{1}{3} \bar{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}\mathbf{x}^T \square \mathbf{Z}\mathbf{y}^T).$$

b) Verifique que la fórmula del inciso a) funciona correctamente cuando $\mathbf{x} = [2 \ -4 \ 2]$ y $\mathbf{y} = [-2 \ 6 \ 4]$.

30. Considere la transformada general discreta de Fourier \mathbf{Zc} de \mathbf{c} como se describió en el problema 51 de la sección 1.3. Como en el problema 28 de $N = 3$, muestre para cualquier N que $\mathbf{Z}\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = (N)\mathbf{I}_N$ y $\mathbf{Z}^{-1} = (1/N)\bar{\mathbf{Z}}$. Para resolverlo tendrá que considerar los siguientes hechos: 1) $z^N = 1$; 2) $(\bar{z})^N = 1$; 3) $1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = N$ si $r = 1$; y 4) $1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = (r^N - 1)/(r - 1)$ si $r \neq 1$.

31. Utilice el problema 52 de la sección 1.3 y el problema 30 para mostrar que la convolución $\mathbf{x} * \mathbf{y}$ de dos matrices renglón de $1 \times N$ puede calcularse como

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})^T = \frac{1}{N} \bar{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}\mathbf{x}^T \square \mathbf{Z}\mathbf{y}^T).$$

▷ 32. Utilice el problema 28 para encontrar la forma explícita de la serie de Fourier

$$s(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix}$$

como en el problema 50 de la sección 1.3, utilizando

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

si los valores $f_j = f(x_j)$ son: a) $f_1 = 0, f_2 = 4, f_3 = 16$; b) $f_1 = 2, f_2 = \sqrt{3} - 1, f_3 = -(\sqrt{3} + 1)$.

1.5 MATRICES SEPARADAS

En el ejemplo 1.27 de la sección anterior, las ecuaciones se tenían que resolver para encontrar una inversa derecha dividida en dos conjuntos y cada conjunto tenía sólo las variables formando una columna de la inversa derecha. Lo mismo sucedía en el ejemplo 1.29. Por otra parte, en el ejemplo 1.30, las variables en cada conjunto de ecuaciones formaban un renglón de la inversa izquierda—en vez de una columna de la inversa derecha.

Estos ejemplos muestran que, en ocasiones, es útil pensar en una matriz por partes o *separada* en sus renglones o en sus columnas; esto se vio antes en la definición del producto de matrices \mathbf{AB} , donde de hecho separamos \mathbf{A} en sus renglones y \mathbf{B} en sus columnas para poder formar el producto. De manera más general, a veces es útil pensar en una matriz como formada por varias matrices más pequeñas de diferentes formas. De este modo, se puede pensar en la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

en términos de sus columnas

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

escribiendo $\mathbf{A} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \mathbf{C}_3]$. O se puede pensar en \mathbf{A} en términos de sus renglones $\mathbf{R}_1 = [2 \ 0 \ -1]$ y $\mathbf{R}_2 = [1 \ 3 \ 2]$ escribiendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}.$$

Incluso se podría escribir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{A}_{11} = [2 \ 0]$, $\mathbf{A}_{12} = [-1]$, $\mathbf{A}_{21} = [1 \ 3]$, y $\mathbf{A}_{22} = [2]$; así consideramos a la matriz \mathbf{A} separada del siguiente modo:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Observe el uso de las líneas punteadas para indicar la separación cuando los elementos son números y no matrices.

- (1.39) **Definición.** Se dice que una matriz \mathbf{A} es separada cuando se dibujan líneas verticales punteadas que atraviesan la altura completa de la matriz entre columnas seleccionadas y líneas horizontales punteadas que atraviesan lo ancho de la matriz, dibujadas entre renglones seleccionados. Las pequeñas matrices que se forman a partir de los elementos contenidos dentro de los rectángulos formados por estas líneas se llaman *submatrices* de la partición o separación de \mathbf{A} .

Suponga que dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} $p \times q$ se separan del mismo modo mediante

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2],$$

donde \mathbf{A}_1 y \mathbf{B}_1 son $p \times r$ y \mathbf{A}_2 y \mathbf{B}_2 son $p \times (q - r)$; entonces resulta obvio que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \ \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2].$$

De modo similar, suponga que una matriz \mathbf{A} $p \times r$ se separa en

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

mientras que la matriz \mathbf{B} $r \times q$ se partitiona en

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}.$$

Resulta entonces claro que el producto \mathbf{AB} puede separarse así:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

siempre y cuando las submatrices sean tales que cada uno de los productos y sumas tenga sentido; para comprobar esto, sólo tiene que escribir el producto en sus dos formas, regular y separada, mostrando los elementos individuales, y verificar que los resultados sean iguales.

La regla general es como sigue:

- (1.40) Las matrices separadas pueden sumarse, restarse, multiplicarse entre sí y multiplicarse por escalares como si las submatrices fueran números, mientras que se conserve el orden correcto en los productos y las separaciones sean tales que las sumas, restas y productos estén bien definidos.

- (1.41) *Ejemplo.* Suponga que \mathbf{A} se separa en columnas como

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_q]$$

y \mathbf{x} en renglones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_q\mathbf{a}_q$.

- (1.42) *Ejemplo.* Es costumbre pensar en el producto \mathbf{AB} como la multiplicación de los renglones de \mathbf{A} por las columnas de \mathbf{B} . También es posible visualizar \mathbf{AB} en términos de las *columnas* de \mathbf{A} y los *renglones* de \mathbf{B} . Suponga que \mathbf{A} se separa en sus columnas y \mathbf{B} en sus renglones:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_r], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix}.$$

Cada \mathbf{a}_i es una matriz columna, mientras que cada \mathbf{b}_i es una matriz renglón. Según (1.40) se tiene

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_r\mathbf{b}_r,$$

que expresa el producto \mathbf{AB} en términos de las columnas de \mathbf{A} y los renglones de \mathbf{B} y no al contrario.

Las matrices separadas son útiles en una gran variedad de formas. Si un sistema físico de interés puede dividirse en varios subsistemas interconectados, el comportamiento del sistema completo puede describirse utilizando una matriz grande separada de tal modo que las submatrices que se encuentran a lo largo de la diagonal principal describan los subsistemas separados, y las submatrices fuera de la diagonal describan las interconexiones. Esto puede ayudar a aclarar la estructura de un sistema grande y complicado.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 15.

Matrices separadas e inversas

Nuestra discusión sobre las matrices separadas, se inició notando que las ecuaciones surgidas al buscar inversas se dividían en conjuntos involucrando incógnitas separadas; ahora se retornará a este tema. Por ejemplo, al buscar una inversa derecha \mathbf{R} para una matriz \mathbf{A} de $p \times q$, intentamos resolver $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ para una matriz \mathbf{X} (que sirva como \mathbf{R}). Separe \mathbf{X} en sus columnas como $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_p]$ y separes \mathbf{I} en sus columnas $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_p]$. De acuerdo a (1.40), el producto \mathbf{AX} se puede calcular como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_p] = [\mathbf{Ax}_1 \ \mathbf{Ax}_2 \ \cdots \ \mathbf{Ax}_p];$$

ya que cada \mathbf{Ax}_i es sólo una matriz columna, esta representación separa el producto \mathbf{AX} en sus columnas. Pero se quiere que \mathbf{AX} sea igual a \mathbf{I} , que se ha separado en sus columnas \mathbf{e}_i . Por lo tanto $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ es equivalente a

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{Ax}_p = \mathbf{e}_p.$$

De acuerdo a (1.36), cada una de estas ecuaciones $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$, es simplemente un conjunto de p ecuaciones lineales con q incógnitas (los q elementos en la matriz columna \mathbf{x}_i); observe que *los coeficientes en cada conjunto de ecuaciones son iguales –sólo los lados derechos difieren*. Existe una situación similar para encontrar inversas izquierdas.

Antes de enunciar formalmente estos resultados, necesitamos de una definición.

- (1.43) **Definición.** La matriz columna unidad i -ésima \mathbf{e}_i de orden p es la matriz columna de $p \times 1$ que es la i -ésima columna de la matriz identidad \mathbf{I}_p , $p \times p$: para $1 \leq j \leq p$, $\langle \mathbf{e}_i \rangle_j = 1$ si $i = j$ y $\langle \mathbf{e}_i \rangle_j = 0$ si $i \neq j$.

Ahora podemos resumir cómo, el problema de encontrar matrices inversas, se reduce al problema de solucionar varios conjuntos de ecuaciones lineales, cada una con la misma matriz de coeficientes. Más adelante esto resultará ser de extrema importancia para el desarrollo de procedimientos computacionales eficientes para la inversión de matrices en la práctica.

(1.44)

Teorema clave. Sea A una matriz de $p \times q$.

a) La matriz R $q \times p$, separada en columna como

$$R = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_p],$$

es una inversa derecha de A si y sólo si las r_i resuelven las ecuaciones

$$Ar_i = e_i \text{ para } 1 \leq i \leq p.$$

b) La matriz L $q \times p$, con transpuesta L^T $p \times q$ particionada en columnas como

$$L^T = [I_1 \ I_2 \ \cdots \ I_q],$$

es una inversa izquierda de A si y sólo si las I_i resuelven las ecuaciones $A^T I_i = e_i$ para $1 \leq i \leq q$.

c) Si $p = q$ de modo que A sea una matriz cuadrada, entonces la matriz X $p \times p$ es una inversa (bilateral) de A si y sólo si X satisface las condiciones para R en el inciso a) y para L en el inciso b).

DEMOSTRACION

- a) Se demostró en el material contenido antes de la definición 1.43
- b) Sabemos que siendo L una inversa izquierda de A significa que $LA = I_q$. Entonces $I_q = L^T = (LA)^T = A^T L^T$, y la condición $A^T L^T = I_q$ significa que L^T es una inversa derecha de A^T . De este modo se puede aplicar el resultado del inciso a) que ya fue demostrado para A^T , lo cual demuestra el inciso b).
- c) Sabemos que X es una inversa bilateral si y sólo si X es al mismo tiempo inversa izquierda e inversa derecha. Ya que los incisos a) y b) se han demostrado, X es una inversa bilateral si y sólo si se cumple a) con $X = R$ y b) con $X = L$. ■

PROBLEMAS 1.5

1. Encuentre la matriz A_1 3×2 y la matriz A_2 3×1 para que A sea separada como $A = [A_1 \ A_2]$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 2. Encuentre las submatrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 en las que debe separarse la matriz \mathbf{B} indicada abajo para usar la regla general (1.40) y sumarla a la matriz \mathbf{A} del problema 1. Después calcule $[\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \ \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2]$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ directamente y muestre que las sumas son iguales.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & -8 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sean $\mathbf{C} = [1 \ -2 \ 4]$ y \mathbf{A} la matriz del problema 1. Calcule de manera directa $[\mathbf{CA}_1 \ \mathbf{CA}_2]$ y \mathbf{CA} , y verifique que los productos sean los mismos.
 4. Sean

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = [1 \ 4], \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Evalúe cada una de las expresiones siguientes tanto en forma separada como directamente y verifique que los resultados sean los mismos

$$\text{a) } [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2]^T \quad \text{b) } [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2^T$$

- ▷ 5. Evalúe \mathbf{AB} en forma separada y directamente, y verifique que los resultados sean los mismos, donde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 6 & 3 \end{array} \right] \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

6. Demuestre que, si \mathbf{B} se separa como se indica, entonces \mathbf{B}^T es como se indica.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^T & \mathbf{B}_{21}^T \\ \mathbf{B}_{12}^T & \mathbf{B}_{22}^T \end{bmatrix}$$

- ▷ 7. Verifique (1.41) que $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_q\mathbf{a}_q$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

8. Demuestre (1.41) que $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_q\mathbf{a}_q$ en el caso general, comprobando que se satisface la definición de matrices iguales.

9. Verifique (1.42) calculando \mathbf{AB} en términos de las *columnas* de \mathbf{A} y de los *renglones* de \mathbf{B} para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 - 2i & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2i & -1 \\ 3 & 6 \\ -1 & 2 + i \end{bmatrix}.$$

- 10 Demuestre (1.42) calculando \mathbf{AB} en términos de las *columnas* de \mathbf{A} y de los *renglones* de \mathbf{B} en el caso general, mediante la comprobación de la definición de matrices iguales.

- ▷ 11. Suponga que \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices cuadradas.

- a) Si cualquiera de las tres matrices es singular, demuestre que la matriz separada $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ que se indica es singular.
 b) Si las tres matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son no singulares, demuestre que la matriz \mathbf{D} es no singular y que su inversa es

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}),$$

como se indica abajo.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix}$$

- ▷ 12. Sean \mathbf{A}_3 y \mathbf{A}_4 las matrices 5×5 definidas en el problema 23 de la sección 1.4 y sea

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}.$$

- a) Utilice el MATLAB para calcular \mathbf{D}^{-1} mediante el uso del análogo del método del problema 11, introduciendo el comando *flops* del MATLAB inmediatamente antes e inmediatamente después de los cálculos; determine además cuántas operaciones de punto flotante se usaron para invertir \mathbf{D} con este método.
 b) Utilice el MATLAB para calcular la inversa de \mathbf{D} de manera directa, nuevamente, utilizando el comando *flops* para medir el trabajo involucrado.
 c) ¿Qué método es más eficiente?

- ▷ 13. Sea \mathbf{A} una matriz no singular $p \times p$, \mathbf{u} y \mathbf{v} matrices columna $p \times 1$, y d un número. Demuestre que la matriz *limitada* $\hat{\mathbf{A}}$, que se define en seguida, es no singular si y sólo si el número δ que se define con $\delta = d - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}$ es diferente de cero, y que la inversa de $\hat{\mathbf{A}}$ es entonces como sigue:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{w} \\ \mathbf{z}^T & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix} \quad \text{si } \delta \neq 0,$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} + (1/\delta)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{w} = -(1/\delta)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$, $\mathbf{z}^T = -(1/\delta)\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$. Además, demuestre que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \delta\mathbf{w}\mathbf{z}^T$. (Observe que esto prueba que una vez que se conoce la inversa de una matriz \mathbf{F} dada, es fácil calcular la inversa de una matriz obtenida a partir de \mathbf{F} , ya sea agregando un renglón o columna a \mathbf{F} o eliminando un renglón o columna de \mathbf{F} .)

- PROBLEMA 14.** Considere la matriz simétrica \mathbf{A} 7×7 y su inversa dada en el ejemplo 1.31 de la sección 1.4.

- Utilice el MATLAB o algún programa similar para encontrar la inversa de la matriz 8×8 , mediante el método del problema 13, que se obtuvo agregando un renglón y una columna a \mathbf{A} , que amplía el patrón obvio en los elementos de \mathbf{A} .
- Utilice el MATLAB o algún otro programa similar para encontrar la inversa de la matriz 6×6 , mediante el método del problema 13, que se obtuvo eliminando el séptimo renglón y la séptima columna de \mathbf{A} .

- PROBLEMA 15.** Considere el *producto Kronecker* $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, definido en el problema 10 de la sección 1.3 para toda matriz \mathbf{A} $p \times q$ y toda matriz \mathbf{B} $r \times s$.

- Demuestre que un modo equivalente de definir el producto $\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ es como aquella matriz $pr \times qs$ separada en pq submatrices \mathbf{C}_{ij} cada una $r \times s$, donde $\mathbf{C}_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \mathbf{B}$ y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1q} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{C}_{p1} & \mathbf{C}_{p2} & \cdots & \mathbf{C}_{pq} \end{bmatrix}.$$

- b) Demuestre que, para toda matriz \mathbf{A} ,

$$[1] \odot \mathbf{A} = \mathbf{A} \odot [1] = \mathbf{A}.$$

- c) Demuestre que, para toda matriz \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{D} ,

$$\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} + \mathbf{A} \odot \mathbf{D}.$$

- PROBLEMA 16.** Utilice el método del teorema 1.44 c) para encontrar la inversa de la matriz \mathbf{A} mostrada abajo, y verifique que es una inversa izquierda y derecha.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

- PROBLEMA 17.** Utilice el método del teorema 1.44 c) para encontrar la inversa de la matriz \mathbf{A} mostrada abajo, y verifique que es una inversa izquierda y derecha.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- PROBLEMA 18.** a) Encuentre la segunda columna de la inversa de la matriz \mathbf{A} , que se muestra abajo.

- b) Encuentre el tercer renglón de la inversa de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

▷ 19. Encuentre el segundo renglón de la inversa izquierda de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

■■ 20. Sea \mathbf{A} la matriz de 10×10 del problema 27 a) de la sección 1.4.

- a) Utilice el MATLAB para calcular directamente \mathbf{A}^{-1} ; introduciendo el comando del MATLAB *flops* inmediatamente antes e inmediatamente después de esta operación, obtenga el número de operaciones en punto flotante, utilizados para calcular \mathbf{A}^{-1} de este modo.
- b) Utilice el MATLAB para calcular \mathbf{A}^{-1} resolviendo los 10 sistemas $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ como en el teorema 1.44 c) con las matrices de columna unidad \mathbf{e}_i ; use el comando *flops* para medir el trabajo hecho en el cálculo \mathbf{A}^{-1} mediante este método.
- c) ¿Qué método es más eficiente?

1.6 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 1.6

1. Sea $k \neq 0$ un número diferente de cero; demuestre por inducción que para todo entero positivo n :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & k \sin \theta \\ -\frac{1}{k} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & k \sin n\theta \\ -\frac{1}{k} \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

{“Demostrar por inducción” significa: a) verificar para $n = 1$; b) demostrar que si el resultado es verdadero para cualquier n , entonces es verdadero para $n + 1$. }

- ▷ 2. a) Encuentre todas las matrices reales \mathbf{A} para la cual $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
b) Encuentre todas las matrices \mathbf{B} para la cual $\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{0}$.
- ▷ 3. Suponga que \mathbf{K} es una matriz cuadrada con $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^T$ y que $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ es no singular, defina \mathbf{B} como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1}.$$

Demuestre que $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$, o sea que \mathbf{B}^{-1} es \mathbf{B}^T (dicha \mathbf{B} se dice que es una *matriz ortogonal*).

▷ 4. Demuestre que:

- Si \mathbf{A} tiene un renglón de ceros completo, entonces \mathbf{A} no tiene inversa derecha.
- Si \mathbf{A} tiene una columna de ceros completa, entonces \mathbf{A} no tiene inversa izquierda.
- Si \mathbf{A} es cuadrada y tiene ya sea un renglón completo o una columna completa de ceros, entonces \mathbf{A} es singular.

5. Si los elementos $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ de una matriz \mathbf{A} son funciones de una variable t , definimos la derivada $d\mathbf{A}/dt$ como la matriz de derivadas: $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle_{ij} = d\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}/dt$.

- Si \mathbf{AB} está definida, demuestre que

$$\frac{d(\mathbf{AB})}{dt} = \mathbf{A} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) + \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \mathbf{B}.$$

- Si \mathbf{A} es no singular, diferencie $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ para obtener

$$\frac{d(\mathbf{A}^{-1})}{dt} = -\mathbf{A}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \mathbf{A}^{-1}.$$

▷ 6. Para una matriz cuadrada \mathbf{A} , defina la *traza* de \mathbf{A} , $\text{tr}(\mathbf{A})$, como la suma de los elementos sobre la diagonal principal de \mathbf{A} . a) Demuestre que $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$. b) Demuestre que $\text{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ si \mathbf{S} es no singular.

7. Si en forma separada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{P} son no singulares, demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{W} \\ -\mathbf{W}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{W} \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{W} = (\mathbf{S} - \mathbf{RP}^{-1}\mathbf{Q})^{-1}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{WRP}^{-1}.$$

De manera similar, si \mathbf{A} y \mathbf{S} son no singulares, demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{XQS}^{-1} \\ -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{RX} & \mathbf{W} \end{bmatrix},$$

en donde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{P} - \mathbf{QS}^{-1}\mathbf{R})^{-1}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{RXQS}^{-1}.$$

Si \mathbf{P} y \mathbf{S} son no singulares, demuestre directamente que las formas son equivalentes. Compruebe que

$$(\mathbf{S} - \mathbf{RP}^{-1}\mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{RXQS}^{-1},$$

un resultado útil en las aplicaciones. Vea el final de la subsección de la sección 3.8, donde la fórmula se deriva desde un punto de vista diferente.

2

Algunas aplicaciones simples y preguntas

Este capítulo tiene dos metas: 1) mostrar el poder de las matrices en la organización y clarificación de conjuntos complicados de relaciones; y 2) alentar algunas preguntas naturales sobre las matrices que surgen de las aplicaciones prácticas –como una motivación para continuar con algunos de los estudios posteriores.

Ya que el capítulo no contiene teoremas ni demostraciones, no contiene material clave, y más bien presenta una amplia variedad de aplicaciones de las matrices en diversos campos, algunos de los cuales serán de importancia y de interés para la mayoría de los estudiantes. La información sobre las matrices, necesaria para comprender este capítulo, es tan sólo el álgebra matricial presentada en el capítulo 1.

Las secciones de este capítulo se utilizan como una fuente de motivación y ejemplos para capítulos posteriores. Algunas de las preguntas que se generan en las secciones 2.2, 2.3 y 2.5 originan parte del material de los capítulos 7, 8 y 9. El capítulo 3 se sustenta en las preguntas de las secciones restantes de este capítulo, y el capítulo 4 en las secciones 2.4 y 2.6. El capítulo 8 hace referencia a los artículos de la sección 2.6, mientras que el capítulo 11 se dedica a la sección 2.7.

2.1 INTRODUCCION

En muchas aplicaciones, la utilidad de las matrices surge del hecho de que pueden representar un arreglo de muchos números como un solo objeto design-

nado mediante un solo símbolo, permitiendo que las relaciones entre las variables puedan expresarse de un modo conciso. En realidad, no se realiza nada que no pudiera hacerse sólo en términos de los elementos de las matrices, pero la notación matricial con frecuencia hace que se vea más claramente la relación esencial.

En la sección 2.2 se considera una aplicación de las matrices en un modelo simple de la situación en el mercado, en el cual los clientes cambian de abastecedores; la sección 2.3 estudia el uso de las matrices en un modelo de competencia entre poblaciones. Ambas aplicaciones, en el lenguaje de las matrices, se reducen esencialmente, al estudio de la multiplicación de matrices y –de manera más precisa– al comportamiento de las potencias positivas grandes de una matriz fija; se generan preguntas sobre tales potencias para las cuales se desarrollarán las herramientas de uso necesarias.

La sección 2.4 examina una aplicación que conduce a algunas preguntas sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; el tema es el estudio del equilibrio estático de redes, especialmente en marcos unidos con pasador.

Después se examina un fenómeno oscilatorio simple, un tema importante en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. La sección 2.5 estudia la oscilación de dos pesos atados por hilos; esto arroja preguntas sobre las matrices que dependen de parámetros y sobre cómo encontrar los valores de dichos parámetros, los cuales hacen que la matriz sea singular. Esto da motivo al estudio posterior de los llamados *eigenvalores*.

Un tema que ocupa el total de las matemáticas aplicadas es el del modelado: ¿Cómo se pueden construir modelos matemáticos que reflejen de manera, lo suficientemente precisa, las propiedades del mundo real? Uno de los aspectos de este problema es: dado que un modelo de una situación del mundo real ha de ser de cierto tipo y forma dependiendo de ciertos parámetros, ¿cómo se determinan los valores de estos parámetros? El *método de los mínimos cuadrados* se introduce en la sección 2.6 para iniciar este tema; surgen preguntas sobre si las ecuaciones lineales que se generan tienen soluciones y –si las tienen– sobre cómo encontrarlas.

En la sección 2.7 se considera un modelo simple de la planeación de producción, que lleva a la necesidad de resolver lo que se llama un *programa lineal*. Tales problemas dan un ejemplo excelente del poder de la metodología matricial.

2.2 COMPETENCIA ENTRE NEGOCIOS: CADENAS DE MARKOV

Muchos modelos matemáticos en la ciencia, la ingeniería y los negocios tienen que cubrir los aspectos de la *oportunidad* y el *azar*; no se puede saber con certeza lo que harán nuestros competidores, la bolsa de valores, una partícula subatómica, y así sucesivamente. Tales modelos utilizan las herramientas matemáticas de la *teoría de la probabilidad* para hacer, entre otras cosas, predicciones sobre el comportamiento *promedio* de estos modelos. Se carece de espacio para tratar la teoría de la probabilidad en este libro; en vez de ello se examina un modelo

simple determinístico—en lugar de probabilístico—que lleva a un aspecto clave de los modelos probabilísticos: la *cadena de Markov*.

Un modelo de competencia entre tres lecherías

Se ilustra la noción de la cadena de Markov mediante la consideración de una competencia entre lecherías que surten el producto leche a cierta población. Con el tiempo, algunos clientes cambian de repartidor por diferentes razones: publicidad, costo, conveniencia, etc. Se desea modelar y analizar el movimiento de los clientes entre los proveedores, suponiendo, por simplicidad, que la misma fracción de los clientes cambiará de una lechería cualquiera a otra durante cada periodo de tiempo (digamos, un mes).

Suponga que al comenzar nuestro modelo—digamos, el 31 de diciembre— las tres lecherías, llamadas lecherías 1, 2 y 3 controlan las fracciones x_0 , y_0 y z_0 (respectivamente) del mercado; suponiendo por simplicidad que estas lecherías fueran las únicas repartidoras, se observa que las fracciones deben ascender a 1: $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

Suponga que después de un mes la lechería 1 ha logrado mantener la fracción a_{11} de sus propios clientes y además ha atraído las fracciones a_{12} de los clientes de la lechería 2 y a_{13} de la lechería 3. Supóngase que el número total de clientes permanece constante en, digamos, N , con lo que puede trasladarse a una fórmula el hecho de que el número de clientes de la lechería después de un mes, es igual al número de clientes que permanecieron en ella, más el número de clientes que adquirió de la lechería 2, más el número de clientes que adquirió de la lechería 3. Sea x_1 la fracción del mercado que tiene la lechería 1 después de un mes y se tiene entonces

$$x_1N = a_{11}(x_0N) + a_{12}(y_0N) + a_{13}(z_0N).$$

Se obtienen ecuaciones similares para el número de clientes de las lecherías 2 y 3 después de un mes, en términos de sus nuevas partes y_1 y z_1 . Al separar estas ecuaciones de N se obtiene:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 \\ y_1 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 \\ z_1 &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0, \end{aligned}$$

donde a_{ii} = fracción de los clientes de la lechería i , conservada por la lechería i .

a_{ij} = fracción de los clientes de la lechería j , perdidos por la lechería i ($i \neq j$).

Las matrices expresan esto de una manera concisa como

$$(2.2) \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0,$$

donde $\mathbf{x}_r = [x_r \ y_r \ z_r]^T$ para $r = 0$ o 1 y $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = a_{ij}$.

Ya que las fracciones a_{ij} son partes del mercado, obviamente $0 \leq a_{ij} \leq 1$. Observe también, que de los clientes originales de la lechería 1, la fracción A_{11} permanece con la lechería 1, la fracción a_{21} pasa a la lechería 2, y la fracción a_{31} pasa a la lechería 3; ya que estas fracciones deben considerar todos los clientes originales de la lechería 1, encontramos que $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1$. Aplicar el mismo argumento a las lecherías 2 y 3 produce el hecho de que

(2.3) $0 \leq a_{ij} \leq 1$ para toda i y j , y la suma de las entradas en cada columna de \mathbf{A} es 1:

$$a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3;$$

$$\text{en forma equivalente } 0 \leq \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \leq 1 \quad \text{para toda } i \text{ y } j, \text{ y}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{1i} + \langle \mathbf{A} \rangle_{2i} + \langle \mathbf{A} \rangle_{3i} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Se le conoce a la matriz \mathbf{A} como la *matriz de transición* para el modelo; observe que en gran parte de la literatura, las matrices de transición se definen como la transpuesta de nosotros.

Por simplicidad, se supone que las fracciones a_{ij} de clientes que cambian de repartidores permanece igual cada mes. Si se utilizan x_r , y_r y z_r como los símbolos que designan las fracciones del total de clientes que conserva cada lechería al final de r meses, entonces no sólo se tiene (2.2) para la transición después de un mes sino también

(2.4) $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{Ax}_r \quad \text{para } r = 0, 1, 2, \dots,$

$$\text{donde } \mathbf{x}_r = [x_r \ y_r \ z_r]^T.$$

Ya que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{Ax}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$ y de manera similar para \mathbf{x}_r , se obtiene de modo general:

(2.5) $\mathbf{x}_r = \mathbf{A}^r\mathbf{x}_0 \quad \text{para } r = 0, 1, 2, \dots.$

Ahora podrá resolver los problemas 1 y 2.

Intuitivamente resulta obvio que las partes x_r , y_r , z_r del mercado deben siempre sumar 1; se demuestra que esto, de hecho, se sigue de $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ y de las propiedades de \mathbf{A} . Para hacerlo, se utiliza el poder de la notación matricial: se define $\mathbf{1}_3$ como la matriz columna de 3×1 $\mathbf{1}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$, para que

$$\mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_r = [1 \ 1 \ 1] [x_r \ y_r \ z_r]^T = [x_r + y_r + z_r].$$

Por lo tanto, el problema radica en mostrar que $\mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_r = [1]$ para toda r , lo cual se hará en seguida. Ya que la suma de los elementos en cada columna de \mathbf{A} es 1, resulta claro que

$$\mathbf{1}_3^T \mathbf{A} = [1 \quad 1 \quad 1] = \mathbf{1}_3^T.$$

Ya que $[1] = \mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_0$, $\mathbf{1}_3^T \mathbf{A} = \mathbf{1}_3^T$, se razona que

$$[1] = \mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_0 = (\mathbf{1}_3^T \mathbf{A}) \mathbf{x}_0 = \mathbf{1}_3^T (\mathbf{A} \mathbf{x}_0) = \mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_1$$

ya que $\mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$, examinando el extremo izquierdo y el extremo derecho de estas igualdades, se observa que $[1] = \mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_1$. Al continuar de este modo –un argumento preciso requeriría de inducción– se concluye, como se deseaba, que $[1] = \mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_r$ para toda r .

- (2.6) *Ejemplo.* Se considera concretamente un ejemplo numérico para ilustrar las ideas anteriores. Suponga que \mathbf{x}_0 son las partes iniciales del mercado y que la matriz de transición \mathbf{A} es

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Observe que (2.3) se cumple. Fácilmente –en especial si se usa el MATLAB o algún programa similar– se obtiene $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \mathbf{x}_1$, y así sucesivamente mediante la multiplicación de matrices; redondeados a tres decimales, algunos resultados representativos son

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.38 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.327 \\ 0.398 \\ 0.275 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.442 \\ 0.357 \\ 0.201 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{16} = \begin{bmatrix} 0.450 \\ 0.350 \\ 0.200 \end{bmatrix}.$$

Al formar $\mathbf{x}_{17} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{16}$, se encuentra que $\mathbf{x}_{17} = \mathbf{x}_{18}$, que significa que de hecho todas las \mathbf{x}_r para $r \geq 16$ son iguales, es decir, \mathbf{x}_{16} , como se dio arriba. En otras palabras, las partes del mercado después de 16 meses se volvieron constantes (al menos hasta tres decimales). En 45, 35 y 2% el mercado está *en equilibrio*.

Comportamiento límite y equilibrio

Se quiere averiguar si el equilibrio alcanzado en el ejemplo 2.6 ocurre de manera más general que en ese caso especial. Se examina si las matrices columna \mathbf{x}_r pudieran tender a alguna matriz columna límite \mathbf{x}_∞ a medida que r crece. Ya que $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_r$, si \mathbf{x}_k tiende a \mathbf{x}_∞ , se sigue que $\mathbf{x}_\infty = \mathbf{A} \mathbf{x}_\infty$; de modo similar, ya que se

tiene $\mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_r = [1]$ para toda r , se sigue que, también, $\mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_\infty = [1]$. En resumen se tiene lo siguiente:

160415

- (2.7) Si las \mathbf{x}_r tienden a un límite $\mathbf{x}_\infty = [x_\infty \ y_\infty \ z_\infty]^T$, entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}_\infty \quad y \quad x_\infty + y_\infty + z_\infty = 1.$$

Ya que \mathbf{A} es 3×3 , la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}_\infty$ representa tan sólo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; la última condición en (2.7) se combina con esto para dar como resultado un sistema de cuatro ecuaciones lineales en las tres incógnitas x_∞ , y_∞ , y z_∞ . Esto es, si \mathbf{x}_r tiende a un límite, los candidatos posibles para el límite se pueden encontrar al resolver un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

- (2.8) **Ejemplo.** De modo concreto, considere nuevamente el modelo del ejemplo 2.6. Si las \mathbf{x}_r tienden a cierta \mathbf{x}_∞ –como parece– entonces, \mathbf{x}_∞ satisface a (2.7). Al escribir esas cuatro ecuaciones con tres incógnitas x_∞ , y_∞ , z_∞ , se tiene

$$\begin{aligned} 0.8x_\infty + 0.2y_\infty + 0.1z_\infty &= x_\infty \\ 0.1x_\infty + 0.7y_\infty + 0.3z_\infty &= y_\infty \\ 0.1x_\infty + 0.1y_\infty + 0.6z_\infty &= z_\infty \\ x_\infty + y_\infty + z_\infty &= 1. \end{aligned}$$

Con algún esfuerzo se podría usar álgebra de secundaria para resolver este sistema de ecuaciones lineales, descubriendo que tiene exactamente una solución, es decir

$$x_\infty = 0.45, \quad y_\infty = 0.35, \quad z_\infty = 0.20,$$

que es precisamente lo que se encontró experimentalmente en el ejemplo 2.6. Aún no se ha *probado* que las \mathbf{x}_r tiendan, de hecho, a algún límite, pero *si* está demostrado que el único límite *possible* es $[0.45 \ 0.35 \ 0.20]^T$ –que de ningún modo depende de las contribuciones iniciales en el mercado!

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 18.

Volviendo al caso general, se debe recordar que todo límite posible de \mathbf{x}_r debe satisfacer a (2.7). Para el caso general, se desea saber:

1. ¿Cómo se puede determinar si –como en el ejemplo 2.8– las ecuaciones en (2.7) tienen alguna solución?
2. ¿Cómo se pueden obtener estas soluciones?

Aun cuando se pudiera responder a estas preguntas, todavía no sabríamos si las \mathbf{x}_r tienden de hecho a un límite. Aún queda la duda:

3. ¿Cómo se puede decir si \mathbf{x}_r tiende a un límite?

En este momento se carece de las herramientas para responder a estas preguntas; en los capítulos 3 y 9 se desarrollarán los elementos necesarios.

Comportamiento límite de las potencias de matrices

Existe otro método para comprender el comportamiento general de \mathbf{x}_r . Recuerde que $\mathbf{x}_r = \mathbf{A}^r \mathbf{x}_0$; si se puede comprender el comportamiento de \mathbf{A}^r para una r grande, entonces se puede deducir el comportamiento de \mathbf{x}_r para una r grande.

- (2.9) **Ejemplo.** Considere la matriz \mathbf{A} en el modelo del ejemplo 2.6. Los cálculos, redondeados a tres cifras, muestran que

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.31 & 0.20 \\ 0.18 & 0.54 & 0.40 \\ 0.15 & 0.15 & 0.40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 0.536 & 0.405 & 0.338 \\ 0.278 & 0.407 & 0.412 \\ 0.188 & 0.188 & 0.250 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^8 = \begin{bmatrix} 0.462 & 0.445 & 0.432 \\ 0.339 & 0.356 & 0.365 \\ 0.199 & 0.199 & 0.203 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{16} = \begin{bmatrix} 0.450 & 0.450 & 0.450 \\ 0.350 & 0.350 & 0.350 \\ 0.200 & 0.200 & 0.200 \end{bmatrix},$$

y todas las potencias superiores a \mathbf{A} son iguales a \mathbf{A}^{16} hasta tres cifras decimales. En este caso en particular, resulta que \mathbf{A}^r tiende a una matriz límite \mathbf{A}_∞ .

El ejemplo 2.9 muestra que se podría tener éxito en el estudio de \mathbf{x}_r estudiando a \mathbf{A}^r para una r grande. Agregamos una cuarta pregunta a las anteriores que deseábamos responder:

4. ¿Cómo se puede distinguir si las potencias \mathbf{A}^r tienden a un límite \mathbf{A}_∞ , y cómo se le puede encontrar si existe?

Más adelante se conocerá la respuesta a esta pregunta así como la de las tres preguntas anteriores.

Cadenas de Markov

El modelo general que se ha considerado es un ejemplo sencillo de una cadena de Markov (de primer orden). De manera más general, suponga que se desea estudiar cierto sistema –tal como la competencia entre lecherías– el cual se

describe en cualquier momento en el tiempo mediante los valores de p variables –como las partes de mercado de $p = 3$. Si se escriben estos valores como los elementos de una matriz, $p \times 1$, \mathbf{x}_r , en el r -ésimo instante de tiempo, entonces estos *vectores de estado* \mathbf{x}_r , describen el sistema. Entonces, si \mathbf{A} es una matriz $p \times p$, la ecuación $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_r$, describe la evolución del estado del sistema en el tiempo. Usualmente se desea conocer el comportamiento de \mathbf{x}_r , o \mathbf{A}^r para una r grande; con frecuencia esto es posible bajo suposiciones especiales de \mathbf{A} –tales como (2.3) además de condiciones adicionales.

PROBLEMAS 2.2

1. Demuestre que la ecuación matricial (2.2) expresa las relaciones escritas en (2.1)
2. Mediante inducción, demuestre que las $\mathbf{x}_r = \mathbf{A}^r\mathbf{x}_0$ de (2.5) se mantienen, dado (2.4).
3. Suponga que –en lugar de lo que se dio en el ejemplo 2.6– las partes iniciales \mathbf{x}_0 en el ejemplo 2.6 son $\mathbf{x}_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0]^T$.
 - Después de un mes
 - Después de dos meses
- ▷ 4. Tres compañías, 1, 2 y 3, introducen al mercado simultáneamente marcas nuevas de pasta dental. Al principio, las acciones iniciales del mercado disponible son de 40, 20 y 40%, respectivamente. Durante el primer año, la compañía 1 mantuvo el 85% de su clientela, obtuvo el 15% de la clientela de la compañía 2, y el 5% de la compañía 3; la compañía 2 obtuvo el 5% de la clientela de la compañía 1, retuvo el 75% de su propia clientela, y obtuvo el 5% de la de la compañía 3; y la compañía 3 obtuvo el 10% de la clientela de la compañía 1, el 10% de la compañía 2 y retuvo el 90% de su propia clientela. Suponiendo que el mero total que se comparte en estas tres compañías no varía y que cada año se intercambian entre ellas las mismas fracciones:
 - Escriba en la forma (2.1) cómo se cambian las acciones del mercado de un año a otro.
 - Encuentre la matriz de transición \mathbf{A} .
5. Para la situación descrita en el problema 4, calcule el estado de las acciones del mercado
 - Después de un año.
 - Después de dos años.
- ▷ 6. Suponga que la ocupación de cada persona puede clasificarse como de profesional, calificado, o no calificado. Suponga que siempre es cierto que: de los hijos de profesionales, 70% son profesionales, 20% son calificados, y 10% son no calificados; de los hijos de personas calificadas, 60% son

calificados, 20% son profesionales, y 20% son no calificados; y de los hijos de no calificados, 20% son profesionales, 30% son calificados y 50% son no calificados. Suponga que el número total de personas con una ocupación es el mismo cada generación, y que en la generación actual, 35% son profesionales, 35% son calificados, y 30% son no calificados.

- Escriba en la forma (2.1) cómo evoluciona el porcentaje de cada tipo de ocupación de un año a otro.
- Encuentre la matriz \mathbf{A} de transición.

- Para la situación descrita en el problema 6, encuentre la distribución de trabajos:
 - Después de una generación
 - Después de dos generaciones

- Para la matriz general \mathbf{A} de (2.2), demuestre que $\mathbf{1}_3^T \mathbf{A} = \mathbf{1}_3^T$.

- Demuestre por inducción que, para el modelo (2.3-4), $\mathbf{1}_3^T \mathbf{x}_r = [1]$ para toda $r \geq 1$.

▷ 10. Resolviendo las ecuaciones de (2.7), encuentre el estado de equilibrio –si existe– del mercado para la situación descrita en el problema 4.

11. Resolviendo las ecuaciones en (2.7), encuentre la distribución de equilibrio –si existe– entre los tipos de empleados para la situación en el problema 6.

12. Utilice el MATLAB o software similar para verificar el comportamiento de \mathbf{x}_r mencionado en el ejemplo 2.6.

▷ 13. Utilice el MATLAB o software similar para comprobar experimentalmente si las acciones del mercado en el problema 4 convergen en un conjunto límite de acciones conforme pasa el tiempo.

14. Utilice el MATLAB o software similar para comprobar experimentalmente si la distribución de empleo en el problema 6 converge en una distribución límite conforme pasa el tiempo.

15. Utilice el MATLAB o software similar para comprobar experimentalmente si las acciones del mercado en el problema 3 convergen en un conjunto límite de acciones conforme pasa el tiempo.

16. Suponga que la matriz \mathbf{A} mostrada abajo es la matriz de transición para un problema del tipo que se considera en esta sección.

- Demuestre que satisface (2.3).
- Resolviendo las ecuaciones en (2.7), demuestre que hay infinitamente muchas posiciones de equilibrio $\mathbf{x}_\infty = [\alpha \ 1 - 2\alpha \ \alpha]^T$, para una α arbitraria con $0 \leq \alpha \leq 0.5$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▷ 17. Demuestre que para la situación del problema 16, dada \mathbf{x}_0 , la secuencia de estados \mathbf{x}_r no tiende a algún valor a menos que \mathbf{x}_0 misma sea una posición de equilibrio.
- ℳ 18. Utilice el MATLAB o algún software similar para verificar que las potencias \mathbf{A}^r se comportan como se describe en el ejemplo 2.9.
- ℳ 19. Para la matriz \mathbf{A} del problema 4, utilice el MATLAB o software similar para determinar el comportamiento de \mathbf{A}^r para r grande.
- ℳ 20. Para la matriz \mathbf{A} del problema 6, utilice el MATLAB o software similar para determinar el comportamiento de \mathbf{A}^r para r grande.
- ▷ 21. Para la matriz \mathbf{A} del problema 16, demuestre a mano que las potencias \mathbf{A}^r no convergen en ninguna matriz \mathbf{A}_∞ .

2.3 CRECIMIENTO DE LA POBLACION: POTENCIAS DE UNA MATRIZ

En la sección anterior se consideró un modelo de la evolución de un sistema; en dicho caso se encontró que $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{Ax}_r$ moldeaba el comportamiento del sistema y que la matriz \mathbf{A} satisfacía algunas condiciones muy especiales (2.3) que son comunes a las cadenas de Markov. En muchas aplicaciones se puede moldear la evolución de un sistema mediante $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{Ax}_r$, y sin embargo encontrar que las condiciones especiales (2.3) no se satisfacen; tales sistemas pueden exhibir un comportamiento muy diferente del que se encontró en la sección anterior. Consideramos un ejemplo simple para ilustrar esto.

Modelaje del crecimiento de una población

En esta sección se crea y estudia un modelo simple del crecimiento de poblaciones a lo largo del tiempo. Imagine que se cuenta la población en ciertos puntos discretos en el tiempo –tal como cada año o cada mes, o cada segundo– siendo p_i el número de individuos en la población en el punto i -ésimo del tiempo. Aquí no es importante la *naturaleza* de estos individuos –personas, gallinas, bacterias, etc.– sino su *número*. El modelo supone que la tasa de natalidad b y la tasa de mortalidad d son independientes del tiempo, y que se conocen estos números. Así que el número de individuos nacidos entre los tiempos i -ésimo y $(i+1)$ -ésimo es tan sólo de bp_i , mientras el número de individuos que mueren es dp_i . Esto da $p_{i+1} - p_i = bp_i - dp_i$, esto es

$$(2.10) \quad p_{i+1} = (1 + b - d)p_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

Como entonces

$$p_{i+1} = (1 + b - d)p_i = (1 + b - d)\{(1 + b - d)p_{i-1}\} = (1 + b - d)^2 p_{i-1},$$

y así sucesivamente, se puede concluir que

$$(2.11) \quad p_{i+1} = (1 + b - d)^i p_1 \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots,$$

donde p_1 es la población inicial. A partir de (2.11) se analiza fácilmente el comportamiento de la población en el tiempo: a) si la tasa de natalidad excede la tasa de mortalidad, entonces $1 + b - d > 1$ y p_i tiende a infinito con i ya que $(1 + b - d)^i$ tiende a infinito; b) si la tasa de mortalidad excede la tasa de natalidad, entonces $1 + b - d < 1$ y p_i tiende a cero ya que $(1 + b - d)^i$ tiende a cero.

- (2.12) **Ejemplo.** Suponga la tasa de natalidad $b = 0.2$ mientras que la tasa de mortalidad $d = 0.1$; entonces $1 + b - d = 1.1$ y la población tiende a crecer. Si la población inicial es $p_1 = 10,000$, encontramos que $p_2 = 11,000$ (aproximadamente), $p_3 = 12,100$, $p_4 = 13,331$, $p_5 = 14,641$, $p_{10} = 21,435$, $p_{60} = 970,137$, $p_{100} = 20,483,147$, y así sucesivamente. Por otro lado, si la tasa de natalidad $b = 0.1$ mientras que la tasa de mortalidad $d = 0.2$ entonces $1 + b - d = 0.9$ y la población tenderá a desaparecer; comenzando con $p_1 = 10,000$ encontramos que (aproximadamente) $p_2 = 9000$, $p_3 = 8100$, $p_4 = 7290$, $p_5 = 6561$, $p_{10} = 4304$, $p_{60} = 63$, $p_{100} = 2$ y así sucesivamente.

Observe que éste es tan sólo un modelo –y no necesariamente se obtienen resultados cuantitativos precisos de él. Por ejemplo, si $1 + b - d = 0.9$ y $p_1 = 10$, se encuentra que el modelo predice una población de 8.1 individuos en el tercer instante de tiempo. Los números no son perfectos (las poblaciones reales consisten de números enteros), pero el comportamiento cualitativo de una población decreciente es correcto.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Poblaciones de competencia

El modelo simple anterior fue sólo un antecedente, para luego considerar la situación un poco más compleja de dos poblaciones que compiten una contra otra. Los números en estas poblaciones se denotan mediante Z_i y G_i que pueden visualizarse como el conteo de zorros y gallinas. Suponga que las gallinas, sin zorros que las molesten, tienen una tasa de natalidad que excede a la tasa de mortalidad; para ser más específicos, suponga que en esta situación se tiene $G_{i+1} = 1.2G_i$. Sin gallinas para alimentarse, sería de esperar que los zorros comienzan a extinguirse digamos que $Z_{i+1} = 0.6Z_i$.

Se quiere poner un modelo a lo que sucede cuando los zorros tienen éxito devorando cierto número de gallinas en cada periodo de tiempo, suponiendo que esto permitiera un incremento en la población de zorros proporcional al número

de gallinas devoradas. Para ser más específicos, suponga que $Z_{i+1} = 0.6Z_i + 0.5G_i$. La población de gallinas obviamente comenzará a decrecer debido a los zorros, de modo que se toma $G_{i+1} = 1.2G_i - kZ_i$, donde k representa la tasa de gallinas devoradas por zorros; k permanece como variable para estudiar el efecto de diferentes tasas de mortalidad. Suponiendo que existe un número inicial de 1000 gallinas y de 100 zorros, se obtiene como modelo:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} Z_{i+1} &= 0.6Z_i + 0.5G_i \quad \text{y} \\ G_{i+1} &= -kZ_i + 1.2G_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \\ \text{con } Z_1 &= 100 \text{ y } G_1 = 1000. \end{aligned}$$

Se utilizan matrices para analizar el comportamiento de estas poblaciones conforme pasa el tiempo. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -k & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} Z_i \\ G_i \end{bmatrix}, \quad \text{así que } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 1000 \end{bmatrix},$$

el modelo (2.13) se convierte en

$$(2.14) \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{Ax}_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \quad \text{con } \mathbf{x}_1 = [100 \ 1000]^T.$$

Se sigue de (2.14) que $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{Ax}_i = \mathbf{A}(\mathbf{Ax}_{i-1}) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{i-1}$, y así sucesivamente, de modo que de hecho,

$$(2.15) \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}^i\mathbf{x}_1 \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots.$$

De acuerdo con (2.15) el estudiar el comportamiento de \mathbf{x}_i conforme i crece es equivalente a estudiar el comportamiento de las potencias \mathbf{A}^i de \mathbf{A} , de modo muy parecido a como se hizo en la sección 2.2. Sin embargo, para el presente caso, *no* se tienen las condiciones adicionales (2.3) de la sección 2.2 que eran responsables del comportamiento simple de \mathbf{A}^i en ese caso. De hecho, \mathbf{A}^i puede comportarse de manera muy diferente para diferentes valores de k .

$$(2.16) \quad \textit{Ejemplo.} \text{ Consideré nuestro modelo con } k = 0.1, \text{ de manera que}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

La tabla, abajo, muestra los números aproximados de zorros y gallinas en el punto i -ésimo de tiempo para varios valores de i . El modelo verifica de manera experimental lo que se esperaría: para una tasa de mortalidad k baja, la población de gallinas crece sin límite y esto permite que la población de zorros también crezca sin límite. La tabla indica que, finalmente, las dos poblaciones se igualan.

i	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	100
Z_i	100	560	931	1244	1523	1783	2292	3470	5107	7483	19,409	15,328,199
G_i	1000	1190	1372	1553	1739	1934	2367	3488	5111	7483	19,409	15,328,199

- (2.17) **Ejemplo.** Considere una tasa de mortalidad de gallinas significativamente mayor, $k = 0.18$; se verá que esto causa que la población de gallinas tienda a quedar exterminada, lo cual a su vez lleva a la muerte de los zorros –ambas poblaciones se extinguieren. Con $k = 0.18$, se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.18 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

La tabla, abajo, muestra los números aproximados de zorros y gallinas en el punto i -ésimo de tiempo para varios valores de i . El modelo verifica de manera experimental lo que se esperaría: Ambas poblaciones tienden a desaparecer.

i	1	2	3	4	5	8	12	16	20	30	40	60	80	100
Z_i	100	560	927	1214	1434	1808	1854	1654	1371	713	312	43	3	0
G_i	1000	1182	1317	1413	1477	1530	1400	1177	940	459	193	25	2	0

Estos dos ejemplos muestran que el modelo puede dar dos tipos de comportamiento radicalmente diferentes, para diferentes valores de k . Se quiere saber:

1. ¿Cómo se puede determinar el comportamiento de \mathbf{x}_i a medida que i crece para cualquier valor específico de k ?

Ya que (2.15) dice que el comportamiento de \mathbf{x}_i se determina por el comportamiento de las potencias \mathbf{A}^i , de igual manera se quiere saber:

2. ¿Cómo se puede determinar el comportamiento de las potencias \mathbf{A}^i a medida que i crece para cualquier valor específico de k ?

Por el momento se carece de las herramientas necesarias para responder a estas preguntas; en los capítulos 7 y 9 se desarrollarán las herramientas necesarias.

PROBLEMAS 2.3

1. Suponga que p_i es la población de una sociedad en el instante i -ésimo, y suponga, como en esta sección, que el número de muertes en el siguiente periodo es dp_i –proporcional al tamaño de la población. Sin embargo, su-

ponga que la sociedad es “promiscua” en cuanto a que el número de nacimientos es proporcional al número de posibles apareamientos entre dos miembros de la sociedad. Demuestre que tal suposición lleva a un modelo de la forma

$$p_{i+1} = p_i - dp_i + b \left\{ \frac{p_i(p_i - 1)}{2} \right\}.$$

2. Suponga que en el problema 1, $d = 0.3$, $b = 0.0008$, y $p_1 = 1000$. Determine experimentalmente lo que sucede a la población.
- ▷ 3. De manera parecida a como se hizo con la “sociedad promiscua” del problema 1, encuentre una interpretación para el modelo

$$p_{i+1} = p_i + bp_i - d \left\{ \frac{p_i(p_i - 1)}{2} \right\}.$$

4. Suponga que en el problema 3, $b = 0.3$, $d = 0.0008$ y $p_1 = 1000$. Determine experimentalmente lo que sucede a la población.
- ▷ 5. Suponga que se están estudiando hongos de dos tipos, A y B , y que sus tasas de natalidad y mortalidad son, respectivamente, $b_A = 0.2$, $d_A = 0.1$, $b_B = 0.3$ y $d_B = 0.15$, y que las poblaciones iniciales son $p_{A,1} = 1000$ y $p_{B,1} = 10$.
- Demuestre que la población de los hongos del tipo B eventualmente excederá a la del tipo A .
 - Aproximadamente ¿después de cuántos períodos de tiempo ocurrirá esto por primera vez?
6. Utilice inducción para demostrar (2.15): $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_1$
7. Suponga que en el ejemplo 2.16 se cambian las poblaciones iniciales a $G_1 = 100$ y $Z_1 = 1000$. Encuentre cada población para $i = 1, 2, 3, 4$.
8. Explique si el modelo (2.13) tiene sentido:
- si $G_1 = 0$
 - si $Z_1 = 0$
- ▷ 9. Suponga que en (2.13) el valor de $k = 0.16$. Utilice el MATLAB o software similar para determinar lo que sucede con Z_i y G_i a medida que i tiende a infinito.
10. Suponga que en (2.13) el valor de $k = 0.16$ como en el problema 9. Utilice el MATLAB o software similar para determinar lo que sucede con \mathbf{A}^i a medida que i tiende a infinito.
11. Examinando (2.13), demuestre que si la población de zorros tiende a desaparecer a medida que i tiende a infinito, entonces la población de gallinas también tiende a desaparecer.
12. Utilice el MATLAB o software similar para experimentar con el modelo (2.13), con el fin de determinar aproximadamente el valor de k para el que el

comportamiento cualitativo cambia de un crecimiento ilimitado a una convergencia a cero.

2.4 EQUILIBRIO EN REDES: ECUACIONES LINEALES

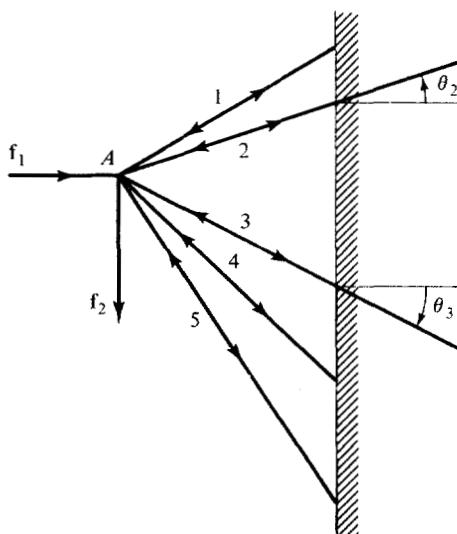
La noción general de *redes* surge en una amplia variedad de áreas: circuitos eléctricos en la ingeniería eléctrica; sistemas distributivos en el comercio y la economía; estructuras de juntas articuladas en la ingeniería civil, y además se considera un ejemplo de estructuras para ilustrar la utilidad de la notación matricial dentro de tales problemas y para ver qué preguntas sobre matrices surgen, de manera natural, a partir de la noción general de redes.

Una estructura plana de junta articulada

Una *estructura de junta articulada* consta de miembros inflexibles conectados entre sí de tal modo que se encuentran libres para girar en las juntas, de manera parecida a un trípode. Por simplicidad, nos restringimos a estructuras *planas*: todos los miembros se encuentran en un solo plano.

Considere una estructura articulada sencilla plana de cinco miembros, los cuales se encuentran unidos en la única junta de la estructura. El extremo opuesto al de la articulación para cada miembro está fijado a una pared vertical y estos extremos permanecen en una línea vertical recta sobre la pared. (Puede visualizar esto considerando la estructura como un soporte asegurado en la pared de la que se cuelga una maceta.) La figura 2.18 muestra esta estructura.

(2.18)



Las líneas con doble flecha numeradas del 1 al 5 en la figura, representan los cinco miembros unidos en el punto indicado con la letra A. Las flechas señaladas como f_1 y f_2 representan fuerzas aplicadas en la articulación A (de una planta colgante, por ejemplo). θ_2 y θ_3 miden los ángulos que los miembros 2 y 3 forman con la horizontal donde se encuentran con la pared vertical; θ_i mide el ángulo para el miembro i , y se observa que en la figura θ_1 y θ_2 son positivos, mientras que θ_3 , θ_4 , y θ_5 son negativos. Se desea responder a la pregunta: ¿Cuando se aplican las fuerzas f_1 y f_2 a la articulación A, a qué posición se moverá esa articulación?

Sea d_1 la distancia que la articulación se mueve en la dirección de la fuerza f_1 , y sea d_2 la distancia que cubre en la dirección de f_2 . Entonces el problema consiste en determinar \mathbf{d} (que se define como $[d_1 \ d_2]^T$) a partir de \mathbf{f} (que se define como $[f_1 \ f_2]^T$). Suponga que los pesos de los miembros son despreciables y que sus longitudes y la configuración de la estructura son tales que no hay fuerzas sobre los miembros cuando f_1 y f_2 son iguales a cero. Suponga también que los cambios en los ángulos θ_i debidos al cambio de posición de A bajo las fuerzas \mathbf{f} , son insignificantes.

Matemáticamente el modelo consiste en tres partes: 1) las fuerzas \mathbf{f} crean fuerzas compresivas (o extensivas) dentro de los miembros, y éstas pueden ser relacionadas con fórmulas; 2) las fuerzas dentro de cada miembro causan expansiones (o compresiones) dentro del miembro, y éstas pueden ser relacionadas con fórmulas; y 3) las elongaciones (o compresiones) dentro de cada miembro causan movimientos \mathbf{d} en la articulación y éstos pueden ser relacionados con fórmulas. Para la primera parte del modelo, se denota mediante t_i la fuerza extensiva (tensión) dentro del i -ésimo miembro, de modo que t_i es negativo si el miembro se comprime. Cada fuerza t_i está a lo largo de su miembro y lleva la misma dirección que éste, lo cual permite descomponerla mediante trigonometría en la suma de una fuerza horizontal y una fuerza vertical; y la suma de las fuerzas horizontales para todos los miembros equilibra a la fuerza horizontal f_1 , y la suma de las fuerzas verticales equilibra f_2 . En ecuaciones se tiene que

$$(2.19) \quad -t_1 \cos \theta_1 - t_2 \cos \theta_2 - t_3 \cos \theta_3 - t_4 \cos \theta_4 - t_5 \cos \theta_5 = f_1 \\ t_1 \sin \theta_1 + t_2 \sin \theta_2 + t_3 \sin \theta_3 + t_4 \sin \theta_4 + t_5 \sin \theta_5 = f_2.$$

Se denotó $[f_1 \ f_2]^T$ mediante \mathbf{f} ; denótese ahora $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5]^T$ mediante \mathbf{t} y,

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 & -\cos \theta_4 & -\cos \theta_5 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \sin \theta_3 & \sin \theta_4 & \sin \theta_5 \end{bmatrix} \text{ por } \mathbf{A}$$

Entonces (2.19) puede expresarse de manera compacta como

$$(2.20) \quad \mathbf{At} = \mathbf{f}.$$

Ahora, en cuanto a lo que se refiere a la segunda parte del modelo: la relación de las fuerzas internas \mathbf{t} con las expansiones o compresiones que causan. Su-

ponga que las fuerzas y elongaciones son tan pequeñas que se puede aplicar la ley de Hooke: la deformación e que resulta de una fuerza t es linealmente proporcional a t , con la constante k de proporcionalidad llamada *elasticidad*: $e = kt$. Permitase que cada miembro tenga una elasticidad diferente k_i , de modo que su expansión $e_i = k_i t_i$. Si se utiliza \mathbf{e} para denotar

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5]^T$$

y \mathbf{K} para representar la matriz diagonal 5×5 , con $(\mathbf{K})_{ii} = k_i$, entonces la segunda parte del modelo ($e_i = k_i t_i$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$) puede expresarse como

$$(2.21) \quad \mathbf{e} = \mathbf{Kt}.$$

Sólo queda la tercera parte del modelo: relacionar las deformaciones \mathbf{e} de los miembros con el desplazamiento \mathbf{d} que causan en la articulación. El desplazamiento horizontal d_1 y el desplazamiento vertical d_2 en la articulación deben ser equivalentes al desplazamiento e_i en un ángulo θ_i para cada i ; interpretando esto al primer orden en d , da $e_i = -d_1 \cos \theta_i + d_2 \sin \theta_i$ para $1 \leq i \leq 5$. Si se escribe esto como $\mathbf{e} = \mathbf{Bd}$ para una matriz \mathbf{B} , 5×2 , se descubrirá que \mathbf{B} es tan sólo \mathbf{A}^T , donde \mathbf{A} es la misma matriz que aparece en (2.20). Por lo tanto, la última parte del modelo se expresa como

$$(2.22) \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}.$$

Al unir las tres porciones (2.20-2.22) del modelo, se tiene

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{At} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{Kt} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{A}^T \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Recuerde que el objetivo era encontrar el desplazamiento \mathbf{d} de la articulación en términos de las fuerzas \mathbf{f} aplicadas. De (2.23) se ve que

$$\mathbf{f} = \mathbf{At} = \mathbf{A}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}) = (\mathbf{AK}^{-1})\mathbf{e} = (\mathbf{AK}^{-1})(\mathbf{A}^T \mathbf{d}) = (\mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{d};$$

se ha supuesto aquí que las elasticidades k_i son diferentes de cero, de modo que la matriz diagonal \mathbf{K} es no singular (ver problema 12 en la sección 1.4). Recuerde que \mathbf{A} es 2×5 , \mathbf{K} (y por lo tanto \mathbf{K}^{-1}) es 5×5 , y \mathbf{A}^T es 5×2 ; de allí que el producto $\mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T$ sea 2×2 . Por lo tanto el modelo se reduce a

$$(2.24) \quad \mathbf{Hd} = \mathbf{f}, \text{ de donde } \mathbf{H} = \mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T \text{ es } 2 \times 2,$$

que podrá reconocer como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas d_1 y d_2 el cual se desea resolver en términos de las fuerzas dadas en \mathbf{f} .

(2.25) **Ejemplo.** Para aclarar (2.24) considere un ejemplo específico. Suponga que los ángulos θ_i de los miembros son: $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 20^\circ$, $\theta_3 = -30^\circ$, $\theta_4 = -45^\circ$, $\theta_5 = -60^\circ$ (aproximadamente como en la figura 2.18). Suponga también que todos los miembros están hechos del mismo material y tienen la misma elasticidad $k_i = 0.01$. Mediante un breve cálculo se demuestra que, en este caso, la matriz \mathbf{H} de (2.24) es

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 313.336 & 61.137 \\ 61.137 & 186.677 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo al problema 17 de la sección 1.4, esta matriz \mathbf{H} es no singular ya que

$$(313.336)(186.677) - (61.137)(61.137) \neq 0$$

(es igual a 54,754.892). Pero como \mathbf{H} es no singular de modo que \mathbf{H}^{-1} existe, se puede resolver $\mathbf{H}\mathbf{d} = \mathbf{f}$ de manera única para \mathbf{d} en términos de \mathbf{f} sin importar el valor de las fuerzas \mathbf{f} {ver teorema 1.38 c) en la sección 1.4}. En este ejemplo específico, entonces, los desplazamientos \mathbf{d} se determinan de manera única mediante las fuerzas \mathbf{f} (como sugiere la intuición) y, fácilmente, podemos calcular \mathbf{d} a partir de \mathbf{f} .

En el ejemplo 2.25, la importante matriz \mathbf{H} de (2.24) resultó ser no singular. ¿Sucede esto siempre? Es decir, se desea contestar:

1. ¿ $\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T$ es siempre no singular?
2. Si no, ¿cuáles son las condiciones de la estructura que hacen que la matriz sea no singular?

Por el momento se carece de las herramientas necesarias para responder a estas preguntas; en los capítulos 3 y 4 se desarrollarán las que se requieran para ello.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Redes de manera más general

Aunque sólo se han tratado estructuras planas de juntas articuladas, las mismas ideas se pueden aplicar de modo más general. Es posible, por ejemplo, tratar estructuras no planas, estructuras con varias juntas, estructuras con conexiones rígidas en lugar de articulaciones, y así sucesivamente. En todos los casos se termina con tres conjuntos de ecuaciones análogos a (2.20-2.22) que pueden combinarse con la relación fundamental (2.24).

El mismo método es útil para redes diferentes a las estructuras, como se mencionó al principio de esta sección; en otras redes, los conceptos de las disciplinas relacionadas reemplazan los conceptos de desplazamiento interno e , de la fuerza interna t , del desplazamiento de la junta d , y de la fuerza aplicada f . Al modelar el flujo de bienes entre productores y consumidores, aparecen, por supuesto, conceptos económicos, mientras que al modelar el flujo de la electricidad vemos conceptos de la electrónica. Estos corresponden a e , t , d y f como se muestra a continuación:

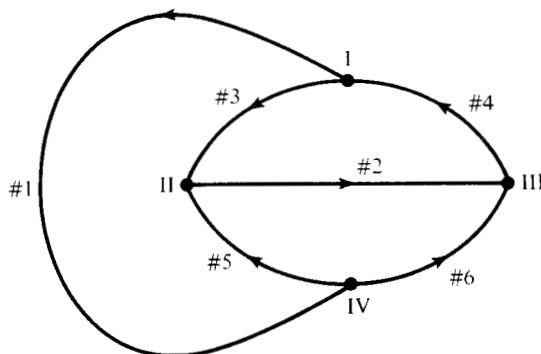
Concepto estructural	Concepto económico	Concepto electrónico
Deformación, e	Diferencia de precio	Diferencia de voltaje
Esfuerzo, t	Flujo en el ramal	Corriente en el ramal
Desplazamiento, d	Precio	Voltaje
Fuerza, f	Flujo en el nodo	Corriente en el nodo

En estos y otros casos de redes, el resultado final es la relación fundamental análoga a (2.24) que muestra cómo el comportamiento (d) de la red se determina a partir de las acciones externas (f) que actúan sobre él. Así que, desde un punto de vista computacional, las tareas principales en el análisis de redes son la generación de la matriz A , la generación de la matriz H , y la solución de sistemas de ecuaciones definida por H (o la determinación de la singularidad de H y de que el sistema no tiene solución). Los métodos matriciales revelan la naturaleza común de todo problema de redes, como la forma de resolverlos.

PROBLEMAS 2.4

- Verifique que las ecuaciones (2.19) expresan el equilibrio de las fuerzas horizontales y el equilibrio de las fuerzas verticales.
- Verifique que la $e = A^T d$ de (2.22) representa correctamente la relación entre extensiones de los miembros y desplazamientos de las articulaciones.
- Suponga que en el ejemplo 2.25 $f_1 = 1$ y $f_2 = 10$; encuentre los desplazamientos d_1 y d_2 .
- Suponga que en el ejemplo 2.25 se desea que los desplazamientos sean $d_1 = 0.01$ y $d_2 = 0.1$. Encuentre las fuerzas f_1 y f_2 necesarias para producir estos desplazamientos.
- En el ejemplo 2.25:
 - Encuentre H^{-1} .
 - Escriba un fórmula que exprese a d_1 en términos de f_1 y f_2 y otra expresando a d_2 en términos de f_1 y f_2 , para valores generales de f_1 y f_2 .

6. Un modelo económico simple supone que una cierta oferta de bienes a individuos puede mantenerse en equilibrio mediante un conjunto apropiado de precios para los artículos; dada una oferta deseada, el problema es determinar los precios. Suponga que cuatro personas (I, II, III, IV en la ilustración de abajo) producen y consumen los artículos; suponga que los individuos reciben y envían artículos como se indica con las seis trayectorias (1, 2, 3, 4, 5, 6, según se muestra abajo) –las flechas indican la dirección del flujo de los productos. Son de hecho las *diferencias* en los precios las que llevan a las *diferencias* en las ofertas, así que se puede pensar en el precio de cada artículo como un precio relativo –por ejemplo, en comparación con los del individuo IV; matemáticamente esto significa que se pueden considerar la oferta y el



precio en IV como cero. Sean f_1 , f_2 y f_3 los niveles de oferta (relativos) deseados en I, II y III, respectivamente, y sean d_1 , d_2 y d_3 los precios de los bienes (relativos); nuestro problema es determinar cada d_i a partir de las f_i . Sea t_i la cantidad de bienes que fluyen a lo largo de la trayectoria i ; entonces la oferta para cada individuo es igual a los bienes que entran menos los bienes que salen –por ejemplo, $f_2 = t_3 + t_5 - t_2$. (Esto se expresará abajo como $\mathbf{f} = \mathbf{At}$.) Se hace la suposición económica simple de que el flujo de bienes a lo largo de la trayectoria, es directamente proporcional a la diferencia entre los precios de los bienes en los extremos de las trayectorias; denotando estas diferencias entre precios mediante e_i para la trayectoria i -ésima –de modo que $e_3 = d_2 - d_1$ y $e_5 = d_2 - 0$ por ejemplo– entonces se tiene que $t_i = e_i/k_i$ para ciertas constantes k_i de proporcionalidad conocidas. Demuestre que al igual que en (2.23), este modelo se representa mediante $\mathbf{At} = \mathbf{f}$, $\mathbf{e} = \mathbf{Kt}$, $\mathbf{e} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$ –de modo que \mathbf{d} puede determinarse por medio de $\mathbf{Hd} = \mathbf{f}$ para $\mathbf{H} = \mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T$ – donde en este caso tomamos

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T, \quad \mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T,$$

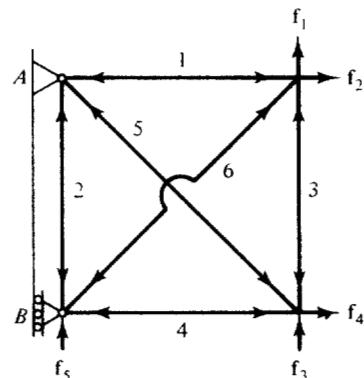
$$\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5 \ t_6]^T, \quad \mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6]^T,$$

K es la matriz diagonal, 6×6 con los elementos de la diagonal principal $\langle K \rangle_{ii} = k_i$, y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 7. Suponga que en el problema 6 los niveles de oferta relativos deseados son de $f_1 = 10, f_2 = 4$ y $f_3 = 12$, y que las constantes k_i son iguales a 1. Encuentre los precios relativos \mathbf{d} necesarios para mantener estos niveles de oferta.
8. En la estructura plana articulada que se muestra abajo, el soporte en la junta A está fijo, mientras que el soporte en la junta B sólo puede moverse hacia arriba o hacia abajo sobre la pared. Sean \mathbf{f} , \mathbf{t} , \mathbf{d} y \mathbf{e} las fuerzas aplicadas, fuerzas internas, desplazamientos de las juntas y elongaciones de los miembros como en el modelo para (2.18). Demuestre que (2.23) relaciona nuevamente estos conceptos, donde ahora

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$



- 9. Suponga que en el problema 8 las elasticidades k_i son iguales a 1 y que las fuerzas aplicadas son $f_1 = 0, f_2 = 1, f_3 = -10, f_4 = 1$ y $f_5 = -10$. Utilice el MATLAB o software similar para resolver las cinco ecuaciones lineales (2.24) con cinco incógnitas \mathbf{d} para obtener los desplazamientos \mathbf{d} .

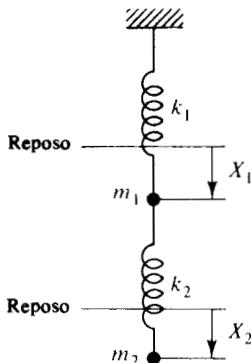
2.5 SISTEMAS OSCILATORIOS: EIGENVALORES

En varias áreas de aplicación existen muchos fenómenos que presentan oscilaciones: las alas de los aviones, los puentes y los edificios altos oscilan con el viento; la economía oscila (por ejemplo, entre la inflación y la deflación); y así sucesivamente. Lógicamente, es importante entender el comportamiento cuali-

tativo de estas oscilaciones: ¿se desprenderá el ala, se desplomará el puente, se vendrá abajo el edificio, se desmoronará la economía? El estudio de modelos de estos fenómenos, lleva comúnmente a problemas de matrices en los que se necesita descubrir cuándo ciertas matrices, que dependen de parámetros, serán singulares.

Dos masas suspendidas y acopladas con resortes

Como una ilustración del fenómeno oscilatorio, consideramos el movimiento de dos masas acopladas mediante un resorte y suspendidas del techo mediante otro resorte, como en el diagrama de abajo; se supone que el peso de los resortes es insignificante. Los dos pesos tienen masas de m_1 y m_2 . Las dos líneas horizontales marcadas como "Reposo" indican las posiciones de las masas en reposo, esto es, donde las fuerzas regenerativas de los resortes y la fuerza de la gravedad están en perfecto equilibrio.



Se desea modelar las oscilaciones verticales de las masas conforme pasa el tiempo cuando no están en reposo. Para ello, se introducen dos funciones de tiempo t : $X_1(t)$ es el desplazamiento hacia abajo en el tiempo t de la primera masa desde su posición de reposo, y $X_2(t)$ es el desplazamiento hacia abajo en el tiempo t de la segunda masa desde su posición de reposo. Entonces las fuerzas que actúan sobre la primera masa son: 1) la fuerza hacia arriba ejercida por el primer resorte, que se ha estirado una distancia $X_1(t)$ desde su punto de equilibrio; y 2) la fuerza hacia abajo ejercida por el segundo resorte, que se ha estirado una distancia de $X_2(t) - X_1(t)$ desde su punto de equilibrio; observe que la fuerza de gravedad ya ha sido considerada en las posiciones de reposo de las masas. Las fuerzas sobre la segunda masa es la fuerza hacia arriba ejercida por el segundo resorte.

Se supone que los desplazamientos involucrados son lo suficientemente pequeños para que la ley de Hooke sea válida para los resortes: La fuerza regenerativa para cada resorte es igual a una constante k_i multiplicada por el

estiramiento del resorte. Recordando la ley de Newton que dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración resultante y, recordando además que la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento $X_i(t)$, se obtiene el modelo matemático del sistema:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} m_1 X_1'' &= -k_1 X_1 + k_2(X_2 - X_1) \\ m_2 X_2'' &= -k_2(X_2 - X_1), \end{aligned}$$

donde los signos primos indican una diferenciación con respecto a t .

El problema matemático consiste en encontrar las funciones X_1 y X_2 que satisfagan a (2.26). La experiencia y la intuición dicen que los sistemas deben ser oscilatorios: Tanto X_1 y X_2 deben oscilar entre valores positivos y negativos de modo muy parecido a las funciones trigonométricas seno y coseno. Por lo tanto, se decide ver si se pueden encontrar soluciones para (2.26) utilizando senos y cosenos; y, de manera más precisa, se buscan soluciones de la forma

$$(2.27) \quad \begin{aligned} X_1(t) &= \xi_1 \operatorname{sen} \omega t + \eta_1 \cos \omega t \\ X_2(t) &= \xi_2 \operatorname{sen} \omega t + \eta_2 \cos \omega t, \end{aligned}$$

donde ξ_1 , η_1 , ξ_2 , η_2 y ω son constantes que se deben determinar para que X_1 y X_2 resuelvan (2.26).

Si se sustituyen en (2.26) las expresiones para X_1 y X_2 de (2.27), diferenciando conforme se requiera, y agrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} &\{-m_1\omega^2\xi_1 + k_1\xi_1 + k_2\xi_1 - k_2\xi_2\} \operatorname{sen} \omega t \\ &+ \{-m_1\omega^2\eta_1 + k_1\eta_1 + k_2\eta_1 - k_2\eta_2\} \cos \omega t = 0 \quad \text{para toda } t \\ &\{-m_2\omega^2\xi_2 + k_2\xi_2 - k_2\xi_1\} \operatorname{sen} \omega t \\ &+ \{-m_2\omega^2\eta_2 + k_2\eta_2 - k_2\eta_1\} \cos \omega t = 0 \quad \text{para toda } t \end{aligned}$$

Ahora, el único modo en que $A \operatorname{sen} \omega t - B \cos \omega t$ puede ser igual a cero para toda t es cuando $A = B = 0$; esto significa que las expresiones anteriores dentro de corchetes $\{\cdot\}$ deben ser iguales a cero:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)\xi_1 + & \quad (-k_2)\xi_2 = 0 \\ (-k_2)\xi_1 + (-m_2\omega^2 + k_2)\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)\eta_1 + & \quad (-k_2)\eta_2 = 0 \\ (-k_2)\eta_1 + (-m_2\omega^2 + k_2)\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

La notación matricial hará más claro lo que se requiere en (2.28). Se define

$$(2.29) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que \mathbf{K} y \mathbf{M} son matrices *conocidas*, mientras que $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son las incógnitas que se desean determinar de modo que X_1 y X_2 de la forma en (2.27) resuelvan (2.26). Mediante el uso de estas matrices, se pueden reescribir las ecuaciones necesarias para satisfacer (2.28) como

$$(2.30) \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}.$$

Los sistemas de ecuaciones para $\boldsymbol{\xi}$ y para $\boldsymbol{\eta}$ son idénticos, ambos se representan mediante la matriz de coeficientes $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$.

- (2.31) **Ejemplo.** Considérese concretamente un ejemplo para aclarar estas situaciones. Suponga que las masas son $m_1 = 10$ y $m_2 = 5$, mientras que las constantes de los resortes son $k_1 = 80$ y $k_2 = 40$. Entonces las matrices en (2.29) son simplemente

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 120 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cada uno de los dos conjuntos de ecuaciones (2.30) tiene la forma

$$\begin{aligned} (120 - 10\omega^2)x - & 40y = 0 \\ -40x + (40 - 5\omega^2)y = 0. & \end{aligned}$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 4.

Eigenvalores

Volviendo al problema general, se observa que cada uno de los sistemas de ecuaciones en (2.30) es de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, donde \mathbf{A} es 2×2 y \mathbf{x} es 2×1 . Resulta obvio que *una* solución a tal sistema es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; en este caso esto hará que $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ y por lo tanto $X_1(t) = X_2(t) = 0$, lo cual describe el estado de reposo del sistema en lugar de un estado oscilatorio. *Por lo tanto, se necesitan soluciones diferentes de $\mathbf{0}$.* De acuerdo al teorema 1.38 c) de la sección 1.4 sobre ecuaciones e inversas, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para \mathbf{A} tendrá exactamente una solución $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ si \mathbf{A} es no singular. Se quiere una solución para $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ diferente de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}$ si \mathbf{A} es no singular); entonces, para que esto suceda, \mathbf{A} debe ser singular. Recuerde que estamos utilizando \mathbf{A} para indicar $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ en (2.30). Entonces se deduce que,

(2.32) para que (2.30) tenga soluciones ξ y η diferentes de $\xi = \eta = 0$ {para que $X_1(t)$ y $X_2(t)$ no sean idénticos a cero}, la matriz $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ debe ser singular.

Recuerde que se conocen \mathbf{K} y \mathbf{M} –ver (2.28)– pero que ω es desconocida: se trata de escoger ω (junto con ξ y η) a modo de que (2.27) dé soluciones a (2.26). Por lo tanto, el problema es:

(2.33) Seleccione ω^2 para que $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ sea singular.

El problema de determinar un número λ para el cual $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ sea singular se conoce como un *problema de eigenvalor*, y tal λ se conoce como un *eigenvalor*.

(2.34) **Ejemplo.** Considere el sistema concreto del ejemplo 2.31. De acuerdo a lo que se acaba de hacer, el problema es escoger ω para que $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ sea singular, donde

$$\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 120 - 10\omega^2 & -40 \\ -40 & 40 - 5\omega^2 \end{bmatrix}.$$

El problema 13 en la sección 1.4, da una condición necesaria y suficiente para los elementos, para que una matriz 2×2 sea singular. En este caso, esto se vuelve

$$(120 - 10\omega^2)(40 - 5\omega^2) - (-40)(-40) = 0.$$

Esto es, $50(\omega^2)^2 - 1000(\omega^2) + 3200 = 0$; factorizando este polinomio cuadrático en ω^2 , la ecuación se reduce a $50(\omega^2 - 4)(\omega^2 - 16) = 0$. Por lo tanto, $\omega^2 = 4$ y $\omega^2 = 16$ son los eigenvalores para este problema. Esto significa que los únicos valores posibles para ω son $+2, -2, +4$ y -4 ; pero éstos son sólo valores posibles en cuanto a lo que se refiere a encontrar soluciones diferentes de cero ξ y η para (2.30) se tiene que comprobar si, en realidad se puede resolver para ξ y η diferentes de cero. Observe que como lo que aparece en las ecuaciones es ω^2 en lugar de ω sólo se debe examinar $\omega = +2$ y $\omega = +4$. Del mismo modo, el cambiar el signo de ω es lo mismo que cambiar el signo de ξ_1 y ξ_2 en (2.27), así que sólo se consideran los valores positivos de ω .

Para $\omega = 2$, las ecuaciones para ξ son $80\xi_1 - 40\xi_2 = 0$ y $-40\xi_1 + 20\xi_2 = 0$, cuyas soluciones son $\xi_1 = \alpha$ arbitraria y $\xi_2 = 2\alpha$; de manera similar las ecuaciones para η llevan a $\eta_1 = \beta$ arbitraria y $\eta_2 = 2\beta$.

Para $\omega = 4$, por otro lado, las ecuaciones para ξ son, en su lugar,

$$-40\xi_1 - 40\xi_2 = 0 \quad y \quad -40\xi_1 - 40\xi_2 = 0,$$

cuyas soluciones son $\xi_1 = \gamma$ arbitraria y $\xi_2 = -\gamma$; de manera similar, las ecuaciones para η llevan a $\eta_1 = \delta$ arbitraria y $\eta_2 = -\delta$.

Volviendo a la situación general, se observa que para poder satisfacer (2.33) para la matriz $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ 2×2 , se tendrá que resolver una ecuación para ω^2 igual que en el ejemplo 2.34; entonces se tendrá que ver si, con los valores específicos encontrados para ω , se puede resolver (2.30) para ξ y η diferentes de cero. Para una t medida digamos, en segundos, y las soluciones tales como $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ se repiten cada $2\pi/\omega$ segundos –esto es, $\omega/2\pi$ veces por segundo. El número $\omega/2\pi$ es, por lo tanto, la *frecuencia* de oscilación. Si se tuvieran p masas en lugar de sólo dos como en el modelo, las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} serían $p \times p$ en lugar de 2×2 . Así que, de manera más general, se desea saber:

1. ¿Cómo se puede saber si existen números ω reales que hagan que $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ sea singular y determine las frecuencias de oscilación?
2. Si se encontraran tales números ω , ¿cómo se puede saber si se puede encontrar una \mathbf{x} diferente de cero para que $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Por el momento se carece de las herramientas necesarias para responder a estas preguntas generales; en los capítulos 7 y 8 se desarrollarán las que se requieran para ello.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 6.

Solución del problema de las masas oscilatorias

Aún no se ha demostrado cómo este análisis matricial permite resolver el problema de las masas acopladas; por simplicidad, se examinará el caso concreto tratado en los ejemplos 2.26 y 2.34.

En el ejemplo 2.34 se encontraron soluciones diferentes de cero para (2.30) con $\omega = 2$, ξ_1 y ξ_2 dependientes de un número arbitrario α y η_1 y η_2 dependientes de un número arbitrario β . De modo similar, se encontraron soluciones diferentes de cero con $\omega = 4$ dependiente de los números γ y δ . Si se sustituyen estos valores en las expresiones (2.27) para las funciones $X_1(t)$ y $X_2(t)$ que describen el comportamiento del sistema de dos masas, se obtiene

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \alpha \sin 2t + \beta \cos 2t & y & X_2(t) = 2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t, \\ X_1(t) &= \gamma \sin 4t + \delta \cos 4t & y & X_2(t) = -\gamma \sin 4t - \delta \cos 4t \end{aligned}$$

como pares de soluciones a (2.26) para todo valor de α , β , γ y δ . Combinando estos pares se pueden obtener soluciones que describan los movimientos de las masas una vez que se conoce como comienzan las oscilaciones. Para ver esto, se escribe $\mathbf{X}(t)$ como la matriz columna $\mathbf{X}(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$; las soluciones anteriores pueden entonces expresarse como

$$(2.35) \quad \mathbf{X}(t) = \alpha \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2 \sin 2t \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \sin 4t \\ -\sin 4t \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \cos 4t \\ -\cos 4t \end{bmatrix}$$

para cualquier valor arbitrario de α , β , γ y δ . Sólo se necesitan escoger estos valores para cumplir las condiciones iniciales de las masas.

- (2.36) **Ejemplo.** Suponga que las masas comienzan con la masa superior colocada una unidad por debajo de su punto de reposo y la masa inferior colocada cinco unidades por debajo de su punto de reposo; esto requiere que $X_1(0) = 1$ y $X_2(0) = 5$. Suponga además que se acaba de soltar cada masa, de modo que no se le aplica alguna velocidad inicial; esto requiere que $X'_1(0) = X'_2(0) = 0$. Si se aplican estas condiciones en $t = 0$ en la solución representada por (2.35), se encuentra que α , β , γ y δ deben satisfacer a

$$\beta + \delta = 1$$

$$2\beta - \delta = 5$$

$$2\alpha + 4\gamma = 0$$

$$4\alpha - 4\gamma = 0,$$

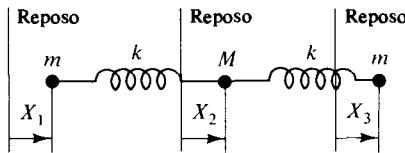
de donde se encuentra que $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 2$ y $\delta = -1$. Esto nos da la solución para el movimiento de los pesos para toda t :

$$X_1(t) = 2 \cos 2t - \cos 4t$$

$$X_2(t) = 4 \cos 2t + \cos 4t.$$

PROBLEMAS 2.5

- Verifique que los miembros derechos de las ecuaciones en (2.26) representen de manera adecuada las fuerzas que actúan sobre las masas.
 - Verifique que (2.28) se sigue de sustituir las expresiones de (2.27) en las ecuaciones de (2.26) y utilizar el hecho de que $A \sin \omega t + B \cos \omega t = 0$ para toda t implica que $A = B = 0$.
 - Suponga que en el modelo de esta sección $m_1 = 12$, $m_2 = 16$, $k_1 = 36$ y $k_2 = 48$. Encuentre las matrices y ecuaciones análogas a las del ejemplo 2.31.
- ▷ 4. El comportamiento de la *molécula triatómica lineal* –una molécula con tres átomos arreglados en línea– se puede modelar mediante tres masas conectadas por dos resortes como se muestra abajo, donde la masa central tiene una masa M y las otras masa m . Como en el modelo básico de esta sección, las funciones X_1 miden los desplazamientos de las masas desde puntos de reposo; se ignora la gravedad, y los resortes se suponen sin peso.



- a) Demuestre que las ecuaciones que expresan “masa por aceleración igual a fuerza” en este caso son

$$mX''_1 = -k(X_1 - X_2)$$

$$MX''_2 = k(X_1 - 2X_2 + X_3)$$

$$mX''_3 = -k(X_3 - X_2).$$

- b) Sustituya las expresiones *similares* a aquéllas en (2.27) –debe incluir una expresión para X_3 utilizando los coeficientes ξ_3 y η_3 – en las ecuaciones de arriba y derive las ecuaciones análogas a aquéllas en (2.28) y (2.30).

5. Para el modelo del problema 3, encuentre los valores de ω , ξ_i y η_i como se hizo en el ejemplo 2.34.
- ▷ 6. Para el modelo del problema 4, suponga que $k = 12$, $m = 2$ y $M = 6$. Encuentre los valores de ω , ξ_i y η_i de modo parecido a como se hizo en el ejemplo 2.34.
7. Verifique para el ejemplo 2.36:
- Que los valores encontrados α , β , γ y δ resuelven las ecuaciones dadas para esos números.
 - Que las funciones X_1 y X_2 encontradas, satisfacen las ecuaciones diferenciales (2.26) utilizando los valores relevantes de m_i y de k_i .
 - Que las funciones X_1 y X_2 satisfacen las condiciones requeridas en $t = 0$.
8. Encuentre $X_1(t)$ y $X_2(t)$ de manera explícita, para el modelo del problema 3 con el fin de obtener $X_1(0) = 0$, $X_2(0) = 1$, $X'_1(0) = X'_2(0) = 0$.

2.6 MODELOS GENERALES: MINIMOS CUADRADOS

Como se ha indicado en las secciones anteriores, la modelación es una parte central de las matemáticas aplicadas. Frecuentemente, uno supone cierta forma general para un modelo y después debe determinar los varios parámetros en dicha forma, de manera que el modelo esté tan cerca de la realidad como se

pueda. Un método muy usado es el *método de los mínimos cuadrados*, en el cual uno escoge los parámetros de modo que minimicen la suma de los cuadrados de los errores en la representación del modelo a partir de datos conocidos; este método es también fundamental en el análisis estadístico de datos, de manera particular, en lo que se conoce como *análisis de regresión*.

Ajuste de líneas rectas a datos

Podría decirse que la forma más simple de un modelo es una línea recta: se modela la manera en que cierta variable y de interés depende de cierta t por la forma

$$(2.37) \quad y \approx a + bt$$

donde a y b son los parámetros a determinar, y se escribe “ \approx ” en lugar de “ $=$ ” porque el modelo (2.37) es sólo una aproximación. Para poder seleccionar a y b a fin de reflejar experiencia, se requiere de ciertos datos; por lo tanto, se supone que se tienen p pares de medidas de los valores de t y y que hemos encontrado apareados.

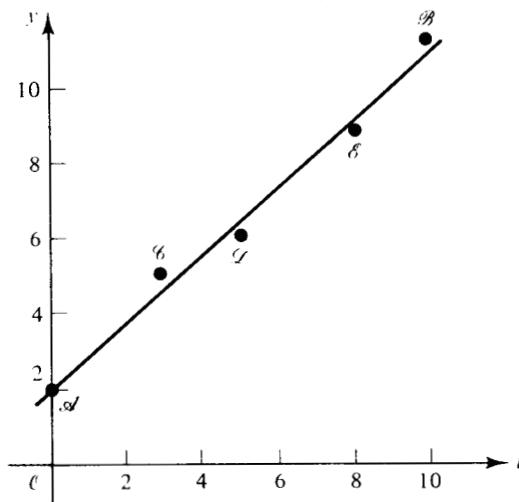
$$(2.38) \quad (t_i, y_i) \text{ para } 1 \leq i \leq p \text{ son los datos obtenidos por experiencia.}$$

La tarea es seleccionar a y b tales que (2.37) trabaje lo mejor posible, en cierto sentido, para igualar los datos de (2.38); una vez determinados a y b –si reflejan adecuadamente los datos– se puede considerar el uso del modelo (2.37) para predecir los valores de y para otros valores de t .

(2.39) **Ejemplo.** Si un cuerpo se mueve en una línea perfectamente recta, con velocidad perfectamente constante, entonces su posición y a lo largo de la línea en el tiempo t se da de modo exacto mediante $y = y_0 + vt$, donde y_0 es la posición del cuerpo en el tiempo $t = 0$ y v es la velocidad constante. Por supuesto, en el mundo físico, muy seguramente el cuerpo tendrá ligeras variaciones en su velocidad y el modelo $y_0 + vt$ no describirá exactamente la posición y . Suponga que se ha medido la posición y de un cuerpo en particular en cinco momentos diferentes y que se han obtenido los siguientes datos:

t	0	3	5	8	10
y	2	5	6	9	11

Representando estos datos en una gráfica con ejes t y y , se puede ver que, como se esperaba, los puntos casi se encuentran sobre una línea recta:



La tarea es escoger y_0 y v para que $y \approx y_0 + vt$ en los cinco puntos de los datos; ya que la ecuación $y = y_0 + vt$ entre t y y tiene una línea recta como su representación gráfica, geométricamente, se trata de encontrar una línea recta que se acerque lo más posible a los cinco puntos sobre la gráfica de arriba.

En el caso general, se desea escoger a y b para que $a + bt$ se acerque lo más posible a la reproducción de los datos de (2.38). Para cualquier selección de los parámetros a y b , su error se mide en la producción de los datos en el punto del dato (t_i, y_i) mediante el i -ésimo *residuo*.

$$(2.40) \quad r_i = y_i - (a + bt_i)$$

y se mide el error total en la reproducción de los datos, mediante la suma de los cuadrados de los residuos:

$$(2.41) \quad S(a, b) = \sum_{i=1}^p r_i^2 = \sum_{i=1}^p \{y_i - (a + bt_i)\}^2.$$

Se utiliza la notación $S(a, b)$ para enfatizar que el error depende de los parámetros desconocidos a y b . Ahora se muestra que, para determinar a y b de modo que el error total S sea lo más pequeño posible, se deben encontrar a y b que satisfagan

$$(2.42) \quad \alpha_{11}a + \alpha_{12}b = \beta_1 \quad \text{y} \quad \alpha_{21}a + \alpha_{22}b = \beta_2,$$

donde

$$\alpha_{11} = \sum_{i=1}^p 1 = p, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \sum_{i=1}^p t_i, \quad \alpha_{22} = \sum_{i=1}^p t_i^2,$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^p y_i, \quad \text{y} \quad \beta_2 = \sum_{i=1}^p t_i y_i.$$

Desarrollando los términos de (2.41), acomodándolos, y utilizando por conveniencia la notación α_{ij} y β_i de (2.42), se encuentra que

$$S(a, b) = \alpha_{11}a^2 - 2\beta_1 a + \alpha_{22}b^2 - 2\beta_2 b + (\alpha_{12} + \alpha_{21})ab + \sum_{i=1}^p y_i^2.$$

Si se completa el cuadrado en la expresión de arriba con respecto a la variable a se obtiene

$$S(a, b) = \alpha_{11} \left\{ a + \frac{-2\beta_1 + 2\alpha_{12}b}{2\alpha_{11}} \right\}^2 + \text{términos independientes de } a.$$

Debido a que el único término que involucra a a en $S(a, b)$ es el que se encuentra entre llaves, y ya que se desea minimizar a $S(a, b)$ con respecto de a , y ya que el coeficiente de α_{11} de $\{\cdot\}^2$ es positivo, se minimiza $S(a, b)$ con respecto de a haciendo que el término $\{\cdot\} = 0$. Pero $\{\cdot\} = 0$ convierte a la primera ecuación en (2.42); del mismo modo se completa el cuadrado con respecto de b para producir la segunda ecuación.

- (2.43) **Ejemplo.** Considere nuevamente el problema del ejemplo 2.39. Utilizando las fórmulas de (2.42), se encuentra que $\alpha_{11} = 5$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 26$, $\alpha_{22} = 198$, $\beta_1 = 33$ y $\beta_2 = 227$. Minimizando la suma de los cinco errores elevados al cuadrado $\{y_i - (y_0 + vt_i)\}^2$ es entonces equivalente al hecho de resolver

$$5y_0 + 26v = 33$$

$$26y_0 + 198v = 227.$$

Al resolver este sistema resulta $y_0 = 2.01$ y $v = 0.88$, la línea recta determinada por estos valores se graficó en la figura del ejemplo 2.39 para demostrar lo bien que se ajusta el modelo de los datos.

En este punto se sabe que, con el fin de ajustar un modelo de línea recta $y \approx a + bt$ a los datos (2.38), se necesita resolver las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b de (2.42). En el caso especial del ejemplo 2.43 se encuentra que estas ecuaciones tienen de hecho una solución; no se sabe, sin embargo, que en general, esto sea verdadero. Se desea saber:

1. ¿Siempre tienen solución las ecuaciones en (2.42)? Más adelante se verá que la respuesta es “sí”.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 3.

Ya que (2.42) da dos ecuaciones con dos incógnitas, el problema puede expresarse mediante notación matricial; de hecho también se puede expresar con notación matricial toda el álgebra resultante de (2.42).

Defínase

$$(2.44) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} - \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}.$$

Entonces, seleccionar a y b para que $a + bt_i \approx y_i$ para $1 \leq i \leq p$ es lo mismo que seleccionar \mathbf{x} para que $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$. En esta notación, S –la suma de los cuadrados de los residuos r_i – es el número $[S] = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$; por simplicidad en la notación, esto se escribe como $S = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$. Esto es, se busca minimizar

$$(2.45) \quad \text{minimizar } S = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Ax}).$$

Sorprendentemente, las definiciones de α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} , β_1 y β_2 muestran que

$$(2.46) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Estas matrices α_{ij} y β_i son precisamente las del sistema de ecuaciones (2.42). Por lo tanto, en notación matricial, el sistema de ecuaciones (2.42) que se tiene que resolver para determinar a y b es tan sólo

$$(2.47) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y},$$

donde se conocen \mathbf{A} y \mathbf{y} y se tiene que encontrar \mathbf{x} . *Formalmente* –repetimos: *formalmente*– las ecuaciones (2.47) se obtienen premultiplicando $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ por \mathbf{A}^T y reemplazando \approx por $=$.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 8.

Ajuste de datos mediante expresiones más generales

Hasta ahora todo el desarrollo se ha hecho aproximando datos mediante líneas rectas. Pero la notación matricial revela otra manera de visualizar lo que se está

haciendo. En la notación matricial se ha dado una matriz \mathbf{A} y una matriz \mathbf{y} –ver (2.44)– y se quiere encontrar la matriz \mathbf{x} para que $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$. Recuerde ahora el ejemplo 1.41 de la sección 1.5; ese ejemplo mostró que, en general,

$$\mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_q \mathbf{a}_q,$$

donde los números x_i son los elementos de la matriz \mathbf{x} , $q \times 1$ y las matrices columna \mathbf{a}_i , $p \times 1$ son las columnas de la matriz \mathbf{A} , $p \times q$. En este caso $q = 2$, y por lo tanto, se trata de escoger x_1 (que es igual a a) y x_2 (que es igual a b) de modo que $\mathbf{y} \approx x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$ donde

$$\mathbf{a}_1 = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2 = [t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_p]^T.$$

Este problema general surge de manera frecuente; se requiere

- (2.48) aproximar una matriz columna real dada, $p \times 1$ en términos de matrices columna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ reales dadas, $p \times 1$, encontrando x_1, x_2, \dots, x_q para que $\mathbf{y} \approx x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_q \mathbf{a}_q$.

Escrito completamente en notación matricial, (2.48) significa:

- (2.49) Dado \mathbf{A} real $p \times q$ y \mathbf{y} real $p \times 1$, encuentre \mathbf{x} $q \times 1$ para que $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$; éste es el problema (lineal) general de mínimos cuadrados.

- (2.50) **Ejemplo.** Suponga que se decide aproximar los datos (t_i, y_i) del ejemplo 2.39 mediante una expresión cuadrática en lugar de lineal: $y \approx a + bt + ct^2$. Esto es equivalente a hacer $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 10 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

En el caso general (2.48), como en el caso del ajuste de datos mediante una línea recta, se define el *residuo* para cualquier \mathbf{x} como

$$(2.51) \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{Ax}$$

y se busca \mathbf{x} para

$$(2.52) \quad \text{minimizar } \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Ax}).$$

El material posterior demostrará que la solución a (2.47) resuelve (2.52), igual que en el caso especial del ajuste mediante línea recta, excepto que ahora \mathbf{A} es la matriz $p \times q$ de (2.48). Sin embargo, con la información que ahora se tiene, se necesita saber:

2. ¿Por qué la solución de \mathbf{x} en (2.47) resuelve (2.52)?

Aún más, existen preguntas sobre si (2.47) siempre tiene una solución, sobre la forma de encontrarla, y sobre lo que pasa cuando los datos son complejos:

3. ¿Tiene siempre $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ una solución para \mathbf{x} ?
4. ¿Cómo se puede resolver para \mathbf{x} de manera eficiente y precisa?
5. ¿Qué sucede si ambos \mathbf{A} y \mathbf{y} son complejos?

Los capítulos 5 y 8 permitirán responder a estas preguntas.

PROBLEMAS 2.6

1. Para $y_0 = 2$ y $v = 1$, encuentre los residuos r_i en el ejemplo 2.43.
2. Existen situaciones en las que algunos residuos se les debe dar mayor peso en el error total S que a otros; esto lleva a *mínimos cuadrados ponderados*. Suponga que se define –en lugar de $S(a, b)$ de (2.41)– a

$$W(a, b) = \sum_{i=1}^p w_i r_i^2 \quad \text{para pesos positivos dados } w_j.$$

Demuestre que las ecuaciones para la determinación de a y b y la minimización de $W(a, b)$ sigue siendo las de (2.42), y que *excepto* las α_{ij} y β_i se definen de modo diferente:

$$\alpha_{11} = \sum_{i=1}^p w_i, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \sum_{i=1}^p w_i t_i, \quad \alpha_{22} = \sum_{i=1}^p w_i t_i^2,$$

con definiciones análogas para β_j (introduciendo w_i en las sumatorias).

- ▷ 3. La tabla de abajo muestra la población estadounidense aproximada en millones cada diez años desde 1900 hasta 1980. Encuentre las ecuaciones (2.42) que resultarían de intentar ajustar estos datos al modelo

$$(\text{población en millones}) \approx a + b (\text{año})$$

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Pob.	76.0	92.0	105.7	123.2	131.7	150.7	179.3	203.2	226.5

4. Verifique que (2.46) se cumple para \mathbf{A} y \mathbf{y} como en el ejemplo 2.43.

5. Para el método de los mínimos cuadrados ponderados descrito en el problema 2, muestre que la ecuación matricial análoga a (2.47) es $\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$, donde \mathbf{W} es la matriz diagonal con elementos en la diagonal principal de $\langle \mathbf{W} \rangle_{ii} = w_i$.
- ▷ 6. Suponga que los datos del ejemplo 2.39 se reemplazan por los valores de t y y mostrados abajo; ajuste una línea recta a los datos.

t	1	4	5	3	8
y	0	5	11	4	17

7. La relación entre los grados Fahrenheit F y los grados Celsius C es de la forma $F = a + bC$ para a y b adecuadas. Debido a medidas inexactas, la tabla de abajo no refleja perfectamente esta relación. Utilice el método de los mínimos cuadrados para encontrar valores aproximados para a y b a partir de los datos proporcionados.

F	-1	2	10	15
C	32	36	51	57

8. Si \mathbf{A} es $p \times q$ y \mathbf{y} es $p \times 1$, el comando del MATLAB $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{y}$ calcula de hecho la solución de mínimos cuadrados \mathbf{x} para $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ por un método muy preciso.
- Utilice el comando del MATLAB para resolver para el modelo de mínimos cuadrados del problema 3 en lugar de resolver (2.47)
 - Utilice el modelo obtenido para predecir la población en 1990.
9. Completando cada vez el cuadrado de una variable x_i , demuestre que la solución de los mínimos cuadrados para el problema general (2.48) puede obtenerse resolviendo $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ (\mathbf{A} , \mathbf{y} reales).
- ▷ 10. Encuentre la solución de mínimos cuadrados a $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11. Encuentre todas las soluciones de mínimos cuadrados para $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ y muestre que $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es singular, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- M 12.** Suponga que en el modelo de la competencia entre lecherías del ejemplo 2.6 sección 2.2, no se conoce el modo de calcular la nueva fracción de mercado de la lechería 1 a partir de las fracciones anteriores, si no que sólo se sabe que $x_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$ para parámetros α, β y γ desconocidos. Suponga que se han recolectado datos que muestran que las acciones iniciales del mercado de $[0.2 \ 0.3 \ 0.5]^T$ llevan a $x_1 = 0.3$, que $[0.3 \ 0.2 \ 0.5]^T$ lleva a $x_1 = 0.3$, que $[0.4 \ 0.3 \ 0.3]^T$ lleva a $x_1 = 0.4$, que $[0.1 \ 0.1 \ 0.8]^T$ lleva a 0.2 y que $[0.7 \ 0.2 \ 0.1]^T$ lleva a 0.6. Utilice el MATLAB o software similar con el método de mínimos cuadrados para determinar los valores aproximados de α, β y γ .
- ▷ **13.** Encuentre explícitamente las ecuaciones $A^T A x = A^T y$ para el modelo del ejemplo 2.50.
- M 14.** Utilice el MATLAB o software similar para resolver para el ajuste cuadrático del ejemplo 2.50.
- M 15.** Utilice el MATLAB o software similar para encontrar el ajuste cuadrático de mínimos cuadrados a los datos poblacionales del problema 3; prediga la población en 1990.
- 16.** Suponga que A o y o ambos son posiblemente complejos, de modo que la suma de los cuadrados de las magnitudes de los residuos debe evaluarse como $r^H r$ en vez de $r^T r$. De hecho, entonces, las ecuaciones que determinan una solución de mínimos cuadrados x para $A x \approx y$ se convierten en $A^H A x = A^H y$ en vez de $A^T A x = A^T y$ como en (2.47). Demuestre esto para el caso especial del ajuste de datos posiblemente complejos (2.38) mediante (2.37) con a y b posiblemente complejos.

2.7 PLANEACION DE PRODUCCION: PROGRAMAS LINEALES

En muchos problemas prácticos se nos pide cumplir alguna tarea de una manera óptima (o casi óptima): para minimizar costos, para minimizar esfuerzos, para maximizar ganancias, etc. Los modelos matemáticos de muchos de estos problemas se llaman *programas matemáticos*; aquí la palabra “programa” se utiliza en el sentido de “plan de acción” en vez de como “programa computacional”. De estos programas los más simples son los *programas lineales*; y aunque simples, han tenido una gran aplicación e impacto en muchas áreas del comercio y del gobierno. Se presenta aquí un ejemplo simple de una programa lineal y su solución.

Un problema de planeación de producción

Al intentar decidir cómo asignar la capacidad de manufacturar entre varios productos, una industria, por lo general, está influenciada por muchos factores, incluyendo, por supuesto, el deseo de lograr una utilidad razonable. Se considera

ahora un modelo muy simplificado de tal situación en la que se supone que el único deseo es el de maximizar utilidades.

Suponga que una planta industrial tiene tres tipos de máquinas (M_1 , M_2 y M_3), cada una de las cuales debe usarse para la manufactura de los productos de la planta, de los que existen dos tipos (P_1 y P_2). El problema es decidir cuánto producir de cada producto cada semana, de modo que se maximicen las utilidades semanales. Se supone que, de cada unidad de cada producto manufacturado, se tiene una utilidad fija, de modo que la utilidad total es simplemente la suma de las utilidades de cada tipo P_1 y P_2 , y la utilidad de cada uno se obtiene, simplemente, multiplicando la utilidad por artículo por el número de artículos manufacturados. Específicamente, se supone que la utilidad por artículo hecho para el producto P_1 es de \$40, mientras que para P_2 es de \$60. Se observa claramente que el fabricante simplemente debe producir lo más posible; aquí la palabra "posible" resulta clave, ya que, es lógico que el fabricante está limitado por las capacidades de los tipos de máquina M_1 , M_2 y M_3 que se tienen que utilizar. Por lo tanto, se debe suponer que se conoce la cantidad de tiempo disponible en cada máquina y también la cantidad de tiempo que se requiere en cada máquina para hacer cada tipo de producto. Específicamente, suponga que un artículo de P_1 requiere de dos horas en las máquinas de tipo M_1 y una hora en cada una de las máquinas de tipo M_2 y M_3 , mientras que un artículo de P_2 requiere de una hora en cada una de las máquinas de tipo M_1 y M_2 pero tres horas en M_3 . Además suponga que el número de horas disponible cada semana en las máquinas de los tipos M_1 , M_2 y M_3 es 70, 40, y 90, respectivamente. Todas estas suposiciones se resumen en (2.53).

Tipo de máquina	Horas necesarias para una unidad de P_1	Horas necesarias para una unidad de P_2	Horas totales disponibles
M_1	2	1	70
M_2	1	1	40
M_3	1	3	90
Ganancia por unidad de $P_1 = \$40$		Ganancia por unidad de $P_2 = \$60$	

En seguida, sea x_1 el número de unidades de P_1 que deben producirse cada semana, mientras que x_2 denota el número de unidades de P_2 . Ya que cada unidad de P_1 requiere de dos horas en las máquinas de tipo M_1 mientras que cada unidad de P_2 requiere de sólo una hora, entonces, se requiere de $2x_1 + x_2$ horas en las máquinas de tipo M_1 ; ya que sólo se disponen de 70 horas en estas máquinas, se necesita

$$2x_1 + x_2 \leq 70$$

Razonando de manera similar con respecto a los tipos limitados de las máquinas de tipo M_2 y M_3 y al tiempo necesario para producir x_1 de P_1 y x_2 de P_2 , se observa

también que es necesario que

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 90.$$

Ya que es imposible producir un número negativo de unidades también se requiere que

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Para calcular la utilidad resultante de nuestro plan de producción, recuerde que la utilidad de cada unidad de P_1 es de 40, así que x_1 unidades dan una utilidad de $40x_1$; de modo similar, x_2 unidades de P_2 dan una utilidad de $60x_2$, de manera que la utilidad total es de $40x_1 + 60x_2$. De modo que la versión matemática de nuestro problema de producción es como sigue:

$$(2.54) \quad \text{maximizar } M = 40x_1 + 60x_2$$

donde x_1 y x_2 deben satisfacer las restricciones

$$(2.55) \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 70 \\ x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 90 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Este es un *problema típico de programación lineal* que involucra la optimización de cierta función lineal de ciertas incógnitas sujetas a restricciones lineales que limitan los valores permisibles de las mismas; tales problemas se estudiarán después más de cerca y se aprenderá a resolverlos mediante métodos matriciales. Por lo pronto nos limitamos a reescribir el programa lineal en notación matricial y a utilizar métodos gráficos para resolver el problema.

Con el fin de expresar las ecuaciones anteriores en notación matricial, se requiere de los siguientes conceptos. Se dice que una matriz P es *mayor que Q*, escrito como $P > Q$, cuando P y Q tienen el mismo número de renglones y de columnas, y cada elemento de P es mayor que el elemento de Q correspondiente. Definiciones similares se cumplen para \geq , $<$ y \leq . Si $P > Q$, se dice que P es *positivo*. Si $P \geq Q$, se dice que P es *no negativo*.

Si se introduce

$$(2.56) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

entonces el problema descrito en (2.54) y (2.55) puede denotarse fácilmente mediante

$$(2.57) \quad \text{maximizar } M = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

donde \mathbf{x} debe satisfacer las restricciones

$$(2.58) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

(Hablando en un sentido estricto, $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ es una matriz 1×1 , pero se adopta la convención de que $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ puede también denotar el elemento de la matriz.)

Se cumplirán las mismas *formas* de ecuaciones si se tienen p máquinas diferentes que producen q productos. Entonces \mathbf{A} es una matriz $p \times q$, y su elemento (i, j) representa el número de horas en la máquina i requeridas para producir una unidad del producto j . El número total de horas disponibles formará una matriz columna $p \times 1$, y la matriz de utilidades \mathbf{c} y la matriz \mathbf{x} que representa los números de unidades producidas, serán matrices columna $q \times 1$.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 4.

Interpretación geométrica y solución

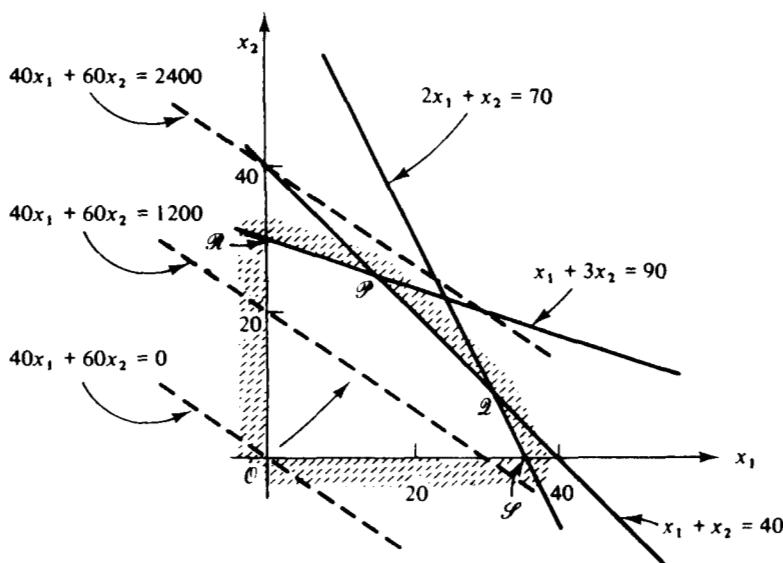
Más adelante se aprenderán métodos matriciales para resolver programas lineales generales de las formas en (2.57)-(2.58). Por lo pronto se describirá el problema específico en (2.54)-(2.55) de manera geométrica (o gráfica) para visualizar los hechos; así mismo, se podrá resolver el problema mediante este método.

Para tratar la primera desigualdad en (2.55), se observa que $2x_1 + x_2 = 70$ es la ecuación de una línea recta –vea la figura 2.59. La desigualdad $2x_1 + x_2 \leq 70$ significa que el punto (x_1, x_2) debe encontrarse *en o por debajo* de la línea recta. De modo similar, las otras dos desigualdades en (2.55) definen medios planos en los que deben encontrarse los puntos (x_1, x_2) permisibles. Las desigualdades $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ significan que (x_1, x_2) deben encontrarse en el primer cuadrante. El resultado neto es que las desigualdades confinan el punto (x_1, x_2) a una región poligonal cuyo límite se encuentra sombreado en (2.59). Para cualquier valor de M dado, la ecuación (2.54), es decir $M = 40x_1 + 60x_2$, define una línea recta. Las tres líneas punteadas en (2.59) representan esta línea recta. Las tres líneas punteadas en (2.59) representan esta línea recta para $M = 0, 1200, 2400$. El valor de M que corresponde a cualquier punto sobre una línea dada es una constante, y las líneas son paralelas. Para maximizar M debe alejarse lo más posible en una dirección perpendicular a estas líneas –en (2.59) en la dirección de la flecha cerca del origen– sin abandonar la región permitida. De este modo se alcanzará el punto \mathcal{P} , que es la intersección de

$$x_1 + 3x_2 = 90, \quad x_1 + x_2 = 40,$$

esto es, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$. El valor de M correspondiente es de 2100. Partiendo de la figura geométrica, es lógico que dos de las relaciones en (2.55) son ahora igualdades y una es estrictamente una desigualdad. En términos del problema original de planeación de producción, se obtiene una utilidad máxima de \$2100 semanales al producir 15 unidades de P_1 y 25 unidades de P_2 cada semana; las máquinas del tipo M_2 y M_3 se utilizan a su máxima capacidad cada semana, pero sólo se usan 55 horas de tiempo en las máquinas M_1 , 15 horas menos de su capacidad. El fabricante deberá considerar el vender algunas de las máquinas M_1 ya que la capacidad de la máquina M_1 puede reducirse sin reducir la utilidad (ver problema 5).

(2.59)



Para problemas como éstos, es necesario saber:

1. ¿Siempre existen soluciones?
2. ¿Cómo se pueden encontrar soluciones de un modo eficiente y preciso?

Tales preguntas se responden en el capítulo 11, utilizando una gran cantidad de la información de los capítulos 3 y 4.

PROBLEMAS 2.7

1. Deduzca la segunda y tercera restricciones de (2.55).
2. Una dieta balanceada debe consistir de, al menos, cantidades mínimas de ciertos nutrientes. Suponga que de un conjunto dado de alimentos, desea

determinar una dieta de costo mínimo que satisfaga los requerimientos mínimos propios de ciertos nutrientes; en particular, suponga que la tabla, abajo, da el costo y niveles de nutrientes en cada uno de tres alimentos y que se debe cumplir con los requerimientos mínimos que se enlistan de la manera más barata posible.

	Alimento 1	Alimento 2	Alimento 3	Número mínimo de unidades requeridas
Nutriente 1	2	1	1	40
Nutriente 2	1	1	3	60
Costo	70	40	90	

Denote mediante y_1 , y_2 y y_3 las cantidades de cada uno de los tipos de alimentos en la dieta. Muestre que el problema se modela para encontrar y_1 , y_2 y y_3 y con esto

$$\text{minimizar } M = 70y_1 + 40y_2 + 90y_3$$

sujeto a las restricciones

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0,$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 40,$$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 60.$$

- ▷ 3. Exprese el modelo del problema dos en notación matricial.
- 4. a) Mediante la resolución de conjuntos de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, encuentre las coordenadas x_1 y x_2 de cada uno de los puntos \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{P} , \mathcal{R} , y \mathcal{O} de (2.59).
- b) Evalúe M en (2.54) en cada uno de estos cinco puntos, y observe que el punto que da el mayor valor de estos cinco, es el mismo punto encontrado al resolver el programa lineal (2.54)-(2.55).
- ▷ 5. Suponga que el fabricante en el ejemplo principal decide eliminar la capacidad excesiva vendiendo algunas máquinas tipo M_1 de modo que sólo se dispongan de 55 horas por semana de la máquina M_1 . Demuestre que aún es posible seguir el plan de producción de $x_1 = 15$ y $x_2 = 25$, y que sigue siendo el plan óptimo.
- 6. Suponga que en el problema 5 el dinero obtenido de la venta de las máquinas M_1 se utiliza para comprar suficientes máquinas M_3 para incrementar el número de horas disponibles de la máquina M_3 a 100 horas por semana en lugar de 90. Encuentre el nuevo programa óptimo de producción x_1 , x_2 y la utilidad máxima asociada; ¿produjo este cambio un incremento en las utilidades?

7. Suponga que en los problemas 5 y 6, en lugar de que el dinero de la venta de las máquinas M_1 sea usado para comprar máquinas M_3 se utilice para comprar máquinas M_2 , para incrementar el tiempo disponible por semana de la máquina M_2 a 50 horas por semana en lugar de 40. Encuentre el nuevo horario de producción óptimo x_1, x_2 ; ¿produjo este cambio un incremento en las utilidades?
- ▷ 8. Suponga que en (2.59) M se cambia por $M = 10x_1 + 40x_2$. Encuentre el programa de producción óptimo x_1, x_2 .
9. Suponga que en (2.59) M se cambia por $M = 90x_1 + 40x_2$. Encuentre el programa de producción óptimo x_1, x_2 .
- ▷ 10. Encuentre los números c y d tales que, si se cambia M a $M = cx_1 + dx_2$ en (2.59) el programa de producción óptimo ocurra en \mathcal{Q} , donde $x_1 = 30$ y $x_2 = 10$.
11. Suponga que en (2.59) M se cambia por $M = 50x_1 + 50x_2$. Demuestre que existe un número infinito de planes de producción óptimos, es decir, $x_1 = \alpha$ y $x_2 = 40 - \alpha$ para cualquier α que satisfaga $15 \leq \alpha \leq 30$.

2.8 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 2.8

1. Si una matriz \mathbf{A} , 3×3 cumple con las condiciones apropiadas además de (2.3), es posible demostrar que las potencias de \mathbf{A}^r tienden a una matriz \mathbf{A}_∞ conforme r tiende a infinito; en particular suponga que la condición adicional es que la matriz A sea estrictamente positiva: $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} \geq d$ para cierto número $d > 0$. (Nota: d probablemente no pueda ser mayor que $\frac{1}{3}$; ¿por qué?)
- Sea $a_{r,ij}$ el elemento (i,j) de \mathbf{A}^r : $\langle \mathbf{A}^r \rangle_{ij} = a_{r,ij}$; sean m_r y M_r los elementos más pequeño y más grande respectivamente $a_{r,ij}$ en el primer renglón de \mathbf{A}^r . Escribiendo los elementos del primer renglón de $\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r \mathbf{A}$ en términos de los elementos del primer renglón de \mathbf{A}^r y de las columnas de \mathbf{A} , demuestre que
- $$m_{r+1} \geq M_r d + m_r(1-d) \quad \text{y} \quad M_{r+1} \leq m_r d + M_r(1-d).$$
- Entonces, deduzca que $(M_{r+1} - m_{r+1}) \leq (1-2d)(M_r - m_r)$.
 - Deduzca que $M_r - m_r$ tiende a cero a medida que r tiende a infinito.
 - Demuestre que los números M_r decrecen: $M_1 \geq M_2 \geq M_3, \dots$, que los m_r crecen: $m_1 \leq m_2 \leq m_3, \dots$, y que m_r y M_r forman sucesiones acotadas.
 - Concluya que tanto M_r como m_r convergen, y al mismo límite: esto es, el primer renglón de \mathbf{A}^r converge a un renglón de la forma $[\alpha \ \alpha \ \alpha]$ para cierta α .

- f) Demuestre que, aplicando el mismo tipo de argumento a los renglones segundo y tercero de \mathbf{A}^r se prueba que \mathbf{A}^r converge a cierta matriz de la forma

$$\mathbf{A}_\infty = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \text{ y } \gamma \text{ positivas}$$

y $\alpha + \beta + \gamma = 1$

2. Generalice el teorema y la demostración del problema 1 para matrices $p \times p$.
 3. Para explicar el comportamiento de las poblaciones de zorros y gallinas en el modelo del ejemplo 2.16 (donde $k = 0.1$):
 a) Demuestre que

$$Z_{i+1} - G_{i+1} = 0.7(Z_i - G_i) \quad \text{y} \quad 5G_{i+1} - Z_{i+1} = 1.1(5G_i - Z_i).$$

- b) Deduzca que $(Z_i - G_i)$ tiende a cero mientras que $5G_i - Z_i$ tiende a infinito cuando i tiende a infinito.
 c) Concluya que tanto Z_i como G_i tienden a infinito.
 4. Para explicar el comportamiento de las poblaciones de zorros y gallinas en el modelo del ejemplo 2.17 (donde $k = 0.18$):
 a) Demuestre que

$$0.1G_{i+1} - 0.06Z_{i+1} = 0.9(0.1G_i - 0.06Z_i)$$

y que

$$2G_{i+1} - Z_{i+1} = 0.9(2G_i - Z_i) + (0.1G_i - 0.06Z_i).$$

- b) Deduzca que $0.1G_i - 0.06Z_i$ tiende a cero cuando i tiende a infinito.
 c) Deduzca que $2G_i - Z_i$ tiende a cero.
 d) Concluya que tanto Z_i como G_i tienden a cero.
 5. Suponga que \mathbf{x} es una matriz columna $p \times 1$, con elementos $\langle \mathbf{x} \rangle_i = x_i$ y que f es una función de valor real de las p variables x_1, x_2, \dots, x_p . Se denota $f(x_1, \dots, x_p)$ mediante $f(\mathbf{x})$, y se define la matriz columna, $p \times 1$ $\partial f / \partial \mathbf{x}$ de derivadas parciales de f con respecto a sus variables de la forma: $\langle \partial f / \partial \mathbf{x} \rangle_i = \partial f / \partial x_i$.
 a) Si $f(\mathbf{x})$ es $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, donde \mathbf{c} es una matriz columna constante $p \times 1$, demuestre que $\partial f / \partial \mathbf{x} = \mathbf{c}$.
 b) Si \mathbf{B} es una matriz simétrica $p \times p$ y $f(\mathbf{x})$ es (el elemento en la matriz 1×1) $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, demuestre que $\partial f / \partial \mathbf{x} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$.
 c) Dados \mathbf{A} $p \times q$ y \mathbf{y} $p \times 1$, para que \mathbf{x} sea solución del problema de mínimos cuadrados (2.52) se requiere que $\partial f / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $f(\mathbf{x})$ es (el elemento en la matriz 1×1) $(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$. Utilice a) y b) para mostrar que esta condición en la derivada es tan sólo $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.

6. Los siguientes temas generales –y referencias bibliográficas asociadas– están muy relacionados con el material cubierto en este capítulo. Es posible discutir el uso de matrices en estas áreas ya sea de manera superficial (basado en el material del primer capítulo y en una breve hojeada a algunas referencias), o de modo profundo (basado en material de capítulos posteriores y de un examen detallado de las referencias y otras fuentes). En un nivel asignado por su profesor, utilice las referencias sugeridas u otras, para discutir los usos de matrices en una de las siguientes áreas.
- a) Cadenas de Markov –Karlin (17); y Kemeny y Snell (19 y 20).
 - b) Equilibrio en redes –Martin (25); Robinson (29); y Strang (34).
 - c) Circuitos eléctricos –Senturia y Wedlock (32); Strang (34); Tropper (35); y Weiss (37).
 - d) Dinámica y ecuaciones diferenciales –Bellman y Cooke (7); Braun (8); Frazer, Duncan y Collar (10); Hurty y Rubinstein (16); y Strang (34).
 - e) Mínimos cuadrados en modelado y estadística –Albert (5); Graybill (12); Linnik (22); Rao (28); Searle (31); y Walpole y Myers (36).
 - f) Programación lineal –Dantzig (9); Hadley (14); Karmarkar (18); y Simonnard (33).
 - g) Economía –Karlin (17); Kemeny y Snell (19 y 20); Kemeny, Snell y Thompson (21); Maki y Thompson (23); y Schwartz (30).
 - h) Ingeniería y ciencias –Amundsen (6); Haberman (13); Heading (15); Pipes (27); Searle (31); Strang (34); Tropper (35); y Weiss (37).
 - i) Ciencias sociales y del comportamiento –Haberman (13); Kemeny y Snell (19 y 20); Kemeny, Snell y Thompson (21); y Maki y Thompson (23).
7. Una vez que haya estudiado algunos de los capítulos posteriores, podrá discutir el uso de matrices y del álgebra lineal en otras áreas diferentes a las que se sugieren en el problema 6; este problema es una tarea para esas fechas posteriores. Al igual que en el problema 6, utilice las referencias para discutir uno de los siguientes temas.
- a) Pseudoinversas –Albert (5); y Nashed (26).
 - b) Programación no lineal –Mangasarian (24).
 - c) Teoremas de la alternativa para desigualdades lineales –Mangasarian (24).
 - d) Cálculos con matrices esparcidas –Bjork, Plemmons y Schneider (38); Bunch y Rose (39); Duff y Stewart (41); George y Liu (45); y Rose y Willoughby (51).
 - e) Métodos iterativos para la solución de ecuaciones lineales –Hageman y Young (47); y Varga (54).
 - f) Solución de problemas de mínimos cuadrados –Golub y Van Loan (46); Lawson y Hanson (49); y Stewart (53).
 - g) Cálculo de eigensistemas –Golub y Van Loan (46); Parlett (50); Stewart (53); y Wilkinson (56).
 - h) Matrices no negativas –Varga (54).

3

Solución de ecuaciones y cálculo de inversas: métodos

*Este capítulo constituye el corazón metodológico del libro; las herramientas de la eliminación de Gauss, las operaciones elementales de renglón y la sustancia hacia atrás se utilizarán virtualmente en cada capítulo subsiguiente y deberán, por lo tanto, ser dominadas por completo. El teorema 3.34 es un **teorema clave** porque es la base de muchos de los argumentos teóricos del capítulo 4. Las secciones 3.6, 3.8 y 3.9 serán de mucho interés para aquéllos que tengan una orientación de tipo computacional, mientras que la materia de la sección 3.5 es de importancia para aquéllos con una orientación de tipo teórico aplicado o computacional. La sección 3.7 se encuentra en algún lugar entre estos dos; sin embargo, se deben conocer los **teoremas clave 3.48 y 3.53** sobre la descomposición-LU como una alternativa de la eliminación de Gauss.*

3.1 INTRODUCCION

En el capítulo 2, se proporcionó amplia evidencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales que surgen a partir de la aplicación de las matemáticas en diversas áreas; ese capítulo, al igual que el capítulo 1 –véase por ejemplo, el teorema 1.38 sobre ecuaciones e inversas– demuestran también que las matrices y sus inversas están íntimamente relacionadas con el problema de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En este capítulo se desarrollará la metodología matricial para resolver sistemas de ecuaciones y encontrar inversas; aquí se enfatiza el *cómo*: *cómo* descubrir si un sistema tiene solución o si una matriz tiene inversa; *cómo* encontrar tales soluciones o inversas y así sucesivamente. Entonces en el capítulo 4 se reexaminarán algunos de estos procedimientos y problemas desde

un punto de vista teórico para poder desarrollar un fundamento lógico riguroso para los problemas prácticos.

3.2 SOLUCION DE ECUACIONES MEDIANTE LA ELIMINACION DE GAUSS

El método de la eliminación de Gauss es un procedimiento directo pero poderoso para la reducción de sistemas de ecuaciones lineales a una *forma reducida* sencilla que se resuelve fácilmente por sustitución. Observe que muchos autores utilizan “eliminación de Gauss” para referirse tanto a la reducción como a la sustitución que le sigue, mientras que aquí sólo se hace referencia a la reducción. Para introducirlo, se empieza ignorando la notación matricial y escribiendo detalladamente las ecuaciones; más adelante se traducirá lo que se está haciendo al lenguaje matricial. Observe que hay un número de variantes igualmente efectivas en la eliminación de Gauss; se presenta una en detalle y algunas otras se mencionan en problemas posteriores.

Eliminación de Gauss para ecuaciones

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= -4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 15x_4 &= -3 \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 17x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Para aplicar la *eliminación de Gauss* a (3.1), se utiliza la primera ecuación de (3.1) para eliminar x_1 de las otras tres ecuaciones. Para hacer los cálculos más sencillos, primero se divide la primera ecuación por el coeficiente -2 de x_1 , obteniendo de allí una ecuación equivalente en la cual el coeficiente x_1 es 1:

$$(3.2) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2.$$

Después, se utiliza esta ecuación para eliminar x_1 de las últimas tres ecuaciones de (3.1)

Nota. Esto se puede hacer de dos formas *aparentemente* diferentes: 1) por sustitución o 2) mediante la combinación de ecuaciones. Por sustitución, se resuelve (3.2) para obtener x_1 en términos de las otras variables y luego sustituir con esta expresión a x_1 en cada una de las otras ecuaciones; por ejemplo, la segunda ecuación de (3.1) se convierte en

$$-3(2 + x_2 - 2x_3 - 3x_4) + 6x_2 + 3x_3 - 15x_4 = -3,$$

que, después de combinar términos, resulta $3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 3$. Con el procedimiento combinado, se agrega a cada una de las ecuaciones siguientes un múltiplo apropiado de la primera, seleccionado de tal modo, que el coeficiente de x_1 se vuelve cero en la nueva ecuación. Por ejemplo, multiplique la primera ecuación nueva (3.2), mentalmente por 3 y sume el resultado a la segunda ecuación de (3.1); obtendrá

$$-3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 15x_4 + (3)(x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4) = -3 + (3)2,$$

que, después de combinar términos, es tan sólo $3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 3$ exactamente como en el primer procedimiento. Los dos procedimientos *siempre* dan el mismo resultado. Ya que es más fácil de organizar computacionalmente el procedimiento de combinación de ecuaciones y no requiere del intercambio de términos sino de cruzar el signo de igualdad, siempre se usará este método. Por lo tanto,

- (3.3) cuando se dice “utilice la ecuación A para eliminar la variable B de la ecuación C ”, se quiere decir “reemplace la ecuación C por sí misma, más aquel múltiplo de la ecuación A que daría una nueva ecuación que no contendría explícitamente a la variable B ”.

Volviendo a la eliminación de Gauss en (3.1): la tarea era usar la ecuación (3.2) para eliminar x_1 de cada una de las otras tres ecuaciones. El resultado es

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 &= 3 \\ -3x_2 - 11x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Observe que las últimas tres ecuaciones en (3.4) involucran sólo las tres incógnitas x_2 , x_3 y x_4 mientras que la primera ecuación permite el cálculo directo de x_1 una vez que se hayan encontrado x_2 , x_3 y x_4 de las ecuaciones inferiores.

El siguiente paso es reducir las tres ecuaciones inferiores con tres incógnitas a dos ecuaciones con dos incógnitas. Primero, se divide la nueva segunda ecuación de (3.4) entre su coeficiente 3, con el fin de simplificar la aritmética; esto permite que a la segunda ecuación la reemplace

$$(3.5) \quad x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1.$$

Ahora utilice esta segunda nueva ecuación para eliminar la segunda variable x_2 de las últimas dos ecuaciones –por ejemplo, reemplace la tercera ecuación de

(3.4) por sí misma más tres veces la segunda ecuación más nueva (3.5). Esto reemplaza el conjunto (3.4) de cuatro ecuaciones por

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 3x_3 + 8x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ahora se tienen que manejar las últimas dos ecuaciones con dos incógnitas con el mismo proceso. Divida la tercera ecuación de (3.6) entre -2 , reemplazando esta ecuación por $x_3 + 2x_4 = -1$; entonces utilice esta ecuación para eliminar x_3 de la cuarta ecuación de (3.6). Después de dividir esta nueva cuarta ecuación entre el nuevo coeficiente 2 encontrado para x_4 , se ha reducido finalmente el sistema

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Esto completa la eliminación de Gauss, dando la *forma reducida* (3.7) de las ecuaciones originales (3.1). La expresión “forma reducida” se define de manera precisa en el capítulo 4; el término describe una forma que resulta de la eliminación de Gauss.

Se utiliza ahora la *sustitución en reversa* para producir la solución de (3.7) como sigue. La última ecuación en (3.7) tiene, clara y exactamente, una solución: $x_4 = 3$. Ahora, para la sustitución en reversa: al sustituir $x_4 = 3$ en la tercera ecuación de (3.7) se tiene

$$x_3 = -1 - 2x_4 = -1 - 2(3) = -7;$$

sustituyendo $x_4 = 3$ y $x_3 = -7$ en la segunda ecuación de (3.7) se obtiene $x_2 = 28$; y una última sustitución en reversa en la primera ecuación de (3.7) da como resultado $x_1 = 35$. Si, como comprobación, se sustituyen estos valores en el sistema *original* (3.1), se observará que, efectivamente, se obtuvo una solución.

Ahora podrá resolver los problemas 1 y 2.

Eliminación de Gauss para matrices aumentadas

Al realizar en el ejercicio anterior la eliminación de Gauss, todos los cálculos se hicieron con los *números* –los coeficientes y el miembro derecho de las ecuacio-

nes—en lugar de usar para ello los símbolos x_i , aunque ciertamente se continuó escribiendo las x_i . Se puede ahorrar una cantidad considerable de escritura trabajando solamente con los números y evitando reescribir las variables todo el tiempo; sólo se debe tener cuidado de no perder la pista de qué números son coeficientes de cuáles incógnitas, o de cuáles corresponden a qué miembro derecho. Las matrices son ideales para esto.

En lugar de manipular las ecuaciones, se opera con la *matriz aumentada* $[A \ b]$ que se forma añadiendo la columna b del lado derecho a la matriz A de coeficientes, para formar una matriz separada; para el ejemplo anterior la matriz aumentada es

$$(3.8) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -4 & -6 & -4 \\ -3 & 6 & 3 & -15 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & 17 & 9 \\ 1 & 1 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right].$$

El primer paso en la aplicación de la eliminación de Gauss para las ecuaciones en (3.1) fue reemplazar la primera ecuación por sí misma dividida entre -2 ; en términos de la matriz de coeficientes y de los lados derechos de las ecuaciones, esto significa simplemente reemplazar el primer *renglón*

$$[-2 \ 2 \ -4 \ -6 \ | \ -4]$$

por sí mismo dividido entre -2 :

$$[1 \ -1 \ 2 \ 3 \ | \ 2].$$

Observe que esto es tan sólo la matriz de números que aparece en la primera ecuación nueva (3.2). El siguiente paso, utilizando el método de *ecuaciones* fue utilizar la nueva primera *ecuación* para eliminar x_1 de las otras tres *ecuaciones*; para matrices, esto significa que se usa el primer *renglón* nuevo para eliminar los elementos en la primera columna de los otros tres *renglones*. Observe que

- (3.9) cuando se dice “utilice el renglón A para eliminar el elemento en la columna B del renglón C ,” se quiere decir “reemplace el renglón C por sí mismo más el múltiplo del renglón A que dará un nuevo renglón con un elemento cero en la columna $B”;$

observe la similitud con el lenguaje en (3.3) utilizado para describir la eliminación de ecuaciones. Al usar el primer renglón nuevo $[1 \ -1 \ 2 \ 3 \ | \ 2]$ para eliminar los elementos en la primera columna de los otros tres renglones de (3.8) se reemplaza a la matriz aumentada (3.8) por

$$(3.10) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -11 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 \end{array} \right].$$

Observe que (3.10) es precisamente la matriz aumentada de (3.4). Después se reemplaza el segundo renglón

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 9 & -6 & 3 \end{array} \right]$$

en (3.10) reemplazado por sí mismo y dividido entre 3 –es decir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

–después utilice ese nuevo segundo renglón para eliminar los elementos en la columna 2 de los últimos dos renglones de (3.10); esto da

$$(3.11) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 3 \end{array} \right].$$

Observe que (3.11) es precisamente la matriz aumentada de (3.6). Reemplace el tercer renglón de (3.11) con él mismo dividido entre -2 , y utilice este nuevo renglón para eliminar el elemento en la columna 3 del último renglón, dando como resultado

$$(3.12) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Reemplazando el último renglón con el mismo dividendo entre 2, se obtiene finalmente la matriz reducida

$$(3.13) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Esto completa la eliminación de Gauss, dando la *forma reducida* (3.13) de la matriz aumentada original (3.8). Observe que (3.13) es precisamente la matriz aumentada para (3.7). Si no se hubiese realizado la eliminación en las ecuaciones, al llegar a este punto se hubiera interpretado (3.13) como la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones –es decir (3.7)– se hubiera escrito el sistema, y después se hubiera usado la sustitución en reversa para obtener la solución al sistema de ecuaciones original.

El hecho de resolver el sistema (3.1) de dos maneras diferentes pudo haber oscurecido la facilidad de uso de la eliminación de Gauss en la matriz aumentada. Considere otro ejemplo ilustrativo.

- (3.14) *Ejemplo.* Considere las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

En seguida se escribe la matriz aumentada

$$(3.15) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right].$$

Reemplace el primer renglón con él mismo dividido entre -3 y utilice este nuevo primer renglón para eliminar los elementos en la primera columna de otros dos renglones, lo que da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Reemplazando el segundo renglón de esta nueva matriz aumentada con él mismo dividido entre 4 y utilizando el nuevo renglón para eliminar el elemento en la segunda columna del último renglón, da como resultado una matriz que –después de dividir su último renglón entre 5 – a su vez da como resultado de la eliminación de Gauss la matriz reducida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.75 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{array} \right].$$

Si se interpreta esta última matriz reducida como la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones, entonces la última ecuación da claramente $x_3 = 0.2$; realizando la sustitución en reversa y poniendo este resultado en la segunda ecuación, da que $x_2 = 0.35$; nuevamente, realizando la sustitución en reversa con estos dos resultados en la primera ecuación da $x_1 = 0.45$. Si sustituye estos resultados en el sistema original de ecuaciones, verá que la eliminación de Gauss aplicada a la matriz aumentada ha producido verdaderamente una solución.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Intercambios en la eliminación de Gauss

En cada uno de los casos anteriores se ha procedido de un modo sistemático, utilizando los renglones (o ecuaciones) de arriba hacia abajo para eliminar valores en las columnas (las variables) de izquierda a derecha. Sin embargo, esto no es necesario, en algunos casos es imposible, y en los cálculos prácticos –como se verá posteriormente– con frecuencia es imprudente. Si desde el principio se usa un renglón diferente del primero para realizar la eliminación, notacionalmente es más fácil *intercambiar* este renglón con el primero y después proceder de la manera acostumbrada con este nuevo primer renglón; observe que intercambiar dos renglones es lo mismo que escribir las ecuaciones en diferente orden –lo cual ciertamente no tiene ningún efecto sobre las soluciones (vea teorema 4.12).

- (3.16) **Ejemplo.** Considere nuevamente el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas del ejemplo 3.14 y su matriz aumentada (3.15). Suponga que se decide utilizar el *tercer* renglón de (3.15) en lugar del primero para eliminar en la primera columna –quizá porque ya tiene un 1 como primer elemento. Por lo tanto se intercambian el primero y tercero renglones, obteniendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right].$$

El reemplazar este nuevo primer renglón por él mismo dividido entre su primer elemento 1, por supuesto no cambia nada; se usa este primer renglón para eliminar los elementos en la primera columna de los otros dos renglones y esto da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & -3 \end{array} \right].$$

Simplemente para demostrar que se puede hacer, suponga que decide utilizar el tercer renglón para la eliminación en la segunda columna; por lo tanto intercambie el segundo y tercero renglones actuales para obtener

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \end{array} \right].$$

Reemplazando este segundo renglón por sí mismo dividido entre -12 y utilizando el nuevo segundo renglón resultante para eliminar el elemento en la segunda columna del último renglón, se obtiene una matriz que –después de dividir su último renglón entre 5 – da, a su vez, la forma reducida final

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{array} \right].$$

(Observe que esto es diferente de la matriz reducida que se obtuvo en el ejemplo 3.14; sin embargo, se obtendrá la misma solución para las ecuaciones). Si se interpreta esta matriz reducida como la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones, la última ecuación da por supuesto $x_3 = 0.2$; la sustitución en reversa produce $x_2 = 0.35$ y $x_1 = 0.45$ – exactamente la misma solución que se obtuvo en el ejemplo 3.14 sin intercambios.

El ejemplo 3.16 ilustra el hecho de que es posible intercambiar ecuaciones; en algunos casos es necesario:

- (3.17) **Ejemplo.** Considere el sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 6x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= -1 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -3. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & -2 & -6 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 10 & -1 \\ -2 & 6 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 8 & -3 \end{array} \right].$$

Reemplazando el primer renglón por sí mismo dividido entre -2 y haciendo uso del primer renglón resultante para eliminar los elementos en la primera columna de los últimos tres renglones da como resultado

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right].$$

Ya que el elemento (2, 2) de esta matriz es cero, se puede usar el segundo renglón para eliminar en la segunda columna: no importa por cuánto se multiplique el segundo renglón, al sumar el resultado a un renglón inferior, el cero en el segundo elemento del segundo renglón deja sin cambio el segundo elemento del renglón inferior. Existe la necesidad de intercambiar el segundo renglón con el tercero o con el cuarto.

Hasta ahora los ejemplos han demostrado que siempre es *possible* y a veces *necesario* intercambiar renglones cuando se utiliza la eliminación de Gauss; se deja a las secciones 3.6 y 3.9 demostrar el hecho de que a veces es *prudente* hacerlo en los cálculos prácticos.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 9.

Eliminación de Gauss para matrices aumentadas en general

Hasta aquí, sólo se han visto *ejemplos* de sistemas de ecuaciones, de matrices aumentadas y de eliminación de Gauss; ahora se examinará la situación y procedimiento generales. Vuelva a ver (1.36) en la sección 1.4, donde se demostró que el sistema general

$$(3.18) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q &= b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q &= b_p \end{aligned}$$

de p ecuaciones lineales con q incógnitas era equivalente a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para $p \times q$ \mathbf{A} con $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = a_{ij}$, \mathbf{x} $q \times 1$ con $\langle \mathbf{x} \rangle_j = x_j$, y \mathbf{b} $p \times 1$ con $\langle \mathbf{b} \rangle_i = b_i$. La eliminación de Gauss para matrices opera en la matriz aumentada $[\mathbf{A} \ | \ \mathbf{b}]$:

(3.19) **Definición.** La matriz separada $[\mathbf{A} \ | \ \mathbf{b}]$ es la *matriz aumentada* del sistema de ecuaciones descrito $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

La eliminación de Gauss procede entonces a eliminar en las columnas comenzando con la columna 1, siguiendo con la columna 2, y demás sucesivamente; se usa el renglón r_j para eliminar en la columna j , y además se puede intercambiar un renglón inferior con el renglón r_j -ésimo antes de la eliminación. Se puede describir el proceso utilizando columnas sucesivas -(3.20)- o renglones -ver (4.1).

(3.20) La eliminación de Gauss con intercambios en la matriz aumentada $p \times (q + 1)$ $[\mathbf{A} \ | \ \mathbf{b}]$ procede como se indica a continuación:

1. Sea $j = 1$ y $r_1 = 1$; utilice el renglón r_j para eliminar en la columna j de la matriz aumentada actual como se indica en los pasos del 2 al 6.
2. Seleccione un renglón de entre los renglones numerados $r_j, r_j + 1, \dots, p$ para su uso en la eliminación de la columna j ; llame a este renglón i , de modo que el elemento (i, j) –llamado *pivote*– en la matriz aumentada actual sea diferente de cero. Si no hay elementos diferentes de cero en esta parte inferior de la columna j , entonces no se requiere de eliminación: ponga $r_{j+1} = r_j$ para utilizar el mismo renglón, y salte directamente al paso 6.
3. Intercambie los renglones i -ésimo y r_j -ésimo.
4. Reemplace este nuevo renglón r_j -ésimo por sí mismo dividido entre el pivote (su elemento diferente de cero en su columna j -ésima).
5. Utilice este nuevo renglón r_j -ésimo para eliminar los elementos en la columna j -ésima en los renglones $r_j + 1, r_j + 2, \dots, p$. Ponga $r_{j+1} = r_j + 1$ para utilizar el siguiente renglón.
6. a) Si $j \leq q$ y $r_{j+1} \leq p$, entonces aún es posible seguir eliminando: incremente j en 1 y vuelva al paso número 2.
b) En caso contrario, se ha completado la eliminación de Gauss: vaya al paso número 7.
7. Interprete la matriz reducida final como la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones y proceda a encontrar las soluciones, si existen, mediante la sustitución en reversa.

Este bosquejo se aplica para p ecuaciones con q incógnitas, donde p no es necesariamente igual a q . Todos los ejemplos presentados han tenido p igual a q ; la sección 3.3 proporcionará más ejemplos generales.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 12.

Eliminación de Gauss-Jordan

Antes de ver más ejemplos de la eliminación de Gauss, se considera una modificación de este proceso que –aunque ineficiente para cálculos prácticos– con frecuencia es útil para propósitos teóricos.

En la eliminación de Gauss, se utiliza un renglón en particular (ecuación) para eliminar, pero sólo en los renglones (ecuaciones) *por abajo* de ese renglón (ecuación). Si se escoge eliminar también en los renglones (ecuaciones) *por arriba* de ese renglón (ecuación), el proceso se llama *eliminación de Gauss-Jordan*. Se mostrará más adelante que el método de eliminación de Gauss-Jordan involucra más aritmética que el método de eliminación de Gauss, por lo tanto, se introduce más como una herramienta teórica que como una herramienta computacional. Vea, sin embargo, el problema 14.

- (3.21) **Ejemplo.** Considere el empleo de la eliminación de Gauss-Jordan para resolver (3.1); ya que el primer paso es idéntico al del método de la eliminación de Gauss, la eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada original (3.8) lleva primeramente a (3.10). Después de que el segundo renglón en (3.10) se divide entre 3, el segundo renglón resultante se utiliza para eliminar *por arriba* de este renglón así como por abajo; esto da

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 3 \end{array} \right].$$

Ahora se reemplaza el tercer renglón por sí mismo dividido entre -2 y el resultado se utiliza para eliminar *por arriba* de este renglón al igual que por abajo, y esto da

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Dividir el último renglón entre 2 y usar el resultado para eliminar *por arriba* de él, produce

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Interpretar esto como la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones, produce un sistema resuelto de modo trivial con la misma solución encontrada anteriormente mediante la eliminación de Gauss.

La eliminación de Gauss-Jordan siempre lleva a un sistema resuelto trivialmente, como se encontró en el ejemplo 3.21; en esencia, la eliminación de Gauss-Jordan realiza la sustitución en reversa de la eliminación de Gauss conforme avanza, en lugar de esperar hasta el final. Repitiendo la eliminación de Gauss-Jordan resulta en el uso de más aritmética para obtener la solución de un sistema de ecuaciones que la eliminación de Gauss; vea sin embargo el problema 14.

PROBLEMAS 3.2

- ▷ 1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones mediante la eliminación de Gauss para ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 & \text{(b)} \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 & 4x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 11 \\ & 5x_1 + 9x_2 - 20x_3 + x_4 = 10 \end{array}$$

2. Utilice la eliminación de Gauss para ecuaciones para resolver

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 8 \\ -8x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

3. Cada una de las siguientes matrices es una matriz aumentada para un sistema de ecuaciones; escriba el sistema.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right] & \text{(b)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{array} \right] \\ \text{(c)} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 2 & 2 \end{array} \right] & \end{array}$$

- ▷ 4. Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para resolver

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -22 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 10. \end{aligned}$$

5. Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para resolver

$$\begin{aligned} -3x - 6y + 9z &= 0 \\ x + 4y + z &= 6 \\ 2x + 8y + 3z &= 13. \end{aligned}$$

6. Complete la solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 3.17.

7. Intercambie la segunda y tercera ecuaciones del problema 4 antes de comenzar la eliminación de Gauss para matrices aumentadas; verifique que la

solución obtenida resuelve tanto el conjunto original de ecuaciones como el conjunto con las dos ecuaciones intercambiadas.

- ▷ 8. a) Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas en

$$3x - y - 2z = 0$$

$$-6x + 2y + 6z = 4$$

$$2x + y + 6z = 13$$

para obtener tanto la forma reducida del sistema como la solución; tendrá que intercambiar la segunda y tercera ecuaciones *después* de eliminar x .

- b) Intercambie la segunda y tercera ecuaciones *antes* de usar la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para obtener la forma reducida del sistema y la solución; no se requiere de ningún intercambio para la eliminación.
 c) Compare las formas reducidas de las ecuaciones y soluciones de los dos métodos a) y b).

9. Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para resolver

$$2x - y + 2z + 3w = 3$$

$$-4x + 6y - 3z - 6w = 2$$

$$6x - y + 8z + 5w = 9$$

$$4x - 2y + 6z + 12w = 12.$$

- ▷ 10. Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para resolver

$$-2x - 4y + 2z - 6w = 0$$

$$3x + 6y - 2z + 13w = 6$$

$$2x + 4y + 14w = 12$$

$$4x + 8y - 7z = -10.$$

11. Utilice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas para resolver

$$2x + 6y - 4z = 4$$

$$-x - 3y + 5z = 4$$

$$-3x - 9y + 4z = -11.$$

- ▷ 12. Encuentre todas las matrices columna \mathbf{b} , 3×1 , para las que existe al menos una solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y encuentre todas las soluciones \mathbf{x} asociadas con esa \mathbf{b} , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Resuelva los dos sistemas de ecuaciones del problema 1 mediante la eliminación de Gauss-Jordan para matrices aumentadas.
14. Considere el siguiente proceso para resolver las ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Primero realice la eliminación de Gauss para matrices aumentadas. Después, comenzando en la derecha de abajo y trabajando hacia la izquierda, elimine por arriba de la diagonal principal como se haría en la eliminación de Gauss-Jordan.
 - a) Demuestre que esto produce la misma matriz aumentada resultante que si se hubiera hecho la eliminación de Gauss-Jordan desde el principio.
 - b) Muestre que la aritmética que se requiere es la misma que cuando se realiza la eliminación de Gauss seguida por la sustitución en reversa.
 - c) Explique por qué este método involucra menos trabajo que cuando se realiza la eliminación de Gauss-Jordan desde el principio.
 - d) Utilice esto en (3.1).

3.3 EXISTENCIA DE SOLUCIONES A SISTEMAS DE ECUACIONES: ALGUNOS EJEMPLOS Y PROCEDIMIENTOS

Cada sistema de ecuaciones considerado en la sección 3.2 tenía tantas ecuaciones como incógnitas, y los métodos de eliminación vistos siempre arrojaban una solución. Sin embargo, los métodos trabajan de un modo más general.

El número de soluciones

Primero considere el caso, aparentemente simple, de una sola ecuación $ax = b$ con una incógnita x ; inmediatamente se tiende a decir que la solución de esta ecuación es $x = b/a$, pero de hecho existen tres posibilidades:

1. Si $a \neq 0$, entonces $x = b/a$ tiene sentido, y ésta es la *única* solución de esta ecuación.
2. Si $a = 0$, entonces existen dos posibilidades:
 - a) Si $b \neq 0$, entonces, en la ecuación, se pide encontrar x tal que $0x = b \neq 0$, y no existe una solución x . Se dice que “no existe solución” o que “la ecuación es inconsistente” ya que implica que $0 = b \neq 0$, lo cual es una contradicción.
 - b) Si $b = 0$, entonces hay *infinitamente muchas* soluciones: Cada número x es una solución ya que $0x = 0 = b$ sin importar el valor de x .

Es sorprendente que las tres posibilidades –*exactamente una* (*única*) solución, *ninguna* solución, o *infinitamente muchas* soluciones– se cumplen para dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo las ecuaciones

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

tienen una solución única,

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

son inconsistentes, y

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4$$

tienen infinitamente muchas soluciones, es decir $x_1 = k$, $x_2 = 2 - k$, para toda k . Aún más sorprendente es el hecho de que, precisamente, las mismas tres posibilidades se cumplen para p ecuaciones con q incógnitas: *exactamente una (única)* solución, *ninguna* solución, o *infinitamente muchas* soluciones. Esto se demostrará más adelante; por el momento, se puede confiar en que mediante la eliminación de Gauss, se pueden descubrir todas (si las hay) las soluciones a cualquier sistema concreto de ecuaciones.

Eliminación de Gauss y la existencia de soluciones: ejemplos

(3.22) **Ejemplo.** Considere las tres ecuaciones con tres incógnitas

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4$$

$$4x_1 + x_2 - 6x_3 = 8.$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{array} \right].$$

la eliminación de Gauss reduce esto a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

que se interpreta como la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 = 0$$

$$0x_3 = 0.$$

Esta última ecuación –en la que, por lo general, se confía para determinar x_3 – se resuelve mediante $x_3 = k$ para cualquier número k arbitrario. La

sustitución en reversa da $x_2 = 2k$, $x_1 = 2 + k$ y se puede escribir la solución como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } k \text{ arbitraria.}$$

Por lo tanto, existen infinitamente muchas soluciones, las cuales se encontraron mediante la eliminación de Gauss.

(3.23) **Ejemplo.** Considere las tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

$$3x_1 + 8x_2 - x_3 + 4x_4 = 17$$

cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 14 \\ 3 & 8 & -1 & 4 & 17 \end{array} \right].$$

aplicando la eliminación de Gauss, esta matriz se reduce a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Esto se puede interpretar como la matriz aumentada para

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$0x_4 = 1.$$

Esta última ecuación –en la que por lo general se confía para determinar x_4 – pide encontrar una x_4 tal que $0x_4 = 1$. No puede existir tal x_4 , así que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Estos ejemplos y problemas muestran que, en general, no es posible determinar si las ecuaciones tienen una, ninguna, o infinitamente muchas soluciones sólo a partir de los *números* de las ecuaciones o incógnitas. Puede suceder que dos ecuaciones con 10 incógnitas sean inconsistentes, mientras que 10 ecuaciones con dos incógnitas tengan una solución única. La eliminación de Gauss es el método para determinar cuál de las situaciones prevalece.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 7.

Primera variable y primera columna

En el ejemplo 3.22 fue posible asignar un valor arbitrario a x_3 , pero las variables restantes se determinaban por completo por ese valor. Esto genera la pregunta de (una vez que se ha aplicado la eliminación de Gauss) cómo se distingue a qué variables se les pueden asignar valores arbitrarios, y cuáles, entonces, están completamente definidas. Uno de los métodos se describe fácilmente en términos de *primeras variables* (*o primeras columnas*).

- (3.24) **Definición.** La *primera variable* en una ecuación es la primera (leyendo de izquierda a derecha) variable en esa ecuación con un coeficiente diferente a cero. La *primera columna* para un renglón de una matriz, es la columna que contiene el primer elemento (leyendo de izquierda a derecha) diferente de cero en ese renglón.

En el capítulo 4 se desarrolla la teoría necesaria para apoyar la siguiente regla:

- (3.25) **Vista previa a la solución de ecuaciones.** Después de completar la eliminación de Gauss en la matriz aumentada $[A \ b]$ del sistema de ecuaciones $Ax = b$, encuentre las primeras variables y (primeras columnas) de las ecuaciones reducidas (matriz aumentada reducida). Entonces.

1. No existen soluciones si y sólo si la última columna es una primera columna para cierto renglón.
2. Si la última columna no es una primera columna para algún renglón:
 - a) Existe una solución única si y sólo si cada variable es una primera variable para alguna ecuación.
 - b) Existen infinitamente muchas soluciones si y sólo si hay algunas variables que *no* sean primeras variables; a cada una de estas variables *no primarias* se le puede asignar un valor completamente arbitrario, entonces cada primera variable está completamente determinada en términos de los valores asignados a las variables no primarias.

- (3.26) **Ejemplo.** Considere el sistema de ecuaciones del ejemplo 3.22, donde se aplica la eliminación de Gauss a su matriz aumentada. Las primeras columnas en la matriz reducida resultante son los números 1 y 2; la última columna, número 4, *no* es una primera columna como tampoco lo es la columna 3. Ya que x_3 no es una primera variable, de acuerdo a (3.25) 2) b) hay infinitamente muchas soluciones: se puede asignar un valor arbitrario a

x_3 , en términos del cual los otros están perfectamente determinados. Esto concuerda con lo que se encontró anteriormente en el ejemplo 3.22.

PROBLEMAS 3.3

- ▷ 1. Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$2x - 3y = -1$$

$$2x + y = 3$$

$$x - 3y = -2.$$

2. Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$2x - 3y = -1$$

$$2x + y = 3$$

$$x - y = 2.$$

3. Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$2x - 3y = -1$$

$$-4x + 6y = -2$$

$$12x - 18y = -6.$$

- ▷ 4. Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 = 8$$

$$x_1 - 14x_3 + 8x_4 = -15$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 10.$$

5. Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 = -1$$

$$2x_1 - x_2 = 1.$$

6. Dé un ejemplo de a) un sistema con menos ecuaciones que incógnitas pero sin solución; b) un sistema con menos ecuaciones que incógnitas pero con infinitamente muchas soluciones (vea también el problema 7).
7. Explique por qué se puede encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas con exactamente una solución.

8. Cada una de las matrices que se muestran abajo, es la forma reducida que resulta de la eliminación de Gauss para matrices aumentadas de cierto sistema de ecuaciones. Para cada matriz: 1) identifique sus primeras columnas; 2) identifique sus primeras variables; 3) utilice la regla de (3.25) para concluir a partir de 1) y 2) si el sistema general tiene exactamente una, infinitamente muchas o ninguna solución.

$$(a) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(b) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$(c) \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

9. Para cada una de las formas reducidas de las matrices aumentadas del problema 8, escriba el sistema de ecuaciones que representa dichas matrices y utilice la sustitución en reversa para resolver, si es posible, el sistema.

▷ 10. Encuentre todas las matrices \mathbf{X} , 3×4 , para las cuales $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, donde \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{array} \right].$$

11. Suponga que \mathbf{A} es la matriz del problema 10 y que \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices, 3×4 tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. ¿Qué puede concluir a partir de la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{C} ? (Vea el problema 10.)

3.4 COMO ENCONTRAR UNA INVERSA MEDIANTE LA ELIMINACION DE GAUSS

En el capítulo 1 se demostró que las inversas de matrices y los sistemas de ecuaciones estaban estrechamente relacionados de varias maneras; en el teorema 1.38 de la sección 1.4 se explicó el modo en que las inversas proporcionan información sobre la solución de ecuaciones, mientras que en el teorema 1.44 se explicó cómo encontrar inversas mediante la solución de varios sistemas de ecuaciones. Ya que se acaba de desarrollar la eliminación de Gauss como un método sistemático para resolver sistemas de ecuaciones, se puede aplicar al problema de encontrar inversas —gracias al teorema 1.44.

De acuerdo al teorema 1.44, se puede construir una inversa derecha \mathbf{R} de \mathbf{A} como

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{r}_p]$$

si cada \mathbf{r}_i resuelve $\mathbf{Ar}_i = \mathbf{e}_i$. De modo similar se puede construir una inversa izquierda \mathbf{L} con

$$\mathbf{L}^T = [\mathbf{l}_1 \quad \mathbf{l}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{l}_q]$$

si cada \mathbf{I}_j resuelve $\mathbf{A}^T \mathbf{I}_j = \mathbf{e}_j$. Y, por supuesto, si \mathbf{A} es cuadrada ($p = q$) y no singular, entonces se puede encontrar la inversa bilateral \mathbf{A}^{-1} ya sea como \mathbf{R} o \mathbf{L} .

Para cualquier inversa de éstas, el problema computacional es similar:

- (3.27) Dada una matriz general \mathbf{C} y n matrices columna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, resuelva los n sistemas de ecuaciones $\mathbf{Cx}_i = \mathbf{b}_i$ para $1 \leq i \leq n$ para las n soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

Para encontrar una inversa derecha \mathbf{R} de \mathbf{A} ; considere $\mathbf{C} = \mathbf{A}$; para encontrar una inversa izquierda \mathbf{L} de \mathbf{A} , considere $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$, en cualquier caso, las \mathbf{b}_i son matrices columna unitarias \mathbf{e}_i del orden apropiado. Sin embargo, la situación en (3.27), surge también en otras circunstancias. Por ejemplo, la ecuación $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ puede modelar algún sistema físico, con \mathbf{b} representando entradas conocidas y \mathbf{x} salidas desconocidas {vea (2.24), donde \mathbf{b} describe las fuerzas externas en una estructura y \mathbf{x} describe su desplazamiento resultante}; entonces es posible que (3.27) represente un proyecto en el cual se desea examinar la respuesta del sistema a una variedad de entradas.

Se podría atacar (3.27) un sistema de ecuaciones a la vez: formar la matriz aumentada $[\mathbf{C} \quad \mathbf{b}_1]$ y usar la eliminación de Gauss para obtener \mathbf{x}_1 ; formar $[\mathbf{C} \quad \mathbf{b}_2]$ y usar la eliminación de Gauss para obtener $\mathbf{x}_2; \dots$; y por último formar $[\mathbf{C} \quad \mathbf{b}_n]$ y usar la eliminación de Gauss para obtener \mathbf{x}_n . Esto es poco eficaz por la siguiente razón: *las operaciones realizadas en la fase de la eliminación, anteriores a la sustitución en reversa* (dividir un renglón entre una constante, intercambiar dos renglones, sumar el múltiplo de un renglón al múltiplo del otro) *están completamente determinadas por los coeficientes en las ecuaciones y son independientes del miembro derecho*. Por supuesto los miembros derechos de la ecuación entran en los cálculos, pero no afectan a las operaciones realizadas; esto significa que, dados todos los miembros derechos al principio como en (3.27), se puede realizar la eliminación completa *con todos los miembros derechos al mismo tiempo*. Ésto es:

- (3.28) Para resolver (3.27), realice la eliminación de Gauss en la matriz *múltiplo-aumentada* $[\mathbf{C} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$, interprete la forma reducida como la matriz *múltiplo-aumentada* para n sistemas reducidos, y resuelva cada sistema reducido mediante sustitución en reversa.

- (3.29) **Ejemplo.** Suponga que se necesita resolver $\mathbf{Cx}_i = \mathbf{b}_i$ para $i = 1, 2, 3$, donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se forma la matriz *múltiplo-aumentada* $[\mathbf{C} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$ y se realiza la eliminación como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

entonces,

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

entonces,

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array} \right]$$

y finalmente,

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Esto se interpreta como la matriz múltiplo-aumentada para tres sistemas de ecuaciones, y para cada solución se sustituye en reversa. Por ejemplo, el primero es

$$x_1 + 0.5x_2 = 1.5$$

$$x_2 = 1,$$

que da fácilmente la primera solución como $\mathbf{x}_1 = [1 \ 1]^T$. Al manejar el segundo sistema de forma similar se obtiene $\mathbf{x}_2 = [2 \ 1]^T$. La tercera solución es $\mathbf{x}_3 = [2 \ -1]^T$.

El método (3.28) puede ser muy efectivo al resolver (3.27); por ejemplo, si $p = q = 50$ y $n = 10$, (3.28) involucra, únicamente, alrededor del 15% del trabajo que representa resolver cada uno de los 10 conjuntos de 50 ecuaciones con 50 incógnitas repitiendo el proceso de eliminación completa en un conjunto de ecuaciones a la vez.

PROBLEMAS 3.4

- ▷ 1. Encuentre la inversa derecha \mathbf{R} de la matriz \mathbf{A} que se muestra abajo, aplicando la eliminación de Gauss a la matriz múltiplo-aumentada,

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}_3]$$

y verifique que \mathbf{R} es una inversa bilateral.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{array} \right].$$

2. Utilice la eliminación de Gauss en la matriz múltiplo aumentada para encontrar las inversas derechas de las matrices que se muestran abajo.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -14 \\ 2 & 6 & 11 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

3. Utilice la eliminación de Gauss en la matriz múltiple-aumentada para encontrar las inversas izquierdas de las matrices que se muestran abajo.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 4 & -6 & -16 \\ -6 & 8 & 29 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 4. Utilice la eliminación de Gauss en la matriz múltiplo-aumentada para encontrar las tres soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, de $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ para $i = 1, 2, 3$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 19 & 10 \\ 6 & -22 & 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 25 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ 44 \\ -23 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 23 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

5. Un distribuidor de alimentos naturistas desea crear dos suplementos alimenticios en polvo, uno (para adultos) que contenga un 100% del **RMD** (requerimiento mínimo diario) de calcio, vitamina D y fósforo, y el segundo (para niños) que contenga 75, 100 y 75% respectivamente, del **RMD**. Se dispone de tres compuestos comerciales para crear estas mezclas especiales; 1 gramo de estos compuestos contiene la fracción del **RMD** mostrada abajo.

	Compuesto 1	Compuesto 2	Compuesto 3
Calcio	0.15 RMD	0.23 RMD	0.26 RMD
Vitamina D	0.26 RMD	0.27 RMD	0 RMD
Fósforo	0.15 RMD	0.28 RMD	0.08 RMD

Determine cuántos gramos de cada compuesto deben mezclarse para cada uno de los suplementos alimenticios, de modo que cada uno cumpla exactamente con los contenidos del **RMD** ya descritos, mediante el planteamiento de dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas y el uso de la matriz múltiplo-aumentada.

3.5 OPERACIONES DE RENGLÓN Y MATRICES ELEMENTALES

La eliminación de Gauss se introdujo en la sección 3.2 como una forma de manipular ecuaciones; más adelante se vio en términos de matrices, como un proceso para aplicar a matrices aumentadas. De hecho, el *proceso en sí puede*

expresarse en términos matriciales como la multiplicación por una sucesión de matrices; esto resulta ser una herramienta esencial en el estudio de algunos problemas de matrices.

Operaciones de renglón

La eliminación de Gauss consiste en una secuencia de operaciones simples en los renglones de una matriz aumentada. Estas mismas operaciones simples pueden utilizarse para aprender mucho sobre matrices diferentes de las matrices aumentadas como se verá más adelante, y por sí mismas, son de gran interés.

- (3.30) **Definición.** Una *operación elemental de renglón* (a veces llamada sólo *operación de renglón*) en una matriz A es cualquiera de los tres tipos de operaciones siguientes:
1. Intercambio de dos renglones de A .
 2. Reemplazo de un renglón r de A por cr para algún número $c \neq 0$.
 3. Reemplazo de un renglón r_1 de A por la suma $r_1 + cr_2$ de ese renglón y el múltiplo de *otro* renglón r_2 de A .

Se ha asegurado que uno de los usos de la notación matricial es el de expresar relaciones u operaciones complicadas en forma concisa; aquí se usará para operaciones elementales de renglón.

Matrices elementales

- (3.31) **Definición.** Una *matriz elemental*, $p \times p$ es una matriz que se produce aplicando exactamente una operación elemental de renglón a I_p . E_{ij} es la matriz elemental que se obtiene mediante el intercambio de los renglones i -ésimo y j -ésimo de I_p . $E_i(c)$ es la matriz elemental obtenida multiplicando el i -ésimo renglón de I_p por $c \neq 0$. $E_{ij}(c)$ es la matriz elemental que se obtiene sumando c veces el j -ésimo renglón al i -ésimo renglón de I_p , donde $i \neq j$.

Los siguientes son ejemplos de matrices elementales, 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con } c \neq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De éstos, los tres primeros son ilustraciones directas 2×2 , de las tres matrices elementales básicas E_{12} , $E_1(c)$, y $E_{12}(c)$. Desde luego, la cuarta es sólo I_2 , en la que se puede pensar como $E_{12}(0)$; debido a esta posibilidad, I_p por sí misma siempre es una matriz elemental.

Considere ahora lo que sucede cuando se premultiplica cualquier matriz A , $2 + q$ por una de estas matrices elementales de muestra. Por ejemplo, considere $E_{12}(c)A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + cu & y + cv & z + cw \\ u & v & w \end{bmatrix}.$$

Esto es lo mismo que aplicar a A precisamente la operación de renglón que se aplicó a I_2 para obtener la matriz elemental $E_{12}(c)$ que premultiplicó a A . Estas dos operaciones *siempre* producen el mismo resultado.

- (3.32) **Teorema** (operaciones de renglón y matrices elementales). Suponga que E es una matriz elemental, $p \times p$ que se produce aplicando una operación elemental de renglón a I_p , y que A es una matriz $p \times q$. Entonces EA es la matriz que resulta de la aplicación de esa misma operación elemental de renglón en A .

DEMOSTRACION. Se probó el resultado para matrices elementales $E_{ij}(c)$ y las demostraciones para los otros dos tipos de matrices elementales se dejaron para los problemas. Observe que $E_{ij}(c) = I_p + ce_i e_j^T$, donde e_i y e_j son las acostumbradas matrices unitarias columna de orden p . Por lo tanto,

$$E_{ij}(c)A = (I_p + ce_i e_j^T)A = A + ce_i e_j^T A.$$

Ahora $e_j^T A$, por la definición de multiplicación de matrices, es tan sólo el j -ésimo renglón de A ; por la misma definición, e_i multiplicado por este renglón es tan sólo una matriz $p \times q$ cuyo i -ésimo renglón es igual a este renglón y cuyos otros elementos son todos cero. Por lo tanto, $ce_i e_j^T A$ es tan sólo la matriz $p \times q$ cuyo i -ésimo renglón es c multiplicado por el j -ésimo renglón de A y cuyos otros elementos son iguales a cero; sumando esto a A se realiza la operación de renglón que se discute a la matriz A tal y como se afirmó. ■

Este teorema dice, por ejemplo, que la eliminación de Gauss consiste en una secuencia de premultiplicaciones por matrices elementales; se hará un uso decisivo de esto más adelante, así como del hecho de que las matrices elementales son no singulares:

- (3.33) **Teorema** (matrices elementales y la no singularidad). Cada matriz elemental es no singular, y su inversa, por sí misma es una matriz elemental. De modo más preciso:

- a) $E_{ij}^{-1} = E_{ji}$ ($= E_{ij}$)
- b) $E_i(c)^{-1} = E_i(1/c)$ con $c \neq 0$
- c) $E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$ con $i \neq j$

DEMOSTRACION. Recuerde que con el fin de demostrar que una matriz cuadrada \mathbf{G} es no singular y que tiene una matriz particular \mathbf{H} como su inversa, es necesario demostrar que $\mathbf{GH} = \mathbf{HG} = \mathbf{I}$. En este caso, las matrices \mathbf{G} dadas son matrices elementales, al igual que sus matrices inversas \mathbf{H} ; por lo tanto se puede aplicar el teorema 3.32.

- Para demostrar que \mathbf{E}_{ji} es la inversa de \mathbf{E}_{ij} , primero considere $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ji}$. Ya que \mathbf{E}_{ij} es una matriz elemental, el teorema 3.32 dice que este producto es el mismo que intercambiar los renglones i -ésimo y j -ésimo de \mathbf{E}_{ji} —que lógicamente da \mathbf{I} . Un argumento similar muestra que $\mathbf{E}_{ji}\mathbf{E}_{ij}$ también es igual a \mathbf{I} , lo que demuestra a).
- La demostración, muy parecida a a) se deja para el problema 3.
- La demostración puede modelarse como la de a), pero se selecciona otro método. Observe que $\mathbf{E}_{ij}(c) = \mathbf{I} + c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$, donde \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j son las matrices unitarias columna acostumbradas. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ij}(c)\mathbf{E}_{ij}(-c) &= (\mathbf{I} + c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T)(\mathbf{I} - c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T) = \mathbf{I} + c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T - c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T - c^2\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \\ &= \mathbf{I} - c^2\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j^T \\ &= \mathbf{I} - c^2\mathbf{e}_i[0]\mathbf{e}_j^T \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{0} = \mathbf{I},\end{aligned}$$

ya que $i \neq j$. El producto en el orden inverso también produce \mathbf{I} , mediante el mismo argumento. ■

Ahora se reunirán varios hechos a su disposición:

1. Cada operación elemental de renglón es equivalente a la premultiplicación por una matriz elemental. (Ver teorema 3.32.)
2. Cualquier secuencia de operaciones elementales de renglón es equivalente a premultiplicarla por el producto de una sucesión de matrices elementales. {Vea 1) arriba.}
3. Cada matriz elemental es no singular. {Ver teorema 3.33.}
4. Un producto de matrices no singulares es no singular. {Ver teorema 1.35 a) y problema 21, ambos en la sección 1.4.}

Estos hechos juntos demuestran el siguiente **teorema clave**:

(3.34)

Teorema clave (operaciones de renglón). Supóngase que \mathbf{B} resulta de aplicar una secuencia de operaciones elementales de renglón en \mathbf{A} . Entonces existe una \mathbf{F} no singular para la cual $\mathbf{B} = \mathbf{FA}$ y por lo tanto $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Estos resultados serán básicos para nuestro análisis del uso de las operaciones elementales de renglón para resolver una amplia variedad de problemas.

PROBLEMAS 3.5

1. Demuestre el teorema 3.32 para matrices elementales E_{ij} .
- ▷ 2. Demuestre el teorema 3.32 para matrices elementales $E_i(c)$, $c \neq 0$.
3. Demuestre el teorema 3.33 b).
 4. Si B se deriva de A aplicando una secuencia de operaciones elementales de renglón a A , entonces se dice que B es renglón-equivalente a A y esto se escribe como $B \sim A$. Demuestre que \sim es una *relación de equivalencia* verdadera en el conjunto de todas las matrices $p \times q$ en el sentido de que :
 - a) $A \sim A$ para toda A
 - b) Si $B \sim A$, entonces $A \sim B$.
 - c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces también $A \sim C$. 5. Suponga que A es una matriz, $p \times p$ y que, cuando la eliminación de Gauss se aplica para reducir alguna matriz aumentada $[A \ b]$ a su forma reducida, el proceso puede llevarse a cabo exitosamente hasta su término para producir una matriz reducida $[U \ b']$ (que significa que U es unitaria triangular superior). Demuestre que tal matriz U es no singular, y utilice el **teorema clave 3.34** para demostrar que A es, por lo tanto, no singular.
- ▷ 6. Utilice la eliminación de Gauss para reducir la matriz aumentada H mostrada abajo, a la forma reducida G . Para cada operación elemental de renglón realizada, encuentre la matriz elemental correspondiente. Encuentre una matriz no singular F de modo que $FH = G$.

$$H = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{array} \right].$$

7. Sea A , $p \times q$ y considere la postmultiplicación por matrices elementales, $q \times q$. Demuestre que
 - a) La postmultiplicación por E_{ij} intercambia las *columnas i-ésima* y *j-ésima* de A .
 - b) La postmultiplicación por $E_i(c)$ multiplica la *i-ésima columna* de A por $c \neq 0$.
 - c) La postmultiplicación por $E_{ij}(c)$ suma c veces la *i-ésima columna* de A a la *j-ésima columna* de A .
- ▷ 8. Suponga que A es $p \times p$ y no singular. Utilice el problema 7 para demostrar que:
- a) Si A' se obtiene de A intercambiando dos renglones de A , entonces A' es no singular y su inversa puede obtenerse intercambiando las columnas correspondientes de A^{-1} .
 - b) si A' se obtiene a partir de A , multiplicando el renglón *i-ésimo* de A por $c \neq 0$, entonces A' es no singular y su inversa puede obtenerse dividiendo la columna *i-ésima* de A^{-1} entre c ; y

- c) Si A' se obtiene a partir de A sumando c veces el renglón j -ésimo de A a su renglón i -ésimo, entonces A' es no singular y su inversa puede obtenerse restando c veces la columna i -ésima de A^{-1} de su columna j -ésima.

3.6 SELECCION DE PIVOTES Y ELIMINACION DE GAUSS EN LA PRACTICA

Ahora se considera un aspecto práctico importante de la solución de p ecuaciones lineales con p incógnitas mediante la eliminación de Gauss. En ejemplos anteriores –ver ejemplos 3.16 y 3.17 de la sección 3.2– se ha demostrado que, por lo general, es posible y a veces necesario, intercambiar ecuaciones al realizar la eliminación de Gauss; por supuesto, la necesidad surge cuando un elemento que se pretende usar como el siguiente pivote, es igual a cero.

En los cálculos prácticos, sin embargo, suele ser *inteligente* intercambiar ecuaciones, aun cuando no se enfrenten con un pivote cero. Este hecho puede resultar extraño, ya que la eliminación de Gauss siempre produce el (mismo) resultado correcto sin importar qué sucesión de pivotes diferentes de cero se utilice; pero *esto supone que la aritmética se lleve a cabo con exactitud, y las computadoras en las que se resuelven los sistemas de ecuaciones en la práctica rara vez realizan una aritmética exacta*. Este hecho sobre la aritmética computacional inexacta afecta de manera drástica la eliminación de Gauss –y cualquier otro algoritmo computacional– y requiere que se reexamine la selección de pivotes. Esta sección se concentra en el aspecto práctico de la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuando la aritmética realizada no es exacta; observe que, por lo común, la aritmética es inexacta aun para cómputos llevados a cabo manualmente con notación decimal.

Aritmética en punto flotante

Por lo general las computadoras y calculadoras representan el cero exactamente como 0; los números diferentes de cero, por lo general, se presentan como el producto de una *parte fraccionaria* de t dígitos f y un *factor de escala* 10^e , donde $0.1 \leq |f| \leq 1$ y e está restringida a cierto rango de números enteros. En muchas microcomputadoras con coprocesadores matemáticos, t es 16 y de modo general e está restringida a $-308 \leq e \leq 308$. Por simplicidad, se supondrá que e puede tomar *cualquier* valor entero. La condición de f significa que el primer dígito diferente de cero de f ocurre inmediatamente a la derecha del punto decimal; los números que se representan en esta forma se llaman *números en punto flotante de dígito- t* . Por lo tanto, la representación en punto flotante de 3-dígitos de 0.05 es 0.500×10^{-1} .

Para manejar números tales como $\frac{1}{3} = 0.333\dots$ con una expansión decimal infinita o aun con números que requieren de un número de dígitos muy grande en su representación decimal, en la práctica deben reemplazarse con números muy cercanos pero con un menor número de dígitos. Aunque algunas computadoras y

calculadoras sólo truncan los dígitos no deseados, la mayoría *redondean* el número.

- (3.35) **Definición.** Para *redondear* un número diferente de cero x a t dígitos en punto flotante: 1) represente x en la notación de punto flotante como $x = f \times 10^e$ con $0.1 \leq |f| < 1$, de modo que el primer dígito de f (a la derecha del punto decimal) sea diferente de cero; 2) retenga como f_0 los primeros t dígitos de f ; 3) si el $(t+1)$ -ésimo dígito de f es 0, 1, 2, 3 o 4, entonces defina la versión redondeada $\langle x \rangle$ de x como $f_0 \times 10^e$; 4) en caso contrario, incremente el t -ésimo dígito de f_0 en 1 para producir f'_0 , y defina la versión redondeada $\langle x \rangle$ de x como $f'_0 \times 10^e$. Cero se redondea a cero: $\langle 0 \rangle = 0$.

Habiendo introducido esta terminología, se puede describir el modelo de *aritmética computacional en punto flotante de t -dígitos*. En este modelo, por *número computacional* se quiere decir ya sea 0 o un número (en punto flotante) representado *exactamente* por una parte fraccional de, a lo mucho, t dígitos con un factor a escala. En este modelo, el resultado de cualquier operación aritmética básica ($+, -, /, \times$) entre dos *números computacionales* u y v se define como el *resultado de redondear a t dígitos* (en punto flotante), o el resultado que se obtendría con aritmética perfecta:

- (3.36) **Definición.** Sean u y v números computacionales, y sea @ cualquiera de las operaciones aritméticas básicas $+$, $-$, $/$, o \times . Entonces el resultado para t dígitos en punto flotante $u @ v$ se define como $\langle u @ v \rangle$.

- (3.37) **Ejemplo.** Suponga que $t = 2$, de modo que sólo se tienen dos dígitos, y se evalúan $(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) - \frac{1}{3}$. Primero, $\frac{2}{3}$ se evaluará como

$$\langle 0.666 \dots \rangle = 0.67;$$

después $0.67 + 0.67$ se evaluará como

$$\langle 0.67 + 0.67 \rangle = \langle 1.34 \rangle = 1.3;$$

después $\frac{1}{3}$ se evaluará como

$$\langle 0.333 \dots \rangle = 0.33;$$

y por último a la expresión general $(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) - \frac{1}{3}$ se le dará el valor de

$$\langle 1.3 - 0.33 \rangle = \langle 0.97 \rangle = 0.97.$$

Observe que la expresión “equivalente” $\frac{2}{3} + (\frac{2}{3} - \frac{1}{3})$ se evaluaría de modo diferente, como 1.0 —que es también el valor en aritmética perfecta. La aritmética de 16 dígitos del MATLAB evalúa la expresión original exactamente como 1; como un ejemplo más realista de su aritmética, evalúa

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

como $1 + 10^{-16}$ en lugar de 1.

Ahora podrá resolver los problemas 1 y 2.

Método de eliminación de Gauss en la aritmética computacional

Se utilizará la aritmética computacional modelo para ilustrar la importancia de la selección de pivotes cuando la eliminación de Gauss se realiza en la práctica en computadoras. Por simplicidad, suponga que $t = 2$, esto es, que se tiene aritmética de dos dígitos; los mismos argumentos surgen con una $t = 16$ más realista, pero la suposición de $t = 2$ hace que aquéllos sean más transparentes.

Considere el sistema de ecuaciones

$$(3.38) \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 0.01x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Observe que cada coeficiente y lado derecho en (3.38) es un número computacional de dos dígitos: 0.01, por ejemplo, se representa como 0.10×10^{-1} . La solución exacta de (3.38) es $x_1^* = x_2^* = 1/1.01 = 0.990099 \dots$; lo mejor que se le podría pedir a la eliminación de Gauss en una computadora de dos dígitos sería obtener los números computacionales de dos dígitos más cercanos a x_1^* y x_2^* , es decir $x'_1 = x'_2 = 0.99$. Veamos qué tan bien lo hace.

- (3.39) **Ejemplo** (sin intercambios). Suponga que se realiza la eliminación de Gauss sin intercambios, usando la primera ecuación para eliminar 0.01 de la segunda. Sumar -0.01 veces la primera ecuación a la segunda produce $(1 + 0.01)$ como el nuevo coeficiente de x_2 , pero en aritmética de los dígitos esto se debe evaluar como $\langle 1.01 \rangle = 1.0$. De modo que el sistema reducido se calcula como

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1. \end{aligned}$$

- (3.40) La sustitución en reversa (en aritmética computacional) da la solución aritmética computacional $x_1 = x_2 = 1.0$ –una muy buena aproximación a la mejor posible de $x'_1 = x'_2 = 0.99$.

Ejemplo (intercambiando). Ahora suponga que se realiza la eliminación de Gauss después de intercambiar las ecuaciones a

$$\begin{aligned} 0.01x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Añadiendo -100 veces la primera ecuación a la segunda, da en la segunda nueva ecuación un coeficiente para x_2 igual a $-100 + (-1)$ y un lado derecho

nuevo de -100 , para evaluarse nuevamente en aritmética computacional de dos dígitos; se obtiene $\lceil -101 \rceil = -100$, de modo que el sistema reducido calculado es

$$0.01x_1 + x_2 = 1$$

$$-100x_2 = -100.$$

La sustitución en reversa da primero $x_2 = 1$ (aún una muy buena aproximación a la mejor de $x'_2 = 0.99$) y entonces $x_1 = 0$ (una aproximación incomparable con la mejor de $x'_1 = 0.99$).

Estos dos ejemplos ilustran que, en la aritmética en punto flotante, pivotes diferentes pueden producir respuestas dramáticamente diferentes en la eliminación de Gauss, que algunas de estas respuestas pueden ser muy aceptables, pero que otras pueden ser completamente inaceptables. Nuestro problema es entender este fenómeno con el fin de evitar pivotes que llevan a respuestas pobres.

Análisis de error en reversa

Considere nuevamente la aplicación de la eliminación de Gauss a (3.38) sin hacer intercambios, como en el ejemplo 3.39. Si la segunda ecuación en (3.38) hubiese sido $0.01x_1 + 0.99x_2$, entonces con aritmética *perfecta* en este sistema alterado se habría producido la misma forma reducida que se obtuvo con aritmética computacional en el ejemplo 3.39. Por lo tanto:

el efecto de utilizar aritmética computacional de dos dígitos para llevar a cabo la eliminación de Gauss sin intercambiar en (3.38) es exactamente el mismo que se produciría al usar aritmética exacta en el sistema *levemente* cambiado

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$0.01x_1 + 0.99x_2 = 1.$$

Por otro lado, considere nuevamente la aplicación de la eliminación de Gauss a (3.38) con intercambio, como en el ejemplo 3.40. Al igual que arriba, se desea encontrar un sistema que, con aritmética *perfecta*, se reducirá a lo que se obtuvo en el ejemplo 3.40 en aritmética de dos dígitos. Imagine que se reemplaza el término $x_1 - x_2$ por $x_1 - \alpha x_2$; ¿qué valor debería tener α para que, con aritmética perfecta en la eliminación como en el ejemplo 3.40 resultara igual a -100 como coeficiente de x_2 en las ecuaciones reducidas? En aritmética perfecta se tiene como segunda ecuación en el conjunto reducido tan sólo $-(100 + \alpha)x_2 = -100$; por lo tanto es necesario $-(100 + \alpha)$ para igualar a -100 , de manera que $\alpha = 0$. Por lo tanto:

el efecto de utilizar aritmética computacional de dos dígitos para llevar a cabo la eliminación de Gauss con intercambios en (3.38) es precisamente el

mismo que se produciría al usar aritmética exacta en un sistema muy cambiado

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\0.01x_1 + x_2 &= 1.\end{aligned}$$

El análisis ha mostrado que para las dos maneras de aplicar la eliminación de Gauss en (3.38), la solución *calculada* puede visualizarse como la solución *exacta* a un problema *perturbado* (es decir, cambiado); este método se llama *análisis de error en reversa*: la “culpa” de los errores en el resultado de un proceso en una computadora se *regresa* a los datos en lugar de al proceso o a la aritmética computacional.

El análisis de error en reversa es fundamental en la matemática aplicada en lo general, y particular en el análisis de procedimientos computacionales. Los datos utilizados en los cómputos ya son por lo general inexactos debido a errores experimentales y de modelaje; si el análisis de error en reversa puede mostrar que la solución calculada es la solución exacta a un problema en el cual los datos han sido cambiados por cantidades aproximadamente iguales en tamaño a los errores que existen ya en los datos, entonces el resultado de la computadora no ha creado errores mayores, que aquéllos ya inherentes al problema. Esto permite la conclusión de que el resultado de la computadora es tan bueno como razonablemente pueda pedírselo.

Sin embargo, observe, que *no* se ha demostrado que la eliminación de Gauss siempre da una solución exacta a un problema ligeramente perturbado –al contrario: La solución del ejemplo 3.40 es la solución exacta a un problema muy perturbado. Nuestro problema consiste en descubrir una estrategia para realizar los intercambios –esto es, para seleccionar pivotes– para la cual es válido el hecho anterior. Con una estrategia apropiada, el intercambiar puede mejorar los hechos en lugar de producir un desastre como en el ejemplo 3.40.

Es posible que se tenga la impresión de que la razón por la cual la solución sin intercambios fue satisfactoria, mientras que la solución intercambiada no lo fue, se relaciona con el hecho de que el elemento (1, 1) –es decir 1– utilizado como el pivote para obtener la primera solución es mucho más grande que el elemento (2, 1) –es decir 0.01– utilizado como pivote para obtener la segunda solución. Por lo tanto, bien se puede sugerir la regla: “Evite pivotes pequeños”. Esta no es una regla mala, pero no puede aplicarse indiscriminadamente. Para visualizar esto, suponga que se *reescala* (3.38) multiplicando la primera ecuación por 10^{-2} , multiplicando la segunda por 10^2 , reemplazando x_1 por $x_1 = 10^2z_1$, y reemplazando x_2 por $x_2 = 10^{-2}z_2$. Esto da como resultado

$$\begin{aligned}(3.41) \quad z_1 - 0.0001z_2 &= 0 \\100z_1 + z_2 &= 100.\end{aligned}$$

Si cree que los pivotes pequeños son malos y los utiliza en el elemento mayor 100, en aritmética de dos dígitos se obtiene $z_2 = 100$ y entonces $z_1 = 0$, que a su vez da la misma solución errónea de $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ que se encontró en el ejemplo 3.40. La estrategia de evitar pivotes pequeños no es necesariamente exitosa.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 4.

Estrategia de selección de pivotes

Considerando las ecuaciones equivalentes (3.38) y (3.41) que difieren sólo en escala, se demuestra que el hecho de evitar pivotes pequeños no es necesariamente una buena estrategia: dio buenos resultados en (3.38) pero resultados pobres en (3.41). Otra manera de visualizar esto sería que evitar pivotes pequeños podría ser una buena estrategia si se *escalaran las ecuaciones de modo “apropiado”*. Con “escalar” nuevamente se quiere decir multiplicar cada ecuación por una constante diferente de cero y reemplazar cada variable por un múltiplo diferente de cero de una nueva variable. Muchos –no todos– buenos programas computacionales para la solución de sistemas de ecuaciones lineales (ver sección 3.9), escalan las ecuaciones de algún modo antes de usar la eliminación de Gauss; los pivotes pequeños se evitan entonces mediante una de dos estrategias:

1. *Pivoteo parcial*, en el cual las incógnitas se eliminan del modo común x_1, x_2, \dots, x_p y en el cual el pivote para la eliminación con x_i es el coeficiente de x_i en las ecuaciones enumeradas $i, i+1, \dots, p$ que tiene el mayor valor absoluto.
2. *Pivoteo completo*, en el que las incógnitas no se eliminan necesariamente en el orden acostumbrado. La primera variable eliminada es aquella variable x_i con el coeficiente mayor (en valor absoluto), y ese coeficiente se utiliza como pivote. La variable r -ésima eliminada es aquella variable con el coeficiente mayor (en valor absoluto) que el de todas aquellas $p - r + 1$ variables aún sin eliminar, en las ecuaciones $p - r + 1$ restantes y ese coeficiente se utiliza como el pivote.

La experiencia indica que en la práctica, por lo general, es suficiente utilizar un pivoteo parcial; las ventajas posibles del pivoteo completo tienden a ser abrumadas por las desventajas de una “contabilidad” incrementada en su implementación y el hecho de tener que examinar $(p - r + 1)^2$ coeficientes para

determinar en cada ocasión el pivoteo en vez de sólo revisar $p - r + 1$ como en el pivoteo parcial. Los sistemas de ecuaciones que surgen en la práctica –a diferencia de aquéllos creados para los libros de texto con el fin de ilustrar las anomalías– con frecuencia parecen tener un escalamiento “natural” interconstruido que impide que el pivoteo parcial lleve a una selección desastrosa de pivotes; en topografía, por ejemplo, raramente se miden algunas distancias en millas y otras en pulgadas. Otro factor es que es innecesario encontrar el *mejor* pivote; sólo es necesario evitar pivotes *pésimos*.

También existen razones teóricas para usar pivoteo parcial o completo. El análisis de error en reversa puede ser utilizado para demostrar que la solución calculada \mathbf{x}' resuelve exactamente un sistema perturbado en el que el tamaño de las perturbaciones (“tamaño” se mide en relación a los coeficientes originales) se relaciona con el tamaño de los pivotes utilizados durante la eliminación. En la práctica, los pivotes rara vez se vuelven grandes. De hecho:

- (3.42) La eliminación de Gauss con pivoteo parcial realizado en aritmética en punto flotante de t dígitos produce una solución aproximada $\mathbf{x}', p \times 1$, para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que es la solución exacta a un problema perturbado $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$, donde en la práctica es por lo general el caso que el mayor elemento de la perturbación $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ no es mayor, alrededor de $p10^{1-t}$ veces, que el mayor elemento de \mathbf{A} .

Por lo tanto, si \mathbf{A} se escala de modo que todos sus elementos sean de aproximadamente el mismo tamaño, entonces la eliminación de Gauss con pivoteo parcial produce la solución exacta a un sistema de ecuaciones, cada uno de cuyos coeficientes, por lo general, está sólo ligeramente perturbado de su valor correcto.

La necesidad de exhibir la \mathbf{A}' en (3.42) hace difícil ilustrar (3.42) con un ejemplo realista. Sin embargo, existe una consecuencia derivada de (3.42), que por sí misma es interesante y más fácil de ilustrar. Si se calcula el residuo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}'$ para ver qué tanto se acerca \mathbf{x}' a la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces de (3.42) se puede escribir

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}' = \mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{A}'\mathbf{x}' - \mathbf{Ax}' = (\mathbf{A}' - \mathbf{A})\mathbf{x}'.$$

De esto se puede concluir a partir de (3.42) que

- (3.43) La eliminación de Gauss con pivoteo parcial realizado en aritmética en punto flotante de t dígitos produce una solución aproximada $\mathbf{x}', p \times 1$ para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que es la solución exacta a un problema perturbado $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b} - \mathbf{r}$ donde en la práctica se da por lo general el caso de que el mayor elemento en \mathbf{r} no es mayor que $p10^{1-t}$ veces el mayor elemento en \mathbf{A} por el mayor elemento en \mathbf{x}' .

Ejemplo. Considere solucionar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 & -3 & 71 & 6 & 5 & -2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & -6 & 3 & 5 & -60 & 9 & -8 & -4 & 7 \\ 3 & 53 & 2 & -7 & -6 & 4 & -9 & 8 & 5 & 1 \\ -9 & 3 & -5 & 8 & 2 & -1 & 7 & 4 & 6 & -61 \\ 7 & -5 & 4 & -6 & -1 & 2 & -8 & 51 & 9 & -3 \\ -5 & -8 & 2 & -50 & 9 & -7 & -3 & -1 & 6 & 4 \\ -48 & -1 & 3 & -7 & 9 & -2 & 4 & -6 & 8 & 5 \\ 1 & -9 & -63 & -2 & 8 & -3 & -6 & -7 & -4 & 5 \\ 8 & -6 & 1 & 4 & 7 & 3 & -46 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 9 & 5 & -3 & 8 & 6 & 4 & -73 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \\ -3 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

se resolvió el sistema utilizando MATLAB y tuvo lugar una \mathbf{x}' cuyo elemento mayor es de alrededor 0.3; ya que $p = 10$ y el elemento mayor en \mathbf{A} es de 73, se espera de (3.43) que el elemento mayor del residuo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}'$ deba ser menor que alrededor de $(10)10^{1-16}(73)(0.3)$, que es aproximadamente 2.2×10^{-13} . Con el MATLAB se calculó el residuo \mathbf{r} –usando aritmética computacional, y, por lo tanto, se obtuvo un resultado imperfecto– teniendo como elemento mayor a aproximadamente 2×10^{-15} , bastante menor que el límite superior de (3.43).

PROBLEMAS 3.6

- ▷ 1. Evalúe en aritmética de punto flotante de dos dígitos:
 - $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$.
 - $(0.58 + 0.53) - 0.53$.
 - $0.58 + (0.53 - 0.53)$ —compare este resultado con el de b)
- 2. Evalúe en aritmética de punto flotante de dos dígitos:
 - $6(\frac{1}{6})$
 - $3(\frac{1}{3})$
- 3. Considere el sistema (3.41) —una versión escalada de (3.38).
 - Encuentre su solución exacta.
 - Encuentre la mejor aproximación de dos dígitos para esta solución.
 - Encuentre la solución que se obtiene de la eliminación de Gauss en aritmética de punto flotante de dos dígitos, suponiendo que el mayor coeficiente de cualquier variable se usa como el primer pivote.

- ▷ 4. Utilizando aritmética de punto flotante de dos dígitos, aplique la eliminación de Gauss sin intercambios para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 0.98x_1 + 0.43x_2 &= 0.91 \\ -0.61x_1 + 0.23x_2 &= 0.48. \end{aligned}$$

- b) Compare su resultado con la solución real $x_1^* = 0.005946 \dots$, $x_2^* = 2.102727 \dots$ y con la aproximación de dos dígitos posible $x_1' = 0.0059$, $x_2' = 2.1$;
- c) Utilice el análisis de error en reversa y encuentre un sistema perturbado del cual la eliminación de Gauss en aritmética perfecta produciría x_1' y x_2' como la solución real.
(Observe que los errores absolutos pequeños en las respuestas numéricas representan de hecho errores relativos grandes y podrían no ser aceptables.)

5. Identifique el elemento que se utilizaría como el primer pivote en: 1) pivoteo parcial y 2) pivoteo completo para cada una de las matrices aumentadas mostradas abajo.

a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{array} \right]$$

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 20 \\ -9 & 2 & 6 & 3 \end{array} \right]$$

c)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 9 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right]$$

- ▷ 6. Demuestre que el residuo $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ es pequeño aun para la inaceptable solución aproximada de (3.41) que se encuentra en el libro; demuestre que la regla general (3.43) se cumple para este caso.
7. Muestre que el residuo $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ es pequeño aun para la solución aproximada a (3.38) encontrada en el ejemplo 3.39; verifique que la regla general (3.43) se cumple para este caso.
8. Demuestre que cada uno de los tres pivotes diferentes del mayor en (3.41) –incluyendo el más pequeño, 0.0001– da una aproximación satisfactoria a x_1^* y x_2^* en aritmética de punto flotante de dos dígitos.
- ▷ 9. La regla general (3.43) indica que la solución calculada produce un pequeño residuo; intuitivamente esto significa que “la solución casi resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ”.

b'', lo que puede ser diferente del enunciado “la solución calculada está cerca de la solución verdadera”. Para visualizar esto, considere el sistema

$$0.89x_1 + 0.53x_2 = 0.36$$

$$0.47x_1 + 0.28x_2 = 0.19,$$

cuya solución exacta es $x_1^* = 1$, $x_2^* = -1$. Demuestre que la “solución aproximada” $x_1 = 0.47$, $x_2 = -0.11$ tiene un pequeño residuo y por lo tanto “casi resuelve” la ecuación, aunque la solución aproximada está lejos de la solución real. Este es un ejemplo de un problema mal acondicionado –ver la sección 6.4.

- PROBLEMA 10.** a) Utilice el MATLAB o software similar para obtener una solución aproximada \mathbf{x}' para el sistema del problema 9.
 b) Encuentre el error $\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*$ entre la solución calculada y la solución real.
 c) Compare el tamaño de este error con el tamaño del residuo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}'$, pero con el fin de calcular \mathbf{r} de modo exacto, observe que

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}' = \mathbf{Ax}^* - \mathbf{Ax}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$$

y calcule \mathbf{r} como $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$. Nuevamente esto demuestra que el sistema está *mal acondicionado*.

- PROBLEMA 11.** Ni el pivoteo parcial ni el pivoteo completo están *garantizados* para producir buenos resultados. Para visualizar esto, muestre que ambos producen resultados poco satisfactorios cuando se aplica la eliminación de Gauss en aritmética de punto flotante de t dígitos a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon x_3 = 2\epsilon$$

$$x_1 + \epsilon x_2 - \epsilon x_3 = \epsilon$$

cuando ϵ es muy pequeño y se le conoce con exactitud. Demuestre que al reescalar mediante $z_1 = x_1/\epsilon$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$ y dividir la segunda y tercera ecuación entre ϵ para obtener

$$2\epsilon z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 2$$

$$z_1 + z_2 - z_3 = 1$$

se logra que ambos métodos funcionen satisfactoriamente.

3.7 LA DESCOMPOSICIÓN-LU

Hasta ahora se ha enfatizado en el *proceso* de la eliminación de Gauss; el énfasis en esta sección se hará sobre el *resultado* –que es lo que se consigue con la eliminación de Gauss. Los hechos básicos se resumen en (3.56) y se ilustran en los ejemplos 3.45 y 3.55.

Recuerde del ejemplo 3.17 que la eliminación de Gauss *sin intercambios* no siempre puede completarse satisfactoriamente porque pueden aparecer ceros sobre la diagonal principal. Ya que es más fácil de comprender, primero se trata el caso en que tales ceros no aparecen y se puede llevar a cabo la eliminación de Gauss satisfactoriamente sin intercambios.

LU y eliminación de Gauss sin intercambios

Es fácil enunciar el resultado principal:

Si la eliminación de Gauss en la matriz A , $p \times p$ puede completarse satisfactoriamente como en (3.20) pero sin intercambios, entonces el proceso es equivalente a escribir A como un producto LU de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U (vea la definición 1.3).

Recuerde el proceso (3.20) de la eliminación de Gauss, pero en el caso especial cuando A es $p \times p$, todos los pivotes son diferentes de cero, y no se usan intercambios. Al eliminar en la i -ésima columna, primero se dividen los elementos del i -ésimo renglón entre el pivote, el elemento (i, i) de la matriz en su forma parcialmente reducida; denote este i -ésimo pivote como α_{ii} . Entonces se reemplaza el renglón j -ésimo (para $j > i$) por el renglón j -ésimo más un múltiplo m_{ji} del i -ésimo renglón a modo de producir un cero en el elemento (j, i) ; los números m_{ji} se conocen como *multiplicadores*. Las matrices triangulares involucradas en el producto antes mencionado se define a partir de los números producidos durante la eliminación.

- (3.45) **Ejemplo.** Considere la matriz A , 4×4 utilizada para introducir la eliminación de Gauss en la sección 3.2; vea (3.8). Una matriz triangular inferior L y una matriz unitaria triangular superior U . U son simplemente la forma reducida (3.13) de A producida durante la eliminación. Los elementos de la diagonal principal de L son los pivotes: $\langle L \rangle_{ii} = \alpha_{ii}$; los elementos subdiagonales de L son los negativos de los multiplicadores: $\langle L \rangle_{ji} = -m_{ji}$. Se pueden leer los multiplicadores m_{ji} y los pivotes α_{ii} de los pasos (3.8), (3.10), (3.11), (3.12) en la eliminación: $\alpha_{11} = -2$, $m_{21} = 3$, $m_{31} = -5$, y $m_{41} = -1$ de (3.8); $\alpha_{22} = 3$, $m_{32} = 3$, y $m_{42} = -2$ de (3.10); $\alpha_{33} = -2$, y $m_{43} = -3$ de (3.11); y $\alpha_{44} = 2$ de (3.12). Al formar L y U como se describió y después de

comprobar la multiplicación, queda claro que la descomposición de \mathbf{A} como $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es correcta:

$$(3.46) \quad \begin{array}{c} \mathbf{A} \text{ es igual a} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & 3 & -15 \\ 5 & -8 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & 11 & 7 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{L} \text{ por} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{U} \text{ ya que} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}.$$

Esta es la *descomposición LU* de \mathbf{A} . De ella se puede derivar una descomposición triangular relacionada. Sea \mathbf{D}_0 la matriz diagonal formada por los pivotes; en este caso

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{diag}(-2, 3, -2, 2).$$

Ya que $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{LD}_0^{-1}\mathbf{D}_0\mathbf{U}$, también se puede escribir $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$, donde $\mathbf{L}_0 = \mathbf{LD}_0^{-1}$ y $\mathbf{U}_0 = \mathbf{D}_0\mathbf{U}$. Se encuentra \mathbf{L}_0 a partir de \mathbf{L} dividiendo cada columna de \mathbf{L} entre el pivote en esa columna, mientras que \mathbf{U}_0 se encuentra a partir de \mathbf{U} multiplicando cada renglón de \mathbf{U} por el pivote de ese renglón. $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$ es la *descomposición L₀U₀* de \mathbf{A} :

$$(3.47) \quad \begin{array}{c} \mathbf{A} \text{ es igual a} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & 3 & -15 \\ 5 & -8 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & 11 & 7 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{L}_0 \text{ por} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{U} \text{ ya que} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{array}.$$

Primero se describió la eliminación de Gauss como la división del renglón entre el pivote, con el fin de obtener un 1 en ese elemento; esto hace los cálculos más fáciles a mano. Por otro lado, en los programas computacionales, por lo general *no* se divide primero entre este pivote, sino que se comienza a eliminar. El efecto es que la forma reducida que se obtiene es la \mathbf{U}_0 de arriba en este caso, en lugar de \mathbf{U} ; los elementos en \mathbf{L}_0 por debajo de la diagonal principal son tan sólo los negativos de los multiplicadores utilizados durante esta forma de eliminación. Antes se mostró cómo encontrar \mathbf{L}_0 y \mathbf{U}_0 a partir de \mathbf{D}_0 , la matriz diagonal formada de los elementos de la diagonal principal de \mathbf{L} . A la inversa, al tener \mathbf{L}_0 y \mathbf{U}_0 , se podría encontrar $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0\mathbf{D}_0$ y $\mathbf{U} = \mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{U}_0$, donde \mathbf{D}_0 es la matriz diagonal que se forma de los elementos de la diagonal principal de \mathbf{U} .

En el ejemplo 3.45 se pudo descomponer \mathbf{A} como $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ y como $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$, donde \mathbf{L} es la matriz triangular inferior con elemento no cero en la diagonal

principal y \mathbf{U} es la matriz unitaria triangular superior, donde \mathbf{L}_0 es la matriz unitaria triangular inferior y \mathbf{U}_0 es la matriz triangular superior con elementos en la diagonal principal no cero. El siguiente teorema dice que esto puede hacerse siempre y cuando la eliminación de Gauss pueda completarse sin intercambio, y lo caracteriza cuando esto ocurre; la demostración, un tanto teórica, puede quedar omitida por la mayoría de los lectores.

(3.48)

Teorema clave (LU sin intercambios). Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times p$. Entonces

- a) la eliminación de Gauss sin intercambios puede llevarse a término con pivotes no cero a modo de producir una forma reducida unitaria triangular superior \mathbf{U} si y sólo si las *submatrices principales* \mathbf{A}_k son no singulares para $1 \leq k \leq p$, donde \mathbf{A}_k es la esquina superior izquierda, $k \times k$ de \mathbf{A} : $\langle \mathbf{A}_k \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq k$ (en particular \mathbf{A} es no singular)
- b) la eliminación de Gauss sin intercambios puede completarse como en a) si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, donde \mathbf{U} es la matriz reducida unitaria triangular superior de a) y \mathbf{L} es una matriz triangular inferior con los pivotes α_{ii} de la eliminación de Gauss sobre la diagonal principal y los negativos de los multiplicadores m_{ji} de la eliminación de Gauss en las subdiagonales; $\langle \mathbf{L} \rangle_{ii} = \alpha_{ii}$, $\langle \mathbf{L} \rangle_{ji} = -m_{ji}$. De modo equivalente,

(3.49)

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_0$$

donde $\mathbf{L}_0 = \mathbf{LD}_0^{-1}$ unitaria triangular inferior y $\mathbf{U}_0 = \mathbf{D}_0 \mathbf{U}$ triangular superior con los pivotes α_{ii} sobre la diagonal principal;

$$\mathbf{D}_0 = \text{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{pp}) \text{ y } \alpha_{ii} = \langle \mathbf{U}_0 \rangle_{ii} = \langle \mathbf{L} \rangle_{ii}$$

DEMOSTRACION. La demostración se hace por inducción en p . Si $p = 1$ y $\mathbf{A} = [a]$, entonces $\mathbf{L} = [a]$, $\mathbf{U} = [1]$, $\mathbf{L}_0 = [1]$, $\mathbf{U}_0 = [a]$, y $a \neq 0$ si y sólo si los pivote(s) –esto es, a – es no cero. Suponga que el teorema es verdadero para $p - 1$ y que \mathbf{A} es $p \times p$. Efectúe la eliminación de Gauss para \mathbf{A} , mediante la eliminación únicamente de los primeros $p - 1$ renglones usando las primeras $p - 1$ columnas y luego regresando para eliminar los elementos en el renglón inferior en cada columna de izquierda a derecha; esto es equivalente a la eliminación de Gauss común. La primera parte de este proceso involucra eliminación de Gauss regular para \mathbf{A}_{p-1} , una matriz $(p - 1) \times (p - 1)$ para la cual se supone que se cumple el teorema. De tal modo, completar la eliminación de Gauss para \mathbf{A} es equivalente a completarla en los primeros $p - 1$ renglones y después terminarla; completarla en \mathbf{A}_{p-1} es

equivalente a $\mathbf{A}_{p-1} = \mathbf{L}'\mathbf{U}'$ de la forma apropiada. Consideré tratar de escribir $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ con \mathbf{L} y \mathbf{U} como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{w} \\ \mathbf{v}^T & a_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}' & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix},$$

donde $a_{pp} = \langle \mathbf{A} \rangle_{pp}$. Esto requiere que $\mathbf{A}_{p-1} = \mathbf{L}'\mathbf{U}'$, que por su construcción resulta cierto; $\mathbf{L}'\mathbf{u} = \mathbf{w}$, lo cual se cumple si y sólo si $\mathbf{U} = \mathbf{L}'^{-1}\mathbf{w}$, ya que \mathbf{L}' es no singular (los elementos en su diagonal principal son los pivotes no cero); $\mathbf{I}^T\mathbf{U}' = \mathbf{v}^T$, que se cumple si y sólo si $\mathbf{I}^T = \mathbf{v}^T\mathbf{U}'^{-1}$ ya que \mathbf{U}' es no singular; y $a_{pp} = \mathbf{I}^T\mathbf{u} + \alpha$, que se cumple si y sólo si $\alpha = a_{pp} - \mathbf{I}^T\mathbf{u}$ con \mathbf{I}^T y \mathbf{u} como ya han sido determinados. Esto da la descomposición LU deseada.

En seguida se relaciona la descomposición con la eliminación de Gauss. La eliminación (como se modificó para tratar primero con los primeros $p - 1$ renglones) redujo los primeros $p - 1$ renglones de \mathbf{A} de $[\mathbf{A}_{p-1} \quad \mathbf{w}]$ a $[\mathbf{U}' \quad \mathbf{u}]$ sin alterar el último renglón $[\mathbf{v}^T \quad a_{pp}]$ de \mathbf{A} . Al eliminar ahora en este último renglón, simplemente se agrega al último renglón cierta combinación lineal de los primeros $p - 1$ nuevos renglones $[\mathbf{U}' \quad \mathbf{u}]$ a modo de tener $[\mathbf{0}^T \quad \alpha_{pp}]$:

$$\mathbf{z}^T [\mathbf{U}' \quad \mathbf{u}] + [\mathbf{v}^T \quad a_{pp}] = [\mathbf{0}^T \quad \alpha_{pp}],$$

que da como resultado $\mathbf{z}^T = -\mathbf{v}^T\mathbf{U}'^{-1} = -\mathbf{I}^T$ (es decir, el nuevo renglón en la descomposición LU que ya se ha encontrado es el negativo del renglón de multiplicadores, como se indicaba) y

$$\alpha_{pp} = a_{pp} + \mathbf{z}^T\mathbf{u} = a_{pp} - \mathbf{I}^T\mathbf{u},$$

que es igual a α , el nuevo elemento en la diagonal principal encontrado para \mathbf{L} . Este pivote $\alpha_{pp} = \alpha$ será diferente de cero como se requiere si y sólo si \mathbf{L} es no singular; ya que \mathbf{U} es no singular y $\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$, \mathbf{L} es no singular si y sólo si \mathbf{A} lo es —lo cual es la condición para $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}$ que se necesitaba. La construcción de \mathbf{L}_0 y \mathbf{U}_0 a partir de \mathbf{L} y de \mathbf{U} demuestra la equivalencia de las dos descomposiciones triangulares. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 10.

LU y eliminación de Gauss con intercambios

En el ejemplo 3.17 se revela que no toda matriz puede reducirse mediante eliminación de Gauss sin intercambios. Sin embargo, si se permiten los inter-

cambios de renglones, toda matriz *no singular* puede reducirse mediante eliminación de Gauss a una matriz unitaria triangular superior; esto puede relacionarse como en el **teorema clave 3.48** con una descomposición triangular. Sin embargo, si A es singular, el proceso estándar (3.20) puede realizarse a cabo *pero no producirá una matriz unitaria triangular superior*.

(3.50) **Ejemplo.** Considere la matriz que es evidentemente singular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Con o sin intercambios, la eliminación de Gauss reduce esto a una matriz triangular superior R con un *cero* sobre la diagonal principal en lugar del uno deseado. Un argumento simple (problema 19) muestra que tal vez no pueda escribirse A como el producto de una matriz triangular inferior por una matriz unitaria triangular superior. De modo que A no puede descomponerse en $A = LU$ como en el teorema 3.48; pero A sí *puede descomponerse en $A = L_0 U_0$ del segundo tipo, en el teorema con L_0 unitaria triangular inferior, si se permiten elementos cero sobre la diagonal principal de U_0* :

$$A = L_0 U_0 \quad \text{con } L_0 = I \text{ y } U_0 = A$$

en este caso.

En el ejemplo 3.50 se deja entrever que la segunda descomposición $-A = L_0 U_0$ con U_0 posiblemente singular (como A), y L_0 unitaria triangular inferior, permite que exista la descomposición de ciertas matrices singulares (la razón para la “ $_0$ ” en L_0 y U_0) sin intercambios. Y, por supuesto, si A fuese no singular de modo que los elementos diagonales de U_0 fueran diferentes de cero, se podrían construir L y U de L_0 y U_0 mediante el uso de la matriz diagonal D_0 (que se forma de los elementos en la diagonal principal de U_0 en este caso) usando (3.49). Pero, ¿qué pasa si ocurren intercambios? Nuevamente, es fácil enunciar los hechos básicos:

Si la eliminación de Gauss en la matriz A , $p \times p$ puede completarse satisfactoriamente como en (3.20) con intercambios, entonces el proceso es equivalente a escribir una modificación de A llamada A' ($= A$ con sus renglones reordenados) como un producto LU de una matriz triangular inferior L y una triangular superior U .

Para verificar este enunciado para la eliminación de Gauss con intercambios, imagine que, de algún modo, se sabe *antes* del proceso de eliminación qué

intercambios tendrán que hacerse, y que esos intercambios se realizan en los renglones de la matriz *original A*, obteniendo una matriz A' , antes de comenzar la eliminación. El hecho es que la eliminación de Gauss puede entonces realizarse en A' sin intercambios, y que se usan exactamente los mismos pivotes y multiplicadores para A' que para A , y que resulta exactamente la misma forma reducida de A' que de A . Por lo tanto se puede utilizar la información del **teorema clave 3.48** para entender los efectos de la eliminación de Gauss con intercambios, visualizándola con eliminación de Gauss sin intercambios sobre una matriz obtenida de la original permutando –es decir, reordenando– sus renglones. Una definición ayudará a hacer más precisa esta reordenación.

- (3.51) **Definición.** Una matriz de permutación P , $p \times p$ es cualquier matriz $p \times p$ que resulta de permutar –es decir, reordenar el orden de los renglones de I_p . De modo más preciso: Cada renglón de P contiene exactamente un elemento diferente de cero, es decir 1; y cada columna de P contiene exactamente un elemento diferente de cero, es decir 1.

La sola definición de la multiplicación de matrices aclaró el hecho de que premultiplicar una matriz A por una matriz elemental daba el mismo resultado que aplicar la operación elemental de renglón correspondiente a A . De manera similar, resulta claro que premultiplicar A por una matriz de permutación P produce el mismo resultado que permutar los renglones de A exactamente del mismo modo en el cual los renglones de I_p para producir P .

- (3.52) **Teorema** (matrices de permutación). Sea P una matriz de permutación. Entonces:
- Para cualquier A , PA puede obtenerse a partir de A permutando los renglones de A exactamente como se permutaron los renglones de I_p para obtener P .
 - P es no singular, y $P^{-1} = P^T$; $PP^T = P^TP = I$.

DEMOSTRACION

- Esto se sigue fácilmente de las definiciones de la multiplicación de matrices y de matrices de permutación.
- Separé P en sus renglones r_1, \dots, r_p , que son tan sólo los renglones e_i^T de I_p en cierto orden. Entonces P^T tiene como sus columnas r_i^T . La definición de la multiplicación de matrices implica que el elemento (i, j) de PP^T es tan sólo (el elemento en la matriz 1×1) $r_i r_j^T$, y esto es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$; esto es, $PP^T = I$. Un argumento similar en términos de las columnas de P demuestra que también $P^T P = I$. ■

Considere una vez más la eliminación de Gauss con intercambios.

(3.53)

Teorema clave (LU con intercambios). Suponga que A es $p \times p$.

Entonces:

- a) A se puede reducir mediante la eliminación de Gauss con intercambios de la manera usual, a una matriz *unitaria* triangular superior U si y sólo si A es no singular. Cuando se obtiene dicha U , existe una matriz de permutación P y una matriz triangular inferior L tal que

$$PA = LU \quad y \quad A = P^T LU,$$

con L y U como en el teorema clave 3.48 b).

- b) Existen una matriz de permutación P , una matriz *unitaria* triangular inferior L_0 , y una matriz triangular superior U_0 tales que

$$PA = L_0 U_0 \quad y \quad A = P^T L_0 U_0$$

A es no singular si y sólo si U_0 es no singular; para A no singular, L_0 y U_0 se relacionan con las L y U de a) por

(3.54)

$$U = D_0^{-1} U_0 \quad y \quad L = L_0 D_0$$

donde $D_0 = \text{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{pp})$ y $\alpha_{ii} = \langle U_0 \rangle_{ii} = \langle L \rangle_{ii}$.

DEMOSTRACION. Si A puede escribirse como $A = P^T LU$ como en a), entonces ciertamente A es no singular ya que P^T , L y U son no singulares. La demostración del resto del teorema se hace por inducción en p . Para $p = 1$, el resultado es justamente el mismo que en el teorema clave 3.48.

- a) Suponga que a) es verdadero para $p - 1$. Si A es no singular, entonces su primera columna es diferente de cero y los renglones pueden permutes de modo que el nuevo elemento $(1, 1)$ sea diferente de cero, entonces se puede llevar a cabo la eliminación de Gauss del modo usual en esa columna. La matriz $(p - 1) \times (p - 1)$ que permanece para su reducción también es no singular ya que A es no singular y se ha transformado a esta forma parcialmente reducida mediante matrices elementales (no singulares). Mediante la hipótesis inductiva, puede llevarse a cabo el resto de la eliminación de Gauss con intercambios, siendo el resultado una forma reducida unitaria triangular superior para A . Pero este proceso de eliminación es equivalente (se omite la demostración) a la eliminación sin intercambios en PA , y entonces el teorema clave 3.48 se aplica a PA , obteniendo los resultados que se requieren.

- b) Problema 18. ■

(3.55) **Ejemplo.** Como se indica, la eliminación de Gauss comienza con un intercambio en la matriz A que se muestra abajo, pero un poco más adelante se topa con un pivote cero:

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{intercambio}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ -4 & -8 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{m_{21}=0}{m_{31}=2}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Después, en la eliminación de Gauss estándar (3.20), se usaría el elemento $(2, 3)$, 4 como un pivote y se eliminaría el 2; sin embargo, esto no llevará a una descomposición LU . La modificación que se necesita para demostrar el **teorema clave 3.53 b)** requiere que, en caso de encontrar una columna inferior cero como en la segunda columna de este caso, se brinque simplemente esa columna (es decir, que tome los multiplicadores iguales a cero) y continúe a la siguiente columna y el siguiente renglón. En este caso, es el elemento $(3, 3)$, de modo que se ha completado la eliminación. Se obtiene la descomposición $L_0U_0 A = P^T L_0 U_0$ mediante la formación de P como la matriz de permutación que intercambia los dos renglones superiores, U_0 como la forma triangular superior a la cual se ha reducido A y L_0 como una matriz unitaria triangular inferior cuyos elementos son los negativos de los multiplicadores. En este caso, esto da $A = P^T L_0 U_0$ como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} P^T & \text{por} & L_0 & \text{por} & U_0 & \text{igual a } A: \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -10 \end{array} \right], \end{array}$$

como puede comprobarse mediante multiplicación.

Los detalles de las demostraciones oscurecen un tanto las ideas básicas, así que se resume

- (3.56)
- A es no singular si y sólo si A puede escribirse en una descomposición LU , $A = P^T LU$ siendo P una matriz de permutación, U una matriz unitaria triangular superior, y L una matriz triangular inferior con elementos en la diagonal principal diferentes de cero.
 - Cada matriz A , $p \times p$, puede escribirse como una descomposición L_0U_0 , $A = P^T L_0 U_0$ con P una matriz de permutación, L_0 una matriz unitaria triangular inferior (y por lo tanto no singular), y U_0 una matriz triangular superior. A es no singular si y sólo si U_0 es no singular.
 - Para A no singular, las descomposiciones LU y L_0U_0 de 1) y 2) pueden relacionarse mediante (3.54).

4. Estas descomposiciones pueden encontrarse a partir de la eliminación de Gauss.

PROBLEMAS 3.7

- ▷ 1. Para la matriz A que se muestra abajo, realice la eliminación de Gauss sin intercambios y dé los multiplicadores m_{21} , m_{31} y m_{32} , y los pivotes α_{11} , α_{22} y α_{33} , al igual que las matrices elementales que logran que se realice cada operación de renglón.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Verifique (3.46).
3. Verifique (3.47).
- ▷ 4. Demuestre que una matriz triangular inferior L es no singular si y sólo si los elementos de su diagonal principal son todos diferentes de cero.
5. Demuestre que cada matriz unitaria triangular superior es no singular y que su inversa es unitaria triangular superior.
- ▷ 6. Demuestre que el producto de muchas matrices arbitrarias unitarias triangulares superiores (o inferiores) es unitario triangular superior (o inferior).
7. Demuestre que la inversa de una matriz triangular inferior (o superior) no singular –ver problema 4– es triangular inferior (o superior).
8. Demuestre que el producto de muchas matrices arbitrarias triangulares superiores (o inferiores) es triangular superior (o inferior).
9. Para cada matriz A mostrada abajo, encuentre su descomposición LU, $A = LU$ y verifique que $LU = A$.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & -11 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- ▷ 10. Suponga que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ son dos descomposiciones LU de A, teniendo ambas matrices L_i elementos no cero en la diagonal principal. Mediante el examen de $L_2^{-1}L_1$ y $U_2U_1^{-1}$, muestre que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$. En otras palabras, la descomposición LU, $A = LU$ de una matriz A no singular es única.
11. Para cada matriz A mostrada abajo, encuentre su descomposición LU, $A = P^T LU$ realizando la eliminación de Gauss con intercambios.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & -8 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

12. La matriz A se define mediante la descomposición LU mostrada abajo. Realice la eliminación de Gauss sin intercambios y verifique que los multiplicadores, pivotes, y forma reducida final son como los contenidos en la descomposición LU .

$$A = LU = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Para cada una de las matrices del problema 11, para el cual se encontró $A = P^T LU$, calcule la descomposición LU sin intercambios; para la matriz A' que se define como $A' = PA$ y verifique que se obtienen las mismas matrices L y U .
- ▷ 14. Demuestre que la descomposición LU , $A = P^T LU$ no es única ni aun para las matrices no singulares, encontrando dos de tales descomposiciones diferentes para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

15. En las aplicaciones, muchas matrices son *esparcidas*: la mayoría de sus elementos son cero. En muchos casos son *matrices de banda*, es decir, que sus elementos diferentes de cero están en una banda vecina a la diagonal principal. Una matriz tiene un *ancho de banda inferior* l si $\langle A \rangle_{ij} = 0$ para $j < i - l$ y *ancho de banda superior* u si $\langle A \rangle_{ij} = 0$ para $j > i + u$. Una matriz con ancho de banda superior e inferior 1 se llama *tridiagonal*.
- a) Demuestre que si se realiza la eliminación de Gauss para producir la descomposición LU sin intercambios para una matriz tridiagonal A , $A = LU$, entonces L tiene un ancho de banda inferior 1 y U un ancho de banda superior 1.
- b) Demuestre que si se requiere de intercambios, entonces U puede tener ancho de banda superior 2 mientras que L puede tener ancho de banda inferior $p - 1$ para $A = P^T LU$, $p \times p$.
- c) Generalice a) y b) para matrices generales de banda.
16. Encuentre la descomposición $L_0 U_0$ de cada matriz del problema 11 a), b) y c).
- ▷ 17. Encuentre la descomposición $L_0 U_0$ de A si A es:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

18. Demuestre el **teorema clave 3.53 b)** como sigue, mediante inducción en p , donde el resultado está claro para $p = 1$. Suponga que es verdadero para $p - 1$ y sea $A, p \times p$.

- a) Demuestre qué eliminación en la primera columna de A es equivalente a premultiplicar primero A por una matriz de permutación P_1 y después por una matriz unitaria triangular inferior L_1 cuyos únicos posibles elementos en la subdiagonal, diferentes de cero, están en la primera columna y son los negativos de los multiplicadores m ; ya que la matriz restante $(p - 1) \times (p - 1)$ puede escribirse como $P'^T L' U'$ con L' unitaria triangular inferior mediante la hipótesis inductiva, demuestre que este producto puede ser separado como $P_2 L_2 U_2$, dando

$$L_1 P_1 A = P_2 L_2 U_2,$$

donde

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{m} & I \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P'^T \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & L' \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & U' \end{bmatrix}.$$

Premultiplicando por $P_2^T L_1^{-1}$ esta ecuación cambia a

$$P_2^T P_1 A = P_2^T L_1^{-1} P_2 L_2 U_2.$$

- b) Muestre que L_1^{-1} se parece a L_1 a excepción de que los multiplicadores m se reemplazan por $-m$.
- c) Tomando ventaja de la estructura especial de los términos P_2^T , L_1^{-1} , P_2 , y L_2 a la derecha y usando multiplicación separada, demuestre que esta ecuación puede escribirse como

$$(P_2^T P_1) A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{m}' & L' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & U' \end{bmatrix},$$

donde $m' = P'm$; siendo ésta la $PA = L_0 U_0$ deseada

19. Mediante la multiplicación e igualación de elementos, demuestre que la A abajo no puede escribirse como $A = LU$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para toda } a, b, c, \text{ y } u.$$

3.8 MEDIDAS DE TRABAJO Y SOLUCIÓN DE SISTEMAS LIGERAMENTE MODIFICADOS

Un modelo matemático dado de cierto sistema de interés, comúnmente se utiliza de manera extensa para explorar las propiedades de ese sistema: se puede examinar la salida del sistema para varias entradas diferentes; se pueden estudiar los efectos de ligeras modificaciones en el propio modelo y así sucesivamente. Si el modelo involucra un sistema de ecuaciones lineales, entonces tales sondeos requieren la solución de varios sistemas de ecuaciones que difieren muy ligeramente uno de otro: se puede requerir de soluciones para varios miembros derechos diferentes pero la misma matriz de coeficientes; se puede requerir de soluciones después de unos pocos cambios en los coeficientes; y así sucesivamente.

En tales situaciones que involucran ecuaciones lineales, por lo general es posible ahorrarse una cantidad de trabajo haciendo uso de cálculos anteriores para resolver, más adelante, sistemas de ecuaciones ligeramente modificados. Con el fin de visualizar el menor esfuerzo posible, primero es importante saber qué trabajo involucra la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Medidas de trabajo para eliminación y sustitución en reversa

Suponga que el problema es resolver para \mathbf{x} en $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde \mathbf{A} es $p \times p$, \mathbf{b} es $p \times 1$, y \mathbf{x} es $p \times 1$. ¿Cuánto esfuerzo involucra la eliminación de Gauss para producir un sistema reducido, y cuánto involucra la sustitución en reversa para producir \mathbf{x} ? Por supuesto, el esfuerzo mayor está en la aritmética –las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones esenciales al proceso. Para la mayoría de las calculadoras y computadoras, al igual que para las personas las sumas y restas consumen aproximadamente el mismo tiempo, pero son apreciablemente más rápidas que las multiplicaciones y divisiones (cuestan aproximadamente lo mismo). Por lo tanto, al medir el trabajo se contará la suma/resta separadamente de las multiplicaciones/divisiones pero se agrupará aquél en estas dos categorías.

Considere la eliminación de Gauss en la columna k de la matriz \mathbf{A} , $p \times p$; se contabilizará el trabajo de procesar \mathbf{b} más adelante. El renglón que contiene el pivote debe dividirse entre ese pivote; se puede evitar dividir el pivote entre sí mismo ya que se conoce que la respuesta es 1. Por lo tanto, se realizarán $p - k$ divisiones. A cada renglón de abajo se le debe sumar un múltiplo m del renglón pivotal; el múltiplo m es tan sólo el negativo del coeficiente que se busca eliminar (por lo tanto, la obtención de m es gratuita) y no se tiene que calcular ese

elemento eliminado ya que se sabe que el resultado es 0. Por lo tanto, se deben realizar $p - k$ multiplicaciones y $p - k$ sumas para *cada uno* de los $p - k$ renglones debajo del renglón pivotal.

El costo total de la eliminación de Gauss es la sumatoria de todos estos costos:

$$\sum_{k=1}^p \left\{ \{(p-k)^2 \text{ en } + y\} + \{(p-k) + (p-k)^2 \text{ en } \times y\} \right\}.$$

Usando los hechos de que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{y} \quad 1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

se puede calcular el trabajo total como $p^3/3 - p/3$ multiplicaciones/divisiones y $p^3/3 - p^2/2 + p/6$ sumas/restas.

Por supuesto, resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ requiere que se procese \mathbf{b} y también que se realice la sustitución en reversa; esto se expresa fácilmente en términos de la descomposición LU , $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ del **teorema clave 3.53**. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ significa que $\mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b}$; entonces $\mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{b}$, lo que se escribe como $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}'$ y $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, cada una de las cuales es simplemente un sistema *triangular* que puede resolverse inmediatamente con sustitución hacia adelante o en reversa. La matriz columna \mathbf{y} es precisamente lo que se hubiera obtenido si se hubieran realizado todos los pasos de eliminación en \mathbf{b} durante la eliminación de Gauss.

- (3.57) Para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dada la descomposición LU , $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$:
1. Permute los elementos de \mathbf{b} para obtener $\mathbf{b}' = \mathbf{P} \mathbf{b}$.
 2. Resuelva el sistema triangular inferior $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}'$ para \mathbf{y} mediante la sustitución hacia adelante.
 3. Resuelva el sistema unitario triangular superior $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ para \mathbf{x} mediante la sustitución en reversa.

- (3.58) **Ejemplo.** Considere solucionar el sistema de ecuaciones del ejemplo 3.17 usando (3.57); la descomposición LU , $\mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ de \mathbf{A} es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya que $\mathbf{b} = [4 \ -1 \ 1 \ -3]^T$ y $\mathbf{b}' = \mathbf{P} \mathbf{b}$ es tan sólo $\mathbf{b}' = [4 \ -3 \ 1 \ -1]^T$. Se calcula fácilmente la solución \mathbf{y} de $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}'$ como $\mathbf{y} = [-2 \ -1 \ -\frac{1}{5} \ -1]^T$, y la solución \mathbf{x} a $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ se obtiene fácilmente como $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 2 \ -1]$. Esto resuelve verdaderamente el sistema de ecuaciones en el ejemplo 3.17.

Es fácil contabilizar el trabajo involucrado en (3.57) para una matriz $A, p \times p$.

El paso 1 involucra intercambios pero nada de aritmética.

En el paso 2 se requiere encontrar $\langle y \rangle_k$ en el orden de $k = 1, 2, \dots, p$. Al encontrar $\langle y \rangle_k$ los $k - 1$ valores anteriores de y se sustituyen, se multiplican por un coeficiente, y se restan al miembro derecho; entonces una división produce $\langle y \rangle_k$. Por lo tanto, para cada k el costo es de k multiplicaciones/divisiones y $k - 1$ sumas/restas. Esto da un costo total de $p(p + 1)/2$ multiplicaciones/divisiones y $p(p - 1)/2$ sumas/restas para el paso 2.

En el paso 3 se requiere encontrar $\langle x \rangle_k$ en el orden de $k = p, p - 1, \dots, 1$. El trabajo es similar al del paso 2 a excepción de que la igualdad $\langle U \rangle_{kk} = 1$ elimina la necesidad de una división para cada variable. De allí que el costo total sea $p(p - 1)/2$ multiplicaciones/divisiones y $p(p - 1)/2$ sumas/restas.

Ahora se pueden calcular fácilmente los costos combinados de los tres pasos de (3.57).

- (3.59) **Teorema** (trabajo en eliminación y solución). Suponga que A es una matriz no singular, $p \times p$. Entonces:

a) El costo de calcular la descomposición LU , $A = P^T LU$ de A es

$$\begin{aligned} p^3/3 - p/3 &\text{ multiplicaciones/divisiones y} \\ p^3/3 - p^2/2 + p/6 &\text{ sumas/restas} \end{aligned}$$

b) Dada la descomposición LU , el costo de resolver $Ax = b$ mediante el proceso de (3.57) es de

$$\begin{aligned} p^2 &\text{ multiplicaciones/divisiones y} \\ p^2 - p &\text{ sumas/restas} \end{aligned}$$

Los puntos claves a observar son que el trabajo en la eliminación de Gauss para producir la descomposición LU varía con el *cubo* de p , mientras que el costo de resolver un sistema –una vez que se dispone de la descomposición LU – varía con el *cuadrado* de p . El costo total para un solo sistema, por lo tanto, varía con p^3 : Duplicar el número de ecuaciones y variables hace que el trabajo sea *ochos* veces mayor. Sin embargo, observe que el costo de multiplicar simplemente dos matrices $p \times p$ es de p^3 multiplicaciones y $p^3 - p^2$ sumas –ambas mayores que en (3.59). Observe también, que el resolver un solo sistema de 100 ecuaciones con 100 incógnitas requiere de 343,300 multiplicaciones/divisiones y 338,250 sumas/restas – una tarea enorme para la mayoría de los seres humanos, por lo que es importante resaltar que muchas microcomputadoras realizan 10,000 operaciones aritméticas por segundo, y podrían hacer esto en aproximadamente 70 segundos, mientras que las supercomputadoras modernas requerirían de una *pequeñísima* fracción de segundo.

Puede usarse el mismo tipo de análisis para contabilizar el trabajo en la eliminación de Gauss-Jordan; el costo total para resolver un solo sistema de p ecuaciones lineales con p incógnitas es $p^3/2 + p^2/2$ multiplicaciones/divisiones y

$p^3/2 - p/2$ sumas/restas. Aquí los términos dominantes son $p^3/2$ contra $p^3/3$ para la eliminación de Gauss; en la eliminación de Gauss-Jordan se consume alrededor de 50% más del tiempo que en la eliminación de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones. De hecho, se sabe que ningún método que utilice sólo operaciones de renglón (o de columna) puede tomar menos trabajo para matrices generales que la eliminación de Gauss.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 6.

Modificación de los miembros derechos en ecuaciones

Suponga ahora que es necesario resolver $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ con varios miembros derechos diferentes \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, \dots, n$; esto podría fácilmente ocurrir en un estudio de diseño, como se indicó antes. Si desde el comienzo se conocen todas las \mathbf{b}_i , entonces, de acuerdo a (3.28), simplemente se pueden usar la eliminación de Gauss y la sustitución en reversa en la matriz múltiplo-aumentada

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n].$$

En estudios de diseño y otras aplicaciones, sin embargo, se desconoce con frecuencia el siguiente miembro derecho \mathbf{b}_{i+1} hasta haber obtenido los resultados \mathbf{x}_i del miembro derecho presente; por lo tanto, no se puede proponer la matriz múltiplo-aumentada. Pero aún así se desea evitar realizar la eliminación de Gauss otra vez para cada uno de los n diferentes sistemas $p \times p$, ya que esto costaría alrededor de $n(p^3/3)$ operaciones aritméticas de acuerdo al teorema (3.59).

La descomposición *LU* de \mathbf{A} proporciona una resolución eficiente a este problema. Primero se calcula la descomposición *LU*, $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ de \mathbf{A} , y después se utiliza (3.57) en cada uno de los lados derechos \mathbf{b}_i conforme se va disponiendo de ellos. De acuerdo a las medidas de trabajo en el teorema (3.59):

- (3.60) Se puede obtener la descomposición *LU*: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ de \mathbf{A} y resolver n conjuntos de ecuaciones diferentes $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, para $1 \leq i \leq n$ a un costo total de

$$\begin{aligned} &p^3/3 - p/3 + np^2 \text{ multiplicaciones/divisiones, y} \\ &p^3/3 - p^2/2 + p/6 + n(p^2 - p) \text{ sumas/restas} \end{aligned}$$

Una de las razones para querer resolver $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ para varias \mathbf{b}_i podría ser la de obtener la inversa \mathbf{A}^{-1} , ya que

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_p]$$

si $\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, la matriz columna unitaria de orden p –ver **teorema clave 1.44**. En este caso $n = p$ y las medidas de trabajo en (3.60) son de aproximadamente $4p^3/3$ operaciones. Sin embargo, cada \mathbf{e}_i es un tanto especial, ya que, básicamente, contiene ceros. Si se puede evitar sumar los ceros y evitar multiplicar y dividir por ceros, se puede reducir bastante el trabajo al aplicar (3.57) a estos miembros derechos \mathbf{e}_i especiales. El resultado es:

- (3.61) La inversa de una matriz no singular, $p \times p$ puede calcularse mediante la eliminación de Gauss y la sustitución en reversa con

$$\begin{aligned} & p^3 \text{ multiplicaciones/divisiones, y} \\ & p^3 - 2p^2 + p \text{ sumas/restas} \end{aligned}$$

Aquí hay un hecho sorprendente que se sigue de estas medidas de trabajo: No importa el número n de sistemas $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ que se necesiten resolver con la misma matriz \mathbf{A} , ya que siempre involucra menor esfuerzo en el caso de una \mathbf{A} general encontrar la descomposición LU de \mathbf{A} y utilizar (3.57) para cada lado derecho, que el calcular \mathbf{A}^{-1} mediante eliminación de Gauss y después calcular cada \mathbf{x}_i como $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$. Vea el problema 7. Esta es una de las razones por las que en la práctica, es raro que la inversa \mathbf{A}^{-1} sea realmente útil –la mayor parte de lo que se puede lograr con \mathbf{A}^{-1} puede lograrse de manera más eficiente a través de otros medios, tales como la descomposición LU . Por supuesto, existen excepciones, como cuando \mathbf{A} tiene una estructura muy especial o cuando realmente necesitan verse los elementos en \mathbf{A}^{-1} ; aun así es una buena regla general.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 7.

Modificación de los coeficientes en las ecuaciones

Ahora se pondrá atención al caso en el cual no \mathbf{b} sino \mathbf{A} cambia de algún modo un tanto simple. Si se cambia el papel que juega una variable en particular o una ecuación en un modelo, por ejemplo, entonces quizás sea necesario investigar cómo resolver sistemas después de haber cambiado un renglón o una columna de una matriz. Es fácil describir esta situación en lenguaje matricial. Para reemplazar la i -ésima columna \mathbf{c}_i de \mathbf{A} por la matriz columna \mathbf{c}'_i , sólo se necesita sumar a \mathbf{A} la matriz $(\mathbf{c}'_i - \mathbf{c}_i)\mathbf{e}_i^T$; sumar por otro lado $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)^T$ en su lugar, reemplaza el i -ésimo renglón r_i por r'_i .

- (3.62) *Ejemplo.* Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{d}\mathbf{e}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mientras que

$$\mathbf{A} + \mathbf{e}_2\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

De manera más general, considere sumar a \mathbf{A} una matriz (construida de unas cuantas matrices columna y unas cuantas matrices renglón) de la forma \mathbf{CR} , donde \mathbf{C} es $p \times n$ y \mathbf{R} es $n \times p$, con n mucho menor que p . El siguiente resultado describe la inversa de la nueva matriz $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{CR}$ y, quizás lo más importante, cómo obtener la solución \mathbf{x}' de $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ de la de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- (3.63) **Teorema** (inversas de matrices modificadas). Suponga que \mathbf{A} es $p \times p$ y no singular, que \mathbf{C} es $p \times n$ y \mathbf{R} es $n \times p$ con $n \leq p$ (por lo general n mucho menor que p), y que la matriz $\mathbf{K} = \mathbf{I}_n + \mathbf{RA}^{-1}\mathbf{C}$ $n \times n$ es no singular. Entonces:

a) $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{CR}$ es no singular, y

$$\mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CK}^{-1}\mathbf{RA}^{-1}.$$

b) La solución \mathbf{x}' de $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ puede expresarse en términos de la solución \mathbf{x} de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CK}^{-1}\mathbf{Rx}.$$

- c) Dada \mathbf{A}^{-1} , se puede calcular \mathbf{A}'^{-1} mediante a) con aproximadamente $3np^2 + 2n^2p + n^3/3$ multiplicaciones/divisiones y un número comparable de sumas/restas.
d) Dada la descomposición LU , $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$, y la solución \mathbf{x} de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se puede calcular \mathbf{x}' mediante b) con aproximadamente $np^2 + n^2p + n^3/3$ multiplicaciones/divisiones y un número comparable de sumas/restas.

DEMOSTRACION

- a) Sea \mathbf{H} la inversa de \mathbf{A}' mencionada; debe demostrarse que $\mathbf{A}'\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{A}' = \mathbf{I}_p$ —esto es, el problema 8.

- b) $\mathbf{x}' = \mathbf{A}'^{-1}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
 $= \mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}$, como se enunció.
- c) y d) se basan en las medidas de trabajo antes mencionadas y en el hecho de que requiere alrededor de rst multiplicaciones (y un número similar de sumas) calcular el producto de una matriz $r \times s$ por una matriz $s \times t$ –éste es el problema 9. ■

- (3.64) **Ejemplo.** Se ilustra el punto sobre las medidas de trabajo del teorema 3.36. Suponga que $p = 100$ y $n = 5$; suponga que ya se ha obtenido la descomposición LU de la matriz \mathbf{A} , 100×100 . Ahora, suponga que es necesario resolver $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ para alguna matriz columna \mathbf{b} . Si se ignora el teorema 3.63 y se aplica la eliminación de Gauss a $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$, se requiere de alrededor de $p^3/3$ multiplicaciones/divisiones, ($\approx 333,000$). Suponga que en lugar de ello se utiliza el teorema 3.63 b). Primero, se necesita \mathbf{x} , la solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; ya que se tiene la descomposición LU de \mathbf{A} ; esto se puede obtener a un costo de alrededor de p^2 multiplicaciones/divisiones. Entonces se puede usar el método del teorema 3.63 d) con el fin de obtener \mathbf{x}' con un costo de alrededor de $np^2 + n^2p + n^3/3$ multiplicaciones/divisiones. El esfuerzo total con este método es, por lo tanto, de aproximadamente

$$p^2 + np^2 + n^2p + \frac{n^3}{3} \approx 62,500$$

multiplicaciones/divisiones –ahorriendo alrededor del 80% con respecto al primer método. Para $p = 100$ y $n = 2$, como otro ejemplo, el ahorro es de alrededor del 90%: el método directo toma aproximadamente 10 veces más tiempo.

A primera instancia puede parecer que las circunstancias del teorema 3.63 aparecen raras veces en la práctica, pero éste no es el caso. Con mucha frecuencia, modelos extremadamente grandes de sistemas complicados –grandes edificios, redes de distribución eléctrica, grandes sistemas económicos, etc., consisten en un número pequeño de subsistemas muy grandes y casi independientes, con un pequeño número de interconexiones entre ellos. El teorema 3.63 puede usarse con frecuencia en este caso, siendo \mathbf{A} la representación de la situación en la que los subsistemas son realmente independientes con \mathbf{C} y \mathbf{R} proporcionando los ajustes que reflejen las interconexiones. Por ejemplo, con sólo dos subsistemas, se podría tener que resolver un sistema de 2000 ecuaciones con 2000 incógnitas, con una matriz de coeficientes \mathbf{A}' y la forma separada no estándar siguiente:

$$\mathbf{A}' = \frac{1000}{1000} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

con las dimensiones de los bloques como se indican. Sea \mathbf{A} la primera de las dos matrices separadas, y suponga que \mathbf{B} y \mathbf{D} –y por lo tanto \mathbf{A} – son no singulares. Se concibe \mathbf{B} como la representación de las relaciones internas dentro de un subsistema grande, \mathbf{D} como la relación interna dentro del otro subsistema grande, y \mathbf{E} y \mathbf{F} como las interconexiones entre los dos subsistemas. Como en el teorema 3.63, se puede escribir \mathbf{A}' con $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{R}$, donde

$$\mathbf{C} = \frac{10}{1000} \begin{bmatrix} \overset{\wedge}{\mathbf{0}} & \overset{\wedge}{\mathbf{E}} \\ \mathbf{F} & \overset{\wedge}{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} = \frac{10}{10} \begin{bmatrix} \overset{\wedge}{\mathbf{0}} & \overset{\wedge}{\mathbf{I}} & \overset{\wedge}{\mathbf{0}} & \overset{\wedge}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overset{\wedge}{\mathbf{I}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En tales circunstancias los ahorros al usar el teorema 3.63 pueden ser enormes: pueden resolverse algunos problemas que quizás no pudieran resolverse de modos más directos.

Se han desarrollado varias técnicas especiales basadas esencialmente en este método, las cuales tienen una amplia variedad de áreas de aplicación. Esta idea básica lleva, por ejemplo, al *método de rompimiento* en análisis de reses, a *métodos de matrices de capacitancia* para la solución numérica directa de ciertas ecuaciones diferenciales, a varios *métodos modernos* para la optimización de programación no lineal restringida y no restringida, y a ciertas implementaciones del *método simplex* en la programación lineal.

PROBLEMAS 3.8

- ▷ 1. Demuestre que con el fin de multiplicar una matriz $r \times s$ por una matriz $s \times t$, se requieren de, a lo mucho, rst multiplicaciones y $rt(s - 1)$ sumas.
- 2. Utilice las fórmulas

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

y

$$1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

para demostrar el teorema 3.59 a).

- 3. Utilice las fórmulas dadas en el problema 2 para demostrar el teorema 3.59 b).
- 4. Deduzca las medidas de trabajo enunciadas en el texto para la eliminación de Gauss-Jordan.

- ▷ 5. Utilice el teorema 3.59 a) para calcular el número de multiplicaciones/divisiones que se necesitan para encontrar la descomposición LU y resolver un sistema de ecuaciones para una matriz $p \times p$, si:
- $p = 10$
 - $p = 30$
 - $p = 50$
 - $p = 70$
 - $p = 90$

6. Considere la descomposición LU , $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ que se encontró en el ejemplo 3.45 de la sección 3.7. Para dicha matriz \mathbf{A} , utilice (3.57) para resolver

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = [-4 \quad 5 \quad 13 \quad 20]^T$$

y verifique que la \mathbf{x} encontrada resuelve las ecuaciones originales.

- ▷ 7. Demuestre que el trabajo que se requiere para obtener la descomposición LU , $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ para una \mathbf{A} general es siempre menor que el que se requiere para calcular \mathbf{A}^{-1} mediante la eliminación de Gauss, y utilícelo para resolver k sistemas $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, para $1 \leq i \leq k$, y calcular \mathbf{x}_i como $\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$, para $1 \leq i \leq k$.
8. Complete la demostración del teorema 3.63 a).
9. Complete la demostración del teorema 3.63 c) y d).
10. Suponga que $p = 1000$ y $n = 10$. Al igual que como en el ejemplo 3.64, calcule el ahorro al usar el método del teorema 3.63 d) para resolver $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$.
- ▷ 11. Sea \mathbf{A} una matriz no singular $p \times p$ y \mathbf{r} , $1 \times p$. Describa el uso del teorema 3.63 a) para encontrar la inversa, si existe, de:
- $\mathbf{A} + \mathbf{e}_i \mathbf{r}$
 - $\mathbf{A} + \mathbf{r}^T \mathbf{e}_j^T$
12. Sea \mathbf{A} la matriz no singular $p \times p$. Describa el uso del teorema 3.63 a) para encontrar la inversa, si existe, de la matriz que se forma sumando el número α al elemento (i, j) de \mathbf{A} .
13. Utilice el teorema 3.63 a) del modo descrito en el párrafo siguiente a (3.64) para encontrar la inversa de

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- 14. Considere la matriz \mathbf{A}' , 50×50 con elementos en la diagonal principal $\langle \mathbf{A}' \rangle_{ii} = 2$ para toda i , elementos arriba de la diagonal $\langle \mathbf{A}' \rangle_{i,i+1} = -1$ para toda i , y elementos abajo de la diagonal $\langle \mathbf{A}' \rangle_{i-1,i} = -1$ para toda i , y cualquier otro elemento igual a cero. Igual que en el párrafo siguiente a (3.64), visualice \mathbf{A}' como la suma $\mathbf{A} + \mathbf{CR}$ de la forma

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right],$$

donde \mathbf{B} es la matriz 25×25 que parece una versión más pequeña de \mathbf{A}' , donde \mathbf{F} y \mathbf{E} son 25×1 con $\mathbf{F} = [-1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ y $\mathbf{E} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1]^T$.

- Utilice el MATLAB para encontrar la inversa de \mathbf{A}' directamente –utilizando el comando *flops* del MATLAB inmediatamente antes y después del cálculo– y encuentre el número de operaciones en punto flotante requeridas.
- Utilice el MATLAB para encontrar la inversa de \mathbf{A}' por medio del teorema 3.63 a) –calcule la inversa de \mathbf{A} formando la matriz separada evidente usando la inversa \mathbf{B}^{-1} – y compare el número de operaciones en punto flotante requeridas por los dos métodos.

▷ 15. Considere el problema 15 de la sección 3.7, donde se consideró la eliminación de Gauss con y sin intercambios para matrices tridiagonales y para matrices de banda.

- Muestre que el trabajo para encontrar la descomposición *LU* de una matriz tridiagonal $p \times p$ sin intercambios es igual a $(2p - 2)$ multiplicaciones/divisiones y $(p - 1)$ sumas/restas.
- Demuestre que si se permiten los intercambios, el trabajo que se requiere es a lo mucho $(4p - 6)$ multiplicaciones/divisiones y $(p - 1)$ sumas/restas.
- Generalice a) y b) para matrices generales de banda.

3.9 PROGRAMAS COMPUTACIONALES PARA LA ELIMINACION DE GAUSS

ADVERTENCIA: ¡Siempre utilice un programa estándar en lugar de escribir su propio programa para la solución de ecuaciones lineales o para encontrar inversas!

Si no tiene un programa estándar copie uno de Forsythe, Malcolm y Moler (42).

En las aplicaciones prácticas, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el cálculo de inversas se llevan a cabo casi siempre mediante el uso de computadoras –supercomputadoras, macrocomputadoras estándar o microcomputadoras. A través de los años los expertos han desarrollado programas computacionales de propósito general excelentes para la resolución eficiente y precisa de sistemas de ecuaciones y para el cálculo de inversas. En la sección 3.6 se dio una ligera indicación sobre las sutilezas involucradas en esta tarea. Ya que los resultados de dichos esfuerzos pueden encontrarse ya sea gratis o a bajo costo, no hay razón para que los inexpertos tengan que crear sus propios programas para estos problemas. Y existen buenas razones para *no* crear su propio pro-

grama –es muy probable que proporcione respuestas inexactas (y costosas) sin ningún aviso de que las respuestas son poco precisas. Aunque pueda encontrar ilustrativo el escribir un programa sencillo para implementar la eliminación de Gauss con o sin intercambios como una herramienta pedagógica para ayudarlo en la comprensión de lo que el proceso hace exactamente, *no utilice tal programa en problemas reales cuyas respuestas le sean importantes.*

Qué exigir del software

Lo mínimo que se puede exigir es que el software sea eficiente, exacto, sencillo y fácil de usar, además de informativo con respecto a la confianza con que los resultados puedan aceptarse en cada caso específico. Características adicionales podrían incluir la capacidad de utilizar métodos especiales para problemas especiales (tales como matrices simétricas, matrices cuyos elementos diferentes de cero están cerca de la diagonal principal, y así sucesivamente), la capacidad de evaluar determinantes (ver sección 4.5), y así sucesivamente. No todo el software para las ecuaciones e inversas cumple con este criterio, pero la mayoría lo hace; vea la siguiente subsección para sugerencias específicas.

Lo que se quiere decir con eficiencia y precisión puede parecer claro, aunque de hecho aquí existen algunos puntos oscuros; sin embargo, estos temas están más allá del alcance de este libro. Los detalles pueden encontrarse en Golub y Van Loan (46).

Un software que es fácil y sencillo de usar debe permitir que las matrices de datos puedan introducirse en algún estilo natural y directo, y no debe pedirle al usuario que proporcione mucha información adicional.

Un aspecto especialmente importante es el de proporcionar información sobre la confiabilidad de los resultados. Muchos buenos programas en esta área dan un indicio de los llamados *números condicionales* $c(\mathbf{A})$ de la matriz \mathbf{A} que es la matriz de coeficientes de las ecuaciones e inversas que se están buscando; vea el teorema 6.29. Este número $c(\mathbf{A})$ mide la cantidad por la cual las inexactitudes en los datos de los problemas se magnifican en la respuesta; si los datos contienen errores de tamaño relativo, por ejemplo, 10^{-3} , entonces puede ser que las respuestas tengan errores de tamaño relativo tan grande como $c(\mathbf{A}) \times 10^{-3}$. Estos errores no son “culpa” del programa, más bien son inherentes a las respuestas debido a las inexactitudes de los datos. Ya que una realización cuidadosa de la eliminación de Gauss permite estimar este número condicional, el proporcionar tal estimador es una característica razonable a exigir.

Qué software obtener

Un software de alta calidad que cumpla con el criterio general anterior, ciertamente puede encontrarse comercialmente; el sistema MATLAB de The Math Works es un ejemplo evidente pero se dispone de sistemas excelentes donde quiera como en las International Mathematical and Statistical Libraries {IMSL

-vea (57)} (Bibliotecas Internacionales de Matemáticas y Estadística **BIME**) y en la Numerical Algorithms Group {NAG –ver (59)}, (Grupo de Algoritmos Numéricos **GAN**). Para macrocomputadoras, se dispone de subrutinas actualizadas sin costo en el sistema LINPACK.

El LINPACK se desarrolló como un esfuerzo cooperativo entre muchos analistas numéricos en muchas instituciones; la mayoría del trabajo se concentró en el Laboratorio Nacional de Argonne (Argonne National Laboratory), y el apoyo financiero lo proporcionó la Fundación Nacional de Ciencias (National Science Foundation). El resultado fue una excelente colección de programas portátiles FORTRAN de los que se puede disponer gratuitamente en el Laboratorio Nacional de Argonne; los detalles de los programas y de su adquisición están contenidos en el *Manual del Usuario LINPACK* (40) (*LINPACK User's Guide*). El LINPACK contiene programas para la mayoría de los cálculos matriciales relacionados con las ecuaciones, incluyendo, por supuesto, la solución de sistemas de ecuaciones y la inversión de matrices.

Actualmente existen unas cuantas docenas de programas en LINPACK para la solución de sistemas o para encontrar inversas; varían por las estructuras especiales supuestas para la matriz (general, simétrica, y así sucesivamente), el tipo de los números usados como elementos de las matrices (real, complejo, etc), el modo en que los elementos de las matrices se almacenan en la computadora, y la precisión deseada. Las rutinas son de dos tipos básicos: aquéllas que calculan las descomposiciones *LU*, y aquéllas que utilizan las descomposiciones *LU* (para resolver sistemas, encontrar inversas, evaluar determinantes, y así sucesivamente). La metodología básica es la eliminación de Gauss y la sustitución en reversa, semejante en mucho a la que se ha descrito aquí, pero una variante es que *L* es *unitaria* triangular inferior, mientras que *U* tiene elementos generales en la diagonal principal –es decir, la descomposición $L_0 U_0$ (3.49) descrita aquí. Las rutinas para encontrar descomposiciones *LU* estiman el número condicional e informan de esta estimación como un parámetro de calidad accesible al usuario; esto permite que el usuario determine la precisión de cualquier resultado a generarse. Cualquiera que necesite solucionar sistemas de ecuaciones –o realizar otros cálculos matriciales– en una macrocomputadora debería considerar adquirir el sistema LINPACK.

PROBLEMAS 3.9

1. Determine si la colección de subrutinas LINPACK está disponible para su uso.
2. Determine de qué programas se dispone en su localidad, para la solución de p ecuaciones lineales con p incógnitas y de qué posibilidades especiales se dispone (tales como elementos complejos, estructuras especiales para la matriz de coeficientes, etc.).

3. Determine de qué programas se dispone en su localidad, para invertir matrices, $p \times p$ y de qué posibilidades especiales se dispone (tales como elementos complejos, estructuras especiales para la matriz, etc.).
4. Determine si el software disponible en su localidad para sistemas lineales e inversas, provee una estimación del número condicional para el problema.

3.10 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 3.10

1. Suponga que A es $p \times p$, B es $p \times q$, y $AB = \mathbf{0}$. Demuestre que o bien A es singular o bien $B = \mathbf{0}$.
- ▷ 2. La matriz mostrada abajo es la matriz aumentada para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Demuestre que:
 - a) Si $k = 0$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones.
 - b) Para otro valor específico de k , que debe determinar, el sistema no tiene soluciones.
 - c) Para cualquier otro valor de k , el sistema tiene una solución única

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array} \right]$$

3. a) Suponga que A es $p \times q$, B es $q \times q$, y $AB = \mathbf{0}$. Demuestre que, ya sea B es singular o $A = \mathbf{0}$.
- b) Suponga que A y B son $p \times p$, y $AB = \mathbf{0}$. Utilice a) y el problema 1 para demostrar que ya sea $A = \mathbf{0}$ o $B = \mathbf{0}$ o bien, que A y B son ambas singulares.
4. Encuentre la descomposición LU de la matriz A que se muestra abajo, no mediante eliminación de Gauss, sino escribiendo $A = LU$ con L y U como se muestra abajo y después resolviendo para los elementos en L y U .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 5. Generalice el problema 4 como sigue. Suponga que A es $p \times p$ y que tiene una descomposición LU , $A = LU$ para L triangular inferior con elementos en la diagonal principal diferentes de cero y U unitaria triangular superior. Escriba la forma general para L y U con elementos l_{ij} y u_{ij} como en el problema 4. Se conoce el elemento $(1, 1)$ de U . Demuestre entonces que esto le permite encontrar la primera columna de L , la cual permite encontrar el primer renglón de U , el cual permite encontrar la segunda columna de L , y así sucesivamente, hasta que se determinan L y U . Escriba las ecuaciones para calcular L y U de este modo.

6. La realización de la eliminación de Gauss utilizada en este libro se conoce como variante de Crout. La variante de Doolittle es semejante, con la excepción de que no divide el renglón k -ésimo entre el pivote k -ésimo antes de la eliminación; esto produce la matriz triangular *unitaria* inferior, \mathbf{L}_0 y una matriz triangular superior (*no unitaria*) \mathbf{U}_0 con $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$. Utilice la variante de Doolittle para realizar la eliminación de Gauss en la matriz \mathbf{A} del problema 4 y encuentre esta descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$.
- ▷ 7. Encuentre la variante de Doolittle –ver problema 6 de la descomposición LU directamente como en el problema 4 para la matriz \mathbf{A} del problema 4, escribiendo $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$ para \mathbf{L}_0 y \mathbf{U}_0 como se muestran abajo y resolviendo para los elementos en \mathbf{L}_0 y \mathbf{U}_0 .
- $$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}.$$
8. Generalice el método del problema 7 de la misma manera en que en el problema 5 se pidió generalizar el método del problema 4.
9. Demuestre, para la matriz \mathbf{A} del problema 4, que $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_0\mathbf{U}_1$ con \mathbf{L}_1 , \mathbf{U}_1 , y \mathbf{D}_0 como se indica abajo. Observe que \mathbf{L}_1 es unitaria triangular inferior y es igual a la matriz \mathbf{L}_0 encontrada en los problemas 6 y 7, mientras que \mathbf{U}_1 es unitaria triangular superior y es igual a la matriz \mathbf{U} encontrada en los problemas 4 y 5.
- $$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- ▷ 10. a) Utilice el **teorema clave 3.48** para demostrar que, si \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ para la cual se puede completar la eliminación de Gauss sin intercambios, entonces existen una matriz unitaria triangular inferior \mathbf{L}_1 , una matriz diagonal no singular \mathbf{D}_0 , y una matriz unitaria triangular superior \mathbf{U}_1 para las cuales $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_0\mathbf{U}_1$.
 b) Enuncie y demuestre la generalización análoga $\mathbf{PA} = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_0\mathbf{U}_1$ del **teorema clave 3.53**. (Nota: Esta es la *descomposición LDU* general de \mathbf{A} . Tomando $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_0$ y $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$ da la variante de Crout que se ha estado utilizando, mientras que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_1$ y $\mathbf{U}_0 = \mathbf{D}_0\mathbf{U}_1$ da la variante de Doolittle de los problemas 6-8.)
11. Encuentre la descomposición $\mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$, variante de Doolittle, como en el problema 10, de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -7 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- 12.** Demuestre que, si A es no singular, entonces su descomposición LU variante de Doolittle –ver problema 10– es única: Si

$$L_0 U_0 = L'_0 U'_0, \text{ entonces } L_0 = L'_0 \text{ y } U_0 = U'_0.$$

- ▷ **13.** Demuestre que, si A es no singular, entonces su descomposición LDU –ver problema 10– $A = L_1 D_0 U_1$ es única.

- 14.** Para demostrar que, para matrices singulares, la descomposición $L_0 U_0$ variante de Doolittle –ver el problema 10– no es necesariamente única, verifique que la descomposición mostrada abajo es verdadera para todo número l .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-l \end{bmatrix}.$$

- ▷ **15.** Suponga que A es simétrica y no singular y que tiene la descomposición LDU , $A = L_1 D_0 U_1$ del problema 10. Demuestre que $U_1 = L_1^T$.

4

Solución de ecuaciones y cálculo de inversas: teoría

Este capítulo es el corazón teórico del libro; en la mayoría de los capítulos subsecuentes se usan los conceptos forma reducida de Gauss, rango, y la forma de renglón-escalón; y, por lo tanto, deben entenderse perfectamente. Como podría esperarse y en vista de su importancia teórica, este capítulo contiene varios teoremas clave: 4.5, 4.11, 4.13, 4.16, 4.18 y su corolario, y 4.23. Además de estas herramientas teóricas fundamentales, se introduce al concepto de determinante y su uso como un artificio de representación.

4.1 INTRODUCCION

En el capítulo 3 se presentaron *métodos* para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y para encontrar inversas de matrices. Sin embargo, se ignoró la *teoría* fundamental que apoya esos métodos. Por ejemplo, en el capítulo 3 simplemente se supuso que la eliminación de Gauss para ecuaciones no cambiaba el conjunto de soluciones de las ecuaciones –esto es, que las soluciones del sistema de ecuaciones original eran exactamente las mismas que las del sistema transformado. Tal suposición no es necesariamente verdadera para todas las operaciones posibles en ecuaciones; por ejemplo, elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación $2x = 4$ –cuya única solución es $x = 2$ – produce $4x^2 = 16$, que tiene la solución $x = -2$ además de $x = 2$ de la ecuación original. Así que se requiere de cierta teoría para respaldar la eliminación de Gauss y demostrar que no altera el conjunto de soluciones.

En el capítulo 3 también se ignoró la teoría que ayuda a *entender* –entender, por ejemplo, la naturaleza del conjunto de soluciones a un sistema de ecuacio-

nes, o entender las circunstancias en las cuales las matrices tienen inversas derechas o izquierdas. Este capítulo proporciona la teoría faltante.

4.2 FORMA REDUCIDA DE GAUSS Y RANGO

Toda la metodología del capítulo 3 se basó en la eliminación de Gauss: la aplicación sistemática de operaciones elementales de renglón para reducir una matriz a una forma simple. Por ejemplo, al resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se aplicó la eliminación de Gauss a la matriz aumentada $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ para producir una matriz aumentada reducida de la cual era inmediato encontrar las soluciones al sistema de ecuaciones. En capítulos posteriores se encontrará que una forma reducida como la que se produce por la eliminación de Gauss es una herramienta poderosa para resolver problemas diferentes a la solución de ecuaciones; así que ahora se desarrolla la teoría para apoyar esta herramienta.

Forma reducida de Gauss

Primero, se reescribe la descripción (3.20) de la eliminación de Gauss para aplicarla a una matriz arbitraria \mathbf{A} , $p \times q$ sin necesidad de considerar algún sistema de ecuaciones o matriz aumentada. Se dice que un renglón o columna de una matriz es diferente de cero si al menos un elemento en ese renglón o columna es diferente de *cero*; en caso contrario es una *columna cero* o un *renglón cero*, y todos sus elementos son cero.

- (4.1) *Eliminación de Gauss.* \mathbf{A} es una matriz dada $p \times q$.
0. Si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ no es necesaria la eliminación –pare. En caso contrario, haga $r = 1$ (para “renglón = 1”) y proceda con los pasos del 1 al 3.
 1. Encuentre la primera columna de \mathbf{A} (llámese columna c_r) que tenga un elemento diferente de cero en un renglón i con $i \geq r$; si es necesario haga el r -ésimo elemento de esta columna diferente de cero e intercambie dicho renglón con el renglón r . Divida este nuevo renglón r entre este elemento diferente de cero para hacer el nuevo r -ésimo elemento de esta columna igual a 1.
 2. Sume múltiplos adecuados a este nuevo renglón r a todos los renglones inferiores de modo que los elementos $(r+1)$ -ésimo, $(r+2)$ -do, . . . , p -ésimo de esta columna se hagan ceros. Ahora la columna c_r tiene un 1 como su elemento r -ésimo y un cero su elemento j -ésimo para $j > r$; además, el primer elemento diferente de cero en el renglón r ocurre en la columna c_r y es igual a 1.
 3. Si $r = p$ (se hace usando el último renglón de la matriz) o, si los renglones $(r+1), (r+2), \dots, p$ son todos renglones cero, no se necesita más eliminación –pare. En caso contrario, incremente r en 1 y vuelva al comienzo del paso 1.

Al aplicar la eliminación de Gauss como en (4.1), se produce una forma reducida triangular superior A' de la matriz original A ; a dicha forma reducida se le da un nombre especial.

- (4.2) **Definición.** Se dice que una matriz $B, p \times q$ es una *forma reducida de Gauss* cuando existe un entero k con $0 \leq k \leq p$ para el cual es válido lo siguiente:
- Los primeros k renglones de B son diferentes de cero, mientras que los $p - k$ renglones restantes son cero.
 - El primer elemento diferente de cero en cada renglón diferente de cero es igual a 1, y por lo tanto la columna en la que esto ocurre es una primera columna (ver la definición 3.24).
 - Para las k primeras columnas, la primera para cada renglón está más a la derecha que la primera columna del renglón superior.
 - El elemento i -ésimo en la i -ésima primera columna es igual a 1, mientras que el elemento j -ésimo es igual a cero para $j > i$.

Usando este lenguaje, se tiene que el resultado de aplicar la eliminación de Gauss como en (4.1) es para producir una matriz en la forma reducida de Gauss. Algunos autores se refieren a la forma reducida de Gauss como “forma de renglón-escalón”, un término que aquí se reserva para una forma todavía más reducida que se discutirá después en esta sección.

- (4.3) **Ejemplo.** Las primeras tres matrices mostradas abajo están en la forma reducida de Gauss; las siguientes tres *no* lo están

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son reducidas de Gauss;

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

no son reducidas de Gauss.

- (4.4) **Ejemplo.** Considere la matriz $A, 2 \times 2$ que se muestra abajo, a la cual la eliminación de Gauss reduce fácilmente a la matriz A' mostrada en la forma reducida de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ se reduce por (4.1) a } A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si en su lugar, se intercambian primero los dos renglones de \mathbf{A} y luego se realiza la eliminación de Gauss, se obtiene la matriz \mathbf{A}'' :

$$\mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz \mathbf{A}'' también está en la forma reducida de Gauss. Tanto \mathbf{A}' como \mathbf{A}'' están en la forma reducida de Gauss y se obtuvieron de \mathbf{A} realizando operaciones elementales de renglón; por lo tanto, *puede haber más de una forma reducida de Gauss producida a partir de una matriz dada*.

Del ejemplo 4.4 se puede observar que no existe una forma reducida de Gauss única para cada matriz \mathbf{A} ; sin embargo, ciertos aspectos importantes serán los mismos en todas las formas reducidas de Gauss que se producen a partir de una matriz \mathbf{A} dada.

(4.5)

Teorema clave (forma reducida de Gauss). El número k de renglones diferentes de cero y los números de columna de las primeras columnas son los mismos en cualquier forma reducida de Gauss producida a partir de una matriz \mathbf{A} dada, mediante operaciones elementales de renglón, sin importar la secuencia de operaciones de renglón utilizadas.

DEMOSTRACION. Suponga que \mathbf{A} es $p \times q$ y que se obtienen dos formas reducidas de Gauss \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' de \mathbf{A} mediante secuencias de operaciones elementales de renglón. Sea k' el número de renglones diferentes de cero en \mathbf{A}' , y enumérense las primeras columnas de \mathbf{A}' como $c'_1, c'_2, \dots, c'_{k'}$. De manera similar, sea k'' el número de renglones diferentes de cero en \mathbf{A}'' , y enumérense las primeras columnas de \mathbf{A}'' como $c''_1, c''_2, \dots, c''_{k''}$. Lo que se desea demostrar es que $k' = k''$ y que $c'_j = c''_j$ para $1 \leq j \leq k' (= k'')$. Ya que se utilizaron operaciones elementales de renglón para producir \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' , mediante el teorema clave 3.34 sobre operaciones de renglón, se sabe que existen matrices no singulares \mathbf{F}' y \mathbf{F}'' con $\mathbf{F}'\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ y $\mathbf{F}''\mathbf{A} = \mathbf{A}''$. Por lo tanto,

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{H}\mathbf{A}' \text{ y } \mathbf{A}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}'', \text{ en donde } \mathbf{H} = \mathbf{F}''\mathbf{F}'^{-1}.$$

Esta relación es la clave de la demostración. Si $\mathbf{A}' = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}'' = \mathbf{H}\mathbf{A}' = \mathbf{H}\mathbf{0} = \mathbf{0}$; también, si $\mathbf{A}'' = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}'' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. En otras palabras, el teorema es verdadero si, ya sea k' o k'' es 0. En seguida, considere cuando k' y k'' son positivos. Ya que la columna c_1 es la primera columna de \mathbf{A}' , las columnas a'_j de \mathbf{A}' para $1 \leq j < c'_1$ deben ser iguales a $\mathbf{0}$; mediante la regla para la multiplicación separada, la columna j -ésima a''_j de \mathbf{A}'' es \mathbf{H} por aquélla

para \mathbf{A}' : $\mathbf{a}_j'' = \mathbf{H}\mathbf{a}_j'$. Por lo tanto, ya que $\mathbf{H}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, se encuentra que $\mathbf{a}_j'' = \mathbf{0}$ para $1 \leq j \leq c'_1$; pero esto quiere decir que la primera columna de \mathbf{A}'' debe ocurrir en o a la derecha de la columna c'_1 —es decir, $c''_1 \geq c'_1$. Aplicando el mismo argumento a la relación $\mathbf{A}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}''$ en lugar de a $\mathbf{A}'' = \mathbf{H}\mathbf{A}'$, también se obtiene $c'_1 \geq c''_1$. Juntas estas dos desigualdades dan $c'_1 = c''_1$. Ahora la columna c'_1 es la primera columna de \mathbf{A}' y, por la definición 4.2 d), viene del primer renglón de \mathbf{A}' ; de allí que, el primer elemento de esa columna sea 1 y todos los otros sean 0—es decir, esta columna es tan sólo \mathbf{e}_1 , la primera matriz columna unitaria de orden p . El mismo argumento se aplica a la primera columna de \mathbf{A}'' . La regla para la multiplicación separada nos dice que las columnas de \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' se relacionan mediante $\mathbf{a}'' = \mathbf{H}\mathbf{a}'$, así que se obtiene $\mathbf{e}_1 = \mathbf{He}_1$.

En seguida se utiliza inducción. De k' y k'' uno es el menor; por conveniencia sea k' . Como una hipótesis inductiva suponga que se ha demostrado que $c'_i = c''_i$ para $1 \leq i \leq n$, y

$$\mathbf{He}_i = \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{e}_j \quad \text{para algunos números } \alpha_{ij}$$

para $1 \leq i \leq n$, donde $n < k' \leq k''$.

Observe que esto se ha demostrado precisamente para $n = 1$. En seguida se demuestra que es verdadero para $n + 1$, lo que demostrará que es cierto para toda n hasta k' . Mediante la definición 4.2 sobre las formas reducidas de Gauss, las columnas de \mathbf{A}' enumeradas hasta $(c'_{n+1} - 1)$ sólo tienen elementos cero en los renglones $n + 1, n + 2, \dots, p$; es decir cada columna tiene elementos diferentes de cero sólo en los renglones n y por arriba, así que cada una de esas columnas puede escribirse como una sumatoria de múltiplos de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ya que cada columna \mathbf{a}'' de \mathbf{A}'' debe ser igual a $\mathbf{H}\mathbf{a}'$ para la columna correspondiente \mathbf{a}' de \mathbf{A}' , se observa que cada columna de \mathbf{A}'' enumerada hasta $(c'_{n+1} - 1)$ es igual a \mathbf{H} por una sumatoria de múltiplos de las \mathbf{e}_i para $1 \leq i \leq n$. Pero la hipótesis inductiva nos dice que cada \mathbf{He}_i por sí misma es una combinación de múltiplos de las \mathbf{e}_i , así que se concluye que cada columna de \mathbf{A}'' enumerada hasta $(c'_{n+1} - 1)$ es igual a la sumatoria de múltiplos de \mathbf{e}_i para $1 \leq i \leq n$; es decir, cada una de las columnas de \mathbf{A}'' tiene ceros en el renglón $(n + 1)$ y por debajo, y por lo tanto la primera columna $(n + 1)$ -ésima de \mathbf{A}'' no puede ser una de estas columnas—así que $c''_{n+1} \geq c'_{n+1}$. Usando \mathbf{H}^{-1} en lugar de \mathbf{H} e invirtiendo los papeles de \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' , se obtiene por el mismo argumento que $c'_{n+1} \geq c''_{n+1}$, y por lo tanto $c'_{n+1} = c''_{n+1}$. Si se denotan estas $(n + 1)$ -ésimas primeras columnas de \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' mediante \mathbf{a}' y \mathbf{a}'' , se tiene que cada una es igual a \mathbf{e}_{n+1} más una sumatoria de múltiplos de \mathbf{e}_i para $1 \leq i \leq n$, así como $\mathbf{a}'' = \mathbf{H}\mathbf{a}'$; esto muestra que la hipótesis inductiva enunciada se cumple para $n + 1$.

Ahora se sabe que la hipótesis inductiva se cumple para $1 \leq n \leq k' (\leq k'')$. Los últimos $p - k'$ renglones de \mathbf{A}' son renglones cero, lo cual quiere

decir que todas las columnas de A' a la derecha de la columna $c'_{k'}$ son sumatorias de múltiplos de las e_i para $1 \leq i \leq k'$; el mismo argumento anterior basado en $a'' = Ha'$ y la hipótesis inductiva para $n = k'$ muestran entonces que lo mismo debe ser cierto para todas las columnas de A' a la derecha de la columna $c'_{k'}$ –lo cual significa que no puede haber más primeras columnas para A'' más allá de $c'_{k'}$. Es decir, $k'' = k'$. Entonces, el teorema queda demostrado. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 6.

Rango

De acuerdo al **teorema clave 4.5** sobre la forma reducida de Gauss, el número de renglones diferentes de cero es el mismo en cada forma reducida de Gauss de una matriz dada. Este número juega un papel fundamental en gran parte del trabajo subsecuente y, por lo tanto, se le da un nombre especial.

- (4.6) **Definición.** El número de renglones diferentes de cero en cualquier forma reducida de Gauss A' de una matriz A obtenida mediante operaciones elementales de renglón en A se llama el *rango* de A .
- (4.7) **Ejemplo.** Los rangos de las tres primeras matrices del ejemplo 4.3 pueden verse directamente, ya que las matrices se encuentran en la forma reducida de Gauss: son 0, 2 y 3 respectivamente. Los rangos de las tres matrices siguientes pueden encontrarse realizando la eliminación de Gauss para obtener las formas reducidas de Gauss, obteniendo rangos de 2, 2 y 3 respectivamente. El rango de la matriz A del ejemplo 4.4 es 2, como se puede observar de la forma reducida de Gauss ya sean A' o A'' . Observe que dichas formas A' y A'' ilustran el **teorema clave 4.5**.

Algunos autores se refieren al rango como “rango de renglón”, ya que su definición depende del uso de las operaciones de *renglón* y cuentan los *renglones* diferentes de cero. Un concepto similar de “rango de columna” puede introducirse considerando operaciones de *columna* y contando las *columnas* diferentes de cero en una forma reducida. Resulta que el rango de renglón y el rango de columna siempre son iguales, así que se prefiere usar el término sin adornos de “rango”.

Para ciertos propósitos teóricos, en ocasiones es útil reducir una matriz mediante operaciones elementales de renglón, más allá de la forma reducida de Gauss que se obtiene, por ejemplo, mediante la eliminación de Gauss. Una manera de llegar a esta forma es a través de la eliminación de Gauss-Jordan –vea el ejemplo 3.21. El siguiente método –vea el problema 16– es mucho más eficiente; vea también el problema 14 en la sección 3.2.

(4.8) La **reducción de renglón-escalón**. Sea A una matriz $p \times q$ dada.

1. Utilice la eliminación de Gauss (4.1) o cualquier otro método para producir una forma reducida de Gauss de A .
2. Utilice el elemento 1 de más abajo en cada primera columna de la forma reducida de Gauss –comenzando con la primera columna más a la derecha y trabajando hacia la izquierda– con el fin de eliminar todos los elementos diferentes de cero en esa columna estrictamente por arriba de ese elemento 1.

Así como la eliminación de Gauss, este proceso produce una forma especial con un nombre especial.

(4.9) **Definición.** Se dice que una matriz B , $p \times q$ está en la *forma de renglón-escalón* cuando:

- a) Está en la forma reducida de Gauss (digamos, con k renglones diferentes de cero).
- b) La i -ésima primera columna es igual a e_i , la i -ésima matriz columna unitaria de orden p , para $1 \leq i \leq k$.

Observe que algunos autores se refieren a la forma de renglón-escalón como “forma reducida de renglón-escalón”.

(4.10) **Ejemplo.** Considere la matriz C mostrada abajo; aquí se muestra una forma reducida de Gauss, G , producida mediante eliminación de Gauss, como se desarrolló de (3.8) a (3.13) en la sección 3.2.

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & -6 & -4 \\ -3 & 6 & 3 & -15 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & 17 & 9 \\ 1 & 1 & 11 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Las primeras columnas son las columnas 1, 2, 3 y 4. Se usa el cuarto renglón para eliminar los elementos diferentes de cero en la columna 4 arriba del último elemento, después se hace lo mismo con el tercer renglón y la columna 3, y por último con el segundo renglón y la columna 2, para obtener

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz R está en la forma de renglón-escalón, y es por lo tanto *una* forma de renglón-escalón de C . A diferencia de la situación de las formas

reducidas de Gauss, es de hecho legítimo referirse a *la* forma reducida de renglón-escalón de una matriz, como lo muestra el siguiente teorema.

(4.11)

Teorema clave (la forma de renglón-escalón). Cada matriz tiene precisamente una forma de renglón-escalón, la cual se puede reducir mediante operaciones elementales de renglón, sin importar la secuencia real de las operaciones usadas para producirla.

DEMOSTRACION. Sean A' y A'' dos formas de renglón-escalón de la misma matriz A . Ya que A' y A'' son también formas reducidas de Gauss, se sabe del **teorema clave 4.5** sobre las formas reducidas de Gauss que tienen el mismo número k de renglones diferentes de cero y los mismos números de columna de sus k primeras columnas. También, la i -ésima primera columna de cada matriz es tan sólo e_i . Usando la notación de la demostración del **teorema clave 4.5**, tenemos por lo tanto, $He_i = e_i$ para $1 \leq i \leq k$. Cualquier columna a' de A' es tan sólo una sumatoria de múltiplos de estas primeras k matrices columna unitarias e_i :

$$a' = \sum \alpha_i e_i.$$

La columna a'' de A'' correspondiente es tan sólo Ha' , así que se tiene

$$a'' = Ha' = H(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i He_i = \sum \alpha_i e_i = a',$$

y por lo tanto $a'' = a'$ y las columnas correspondientes de A' y A'' son iguales. Esto es, $A' = A''$. ■

PROBLEMAS 4.2

- Para cada una de las segundas tres matrices del ejemplo 4.3, enuncie cómo se viola en éste la definición de la forma reducida de Gauss y después redúzcalo a su forma reducida de Gauss.
- Enuncie cuáles de las siguientes matrices están en la forma reducida de Gauss, y para aquéllas que no lo estén, explique el por qué.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	

- ▷ 3. Encuentre una forma reducida de Gauss para cada una de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 & -14 \\ 3 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & -10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Utilice el método de la sección 3.8 para demostrar que al utilizar la reducción de Gauss como en (4.1) en una matriz $p \times q$, se requiere a lo mucho de:

a) N_{pq} sumas/restas y $N_{pq} + q^2/2 - q/2$ multiplicaciones/divisiones si $p \geq q$, donde

$$N_{pq} = \frac{q^2(3p - q)}{6} - \frac{q(3p - 1)}{6},$$

b) N_{qp} sumas/restas y $N_{qp} + p(2q - p - 1)/2$ multiplicaciones/divisiones si $p < q$.

Calcule estas medidas de trabajo para:

- c) $p = 50, q = 100$,
d) $p = 100, q = 50$

- ▷ 5. Si A es $p \times q$, demuestre que $[I_p \ A]$ está en la forma reducida de Gauss.
6. Suponga que A es $p \times p$ y no singular. Utilice el **teorema clave 3.34** sobre operaciones de renglón para mostrar que cualquier forma reducida de Gauss G de A es unitaria triangular superior.
7. Encuentre el rango de cada una de las segundas tres matrices del ejemplo 4.3.
- ▷ 8. Suponga que A es $p \times q$ con rango p y que B es $p \times r$; demuestre que $[A \ B]$ tiene rango p .
9. Encuentre el rango para cada una de las matrices del problema 3.
- ▷ 10. Suponga que la matriz A , $p \times q$, tiene n renglones diferentes de cero y $p - n$ renglones cero. Si k es el rango de A . demuestre que $k \leq n$.
11. Suponga que A es $p \times p$ y que su rango k satisface $k < p$. Demuestre que A es singular.
12. Encuentre la forma de renglón-escalón para cada matriz del ejemplo 4.3.
13. Si A es $p \times q$, demuestre que $[I_p \ A]$ está en la forma de renglón-escalón.

- ▷ 14. Se obtuvieron en el ejemplo 4.4, dos formas reducidas de Gauss diferentes, A' y A'' para una matriz. Obtenga la forma de renglón-escalón de A' y de A'' y verifique que resulta la misma forma.
15. Suponga que A es $p \times q$ y que se reduce a la forma de renglón-escalón usando (4.8). El trabajo involucrado al realizar esto consiste en, primero, el trabajo medido en el problema 4 para reducir A a la forma reducida de Gauss G , y después en el trabajo adicional para reducir G a la forma de renglón-escalón. Suponga que el rango de A es k .
- a) Muestre que este trabajo adicional para reducir G requiere de, a lo mucho

$$C_{kq} = \frac{k(k-1)(q-k)}{2}$$

sumas/restas y C_{kq} multiplicaciones/divisiones.

- b) Se puede usar el cálculo diferencial para mostrar que C_{kq} es mayor para k alrededor de $2q/3$; demuestre que para tal k el trabajo adicional C_{kq} es de aproximadamente

$$C_q = \frac{q^2(2q-3)}{27}.$$

- c) Encuentre el trabajo adicional C_{kq} para una matriz 50×100 de rango 50.
d) Encuentre la cantidad de trabajo adicional más grande C_q para una matriz 90×100 .
16. Suponga que A es $p \times p$ y que la matriz aumentada $[A \ b]$, $p \times (p+1)$ tiene rango p .
- a) Utilice los resultados de los problemas 4 y 15 para encontrar el trabajo necesario para reducir $[A \ b]$ a la forma de renglón-escalón mediante (4.8).
- b) Compare esto con las $p^3/2 - p/2$ sumas/restas y $p^3/2 + p^2/2$ multiplicaciones/divisiones necesarias para producir la forma de renglón-escalón mediante la eliminación de Gauss-Jordan.
- c) Evalúe cada una de las medidas de trabajo de a) y b) cuando $p = 50$.
17. Demuestre que la forma de renglón-escalón de una matriz no singular A , $p \times p$, es I_p . (Vea el problema 6.)

4.3 POSIBILIDAD DE SOLUCION Y CONJUNTOS DE SOLUCIONES PARA SISTEMAS DE ECUACIONES

En el capítulo 2, se vio que, con frecuencia, es importante en problemas de aplicación conocer *si existen soluciones* a ciertos sistemas de ecuaciones lineales, y si es así, *cómo encontrarlas*. Por ejemplo, en el problema de equilibrio del mercado se necesitaba resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ para una \mathbf{x} diferente de cero, mientras que en el problema de mínimos cuadrados se necesitaba resolver $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.

En el capítulo 3, se manejó el *cómo*: se introdujo la eliminación de Gauss como un método para la manipulación de sistemas de ecuaciones (y matrices aumentadas) a modo de producir un sistema de ecuaciones con solución directa. Sin embargo, como se observó en la sección 4.1 aun esta metodología arroja un imperativo teórico: Es necesario mostrar que esta manipulación no cambia el conjunto de soluciones. Se resuelve ahora este punto y después se utiliza el concepto de rango para caracterizar la posibilidad de solución de sistemas de ecuaciones; esto permite entender –vea problemas 16 y 19– *por qué* resultaron así los ejemplos del capítulo 2.

Posibilidad de solución de ecuaciones

Se utilizará una forma reducida de Gauss de la matriz aumentada para analizar la posibilidad de solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, así que se debe demostrar que la eliminación de Gauss no cambia el conjunto de soluciones.

- (4.12) **Teorema** (eliminación de Gauss y conjuntos de soluciones). Suponga que el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ –o, equivalentemente, la matriz aumentada $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ – se transforma mediante una secuencia de operaciones elementales de renglón al sistema $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ –o equivalentemente, a la matriz aumentada $[\mathbf{A}' \ \mathbf{b}']$. Entonces los conjuntos de soluciones son idénticos: \mathbf{x} resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si y sólo si \mathbf{x} resuelve $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

DEMOSTRACION. Mediante el **teorema clave 3.34** sobre las operaciones de renglón existe una matriz no singular \mathbf{F} tal que

$$[\mathbf{A}' \ \mathbf{b}'] = \mathbf{F}[\mathbf{A} \ \mathbf{b}] = [\mathbf{FA} \ \mathbf{Fb}],$$

donde la última igualdad se sigue de la regla para la multiplicación separada. Esto significa que $\mathbf{A}' = \mathbf{FA}$ y $\mathbf{b}' = \mathbf{Fb}$. Ahora, suponga primero que \mathbf{x} resuelve la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Premultiplicando esta ecuación por \mathbf{F} se tiene $\mathbf{F}\mathbf{Ax} = \mathbf{Fb}$, es decir, $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ y por lo tanto \mathbf{x} resuelve igualmente las ecuaciones modificadas. De modo recíproco, si \mathbf{x} satisface $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, entonces, la premultiplicación por \mathbf{F}^{-1} muestra de manera similar, que \mathbf{x} resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Por lo tanto, los dos conjuntos de soluciones son idénticos. ■

En el teorema 4.12 se establece rigurosamente que se puede estudiar el conjunto de todas las soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, estudiando el conjunto de soluciones del conjunto mucho más simple $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ que se obtiene al reducir $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ a una forma reducida de Gauss $[\mathbf{A}' \ \mathbf{b}']$. Existen tres posibles casos, como se demostró continuamente mediante ejemplos en el capítulo 3:

1. No existe solución.
2. Existe exactamente una solución.
3. Existen infinitamente muchas soluciones.

En la sección 3.2 (3.25) se vio previamente cómo pueden ocurrir estos diferentes casos. Para decidir qué caso ocurre en una situación en particular, se escribe la matriz aumentada $[A \ b]$, se reduce mediante eliminación de Gauss a la forma reducida de Gauss $[A' \ b']$, y después se examina el aspecto más sencillo de la posibilidad de solución de $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. Las conclusiones que resultan pueden enunciarse de manera compacta en términos de rango.

(4.13)

Teorema clave (rango y posibilidad de solución). Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Debe cumplirse exactamente una de las siguientes tres posibilidades:

1. El rango de la matriz aumentada $[A \ b]$ es mayor que el de A y no existe solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. El rango de $[A \ b]$ es igual al de A , que es igual al número de incógnitas, y el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución.
3. El rango de $[A \ b]$ es igual al de A , que es estrictamente menor que el número de incógnitas, y el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene infinitud de soluciones.

DEMOSTRACION. Se sabe del teorema 4.12 sobre la eliminación de Gauss y conjuntos de soluciones que el conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es idéntico a el de $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, donde $[A' \ b']$ es una forma reducida de Gauss de $[A \ b]$. De la definición 4.2 sobre las formas reducidas de Gauss resulta claro que, si $[A' \ b']$ está en la forma reducida de Gauss entonces también A' lo está. Sean r el rango de A y s el rango de $[A \ b]$; ya que r es igual al número de renglones no cero en A' mientras que s es igual al número de renglones no cero en $[A' \ b']$, se sigue que $r \leq s$. Observe que la matriz A' , $p \times q$, tiene q columnas, y ya que r es el número de primeras columnas de A' debe ser que $r \leq q$. Entonces existen exactamente tres posibilidades: i) $r < s$; ii) $r = s = q$; y por último iii) $r = s < q$.

En el caso i), $[A' \ b']$ debe tener primeras columnas posteriores a las de A' ; pero $[A' \ b']$ tiene sólo una columna posterior a las de A' , es decir, la columna más a la derecha \mathbf{b}' . Por lo tanto, $s = r + 1$ y el elemento $(r + 1)$ -ésimo de \mathbf{b}' es igual a 1, mientras que el $(r + 1)$ -ésimo renglón de A' es igual a $\mathbf{0}$. Entonces, la ecuación $(r + 1)$ -ésima del sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ pide encontrar \mathbf{x} que haga que $\mathbf{0}\mathbf{x} = [1]$, es decir, hacer $0 = 1$ –lo cual es imposible. Por lo tanto, en el caso i) no existen soluciones; éste es el caso 1) del teorema.

En el caso ii), no hay elementos no cero en \mathbf{b}' por debajo del último renglón no cero de A' , así que no existe alguna ecuación que pida que $0 = 1$. Ya que q es el número total de columnas en A' , mientras que r es su número de primeras columnas y $r = q$, entonces cada columna es una primera columna. Por lo tanto, la ecuación q -ésima $1\langle\mathbf{x}\rangle_q = \langle\mathbf{b}'\rangle_q$ determina de

manera única a $\langle \mathbf{x} \rangle_q$ la ecuación $(q - 1)$ -ésima determina de manera única a $\langle \mathbf{x} \rangle_{q-1}$, y así sucesivamente hasta la primera ecuación que determina de manera única a $\langle \mathbf{x} \rangle_1$. Este es el caso 2) del teorema, y existe exactamente una solución.

Por último en el caso iii), ya que r –el número de primeras columnas de \mathbf{A}' – es menor que q –el número total de columnas– existen algunas columnas que no son primeras de \mathbf{A}' ; es decir, existen algunas variables que no son primeras. Si a cada una de estas variables no primeras se le asigna un valor arbitrario y si estos valores se sustituyen por las variables, y los resultados se desplazan al lado derecho de las ecuaciones, entonces las variables restantes son todas primeras variables y sus valores están determinados de modo único como en el caso ii) por los lados derechos –que ahora contienen estos $q - r$ valores arbitrarios. Este es el caso 3) del teorema, y existen infinitamente muchas soluciones –una para cada valor asignado a las variables que no son primeras. ■

- (4.14) **Ejemplo.** Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de abajo con un parámetro α arbitrario.

$$x - 3y = -2$$

$$2x + y = 3$$

$$3x - 2y = \alpha.$$

La matriz aumentada se reduce fácilmente de

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & \alpha \end{array} \right] \text{ a } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right].$$

Si $\alpha = 1$, entonces \mathbf{A}' y $[\mathbf{A}' \ \mathbf{b}']$ están en la forma reducida de Gauss, y los rangos de cada una son iguales a $2 = q$. Se tiene el caso 2) del **teorema clave 4.13** y existe una solución única, es decir $x = y = 1$. Sin embargo, si $\alpha \neq 1$, entonces el tercer renglón puede dividirse entre $\alpha - 1 \neq 0$ para producir un 1 al final de la tercera columna, dando el rango de \mathbf{A} como 2 pero el rango de $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ como 3; éste es el caso 1) y no existen soluciones.

Ahora podrá resolver los problemas de 1 al 7.

Estructura del conjunto de soluciones

La estructura del conjunto de soluciones está bastante clara en dos casos: cuando el conjunto está vacío (no hay soluciones), o cuando el conjunto consiste

de una sola solución. ¿Pero qué sucede en el tercer caso, cuando existen infinitamente muchas soluciones? Si y y z son ambas soluciones a $Ax = b$, de modo que $Ay = b$ y $Az = b$, entonces

$$A(y - z) = Ay - Az = b - b = \mathbf{0}.$$

Es decir, la matriz columna $\mathbf{h} = y - z$ resuelve

- (4.15) el así llamado, *sistema homogéneo* $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$ correspondiente al sistema original $Ax = b$.

De modo recíproco, si \mathbf{h} es cualquier solución al sistema homogéneo mientras que x_0 es alguna solución específica a $Ax = b$, entonces $A(x_0 + \mathbf{h}) = Ax_0 + A\mathbf{h} = b + \mathbf{0} = b$; es decir, $x_0 + \mathbf{h}$ es otra solución a $Ax = b$.

- (4.16) **Teorema clave** (conjuntos de soluciones). Suponga que x_0 es alguna solución particular al sistema de ecuaciones $Ax = b$. Entonces el conjunto de todas las soluciones x a $Ax = b$ es el mismo que el conjunto de todas las matrices de la forma $x_0 + \mathbf{h}$, donde \mathbf{h} abarca el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

De aquí se sigue que el que haya a lo mucho una solución a $Ax = b$ equivale a que no haya ninguna solución \mathbf{h} no cero a $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

- (4.17) **Corolario** (unicidad de soluciones). El sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene a lo mucho una solución (puede no tener ninguna) si y sólo si la única solución a $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Se cumple un resultado mucho más sólido en el caso especial de $p = q$, es decir, en él hay tantas variables como ecuaciones.

- (4.18) **Teorema clave** (existencia = unicidad cuando $p = q$). Suponga que la matriz cuadrada A es $p \times p$ y considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$ para varias b . Las siguientes cinco condiciones son equivalentes:
1. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$
 2. El rango de A es igual a p .
 3. Para cada matriz columna \mathbf{b} , $p \times 1$, el sistema $Ax = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución.
 4. Existe una inversa derecha \mathbf{R} , $p \times p$, para A , es decir, hay una \mathbf{R} , $p \times p$, con $\mathbf{AR} = \mathbf{I}_p$.
 5. A es no singular. Aún más, $A^{-1} = \mathbf{R}$ en 4).

DEMOSTRACION. Se demuestra que 1) implica 2), 2) implica 3), 3) implica 4), 4) implica 5), y 5) implica 1).

(1 \Rightarrow 2) Primero, suponga que se cumple 1) y aplique el **teorema clave 4.13** sobre rango y posibilidad de solución a un sistema $Ax = \mathbf{0}$, que por suposición tiene exactamente una solución $x = \mathbf{0}$; así que debe cumplirse el caso 2) del **teorema clave 4.13**, y el rango de A es igual a p –es decir, se cumple 2).

(2 \Rightarrow 3) Segundo, suponga que se cumple 2) y considere $Ax = b$ para cierta b ; si $[A' \ b']$ es una forma reducida de Gauss para $[A \ b]$, entonces A' es una forma reducida de Gauss para A , y ya que el rango de A es igual a p , todos los p renglones de A' –y por lo tanto de $[A' \ b']$ – son no cero. Esto quiere decir que el rango de $[A \ b]$ también es igual a p ; por lo tanto se cumple el caso 2) del **teorema clave 4.13** y existe exactamente una solución a $Ax = b$, es decir se cumple este caso 3).

(3 \Rightarrow 4) Tercero, suponga que se cumple 3); encontrar R para 4) mediante el **teorema clave 1.44 a)**, es equivalente a resolver sistemas de ecuaciones $Ar_i = e_i$, que puede hacerse por la suposición de 3). De allí que 4) se siga de 3).

(4 \Rightarrow 5) Cuarto, suponga que se cumple 4) de modo que A tiene una inversa derecha R . Se afirma que esto significa que se cumple 1) para la matriz A^T ; ya que si $A^Ty = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{0} = R^T\mathbf{0} = R^T(A^Ty) = (R^TA^T)y = (AR)^Ty = I_p y = y,$$

así que como se aseguraba $y = \mathbf{0}$. Pero si se cumple 1) para A^T , entonces, con lo que se ha demostrado, también 2), 3) y 4) se cumplen para A^T . De 4), para A^T se obtiene una matriz X que satisface $A^TX = I_p$, y por lo tanto

$$X^TA = (A^TX)^T = I_p^T = I_p,$$

lo cual dice que X^T es una inversa izquierda de A . En el teorema 1.33 se nos dice que $R = X^T$ es de hecho una inversa bilateral A^{-1} . Es decir que 5) se cumple.

(5 \Rightarrow 1) Quinto y último. Suponga que se cumplen 5) y $Ah = \mathbf{0}$ para cierta h ; entonces

$$\mathbf{0} = A^{-1}\mathbf{0} = A^{-1}(Ah) = (A^{-1}A)h = I_p h = h,$$

así que $h = \mathbf{0}$ y se cumple 1). ■

El **teorema clave 4.18** contiene un hecho sorprendente y útil que ahora se extrae para recalcarlo. Dice que con el fin de determinar si las p ecuaciones $Ax = b$ con p incógnitas tienen exactamente una solución para cada miembro derecho arbitrario b , todo lo que se necesita hacer es definir si tienen exactamente una solución $h = \mathbf{0}$ en el caso especial de $b = \mathbf{0}$.

(4.19) **Corolario clave (Alternativa de Fredholm.)** Describa las p ecuaciones con p incógnitas mediante $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Entonces ya sea 1) o 2) se cumple, pero no ambos.

Ya sea que

1. Existe precisamente una solución para cada \mathbf{b} arbitraria o
2. Existe una solución no cero $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ para $\mathbf{Ah} = \mathbf{0}$ pero no ambos. Es decir, existe precisamente una solución para cada \mathbf{b} arbitraria si y sólo si existe precisamente una solución $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{Ah} = \mathbf{0}$.

(4.20) **Ejemplo** (interpolación polinomial). Deje que t_1, t_2, \dots, t_{n+1} tenga números diferentes y sean b_1, b_2, \dots, b_{n+1} números dados. Considere el problema de encontrar un polinomio

$$P(t) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_{n+1} t^n$$

de grado n que *interpola* los datos dados, de manera que $P(t_i) = b_i$ para $1 \leq i \leq n+1$. Las ecuaciones $P(t_i) = b_i$ son sólo ecuaciones para los coeficientes desconocidos x_j y pueden escribirse como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & t_{n+1}^3 & \cdots & t_{n+1}^n \end{bmatrix}.$$

Mediante el **corolario clave 4.19**, se ve que existe precisamente una solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para \mathbf{b} arbitraria si y sólo si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ es la única solución a $\mathbf{Ah} = \mathbf{0}$ —es decir, si y sólo si el polinomio con todos los coeficientes cero es el único que es igual a cero en $n+1$ puntos t_j distintos. Pero se sabe que cualquier polinomio *no cero* de grado n tiene a lo mucho n puntos en los que es cero; para ser igual a cero en $n+1$ puntos, debe ser el polinomio cero. Por lo tanto, la única solución a $\mathbf{Ah} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, así que existe una solución única a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para cada \mathbf{b} . Existe exactamente un polinomio de grado n , a lo mucho, que interpola $n+1$ datos.

PROBLEMAS 4.3

- ▷ 1. Cada una de las siguientes matrices es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Para cada matriz, utilice el **teorema clave 4.13** sobre rango y posibilidad de solución para determinar si el sistema tiene solución única o infinitamente muchas. Si existe una solución, encuéntrela. Si existen

infinitamente muchas, encuentre la solución general (en términos de parámetros arbitrarios).

a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

c)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

b)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

d)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

f)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

2. Encuentre los valores de α para los cuales las siguientes ecuaciones tienen solución, y encuentre las soluciones.

$$x - 3y + 2z = 4$$

$$2x + y - z = 1$$

$$3x - 2y + z = \alpha$$

- ▷ 3. Encuentre todos los lados derechos \mathbf{b} , para los cuales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tienen soluciones y encuentre todas las soluciones, donde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

4. La matriz que se muestra abajo es la matriz aumentada para cierto sistema de ecuaciones. Encuentre los valores del parámetro k para el cual el sistema no tiene solución, tiene una solución, y tiene infinitas soluciones; cuando tiene infinitas soluciones, encuentre la forma general de la solución en términos de parámetros arbitrarios.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array} \right]$$

5. Demuestre que la única solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si el rango de la matriz \mathbf{A} , $p \times q$, es igual a q , el número de incógnitas.
6. Suponga que \mathbf{A} es $p \times p$ y no singular; demuestre que el rango de \mathbf{A} es igual a p .

- ▷ 7. La ecuación de una línea recta en el plano $x-y$ tiene la forma $ax + by = c$. Considere p líneas rectas, con ecuaciones $a_i x + b_i y = c_i$ para $1 \leq i \leq p$. Demuestre que todas las líneas rectas p pasan por un punto común si y sólo si el rango de $[\mathbf{a} \ \mathbf{b}]$ es igual al rango de $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$, donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son matrices $p \times 1$ con $\langle \mathbf{a} \rangle_i = a_i$, $\langle \mathbf{b} \rangle_i = b_i$ y $\langle \mathbf{c} \rangle_i = c_i$.

8. a) Encuentre la solución \mathbf{h} general, 3×1 , para $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- b) Dado que $\mathbf{x}_0 = [2 \ 1 \ -1]^T$ resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = [3 \ 0]^T$, utilice el **teorema clave 4.16** y el resultado de a) para dar la solución general de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para esta \mathbf{b} .

- ▷ 9. Repita el problema 8, para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 8 & -1 \\ -6 & -3 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ -22 \end{bmatrix}.$$

10. En la sección 2.2 se vio que en los modelos de la evolución de un sistema a través del tiempo, en ocasiones se desea encontrar si existe un estado de equilibrio para el modelo; esto involucra la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$.
- Para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 2.6, encuentre la solución general $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$.
 - Utilice esta solución general para encontrar todas las soluciones que también tengan sólo elementos no negativos y que sumen 1, como se pidió en la sección 2.2.
11. En la sección 2.6 se vio que dentro de las aplicaciones frecuentemente es necesario resolver problemas de mínimos cuadrados $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$, dados \mathbf{A} real y \mathbf{y} real y que esto puede hacerse resolviendo $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
- Para las matrices \mathbf{A} y \mathbf{y} del problema 11 de la sección 2.6, encuentre la solución general a $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
 - Escriba la solución general \mathbf{x} en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ como en el **teorema clave 4.16**.
12. Encuentre el polinomio $P(t)$ de grado 2 que satisface $P(2) = 4$, $P(-1) = 7$, y $P(1) = 1$.
- ▷ 13. Utilice el **teorema clave 4.16** para describir el conjunto de todas las inversas derechas \mathbf{R} de una matriz \mathbf{A} , $p \times q$, y utilice su corolario para describir cuándo es única una inversa derecha.
14. Demuestre que la siguiente sexta condición es equivalente a las otras cinco en el **teorema clave 4.18**: 6) Existe una inversa izquierda \mathbf{L} , $p \times p$, para \mathbf{A} ; es decir, existe una \mathbf{L} , $p \times p$, con $\mathbf{LA} = \mathbf{I}_p$.

15. Sean t_1, t_2, \dots, t_r números reales diferentes; sean b_1, b_2, \dots, b_r y b'_1, b'_2, \dots, b'_r números reales. Demuestre que existe precisamente un polinomio P de grado menor que o igual a $2r - 1$ tal que

$$P(t_i) = b_i \quad \text{y} \quad P'(t_i) = b'_i$$

para $1 \leq i \leq r$, donde P' es la derivada de P .

- ▷ 16. En la sección 2.2 se vio que en los modelos de la evolución de un sistema en el tiempo, en ocasiones se desea encontrar si existe un estado de equilibrio para el modelo; esto involucra la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ par \mathbf{x} no cero, donde \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ dada. Demuestre que existe dicha \mathbf{x} no cero si y sólo si $\mathbf{A} - \mathbf{I}_p$ es singular; demuestre que $\mathbf{A} - \mathbf{I}_3$ es singular para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 2.6.
17. Suponga que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de p ecuaciones con p incógnitas tiene una solución \mathbf{x}_0 ; demuestre que \mathbf{x}_0 es la solución única si y sólo si el rango de \mathbf{A} es igual a q .
18. Sea \mathbf{A} , $p \times q$. Demuestre que $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es singular si el rango de \mathbf{A} es estrictamente menor que q .
19. En la sección 2.4 se vio que es importante en los problemas de equilibrio de red saber si cierta matriz \mathbf{H} definida como $\mathbf{H} = \mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T$ es no singular, donde \mathbf{A} es no cuadrada y real.
- Suponga que \mathbf{A} es $r \times s$ y que $\mathbf{K} = \mathbf{I}_s$; demuestre que \mathbf{H} es no singular si el rango de \mathbf{A} es igual a r .
 - Suponga que \mathbf{A} es $r \times s$ y que \mathbf{K} es una matriz diagonal $s \times s$ con elementos positivos sobre la diagonal; demuestre que \mathbf{H} es no singular si el rango de \mathbf{A} es igual a r .
 - Para la matriz \mathbf{A} , 2×5 inmediatamente anterior a (2.20) en la sección 2.4, demuestre que el rango de \mathbf{A} es igual a 2; concluya que \mathbf{H} en (2.24) es no singular, como se demostró para un caso especial del ejemplo 2.25.

4.4 INVERSAS Y RANGO

En el capítulo 1 se mostró que el hecho de que una matriz \mathbf{A} tenga o no una inversa de algún tipo (izquierda, derecha o bilateral), puede resolverse considerando sistemas de ecuaciones: el **teorema clave 1.44** trató esto en detalle. Por ejemplo, la matriz \mathbf{A} , $p \times q$, tiene una inversa derecha \mathbf{R} , $q \times p$, si y sólo si se pueden resolver las ecuaciones $\mathbf{Ar}_i = \mathbf{e}_i$ para $1 \leq i \leq p$. Gracias a lo expuesto en la sección 4.3, se tiene ahora la base teórica necesaria para comprender la posibilidad de resolver ecuaciones y por lo tanto la existencia de inversas.

Inversas y rango

Para caracterizar la existencia de inversas a través del rango, sólo se necesita conjugar dos órdenes distintos de ideas: 1) los resultados del teorema 1.38 y los

del **teorema clave 1.44** que relacionan varios tipos de inversas con la posibilidad de solución de ecuaciones; y 2) el **teorema clave 4.13** que relaciona la posibilidad de solución de ecuaciones con el rango. Por comodidad, se separan los resultados para cada tipo de inversas; juntos, estos teoremas justifican las afirmaciones en (1.32), anteriores a la presentación de inversas en el capítulo 1.

- (4.21) **Teorema** (inversas derechas y rango). Sea A una matriz $p \times q$ y sea k el rango de A . Entonces A tiene una inversa derecha R si y sólo si $k = p$ y $p \leq q$.

DEMOSTRACION. ($\text{rango} \Rightarrow \text{inversa}$) Supóngase primero que $k = p \leq q$; se debe demostrar que existe una R . Por el **teorema clave 1.44 a)**, R existe si $Ar_i = e_i$ se puede resolver para $1 \leq i \leq p$, en donde cada e_i es una columna unitaria de orden p . Por el **teorema clave 4.13 2) y 3)**, se puede resolver $Ar_i = e_i$ si el rango de A es igual al de $[A \ e_i]$. Como el rango de A es p , todos los p renglones de cualquier matriz reducida de Gauss G de A son distintos de cero; si F es la matriz no singular del **teorema clave 3.34** que representa las operaciones de renglón que transforman A en G , entonces también la matriz

$$F[A \ e_i] = [FA \ Fe_i] = [G \ Fe_i],$$

está en la forma reducida de Gauss ya que G lo está. Por lo tanto, el rango de $[A \ e_i]$ –el número de renglones no cero de $[G \ Fe_i]$ – también es igual a p , el rango de A , por lo que los sistemas tienen solución y R existe.

($\text{inversa} \Rightarrow \text{rango}$) A continuación, supóngase que A tiene una inversa derecha R . Sea G una forma reducida de Gauss de A y sea F la matriz no singular de la primera parte de la demostración: $FA = G$. Considérense las ecuaciones $Ax = b$, en donde $b = F^{-1}e_p$; por el teorema 1.38 b), Rb resuelve estas ecuaciones y por lo tanto, por el **teorema clave 4.13 2) y 3)**, los rangos de A y de $[A \ b]$ son iguales. Ahora,

$$F[A \ b] = [FA \ Fb] = [G \ e_p]$$

está en la forma reducida de Gauss. Como el último renglón de esta última matriz no es cero (debido a e_p), el rango de $[A \ b]$ –que es igual al de A – debe ser igual a p . Como existen q columnas en G y p columnas delanteras, queda claro que $p \leq q$. ■

- (4.22) **Teorema** (inversas izquierdas y rango). Sea A una matriz $p \times q$ y sea k el rango de A . Entonces, A tiene una inversa izquierda L si y sólo si $k = q$ y $q \leq p$.

DEMOSTRACION. La demostración es consecuencia del teorema 1.38 y de los **teoremas clave 1.44** y **4.13**, así como del teorema 4.21. ■

(4.23)

Teorema clave (no singularidad y rango). Sea A una matriz cuadrada $p \times p$. A es no singular si y sólo si el rango de A es igual a p .

DEMOSTRACION. La demostración es consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores y del teorema 1.33. ■

Se enunciará por separado una aseveración que sera de utilidad más tarde, y que es consecuencia del último resultado.

(4.24)

Corolario (no singularidad y matrices elementales). Sea A una matriz cuadrada $p \times p$. A es no singular si y sólo si A es igual a un producto de matrices elementales.

DEMOSTRACION. (producto \Rightarrow no singular) Si A es igual a uno de estos productos, y ya que cada matriz elemental es no singular y el producto de matrices no singulares es no singular, entonces A es no singular.

(no singular \Rightarrow producto) Si A es no singular, por el **teorema clave 4.23** su rango es p . Sea R la forma escalón reducida por fila de A ; se sabe que $A = E_1 E_2 \dots E_p R$ para algunas matrices elementales E_i . Si $R = I_p$, habremos logrado nuestro propósito. Por la definición 4.9 relativa a la forma escalón reducida por fila, existen p columnas delanteras en R que son iguales a las e_i ordenadas por $1 \leq i \leq p$ –lo cual significa que $R = I_p$, que era lo que se deseaba. ■

El siguiente es un corolario inmediato a la demostración que se acaba de usar y a la relación entre la forma reducida de Gauss y la forma escalón reducida por fila.

(4.25)

Corolario (no singularidad y formas reducidas de Gauss escalón/reducida por fila). Sea A una matriz cuadrada. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

1. A es no singular.
2. Alguna (o bien cada) forma reducida de Gauss G de A es triangular superior unitaria.
3. La forma escalón reducida por fila de A es igual a I .

PROBLEMAS 4.4

1. Detállese la demostración del **teorema clave 4.23**.

- ▷ 2. a) Demuestre que, si A es $p \times p$ y no singular, entonces la forma escalón reducida por fila de $[A \quad I_p]$ es $[I_p \quad A^{-1}]$.

b) Utilice este resultado para encontrar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

- c) Explique cómo se puede usar este resultado para encontrar la inversa de cualquier matriz no singular.
3. a) Suponiendo que \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times p$ y que el producto \mathbf{AB} es no singular, demuestre que tanto \mathbf{A} como \mathbf{B} son no singulares.
- b) Suponiendo que \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times p$ y que una de ellas es no singular, demuestre que el producto es singular si y sólo si la otra matriz es singular.
4. Suponiendo que \mathbf{B} es $p \times q$ y que \mathbf{A} es $q \times q$ no singular, demuestre que el rango de \mathbf{BA} es igual al rango de \mathbf{B} .
5. Suponiendo que \mathbf{B} es $p \times q$ y que \mathbf{A} es $p \times p$ y no singular, demuestre que el rango de \mathbf{AB} es igual al rango de \mathbf{B} .
- ▷ 6. Suponiendo que \mathbf{A} es $p \times q$ y que tiene rango k , demuestre que:
- \mathbf{A} no tiene inversa derecha si $p > q$.
 - \mathbf{A} no tiene inversa derecha si $k < p < q$.
 - \mathbf{A} tiene infinidad de inversas derechas si $k = p < q$.
 - ¿Cuándo tiene \mathbf{A} exactamente una inversa derecha?
7. Suponiendo que \mathbf{A} es $p \times q$ y que tiene rango k , demuestre que:
- \mathbf{A} no tiene inversa izquierda si $p < q$.
 - \mathbf{A} no tiene inversa izquierda si $k < q < p$.
 - \mathbf{A} tiene infinidad de inversas izquierdas si $k = q < p$.
 - ¿Cuándo tiene \mathbf{A} exactamente una inversa izquierda?
- ▷ 8. Suponiendo que \mathbf{A} es $p \times q$, que \mathbf{B} es $q \times p$ y que $q < p$.
- Demuestre que \mathbf{AB} es singular.
 - Mediante un ejemplo demuestre que \mathbf{BA} puede ser no singular.
9. Demuestre que el rango de \mathbf{AA}^T es menor o igual al rango de \mathbf{A} . (Sin embargo, véase el problema 11, que es más difícil.)
10. Demuestre que el rango de \mathbf{A} es igual al de \mathbf{A}^T , primero para una \mathbf{A} reducida de Gauss y después, mediante los problemas 4 y 5, para una \mathbf{A} general.
- ▷ 11. Demuestre que el rango de \mathbf{AA}^T es igual al rango de \mathbf{A} para una \mathbf{A} real.

4.5 DETERMINANTES Y SUS PROPIEDADES

Muchos lectores habrán aprendido algunos años atrás cómo resolver sistemas de ecuaciones usando determinantes y se habrán preguntado por qué no se les ha

mencionado, especialmente en el capítulo 3. El hecho es que los determinantes no son útiles para el cómputo práctico y eficiente de soluciones de sistemas de ecuaciones mayores que 3×3 ; lo son, sin embargo, si se les usa como artificios conceptuales o descriptivos para representar las soluciones y las inversas. Por esta razón, y *no* para fines computacionales, se les estudiará brevemente.

Determinantes

Se definirá un número único asociado como una matriz $A_{p \times p}$, llamado el *determinante* de A representado por $\det A$ o $\det(A)$. El determinante para matrices $p \times p$ se definirá en términos de determinantes para matrices $(p - 1) \times (p - 1)$, y así sucesivamente hasta las matrices $1 \times 1 [\alpha]$ para las que se definirá $\det[\alpha] = \alpha$. Para lograr una mayor precisión, es necesaria cierta terminología.

(4.26) **Definición.** Sea $A_{p \times p}$.

- El *menor* (i, j) de A , representado por M_{ij} , es el determinante de la matriz $(p - 1) \times (p - 1)$ formada al omitir el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de A .
- El *cofactor* (i, j) de A , representado por A_{ij} , es $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Nótese que los signos $(-1)^{i+j}$ de la definición del cofactor tienen una disposición en forma de tablero de ajedrez:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Ahora se podrá definir a los determinantes.

(4.27) **Definición.**

- El determinante de la matriz $1 \times 1 [\alpha]$ se define como $\det[\alpha] = \alpha$.
- El determinante de la matriz $A_{p \times p}$, se define como

$$\det A = \sum_{j=1}^p \langle A \rangle_{1j} A_{1j}.$$

En palabras: el determinante de A es la suma de los productos de los elementos del primer renglón y de los cofactores del primer renglón.

(4.28) **Ejemplo.** Considérese el determinante de la matriz general 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se tiene por la definición 4.27, que

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \\ &= a_{11} \det [a_{22}] - a_{12} \det [a_{21}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\det \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (-4)(3) - (-5)(2) = -12 - (-10) = -2.$$

(4.29) **Ejemplo.** Considérese el determinante de la matriz general 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Al aplicar la definición 4.27 se tiene que

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &\quad + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{31}a_{22}.\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} &= 2\{(2)(3) - (-1)(-1)\} - 1\{(1)(3) - (-1)(2)\} + 3\{(1)(-1) - (2)(2)\} \\ &= 2\{5\} - 1\{5\} + 3\{-5\} = -10.\end{aligned}$$

Si se examina cualquiera de los productos en la expresión del determinante de matrices 2×2 o 3×3 , se verá que cada producto incluye un término de cada uno de los renglones y un término de cada una de las columnas. En general, resulta que el $\det \mathbf{A}$ es la suma de todos los productos posibles de p elementos de \mathbf{A} , con los signos adecuados, y donde en cada producto hay exactamente un término de cada fila y exactamente uno de cada columna. De hecho, los determinantes pueden definirse de este modo, pero no se proseguirá en esta dirección.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Propiedades básicas de los determinantes

El primer renglón de \mathbf{A} jugó un papel especial en la definición del $\det \mathbf{A}$: los elementos del *primer renglón* se multiplican por sus cofactores, los productos se suman y el resultado es el $\det \mathbf{A}$. La primera propiedad importante es que el “*primer renglón*” puede sustituirse por “*cualquier renglón o cualquier columna*”. Así, además de la primera representación del $\det \mathbf{A}$ para una matriz $\mathbf{A} 3 \times 3$, se tiene

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.\end{aligned}$$

- (4.30) **Teorema** (desarrollo del $\det \mathbf{A}$ por columna o renglón). El $\det \mathbf{A}$ se puede evaluar desarrollándolo con respecto a cualquier renglón o a cualquier columna; esto es, el $\det \mathbf{A}$ es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier renglón o de cualquier columna por sus cofactores:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^p \langle \mathbf{A} \rangle_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{A} \rangle_{is} A_{is} \quad \text{para toda } r \text{ y } s.$$

DEMOSTRACION. Se omite la demostración por ser más complicada que instructiva. ■

- (4.31) **Corolario.**

- a) $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- b) Si cualquier renglón o columna de \mathbf{A} es igual a $\mathbf{0}$, entonces

$$\det \mathbf{A} = 0$$

- c) Para cualquier número c y para cualquier matriz $\mathbf{A} p \times p$,

$$\det(c\mathbf{A}) = c^p \det(\mathbf{A})$$

- d) Si \mathbf{A} tiene dos renglones (columnas) iguales, entonces el \det de $\mathbf{A} = 0$.
- e) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son iguales con excepción de los elementos de su k -ésimo renglón (columna), y \mathbf{C} se define como aquella matriz idéntica a \mathbf{A} y \mathbf{B} con excepción de su k -ésimo renglón (columna) que es la suma de los k -ésimos renglones (columnas) de \mathbf{A} y \mathbf{B} , entonces,

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$$

DEMOSTRACION.

- Desarrollar $\det \mathbf{A}$ con respecto a su primera columna es lo mismo que desarrollar el $\det \mathbf{A}^T$ con respecto a su primer renglón.
- Desarrollar el $\det \mathbf{A}$ con respecto a un renglón o columna cero, da como resultado el $\det \mathbf{A} = 0$.
- Esto es trivial para $p = 1$; cualquier p , se deduce fácilmente por inducción sobre p desarrollando con respecto a cualquier renglón o columna de $c\mathbf{A}$.
- La fórmula del ejemplo 4.28 demuestra que esto es verdad para las matrices 2×2 . Se usará entonces inducción sobre p ; el desarrollo con respecto a cualquier renglón (columna) que no sean las dos citadas, da 0 para el valor del $\det \mathbf{A}$, ya que cada cofactor es 0 por la hipótesis de inducción de que el resultado es cierto para $p - 1$.
- Se llega fácilmente al resultado desarrollando los tres determinantes con respecto al k -ésimo renglón o columna. ■

Se usarán los determinantes para describir soluciones de ecuaciones; hasta el momento se han descrito las soluciones por medio de operaciones de renglón, ahora es necesario examinar la relación entre las operaciones de renglón y los determinantes.

(4.32) **Teorema** (determinantes y operaciones de renglón)

- Si \mathbf{A}' se obtiene de \mathbf{A} intercambiando dos renglones (o dos columnas) de \mathbf{A} , entonces

$$\det(\mathbf{A}') = (-1) \det(\mathbf{A})$$

- Si \mathbf{A}' se obtiene de \mathbf{A} reemplazando un renglón (columna) de \mathbf{A} por el número c veces ese mismo renglón (columna), entonces,

$$\det(\mathbf{A}') = c \det(\mathbf{A}).$$

- Si \mathbf{A}' se obtiene de \mathbf{A} reemplazando un renglón (columna) de \mathbf{A} por ese renglón (columna) más algún múltiplo de un *renglón* (columna) *diferente*, entonces,

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}).$$

DEMOSTRACION

- Para precisar, supóngase que se intercambia el i -ésimo renglón \mathbf{r}_i con el j -ésimo, \mathbf{r}_j , de \mathbf{A} para obtener \mathbf{A}' . Se denominará $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}\}$ al determinante de la matriz obtenida de \mathbf{A} mediante reemplazo del i -ésimo renglón de \mathbf{A} por alguna matriz renglón \mathbf{a} , y del j -ésimo renglón de \mathbf{A} por alguna matriz renglón \mathbf{b} ; por lo tanto, el $\det(\mathbf{A})$ es precisamente $\{\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_j\}$ mientras que $\det(\mathbf{A}')$ es $\{\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i\}$. Por el corolario 4.31 d), se sabe que $\{\mathbf{a}; \mathbf{a}\} = 0$ para toda \mathbf{a} . Por el corolario 4.31 e) se sabe que

$$\{\mathbf{a} + \mathbf{b}; \mathbf{c}\} = \{\mathbf{a}; \mathbf{c}\} + \{\mathbf{b}; \mathbf{c}\}$$

y que

$$\{\mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{c}\} = \{\mathbf{a}; \mathbf{b}\} + \{\mathbf{a}; \mathbf{c}\} \quad \text{para toda } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{c}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j\} = \{\mathbf{r}_i ; \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j\} + \{\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j\} \\ &= \{\mathbf{r}_i ; \mathbf{r}_i\} + \{\mathbf{r}_i ; \mathbf{r}_j\} + \{\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_i\} + \{\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_j\} \\ &= 0 + \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}') + 0 \\ &= \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}'). \end{aligned}$$

Lo cual dice que el $\det(\mathbf{A}') = -\det(\mathbf{A})$ como se había afirmado.

- b) El resultado se obtiene fácilmente desarrollando con respecto al renglón (columna) de que se trate.
- c) Suponga que el i -ésimo renglón \mathbf{r}_i se sustituye por $\mathbf{r}_i + c\mathbf{r}_j$, en donde \mathbf{r}_j es el j -ésimo renglón de \mathbf{A} y c es un número. Al utilizar la notación de la demostración de a) se tiene que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}') &= \{\mathbf{r}_i + c\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_j\} = \{\mathbf{r}_i ; \mathbf{r}_j\} + \{c\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_j\} \\ &= \det(\mathbf{A}) + c\{\mathbf{r}_j ; \mathbf{r}_j\} \quad \text{por el corolario 4.31 d)} \\ &= \det(\mathbf{A}) + c(0) = \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

como se afirmó. ■

Las tres operaciones de renglón básicas cuyos efectos sobre los determinantes se describen en el teorema 4.32, son equivalentes a la premultiplicación por matrices elementales –véanse la definición 3.31 y el teorema 3.32. Cada matriz elemental \mathbf{E} resulta de aplicar su operación de renglón correspondiente a \mathbf{I} , cuyo determinante es claramente igual a 1; ya que los efectos de las operaciones de renglón se describieron arriba, se evaluarán fácilmente los determinantes de las matrices elementales básicas de la definición 3.31 y esta información se combinará con el teorema 4.32 como sigue:

- (4.33) **Corolario** (matrices elementales y determinantes). Sean \mathbf{E}_{ij} , $\mathbf{E}_i(c)$ y $\mathbf{E}_{ij}(c)$ las matrices elementales de la definición 3.31. Entonces,
- a) $\det \mathbf{E}_{ij} = -1$.
 - b) $\det \mathbf{E}_i(c) = c$.
 - c) $\det \mathbf{E}_{ij}(c) = 1$.
 - d) Si \mathbf{E} es cualquier matriz elemental $p \times p$ y \mathbf{A} es cualquier matriz $p \times p$, entonces

$$\det(\mathbf{EA}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{A}).$$

Las propiedades básicas de los determinantes contenidas en los teoremas del 4.30 al 4.32 dan la clave para evaluarlos. Lo más fácil será verlo mediante un ejemplo.

(4.34) **Ejemplo.** Se evaluará el determinante de la siguiente matriz A , 4×4 . En vez de desarrollarlo inmediatamente con respecto a algún renglón o columna, primero se efectuarán operaciones de renglón para crear una columna con sólo un elemento no cero en ella; el desarrollo con respecto a dicha columna será fácil. Si se suman múltiplos del renglón 2 a los otros renglones para crear ceros en la columna 1, entonces por el teorema 4.32 c) no se ha cambiado el determinante. Esto es,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \end{bmatrix},$$

el cual se desarrolla con respecto a su primera columna para obtener

$$\det A = -(1) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ahora se le podría evaluar como en el ejemplo 4.29, pero es más fácil sumar 4 veces por el segundo renglón al tercero –lo cual no cambia al determinante– de modo que la segunda columna sólo tenga un elemento no cero, y desarrollarlo fácilmente con respecto a esa columna. Esto da

$$\det A = -(1) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ -18 & 0 & 17 \end{bmatrix} = -(1)(-1) \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -18 & 17 \end{bmatrix},$$

que es igual a

$$-(1)(-1)\{(-1)(17) - (1)(-18)\} = 1.$$

Por lo tanto, el $\det A = 1$.

En el ejemplo 4.34 nunca se efectuó alguna operación de renglón que cambiara el valor del determinante; si se hubieran intercambiado dos renglones o reemplazado un renglón por un múltiplo de sí mismo, habría sido necesario rastrear su efecto en el determinante.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 12.

Determinantes, productos y no singularidad

Las propiedades básicas de los determinantes que se han presentado tienen algunas consecuencias sorprendentes y nada obvias; los siguientes dos teoremas implican resultados sorprendentes.

(4.35) **Teorema** (determinantes y no singularidad).

- A es no singular si y sólo si $\det A \neq 0$; esto es, A es singular si y sólo si $\det A = 0$;
- Si A es no singular, entonces

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A).$$

DEMOSTRACION

- (no singular $\Rightarrow \det \neq 0$) Supóngase primero que A es no singular; por el corolario 4.24, $A = E_1 E_2 \cdots E_r$, donde E_1, E_2, \dots, E_r son matrices elementales E_i . Aplicando el corolario 4.33 d) repetidamente, se obtiene

$$\det(A) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_r) \neq 0$$

Ya que el determinante de cualquier matriz elemental es distinto de cero por el corolario 4.33 a)-c).

($\det \neq 0 \Rightarrow$ no singular) Supóngase que $\det(A) \neq 0$. Si, por el contrario, A fuera singular, entonces su rango sería menor que p por el teorema clave 4.18; así, cualquier forma reducida de Gauss G tendría un renglón inferior cero. Como G se deriva de A por operaciones de renglón, se tiene que

$$E_1 E_2 \cdots E_r A = G$$

para algunas matrices elementales E_i . La aplicación repetida del corolario 4.33 d) resulta en

$$\det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_r) \det(A) = \det(G)$$

que debería ser cero ya que el renglón inferior de G sería cero. Como el determinante de cada una de las E_i no es cero, esto significaría que el $\det(A) = 0$, lo que contradice la suposición de que el $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto A no podría ser singular.

- Ya que A es no singular, por el corolario 4.24, se puede escribir que $A = E_1 E_2 \cdots E_r$ para matrices elementales E_i . Al utilizar el $\det(I_p) = 1$ y aplicar repetidamente el corolario 4.33 d), se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I_p) = \det(AA^{-1}) = \det(E_1 E_2 \cdots E_r A^{-1}) \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_r) \det(A^{-1}) \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_r) \det(A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}). \end{aligned}$$

Partiendo de que $1 = \det(A) \det(A^{-1})$ y del hecho de que el $\det(A) \neq 0$ por a), se obtiene

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A). \blacksquare$$

(4.36) **Teorema** (determinantes y productos)

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

DEMOSTRACIÓN (\mathbf{A} no singular \Rightarrow resultado) Primero, supóngase que \mathbf{A} es no singular. En este caso, el corolario 4.24 dice que $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_r$, para matrices elementales \mathbf{E}_i , y por el corolario 4.33 d) se obtiene

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_r \mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \cdots \det(\mathbf{E}_r) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_r) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})\end{aligned}$$

como se aseveró.

(\mathbf{A} singular \Rightarrow resultado) Ahora, supóngase que \mathbf{A} es $p \times p$ y singular, de modo que, por el **teorema clave 4.18**, tiene rango menor que p y por lo tanto el renglón inferior de cualquier forma reducida de Gauss \mathbf{G} debe ser igual a cero. Sea \mathbf{F} la matriz acostumbrada no singular del **teorema clave 3.34** donde $\mathbf{FA} = \mathbf{G}$. Como el renglón inferior de \mathbf{G} es cero, también lo es el renglón inferior de \mathbf{GB} ; por lo tanto, el $\det(\mathbf{GB}) = 0$ debido al corolario 4.31 b); de aquí que \mathbf{GB} es singular por el teorema 4.35. Ya que \mathbf{F} es no singular mientras que $\mathbf{F}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{FA})\mathbf{B} = \mathbf{GB}$ es singular, la matriz \mathbf{AB} debe ser singular –de otra manera $\mathbf{F}(\mathbf{AB})$ sería no singular por ser producto de matrices no singulares. Como \mathbf{AB} es singular, su determinante es igual a cero. Así,

$$\det(\mathbf{AB}) = 0 = 0 \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}),$$

como se afirmó, ya que el $\det(\mathbf{A}) = 0$. ■

La definición del producto \mathbf{AB} , el cálculo de la inversa \mathbf{A}^{-1} de \mathbf{A} , y la definición y evaluación de determinantes son todas ellas bastante complicadas. Es sorprendente que esas entes tan complicadas se combinen de un modo tan sencillo como

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad \text{y} \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

PROBLEMAS 4.5

▷ 1. Dada la matriz \mathbf{A} :

- a) Evaluar los menores M_{11} , M_{13} , M_{22} , M_{31} y M_{33} .
- b) Evaluar los cofactores A_{12} , A_{21} , A_{23} y A_{32} .
- c) Evaluar el $\det \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Evaluar los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Evaluar el determinante de

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 17 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 4. Demuestre que $\det I_p = 1$ para toda p .
- 5. Demuestre que el determinante de una matriz triangular inferior L es igual al producto de sus elementos en la diagonal principal.
- 6. Compruebe que $\det A = \det A^T$ para la matriz general A , 2×2 .
- 7. Dé los detalles de la demostración del corolario 4.33 sobre los determinantes de las matrices elementales.
- ▷ 8. Utilice el enfoque del ejemplo 4.34 para evaluar el determinante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

9. Compruebe que se obtiene el mismo resultado si se desarrolla el determinante de la siguiente matriz con respecto a cualquier renglón o con respecto a cualquier columna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 17 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- ▷ 10. Si A es antisimétrica, esto es, $A^T = -A$, y es $p \times p$, demuestre que $\det A = (-1)^p \det A$, y concluya que $\det A = 0$ si p es impar.
- 11. Sea P una matriz de permutación como en la definición 3.51 de la sección 3.7. Demuestre que $\det P = \pm 1$.
- ▷ 12. Suponga que T es una matriz cuadrada y que es o bien triangular inferior o bien triangular superior. Demuestre que el determinante de T es el producto de sus elementos de la diagonal principal.
- 13. La ecuación de una línea recta en el plano $x-y$ tiene la forma $ax + by = c$. Considere tres rectas, con ecuaciones $a_i x + b_i y = c_i$ para $i = 1, 2$ y 3 .

Demuestre que las tres rectas tienen un punto común si y sólo si el $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = 0$, en donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son 3×1 y $\langle \mathbf{a} \rangle_i = a_i$, $\langle \mathbf{b} \rangle_i = b_i$ y $\langle \mathbf{c} \rangle_i = c_i$.

14. Demuestre que los tres puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ en el plano $x-y$ son colineales (es decir, que están sobre la misma recta) si y sólo si el determinante de la siguiente matriz es igual a cero.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Considere la línea recta entre dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano $x-y$. Demuestre que la ecuación de esta recta es

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

16. Considere el círculo que pasa por los tres puntos no colineales (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) en el plano $x-y$. Demuestre que la ecuación de este círculo es

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

17. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ es la descomposición LU de \mathbf{A} que se describió en el **teorema clave 3.53** de la sección 3.7. Demuestre que el determinante de \mathbf{A} es igual a más o menos el producto de los elementos sobre la diagonal principal de \mathbf{L} .

- ▷ 18. a) Demuestre que $\det(\mathbf{A}^n) = \{\det(\mathbf{A})\}^n$ para todos los enteros no negativos n .
 b) Demuestre que si \mathbf{A} es no singular, entonces $\det(\mathbf{A}^n) = \{\det(\mathbf{A})\}^n$ para todo entero n .
19. En la sección 2.2 se vio que, en los modelos de la evolución de un sistema a través del tiempo, a veces se desea saber si existe un estado de equilibrio para el modelo; esto implica determinar si las ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ tienen una solución no cero, en donde \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ del modelo.
 a) Demuestre que $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ tiene una solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si y sólo si el $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}_p) \neq 0$.
 b) Verifique que el $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = 0$ para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 2.6.

4.6 REPRESENTACION DE INVERSAS Y SOLUCIONES MEDIANTE EL USO DE DETERMINANTES

Muchas de las aplicaciones de los determinantes vienen del hecho de que, mediante ellos, las inversas de matrices y las soluciones de ecuaciones pueden representarse en forma compacta.

Representación de inversas

Sea A una matriz $p \times p$. Supóngase por el momento que de A se deriva una nueva matriz A' como sigue: Para algunos valores específicos de i y de j , siendo $i \neq j$, se sustituye el j -ésimo renglón de A con una copia del i -ésimo renglón. A' es idéntica a A con excepción del j -ésimo renglón de A' , que es distinto. Como A' tiene dos renglones iguales –su i -ésimo y su j -ésimo– se sabe por el corolario 4.31 d) que el $\det A' = 0$. Si ahora se evalúa el $\det A'$ desarrollándolo con respecto al j -ésimo renglón, los cofactores (j, k) , A'_{jk} de A' serán idénticos a los cofactores (j, k) , A_{jk} de A ya que se ha eliminado el j -ésimo renglón –el único lugar en donde son distintas A' y A – al formar los cofactores. Recordando que los elementos $\langle A' \rangle_{jk}$ del j -ésimo renglón de A' son exactamente los elementos $\langle A \rangle_{ik}$ del i -ésimo renglón de A y desarrollando a lo largo del j -ésimo renglón de A' se obtiene:

$$(4.37) \quad \text{Si } i \neq j, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \det A' = \langle A' \rangle_{j1} A'_{j1} + \langle A' \rangle_{j2} A'_{j2} + \cdots + \langle A' \rangle_{jp} A'_{jp} \\ &= \langle A \rangle_{i1} A_{j1} + \langle A \rangle_{i2} A_{j2} + \cdots + \langle A \rangle_{ip} A_{jp}. \end{aligned}$$

En palabras: La suma de los productos de los elementos de *un* renglón de A y los cofactores de *otro* renglón de A es igual a cero. Se sabe desde luego, que la suma de los productos de los elementos de un renglón de A y los cofactores del *mismo* renglón de A es igual al $\det A$. Se puede expresar la sorprendente relación (4.37) en notación matricial introduciendo la *matriz adjunta* de A .

$$(4.38) \quad \text{Definición. La adjunta (o matriz adjunta; a veces también se le llama matriz adjugada) de una matriz } A, p \times p \text{ es aquella matriz } p \times p, \text{ denominada } \text{adj } A, \text{ que se define por } \langle \text{adj } A \rangle_{ij} = A_{ji}, \text{ en donde } A_{ji} \text{ es el cofactor } (j, i) \text{ de } A.$$

Nótese que $\langle \text{adj } A \rangle_{ij}$ es igual al cofactor (j, i) , y no al cofactor (i, j) .

$$(4.39) \quad \text{Ejemplo. suponga que } A \text{ es la matriz } 3 \times 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si se toma en cuenta la disposición en forma de tablero de ajedrez de los signos que multiplican a los menores M_{ij} para producir los cofactores A_{ij} , fácilmente se encuentra que $A_{11} = -3, A_{12} = 5, A_{13} = 4, A_{21} = -3, A_{22} = 8, A_{23} = 1, A_{31} = 0, A_{32} = -6$ y $A_{33} = -3$. La definición 4.38 entonces da

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 5 & 8 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Mediante la adjunta, se puede expresar (4.37) del siguiente modo:

$$0 = \langle \mathbf{A} \rangle_{i1} \langle \text{adj } \mathbf{A} \rangle_{1j} + \langle \mathbf{A} \rangle_{i2} \langle \text{adj } \mathbf{A} \rangle_{2j} + \cdots + \langle \mathbf{A} \rangle_{ip} \langle \text{adj } \mathbf{A} \rangle_{pj},$$

lo cual quiere decir que el elemento (i, j) del producto de \mathbf{A} por $\text{adj } \mathbf{A}$ es igual a cero si $i \neq j$. Al recordar que la suma en (4.37) es igual a $\det \mathbf{A}$ y no cero cuando $i = j$, se obtiene la primera parte del siguiente,

$$(4.40) \quad \text{Teorema (adjuntas). } \mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I} = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A}.$$

DEMOSTRACION. Ya se demostró la primera parte. La segunda es consecuencia de usar el mismo tratamiento, pero esta vez llegando a \mathbf{A}' por sustitución de la j -ésima *columna* de \mathbf{A} mediante la i -ésima *columna* de \mathbf{A} . ■

Si el $\det \mathbf{A}$ no es cero, entonces la ecuación del teorema 4.40 puede dividirse entre el $\det \mathbf{A}$ para obtener, por ejemplo,

$$\mathbf{A}\{\text{adj } \mathbf{A}\}/\det \mathbf{A} = \mathbf{I}_p.$$

O sea, que $(\text{adj } \mathbf{A})/(\det \mathbf{A})$ es \mathbf{A}^{-1} .

$$(4.41) \quad \text{Corolario (fórmula adjunta para inversas). Si } \mathbf{A} \text{ es no singular, entonces}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}.$$

Es muy importante comprender que esta representación de \mathbf{A}^{-1} es útil únicamente en *teoría*, y no al hacer *calculos computacionales en matrices grandes* debido al trabajo que requiere evaluar los determinantes involucrados en la **adj A**. Un determinante $p \times p$ se define en términos de determinantes $(p-1) \times (p-1)$ y así sucesivamente, lo cual implica que el trabajo necesario para evaluar el determinante de una matriz $p \times p$ a partir de su definición es proporcional a

$$p! = p(p-1)(p-2) \cdots (2)(1).$$

Entonces, encontrar la inversa de este modo, requiere de trabajo que se comporta como $p!$ (en realidad, casi 2.7 veces $p!$), mientras que con la eliminación de

Gauss se llega a la inversa con trabajo que se comporta como p^3 . La tabla que a continuación se presenta deberá dejar claro por qué se prefiere el método de la eliminación de Gauss.

(4.42)

$p =$	1	2	3	4	5	6	7	10
$p^3 \approx$	1	8	27	64	125	216	343	1000
$(2.7)p! \approx$	1	5	16	65	324	1944	13,608	9,797,760

(4.43)

Ejemplo. Considere la matriz \mathbf{A} cuya adjunta se encontró en el ejemplo 4.39. Por medio de multiplicaciones se verifica que su inversa está dada correctamente de acuerdo al corolario 4.41 por,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 5 & 8 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ahora podrá resolver los problemas de 1 al 11.

Representación de soluciones

El corolario 4.41 nos permite expresar a \mathbf{A}^{-1} en términos de determinantes. Ya que se puede expresar la solución de sistemas de ecuaciones (que tengan matrices de coeficientes no singulares) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, como $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, se puede fácilmente representar a \mathbf{x} con determinantes. El resultado se conoce como la *Regla de Cramer*.

(4.44) **Teorema** (La Regla de Cramer). Sea \mathbf{A} no singular. Los elementos $x_i = \langle \mathbf{x} \rangle_i$ en la solución a las ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ están dados por $x_i = \Delta_i / \Delta$, en donde Δ es el determinante de \mathbf{A} y Δ_i es el determinante de la matriz \mathbf{A}_i que se forma al sustituir la i -ésima columna de \mathbf{A} como la matriz \mathbf{b} .

DEMOSTRACION. Véase el problema 16. ■

Se repetirá lo señalado después del corolario 4.41: La representación por determinantes es *computacionalmente ineficiente*; la regla de Cramer es útil teóricamente como un modo de representación pero no para el cálculo de soluciones.

(4.45)

Ejemplo. Considérese una vez más la matriz \mathbf{A} del ejemplo 4.39, cuyo determinante es igual a -9 . El segundo elemento $x_2 = \langle \mathbf{x} \rangle_2$ de la solución a

$\mathbf{Ax} = [2 \ 0 \ 3]^T$ se calcula, de acuerdo con la regla de Cramer:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_2}{-9}, \quad \text{donde } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por cálculo directo resulta que el $\det \mathbf{A}_2 = -8$ y por lo tanto, $x_2 = -8/(-9) = \frac{8}{9}$.

PROBLEMAS 4.6

- ▷ 1. Encuentre $\text{adj } \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A})$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Detalle la demostración de la segunda parte del teorema 4.40 sobre la matriz adjunta.
 3. Demuestre que si \mathbf{A} es singular, entonces $\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = \mathbf{0}$, y que $(\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{0}$; dé un ejemplo de una matriz \mathbf{A} singular que tenga $\text{adj } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ (para demostrar que el resultado de este problema es cierto por razones de mayor importancia).

- ▷ 4. Usar la adjunta para encontrar la inversa, si existe, de cada una de las matrices siguientes.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Utilice la adjunta a fin de encontrar una fórmula para la inversa de la matriz general 2×2 no singular.
 6. Dé un ejemplo de una matriz $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ para la que $\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
 7. Demuestre que $\det(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^{p-1}$ si \mathbf{A} es $p \times p$.
 8. Los determinantes pueden calcularse mucho más eficientemente usando la eliminación de Gauss que usando la definición de determinante.
 a) Demuestre que el determinante de una matriz no singular es igual al producto positivo o negativo de los pivotes que se usaron en la eliminación de Gauss para producir una forma reducida de Gauss a partir de la matriz.
 b) Utilice lo enunciado en la sección 3.8 ($p^3/3 - p/3$ multiplicaciones o divisiones y $p^3/3 - p^2/2 + p/6$ sumas o restas) para producir una forma reducida de Gauss de una matriz $p \times p$ usando el de a).

- ▷ **9.** Los determinantes son, en cierto sentido, inherentemente difíciles de evaluar debido a que sus valores pueden ser más grandes o muy pequeños para una matriz de números de magnitud moderada.
- Si A es 100×100 —no muy grande en las aplicaciones modernas—demuestre que $\det 2A = 2^{100} \det A$; aunque A y $2A$ tengan elementos de magnitud comparable, el valor de sus determinantes difiere enormemente ($2^{100} \approx 10^{30}$).
 - Los valores de los determinantes también pueden ser en extremo sensibles a cambios en los coeficientes; para visualizar esto, evalúe los determinantes de las dos matrices de abajo y diga cómo se compara la magnitud del cambio en el determinante con el cambio en la matriz:

$$\text{cambie } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{10} - 1 & 10^{10} \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 10^{10} - 1 & 10^{10} \end{bmatrix}.$$

- 10.** Además de las dificultades citadas en el problema 9, los determinantes causan a menudo dificultades computacionales debido a *desbordamientos* numéricos. Recuerde de la sección 3.6 que las computadoras almacenan números como una fracción por 10 elevada a una potencia y que hay un límite del tamaño de este exponente; en muchas microcomputadoras, por ejemplo, estaría entre -308 y $+308$. Suponga que A es una matriz 100×100 en una forma reducida de Gauss y que 50 de sus elementos en la diagonal principal son iguales a 10^7 , y los otros 50 son 10^{-7} .
- Demuestre que $\det A = 1$.
 - Demuestre que, si los *primeros* 50 elementos son los que valen 10^7 , entonces se producirá un desbordamiento si se trata de multiplicar los elementos diagonales (en orden) para calcular el determinante. El exponente será demasiado grande para que lo almacene la computadora.

- 11.** Demuestre que la adjunta de una matriz singular es singular.
▷12. Use la regla de Cramer para resolver

$$2x_1 - 4x_2 = 8$$

$$3x_1 + x_2 = 5.$$

- 13.** Use la regla de Cramer para encontrar x_2 resolviendo
- $$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$
- $$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
- $$x_1 + 4x_2 + x_3 = 6.$$

- ▷ **14.** Suponga que x_0 resuelve $Ax = b$ para una matriz no singular A . Si b se midió en un experimento y está sujeto a errores de magnitud ϵ en su i -ésimo

elemento se quiere conocer el efecto que tiene en la exactitud de x . Para hacer esto, suponga que \mathbf{b} cambia a $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \epsilon \mathbf{e}_i$.

a) Demuestre que \mathbf{x}_0 cambia en $\epsilon \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i$.

b) Use la regla de Cramer o la matriz adjunta para encontrar una expresión en términos de ϵ y de determinantes para el cambio en $\langle \mathbf{x}_0 \rangle_j$.

15. El problema 14 examinó cómo cambia una solución cuando cambia el lado derecho; ahora se considerará cómo varía la solución al cambiar el coeficiente de la matriz, tal como cuando está sujeto a error de medición. Suponga que \mathbf{A} es no singular y que \mathbf{x}_0 resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Suponga que $\langle \mathbf{A} \rangle_{11}$ cambia a $\langle \mathbf{A} \rangle_{11} + \epsilon$.
- a) Use la regla de Cramer para visualizar cómo cambia $\langle \mathbf{x}_0 \rangle_1$ en función de ϵ .
- b) Use la regla de Cramer para visualizar cómo cambia $\langle \mathbf{x}_0 \rangle_2$ en función de ϵ .

16. Demuestre la regla de Cramer.

4.7 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 4.7

- ▷ 1. Suponga que \mathbf{B} se forma de manera obvia partiendo de los elementos de ciertos renglones y columnas seleccionados de \mathbf{A} . Demuestre que el rango de \mathbf{B} es menor que o igual al de \mathbf{A} .
2. Si \mathbf{R} tiene rango r y \mathbf{S} tiene rango s , demostrar que, si \mathbf{A} tiene la forma que se muestra a continuación, entonces \mathbf{A} tiene rango $r + s$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

3. Demuestre que cada matriz de rango k puede escribirse como una suma de k matrices de rango 1.
4. Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ de rango 1. Demuestre que $\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A}$ para algún número t .
- ▷ 5. Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ de rango 1. Demuestre que hay una matriz columna $p \times 1$, \mathbf{c} , y una matriz renglón $1 \times p$, \mathbf{r} , tales que $\mathbf{A} = \mathbf{cr}$.
6. El rango es un concepto difícil de manejar computacionalmente debido a que pequeños cambios en una matriz –digamos errores de medición– pueden cambiar su rango (por un número entero, naturalmente). Considere la matriz

$$\mathbf{A}_\epsilon = \begin{bmatrix} 10^7 + \epsilon & 10^7 - \epsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Demuestre que el rango de A_ϵ es igual a 2 para $\epsilon \neq 0$, pero que el rango de A_0 es igual a 1.
- b) Suponga que –como en muchas microcomputadoras– se hacen los cálculos en aritmética de punto flotante de 16 dígitos (véase la sección 3.6). Demuestre que, mientras que ϵ sea cuando menos unos 10^{-8} en magnitud, la versión *calculada* de A_ϵ también tiene rango 2 igual que el de la verdadera A_ϵ . Demuestre que, para ϵ menor que 10^{-10} en magnitud, la A_ϵ *calculada* tiene rango 1 en lugar de 2 para la A_ϵ verdadera, con ϵ diferente de cero.
- c) Los programas de computadora para calcular el rango de la A_ϵ calculada, bien pueden presentar dificultades en el cálculo correcto del rango de 2 para ϵ mayor que 10^{-8} . Utilice el MATLAB o software similar para experimentar el cómputo del rango de la A_ϵ calculada, para un intervalo de valores de ϵ desde 10^{-1} hasta 10^{-9} .
- ▷ 7. Considere la matriz en *bloques diagonales* $A = \text{diag}(A_{11} \cdots A_{rr})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix},$$

en donde los bloques diagonales A_{ii} no necesariamente deben ser cuadrados. Demuestre que A tiene una inversa derecha R si y sólo si todos los bloques A_{ii} tienen inversas derechas R_{ii} , y que R puede formarse a partir de tales R_{ii} de forma lógica.

8. Mencione y demuestre los resultados para inversas izquierdas y para inversas bilaterales de manera semejante al problema 7.
9. Suponga que A es $p \times q$ y que $Ax = Ay$ para matrices columna $q \times 1$ x y y . Esto implica que $x = y$. Demuestre que esto es equivalente a la condición de que el rango k de A satisface la ecuación $k = q \leq p$.
- ▷ 10. Defina d_p como el determinante de la matriz $p \times p$, A_p , tal que sus elementos $\langle A_p \rangle_{ii} = a_i$ para toda i , $\langle A_p \rangle_{i,i-1} = 1$ para toda i , $\langle A_p \rangle_{i,i+1} = 1$ para toda i , y todos los demás $\langle A_p \rangle_{ij} = 0$.
- a) Demostrar que, para $p \geq 3$,

$$d_p = a_p d_{p-1} - d_{p-2}.$$

- b) Suponga que $a_i = 2 \cos \theta$ para toda i ; demuestre que

$$d_p = \csc \theta \sin(p + 1)\theta \text{ para toda } p.$$

- ▷ 11. Demuestre que el *determinante de Vandermonde* $V(x_1, x_2, \dots, x_p)$ es igual al producto de todos los términos de la forma $(x_j - x_i)$ para $i < j$, esto es,

$$V(x_1, \dots, x_p) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 1 & x_p & x_p^2 & \cdots & x_p^{p-1} \end{bmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

12. Demuestre que el $\det \mathbf{A}$ es real si \mathbf{A} es hermitiana, $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.
13. Demuestre que el área del triángulo con vértices (x_i, y_i) , siendo $i = 1, 2$ y 3 , numerados en sentido inverso a las manecillas del reloj, es igual a $(\det \mathbf{A})/2$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 14. Encuentre una representación como las de los problemas 15 y 16 de la sección 4.5 para la curva (elipse, parábola, hipérbola, o línea recta) con ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

que pase por cinco puntos dados (x_i, y_i) siendo $i = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

15. Los planetas viajan alrededor del Sol en órbitas que casi son elipses. En determinadas unidades con respecto a ciertos ejes coordenados cuyo origen está en el Sol, se observa que un cuerpo pasa por los puntos $(0.6, 2.0)$, $(1.0, 2.3)$, $(1.4, 2.4)$, $(2.0, 2.5)$, y $(2.4, 2.4)$. Por medio del problema 14, encuentre la ecuación de la elipse que pasa a través de esos cinco puntos.
16. Utilice el MATLAB o software semejante para calcular los cofactores del primer renglón del determinante del problema 15 y con ello encuentre la ecuación de la elipse de un modo más adecuado; grafique esta elipse localizando varios puntos.
17. Considere la siguiente matriz como un indicio de la dificultad de la confeción de programas que puedan evaluar los determinantes con una exactitud relativamente excelente.

$$\mathbf{B}_\epsilon = \begin{bmatrix} 10^7 + \epsilon & 10^7 - \epsilon \\ 1/\epsilon & 1/\epsilon \end{bmatrix}$$

Para varios valores diferentes de cero de ϵ .

- a) Demuestre que el $\det \mathbf{B}_\epsilon = 2$ para toda $\epsilon \neq 0$.
- b) Sería ideal contar con programas de cómputo que nos permitieran calcular el $\det \mathbf{B}_\epsilon$ con un error *relativo* pequeño, es decir con un error que fuera pequeño comparado con el valor verdadero de 2 ; en las microcomputadoras

ras con aritmética de 16 dígitos, se esperaría obtener el $\det \mathbf{B}_\epsilon = 2$ correcto en varios decimales. Use el MATLAB o software análogo para ver la calidad de exactitud que produce en el $\det \mathbf{B}_\epsilon$, para un intervalo de valores de ϵ desde 10^{-1} hasta 10^{-9} . La dificultad aquí, como a menudo ocurre con el cálculo de determinantes, es que se está tratando de producir un número de magnitud moderada partiendo de números muy grandes o muy pequeños.

- ▷ **18.** Demuestre que $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es no singular si \mathbf{A} es $p \times q$, real y tiene rango q .

5

Vectores y espacios vectoriales

En este capítulo se continuará con el desarrollo de conceptos teóricos fundamentales y de herramientas prácticas necesarias para entender cómo se aplica el álgebra lineal. A diferencia de los capítulos anteriores, éste tiene un tinte geométrico único. Como en el caso de las operaciones de renglón y la eliminación de Gauss de los capítulos 3 y 4, un concepto único y fundamental domina este capítulo: la dependencia lineal. El número de teoremas clave refleja la naturaleza fundamental del material: 5.12, 5.43, 5.45, 5.50, 5.57, 5.75 y 5.82, así como los corolarios 5.29, 5.31, 5.39 y 5.86.

5.1 INTRODUCCION; VECTORES GEOMETRICOS

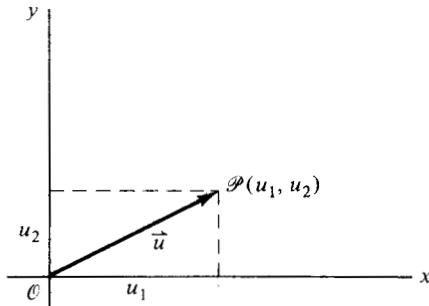
Hasta ahora el desarrollo ha sido enteramente *algebraico*: se han sumado y multiplicado matrices, se han resuelto ecuaciones, y así sucesivamente. Nada se ha presentado que posea naturaleza *geométrica*: no se han medido ángulos, no se han calculado longitudes, ni nada por el estilo. Pero existe un planteamiento geométrico natural de las matrices que es al menos tan importante, tanto teórica como prácticamente, como el planteamiento algebraico; y, no sólo puede aplicarse la geometría al estudio de las matrices, sino que las matrices se pueden usar para estudiar otros objetos geométricos.

La noción de que hay un contenido geométrico en las matrices puede parecer bastante extraña después de todo, ¿cómo pueden tener relación las matrices rectangulares de números con líneas y ángulos? En esta sección, primero se indicará el lado geométrico natural de ciertas matrices. Para demostrar el camino inverso –el uso de matrices para estudiar objetos geométricos– se examinarán brevemente algunas ideas geométricas y se demostrará cómo se pueden usar las matrices para su representación; este último punto de vista es importante debido a que ejemplifica el camino a seguir después, cuando se usen matrices columna para representar entidades abstractas llamadas *vectores*.

La geometría natural de las matrices reales 2×1

Después de las matrices 1×1 , seguramente las matrices más sencillas son aquéllas con dos elementos reales; para especificar, se considerarán las matrices 2×1 reales $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$. Existe así, un concepto geométrico –un *vector*– asociado naturalmente con \mathbf{u} . Considere un plano con un sistema estándar de coordenadas $x-y$, y designe a \mathcal{O} como el origen. Trace una recta desde el origen \mathcal{O} hasta el punto $\mathcal{P}(u_1, u_2)$ que tenga a u_1 por la coordenada x , y a u_2 por la coordenada y , con una punta de flecha en \mathcal{P} apuntando en la dirección de \mathcal{O} hacia \mathcal{P} . A esto se le llamará el *vector geométrico* asociado con \mathbf{u} , y se designará con una \vec{u} . Ver (5.1)

(5.1)

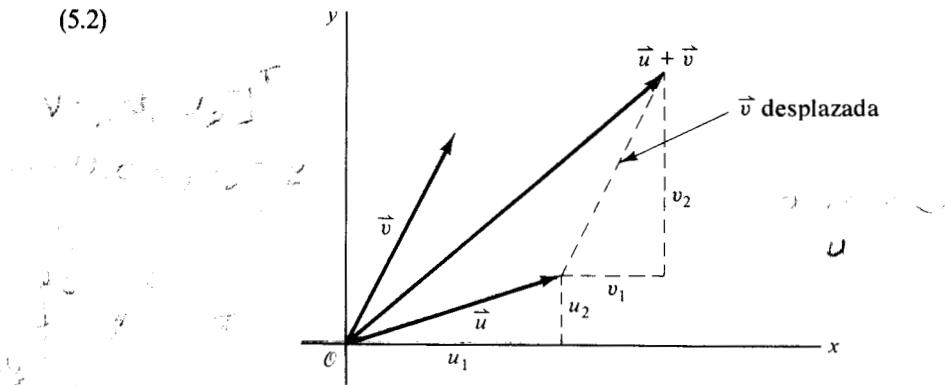


Para que esta correspondencia $\mathbf{u} \leftrightarrow \vec{u}$ entre matrices y vectores geométricos tenga sentido, las operaciones entre matrices deberán tener alguna interpretación geométrica. Considere, por ejemplo la suma:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 \ u_2]^T + [v_1 \ v_2]^T = [u_1 + v_1 \ u_2 + v_2]^T.$$

Esta tiene una interpretación geométrica sencilla, como lo revela la figura (5.2): para “sumar” los vectores geométricos \vec{u} y \vec{v} que corresponden a las matrices \mathbf{u} y \mathbf{v} , mueva una copia de \vec{v} paralela a \vec{v} de modo que su “cola” descance en la “cabeza” de \vec{u} , y sea el vector geométrico que conecta \mathcal{O} con la “cabeza” de esta \vec{v} desplazada, lo que se llama la suma $\vec{u} + \vec{v}$.

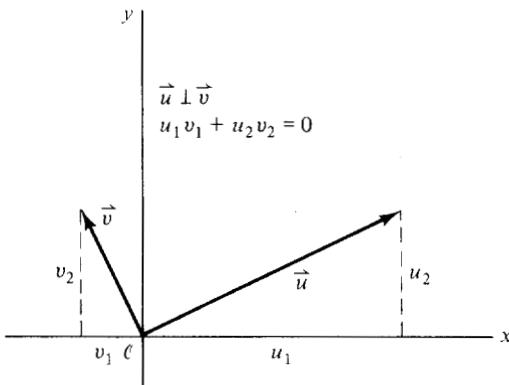
(5.2)



Como lo muestra (5.2), esta definición significa que $\vec{u} + \vec{v}$ corresponde a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, de modo que verdaderamente refleja el álgebra de la suma de matrices. Pero también es una definición geométricamente natural para la suma de \vec{u} y \vec{v} : si se piensa que los vectores geométricos representan desplazamientos (esto es, caminar una cierta distancia en una cierta dirección), entonces la definición dada significa que $\vec{u} + \vec{v}$ representa el seguimiento del desplazamiento de \vec{u} mediante el desplazamiento de \vec{v} .

Otras operaciones matriciales también tienen un significado geométrico natural y algunas de ellas son sorprendentes. Por ejemplo, el producto de matrices $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ está fundamentalmente relacionado con *longitud* y *ángulo*. Como se puede ver a partir de (5.1), la longitud física de \vec{u} puede calcularse con el teorema de Pitágoras para dar $(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$. Como $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = [u_1^2 + u_2^2]$ se puede (con poca precisión) escribir $(\mathbf{u}^T\mathbf{u})^{1/2}$ para representar la longitud de \vec{u} . También, la condición $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [0]$ significa que \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares. Para visualizar esto, observe que la recta que pasa por \mathcal{O} y $\mathcal{P}(u_1, u_2)$ tiene pendiente u_2/u_1 , y de modo semejante la que pasa por \mathcal{O} y $\mathcal{P}(v_1, v_2)$; tiene pendiente v_2/v_1 ; esas rectas serán perpendiculares si el producto $(u_2/u_1)(v_2/v_1)$ de sus pendientes es igual a -1 , lo que fácilmente resulta en $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Véase a continuación (5.3).

(5.3)



Estas pocas observaciones han demostrado que hay un contenido geométrico natural en las matrices y las operaciones que se efectúan con ellas. A continuación se tomará el punto de vista inverso: se introducirán nociones geométricas y después se usarán matrices para describirlas –como se hará con mayor frecuencia adelante en este capítulo.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 9.

Vectores geométricos tridimensionales

Los vectores geométricos que se están examinando son fáciles de imaginar porque quedan en un plano y pueden dibujarse con facilidad en papel para

gráficas. Sin embargo, el mundo físico es (cuando menos) tridimensional; se necesita entonces tratar con vectores geométricos en este mundo físico.

Considere un punto \mathcal{O} fijo en el espacio físico como punto de referencia. Por vector geométrico (tridimensional) \vec{u} se entiende un segmento (dirigido) de recta con su “cola” en \mathcal{O} y su “cabeza” en algún punto \mathcal{P} del espacio; la dirección es de \mathcal{O} hacia \mathcal{P} y se indica usualmente apuntando la flecha en esa dirección hacia \mathcal{P} . Véase (5.4)

(5.4)



Puede pensarse que esos vectores geométricos representan, por ejemplo, desplazamientos de cierta distancia en cierta dirección desde \mathcal{O} hasta \mathcal{P} . Cuando $\mathcal{P} = \mathcal{O}$, este vector geométrico cero simboliza con $\vec{0}$.

Dos operaciones comunes con vectores geométricos son:

- (5.5) 1. *Multiplicación de un vector geométrico \vec{u} por un escalar (un número real) k .* El resultado se representa como $k\vec{u}$. Si $k = 0$, entonces $k\vec{u}$ es igual a $\vec{0}$. Si $k > 0$, entonces $k\vec{u}$ está en la misma dirección que \vec{u} y su longitud es igual a k veces la longitud de \vec{u} . Si $k < 0$, entonces $k\vec{u}$ está en la dirección opuesta a \vec{u} y su longitud es igual a $|k| (= -k)$ veces la de \vec{u} .
- (5.6) 2. *Suma de dos vectores geométricos \vec{u} y \vec{v} .* El resultado se simboliza como $\vec{u} + \vec{v}$. Al combinar los desplazamientos se obtiene $\vec{u} + \vec{v}$: una copia de \vec{v} se traslada paralelamente a \vec{v} de manera que su “cola” descance en la “cabeza” de \vec{u} , entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector geométrico desde \mathcal{O} hasta la “cabeza” de esta \vec{v} desplazada.

Esas operaciones con vectores geométricos tienen propiedades importantes, por ejemplo:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (\text{commutativa de la suma})$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad (\text{identidad de la suma})$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad (\text{asociativa de la suma})$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad (\text{distributividad})$$

y así sucesivamente. Las operaciones también permiten la descripción de conceptos más profundos.

Se ha llamado “tridimensional” al espacio físico; ello se debe esencialmente a que se requiere de tres números (coordenadas) para especificar la localización de cualquier punto en el espacio con respecto a algún punto de referencia. De

modo semejante, una recta es *unidimensional* porque se requiere de *dos* números. (Más adelante en este capítulo hay una definición precisa de dimensión que formaliza este concepto intuitivo.)

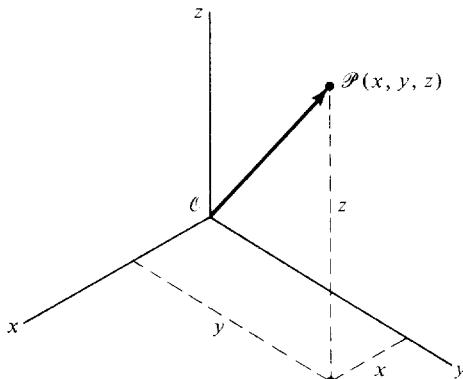
Si se piensa en todos los múltiplos posibles $\alpha\vec{u}$ de un vector geométrico \vec{u} por escalares arbitrarios α , se tendrá una recta –un *subespacio unidimensional*– en un espacio tridimensional. Igualmente, si \vec{u} y \vec{v} no están ni en la misma dirección ni en la opuesta entonces todos los vectores geométricos de la forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para escalares arbitrarios α y β forman un plano –un *subespacio de dos dimensiones*– en el espacio tridimensional. Así las operaciones con vectores geométricos permiten describir y discutir los conceptos más profundos de rectas y planos. Los vectores geométricos \vec{x} en el plano que se acaba de definir son de la forma $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, y se dice que \vec{x} es una *combinación lineal* de \vec{u} y \vec{v} y también que \vec{x} es *linealmente dependiente de* \vec{u} y \vec{v} .

Análogamente, se dice que un vector geométrico \vec{x} es *linealmente dependiente* de otro \vec{y} cuando $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ para algún escalar α . Se dice que el conjunto $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ es un *conjunto linealmente dependiente* cuando \vec{x} es *linealmente dependiente de* \vec{y} , o \vec{y} es *linealmente dependiente de* \vec{x} ; esto simplemente significa que \vec{x} y \vec{y} apuntan en la misma dirección o en dirección contraria (o que alguno de ellos es igual a $\vec{0}$). Esta terminología es útil para hablar de rectas y planos formados por todos los vectores geométricos de la forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$: Todos esos vectores geométricos forman una recta si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es *linealmente dependiente*, pero forman un plano si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es *linealmente independiente* (es decir, no *linealmente dependiente*).

No se continuará con el desarrollo de la geometría tridimensional; las ideas que se introdujeron deberán guardarse en la mente como motivación y como ejemplo de los conceptos de las siguientes secciones. Sin embargo, antes de proseguir, se indicará cómo pueden usarse las matrices para estudiar los conceptos geométricos que se han presentado.

Escoja un sistema de tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares con su origen en el punto de referencia O ; llame a éstos ejes x , y y z . Entonces cualquier punto P en el espacio puede especificarse por tres coordenadas, dando $P(x, y, z)$. Véase (5.7).

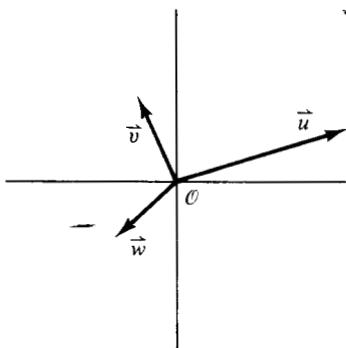
(5.7)



Cualquier vector geométrico \vec{u} está determinado por el punto P en su "cabeza"; ya que P queda determinado por las tres coordenadas que lo especifican, se puede decir que \vec{u} se describe por esas tres coordenadas x, y, z . Si se colocan esas tres coordenadas en una matriz columna 3×1 $\mathbf{u} = [x \ y \ z]^T$, entonces la matriz \mathbf{u} representa al vector geométrico \vec{u} . Como se encontró al principio de esta sección para vectores bidimensionales, si \mathbf{u} y \mathbf{v} corresponden a \vec{u} y \vec{v} , entonces $\alpha\mathbf{u}$ corresponde a $\alpha\vec{u}$, y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a $\vec{u} + \vec{v}$. Esto significa que las expresiones matriciales de la forma $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pueden usarse, por ejemplo, para describir rectas y planos. Por consideraciones semejantes, las dudas sobre si los planos son paralelos pueden tratarse en términos de la existencia de soluciones a sistemas de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De este modo contamos –para ocuparnos de problemas geométricos– con todas las poderosas herramientas matriciales desarrolladas en capítulos anteriores. Esto será igualmente cierto para los problemas geométricos que se encontrarán en las secciones siguientes a medida que se desarrollen las nociones abstractas –pero extremadamente aplicables– de vectores en general y de espacios vectoriales.

PROBLEMAS 5.1

1. Para los vectores geométricos \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} mostrados abajo, encontrar geométricamente
 - a) $\vec{u} + \vec{v}$
 - b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
 - c) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
 - d) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



2. Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} respectivamente las matrices $[1 \ 2]^T$, $[-1 \ 3]^T$ y $[0 \ 0]^T$. Encuentre las matrices 2×1 que correspondan a:
 - a) $\vec{u} + \vec{v}$
 - b) $\vec{u} + \vec{w}$
 - c) $\vec{v} + \vec{w}$
 - d) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$
3. Demuestre geométricamente que si \vec{u} , \vec{v} , y \vec{w} son vectores geométricos bidimensionales, entonces $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

- ▷ 4. Una lancha de motor va cruzando en línea recta un río, pero es arrastrada por la corriente. Sin la corriente, la velocidad del bote sería de 5 millas/hora cruzando el río directamente; sin el motor, la lancha sería arrastrada por la corriente a una velocidad de 3 mi/h río abajo. Encuentre la velocidad de la lancha de motor al cruzar el río. (Suponga que las velocidades se representan por vectores geométricos.)
5. Suponga que se tienen la lancha de motor y el río del problema 4. Encuentre el ángulo hacia el cual debería apuntar la lancha río arriba en la corriente para que su movimiento real fuera perpendicular al río.
6. La *velocidad* de un avión es su velocidad en aire *tranquilo*, mientras que la *velocidad respecto a la Tierra* es su velocidad real que resulta de los efectos combinados de la velocidad, la dirección del avión y la velocidad del viento. Suponga que la velocidad de un avión es de 140 mi/h. Si el avión apunta hacia el oeste y el viento sopla hacia el norte a 20 mi/h, encuentre la velocidad respecto a la Tierra y la dirección del movimiento del avión.
- ▷ 7. Un avión hizo tres vuelos a toda máquina en tres distintas direcciones. Observadores en Tierra notaron que 1) se movía hacia el oriente a una velocidad respecto a la Tierra (ver problema 6) de 160 mi/h; 2) se movía hacia el occidente a una velocidad respecto a la Tierra de 120 mi/h; y 3) se movió hacia el norte a una velocidad respecto a la Tierra de 160 mi/h. Suponiendo que la velocidad y dirección del viento fueron las mismas en los tres casos, encuentre la velocidad del avión así como la dirección y velocidad del viento.
8. Parece razonable que $2\vec{u}$ represente a $\vec{u} + \vec{u}$ siendo \vec{u} un vector geométrico. Dé la descripción geométrica para generar a $2\vec{u}$ partiendo de \vec{u} .
- ▷ 9. Si \vec{u} es un vector geométrico bidimensional y corresponde a la matriz \mathbf{u} 2×1 , se podría definir a $\alpha\vec{u}$ para α real como el vector geométrico que corresponde a $\alpha\mathbf{u}$. Describa geométricamente la creación de $\alpha\vec{u}$ partiendo de \vec{u} .
10. Mediante la geometría, demuestre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todos los vectores tridimensionales geométricos \vec{u} y \vec{v} .
11. Suponga que \vec{u} y \vec{v} son vectores geométricos colineales en tres dimensiones (esto es, que quedan en la misma recta que pasa por el origen). Demuestre que el conjunto de todos los vectores geométricos de la forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ es una línea recta a medida que α y β recorren los números reales.
12. Suponga que \vec{u} y \vec{v} son los vectores geométricos correspondientes a
- $$\mathbf{u} = [4 \quad -2 \quad -1]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = [-4 \quad 0 \quad 3]^T.$$
- a) Encuentre las coordenadas \mathbf{w} de todos los vectores \vec{w} de la forma $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ donde α y β recorren todos los números reales.
- b) Encuentre una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ que se satisfaga por los elementos x , y y z de la matriz $\mathbf{w} = [x \quad y \quad z]^T$, cuando \mathbf{w} corresponde a \vec{w} como en el inciso a).

13. Sea $\vec{0}$ el vector geométrico correspondiente a $[0 \ 0 \ 0]^T$. Demuestre que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ para todos los vectores geométricos \vec{u} .

5.2 CONCEPTO GENERAL DE ESPACIOS VECTORIALES

La sección anterior describió a los vectores (geométricos) como entes geométricos en el espacio físico. Esta sección examina lo que es realmente el concepto central de vectores y de espacios –como rectas o planos– de vectores. Para esto, se definirá un modelo abstracto de un espacio vectorial y se indicará cómo puede usarse esta noción abstracta para desarrollar conceptos y propiedades que sean válidas en todos los casos concretos de espacios vectoriales. Desde el punto de vista introductorio, la propiedad básica de los vectores es la de que se pueden formar combinaciones lineales de ellos –como $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ de la sección anterior. Hay aplicaciones importantes en las que se necesitan formar combinaciones lineales semejantes de entes que no sean los vectores geométricos \vec{u} ; el planteamiento descubrirá las propiedades comunes a *todas* esas situaciones.

Vectores

Se definirá un espacio vectorial de tal modo que se reflejen todas las propiedades esenciales y comunes a todos los casos especiales importantes.

- (5.8) **Definición.** Un *aspecto vectorial* es un conjunto no vacío \mathcal{V} de entes llamados *vectores* que, junto con sus números asociados, llamados *escalares*, satisface las condiciones enunciadas abajo. Un *aspecto vectorial real* es un espacio vectorial en el que los escalares comprenden el conjunto \mathbb{R} de números reales, y un *espacio vectorial complejo* es un espacio vectorial en el cual los escalares comprenden el conjunto \mathbb{C} de los números complejos.
1. Hay una operación llamada *suma de vectores* que asocia a cada par de vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} , otro vector, llamado su *suma* y representado por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, que satisface:
 - a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ para todos los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} .
 - b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ para todos los vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} .
 - c) En \mathcal{V} existe un vector único, llamado *cero*, y representado por $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todos los vectores \mathbf{x} .
 - d) Para cada vector \mathbf{x} hay un vector único en \mathcal{V} , llamado su *negativo* y representado por $-\mathbf{x}$, tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, y $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 2. Existe una operación llamada *multiplicación por un escalar* que asocia con cada escalar α y con cada vector \mathbf{x} en \mathcal{V} un vector único, llamado el *producto* de α y \mathbf{x} , representado por $\alpha\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}\alpha$ que satisface:
 - a) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ para todos los escalares α y β y todos los vectores \mathbf{x} .
 - b) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ para todos los escalares α y β y todos los vectores \mathbf{x} .

- c) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ para todos los escalares α y todos los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} .
3. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todos los vectores \mathbf{x} .

Es necesario hacer algunas observaciones con respecto a la definición 5.8.

1. Hay mucha redundancia en la definición: la segunda mitad de 1) c) por ejemplo, es consecuencia de la primera mitad y de 1) a); se prefiere entonces plantear explícitamente tales implicaciones sacrificando algo de elegancia matemática.
2. Se han usado los símbolos conocidos (+, − y 0) de una manera nueva; ¡incluso se ha usado el signo + en más de una forma dentro de la misma ecuación! Observe en 2) b), por ejemplo, que el signo “+” entre α y β se refiere a la suma como se define entre *escalares*, mientras que el signo “+” que aparece entre $\alpha\mathbf{x}$ y $\beta\mathbf{x}$ se refiere a la suma como se define para los *vectores* en \mathcal{V} . Es preferible alguna posible confusión a una complicada proliferación de símbolos distintos para el signo +; el significado deberá quedar siempre claro por el contexto. Como muestran los siguientes ejemplos, la definición del signo + entre vectores en las aplicaciones, a menudo es tan cercana a su concepto acostumbrado entre los números que apenas se nota la diferencia. Como en el caso de las matrices, se definirá $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

- (5.9) **Ejemplo.** Cada uno de los siguientes ejemplos es un espacio vectorial con el conjunto adecuado \mathbb{R} o \mathbb{C} de escalares, con la definición adecuada de suma de vectores y de multiplicación por un escalar en cada caso.

- \mathbb{G}^3 , el espacio vectorial real de todos los vectores geométricos en el espacio físico tridimensional con la suma de vectores y multiplicación por un escalar, que se definió en la sección anterior.
- \mathbb{R}^p , el espacio vectorial real de todas las matrices columna con coeficientes reales de $p \times 1$ con la suma de vectores, en este caso la suma matricial y la multiplicación por un escalar como es costumbre para las matrices.
- \mathbb{C}^p , el espacio vectorial complejo de todas las matrices columna con coeficientes complejos de $p \times 1$, con las mismas operaciones que se mencionan en \mathbb{R}^p .
- \mathcal{S} , el espacio vectorial real de todas las sucesiones infinitas de reales

$$\{x_i\} = x_1, x_2, \dots,$$

con $\{x_i\} + \{y_i\}$ definidas como $\{x_i + y_i\}$ y de igual modo para $r\{x_i\}$. Este no es un espacio vectorial muy útil a menos que se impongan restricciones para el comportamiento de x_i cuando i tiende a infinito.

- e) $C^{(k)}[a, b]$, el espacio vectorial real de todas las funciones con valor real que sean continuas, junto con sus primeras k derivadas, en el intervalo

cerrado $[a, b]$. Cuando $k = 0$, este espacio de funciones continuas a menudo se denota con $C[a, b]$. La suma de vectores y la multiplicación por escalares se definen de manera lógica: si \mathbf{x} y \mathbf{y} son vectores (esto es, funciones) en $C^{(k)}[a, b]$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es la función:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) \quad \text{para } t \text{ en } [a, b].$$

- f) \mathcal{P} , el espacio vectorial real de polinomios de grado arbitrario que tienen coeficientes reales. Las operaciones se definen como en $C[a, b]$.
- g) \mathcal{P}^k , el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a $k - 1$ con coeficientes reales. Las operaciones se definen como en el caso de \mathcal{P} .
- h) El espacio vectorial real de todas aquellas funciones $y(x)$ en $C^{(n)}[a, b]$ que resuelven las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = 0.$$

Las operaciones se definen como en el caso de $C[a, b]$.

- i) El espacio vectorial complejo de todas las funciones continuas de valor complejo $y(x)$ que resuelven la ecuación integral

$$\int_0^a K(x, t)y(t) dt + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

donde $K(x, t)$ es continua y K y λ están dadas. Las operaciones son las acostumbradas para funciones.

- j) Suponga que ambos, \mathcal{V} y \mathcal{W} son espacios vectoriales reales o espacios vectoriales complejos. El *espacio producto* $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ es el espacio vectorial de pares ordenados (\mathbf{v}, \mathbf{w}) con \mathbf{v} en \mathcal{V} y \mathbf{w} en \mathcal{W} , donde

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') \quad \text{y} \quad \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{w}),$$

usando los mismos escalares que en \mathcal{V} y en \mathcal{W} .

Hay muchísimos ejemplos más que son importantes en las aplicaciones; algunos de ellos se darán a conocer en los problemas.

Partiendo de las propiedades básicas de los espacios vectoriales se deducen algunas propiedades sencillas.

(5.10)

Teorema

- a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- b) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

DEMOSTRACION. Estas afirmaciones pueden parecer obvias, pero el problema es probarlas usando sólo las propiedades definidas de los espacios vectoriales.

- Observe primero que $0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$, ya que $0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. Sumando $-(0\mathbf{v})$ a ambos lados de la ecuación resulta que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ como se afirmó. Análogamente, $r\mathbf{0} + r\mathbf{0} = (2r)\mathbf{0} = r(2\mathbf{0}) = r(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = r\mathbf{0}$; sumando $-(r\mathbf{0})$ a ambos lados, da $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Observe que $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, porque

$$\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = \{1 + (-1)\}\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

por el inciso a). Agregando $-\mathbf{v}$ a ambos lados resulta entonces que $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, como se había afirmado. ■

Subespacios

Es evidente que muchos de los espacios vectoriales del ejemplo 5.9 están estrechamente relacionados. Por ejemplo, cada polinomio que tiene a lo más grado $k - 1$ {véase g} también es un polinomio de grado arbitrario {véase f}, que también es una función diferenciable 423 veces y una función continua {véase e}; y las operaciones en cada uno de estos espacios vectoriales son las mismas —por ejemplo, la simple suma de funciones es la suma vectorial. Esta situación es muy común y muy importante en el estudio de los espacios vectoriales.

- (5.11) **Definición.** Suponga que \mathcal{V}_0 y \mathcal{V} son espacios vectoriales, ambos reales o ambos complejos, que \mathcal{V}_0 es un *subconjunto* de \mathcal{V} (es decir, cada elemento de \mathcal{V}_0 es también un elemento de \mathcal{V}), y que las operaciones con elementos de \mathcal{V}_0 , como vectores de \mathcal{V}_0 , son las mismas que las operaciones con ellos como vectores de \mathcal{V} . Entonces se dice que \mathcal{V}_0 es un *subespacio* de \mathcal{V} .

Observe que un *subespacio* es mucho más que un *subconjunto*; un *subespacio* es un *subconjunto* que es un espacio vectorial por derecho propio cuando se usan las *mismas* operaciones que en el espacio vectorial “padre”.

Suponga que \mathcal{V} es un espacio vectorial, que \mathcal{V}_0 es algún *subconjunto* de \mathcal{V} , y que se quiere saber si \mathcal{V}_0 es *subespacio* de \mathcal{V} . De acuerdo a la definición 5.11, se debe comprobar que las operaciones en \mathcal{V}_0 son las mismas que en \mathcal{V} —cosa que es difícil, luego se deberá comprobar también que \mathcal{V}_0 es, en sí, un espacio vectorial por derecho propio verificando todas las condiciones de la definición 5.8 de los espacios vectoriales. Esta situación se presentará tan a menudo en el futuro que será muy útil tener una prueba más sencilla para comprobar que \mathcal{V}_0 es un *subespacio*.

(5.12)

Teorema clave (teorema del subespacio). Suponga que \mathcal{V} es un espacio vectorial y que \mathcal{V}_0 es un subconjunto de \mathcal{V} , la suma de vectores y la multiplicación por escalares para elementos de \mathcal{V}_0 se define exactamente como \mathcal{V} -suma o multiplicación por escalares teniendo en cuenta que los elementos de \mathcal{V}_0 son elementos de \mathcal{V} . Entonces, \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathcal{V} si y sólo si son válidas las siguientes tres condiciones:

1. \mathcal{V}_0 no es vacío.
2. \mathcal{V}_0 es cerrado bajo multiplicación por escalares, es decir que αv_0 está en \mathcal{V}_0 para todo v_0 en \mathcal{V}_0 y para todo escalar α .
3. \mathcal{V}_0 es cerrado bajo la suma de vectores, es decir que $v_0 + v_0'$ está en \mathcal{V}_0 para todos los vectores v_0 en \mathcal{V}_0 y v_0' en \mathcal{V}_0 .

DEMOSTRACION. (subespacio \Rightarrow tres condiciones) Primero suponga que \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathcal{V} . Esto, en particular, significa que \mathcal{V}_0 es un espacio vectorial; la definición de espacios vectoriales muestra inmediatamente que aquí se satisfacen las tres condiciones.

(tres condiciones \Rightarrow subespacio) Ahora suponga que se satisfacen las tres condiciones mencionadas; se tiene que demostrar que \mathcal{V}_0 satisface las condiciones de la definición 5.11 para ser un subespacio de \mathcal{V} . Por hipótesis, es verdaderamente un subconjunto y ciertamente muestra las mismas operaciones que hay en \mathcal{V} . Todo lo que resta es verificar que \mathcal{V}_0 sea un espacio vectorial –esto es, que \mathcal{V}_0 satisfaga las numerosas condiciones de la definición 5.8. Por la condición 1), cuando menos hay un elemento v_0 en \mathcal{V}_0 ; por la condición 2), $0v_0$ también está en \mathcal{V}_0 . Pero de acuerdo al teorema 5.10, $0v_0 = \mathbf{0}$; por lo tanto $\mathbf{0}$ está en \mathcal{V}_0 y es único como se requiere para que \mathcal{V}_0 sea un espacio vectorial (no puede haber un cero diferente, digamos $\mathbf{0}'$ en \mathcal{V}_0 porque entonces $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$ y los dos serían el mismo). Para cualquier v_0 en \mathcal{V}_0 , por la condición 2), $(-1)v_0$ está en \mathcal{V}_0 . Pero $(-1)v_0 = -v_0$, según el teorema 5.10; de este modo $-v_0$ está en \mathcal{V}_0 y es único (¿por qué?) como lo requiere \mathcal{V}_0 para ser espacio vectorial. Ahora bien, todos los demás requisitos son sencillamente propiedades de la suma de vectores y de la multiplicación por escalares, cuya validez la hereda \mathcal{V}_0 de su validez con respecto a \mathcal{V} ya que las operaciones son las mismas. De este modo, \mathcal{V}_0 es un espacio vectorial y por lo tanto un subespacio de \mathcal{V} . ■

(5.13)

Ejemplo. Suponga que $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un conjunto no vacío de vectores de \mathcal{V} . \mathcal{V}_0 se define como el conjunto de todas las combinaciones lineales

$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$$

donde los escalares α_i pueden tomar cualquier valor arbitrario. Entonces \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathcal{V} . Para demostrarlo, se usará el **teorema clave 5.12**.

1) Ciertamente, \mathcal{V}_0 es no vacío ya que

$$\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r$$

está en \mathcal{V}_0 . 2) Para cualquier \mathbf{v}_0 en \mathcal{V}_0 y cualquier escalar α , se tendrá que

$$\alpha\mathbf{v}_0 = \alpha(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha\alpha_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_r)\mathbf{v}_r,$$

el cual está en \mathcal{V}_0 por la definición de \mathcal{V}_0 . 3) se deja para el problema 15.

(5.14) **Ejemplo.** Suponga que \mathbf{A} es una matriz real fija $p \times q$ y defina a \mathcal{V}_0 como el conjunto de todas las matrices columna reales $q \times 1$, \mathbf{x} , que satisfacen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Entonces \mathcal{V}_0 es un espacio vectorial real y un subespacio de \mathbb{R}^q . Para demostrarlo, se usará el **teorema clave 5.12**, el Teorema del Subespacio. 1) \mathcal{V}_0 es no vacío porque $\mathbf{0}$ resuelve $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, por lo tanto la matriz $\mathbf{0}$ está en \mathcal{V}_0 . 2) Si \mathbf{v}_0 está en \mathcal{V}_0 entonces $\mathbf{Av}_0 = \mathbf{0}$, entonces para toda α real se tiene que

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}_0) = \alpha(\mathbf{Av}_0) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

y entonces $\alpha\mathbf{v}_0$ está en \mathcal{V}_0 . 3) Si \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}'_0 están en \mathcal{V}_0 , entonces $\mathbf{Av}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Av}'_0 = \mathbf{0}$; por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0) = \mathbf{Av}_0 + \mathbf{Av}'_0 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

entonces $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0$ están en \mathcal{V}_0 . Así, se satisfacen las tres condiciones y \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathbb{R}^q , por lo tanto es un espacio vectorial real.

Nota. Este libro se ocupará principalmente de los (subespacios de) espacios vectoriales \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p del ejemplo 5.9 b) y c). Es esencial familiarizarse con estos espacios vectoriales y con el hecho de cómo determinar si un subconjunto de uno de ellos es en realidad un subespacio.

Se reafirmarán las definiciones de \mathbb{R}^p y de \mathbb{C}^p , ya que se usarán mucho.

(5.15) **Definición.** \mathbb{R}^p (o \mathbb{C}^p) es el espacio vectorial de las matrices columna $p \times 1$ reales (o complejas), efectuándose la suma de vectores y la multiplicación por escalares como se hace con las matrices.

PROBLEMAS 5.2

- Demuestre que los espacios \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p del ejemplo 5.9 b) y c) son espacios vectoriales.

2. Demuestre que el espacio \mathcal{P} del ejemplo 5.9 f) es un espacio vectorial.
- ▷ 3. Demuestre que el conjunto $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$ es un espacio vectorial, ya sea real o complejo.
4. Demuestre que el espacio $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ del ejemplo 5.9 j) es un espacio vectorial.
- ▷ 5. Para cada uno de los conjuntos que siguen, determine si es un espacio vectorial real usando las operaciones naturales; si no lo es, explique por qué.
- Los vectores geométricos bidimensionales cuyas “cabezas” quedan en el primer cuadrante.
 - Las razones $P_m(x)/Q_n(x)$ –donde Q_n no es el polinomio cero– de los polinomios P_m de grado a lo más m y Q_n de grado a lo más n , en donde m y n recorren todos los enteros no negativos.
 - Lo mismo que en b), pero $m \leq M$ y $n \leq N$ con M y N fijas.
6. Para cada uno de los espacios vectoriales del ejemplo 5.9 para los que no se ha hecho, defina:
- La suma de vectores
 - La multiplicación por un escalar
 - El vector cero
 - $-\mathbf{v}$ para vectores \mathbf{v}
- ▷ 7. Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times q$ real, que \mathbf{b} es una matriz real $p \times 1$ donde $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, y que \mathcal{V}_0 es el conjunto de \mathbf{x} que satisfacen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Demuestre que \mathcal{V}_0 no es un subespacio de \mathbb{R}^q .
8. Suponga que \mathcal{V}_0 es el conjunto de todas las matrices reales 3×1 para que $\langle \mathbf{v} \rangle_1 = 0$. Demuestre que \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
9. Defina $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{p \times q}$ ($\mathcal{O} = \mathbb{C}^{p \times q}$) como el conjunto de todas las matrices reales (\mathcal{O} complejas) $p \times q$. Utilice la aritmética acostumbrada de matrices para demostrar que \mathcal{V} es un espacio vectorial real (\mathcal{O} complejo).
- ▷ 10. Explique por qué un subconjunto de un espacio vectorial debe ser no vacío para ser un subespacio.
11. Demuestre que el conjunto \mathcal{P}^k es un subespacio de \mathcal{P} , estando definidos \mathcal{P}^k y \mathcal{P} en el ejemplo 5.9.
12. Demuestre que si \mathcal{V}_0 se define como $\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{0}\}$ entonces es un subespacio de \mathcal{V} .
13. Suponga que \mathcal{V} y \mathcal{W} son espacios vectoriales y que $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ es como se definió en el ejemplo 5.9. Sea \mathcal{V}' el conjunto de todos los vectores en $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ de la forma $(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ estando \mathbf{v} en \mathcal{V} y siendo $\mathbf{0}$ el vector cero de \mathcal{W} . Demuestre que \mathcal{V}' es un subespacio de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$.
- ▷ 14. En la sección 2.2 se demostró que a menudo es importante resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ en aplicaciones que modelan la evolución de sistemas, en donde \mathbf{A} es una matriz $q \times q$ real dada. Demuestre que el conjunto de tales \mathbf{x} es un subespacio de \mathbb{R}^q .

15. Termine la demostración del ejemplo 5.13.

5.3 DEPENDENCIA LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL

En las aplicaciones, es necesario ser capaces de hacer cálculos con vectores; esto requiere de alguna especie de representación concreta de ellos. Por ejemplo, el subespacio \mathcal{V} de $C[0, 1]$ que consiste en todas las funciones f que satisfacen

$$f(x + 3y) - 3f(x + 2y) + 3f(x + y) - f(x) = 0$$

idénticamente en x y y es un espacio vectorial, pero que no se puede manipular fácilmente con esta definición; los cálculos en \mathcal{V} se facilitan en cuanto se sabe (y esto no es trivial) que cada elemento \mathcal{V} puede escribirse como $c_1 + c_2t + c_3t^2$ para algunos coeficientes c_1 —entonces es posible, por ejemplo, sumar dos vectores de \mathcal{V} mediante la simple suma de sus coeficientes. De aquí la importancia de expresar el elemento general de un espacio vectorial como una combinación ($c_1 + c_2t + c_3t^2$) de vectores especiales ($1, t$ y t^2) en ese espacio.

Conjuntos generadores

A continuación se presenta la terminología que ayudará a desarrollar la idea recién expuesta.

(5.16) *Definición.*

- a) Una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ es una expresión de la forma $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, en donde las α_i son escalares.
- b) Se dice que un vector \mathbf{v} es *linealmente dependiente de* (el conjunto de) los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ si y solo si se puede escribir a \mathbf{v} como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$; si no es así, se dice que \mathbf{v} es *linealmente independiente de* (el conjunto de) los vectores.
- c) Se dice que un conjunto S de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ en \mathcal{V} *genera* un subespacio de \mathcal{V}_0 de \mathcal{V} si y sólo si S es un subconjunto de \mathcal{V}_0 y cada vector \mathbf{v}_0 en \mathcal{V}_0 depende linealmente de S ; se dice que S es un *conjunto generador para* \mathcal{V}_0 .

Por lo tanto, en este lenguaje, el conjunto $\{1, t, t^2\}$ genera el espacio vectorial \mathcal{P}^3 de polinomios de grado estrictamente menor que 3; también lo hacen $\{1, 3t, 6t^2\}, \{2, 3 + t, 2 - t^2\}, \{1, 2 + 2t, 1 - t + t^2, 2 - t^2\}, \{-2, -1 - t, t^2, 6 - 4t, 1 + t + t^2, t\}$ y otros; por otro lado, $\{1, 3t\}, \{2, t, 4 + t\}, \{1 + t, t + t^2\}$, no son conjuntos generadores para \mathcal{P}^3 . La idea expresada al comienzo de esta sección es que se desea encontrar conjuntos generadores de los espacios vectoriales para poder hacer cálculos con vectores.

Suponga, por ejemplo, que se necesita trabajar con \mathbb{R}^3 , esto es, con vectores como

$$(5.17) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Un conjunto generador sencillo para \mathbb{R}^3 es evidentemente $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, en donde las \mathbf{e}_i son las matrices columna unitarias 3×1 . Por ejemplo, el primer vector de (5.17) es igual a $1\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$; el segundo es $1\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + (-2)\mathbf{e}_3$, y la \mathbf{x} generan $= [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ en \mathbb{R}^3 puede expresarse fácilmente como $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Hay muchos otros conjuntos generadores posibles para \mathbb{R}^3 , naturalmente, uno de ellos es $S' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$, donde

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{e}'_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, para expresar el primer vector de (5.17) como una combinación lineal de los vectores de S' , es necesario encontrar los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tales que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior da tres ecuaciones para las cuatro incógnitas α_i ; la solución general es $\alpha_1 = -2k$, $\alpha_2 = 0.5 + k$, $\alpha_3 = 0.5$ y $\alpha_4 = k$ arbitraria.

Este segundo conjunto generador S' es menos conveniente que S , al menos por dos razones: 1) S' tiene cuatro vectores en lugar de los tres que tiene S ; y 2) es más difícil encontrar los coeficientes necesarios para representar un vector por el camino S' que vía S ya que se deben resolver algunas ecuaciones no triviales.

El primer objetivo se puede satisfacer eliminando uno de los vectores de S' , pero *-se debe tener mucho cuidado al seleccionar el que se ha de eliminar*. Si, por ejemplo, se elimina \mathbf{e}'_3 y se trata de escribir el primer vector de (5.17) como $\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \alpha_2\mathbf{e}'_2 + \alpha_4\mathbf{e}'_4$ resolviendo las α_i en

$$(5.18) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

se encontrará que las ecuaciones son inconsistentes y que no hay soluciones. Esto es, el primer vector de (5.17) es linealmente independiente de los vectores $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_4$. Si en lugar de ello se elimina cualquiera de $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, y \mathbf{e}'_4 de S' , entonces los tres vectores que quedan sí generan a \mathbb{R}^3 (véanse los problemas 1 y 2). Un

modo de ver que es posible eliminar a \mathbf{e}_4 de S' y todavía generar a \mathbb{R}^3 , es observando que $\mathbf{e}'_4 = 2\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2$, con lo que cualquier vector \mathbf{x} que se escriba como

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha_2 \mathbf{e}'_2 + \alpha_3 \mathbf{e}'_3 + \alpha_4 \mathbf{e}'_4$$

inmediatamente puede representarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha_2 \mathbf{e}'_2 + \alpha_3 \mathbf{e}'_3 + \alpha_4(2\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_4)\mathbf{e}'_1 + (\alpha_2 - \alpha_4)\mathbf{e}'_2 + \alpha_3 \mathbf{e}'_3,\end{aligned}$$

que es una combinación de los vectores en donde se ha eliminado a \mathbf{e}'_4 .

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 10.

Independencia lineal

Se acaba de ver en el párrafo anterior que se podría producir un conjunto generador más sencillo partiendo de S' y eliminando un vector de S' , tal como \mathbf{e}'_4 , que era linealmente dependiente de los otros. En general, se podrá eliminar claramente cualquier vector de un conjunto generador, que sea linealmente dependiente de los demás vectores en ese conjunto generador. Si entonces se eliminan de ese conjunto generador menor vectores que sean linealmente dependientes de los otros en ese conjunto más pequeño, y así sucesivamente, intuitivamente parece claro que al final se obtendrá un conjunto tal que ya ninguno de sus miembros pueda ser escrito como una combinación lineal de los demás miembros del conjunto. Se examinarán las propiedades que tendría tal conjunto.

Suponga que el conjunto L de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ (siendo $k \geq 2$) es tal que cada vector \mathbf{v}_i es linealmente independiente de los demás vectores que quedan en L . Ahora, suponga que hay algunos escalares α_i tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Se afirma que en este caso todos los escalares α_i son iguales a 0. Si no fuera así, suponga que $\alpha_j \neq 0$; traslade luego los demás términos al otro lado de la ecuación, y multiplíquelos por α_j^{-1} ; esto resulta en

$$\mathbf{v}_j = (-\alpha_1 \alpha_j^{-1})\mathbf{v}_1 + \cdots + (-\alpha_k \alpha_j^{-1})\mathbf{v}_k$$

contradicciendo que las \mathbf{v}_j son linealmente independientes de las demás. Se verá en el teorema 5.23 a) que la implicación también es sólida en la otra dirección: si la única manera de escribir $\mathbf{0}$ como combinación lineal de las \mathbf{v}_i es con todos los coeficientes α_i iguales a cero, entonces cada una de las \mathbf{v}_i es linealmente independiente de las demás.

Esto quiere decir que la propiedad que se está buscando en un conjunto L –para no poder eliminar ningún vector de L y todavía generar el mismo espacio– puede enunciarse de dos formas equivalentes:

Cada vector en L es linealmente independiente de los demás en L ; o: la única combinación lineal de los vectores de L que es igual a $\mathbf{0}$ tiene todos los coeficientes de las v_j iguales a 0.

Los conjuntos L con esta propiedad especial son de extrema importancia en el estudio de los espacios vectoriales y se les da un nombre especial. La definición generalmente se hace usando la segunda forma de la propiedad.

- (5.19) **Definición.** Sea $L = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un conjunto no vacío de vectores.
a) Suponga que

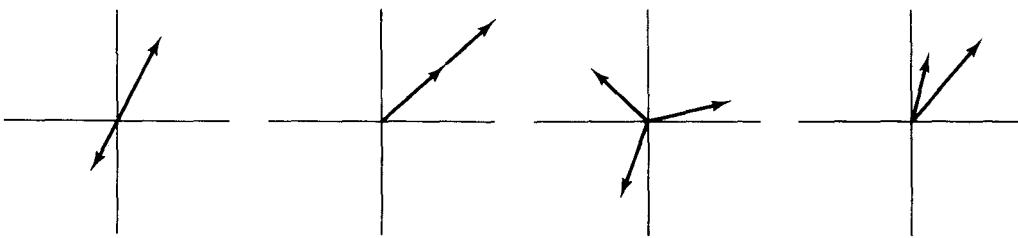
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Se dice entonces que L es *linealmente independiente*.

- b) Un conjunto que no es linealmente independiente se llama *linealmente dependiente*; análogamente, L es linealmente dependiente si y sólo si hay escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ no todos cero, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}.$$

- (5.20) **Ejemplo.** Algunos conjuntos de vectores geométricos bidimensionales:



Conjunto dependiente

Conjunto dependiente

Conjunto dependiente

Conjunto independiente

- (5.21) **Ejemplo.** El conjunto $\{e_1, e_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^2 . Para demostrarlo, suponga que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \mathbf{0}$. entonces,

$$[0 \ 0]^T = \mathbf{0} = \alpha_1 [1 \ 0]^T + \alpha_2 [0 \ 1]^T = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T,$$

por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

- (5.22) **Ejemplo.** El conjunto $\{1, 2 - 3t, 4 + t\}$ es linealmente dependiente en el espacio vectorial \mathcal{P}^3 de polinomios de grado estrictamente menor que 3.

Para comprobarlo, suponga que $\alpha_1(1) + \alpha_2(2 - 3t) + \alpha_3(4 + t)$ es igual al polinomio $\mathbf{0}$, es decir que

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3) + (-3\alpha_2 + \alpha_3)t = 0 \quad \text{para toda } t$$

Entonces,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \quad \text{y} \quad -3\alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

un sistema de dos ecuaciones para las tres α_i . La eliminación de Gauss produce la solución general $\alpha_1 = -14k/3$, $\alpha_2 = k/3$, y $\alpha_3 = k$ arbitraria. Una solución en que no todas las k sean cero viene, por ejemplo, de $k = 3$: $\alpha_1 = -14$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 3$.

Se concluirá con un teorema que establece, entre otros útiles resultados, que los dos modos distintos de afirmar que un conjunto es linealmente independiente son, de hecho, equivalentes.

(5.23). **Teorema** (independencia lineal)

a) Sea

$$L = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

con $k \geq 2$ y todos los vectores $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$. Entonces, L es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los \mathbf{v}_j es linealmente dependiente de los vectores \mathbf{v}_i restantes ($i \neq j$); en particular, L es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores \mathbf{v}_j es linealmente dependiente de los vectores *anteriores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

- b) Cualquier conjunto que contenga al $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente.
- c) $\{\mathbf{v}\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- d) Suponiendo que \mathbf{v} es linealmente dependiente de un conjunto

$$L = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\},$$

y que \mathbf{v}_j es linealmente dependiente de los demás vectores en L , es decir que

$$L'_j = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

entonces \mathbf{v} es linealmente dependiente de L'_j .

- e) Cada subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
- f) Suponiendo que L es un conjunto finito de vectores y que algún subconjunto L_0 de L es linealmente dependiente, entonces L es linealmente dependiente.

DEMOSTRACION

- a) (dependiente de \Rightarrow dependiente) Véanse las definiciones 5.16 y 5.19.
Suponga que v_j es linealmente dependiente de los vectores anteriores:

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1}.$$

Entonces

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_k = \mathbf{0}$$

y de aquí que L es linealmente dependiente.

(dependiente \Rightarrow dependiente de) Suponga que L es linealmente dependiente. Defínase

$$L_j = \{v_1, v_2, \dots, v_j\} \quad \text{para } 1 \leq j \leq k.$$

Como $v_1 \neq \mathbf{0}$ por hipótesis, L_1 es linealmente independiente: véase la demostración de c) abajo. Sea L_i la primera de las L_j que es linealmente dependiente; tal i existe porque L_k es linealmente dependiente. También, $i \geq 2$ porque L_1 es linealmente independiente. Se afirma que v_i es linealmente dependiente de los vectores procedentes, esto es, de L_{i-1} . Para ver esto, observe que existen α_r , no todas cero, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i = \mathbf{0};$$

si α_i fuera igual a cero, entonces L_{i-1} debería ser linealmente dependiente, y no lo es. Ya que $\alpha_i \neq 0$, pueden desplazarse los demás términos de la ecuación al lado derecho de esa ecuación, multiplicarse por α_i^{-1} , y así expresarse v_i en términos de los v_r anteriores, como se afirmó.

- b) Suponga que un conjunto contiene $\mathbf{0}$. Entonces, desde luego, se podrá escribir $\mathbf{0}$ como 1 por $\mathbf{0}$ más 0 veces cada uno de los demás términos del conjunto, y por lo tanto el conjunto es linealmente dependiente.
- c) Si $v = \mathbf{0}$, entonces, debido a b), el conjunto es linealmente dependiente. Si el conjunto es linealmente dependiente tendremos $\alpha v = \mathbf{0}$ con $\alpha \neq 0$, entonces α^{-1} existe y se obtiene

$$\mathbf{0} = \alpha^{-1} \mathbf{0} = \alpha^{-1}(\alpha v) = 1v = v,$$

y entonces $v = \mathbf{0}$.

- d) Por hipótesis,

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

y también

$$v_j = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \beta_k v_k.$$

Entonces, sustituyendo la ecuación de v_j en la expresión para v , se expresa v como linealmente dependiente de L'_j como se afirmó.

- e) Suponga que una combinación lineal de los vectores de algún subconjunto L_0 de L es igual a $\mathbf{0}$; añadiendo a esta combinación todos los términos de la forma 0 por los vectores de L que no estén en L_0 , se obtiene $\mathbf{0}$ como una combinación lineal de vectores de L . Pero L es linealmente independiente, entonces todos los coeficientes –incluyendo aquéllos de los vectores de L_0 – deben ser iguales a 0 . Así, L_0 es linealmente independiente.
- f) Si L fuera linealmente independiente, entonces, por e), L_0 también debería ser linealmente independiente, cosa que no es. ■

Aunque hasta ahora no se aprecia, los conceptos de independencia y dependencia lineal se encuentran entre los más cruciales del álgebra lineal. Se verá que proporcionan nuevos modos de ver los conceptos de rango de matrices y de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones; dan la clave para entender cómo representar elementos de espacios vectoriales de un modo sencillo, ayudan a comprender las dificultades numéricas que pueden surgir al calcular las soluciones de problemas aplicados, y así sucesivamente. *Es absolutamente esencial comprender estos conceptos y ser capaz de determinar si un conjunto es linealmente independiente.*

PROBLEMAS 5.3

- Demuestre que los vectores $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4$ que se definieron inmediatamente después de (5.17) generan a \mathbb{R}^3 como se afirmó.
- Demuestre que cualquiera de los $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ o \mathbf{e}'_4 puede eliminarse en el problema 1, y que los vectores restantes todavía generarán \mathbb{R}^3 .
- Determine si \mathbb{R}^3 está generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ -1 \ 2]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-1 \ 0 \ 3]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = [0 \ -1 \ 5]^T, \quad \mathbf{v}_4 = [3 \ -2 \ 2]^T.$$

- ▷ 4. Determine cuáles de los vectores

$$\mathbf{u}_1 = [-3 \ -1 \ 15 \ 6]^T, \quad \mathbf{u}_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad \mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$$

están en el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por

$$\mathbf{v}_1 = [-1 \ 3 \ 5 \ 2]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [2 \ -1 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [1 \ -8 \ 5 \ 3]^T.$$

5. Exprese el vector general $[x \ y \ z]^T$ como una combinación lineal de

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ 2 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1 \ 0 \ -1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [1 \ -2 \ 1]^T.$$

- ▷ 6. Demuestre que el espacio \mathcal{P}^3 de polinomios de grado estrictamente menor que 3 está generado por el conjunto $\{2, 3 + t, 2 - t^2\}$.

7. Demuestre que el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6 está generado por el conjunto

$$\{1, 2 + 2t, 1 - t + t^2, 2 - t^2\}.$$

8. Demuestre que el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6 *no* está generado por el conjunto

$$\{1 + t, t + t^2\}.$$

- ▷ **9.** Suponga que el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente. Demuestre que $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$ es también linealmente independiente.
- 10.** Suponga que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente. Sea $\mathbf{u}' = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, y $\mathbf{v}' = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$. Demuestre que $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ es linealmente independiente si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
- 11.** Demuestre que el conjunto de vectores $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4$ definidos inmediatamente después de (5.17) es linealmente dependiente.
- ▷ **12.** Demuestre que los cuatro vectores del problema 3 forman un conjunto linealmente dependiente y determine cuáles son linealmente dependientes de cuáles otros.
- 13.** Demuestre que en el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6, el conjunto

$$\{1, 2 + 2t, 1 - t + t^2, 2 - t^2\}$$

es linealmente dependiente y determine cuáles elementos son linealmente dependientes de cuáles otros.

- 14.** Demuestre que en el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6, el conjunto

$$\{1, t + 3, t + t^2, 2t - 1\}$$

es linealmente dependiente y determine cuáles elementos son linealmente dependientes de cuáles otros.

- ▷ **15.** Determine cuáles de las siguientes matrices no pueden escribirse como combinaciones lineales de las demás.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- 16.** Determine los valores de x para que el siguiente conjunto sea linealmente dependiente.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

17. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto no vacío de vectores. Demuestre que S es linealmente independiente si y sólo si cada vector presente en el subespacio \mathcal{V}_0 generado por S tiene una representación única en términos de S .
18. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto de vectores presentes en \mathbb{R}^p , con $p \geq r$, y suponga que $\langle v_i \rangle_i \neq 0$ para toda i , mientras que $\langle v_i \rangle_j = 0$ si $i > j$. Demuestre que S es linealmente independiente.
- ▷ 19. Se dice que un conjunto infinito de vectores es linealmente dependiente si y sólo si tiene algún subconjunto finito que sea linealmente dependiente; por lo tanto, un conjunto infinito es linealmente independiente si y sólo si cada subconjunto finito es linealmente independiente. Haga esta afirmación en una forma similar a la de la definición 5.19.
- ▷ 20. a) Del mismo modo que en el problema 19, demuestre que $\{1, t, t^2, \dots\}$ es linealmente independiente en el espacio \mathcal{P} de todos los polinomios.
 b) Para cada $i \geq 1$, sea x_i la sucesión infinita cuyo i -ésimo término es igual a 1 y cuyos otros términos son iguales a cero. Demuestre que $\{x_1, x_2, \dots\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial \mathcal{S} de todas las sucesiones reales.
21. Suponga que A es una matriz real $p \times p$ superior triangular unitaria.

$$\langle A \rangle_{ii} = 1 \text{ para toda } i, \text{ y } \langle A \rangle_{ij} = 0 \text{ si } i > j.$$

- a) Demuestre que el conjunto de columnas de A es linealmente independiente.
 b) Demuestre que el conjunto de renglones de A es linealmente independiente.

5.4 BASE, DIMENSION Y COORDENADAS

La definición de conjuntos generadores en la sección anterior fue motivada por la necesidad de encontrar algún modo concreto de representar los elementos generales de un espacio vectorial; la definición de un conjunto linealmente independiente fue motivada por un argumento intuitivo: que se pudo ir eliminando de un conjunto generador de vectores que eran linealmente dependientes de los demás, hasta que se logró un conjunto en el cual cada uno de sus vectores era linealmente independiente de los demás. Ahora se justificará este argumento.

Base

- (5.24) **Teorema** (reducción de conjuntos generadores). Suponga que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ genera a \mathcal{V} .

a) Suponga que uno de los vectores v_j es linealmente dependiente de

$$S'_j = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_r\},$$

esto es de los vectores restantes. Entonces el conjunto reducido S'_j también genera a \mathcal{V} .

b) Si por lo menos un vector en S no es cero, es decir, si \mathcal{V} es más que sólo el espacio vectorial trivial $\{\mathbf{0}\}$ —entonces existe un subconjunto S_0 de S que genera \mathcal{V} y que es linealmente independiente.

DEMOSTRACION

- a) Para demostrar que S'_j genera \mathcal{V} , se deberá demostrar que cada v en \mathcal{V} es linealmente dependiente de S'_j ; supondremos entonces que v es un vector arbitrario. Como S genera a \mathcal{V} , v es linealmente dependiente de S . Por el teorema 5.23 d) sobre independencia lineal, v debe ser también linealmente dependiente de S'_j , como se necesitaba.
- b) Si el mismo S es linealmente independiente, lo logramos; si no, entonces por a) se podrá eliminar uno de los vectores de S y todavía generar \mathcal{V} , ahora con un conjunto que contiene $r - 1$ vectores en lugar de r . Se puede continuar eliminando vectores de este modo hasta obtener ya sea: 1) un conjunto de vectores S_0 linealmente independiente que contenga cuando menos dos vectores y que genere \mathcal{V} , o 2) un conjunto S_0 que genere \mathcal{V} y sólo contenga un vector, digamos v_s . En el caso 1), S_0 es, evidentemente el conjunto requerido. En el caso 2), S_0 , de nuevo el conjunto requerido, realmente genera \mathcal{V} , y para comprobar que es linealmente independiente sólo se necesita observar que $v_s \neq \mathbf{0}$ ya que \mathcal{V} no es solamente $\{\mathbf{0}\}$, después usar el teorema 5.23 c). ■

El teorema 5.24 dice que se puede reducir un conjunto generador a un conjunto generador linealmente independiente. Tal conjunto se llama la *base* del espacio vectorial.

(5.25) **Definición.** Una *base* de un espacio vectorial \mathcal{V} es un conjunto generador linealmente independiente de \mathcal{V} .

(5.26) **Ejemplo.** Se busca una base para el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^3 que consiste en todas las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; de acuerdo al ejemplo 5.14, éste es realmente un subespacio. Es necesario tener precaución: se sabe que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es linealmente independiente y que cada vector en \mathbb{R}^3 —y por lo mismo en \mathcal{V}_0 —se puede escribir como una combinación lineal de estos tres, pero ésta *no* es una base para \mathcal{V}_0 —el truco está en que estos vectores *no* están en \mathcal{V}_0 y que los elementos de una base sí deben de estar. Se debe encontrar un conjunto generador linealmente independiente de vectores que *estén* en \mathcal{V}_0 . Hacerlo es sencillo: Observe que la solución general de x_1

$+x_2 + x_3 = 0$ es $x_3 = \alpha$ arbitraria, $x_2 = \beta$ arbitraria, y $x_1 = -\alpha - \beta$. Esto significa que el vector general \mathbf{v}_0 en el subespacio \mathcal{V}_0 es

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \quad \text{si } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El hecho de que cada \mathbf{v}_0 en \mathcal{V}_0 pueda escribirse como arriba, nos dice que el conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ genera a \mathcal{V}_0 —observe también que \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 están en \mathcal{V}_0 ; también es fácil ver que B es linealmente independiente: si $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, entonces el \mathbf{v}_0 de arriba será igual a $\mathbf{0}$ y se puede ver, del segundo y tercero elementos de \mathbf{v}_0 , que esto fuerza a que $\alpha = \beta = 0$. Note que, de la definición de \mathcal{V}_0 , se sabe que \mathcal{V}_0 es un espacio vectorial real, pero no se tiene una idea concreta de lo que en realidad es. Ahora se conoce en esencia: es simplemente cualquier cosa de la forma $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ —esto es, $[-\alpha - \beta \beta \alpha]^T$ —para números reales α y β arbitrarios; por tanto, ésta es la razón de la utilidad de encontrar una base: proporciona una descripción concreta de los vectores.

Una base tiene una propiedad importante que se usará después en esta sección.

- (5.27) **Teorema** (representación única con respecto a la base). Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ una base. Entonces la representación de cada \mathbf{v} con respecto a B es única:

$$\text{si } \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r \text{ y también } \mathbf{v} = \alpha'_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha'_r \mathbf{v}_r,$$

$$\text{entonces } \alpha_i = \alpha'_i \text{ para } 1 \leq i \leq r.$$

DEMOSTRACION. $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\alpha_1 - \alpha'_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_r - \alpha'_r)\mathbf{v}_r$; como B es linealmente independiente, esto significa que $\alpha_i - \alpha'_i = 0$ para toda i —esto es, $\alpha_i = \alpha'_i$ para toda i como se afirmó. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 8.

Dimensión

Los ejemplos han demostrado que el conjunto de vectores en una base no es único; existen muchas selecciones. Pero es posible demostrar que el *número* de vectores en una base es único; lo primero que se necesita es un resultado preliminar.

- (5.28) **Teorema.** Si $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para el espacio vectorial \mathcal{V} y si $D = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$ es un subconjunto linealmente independiente de \mathcal{V} que contiene q vectores. Entonces $q \leq p$.

DEMOSTRACION. Suponga, por el contrario, que $q > p$; se demostrará que esto produce una contradicción y que por lo tanto $q \leq p$. Sean B_0 y B'_0 ambos iguales a B . Entonces es válida la siguiente afirmación para $i = 0$:

- (#) B_i genera a \mathcal{V} , en donde B_i consiste en los primeros i vectores \mathbf{u}_j de D seguidos de $p - i$ de los vectores \mathbf{v}_j de B , y B'_i está formado por estos $p - i$ vectores de B .

Se usará la inducción para demostrar que #) es válido para $0 \leq i \leq p$. Suponga que #) es válido para $i = r$ siendo $r < p$; se demostrará que #) es válido para $i = r + 1$. Considere el conjunto S que consiste en \mathbf{u}_{r+1} seguido de los vectores del conjunto generador B_r : es decir los primeros $r + 1$ vectores de D seguidos por los $p - r$ vectores de B'_r (y por consiguiente, de B). S es un conjunto generador linealmente dependiente porque B_r genera a \mathcal{V} . Por el teorema 5.23 a) sobre independencia lineal, un vector en S es linealmente dependiente de los vectores anteriores; esto no puede suceder para uno de los \mathbf{u}_i porque éstos están precedidos sólo por otro \mathbf{u}_i y D es linealmente independiente. Por eso, es uno de los \mathbf{v}_j en B'_r el que es linealmente dependiente de los vectores anteriores en S . Por el teorema 5.24 a) sobre la reducción de los conjuntos generadores, es posible eliminar esta \mathbf{v}_j de S y tener todavía un conjunto generador S_0 . Ahora, S_0 consiste en los primeros $r + 1$ vectores \mathbf{u}_j de D seguidos de $p - (r + 1)$ de los vectores de B . Si $B_{r+1} = S_0$, y se designan con B'_{r+1} esos $p - (r + 1)$ vectores restantes de B , entonces se tendrá que #) es válido para $i = r + 1$. Por inducción, #) debe ser válido para $i = p$. Esto es, los primeros p vectores de los $q > p$, \mathbf{u}_j en D (junto con $p - p = 0$ de los vectores \mathbf{v}_j de B) generan a \mathcal{V} ; en particular, \mathbf{u}_q se puede escribir como una combinación lineal de los primeros p vectores \mathbf{u}_j , contradiciendo a la independencia lineal de D . Esta contradicción completa la demostración. ■

(5.29)

Corolario clave (número de vectores de la base). Suponga que el espacio vectorial \mathcal{V} tiene una base que consiste en p vectores. Entonces cualquier base de \mathcal{V} contiene exactamente p vectores.

DEMOSTRACION. Suponga que otra base contiene q vectores; como esta otra base es linealmente independiente, el teorema 5.28 implica que $q \leq p$. Invirtiendo los papeles de estas dos bases, se obtendrá que $p \leq q$. Entonces $p = q$. ■

Los *dos* vectores geométricos (véase la sección 5.1) que terminan en $\mathcal{P}(0, 1)$ y en $\mathcal{P}(1, 0)$ se puede ver fácilmente que forman una base para el plano bidimensional de vectores geométricos; asimismo se puede ver fácilmente que los *tres* vectores geométricos que terminan en $\mathcal{P}(0, 0, 1)$, $\mathcal{P}(0, 1, 0)$ y en $\mathcal{P}(1, 0, 0)$

forman una base para el espacio físico tridimensional de los vectores geométricos. Por analogía, se llamará *dimensión* del espacio al número de vectores de una base de ese espacio vectorial.

- (5.30) **Definición.** El número de vectores en una base de un espacio vectorial se conoce como la *dimensión* del espacio. Si la dimensión de \mathcal{V} es p , también se dice que \mathcal{V} es *p-dimensional*. Cuando un espacio vectorial tiene una base que consiste en algún número finito de vectores, se dice que el espacio es de *dimensión finita*. Se define como 0 a la dimensión del espacio (de dimensión finita) $\{\mathbf{0}\}$.

El término “dimensión finita” se introdujo porque no todos los espacios vectoriales tienen una base con un número finito de vectores. En el espacio vectorial \mathcal{P} de polinomios –véase el ejemplo 5.9 f– cada uno de los conjuntos $D_i = \{1, t, \dots, t^{i-1}\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto \mathcal{P} contiene conjuntos linealmente independientes de un número arbitrariamente grande de vectores y por lo mismo no puede tener una base finita. También es posible introducir nociones de independencia lineal y base que permitan la inclusión de conjuntos infinitos (véase el problema 19 en la sección 5.3 y el problema 8), pero nos restringiremos –en nuestro material sobre bases cuando menos– a los espacios de dimensión finita.

Esta nueva terminología puede usarse para describir algunos resultados útiles.

- (5.31) **Corolario clave.** El espacio vectorial real \mathbb{R}^p y el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^p tienen dimensión p .

DEMOSTRACION. Los p vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$ forman una base para cada uno de estos espacios. ■

- (5.32) **Teorema.** Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión p . Entonces:
- Todo conjunto que contenga estrictamente más de p vectores es linealmente dependiente.
 - Si $D = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente y r es menor que p , entonces existirán vectores v_{r+1}, \dots, v_p tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ sea una base de \mathcal{V} .
 - Si un conjunto de exactamente p vectores, es, o un conjunto generador para \mathcal{V} , o linealmente independiente, entonces es *ambas cosas* y es una base de \mathcal{V} .

DEMOSTRACION

- Esto es consecuencia inmediata del teorema 5.28.
- D no puede generar a \mathcal{V} ya que $r < p$ significa que D no es una base; por lo tanto habrá un vector, llámese v_{r+1} , que es linealmente indepen-

diente de D . El conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}$ también es linealmente independiente; si no lo fuera, uno de los vectores sería linealmente dependiente de los que le preceden, lo que es imposible por las hipótesis sobre D y sobre \mathbf{v}_{r+1} . Se podría continuar adjuntando vectores para obtener $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ siempre que $s \leq p$; no sería adjuntar a \mathbf{v}_{p+1} porque entonces se violaría lo establecido en el inciso a). Así, el procedimiento se para en \mathbf{v}_p con un conjunto generador linealmente independiente —es decir, la base como se requería.

- c) (generador \Rightarrow base) Llámese S al conjunto generador de p vectores. Si S fuera linealmente dependiente, por el teorema 5.24 b) sobre reducción de conjuntos generadores se podría encontrar un subconjunto de S que fuera una base pero que tuviera menos de p vectores, lo que es imposible. Por lo tanto, S es linealmente independiente.
(independiente \Rightarrow base) Sea S el conjunto linealmente independiente de p vectores. Si S no fuera generador, entonces, como en b), se podría agregar un vector a S para obtener un conjunto linealmente independiente de $p + 1$ vectores contradiciendo a a). ■

(5.33) **Teorema.** Un espacio vectorial tiene dimensión finita k si y sólo si k es el máximo número de vectores en un conjunto linealmente independiente.

DEMOSTRACION. (dimensión $k \Rightarrow$ máxima k) Si \mathcal{V} tiene dimensión k , entonces por definición tiene alguna base —y por lo tanto un conjunto linealmente independiente— que contiene exactamente k vectores; por el teorema 5.32 a), no podrá hacer un número mayor.

(máxima $k \Rightarrow$ dimensión k) Suponga que k es el máximo y que D es el conjunto linealmente independiente de k vectores. Todo vector \mathbf{v} debe ser linealmente dependiente de D ; de otro modo, sería posible adjuntar \mathbf{v} a D y entonces se tendría un conjunto linealmente independiente de más de k vectores, lo cual es imposible. Por lo tanto, D genera a \mathcal{V} y es un base. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 14.

Coordenadas

Se vuelve a examinar la idea contenida en el teorema 5.27, que afirmó que la representación de un vector con respecto a una base es única. En realidad, aquí se encuentra una dificultad técnica y lógica. Un conjunto no tiene un orden implícito: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ son idénticos como conjuntos. No hay modo, entonces, de que se pueda hablar precisamente del coeficiente del “primer” vector de una base; para resolver esto, se definirá una *base ordenada*.

(5.34) **Definición.** Una *base ordenada* $B = \{v_1; v_2; \dots; v_p\}$ es una base $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ en la que hay un orden fijo y bien definido, indicado por las posiciones relativas de los vectores en B .

Con esta nomenclatura, $\{e_1, e_2\} = \{e_2; e_1\}$ pero $\{e_1; e_2\} \neq \{e_2; e_1\}$. Cuando B es una base *ordenada*, tiene sentido referirse al coeficiente del i -ésimo vector de la base ordenada en la representación de un vector.

- (5.35) **Definición.** Sea $B = \{v_1; v_2; \dots; v_p\}$ una base ordenada.
a) La i -ésima *coordenada* de un vector v con respecto a B es el escalar α_i tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p.$$

- b) Las *coordenadas en B* o el *vector de coordenadas* de un vector v respecto a B es aquella matriz columna $p \times 1$, v_B dada por $(v_B)_i = \alpha_i$, en donde $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.
c) La *función de coordenadas con respecto a B* es la función (o correspondencia, o mapeo) c_B que asigna a cada vector v en V su único vector de coordenadas con respecto a B :

$$c_B(v) = v_B = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_p]^T, \text{ en donde } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p.$$

- (5.36) **Ejemplo.** Sea \mathcal{P}^3 el espacio vectorial real de polinomios de grado estrictamente menor que 3, y sea B' la base ordenada

$$B' = \{1; 1+t; 1+t+t^2\}.$$

Se tiende a pensar en los polinomios v de \mathcal{P}^3 en la forma $a + bt + ct^2$. Intentando escribir esto con respecto a B'

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1+t+t^2)$$

conduce a las ecuaciones

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = b, \quad \text{y} \quad \alpha_3 = c.$$

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente como $\alpha_3 = c$, $\alpha_2 = b - c$, y $\alpha_1 = a - b$. Con el lenguaje de la definición 5.35, el vector de coordenadas con respecto a B' del vector

$$v = a + bt + ct^2 \text{ es } v_{B'} = [a - b \ b - c \ c]^T \text{ en } \mathbb{R}^3.$$

Otro modo de decirlo es que

$$c_{B'}(a + bt + ct^2) = [a - b \ b - c \ c]^T,$$

en donde $c_{B'}$ indica la función de coordenadas con respecto a B' . Por ejemplo,

$$c_{B'}(2 - 3t + 6t^2) = [5 \ -9 \ 6]^T.$$

Es posible comprobar que sean éas realmente las coordenadas del polinomio original $2 - 3t + 6t^2$ usándolas como los coeficientes de los vectores de la base ordenada:

$$\begin{aligned} (5)(1) + (-9)(1+t) + (6)(1+t+t^2) \\ = (5 - 9 + 6) + (-9 + 6)t + 6t^2 \\ = 2 - 3t + 6t^2, \end{aligned}$$

que es el polinomio original.

La importancia de las coordenadas y de los vectores de coordenadas estriba en que proporcionan un modo concreto de hacer cálculos con vectores que han sido definidos de algún modo abstracto.

- (5.37) **Ejemplo.** Considere de nuevo el espacio vectorial real \mathcal{V}_0 del ejemplo 5.26: todos aquellos vectores en \mathbb{R}^3 con $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Partiendo de esta sola definición es difícil calcular con estos vectores. Pero en el ejemplo 5.26 se encuentra que –con la presente terminología– es posible usar a $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ como una base ordenada, en donde

$$\mathbf{v}_1 = [-1 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-1 \ 1 \ 0]^T.$$

Los vectores en \mathcal{V}_0 ya no parecen abstractos; cada uno es de la forma $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = [-\alpha_1 - \alpha_2 \ \alpha_2 \ \alpha_1]^T$. Los cálculos serán fáciles, también, si se usan coordenadas. Al sumar sus coordenadas se suman \mathbf{u} y \mathbf{v} : si

$$\mathbf{u} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2,$$

entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\beta_1 + \alpha_1) \mathbf{v}_1 + (\beta_2 + \alpha_2) \mathbf{v}_2.$$

En otras palabras, se tiene que $c_B(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c_B(\mathbf{u}) + c_B(\mathbf{v})$ –las coordenadas de una suma son la suma de las coordenadas.

Como en el ejemplo 5.37, siempre se pueden efectuar cálculos con las coordenadas, gracias a las siguientes propiedades importantes de la función de coordenadas.

- (5.38) **Teorema** (función de coordenadas). Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión p , real (o complejo), y sea c_B la función de coordenadas con respecto a alguna base ordenada B . Entonces:

- $c_B(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c_B(\mathbf{u}) + c_B(\mathbf{v})$ para toda \mathbf{u}, \mathbf{v} en \mathcal{V}
- $c_B(\alpha \mathbf{v}) = \alpha c_B(\mathbf{v})$ para todo escalar α y toda \mathbf{v} en \mathcal{V}
- $c_B(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p) si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en \mathcal{V}
- Para toda \mathbf{v}_B en \mathbb{R}^p (o \mathbb{C}^p) existe exactamente una \mathbf{v} en \mathcal{V} tal que $c_B(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_B$.

DEMOSTRACION. Problema 17. ■

La representación de vectores abstractos usando una base es una herramienta esencial en las aplicaciones. El hecho de que todos los cálculos con vectores abstractos en \mathcal{V} se puedan hacer de modo equivalente con sus coordenadas en \mathbb{R}^p (o \mathbb{C}^p) dice que, para fines prácticos, \mathcal{V} y \mathbb{R}^p (o \mathbb{C}^p) son equivalentes. Matemáticamente, a cualquier función c_B de \mathcal{V} a \mathbb{R}^p (o \mathbb{C}^p) que satisfaga el teorema 5.38 a)-d) se conoce como un *isomorfismo* entre esos espacios, y a esos espacios se les llama *isomorfos*. Por lo tanto, es posible referirse al mapeo de coordenadas c_B como al *isomorfismo de coordenadas*.

(5.39)

Corolario clave

- a) Todo espacio vectorial real de dimensión p es isomorfo a \mathbb{R}^p .
- b) Todo espacio vectorial complejo de dimensión p es isomorfo a \mathbb{C}^p .

Esto explica por qué el conjunto de matrices $p \times 1$ es tan importante: permite trabajar con todos los espacios vectoriales de dimensión finita. El isomorfismo c_B no sólo permite efectuar cálculos sencillos con las coordenadas en lugar de con los vectores abstractos, sino que también permite comprobar, entre otras cosas, la independencia lineal y la generación, mediante las coordenadas; véanse los problemas del 18 al 21. El siguiente principio general –aun cuando no es un teorema– se puede usar como guía, aunque su uso, en cualquier caso específico, requiera de justificación.

(5.40) **Principio del isomorfismo.** Suponga que c_B es el isomorfismo de coordenadas con respecto a la base ordenada B para un espacio vectorial real o complejo de dimensión p , \mathcal{V} . Una propiedad algebraica –esencialmente una que implica los conceptos de dependencia e independencia lineal, base, generación o dimensión– es válida para un conjunto S en \mathcal{V} si y sólo si es válida para la imagen $c_B(S)$, en donde $c_B(S)$ es el conjunto de todos los vectores v_B en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p que satisfacen $v_B = c_B(v)$ para alguna v en S .

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 22.

Cambio de base

Ya aparecieron ejemplos en los que se usó más de una base simultáneamente; en el ejemplo 5.36, se escribieron polinomios en términos tanto de $\{1; t; t^2\}$ como de $\{1; 1+t; 1+t+t^2\}$. Ese ejemplo fue esencialmente un ejercicio para encontrar

las coordenadas con respecto a una base ordenada partiendo de aquéllas con respecto a otra. Este problema de “traducción” es importante, y se hará gran uso de la técnica en capítulos posteriores. Por lo pronto se desarrollará este tópico.

Suponga que

$$B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_p\} \text{ y que } B' = \{\mathbf{v}'_1; \mathbf{v}'_2; \dots; \mathbf{v}'_p\}$$

son dos bases ordenadas para el mismo espacio vectorial real o complejo de dimensión p , \mathcal{V} . Para entender cómo se traduce entre las coordenadas en B y las coordenadas en B' , primero se escribirá cada vector \mathbf{v}'_i de la base ordenada B' como una combinación de los vectores \mathbf{v}_j de la base ordenada B como sigue:

$$(5.41) \quad \mathbf{v}'_i = m_{1i}\mathbf{v}_1 + m_{2i}\mathbf{v}_2 + \dots + m_{pi}\mathbf{v}_p,$$

es decir,

$$c_B(\mathbf{v}') = \mathbf{m}_i = [m_{1i} \ m_{2i} \ \dots \ m_{pi}]^T.$$

Suponga que se tienen las coordenadas B' , $c_{B'}(\mathbf{v})$ y que se quieren conocer las coordenadas B , $c_B(\mathbf{v})$. Esto es, se tiene $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p$ tales que $\mathbf{v} = \alpha'_1\mathbf{v}'_1 + \dots + \alpha'_p\mathbf{v}'_p$ y se desea encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{v}_p$. Del teorema 5.38 sobre el isomorfismo c_B y de (5.41) se sabe que (usando notación de matrices separadas)

$$(5.42) \quad \begin{aligned} c_B(\mathbf{v}) &= c_B(\alpha'_1\mathbf{v}'_1 + \dots + \alpha'_p\mathbf{v}'_p) \\ &= \alpha'_1 c_B(\mathbf{v}'_1) + \dots + \alpha'_p c_B(\mathbf{v}'_p) \\ &= \alpha'_1 \mathbf{m}_1 + \alpha'_2 \mathbf{m}_2 + \dots + \alpha'_p \mathbf{m}_p \\ &= [\mathbf{m}_1 \ \mathbf{m}_2 \ \dots \ \mathbf{m}_p] [\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_p]^T \\ &= \mathbf{M} c_{B'}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

en donde \mathbf{M} es la matriz $p \times p$, $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \ \mathbf{m}_2 \ \dots \ \mathbf{m}_p]$.

Lo anterior dice cómo obtener las coordenadas en B partiendo de las coordenadas en B' : solamente hay que multiplicar por la matriz $p \times p$, \mathbf{M} , cuyos elementos $(\mathbf{M})_{ij}$ son iguales a m_{ij} de 5.41. A la inversa, es posible obtener las coordenadas en B' partiendo de las coordenadas en B y multiplicando por \mathbf{M}^{-1} , porque \mathbf{M} es no singular. Para comprobar que \mathbf{M} es no singular, suponga que $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$; si puede demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces el **teorema clave 4.18** dirá que \mathbf{M} es no singular. Sea \mathbf{v} el vector en \mathcal{V} cuyas coordenadas en B' , α'_i son los elementos de alguna \mathbf{x} para la cual $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$: $\alpha'_i = \langle \mathbf{x} \rangle_i$. Por (5.42), las coordenadas en B de \mathbf{v} son justamente $\mathbf{M}\mathbf{x}$, que es igual a $\mathbf{0}$; entonces,

$$\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \text{ en } \mathcal{V}.$$

Pero si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en \mathcal{V} , entonces sus coordenadas en B' son todas 0 ya que B' es linealmente independiente; como \mathbf{v} se definió para que esas coordenadas fueran los $\langle \mathbf{x} \rangle_i$, se tiene que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{Mx} = \mathbf{0}$, \mathbf{M} es no singular. Esto demuestra el siguiente resultado que es extremadamente importante:

(5.43) **Teorema clave (cambio de base).** Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_p\}$ y $B' = \{\mathbf{v}'_1; \dots; \mathbf{v}'_p\}$ dos bases ordenadas para el mismo espacio vectorial \mathcal{V} de dimensión p . Para cualquier vector \mathbf{v} en \mathcal{V} , las coordenadas en B , \mathbf{v}_B de \mathbf{v} y las coordenadas en B' , $\mathbf{v}_{B'}$ de \mathbf{v} se relacionan por

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{M}\mathbf{v}_{B'} \text{ y } \mathbf{v}_{B'} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_B,$$

en donde \mathbf{M} es la matriz no singular $p \times p$ con elementos $\langle \mathbf{M} \rangle_{ij} = m_{ij}$, en donde $\mathbf{v}'_i = m_{1i}\mathbf{v}_1 + \dots + m_{pi}\mathbf{v}_p$.

(5.44) **Ejemplo.** Considere de nuevo el espacio polinomial \mathcal{P}^3 y las dos bases ordenadas $B = \{1; t; t^2\}$ y $B' = \{1; 1+t; 1+t+t^2\}$ de \mathcal{P}^3 del ejemplo 5.36. Para moverse entre ellas, es necesaria la matriz \mathbf{M} : cada \mathbf{v}'_i se debe escribir en términos de las \mathbf{v}_j como en (5.41), lo cual es fácil:

$$\mathbf{v}'_1 = 1 = 1(1) + 0(t) + 0(t^2) \quad \text{para la primera columna de } \mathbf{M};$$

$$\mathbf{v}'_2 = 1+t = 1(1) + 1(t) + 0(t^2) \quad \text{para la segunda columna};$$

$$\mathbf{v}'_3 = 1+t+t^2 = 1(1) + 1(t) + 1(t^2) \quad \text{para la tercera.}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y se encuentra } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es posible usar a \mathbf{M} y a \mathbf{M}^{-1} para traducir coordenadas. Para escribir $7 - 3t + 4t^2$ en términos de B' se tomarán sus coordenadas en B , $[7 \ -3 \ 4]^T$ y se multiplicarán por \mathbf{M}^{-1} obteniendo $[10 \ -7 \ 4]^T$ como coordenadas en B' ; como comprobación, observe que

$$(10)(1) + (-7)(1+t) + (4)(1+t+t^2) = (10 - 7 + 4) + (-7 + 4)t + (4)t^2 \\ = 7 - 3t + 4t^2,$$

como se necesitaba. Más generalmente, las coordenadas en B' de

$$a + bt + ct^2 \text{ son } \mathbf{M}^{-1}[a \ b \ c]^T = [a-b \ b-c \ c]^T,$$

que precisamente fue lo que se encontró en el ejercicio 5.36.

PROBLEMAS 5.4

- ▷ 1. Encuentre un subconjunto de los siguientes vectores que forme una base para \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ -1 \ 2]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-1 \ 0 \ 3]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = [0 \ -1 \ 5]^T, \quad \mathbf{v}_4 = [3 \ -2 \ 2]^T.$$

2. Encuentre una base para el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^3 que consiste en todos aquellos vectores

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

que satisfacen $x_1 = 0$.

3. Encuentre una base para el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^3 que consiste en todos aquellos vectores

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

que satisfacen a $x_1 + x_2 = 0$.

4. Encuentre una base para el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^4 que consiste en todos aquellos vectores

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

que satisfacen a $x_1 - x_2 = 0$, y $x_3 - x_4 = 0$.

- ▷ 5. Encuentre una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6. Partiendo del conjunto $\{1, 2 + 2t, 1 - t + t^2, 2 - t^2\}$, encuentre una base de \mathcal{P}^3 , el espacio vectorial real de polinomios de grado estrictamente menor que 3.

- ▷ 7. Encuentre una base para el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6 entre los vectores del conjunto.

$$\{1, t + 3, t + t^2, 2t - 1\}.$$

- ▷ 8. Se dice que un conjunto *infinito* de vectores es una base de un espacio vectorial \mathcal{V} si y sólo si es linealmente independiente –véase el problema 19 de la sección 5.3– y todo vector en el espacio puede escribirse como una combinación lineal de un número finito de los vectores de la base. Mostrar que el conjunto $\{1, t, t^2, \dots\}$ es una base para el espacio vectorial real \mathcal{P} de todos los polinomios.

9. En la definición 5.30 se dijo que la dimensión de $\{\mathbf{0}\}$ es igual a 0. Esto es porque este espacio no tiene base –está generado por $\{\mathbf{0}\}$, pero $\{\mathbf{0}\}$ no es una base; explique por qué.
10. Agregue tantos vectores como sea necesario al conjunto $\{1 + t, t + t^2\}$ a fin de obtener una base para el espacio \mathcal{P}^3 del problema 6.
- ▷ 11. Demuestre que los siguientes vectores *no* forman una base para \mathbb{R}^3 .
- $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
12. Explique por qué se puede tener la certeza, sin hacer cálculos, de que el siguiente conjunto debe ser linealmente dependiente en \mathbb{R}^2 :
- $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ 36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -42.6 \\ 31.421 \end{bmatrix} \right\}.$$
13. Demuestre que la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita es igual al mínimo del número de vectores en todos los conjuntos generadores posibles para el espacio.
- ▷ 14. Determine con argumentos si el siguiente conjunto genera a \mathbb{R}^3 :
- $$\{[\pi^2 \quad 2.35 \quad \sqrt{\pi}]^T, [-3.289 \quad \pi + 2 \quad 1]^T\}.$$
15. Sea $B = \{[1 \ 1 \ 0]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [0 \ 1 \ 1]^T\}$ una base ordenada de \mathbb{R}^3 .
- Encuentre la segunda coordenada de $\mathbf{v} = [1 \ 2 \ 3]^T$ con respecto a B .
 - Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{v} = [a \ b \ c]^T$ con respecto a B .
 - Encuentre una fórmula para el isomorfismo de coordenadas $c_B(\mathbf{v})$ para cualquier \mathbf{v} en \mathbb{R}^3 .
- ▷ 16. Sea $B = \{1 + t + t^2; 1 + t; 1\}$ una base ordenada del espacio \mathcal{P}^3 del problema 6 (véase el ejemplo 5.36).
- Encuentre las coordenadas de $2 - 3t + 6t^2$ con respecto a B .
 - Encuentre el vector de coordenadas de $a + bt + ct^2$ con respecto a B .
 - Encuentre una fórmula para el isomorfismo de coordenadas $c_B(\mathbf{v})$ para cualquier vector \mathbf{v} en \mathcal{P}^3 .
17. Demuestre el teorema 5.38.
18. Sea c_B el isomorfismo de coordenadas con respecto a una base ordenada B del espacio vectorial real \mathcal{V} de \mathbb{R}^p . Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente en \mathcal{V} si y sólo si $\{c_B(\mathbf{v}_1), \dots, c_B(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^p .
- ▷ 19. Sea c_B como en el problema 18. Demuestre que un vector \mathbf{v} en \mathcal{V} es linealmente dependiente de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ en \mathcal{V} si y sólo si $c_B(\mathbf{v})$ es linealmente dependiente de $c_B(\mathbf{v}_1), \dots, c_B(\mathbf{v}_r)$ en \mathbb{R}^p .

20. Sea c_B como en el problema 18. Demuestre que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ en \mathcal{V} si y sólo si $c_B(\mathbf{u}) = c_B(\mathbf{v})$ en \mathbb{R}^p .
- ▷ 21. Sea c_B como en el problema 18. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ es una base para \mathcal{V} si y sólo si $\{c_B(\mathbf{u}_1), \dots, c_B(\mathbf{u}_r)\}$ es una base para \mathbb{R}^p .
22. Por el teorema 5.38 d) sobre el isomorfismo c_B , para cada \mathbf{v}_B existe una única \mathbf{v} en \mathcal{V} tal que $c_B(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_B$. Esto quiere decir que existe el *isomorfismo inverso* c_B^{-1} que envía a toda \mathbf{v}_B a aquella \mathbf{v} que c_B mapea de nuevo a \mathbf{v}_B . Demuestre que

$$c_B^{-1}(\mathbf{u}_B + \mathbf{v}_B) = c_B^{-1}(\mathbf{u}_B) + c_B^{-1}(\mathbf{v}_B),$$

que

$$c_B^{-1}(\alpha \mathbf{v}_B) = \alpha c_B^{-1}(\mathbf{v}_B),$$

y que

$$c_B^{-1}(\mathbf{v}_B) = \mathbf{0} \text{ en } \mathcal{V}$$

si y sólo si $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p .

23. Los conjuntos

$$B = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\} \quad \text{y} \quad B' = \{[1 \ 2 \ 3]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [3 \ 4 \ 6]^T\}$$

son ambos bases ordenadas de \mathbb{R}^3 . Encuentre la matriz \mathbf{M} que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

▷ **24. Los conjuntos**

$$B = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$$

son ambos bases ordenadas de \mathbb{R}^3 . Encuentre la matriz \mathbf{M} , en términos de los \mathbf{v}_i , que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

25. Los conjuntos

$$B = \{1 + t; t + t^2; 1 + t^2\} \quad \text{y} \quad B' = \{1; 1 + t; 1 + t + t^2\}$$

son bases ordenadas del espacio \mathcal{P}^3 del problema 6. Encuentre la matriz \mathbf{M} que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

26. Suponga que

$$B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1\}$$

son ambos bases ordenadas de \mathbb{R}^3 . Encuentre la matriz \mathbf{M} que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

27. Suponga que

$$B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_p\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}_p; \mathbf{v}_{p-1}; \dots; \mathbf{v}_1\}$$

son dos bases ordenadas de \mathbb{R}^p . Encuentre la matriz M que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

▷ 28. Los conjuntos

$$B = \{[1 \ 2 \ 2 \ 1]^T; [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T; [2 \ 0 \ 4 \ -3]^T\}$$

y

$$B' = \{[0 \ 2 \ 0 \ 1]^T; [2 \ 1 \ 4 \ -1]^T; [1 \ 2 \ 2 \ 4]^T\}$$

son bases del mismo subespacio de \mathbb{R}^4 . Encuentre la matriz M que hace el cambio de coordenadas con respecto a esas dos bases.

29. Suponga que B , B' y B'' son todas bases para el espacio vectorial real V ; sea M la matriz que traduce de las coordenadas en B' y sea M' la matriz que traduce de las coordenadas en B'' a las coordenadas en B' . Encuentre la matriz que traduce de las coordenadas en B'' a las coordenadas en B .

5.5 BASES Y MATRICES

La mayor parte de la sección precedente presentó resultados con respecto a cosas que *pueden* hacerse —*pueden* eliminarse vectores de conjuntos linealmente independientes para formar una base, y así sucesivamente. Sin embargo, la sección no explica *cómo* llevar a cabo tales tareas. Dado un conjunto generador, *cómo* se puede encontrar una base entre sus elementos? Dado un conjunto linealmente independiente, *cómo* se pueden encontrar vectores adicionales para tenderlo a una base?

El material sobre cambio de base es la excepción a esta perspectiva de la sección 5.4; ese material mostró explícitamente *cómo* “traducir” entre distintas bases para el mismo espacio. Allí, la clave fue usar la teoría de matrices desarrollada en capítulos anteriores. En esta sección, las matrices proporcionarán nuevamente respuestas a las preguntas “cómo”. Para usar matrices, nos restringiremos a \mathbb{R}^p , \mathbb{C}^p , y sus subespacios; observe, sin embargo, que esta “restrictión” significa que *los resultados serán aplicables a todos los espacios vectoriales reales o complejos de dimensión p*. Para ver esto, recuerde (5.40) el principio del Isomorfismo: para resolver algún problema concerniente a un conjunto en V , resuévalo mejor para el conjunto en \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p que consiste en todos los vectores de coordenadas de ese conjunto en V . Así, las técnicas de este capítulo pueden realmente ser aplicadas, a través de los vectores de coordenadas, para resolver problemas en todos los espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita.

Pensando en esto, ahora nos “restringiremos” al uso de matrices columna. Como las matrices $p \times 1$ son vectores en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p , conceptos de espacio vectorial tales como dependencia lineal se aplican a ellos; como el conjunto de

todas las matrices renglón $1 \times q$ también es un espacio vectorial, los mismos conceptos también se aplicarán a ellas.

Operaciones de renglón y dependencia lineal

Dos hechos sencillos pero fundamentales sobre operaciones de renglón proporcionan respuestas a varias preguntas.

(5.45)

Teorema clave (operaciones de renglón y dependencia lineal) Suponga que una sucesión de operaciones elementales de renglón transforma a A en B , entonces:

- una colección dada de columnas de A es linealmente dependiente (independiente) si y sólo si la correspondiente colección de columnas de B es linealmente dependiente (independiente);
- una matriz renglón puede escribirse como una combinación lineal de –esto es, es linealmente dependiente de –todos los renglones (no cero) de A si y sólo si se puede escribir como una combinación lineal de todos los renglones (no cero) de B .

DEMOSTRACION. Sea F la matriz no singular que el **teorema clave 3.34** garantiza que cumplirá con $FA = B$.

- Sea a_1, \dots, a_r una colección de r columnas de A , y sea b_1, \dots, b_r la correspondiente colección de columnas de B ; por la regla de multiplicación de matrices separadas, $b_i = FA_i$ para toda i . Como F es no singular, $Fx = 0$ si y sólo si $x = 0$. Considere a x como una combinación lineal de las a_i ; Fx es esa misma combinación, pero en las b_i . Por lo tanto, una combinación de las a_i es 0 si y sólo si esa misma combinación en las b_i es 0 . Esto significa que una colección es linealmente dependiente si y sólo si la otra lo es.
- Una matriz renglón y es una combinación lineal de los renglones de A si y sólo si $y = xA$ para alguna matriz renglón x ; pero $y = xA$ si y sólo si

$$y = xF^{-1}FA = x'B \text{ donde } x' = xF^{-1},$$

porque $FA = B$; y $y = x'B$ si y sólo si y es una combinación lineal de los renglones de B . ■

Observe que a), en el teorema, se refiere a *columnas* y a *columnas seleccionadas* de entre todas las columnas; b), en contraste, se refiere a *renglones*, y a *todos los renglones juntos*.

La idea básica para usar este teorema en el estudio de problemas sobre dependencia lineal de columnas o renglones de una matriz A , es sencilla: crear una forma reducida de Gauss o una forma escalón reducida por filas B partiendo

de \mathbf{A} y entonces estudiar tales problemas sobre la matriz \mathbf{B} que es más sencilla y en donde su respuesta será trivial.

Problemas sobre dependencias y bases

Para que funcione esta idea básica, se debe entender la dependencia lineal entre las columnas de una matriz en la forma reducida de Gauss o en forma escalón reducida por renglón. La clave en cualquiera de estas formas es que la i -ésima columna delantera en ambas tiene un 1 en su i -ésimo elemento y ceros abajo mientras que todas las columnas a su izquierda tienen cero en el renglón i así como en los renglones inferiores. Esto aclara que las columnas delanteras forman un conjunto linealmente independiente y que cada columna a la izquierda de la i -ésima columna delantera depende linealmente de las primeras $i - 1$ columnas delanteras. Cada renglón no cero de una forma reducida de Gauss comienza con ceros hasta que uno se topa con el 1 de la columna delantera que corresponde a ese renglón; ya que todos los 1 se mueven más hacia la derecha con cada renglón sucesivo, también es claro que esos renglones forman un conjunto linealmente independiente. Resumiendo:

- (5.46) **Teorema** (matrices reducidas y dependencia). Suponga que \mathbf{G} está en la forma reducida de Gauss y que tiene rango k . Entonces:
- El conjunto de k columnas delanteras de \mathbf{G} es linealmente independiente.
 - Cualquier columna a la izquierda de la primera columna delantera de \mathbf{G} es una columna cero. Cualquier columna a la izquierda de la i -ésima columna delantera de \mathbf{G} , (para $i > 1$) es linealmente dependiente de las primeras $i - 1$ columnas delanteras. Cualquier columna a la derecha de la k -ésima columna delantera es linealmente dependiente de las k columnas delanteras.
 - El conjunto de k renglones diferentes de cero de \mathbf{G} es linealmente independiente.

Los dos teoremas anteriores son herramientas de cálculo útiles.

- (5.47) **Ejemplo.** Considere el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{C}^4 generado por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Se buscará una base para \mathcal{V}_0 , con la que se descubrirá su dimensión. Se usarán las cuatro columnas de arriba como las columnas de una matriz \mathbf{A} , se reducirá \mathbf{A} a \mathbf{G} , su forma reducida de Gauss, se usará el teorema 5.46 para

identificar las columnas delanteras de \mathbf{G} que son linealmente independientes y generadoras de todas las demás columnas, y entonces se usará el **teorema clave 5.45** para deducir que las columnas correspondientes de \mathbf{A} forman una base para \mathcal{V}_0 que contiene k –el rango de \mathbf{G} y de \mathbf{A} – vectores. Este proceso produce

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ y entonces } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango es 3, y las columnas delanteras son las primeras tres. Por lo tanto, las primeras tres columnas de \mathbf{A} forman una base para \mathcal{V}_0 , y la dimensión de \mathcal{V}_0 es 3.

Este ejemplo muestra el proceso para reducir un conjunto generador a una base. Un problema distinto es el de extender un conjunto linealmente independiente para obtener una base.

(5.48) **Ejemplo.** Sea \mathcal{V}_0 el subespacio de \mathbb{R}^4 de todas las soluciones de

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Los dos vectores $[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ y $[0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ están en \mathcal{V}_0 y forman un conjunto linealmente independiente. El problema es extender este conjunto (si es necesario) para obtener una base de \mathcal{V}_0 . El enfoque será formar una matriz \mathbf{A} con esas dos columnas como sus primeras columnas y con las columnas de *alguna* base de \mathcal{V}_0 como columnas posteriores, reducir \mathbf{A} a \mathbf{G} , una forma reducida de Gauss, usar el teorema 5.46 para identificar las columnas delanteras de \mathbf{G} –las que incluirán las primeras dos columnas de \mathbf{A} ya que las dos \mathbf{A} son independientes una de otra– como linealmente independientes y generadoras de las demás, y entonces tomar las correspondientes columnas de \mathbf{A} como la base aumentada. Para obtener *alguna* base para \mathcal{V}_0 , se procederá como en el ejemplo 5.26 para encontrar la solución general de la ecuación y luego escribir la base. Se encunetra fácilmente que la solución general es:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de manera que esas tres matrices columna forman claramente una base de \mathcal{V}_0 . Se formará la matriz \mathbf{A} con los dos vectores dados originalmente como

las dos primeras columnas y como las últimas tres, y entonces \mathbf{A} se reducirá a la forma reducida de Gauss \mathbf{G} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y entonces}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las columnas delanteras de \mathbf{G} son las primeras tres, por lo tanto, las primeras tres columnas de \mathbf{A} servirán como base: el conjunto original de dos vectores se expande agregándole el vector $[1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ para obtener una base con tres vectores, y por lo tanto la dimensión de \mathcal{V}_0 es 3.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 10.

Espacio columna y espacio renglón

Los problemas que se resolvieron en los dos ejemplos anteriores hicieron uso del hecho de que el conjunto de columnas de una matriz \mathbf{A} que corresponde a las columnas delanteras de una matriz reducida de Gauss \mathbf{G} de \mathbf{A} es linealmente independiente, y de que todas las columnas de \mathbf{A} son linealmente dependientes de aquéllas. Por lo tanto, cualquier matriz columna que sea una combinación lineal de todas las columnas de \mathbf{A} es una combinación lineal de esas columnas especiales de \mathbf{A} . En otras palabras, esas columnas especiales forman una base para el subespacio de \mathbb{R}^p o de \mathbb{C}^p generado por todas las columnas de \mathbf{A} . Este espacio tiene un nombre especial, el *espacio columna* de \mathbf{A} ; por analogía, también hay un *espacio renglón*.

- (5.49) **Definición.** Sea \mathbf{A} una matriz $p \times q$.
- a) El *espacio columna* real (o complejo) de \mathbf{A} es el subespacio de \mathbb{R}^p (o de \mathbb{C}^p) que está generado por el conjunto de columnas de \mathbf{A} .
 - b) El *espacio renglón* real (o complejo) de \mathbf{A} es el subespacio del espacio vectorial real (o complejo) de todas las matrices $1 \times q$ que está generado por el conjunto de renglones de \mathbf{A} .

Según esta terminología, es sencillo formular un resultado fundamental que es consecuencia inmediata de los **teoremas clave 5.45 y 4.23**, y del teorema 5.46.

(5.50)

Teorema clave (espacios renglón/columna y rango). Si A tiene rango k , entonces

- El espacio columna de A tiene dimensión k , y una base de él consiste en el conjunto de columnas de A correspondientes a las columnas delanteras de cualquier forma reducida de Gauss de A .
- El espacio renglón de A tiene dimensión k , y una base de él consiste en los renglones no cero en cualquier forma reducida de Gauss de A .
- La matriz $A, p \times p$, es no singular si y sólo si sus columnas forman un conjunto linealmente independiente, en cuyo caso el espacio columna tiene dimensión p .
- La matriz $A, p \times p$, es no singular si y sólo si sus renglones forman un conjunto linealmente independiente, en cuyo caso el espacio renglón tiene dimensión p .

De acuerdo con esto, el rango de A podría haberse *definido* como la dimensión del espacio columna o como la dimensión del espacio renglón; como el espacio columna de A es (isomorfo a) el espacio renglón de A^T (o de A^H), esto indica que los rangos de A , A^T y A^H son iguales.

(5.51) **Corolario** (rango de renglón = rango de columna). Los rangos de A , A^T , y A^H son iguales.

Algunas veces nos encontramos con dos subconjuntos S_1 y S_2 de \mathbb{R}^p o de \mathbb{C}^p y es necesario saber si generan exactamente el mismo espacio. Si se toman los *transpuestos* de los vectores en S_1 y se usan como los *renglones* de una matriz A_1 , y se hace lo mismo con S_2 para obtener una A_2 , entonces es posible volver a formular la pregunta de si A_1 y A_2 tendrán el mismo espacio columna. Esta se puede contestar fácilmente.

(5.52) **Teorema** (espacios renglón iguales). Sean A_1 una matriz $r \times q$ y $A_2 s \times q$. Entonces el espacio renglón de A_1 y el espacio renglón de A_2 serán los mismos si y sólo si los renglones diferentes de cero de la forma escalón reducida por renglón de A_1 son iguales a los renglones diferentes de cero de la forma escalón reducida por renglón de A_2 .

DEMOSTRACION (formas \Rightarrow espacios). Como los renglones diferentes de cero en las formas escalón reducida por renglón (que son formas reducidas de Gauss) forman bases para los espacios renglón, si los renglones diferentes de cero en las formas son iguales, entonces los espacios renglón son iguales.

(espacios \Rightarrow formas) Si los espacios renglón \neq son iguales, naturalmente tienen la misma dimensión p , por lo tanto hay p renglones diferentes

de cero en las dos formas escalón reducida por renglón \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 ; sean \mathbf{R}'_1 y \mathbf{R}'_2 las matrices $p \times q$ formadas por los primeros p renglones diferentes de cero de \mathbf{R}_1 y de \mathbf{R}_2 . Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ los renglones de \mathbf{R}'_1 en orden, y sean $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_p$ los renglones de \mathbf{R}'_2 en orden; cada uno de estos conjuntos forman una base ordenada para \mathcal{V} . Se utilizará el material de la sección 5.4 sobre el cambio de base para escribir

$$\mathbf{v}'_i = m_{1i}\mathbf{v}_1 + m_{2i}\mathbf{v}_2 + \cdots + m_{pi}\mathbf{v}_p$$

exactamente como en (5.41). En el **teorema clave 5.43** se encontró que la matriz \mathbf{M} , $p \times p$, formada por $\langle \mathbf{M} \rangle_{ij} = m_{ij}$ es no singular. La ecuación de arriba, interpretada elemento por elemento, dice

$$\langle \mathbf{v}'_i \rangle_k = \langle \mathbf{M}^T \rangle_{i1} \langle \mathbf{v}_1 \rangle_k + \langle \mathbf{M}^T \rangle_{i2} \langle \mathbf{v}_2 \rangle_k + \cdots + \langle \mathbf{M}^T \rangle_{ip} \langle \mathbf{v}_p \rangle_k.$$

Como las \mathbf{v}'_i son los renglones de \mathbf{R}'_2 mientras que las \mathbf{v}_i son los renglones de \mathbf{R}'_1 , esto quiere decir que $\mathbf{R}'_2 = \mathbf{M}^T \mathbf{R}'_1$. Ya que \mathbf{M} es no singular, también lo es \mathbf{M}^T ; por lo tanto se puede escribir a \mathbf{M}^T como un producto de matrices elementales, cada una de las cuales corresponde a la ejecución de una operación elemental de renglón. En otras palabras, \mathbf{R}'_2 se puede generar partiendo de \mathbf{R}'_1 por medio de operaciones elementales; entonces, \mathbf{R}'_2 es la forma escalón reducida por renglón de \mathbf{R}'_1 , la cual a su vez ya está en forma escalón reducida por renglón. Como la forma escalón reducida por renglón de una matriz es única, $\mathbf{R}'_1 = \mathbf{R}'_2$, como se había afirmado. ■

- (5.53) **Ejemplo.** Suponga que se necesita determinar si los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

generan el mismo subespacio de \mathbb{C}^3 que los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Se formará la matriz \mathbf{A}_1 , 4×3 , de los transpuestos del primer conjunto y la matriz \mathbf{A}_2 3×3 con los transpuestos del segundo conjunto:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Reduciendo estas matrices a su forma escalón reducida por renglón \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 ,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los renglones diferentes de cero en \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 son iguales; por lo tanto, los conjuntos originales generan el mismo subespacio de \mathbb{C}^3 .

PROBLEMAS 5.5

▷ 1. Encuentre una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Demuestre el teorema 5.46.

3. Encuentre una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

4. Encuentre una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

▷ 5. Encuentre los valores de k para que los vectores

$$[3-k \quad -1 \quad 0]^T, \quad [-1 \quad 2-k \quad -1]^T, \quad \text{y} \quad [0 \quad -1 \quad 3-k]^T$$

generen un espacio bidimensional.

6. Considere el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^4 que consiste en todos los vectores

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

que satisfacen $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Determine si S es una base para \mathcal{V}_0 , en donde

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- ▷ 7. Extienda a $S = \{[1 \ 1 \ 2 \ 3]^T\}$ para formar una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 que consiste en todos los vectores de la forma

$$[a \ b - a \ b \ b + a]^T$$

para todos los números reales a y b .

8. Extender $S = \{[3 \ 1 \ 1 \ 1]^T, [3 \ 0 \ 2 \ 1]^T\}$ para formar una base para el subespacio de \mathbb{R}^4 que consiste en todos aquellos vectores

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

que satisfacen a $x_1 - x_2 = x_3 + x_4$.

9. Extienda el conjunto siguiente para que forme una base para \mathbb{R}^4 :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

10. Dé los detalles de la demostración del **teorema clave 5.50**.

- ▷ 11. Encuentre una base para el espacio columna de \mathbf{A} de entre sus columnas, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

12. Encuentre una base para el espacio renglón de la matriz \mathbf{A} del problema 11:

a) Usando el **teorema clave 5.50 b)** como de costumbre.

b) De entre los renglones de \mathbf{A} mediante el **teorema clave 5.50 a)** sobre \mathbf{A}^T y después tomando transpuestos de las columnas resultantes.

- ▷ 13. Encuentre la dimensión y una base para el espacio columna de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 14. Encuentre la dimensión y una base para el espacio renglón de la matriz A del problema 13:
- Como en el problema 12 a)
 - Como en el problema 12 b)
15. Demuestre que los dos conjuntos siguientes S_1 y S_2 generan el mismo subespacio de \mathbb{R}^3 .

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ▷ 16. Demuestre que los dos conjuntos siguientes, S_1 y S_2 generan el mismo subespacio de \mathbb{R}^3 .

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

17. Determine si los dos conjuntos siguientes S_1 y S_2 , generan el mismo subespacio de \mathbb{R}^3 .

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

18. Como la forma escalón reducida por renglón de una matriz generalmente contiene muchos ceros, puede pensarse que sus renglones dan una base de vectores “simples” para el espacio renglón de A o –después de tomar transpuestos– para el espacio columna de A^T . Encontrando la forma escalón reducida para renglón del transpuesto de la matriz A del ejemplo 5.47, encuentre una base de vectores “simples” para el subespacio \mathcal{V}_0 de ese ejemplo.

- ▷ 19. Utilice el enfoque del problema 18 para encontrar una base de vectores “simples” para el espacio columna –por lo tanto tendrá que trabajar con A^T – de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 5 & -2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -8 & 10 & 5 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -6 & 9 & 14 & -9 \end{bmatrix}.$$

20. Demuestre que el espacio columna de AB es un subespacio del espacio columna de A.

21. Mediante el problema 20, demuestre que el rango de \mathbf{AB} es menor que o igual al de \mathbf{A} .
- ▷ 22. a) Utilice el hecho de que el rango de \mathbf{C} es igual al de \mathbf{C}^T y el resultado del problema 21, para demostrar que el rango de \mathbf{AB} es menor o igual al rango de \mathbf{A} y al rango de \mathbf{B} .
 b) Dé un ejemplo para demostrar que la igualdad puede ser válida en a) y otro ejemplo para demostrar que la desigualdad también puede ser válida en a).

5.6 LONGITUD Y DISTANCIA EN ESPACIOS VECTORIALES: NORMAS

Se abrió este capítulo con el propósito declarado de tratar aspectos geométricos de los vectores. Ciertamente, hasta ahora el material sobre subespacios y temas relacionados ha tenido un sabor fuertemente geométrico. No obstante, términos tales como “longitud” y “ángulo”, han faltado en todo esto excepto en la sección 5.1, cuando se estudiaron los vectores geométricos. Se tratará ahora tanto la longitud como la distancia de \mathbf{u} a \mathbf{v} (definida como la longitud de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$).

En la sección 5.1 se vio que $(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$ da la acostumbrada longitud física del vector geométrico bidimensional \mathbf{u} que corresponde a la matriz $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$; en tres dimensiones, el teorema de Pitágoras nuevamente da, para la longitud física, a $(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$. Parece natural entonces, medir la longitud, o magnitud, o tamaño de un vector \mathbf{u} en \mathbb{R}^p por

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_p^2)^{1/2}.$$

Esto es, en efecto muy útil.

Pero hay circunstancias en las que es significativa otra medida para el tamaño de un vector \mathbf{u} . En el modelo de las poblaciones de zorros y gallinas de la sección 2.3, por ejemplo, era importante la matriz $\mathbf{x}_i = [Z_i \ G_i]^T$, donde se representaba con Z_i el número de zorros y con G_i el número de gallinas. En este caso, $(Z_i^2 + G_i^2)^{1/2}$ no tiene significado intuitivo. Es más significativa $|Z_i| + |G_i|$ –la población total– o quizás $\max\{|Z_i|, |G_i|\}$ –la población mayor.

En otras aplicaciones, pueden ser más apropiadas otras nociones de la magnitud y longitud de un vector que cualquiera de las que se acaban de mencionar. Por otra parte la palabra *norma* se usará para describir la noción general de longitud siempre que satisfaga ciertas propiedades naturales que la mayoría de la gente asocia intuitivamente con una sensación de longitud.

- (5.54) **Definición.** Una *norma* (o *norma vectorial*) en \mathcal{V} es una función que asigna a cada vector \mathbf{v} en \mathcal{V} un número real no negativo, llamado la *norma* de \mathbf{v} y está simbolizada por $\|\mathbf{v}\|$ (o algunas veces por $\|\mathbf{v}\|_r$), y satisface las siguientes condiciones:
- a) $\|\mathbf{v}\| > 0$ para $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, y $\|\mathbf{0}\| = 0$

- b) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$ para todo escalar α y todo vector \mathbf{v}
- c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (la desigualdad del triángulo) para todo vector \mathbf{u} y \mathbf{v} .

La tercera condición, c), se llama la *desigualdad del triángulo* porque es una generalización –véase (5.2) para confirmar– del hecho de que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Hay tres formas en \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p que se usan frecuentemente en las aplicaciones.

- (5.55) **Definición.** Se definen las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ –y se llaman la norma 1, la norma 2 y la norma ∞ – para vectores $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^T$ en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p , como sigue:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p| \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_p\|^2)^{1/2} \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}.\end{aligned}$$

- (5.56) **Ejemplo.** Sea $\mathbf{x} = [-5 \ 3 \ -2]^T$ y sea $\mathbf{y} = [2 + i \ -1 - i \ 2 \ 1]^T$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= 10, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = (38)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = 5, \\ \|\mathbf{y}\|_1 &= \sqrt{5} + \sqrt{2} + 3, \quad \|\mathbf{y}\|_2 = (12)^{1/2}, \quad \text{y} \quad \|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Para comprobar que las cantidades de la definición 5.55 son en realidad normas, se debe verificar que satisfacen las condiciones de la definición 5.54; véanse los problemas del 9 al 11. El único obstáculo en esto es demostrar que $\|\cdot\|_2$ satisface la desigualdad del triángulo la cual es consecuencia de un resultado importante llamado la *desigualdad de Schwarz*. Para exponerla, se usará la transpuesta hermitiana H de la definición 1.20 y la expresión $\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ para dos matrices columna $p \times 1$:

por comodidad en la notación, se tratará a la matriz 1×1 , $\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ como igual a su único elemento.

De este modo, si $\mathbf{x} = [1 \ 2 \ -3]^T$ y $\mathbf{y} = [2 \ 1 \ 1]^T$, se tiene que $\mathbf{x}^H\mathbf{y} = 1$ en lugar de lo que es técnicamente correcto pero notacionalmente inconveniente $\mathbf{x}^H\mathbf{y} = [1]$. Con esta notación, se puede escribir

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^H\mathbf{x})^{1/2}.$$

- (5.57) **Teorema clave (desigualdad de Schwarz).** Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} matrices columna $p \times 1$. Entonces

$$|\mathbf{x}^H\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

DEMOSTRACION. Se tiene que para todos los números α ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|_2^2 &= \mathbf{x}^H\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}^H\mathbf{y} + \bar{\alpha}\mathbf{y}^H\mathbf{x} + \alpha\bar{\alpha}\mathbf{y}^H\mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x}\|_2^2 + \alpha\mathbf{x}^H\mathbf{y} + \bar{\alpha}\mathbf{y}^H\mathbf{x} + |\alpha|^2\|\mathbf{y}\|_2^2. \end{aligned}$$

Como la desigualdad es verdaderamente válida si $\mathbf{x}^H\mathbf{y} = 0$, suponga que $\mathbf{x}^H\mathbf{y} \neq 0$ y haga $\alpha = -\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2/\mathbf{x}^H\mathbf{y}}{|\mathbf{x}^H\mathbf{y}|^2}$ en la expresión de arriba. Combinando términos y usando $\mathbf{y}^H\mathbf{x} = \mathbf{x}^H\mathbf{y}$, se obtiene

$$0 \leq -\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^4 \|\mathbf{y}\|_2^2}{|\mathbf{x}^H\mathbf{y}|^2},$$

de donde resulta inmediatamente la desigualdad de Schwarz. ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 11.

Convergencia

A menudo es importante, en las aplicaciones, conocer cómo se comporta una sucesión de vectores \mathbf{x}_i a medida que i tiende a infinito. En la sección 2.2 se presentó un modelo de competencia mercantil en el que la sucesión \mathbf{x}_i que representaba las acciones del mercado tenía a un límite \mathbf{x}_∞ ; en la sección 2.3 se presentó un modelo de poblaciones en competencia en el que la sucesión \mathbf{x}_i , representando poblaciones, a veces tenía a $\mathbf{0}$, a veces explotaba, y demás. Como las normas miden la magnitud de los vectores, proporcionan la herramienta natural para describir de manera precisa lo que se quiere decir cuando, por ejemplo, se dice que la sucesión de vectores \mathbf{x}_i tiende a $\mathbf{0}$: significará que sus magnitudes $\|\mathbf{x}_i\|$ tienden a 0.

(5.58) **Definición.** Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathcal{V} . Una sucesión de vectores \mathbf{v}_i converge al vector \mathbf{v}_∞ si y sólo si la sucesión de números reales $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_\infty\|$ converge a 0.

Con esta definición, se puede hablar ahora de una sucesión de vectores en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p que converge mediante el uso de normas; ¿pero cuál norma se deberá usar? El hecho interesante es: no importa –todas son “equivalentes” como se demostrará ahora.

Partiendo de sus definiciones, es claro que $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq p\|\mathbf{x}\|_\infty$ si \mathbf{x} es $p \times 1$; igualmente, $\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}\|_1^2$. Aplicando la desigualdad de Schwarz a los vectores \mathbf{x} en donde $\langle \mathbf{x} \rangle_i = |u|_i$, y a \mathbf{y} en donde $\langle \mathbf{y} \rangle_i = 1$, se obtiene $\|\mathbf{u}\|_1 \leq p^{1/2}\|\mathbf{u}\|_2$ si \mathbf{u} es $p \times 1$. De este modo, si cualquiera de las normas 1, 2 o ∞ de una sucesión de matrices $p \times 1$ tiende a cero, entonces todas las demás lo hacen, y también lo hacen los elementos de las matrices.

(5.59) **Teorema** (equivalencia de normas). Las normas 1, 2 e ∞ en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p) son equivalentes en el sentido de que:

- Si una sucesión \mathbf{x}_i de vectores converge a \mathbf{x}_∞ , en *una* de las normas, entonces convergerá a \mathbf{x}_∞ en *las tres normas* y los elementos $\langle \mathbf{x}_i \rangle_j$ convergerán a los elementos $\langle \mathbf{x}_\infty \rangle_j$.
- Para todas las matrices \mathbf{x} , $p \times 1$,

$$\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{p}} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \sqrt{p}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}\|_1}{p} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

En realidad, esta equivalencia es un caso especial de un teorema más general que dice que dos normas cualesquiera en un espacio de dimensión finita son equivalentes, pero por ahora no se desarrollará esto.

(5.60) **Ejemplo.** Examinando los elementos, intuitivamente es claro que la sucesión de vectores

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} i \\ (i+1) & 2 \\ i \end{bmatrix}^T$$

converge hacia $\mathbf{x}_\infty = [1 \ 0]^T$. De acuerdo con la definición 5.58, sin embargo, la convergencia debería expresarse en términos de las normas de

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\infty = \begin{bmatrix} -1 \\ (i+1) & 2 \\ i \end{bmatrix}^T.$$

De aquí es fácil ver que $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\infty\|_\infty = 2/i$, lo que ciertamente converge a 0; por el teorema 5.59, también lo hacen las demás normas de $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\infty$, como se puede comprobar con facilidad directamente. La definición formal de convergencia coincide con la noción intuitiva.

PROBLEMAS 5.6

- ▷ 1. Para cada uno de los siguientes vectores \mathbf{x} , calcule $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ y $\|\mathbf{x}\|_\infty$:
- $[2 \ -5]^T$
 - $[2i \ 0 \ -3i]^T$
 - $[2 \ -5 \ 5]^T$
 - $[i \ -i \ 1 \ -1]^T$
 - $[0 \ 0 \ 0]^T$
 - $[5i \ -3 \ 4]^T$
2. Sea S el conjunto de puntos –una línea recta– en \mathbb{R}^2 de la forma $[1 \ t]^T$ para todos los números reales t . Encuentre los puntos o el punto en S , para cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ que están más cerca de $\mathbf{0}$.

3. Calcule $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$, $\|\mathbf{x}\|_2$, y $\|\mathbf{y}\|_2$, y verifique la desigualdad de Schwarz para cada uno de los siguientes pares de vectores.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. Demuestre gráficamente que el llamado círculo unitario $\|\cdot\|_2$ en \mathbb{R}^2 , que es el conjunto de aquellos vectores \mathbf{x} para los que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ es de hecho el círculo de radio 1 con centro en el origen.
- ▷ 5. Describa el llamado círculo unitario $\|\cdot\|_1$ y el círculo unitario $\|\cdot\|_\infty$ (véase el problema 4) en \mathbb{R}^2 .
6. Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^p y que \mathbf{A} es una matriz real $p \times p$ no singular, y defina $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ por medio de $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = \|\mathbf{Ax}\|$. Demuestre que $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ es una norma en \mathbb{R}^p .
7. Calcule en cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$, la norma de cada una de las columnas de $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$, definiéndose \mathbf{A} y \mathbf{A}' como sigue. (Nótese que \mathbf{A} es no singular mientras que \mathbf{A}' es singular)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 2 & 0.002 & 1.002 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5005 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 2 & 0.002 & 1.002 \end{bmatrix}$$

- ▷ 8. a) Aplicando la desigualdad de Schwarz al desarrollo de

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_2^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^H(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

demuestre la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|_2$.

- b) A la inversa, utilice la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|_2$ para demostrar la desigualdad de Schwarz.

9. Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma.

10. Demuestre que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma.

11. Demuestre que $\|\cdot\|_2$ es una norma.

- ▷ 12. Para la sucesión de vectores \mathbf{x}_i siguiente, encuentre el límite \mathbf{x}_∞ . Utilice cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ para comprobar que \mathbf{x}_i converge a \mathbf{x}_∞ .

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \frac{2i+3}{i+1} \\ \frac{i-2}{i^2+2} \\ \frac{i^2+1}{i^2-1} \end{bmatrix}$$

▷ 13. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Demuestre que

$$|||u|| - ||v||| \leq \|u - v\| \text{ para toda } u \text{ y } v \text{ en } \mathcal{V}.$$

14. a) Utilice el problema 13 para demostrar que si u_i converge a u_∞ en el espacio vectorial \mathcal{V} que tiene norma $\|\cdot\|$, entonces $\|u_i\|$ converge a $\|u_\infty\|$.
 b) Dé un ejemplo en \mathbb{R}^2 para demostrar que las normas pueden converger sin que los vectores converjan.
- ▷ 15. En \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p), suponga que u_i converge a u_∞ y que v_i converge a v_∞ en alguna de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$. Demuestre que $u_i^T v_i$ converge a $u_\infty^T v_\infty$ (o que $u_i^H v_i$ converge a $u_\infty^H v_\infty$).
16. Suponga que B es una base ordenada para el espacio real (o complejo) de dimensión p \mathcal{V} , y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.
 a) Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p). Demuestre que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ es una norma en \mathcal{V} , donde $\|v\|_{\mathcal{V}}$ se define igual a $\|c_B(v)\|$ para v en \mathcal{V} .
 b) Suponga que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ es una norma en \mathcal{V} . Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p) en donde $\|v_B\|$ se define como $\|c_B^{-1}(v_B)\|_{\mathcal{V}}$ para v_B en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p), en donde $c_B^{-1}(v_B)$ es el único v en \mathcal{V} para el que $c_B(v) = v_B$.
17. Sea \mathcal{V} igual a \mathbb{P}^3 , el espacio vectorial real de polinomios de grado estrictamente menor que 3, y sea $B = \{1; 1 + t; t + t^2\}$ una base ordenada de \mathcal{V} . Encontrar, para cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^3 , una fórmula para la norma $\|a + bt + ct^2\|_{\mathcal{V}}$ en \mathcal{V} como se definió en el problema 16 a).
- ▷ 18. Sean \mathcal{V} y B como se definieron en el problema 17, y definase $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ en \mathcal{V} como

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left\{ \int_0^1 |v(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

Encuentre una fórmula para la norma $\|[a \ b \ c]^T\|$ en \mathbb{R}^3 como se definió en el problema 16 b).

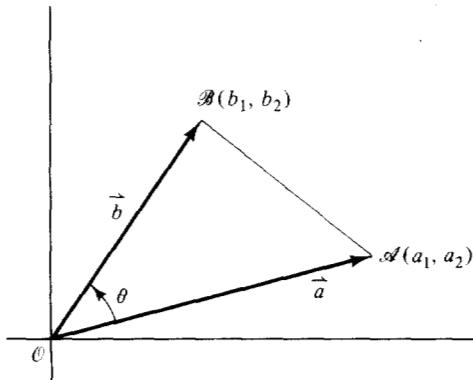
5.7 ANGULO EN LOS ESPACIOS VECTORIALES: PRODUCTOS INTERIORES

En la sección 5.1 se demostró –véase (5.3)– que el hecho de que dos vectores geométricos \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares se puede expresar en lenguaje matricial como $u^T v = [0]$, en donde u corresponde a \vec{u} y v a \vec{v} como se describió en esa sección. Por ello, el concepto de *ángulo recto* puede expresarse a través del producto especial $u^T v$ entre matrices columna. Se demostró que *ángulo* se puede expresar más generalmente de este modo.

El ángulo entre vectores geométricos

Considérese el ángulo θ entre los vectores geométricos \vec{a} y \vec{b} en (5.61)

(5.61)



De la trigonometría, la ley de los cosenos dice que

$$|\mathcal{AB}|^2 = |\mathcal{OA}|^2 + |\mathcal{OB}|^2 - 2|\mathcal{OA}||\mathcal{OB}| \cos \theta$$

en donde $|\mathcal{PQ}|$ es la distancia entre los puntos \mathcal{P} y \mathcal{Q} . Por el teorema de Pitágoras se obtiene

$$|\mathcal{OA}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$|\mathcal{OB}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$|\mathcal{AB}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ley de los cosenos y agrupando términos, se llega a

$$-2(a_1 b_1 + a_2 b_2) = -2(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}(b_1^2 + b_2^2)^{1/2} \cos \theta.$$

Si se deja que $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T$ y $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$, y se escribe a $a_1 b_1 + a_2 b_2$ como $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$, la ecuación anterior se podrá escribir como

$$-2\mathbf{a}^T \mathbf{b} = -2\|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 \cos \theta$$

y por lo tanto:

- (5.62) Si θ es el ángulo entre los dos vectores geométricos diferentes de cero \vec{a} y \vec{b} que corresponden a las matrices \mathbf{a} y \mathbf{b} , 2×1 , entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2}.$$

Ahora, suponga que se quieren medir los ángulos entre dos vectores geométricos tridimensionales; si se hace pasar un plano a través de esos vectores, entonces aparecerán, en ese plano, como bidimensionales y se podrán medir los ángulos como antes. Resulta que es la misma fórmula que en (5.62), excepto que ahora \mathbf{a} y \mathbf{b} son matrices 3×1 que contienen las coordenadas de las "cabezas" de los vectores geométricos. Este planteamiento funciona porque el ángulo entre dos vectores en realidad es un concepto bidimensional definido por los dos vectores y el plano que ellos determinan; aplicando el mismo tratamiento para el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^p , se llega de nuevo a la misma fórmula de (5.62), en donde ahora \mathbf{a} y \mathbf{b} son $p \times 1$.

Productos interiores

Las conclusiones de arriba demuestran que el concepto de ángulo entre dos vectores en \mathbb{R}^p está contenido en las nociones del producto especial $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ y en la norma 2, que a la vez puede definirse a través de este producto porque $\|\mathbf{a}\|_2 = (\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{1/2}$. Para desarrollar un concepto de ángulo entre dos vectores en espacios vectoriales arbitrarios se requiere entonces de un concepto semejante a este producto especial $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$.

(5.63) Definición.

- a) (el caso *real*) Sea \mathcal{V} un espacio vectorial real. Un *producto interno* en \mathcal{V} es una función que asigna a cada par ordenado de vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathcal{V} , un número real que se denota (\mathbf{u}, \mathbf{v}) y que satisface las siguientes condiciones.

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para toda \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathcal{V} .
2. $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, y
 $(\mathbf{w}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ para toda \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} en \mathcal{V} y todos los números reales α y β .
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

El ángulo θ entre dos vectores diferentes de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} se define por su coseno:

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}}.$$

- b) (el caso *complejo*) Sea \mathcal{V} un espacio vectorial complejo. Un producto interior de \mathcal{V} es una función que asigna a cada par ordenado de vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , un número posiblemente complejo, que se denota (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , y que satisface las siguientes condiciones:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ para toda \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathcal{V} .
2. $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \bar{\beta}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, y
 $(\mathbf{w}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ para toda \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} en \mathcal{V} y todos los números complejos α y β .
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Esta definición de productos interiores se da en dos partes para simplificar las cosas para aquéllos que no estén familiarizados con los números complejos. Las únicas diferencias en los casos, implican la aparición del conjugado complejo en 1) y 2) y la omisión del ángulo en el caso complejo.

- (5.64) **Ejemplo.** Se conoce como el *producto interior estándar* (\mathbf{u}, \mathbf{v}) en \mathbb{R}^p al producto definido como (el elemento en) $\mathbf{u}^H \mathbf{v}$.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + \cdots + u_p v_p,$$

en donde $u_i = \langle \mathbf{u} \rangle_i$ y $v_i = \langle \mathbf{v} \rangle_i$. Siempre se usará este producto interior estándar a menos que se diga otra cosa explícitamente.

- (5.65) **Ejemplo.** Se conoce como el *producto interior estándar* (\mathbf{u}, \mathbf{v}) en \mathbb{C}^p al producto definido como (el elemento en) $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{u}_1 v_1 + \cdots + \bar{u}_p v_p,$$

en donde $u_i = \langle \mathbf{u} \rangle_i$ y $v_i = \langle \mathbf{v} \rangle_i$. Siempre se usará este producto interno estándar en \mathbb{C}^p , a menos que se diga otra cosa explícitamente.

- (5.66) **Ejemplo.** Considere el espacio vectorial real de polinomios de grado estrictamente menor que 3, \mathcal{P}^3 . Se define (\mathbf{u}, \mathbf{v}) para dos polinomios $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ como

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t) dt.$$

Es fácil comprobar que esto define a un producto interior, es decir, que satisface la definición 5.63 a). Al integrar se demuestra, por ejemplo, que $(1 + t, t^2) = 7/12$.

Los productos interiores estándar en \mathbb{R}^p y en \mathbb{C}^p definieron la norma 2 de un vector como $\|\mathbf{v}\|_2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$. Lo mismo es válido para los productos interiores en general, pero se necesita primero de la desigualdad de Schwarz.

- (5.67) **Teorema** (desigualdad de Schwarz). Sea (\mathbf{u}, \mathbf{v}) un producto interior en el espacio vectorial real o complejo \mathcal{V} . Entonces

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} \text{ para toda } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ en } \mathcal{V}.$$

DEMOSTRACION. Esta demostración imita a la del **teorema clave 5.57**; problema 13. ■

- (5.68) **Teorema** (normas de productos interiores). Sea (\mathbf{u}, \mathbf{v}) un producto interior en \mathcal{V} , y definase a $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$. Entonces $\|\cdot\|$ es una norma en \mathcal{V} (se dice que es la norma *inducida* por el producto interior).

DEMOSTRACION. Problema 14. ■

- (5.69) **Ejemplo.** Considere un producto interior no estándar en \mathbb{R}^2 definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = 3u_1v_1 + u_2v_2.$$

Es fácil demostrar que éste es un producto interior, y por lo tanto define a una norma inducida

$$\|\mathbf{u}\| = (3u_1^2 + u_2^2)^{1/2}.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 15.

Ortogonalidad

En geometría elemental, los ángulos rectos y las rectas perpendiculares (también llamadas *ortogonales*) juegan un papel especialmente importante. Lo mismo sucede aquí. Como el coseno de un ángulo recto es igual a cero, se tiene que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ para vectores ortogonales en \mathbb{R}^p . Se usará esta misma relación para *definir* a la ortogonalidad, inclusive en espacios vectoriales complejos.

- (5.70) **Definición.** Sea (\cdot, \cdot) un producto interior en \mathcal{V} y (para el resto del capítulo) sea $\|\cdot\|$ su norma inducida según el teorema 5.68.

- a) Se dice que dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son *ortogonales* si y sólo si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.
- b) Se dice que un conjunto de vectores es *ortogonal* si y sólo si cada par de vectores del conjunto es ortogonal, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ para toda $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ de ese conjunto.
- c) Si se usa un vector no cero \mathbf{u} para producir $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces se dice que \mathbf{u} ha sido *normalizada* para producir el *vector normalizado* \mathbf{v} .
- d) Se dice que un conjunto de vectores es *ortonormal* si y sólo si el conjunto es ortogonal y $\|\mathbf{v}\| = 1$ para todo \mathbf{v} en el conjunto.

Por las propiedades de los productos interiores, $(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = (0\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. Esto es:

En cualquier espacio vectorial con producto interior, $\mathbf{0}$ es ortogonal a cada uno de los vectores.

PROBLEMAS 5.7

- ▷ 1. Encuentre el ángulo entre los dos vectores geométricos bidimensionales \vec{u} y \vec{v} correspondientes a

$$\mathbf{u} = [1 \quad \sqrt{3}]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = [2\sqrt{3} \quad 2]^T.$$

2. Encuentre el ángulo entre los dos vectores de \mathbb{R}^5 ,

$$\mathbf{u} = [1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 1]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = [2 \ 1 \ -3 \ 1 \ -1]^T.$$

3. a) Encuentre el ángulo entre los dos vectores de \mathbb{R}^2 (usando el producto interior estándar) $\mathbf{u} = [1 \ 1]^T$ y $\mathbf{v} = [1 \ -1]^T$.
 b) Encuentre el “ángulo” entre \mathbf{u} y \mathbf{v} si se usa el producto interior no estándar del ejemplo 5.69, para definir la geometría.
- ▷ 4. Encuentre la forma general de todos aquellos vectores \mathbf{v} en \mathbb{R}^3 que son ortogonales a $\mathbf{n} = [1 \ 2 \ -1]^T$.
5. Suponga que \mathcal{V} tiene un producto interior, y que \mathbf{n} está en \mathcal{V} . Demuestre que el conjunto \mathcal{V}_0 de todos los vectores en \mathcal{V} que son ortogonales a \mathbf{n} es un subespacio.
6. Suponga que \mathcal{V} tiene un producto interno y que $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ está en \mathcal{V} . Defínase \mathcal{V}_1 como el conjunto de todos los vectores en \mathcal{V} que satisfacen $(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = 1$.
- a) Demuestre que \mathcal{V}_1 no es un subespacio.
 b) Demuestre que todo vector \mathbf{v}_1 en \mathcal{V}_1 se puede escribir como la suma $\mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|^2}{\|\mathbf{n}\|^2}$ de un vector \mathbf{v}_0 en el subespacio \mathcal{V}_0 del problema 5 y el múltiplo $\frac{\mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|^2}{\|\mathbf{n}\|^2}$ de \mathbf{n} , y que efectivamente está en \mathcal{V}_1 todo vector \mathbf{v}_1 que tenga esa forma.
- ▷ 7. Suponga que \mathbf{n} es un vector no cero en $\mathcal{V} = \mathbb{R}^p$. Demuestre que la dimensión del subespacio \mathcal{V}_0 del problema 5 es $p - 1$.
8. Sea \mathcal{P}^3 el espacio vectorial real de los polinomios con grado estrictamente menor que 3; defina el producto interior entre los polinomios

$$\mathbf{f} = f_1 + f_2t + f_3t^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = g_1 + g_2t + g_3t^2$$

como

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3.$$

encuentre el ángulo entre $\mathbf{f} = t$ y $\mathbf{g} = t^2 - t + 1$.

- ▷ 9. Suponga que \mathcal{V} es un espacio vectorial real con un producto interior. Demuestre que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, en donde $\|\cdot\|$ es la acostumbrada norma inducida.

10. La definición de la norma inducida se dedujo de la del producto interior. A la inversa, para un espacio vectorial *real* con un producto interior, demuestre que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)/4.$$

11. Sea $C[0, 1]$ el espacio vectorial real de las funciones continuas con valores reales en $0 \leq t \leq 1$. Defina el producto interior de dos funciones f y g en $C[0, 1]$ como

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

- a) Verifique que esto es un producto interior.
 b) Escriba la desigualdad de Schwarz para este caso.

- ▷ 12. a) Demuestre que el producto interior en $C[0, 1]$ del problema 11 define un producto interior en \mathcal{P}^3 , el espacio vectorial real de los polinomios de grado estrictamente menor que 3; generalice este resultado para subespacios \mathcal{V}_0 de espacios vectoriales \mathcal{V} que tienen un producto interior.
 b) Encuentre el ángulo entre t y $t^2 - t + 1$.
13. Demuestre el teorema 5.67 sobre la desigualdad de Schwarz imitando la demostración del **teorema clave 5.57**.
14. Demuestre el teorema 5.68 de que la “norma” inducida por un producto interior es realmente una norma.
- ▷ 15. Sea B una base ordenada para un espacio vectorial real (o complejo) de dimensión p \mathcal{V} , y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.

- a) Suponga que (\cdot, \cdot) es cualquier producto interior en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p), y defina

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}} = (c_B(\mathbf{u}), c_B(\mathbf{v})) \quad \text{para } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ in } \mathcal{V}.$$

Demuestre que $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$ es un producto interior en \mathcal{V} .

- b) Suponga que $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$ es un producto interior en \mathcal{V} . Defínase

$$(\mathbf{u}_B, \mathbf{v}_B) = (c_B^{-1}(\mathbf{u}_B), c_B^{-1}(\mathbf{v}_B))_{\mathcal{V}} \quad \text{para } \mathbf{u}_B, \mathbf{v}_B \text{ en } \mathbb{R}^p \text{ (o en } \mathbb{C}^p\text{)},$$

en donde $c_B^{-1}(\mathbf{u}_B)$ es el vector único \mathbf{u} en \mathcal{V} cuyas coordenadas en B son \mathbf{u}_B . Demuestre que (\cdot, \cdot) es un producto interior.

16. Determine si el conjunto siguiente es ortogonal y si es ortonormal.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

17. Producza un conjunto ortonormal normalizando los vectores en el conjunto ortogonal

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

▷ 18. Suponga que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ forman un conjunto ortogonal de vectores en el espacio vectorial \mathcal{V} con producto interior. Demuestre que

$$\|\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p\|^2 = |\alpha_1|^2\|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + |\alpha_p|^2\|\mathbf{v}_p\|^2.$$

19. Demuestre que $\{1, t - \frac{1}{2}\}$ es un conjunto ortogonal en el espacio \mathcal{P}^3 del problema 12, y normalícelo para obtener un conjunto ortogonal.
 20. Demuestre que el conjunto original del problema 19 es una base para el subespacio \mathcal{P}^2 de \mathcal{P}^3 .

5.8 PROYECCIONES ORTOGONALES Y BASES: ESPACIOS GENERALES Y GRAM-SCHMIDT

Los conjuntos ortogonales, tal como se introdujeron en la sección 5.7, son de importancia extrema tanto teórica como computacionalmente. En esta sección y en la siguiente, se presentarán algunas indicaciones sobre la razón de esto.

Proyecciones ortogonales

El primer resultado será esencial para la derivación del resto de la sección; sin embargo, también es importante por derecho propio.

- (5.71) **Teorema** (proyecciones ortogonales). Sea \mathcal{V} un espacio vectorial con un producto interior. Sea \mathcal{V}_0 el subespacio de \mathcal{V} generado por un conjunto ortogonal

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$$

de vectores *diferentes de cero*. Defina la *proyección ortogonal* P_0 sobre \mathcal{V}_0 como sigue: para cualquier \mathbf{v} en \mathcal{V} , sea

$$P_0\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_q\mathbf{v}_q, \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)}.$$

Entonces:

- a) $\mathbf{v} - P_0\mathbf{v}$ es ortogonal a todo vector \mathbf{v}_0 en \mathcal{V}_0 .
- b) $P_0(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = P_0\mathbf{u} + P_0\mathbf{v}$ para toda \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathcal{V} .
- c) $P_0(\alpha\mathbf{v}) = \alpha P_0\mathbf{v}$ para todo escalar α y todo vector \mathbf{v} en \mathcal{V} .

DEMOSTRACION

- a) Primero, observe que $\mathbf{v} - P_0\mathbf{v}$ es ortogonal a cada \mathbf{v}_i :

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v} - P_0\mathbf{v}) = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}) - \alpha_1(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1) - \cdots - \alpha_q(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_q) = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}) - \alpha_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 0.$$

Como cada v_0 en \mathcal{V}_0 es una combinación lineal de las v_i , cada una de ellas satisface $(v_i, v - P_0v) = 0$, se obtiene, como se había afirmado, $(v_0, v - P_0v) = 0$.

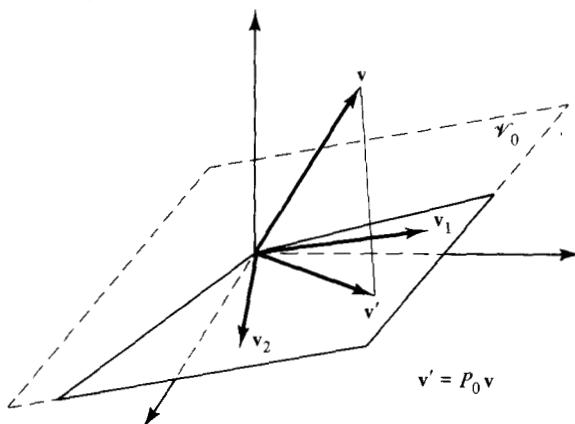
b) y c) son consecuencia inmediata de la definición de los coeficientes α_i .

Por ejemplo, el coeficiente α_i en $P_0(\alpha v)$ es

$$(v_i, \alpha v)/(v_i, v_i) = \alpha(v_i, v)/(v_i, v_i),$$

que es exactamente α veces el coeficiente α_i de P_0v . ■

(5.72) *Ejemplo.* Suponga que \mathcal{V} es \mathbb{R}^3 y que $q = 2$; entonces \mathcal{V}_0 es un plano. A continuación se muestra la interpretación geométrica de $v' = P_0v$:



Mejores aproximaciones

La sección 2.6 sobre mínimos cuadrados demostró que al determinar parámetros en modelos matemáticos, a menudo es necesario aproximar un vector dado como combinación lineal de otros vectores dados. Si los vectores con los cuales se forma la combinación lineal son mutuamente *ortogonales*, entonces la solución del problema es directa.

(5.73) **Teorema** (mejor aproximación). Sea \mathcal{V} un espacio vectorial con un producto interior y con una norma inducida $\|\cdot\|$, y sea \mathcal{V}_0 el subespacio generado por el conjunto *ortogonal* de vectores diferentes de cero v_1, \dots, v_q . Entonces, para cualquier v , P_0v es el único punto más cercano en \mathcal{V}_0 a v , y $\|v - P_0v\|$ es la *distancia de v a \mathcal{V}_0* , en el sentido de que P_0v está en \mathcal{V}_0 y

$$\|v - P_0v\| < \|v - v_0\| \text{ para todo } v_0 \neq P_0v \text{ en } \mathcal{V}_0.$$

DEMOSTRACION. Por conveniencia, llámese \hat{v}_0 a $P_0\mathbf{v}$, el cual está claramente en \mathcal{V}_0 por la definición de $P_0\mathbf{v}$; para cualquier \mathbf{v}_0 en \mathcal{V}_0 , se calculará $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|$ como sigue:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \\ &= (\mathbf{v} - \hat{v}_0 + \hat{v}_0 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \hat{v}_0 + \hat{v}_0 - \mathbf{v}_0) \\ &= (\mathbf{v} - \hat{v}_0, \mathbf{v} - \hat{v}_0) + (\mathbf{v} - \hat{v}_0, \hat{v}_0 - \mathbf{v}_0) \\ &\quad + (\hat{v}_0 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \hat{v}_0) + (\hat{v}_0 - \mathbf{v}_0, \hat{v}_0 - \mathbf{v}_0).\end{aligned}$$

Por el teorema 5.71 a), $\mathbf{v} - \hat{v}_0$ es ortogonal a todos los vectores en \mathcal{V}_0 , incluyendo a $\hat{v}_0 - \mathbf{v}_0$; los dos términos intermedios de los cuatro términos a la derecha, arriba, son por lo tanto iguales a cero. Esa igualdad entonces es

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|^2 = \|\mathbf{v} - \hat{v}_0\|^2 + \|\hat{v}_0 - \mathbf{v}_0\|^2.$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|^2 > \|\mathbf{v} - \hat{v}_0\|^2$ a menos que $\mathbf{v}_0 = \hat{v}_0$. ■

Según el teorema 5.73, es fácil encontrar la mejor aproximación en un subespacio dado \mathcal{V}_0 a un vector dado \mathbf{v} siempre y cuando se tenga un conjunto generador ortogonal para \mathcal{V}_0 que esté formado por vectores diferentes de cero. Ya que el problema de una mejor aproximación surge tan a menudo en las aplicaciones, se tratará el tema de los conjuntos generadores ortogonales.

Bases ortogonales y ortonormales

Por la notación, se ha ocultado un poco un aspecto importante del teorema principal sobre la proyección ortogonal: todo conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero es linealmente independiente. Para visualizarlo, suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ es ese conjunto y que

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_q\mathbf{v}_q = \mathbf{0};$$

tomando el producto interior con cada \mathbf{v}_j resulta

$$0 = (\mathbf{v}_j, \mathbf{0}) = (\mathbf{v}_j, c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_q\mathbf{v}_q) = c_j(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j),$$

lo que significa que $c_j = 0$ porque $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) > 0$. Por lo tanto, cualquier conjunto generador ortogonal de vectores diferentes de cero es un conjunto generador ortogonal linealmente independiente –esto es, una *base ortogonal* para \mathcal{V}_0 . El teorema de la proyección ortogonal dice que las bases ortogonales son extremadamente sencillas de usar cuando se desea encontrar la mejor aproximación a un vector \mathbf{v} : se puede escribir inmediatamente como

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_q\mathbf{v}_q$$

estando definidas las α_i en el teorema. Si sucediera que v mismo está en \mathcal{V}_0 , entonces, verdaderamente, v es la mejor aproximación a sí misma en \mathcal{V}_0 . Y se obtiene

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q$$

definiéndose las α_i como en el teorema. Es decir,

Es posible expresar un vector v como una combinación lineal de vectores en una base ortogonal sin tener que resolver ecuaciones para determinar los coeficientes –simplemente, se evalúan algunos productos interiores para obtener directamente los coeficientes.

- (5.74) **Teorema** (bases ortogonales) Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ una base ortogonal (u ortonormal). Entonces, la representación de cualquier vector v con respecto a la base ortogonal B puede escribirse inmediatamente:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q, \quad \text{donde} \quad \alpha_i = \frac{(v_i, v)}{(v_i, v_i)}.$$

Se encontró un caso especial de esto ya hace tiempo, cuando se vio la facilidad de expresar cualquier vector en \mathbb{R}^p como una combinación lineal de e_1, \dots, e_p , vectores que forman una base ortonormal para \mathbb{R}^p , de modo que los coeficientes en la representación de v son

$$\alpha_i = \frac{(e_i, v)}{(e_i, e_i)} = \langle v \rangle_i.$$

Ahora podrá resolver problemas del 1 al 5.

Creación de bases ortogonales y ortonormales: Gram-Schmidt

Los problemas relativos a mejor aproximación son fáciles de resolver *en cuanto se cuenta con una base ortogonal para el subespacio de aproximación*. Pero éste no siempre es el caso en las aplicaciones. Una base así es tan conveniente, que a menudo se podría tratar de *crear* una para un espacio dado. Esto trae a colación la siguiente pregunta:

Dada una base o un conjunto generador S para un espacio vectorial con un producto interior, ¿cómo se puede encontrar un base ortogonal u ortonormal para el espacio?

En espacios de dimensión finita esto puede hacerse de una manera directa. El método que se usa se llama el proceso de *Gram-Schmidt*. El teorema siguiente

parece complicado, pero la idea es sencilla: el proceso de Gram-Schmidt produce una base ortogonal partiendo de un conjunto generador y detecta si el conjunto generador es linealmente dependiente.

(5.75) **Teorema clave** (Gram-Schmidt por proyecciones). Sea $S = \{v_1, \dots, v_q\}$ un conjunto generador del espacio vectorial \mathcal{V} que tiene un producto interior. El proceso de Gram-Schmidt es como sigue: sea \mathcal{V}_i el subespacio de \mathcal{V} generado por $\{v_1, \dots, v_i\}$ y sea P_i la proyección ortogonal sobre \mathcal{V}_i (calculada como indica el teorema 5.71, mediante los conjuntos ortogonales siguientes, B_i); si $\mathcal{V}_i = \{0\}$, sea $P_i v = 0$ para toda v .

1. Defina $u_1 = v_1$.
2. Para $2 \leq i \leq q$, defina $u_i = v_i - P_{i-1} v_i$.

Lo que sigue es válido para los vectores producidos mediante este procedimiento:

- a) $B = \{u_1, \dots, u_q\}$ es un conjunto ortogonal que genera a \mathcal{V} .
- b) Para $1 \leq i \leq q$, $B_i = \{u_1, \dots, u_i\}$ es un conjunto ortogonal que genera a \mathcal{V}_i , el subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_i\}$.
- c) $u_i = 0$ si y sólo si v_i es linealmente dependiente de los vectores v_1, \dots, v_{i-1} .
- d) Puede obtener una base ortogonal para \mathcal{V} a partir del conjunto generador ortogonal B omitiendo las u_i iguales a cero, si las hubiere.
- e) Si S es una base para \mathcal{V} , entonces B es una base ortogonal para \mathcal{V} .

DEMOSTRACION

- a) es b), pero con $i = q$.
- b) Se usará la inducción, ya que $u_1 = v_1$, b) es válido para $i = 1$, y P_1 está bien definido. Suponga que b) es válido para $i = k < q$, de modo que P_k puede construirse usando B_k ; por definición, se tiene que

$$\#) \quad u_{k+1} = v_{k+1} - P_k v_{k+1}, \quad \text{entonces} \quad v_{k+1} = u_{k+1} + P_k v_{k+1}.$$

Ya que P_k se proyecta sobre \mathcal{V}_k , $P_k v_{k+1}$ está en \mathcal{V}_k y, por la hipótesis de inducción, es una combinación lineal de u_1, \dots, u_k . Por lo tanto, $\#)$ expresa v_{k+1} como una combinación lineal de u_1, \dots, u_{k+1} ; como las v_i que anteceden son combinaciones lineales de u_1, \dots, u_i (por la hipótesis inductiva), b) es válida para $i = k + 1$, y por lo tanto es válida para toda i .

- c) Ya que $u_i = v_i - P_{i-1} v_i$ y $P_{i-1} v_i$ es linealmente dependiente de v_1, \dots, v_{i-1} , el resultado es válido.
- d) La omisión de los vectores cero no cambia la generación de B , y un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero es linealmente independiente.

e) es consecuencia de d), porque puede haber vectores \mathbf{u}_i diferentes de cero. ■

Para enfatizar se repetirá que:

El procedimiento de Gram-Schmidt produce un conjunto generador ortogonal a partir de un conjunto generador y detecta si el conjunto original es linealmente dependiente.

Notacionalmente, el proceso de Gram-Schmidt es sencillo:

$$\text{Calcule } \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - P_{i-1}\mathbf{v}_i.$$

Pero aún queda la pregunta: ¿Cómo se calcula $P_{i-1}\mathbf{v}_i$ en la práctica? Hay varios caminos para ello, cuando menos dos de los cuales –el “proceso de Gram-Schmidt modificado” y el “proceso de Householder” mencionados en los problemas del 12 al 17– son útiles numéricamente y están disponibles en programas confiables de computadora. El camino tradicional, a continuación, es menos eficaz en la práctica (véase el problema 11).

El problema es calcular $P_{i-1}\mathbf{v}_i$. En el teorema 5.71 se vio que es fácil calcular la proyección ortogonal sobre un subespacio cuando se tiene un conjunto generador ortogonal para ese subespacio; el subespacio es \mathcal{V}_{i-1} , y la sección b) del teorema de Gram-Schmidt dice que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$ es justamente dicho conjunto generador ortogonal. *En cada paso, el procedimiento del Gram-Schmidt produce el conjunto generador ortogonal requerido para el siguiente paso;* en eso radica su elegancia. A la luz de lo anterior, el procedimiento de Gram-Schmidt puede implementarse –aunque no es bueno computacionalmente– como

(5.76) *El procedimiento tradicional de Gram-Schmidt.* Dado un conjunto generador $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$:

1. Defina $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$.
2. Para $2 \leq i \leq q$, defina

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \alpha_{i1}\mathbf{u}_1 - \cdots - \alpha_{i-1,i}\mathbf{u}_{i-1},$$

en donde $\alpha_{ji} = (\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i)/(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)$ si $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$ y $\alpha_{ji} = 0$ si $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$.

(Véase también el problema 9.)

(5.77) *Ejemplo.* Suponga que se quiere una base ortogonal para el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por

$$\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [2 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = [0 \quad 3 \quad 3 \quad -3]^T, \quad \mathbf{v}_4 = [-1 \quad 2 \quad 2 \quad 1]^T.$$

El procedimiento descrito en (5.76) da

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ -1]^T;$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\mathbf{u}_1 = \frac{[9 \ -3 \ -3 \ 3]^T}{4};$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{9}{4}\right)\mathbf{u}_1 - (-1)\mathbf{u}_2 \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3 \\ &= \mathbf{v}_4 - \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{u}_1 - \left(-\frac{2}{3}\right)\mathbf{u}_2 - (0)\mathbf{u}_3 = [0 \ 1 \ 1 \ 2]^T.\end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, se puede ver que el conjunto original de cuatro vectores es linealmente dependiente, siendo \mathbf{v}_3 linealmente dependiente de \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . El conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ es una base ortogonal para el subespacio; es posible obtener una base ortonormal reemplazando esos tres \mathbf{u}_i por $\mathbf{u}_i/\|\mathbf{u}_i\|_2$.

Un hecho que sigue inmediatamente del teorema para la construcción de una base ortogonal de vectores diferentes de cero amerita mención aparte.

(5.78) *Corolario* A excepción de $\{\mathbf{0}\}$, todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortonormal.

PROBLEMAS 5.8

- ▷ 1. Considerando a $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como una base ortogonal, encuentre el punto más cercano en el conjunto de todos los vectores $[0 \ \alpha \ \beta]^T$ a
 - a) $[1 \ 2 \ 3]^T$
 - b) $[a \ b \ c]^T$
- 2. Mediante los problemas 12, 19 y 20 de la sección 5.7, encuentre el punto en el espacio de $\{1, t - \frac{1}{2}\}$ que es más próximo a t^2 en \mathcal{P}^3 .
- 3. En \mathcal{P}^3 con en el producto interior del problema 12 de la sección 5.7, demuestre que

$$\{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\}$$

es una base ortogonal para \mathcal{P}^3 .

- ▷ 4. Demuestre que si \mathbf{v} está en el subespacio \mathcal{V}_0 del teorema 5.72, entonces la proyección ortogonal $P_0\mathbf{v}$ de \mathbf{v} sobre \mathcal{V}_0 es igual a la misma \mathbf{v} .
- 5. Suponga que P_0 es la proyección ortogonal sobre \mathcal{V}_0 como en el teorema 5.72. Demuestre que, para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} ,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_0\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_0\mathbf{v}\|^2.$$

6. Compruebe que, en el ejemplo 5.77, $\{v_1, \dots, v_i\}$ y $\{u_1, \dots, u_i\}$ generan el mismo espacio para toda $i = 1, 2, 3, 4$.
- ▷ 7. Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt tradicional (5.76) a los tres vectores siguientes, y haga una aseveración válida sobre la situación general que representa.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8. Aplique el procedimiento tradicional de Gram-Schmidt (5.76) a los tres vectores

$$[1 \ 1 \ -1]^T, \quad [-1 \ 2 \ 2]^T, \quad \text{y} \quad [1 \ 4 \ 0]^T.$$

9. La versión (5.76) del procedimiento tradicional de Gram-Schmidt es, en realidad, una pequeña variante de lo que normalmente se presenta. En esa otra forma, que aquí se llamará *normalizada*, tan pronto se calcule u_i , se reemplaza por su versión normalizada $u_i/\|u_i\|$ si $u_i \neq 0$. Esto evita el cálculo de los productos interiores $\{u_i, u_j\}$ en los pasos subsiguientes porque aquéllos serán ahora igual a 1. Aplique esta versión a los vectores v_i del ejemplo 5.77; las u_i que se produzcan sólo serán versiones normalizadas de las u_i anteriores –desde luego que con la excepción de $u_3 = 0$.
- ▷ 10. Mediante el producto interior en \mathcal{P}^3 del problema 8 de la sección 5.7 –con el producto interno en \mathbb{R}^3 de los coeficientes de los polinomios– aplique el procedimiento tradicional de Gram-Schmidt (5.76) a los vectores $1 + t$, $t + t^2$ y $t^2 + 1$.
11. Para comprobar que el proceso tradicional de Gram-Schmidt (5.76) –o su versión normalizada como en el problema 9– no es necesariamente una buena manera de calcular las proyecciones del **teorema clave 5.75**, considere el siguiente caso. Sea ϵ un número tal que en la computadora donde se hacen los cálculos, $1 + \epsilon^2$ sea igual a 1, pero que $2 + \epsilon$ y $\epsilon + \epsilon^2$ se calculen con bastante exactitud; en una calculadora de 8 a 10 dígitos, $\epsilon = 10^{-6}$ opera muy bien, mientras que $\epsilon = 10^{-10}$ funciona bien en la mayoría de las microcomputadoras con coprocesador matemático. Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt tradicional (5.76) (o su versión normalizada) a los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \epsilon \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 + \epsilon \end{bmatrix}.$$

Las condiciones para ϵ significan que el producto interior de dos de ellos cualesquiera se calculará con exactitud como $4 + 2\epsilon$, pero que la norma al cuadrado de cada uno se calculará como $4 + 2\epsilon$, en vez de como $4 + 2\epsilon + \epsilon^2$. Encuentre los ángulos entre los vectores que se produzcan: \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_3 , y \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 . Deberá encontrar que \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 están a aproximadamente ϵ de la perpendicular, y de modo semejante proceda para \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_3 ; sin embargo, \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 hacen un ángulo de 60° en lugar del ángulo recto deseado.

- ▷ 12. El procedimiento de *Gram-Schmidt modificado* es una alternativa para el cálculo de las proyecciones del **teorema clave 5.75** que evita las dificultades con el Gram-Schmidt tradicional tal como se exemplificó en el problema 11. En el método tradicional, en el i -ésimo paso sólo se altera el vector \mathbf{v}_i : se cambia a \mathbf{u}_i que es ortogonal a todas las \mathbf{u}_j precedentes. En el procedimiento modificado, en el i -ésimo paso, *todos* los \mathbf{v}_j restantes se alteran para hacerlos ortogonales al vector \mathbf{u} más recientemente calculado. De una manera más precisa:

Comenzando con los $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ dados, defina $\mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_q^0$ como si

$$\mathbf{v}_1^0 = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q^0 = \mathbf{v}_q.$$

El i -ésimo paso, para $i = 1, \dots, q$:

$$\text{defina } \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i^{i-1};$$

$$\text{defina } \mathbf{v}_j^i = \mathbf{v}_j^{i-1} - \frac{\mathbf{u}_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j^{i-1})}{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)} \text{ para } j = i + 1, \dots, q.$$

En la aritmética perfecta, esto produce los mismos vectores \mathbf{u}_j que el método tradicional. Aplique este procedimiento modificado a los vectores del problema 11 y encuentre los ángulos entre las \mathbf{u}_i que se produzcan; ahora deberá obtener *mucho* mejores resultados que con el procedimiento tradicional.

13. Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt modificado del problema 12 a los vectores del ejemplo 5.77.
14. Aplique MATLAB o software similar para encontrar una base ortogonal u ortonormal para el espacio generado por los vectores del problema 11 (escogiendo la ϵ que convenga a su computadora) para comprobar qué tan bien opera ese software en este difícil problema.
15. Otra alternativa del método tradicional para calcular las proyecciones del **teorema clave 5.75**, usa las *matrices de Householder* (véanse los problemas del 13 al 17 de la sección 5.9); una matriz (real) de Householder es una matriz \mathbf{H} , $p \times p$ de la forma $\mathbf{H} = \mathbf{I}_p - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T/\mathbf{w}^T\mathbf{w}$ para una matriz columna real diferente de cero \mathbf{w} , $p \times 1$.
- Demuestre que toda matriz de Householder es simétrica.
 - Demuestre que toda matriz de Householder es no singular y que $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} = \mathbf{H}^T$.

- c) Mediante el inciso b) demuestre que las columnas de una matriz de Householder forman un conjunto ortogonal.

▷ 16. Dadas dos matrices reales $p \times 1$, \mathbf{x} y \mathbf{y} con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, defina

$$\mathbf{w}_\pm = \mathbf{x} \pm \mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2$$

y sean \mathbf{H}_\pm las matrices de Householder del problema 15 definidas por \mathbf{w}_\pm . Demuestre que \mathbf{H}_\pm transforma a \mathbf{x} en un múltiplo de \mathbf{y} ; más precisamente, demuestre que

$$\mathbf{H}_\pm \mathbf{x} = \mp \mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2.$$

17. a) Sean $\mathbf{x} = [2 \ 2 \ 1]^T$ y $\mathbf{y} = [1 \ 0 \ 0]^T$. Encuentre las matrices \mathbf{H}_\pm del problema 16 y verifique que $\mathbf{H}_\pm \mathbf{x} = \mp 3\mathbf{y}$.
- b) Demuestre que para toda \mathbf{x} en \mathbb{R}^p hay una matriz de Householder \mathbf{H} tal que \mathbf{Hx} es igual a más o menos $\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$, en donde \mathbf{e}_1 es la acostumbrada matriz columna unitaria.

5.9 PROYECCIONES ORTOGONALES Y BASES:

\mathbb{R}^p , \mathbb{C}^p , QR Y MINIMOS CUADRADOS

Existen muchas aplicaciones que hacen uso importante de las técnicas y conceptos de las proyecciones ortogonales y de las bases que se presentaron en la sección 5.8 para espacios vectoriales en general. En el caso especial de \mathbb{R}^p (o de \mathbb{C}^p), esos resultados –cuando se expresan en terminología matricial– proporcionan poderosas herramientas de cálculo.

Proyecciones ortogonales

Los primeros resultados –teoremas 5.71 y 5.73– de la sección anterior involucraban proyecciones ortogonales en espacios vectoriales arbitrarios con productos interiores; ahora, se reformulará esto en \mathbb{R}^p y en \mathbb{C}^p mediante terminología matricial. Para ser específicos, se considerará $\mathcal{V} = \mathbb{R}^p$ en la discusión que sigue; sólo se necesita cambiar las transpuestas T a las transpuestas hermitianas H para hacer que los argumentos se apliquen en \mathbb{C}^p .

Suponga que \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathbb{R}^p generado por el conjunto ortogonal de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$ y que \mathbf{v} es otra matriz $p \times 1$; se desea calcular la proyección ortogonal $P_0 \mathbf{v}$ del teorema 5.71. Se especializará un poco suponiendo que S es un conjunto *ortonormal* –es decir que $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$ además de las condiciones de ortogonalidad $0 = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j$ para $i \neq j$. Defínase la matriz \mathbf{Q} , $p \times q$, por

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_q].$$

Si calcula $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$, encontrará que

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_q]^T [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_q]$$

tiene como elemento (i, j) , justamente a $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j$ —que es igual a 1 si $i = j$, y es igual a 0 si $i \neq j$. Esto es, $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_q$; ésta es la reformulación matricial del hecho de que S es ortonormal. Pasando al cálculo de $P_0 \mathbf{v}$, de acuerdo al teorema 5.71,

$$P_0 \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_q \mathbf{v}_q$$

para α_i adecuadas en notación matricial esto significa que $P_0 \mathbf{v} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha}$, donde \mathbf{Q} es la matriz de arriba y

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_q]^T.$$

Nuevamente de acuerdo al teorema 5.71, α_i se calcula como

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}$$

en este caso; en notación matricial, esto dice que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}$. Juntando estos dos hechos, se obtiene

$$P_0 \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}.$$

Observe aquí que, en general, $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \neq \mathbf{I}_p$; \mathbf{Q}^T es una inversa izquierda de \mathbf{Q} porque $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_q$, pero generalmente no es una inversa derecha porque no se está suponiendo que \mathbf{Q} sea cuadrada. Esta fórmula para P_0 demuestra que la proyección ortogonal no es más que la multiplicación por una matriz especial $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$, llamada *matriz de proyección*. Esto completa la reformulación de los teoremas 5.71 y 5.73 en terminología matricial.

(5.79) **Teorema** (matrices de proyección.) Sea \mathbf{Q} una matriz $p \times q$ que tiene columnas ortonormales en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p) —esto es

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_q \quad (\text{o } \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}_q),$$

y sea \mathcal{V}_0 el subespacio generado por la base ortonormal para \mathcal{V}_0 formada por las columnas de \mathbf{Q} . Entonces:

- a) La proyección ortogonal P_0 en \mathcal{V}_0 , como se describió en los teoremas 5.71 y 5.73 se calcula con la *matriz de proyección* $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ (o $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H$) como

$$P_0 \mathbf{v} = \mathbf{P}_0 \mathbf{v}$$

en donde \mathbf{P}_0 es la matriz $p \times p$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ (o $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H$).

- b) La matriz de proyección \mathbf{P}_0 satisface lo siguiente:

1. \mathbf{P}_0 es simétrica (o hermitiana)
2. $\mathbf{P}_0^2 = \mathbf{P}_0$.
3. $\mathbf{P}_0(\mathbf{I}_p - \mathbf{P}_0) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{P}_0)\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$.
4. $(\mathbf{I}_p - \mathbf{P}_0)\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACION

- a) Ya se ha demostrado.
- b) 1. $\mathbf{P}_0^T = (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{Q}^T)^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{P}_0$ (análogamente para el caso complejo).
2. $\mathbf{P}_0^2 = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}_q\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{P}_0$ (y de igual modo para el caso complejo).
3. $\mathbf{P}_0(\mathbf{I}_p - \mathbf{P}_0) = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0^2 = \mathbf{0}$, e igual para los demás.
4. $(\mathbf{I}_p - \mathbf{P}_0)\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{I}_q = \mathbf{0}$ (análogamente para el caso complejo). ■

(5.80) *Ejemplo.* Sea $\mathbf{Q} 4 \times 3$ y sean sus columnas versiones normalizadas de los vectores ortogonales diferentes de cero $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ que se encontraron en el ejemplo 5.77:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}. \quad \text{Entonces } \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el vector más cercano a $\mathbf{v} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ en el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^4 generado por las columnas de \mathbf{Q} es

$$\mathbf{P}_0\mathbf{v} = \mathbf{P}_0\mathbf{v} = [1 \ 5/2 \ 5/2 \ 4]^T;$$

Más generalmente, el punto más cercano a $\mathbf{v} = [a \ b \ c \ d]^T$ es:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{v} = \left[a \quad \frac{b+c}{2} \quad \frac{b+c}{2} \quad d \right]^T.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Descomposiciones QR

La siguiente tarea es proporcionar una formulación matricial para el **teorema clave 5.75** sobre cómo calcular un conjunto generador ortogonal partiendo de un conjunto generador general. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q$ son matrices columna $p \times 1$, y considere la implementación tradicional del procedimiento de Gram-

Schmidt (5.76). A partir de la definición de matrices columna \mathbf{u}_j en (5.76) 2), se tiene

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_1\alpha_{1j} + \mathbf{u}_2\alpha_{2j} + \cdots + \mathbf{u}_{j-1}\alpha_{j-1,j} + \mathbf{u}_j.$$

Esto, representado en notación de matrices separadas, es tan sólo

$$(5.81a) \quad [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_q] = [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_q] \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1q} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2q} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea \mathbf{Q}_0 la matriz $p \times q$, $[\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_q]$ de (5.81a) y sea \mathbf{R}_0 la matriz unitaria triangular superior $q \times q$ allí mismo; como $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_q]$, es posible reescribir (5.81a) como

$$(5.81b) \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0.$$

Las \mathbf{u}_i de \mathbf{Q}_0 se construyen en (5.76), y por lo tanto son mutuamente ortogonales; es decir, que \mathbf{Q}_0 tiene columnas ortogonales, algunas de las cuales podrán ser iguales a $\mathbf{0}$. Sean \mathbf{Q} y \mathbf{R} las matrices obtenidas por la eliminación de las columnas de ceros de \mathbf{Q}_0 y los renglones correspondientes de \mathbf{R}_0 , y mediante la división de cada columna no cero de \mathbf{Q}_0 entre su norma 2, y multiplicando cada renglón correspondiente de \mathbf{R}_0 por la misma norma 2. Entonces (5.81b) viene a ser

$$(5.81c) \quad \mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

con \mathbf{R} como triangular superior y \mathbf{Q} con columnas ortonormales. La forma (5.81b) se llama la *descomposición no normalizada QR de A*, mientras que (5.81c) es la *descomposición QR normalizada*.

(5.82) **Teorema clave** (descomposiciones QR). Sea \mathbf{A} una matriz $p \times q$ de rango k . Entonces:

- a) \mathbf{A} puede escribirse en su *descomposición QR no normalizada* como $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0$, en donde:
 - 1. \mathbf{Q}_0 es $p \times q$ y tiene columnas ortogonales (de las cuales k son diferentes de cero y $q - k$ son cero) que generan el espacio columna de \mathbf{A} .
 - 2. \mathbf{R}_0 es $q \times q$, triangular superior unitaria y no singular.
 - 3. La norma 2 de la i -ésima columna de \mathbf{Q}_0 es igual a la distancia de la i -ésima columna de \mathbf{A} al espacio generado por las primeras $i - 1$ columnas de \mathbf{A} .
- b) \mathbf{A} puede escribirse en su *descomposición QR normalizada* como $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, en donde:

1. \mathbf{Q} es $p \times k$ y tiene columnas ortonormales que generan el espacio columna de \mathbf{A} .
2. \mathbf{R} es triangular superior de $k \times q$ y tiene rango k .
3. Si $k = q$, entonces $\|\mathbf{R}\|_F$ es igual a la distancia desde la i -ésima columna de \mathbf{A} hasta el espacio generado por las primeras $i - 1$ columnas de \mathbf{A} .

DEMOSTRACION. Ya que \mathbf{A} tiene rango k , su espacio de columnas tiene dimensión k y habrá k vectores en cualquier base.

- a) Es consecuencia del **teorema clave 5.75**, del (5.76) y del (5.81a-c) arriba; para 3), observe que $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - P_{i-1}\mathbf{v}_i$, y utilice el teorema 5.73.
- b) Es consecuencia de las construcciones de \mathbf{Q} y \mathbf{R} a partir de \mathbf{Q}_0 y \mathbf{R}_0 ; para 3), observe que si $k = q$, significa que \mathbf{Q} y \mathbf{R} sólo difieren de \mathbf{Q}_0 y \mathbf{R}_0 por la escala, y utilice a) 3). ■

Estas descomposiciones son análogas a las descomposiciones *LU* de la sección 3.7 y quizás sean igualmente útiles computacionalmente. Como se hizo notar en la sección 5.8, el procedimiento tradicional de Gram-Schmidt no es eficaz computacionalmente y no deberá usarse en la práctica para encontrar descomposiciones *QR*; hay otros métodos disponibles –véanse los problemas del 11 al 17 de la sección 5.8 y los problemas del 13 al 17 de esta sección.

- (5.83) **Ejemplo.** Considere la matriz \mathbf{A} , 4×4 , cuyas cuatro columnas son las matrices columna originales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y \mathbf{v}_4 del ejemplo 5.77:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con la demostración anterior, es posible construir la descomposición $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ partiendo de las columnas \mathbf{u}_i y de los coeficientes α_{kj} calculados durante desarrollo del procedimiento de Gram-Schmidt del ejemplo 5.77. Esto da

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que realmente $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$. Para obtener \mathbf{Q} y \mathbf{R} , de acuerdo con la demostración anterior, se eliminará la tercera columna de \mathbf{Q}_0 y el tercer renglón de \mathbf{R}_0 , y se ajustarán las escalas de las columnas de \mathbf{Q}_0 .

y los renglones de \mathbf{R}_0 . Por ejemplo, se divide la primera columna de \mathbf{Q}_0 entre su norma 2, 2) y se multiplica el primer renglón de \mathbf{R}_0 por el mismo número 2). Tratando la segunda y tercera columnas/renglones de modo semejante, finalmente se obtiene

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

De nuevo, es fácil comprobar que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.

M (5.84)

Ejemplo. Se sabe que la matriz de Hilbert 6×6 , \mathbf{H}_6 es “casi singular” en el sentido de que sus columnas son “casi linealmente dependientes”; \mathbf{H}_6 es la matriz en la que $\langle \mathbf{H}_6 \rangle_{ij} = 1/(i+j-1)$. Ahora es posible dar algún significado al concepto “casi linealmente dependiente” porque la descomposición QR contiene información sobre la distancia de cada columna desde el espacio de las columnas anteriores. Se utiliza la función *qr* del MATLAB para calcular una descomposición QR normalizada de \mathbf{H}_6 . El MATLAB encontró que \mathbf{H}_6 tiene rango 6, y produjo una matriz \mathbf{Q} , 6×6 , con columnas ortonormales y una matriz 6×6 triangular superior \mathbf{R} . Ya que el rango es igual a 6, los elementos de la diagonal de \mathbf{R} miden la distancia de cada columna de \mathbf{H}_6 desde el espacio de las columnas anteriores; mediante el MATLAB se hicieron cálculos de las magnitudes de esos elementos diagonales resultando aproximadamente en 1.2, 0.14, 0.0096, 0.0048, 0.000017 y 0.00000040. Si un vector \mathbf{v} está a la distancia d de un subespacio \mathcal{V}_0 , entonces $a\mathbf{v}$ está a una distancia ad de \mathcal{V}_0 ; en otras palabras, se debería considerar la distancia \mathcal{V}_0 relativa al tamaño de \mathbf{v} mismo. En este caso, el MATLAB calculó la norma 2 de, por ejemplo, la sexta columna de \mathbf{H}_6 como aproximadamente igual a 0.31; la medida de qué tan cercana estuvo la sexta columna de \mathbf{H}_6 de ser linealmente dependiente de las primeras cinco está dada por

$$0.00000040/0.31 \approx 0.0000013,$$

lo cual indica por qué \mathbf{H}_6 se llama “casi singular”.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 19.

Aplicación: mínimos cuadrados

En la sección 2.6 sobre mínimos cuadrados se explicó cómo, a menudo, en modelos matemáticos, se tiene la forma general del modelo y es necesario determinar parámetros específicos en el modelo para aproximar la conducta real del fenómeno que aquél está modelando. Cuando el modelo es lineal, esto frecuentemente significa que se tiene una matriz A , $p \times q$ (el modelo) y una matriz columna y , $p \times 1$ (datos reales del fenómeno) y se necesita encontrar una matriz x , $q \times 1$ (los parámetros) tal que $Ax \approx y$. Cuando se quiere determinar a x haciendo $\|Ax - y\|_2$ tan pequeño como sea posible, se tiene un *problema de mínimos cuadrados*.

Un *camino para encontrar la x que minimiza a $\|Ax - y\|_2$* se describió en la sección 2.6: x hace mínimo a $\|Ax - y\|_2$ si y sólo si x es solución de $A^T Ax = A^T y$ (reemplazando la transpuesta T por la transpuesta hermitiana H si alguno de los datos es complejo); véase el problema 26. Sin embargo, se hizo notar que en realidad el cálculo de $A^T A$ y la solución de este sistema de ecuaciones a menudo produce errores inaceptables cuando los cálculos se hacen en computadoras con aritmética de punto flotante; véase el problema 24. La descomposición QR normalizada –que puede calcularse con exactitud y eficiencia– proporciona un camino para eliminar la dificultad; véase el problema 25.

Suponga que $A = QR$ es una descomposición QR normalizada de A , de tal modo que –si A es $p \times q$ y tiene rango k – Q es $p \times k$ y tiene columnas ortonormales, mientras que R es $k \times q$, triangular superior y tiene rango k . Considérense las ecuaciones

$$A^T Ax = A^T y \text{ cuando } A = QR.$$

Al sustituir A resulta

$$(QR)^T(QR)x = (QR)^T y, \text{ esto es, } R^T Q^T Q R x = R^T Q^T y.$$

Recuerde que Q tiene columnas ortonormales, así que $Q^T Q = I_k$. Por lo tanto, las ecuaciones vienen a ser

$$R^T R x = R^T Q^T y.$$

El corolario 5.51 afirma que los rangos de R y de R^T son iguales; por lo tanto, la matriz R^T , $q \times k$, tiene rango k . Por el teorema 4.22 sobre inversas izquierdas y rango, R^T tiene una inversa izquierda L tal que $LR^T = I_k$. Multiplicando ambos miembros de la última ecuación de arriba por L y usando $LR^T = I_k$, se obtiene

$$Rx = Q^T y$$

si $R^T Rx = R^T Q^T y$; a la inversa, es claro que si $Rx = Q^T y$, entonces $R^T Rx = R^T Q^T y$. Por lo tanto, x resuelve el problema de mínimos cuadrados si y sólo si $Rx = Q^T y$.

Ya que \mathbf{R} es $k \times q$, es triangular superior y tiene rango k , las ecuaciones $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y}$ pueden resolverse inmediatamente para \mathbf{x} por sustitución en reversa. Es decir, que una vez que se ha encontrado la descomposición QR normalizada de \mathbf{A} , es posible resolver inmediatamente el problema de mínimos cuadrados. Resumiendo,:.

- (5.85) **Teorema** (QR y mínimos cuadrados). Sea $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ una descomposición QR normalizada de la matriz \mathbf{A} , $p \times q$. Entonces, todas las soluciones al problema de mínimos cuadrados de encontrar una \mathbf{x} que haga mínima a $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2$, se puede obtener aplicando la sustitución en reversa para resolver $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y}$ ($\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H\mathbf{y}$ si \mathbf{A} o \mathbf{y} son complejos).

- (5.86) **Corolario clave** (mínimos cuadrados). Todo problema de mínimos cuadrados $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ tiene una solución, y todas las soluciones se pueden encontrar mediante el teorema 5.85 mediante la descomposición QR normalizada de \mathbf{A} .

- (5.87) **Ejemplo.** Sea \mathbf{A} la matriz 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya descomposición QR normalizada $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ se encontró en el ejemplo 5.83. Suponga que se quiere resolver el problema de mínimos cuadrados

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y} = [1 \quad -1 \quad 2 \quad 1]^T.$$

De acuerdo con el teorema 5.85, solamente es necesario resolver $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y}$. Se encuentra que

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{y} = [1/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad \sqrt{6}/2]^T.$$

Por lo tanto, el sistema a resolver es

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y}, \text{ esto es, } \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}.$$

Este sistema se resuelve fácilmente por sustitución en reversa: primero se obtiene $x_4 = \frac{1}{2}$, después, $x_3 = \alpha$ arbitraria, a continuación $x_2 = \alpha + \frac{2}{3}$, y

finalmente $x_1 = -2\alpha + \frac{1}{6}$. La solución general al problema original de mínimos cuadrados es por lo tanto

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{siendo } \alpha \text{ arbitraria}$$

PROBLEMAS 5.9

- ▷ 1. Suponga que \mathbf{Q} es una matriz real $p \times q$ con columnas ortogonales. ¿Qué puede decir acerca de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$?
- 2. Suponga que \mathbf{P} es una matriz real $p \times p$, que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, y que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$; a esas matrices se les llama *matrices de proyección* $p \times p$. Demuestre que, para cada \mathbf{v} en \mathbb{R}^p , $\mathbf{P}\mathbf{v}$ es la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre el espacio de columnas de \mathbf{P} .
- 3. Demuestre que \mathbf{P} es una matriz de proyección –véase el problema 2– si y sólo si $\mathbf{I}_p - \mathbf{P}$ es una matriz de proyección.
- ▷ 4. Encuentre la matriz 3×3 , \mathbf{P} , tal que $\mathbf{P}\mathbf{v}$ sea la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre el subespacio generado por el conjunto ortogonal $S = \{ [1 \ 2 \ 2]^T, [-2 \ 2 \ -1]^T \}$.
- 5. Encuentre la matriz \mathbf{P} , 4×4 , tal que $\mathbf{P}\mathbf{v}$ sea la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre el subespacio generado por los vectores $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$, $[-0.5 \ 0.5 \ -0.5 \ 0.5]^T$.

- 6. Encuentre la descomposición QR , tanto no normalizada como normalizada de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- 7. Encuentre la descomposición QR , tanto no normalizada como normalizada de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 8. Encuentre la descomposición QR , tanto no normalizada como normalizada de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

9. Encuentre la descomposición QR tanto no normalizada como normalizada de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \epsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Suponga que se están haciendo los cálculos en una computadora y que el número ϵ es tal que $1 + \epsilon$ se evalúa exactamente, pero que $1 + \epsilon^2$ se evalúa como igual a 1; en una calculadora de 8 a 10 dígitos, $\epsilon = 10^{-6}$ opera muy bien, mientras que $\epsilon = 10^{-10}$ trabaja en la mayoría de las microcomputadoras con coprocesadores matemáticos.

- a) Aplique el método Gram-Schmidt tradicional en esta “computadora” para comprobar que se obtiene la descomposición QR no normalizada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 + \epsilon \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\epsilon}{3} \\ 1 & -\frac{\epsilon}{3} \\ 1 & \frac{2\epsilon}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 + \frac{\epsilon}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Observe que ésta es la descomposición correcta –con excepción por supuesto, de que la computadora no dividirá perfectamente entre 3. La pequeña ϵ , por otra parte, no causó dificultades. (Véanse los problemas 24 y 25.)

- b) Encuentre la descomposición QR normalizada.

- ▷ 11. Suponga que \mathbf{A} es real y $p \times q$, y que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0$, en donde \mathbf{Q}_0 es $p \times q$ y tiene columnas ortogonales, mientras que \mathbf{R}_0 es $q \times q$ y es triangular superior unitaria. Demuestre que las columnas de \mathbf{Q}_0 forman un conjunto generador ortogonal para el espacio de columnas de \mathbf{A} , y que las primeras i columnas de \mathbf{Q}_0 generan el espacio generado por las primeras i columnas de \mathbf{A} para $1 \leq i \leq q$.
12. Suponga que \mathbf{A} es real, y $p \times q$ y que tiene rango k , y que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, en donde \mathbf{Q} es $p \times k$ y tiene columnas ortonormales mientras que \mathbf{R} es $k \times q$, triangular superior y de rango k . Demuestre que las columnas de \mathbf{Q} forman una base ortonormal para el espacio de columnas de \mathbf{A} , y que $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^T$ representa una proyección ortogonal sobre el espacio de las columnas de \mathbf{A} .
13. Suponga que \mathbf{A} es real y $p \times q$, siendo $p \geq q$; se describirá el uso de las matrices de Householder mencionado en los problemas del 15 al 17 de la sección 5.8 para calcular una descomposición QR de \mathbf{A} . Sea $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$; se calculará $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_q$ como sigue: \mathbf{A}_i tiene la estructura especial

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_i \end{bmatrix}, \quad \text{en donde } \mathbf{R}_i \text{ es } i \times i \text{ y triangular superior;}$$

esto ciertamente es válido para $i = 0$. Sea \mathbf{H}_i una matriz de Householder $(p - i) \times (p - i)$ tal que \mathbf{H}_i multiplicada por la primera columna de \mathbf{C}_i sea un múltiplo de la matriz columna unitaria \mathbf{e}_1 , $(p - i) \times 1$, y defínase

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_i \end{bmatrix}, \quad \text{en donde } \mathbf{I}_i \text{ es la matriz idéntica } i \times i$$

- a) Demuestre que $\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^T = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i = \mathbf{I}_p$.
- b) Demuestre que $\mathbf{Q}_i \mathbf{A}_i$ tiene la estructura propuesta para \mathbf{A}_{i+1} . Se define $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_i$ continuando hasta llegar a \mathbf{A}_q .
- c) Demuestre que $\mathbf{Q}_{q-1} \mathbf{Q}_{q-2} \cdots \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_0 \mathbf{A} = \mathbf{S}$, teniendo \mathbf{S} la estructura

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{R} \text{ es } q \times q \text{ y triangular superior.}$$

Por lo tanto, $\mathbf{A} = \mathbf{PS}$, en donde $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{Q}_1^T \cdots \mathbf{Q}_{q-1}^T$.

- d) Demuestre que $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}_p$, y por lo tanto \mathbf{P} es no singular y tiene columnas ortonormales.

(Véase también el problema 14.)

14. Continuando con el desarrollo del problema 13, defínase \mathbf{Q} como la matriz $p \times q$ que está formada por las primeras q columnas de \mathbf{P} .
 - a) Demuestre que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$,
 - b) Suponiendo que el rango de \mathbf{A} es q y recordando que \mathbf{P} es no singular, demuestre que el rango de \mathbf{S} es q . Demuestre que el rango de \mathbf{R} es q , y por lo tanto \mathbf{R} es no singular. Concluya que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ es una descomposición QR-normalizada de \mathbf{A} .
15. Mediante el método matricial de Householder de los problemas 13 y 14 encuentre la descomposición QR-normalizada de la matriz \mathbf{A} del problema 6 y compruebe que se obtiene

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix};$$

después

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

En este caso

$$A = PS = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y finalmente

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

- ▷ 16. Mediante el método matricial de Householder de los problemas 13 y 14 encuentre una descomposición QR -normalizada de la matriz A del problema 8.
17. Si A es $p \times q$, siendo $p \geq q$ y el rango de A estrictamente menor que q , entonces el método matricial de Householder de los problemas 13 y 14 no necesita producir una descomposición normalizada QR . Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = QR \text{ siendo } Q = I_3 \text{ y } R = A$$

es la descomposición que producía la aplicación directa del método matricial de Householder a A .

- a) Demuestre que el rango de A es igual a 2.
- b) Demuestre que ninguna de las dos columnas de Q genera el espacio de columnas de A .
- c) Concluya que no es posible obtener una descomposición QR -normalizada de A a partir de las columnas de Q .
- d) Demuestre que el método tradicional (o modificado) de Gram-Schmidt, cuando se aplica a esta A produce tanto una descomposición QR no normalizada como normalizada.

(Cuando el rango de A es menor que q , es posible implementar el método matricial de Householder con lo que se llama *pivoteo de columna* para obtener la descomposición QR -normalizada de una matriz con columnas permutadas; este método se usa ampliamente en programación de computadoras para obtener descomposiciones QR .)

- M 18.** Como se hizo en el ejemplo 5.84 para la matriz de Hilbert H_6 , utilice MATLAB u otro software semejante para medir qué tan cerca está la quinta columna de la matriz de Hilbert H_5 de depender linealmente de las primeras cuatro columnas.
- M 19.** Cuando se grafican las varias potencias t^t para $0 \leq t \leq 1$, las gráficas parecen bastante semejantes; intuitivamente, parece que esas potencias son linealmente dependientes. Por ejemplo, t^4 , t^5 y t^6 así lo parecen; se desea medir qué tan cerca están de ser linealmente dependientes cuando se consideran sus valores en 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0. Prepare una matriz adecuada 10×3 y mediante MATLAB o software semejante mida qué tan cerca están de ser linealmente dependientes, como en el ejemplo 5.84.
- ▷ **20.** Encuentre una descomposición normalizada QR para A y utilícela para resolver el problema de mínimos cuadrados $Ax \approx y$, en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- 21.** Encuentre una descomposición QR-normalizada para A y utilícela para resolver el problema de mínimos cuadrados $Ax \approx y$, en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 22.** En la sección 2.3, se consideró un modelo de crecimiento con poblaciones en competencia; esto condujo a un modelo de la forma

$$\begin{bmatrix} F_{i+1} \\ C_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ C_i \end{bmatrix},$$

en donde se supuso en el ejemplo 2.16 que $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = -0.1$ y $x_4 = 1.2$. En la práctica, el problema fácilmente podría ser el determinar valores de los parámetros del modelo, x_j , partiendo de datos reales de la población. Utilice mínimos cuadrados para determinar los parámetros x_j a modo de coincidir con los “datos” de población de la tabla del ejemplo 2.16 que muestra la evolución desde el tiempo $i + 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y véase cómo se comparan los valores obtenidos con aquéllos que generaron los datos. Podría ser necesario el uso de MATLAB o software semejante.

- ▷ **23.** Utilice una descomposición QR-normalizada para resolver el problema de mínimos cuadrados del ejemplo 2.39.
- 24.** Considere la matriz A del problema 10 con ϵ como allí se describió, y considere el problema de mínimos cuadrados $Ax \approx y$, en donde $y = [2 \ 3 \ 2]^T$.

La verdadera solución de mínimos cuadrados es

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5\epsilon}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- a) Recordando que ϵ es tal que la computadora evalúa a $3 + 2\epsilon + \epsilon^2$ como igual a $3 + 2\epsilon$, encuentre qué sería *calculado* como las *ecuaciones* $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ para encontrar \mathbf{x} .
- b) Demuestre que la única solución a este sistema calculado es

$$\frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} -1 + 2\epsilon \\ 1 \end{bmatrix},$$

que está muy lejos de la solución correcta de mínimos cuadrados que se dio anteriormente.

(Esto ejemplifica por qué, en la práctica, no es satisfactorio el uso de $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ como método computacional para resolver problemas de mínimos cuadrados.)

25. En el problema 24 se mostró que el cálculo de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ y posteriormente la solución de $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ daban resultados pobres en el problema de mínimos cuadrados que allí se trató. En el problema 10 se encontró la descomposición *QR computada* para la matriz \mathbf{A} . Utilice esta descomposición *QR*-computada para resolver el problema de mínimos cuadrados del problema 24; después comparar la respuesta que se obtiene con la solución verdadera y con la obtenida mediante el uso de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.
26. El argumento que llevó al teorema 5.85 demostró que existe una \mathbf{x}_0 que resuelve $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$ (reemplazar H por T para el caso real).
- a) Demuestre que toda $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$ también es una solución si y sólo si $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{0}$, y concluya de $\mathbf{n}^H (\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{n}) = \|\mathbf{A} \mathbf{n}\|_2^2$ que esto es válido si y sólo si $\mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{0}$.
- b) Sustituyendo $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x}_0$ por $\mathbf{A}^H \mathbf{b}$, demuestre que
- $$\|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{A} \mathbf{x}_0\|_2^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_2^2.$$
- c) Concluya a partir de b), que \mathbf{x} minimiza a $\|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$, en donde $\mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{0}$.
- d) Concluya a partir de a) y c), que \mathbf{x} es solución para el problema de mínimos cuadrados $\mathbf{A} \mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ si y sólo si $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$.

5.10 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 5.10

- ▷ 1. Demuestre que \mathbb{C} puede considerarse como un espacio vectorial real.
 2. Demuestre que \mathbb{C} puede considerarse como un espacio vectorial complejo.

3. Sea \mathcal{V} el espacio vectorial real de los números complejos sobre el campo \mathbb{R} ; demuestre que el conjunto de todos los números reales es un subespacio de \mathcal{V} .
- ▷ 4. Suponga que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y \mathbf{u}_3 forman un conjunto linealmente independiente, y defina

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 + \beta\mathbf{u}_3.$$

Encuentre las condiciones de α y β para que las \mathbf{v}_i formen un conjunto linealmente independiente.

- ▷ 5. Sea \mathcal{V}_0 un subespacio de \mathbb{R}^p . Defina a \mathcal{V}_0^\perp como el conjunto de todos los vectores \mathbf{v} en \mathbb{R}^p que son ortogonales a *todos* los vectores en \mathcal{V}_0 .
- Compruebe que \mathcal{V}_0^\perp es un subespacio de \mathbb{R}^p .
 - Suponga que $p = 3$ y que \mathcal{V}_0 tiene el conjunto de vectores

$$\mathbf{u}_1 = [2 \quad 1 \quad -3]^T, \quad \mathbf{u}_2 = [-1 \quad 0 \quad -2]^T;$$

como su base. Encuentre una base para \mathcal{V}_0^\perp .

6. Sea $B = \{1 + t; t + t^2; t^2 + t^3; t^3\}$ una base ordenada del espacio vectorial real \mathcal{P}^4 de polinomios con grado estrictamente menor que 4. Mediante el isomorfismo de coordenadas c_B para convertirlo en un problema en \mathbb{R}^4 , extienda el conjunto $\{1 + 2t + t^2, t\}$ hasta formar una base de \mathcal{P}^4 .
7. Considere la base ordenada B y el espacio \mathcal{P}^4 del problema 6. Mediante el isomorfismo de coordenadas c_B para convertirlo en un problema en \mathbb{R}^4 , forme una base para \mathcal{P}^4 de entre los vectores

$$1 + 2t + t^2, \quad t + 2t^2 + t^3, \quad 1 + t - t^2 - t^3, \quad t^2 + 2t^3, \quad t^3, \quad 1 + t + t^3.$$

8. Demuestre que el rango k de una matriz \mathbf{A} es el orden de la mayor submatriz cuadrada no singular de \mathbf{A} completando los detalles del siguiente esquema de la demostración. Suponga que \mathbf{A} tiene rango k y considere una submatriz $p \times p$ siendo $p > k$. Demuestre que los p renglones de la submatriz forman un conjunto dependiente ya que los p renglones de \mathbf{A} así lo hacen (porque $p > k$ = rango de \mathbf{A}); deduzca además que la submatriz es singular. Escoja cualesquier k renglones de \mathbf{A} que formen un subconjunto independiente; entonces el rango de la matriz de esos k renglones es k de modo que hay k columnas de esta matriz que forman un conjunto independiente. Deducza que la submatriz $k \times k$ resultante es no singular. A la inversa, suponga que k es el orden máximo de submatrices no singulares y escoja una submatriz $k \times k$. Como los renglones de la submatriz forman un conjunto linealmente independiente, demuestre que los k renglones correspondientes a \mathbf{A} forman un conjunto linealmente independiente y entonces deduzca que el rango de \mathbf{A} no es menor que k . A continuación, suponga que algún subconjunto de p renglones de \mathbf{A} es linealmente independiente; deduzca como en la primera

parte de la demostración de este teorema, que alguna submatriz $p \times p$ es no singular, y entonces $p \leq k$. Como entonces k es el máximo número de renglones de \mathbf{A} en cualquier conjunto linealmente independiente, deduzca que k es igual al rango de \mathbf{A} .

- ▷ 9. Considerando la $\|\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}\|_2^2$ y escogiendo α para hacer cero esta expresión, demuestre que:
 - $|\mathbf{u}^T\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2$ para ciertas \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathbb{R}^p (si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} forman un conjunto linealmente dependiente);
 - El mismo resultado es válido sustituyendo la T por la H cuando \mathbf{u} y \mathbf{v} están en \mathbb{C}^p .
- 10. Demuestre que la descomposición QR normalizada $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ es única si la \mathbf{A} , $p \times q$, tiene rango q y si a \mathbf{R} se le obliga a tener elementos positivos en su diagonal principal.
- ▷ 11. Suponga que $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ es una base y que

$$\mathbf{v}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_q\mathbf{v}_q.$$
 - Demuestre que cualquier vector \mathbf{v}_i cuyo coeficiente α_i en la ecuación de arriba sea diferente de cero, puede reemplazarse en B por \mathbf{v}_0 y que el conjunto resultante también será una base.
 - Demuestre que si el coeficiente α_i es cero, entonces el conjunto resultante *no* es una base.
- 12. Mediante el MATLAB o software semejante encuentre una descomposición QR normalizada y úsela para resolver el problema de mínimos cuadrados, problema 3 de la sección 2.6 (para predecir la población de Estados Unidos en 1990).
- 13. Demuestre que hay una matriz (compleja) de Householder

$$\mathbf{H}_{\mathbf{w}} = \mathbf{I}^t - (2/\mathbf{w}^H\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^H$$

tal que $\mathbf{H}_{\mathbf{w}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ si y sólo si $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$ y $\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ es real.

6

Transformaciones lineales y matrices

Gran parte del poder del álgebra lineal y de las matrices viene no sólo de la capacidad de representar con vectores muchos objetos de interés en las aplicaciones, sino también de representar muchas de las operaciones o transformaciones operadas sobre esos objetos por ejemplo en modelos en los que las entradas a algunos procesos se transforman en salidas. Este capítulo desarrolla la teoría básica de tales transformaciones; los teoremas clave son 6.14, 6.20, 6.23, 6.26 y el 6.28.

6.1 INTRODUCCION; TRANSFORMACIONES LINEALES

Muchos problemas en matemáticas aplicadas involucran el estudio de *transformaciones* –el modo en el que ciertos datos de entrada se transforman en datos de salida. Por ejemplo, los factores que producen ciertas ganancias para un negocio, partiendo de cierta estructura de precios y manufactura, pueden visualizarse como una transformación de entradas (datos de precios y producción) en salidas (estructura de ganancias). En muchos modelos matemáticos muchas veces resulta que las transformaciones son *lineales* en el sentido de que la suma de dos entradas se transforma en la suma de sus salidas individuales y un múltiplo de una entrada se transforma en ese múltiplo de su salida. La ecuación (2.4) representa una transformación lineal como se ha descrito (de la estructura del mercado de un mes que determina la del mes siguiente), así como en (2.13) (de la estructura de la población en cierto momento que determina la de algún momento posterior). El matemático aplicado intenta deducir propiedades de las transformaciones relevantes así como aprender sobre las propiedades de las estructuras reales que se están modelando. En este capítulo se presenta algo de terminología básica y algunos hechos sobre transformaciones lineales entre espacios vectoriales.

Transformaciones lineales

(6.1) **Definición.** Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales ambos reales (o ambos complejos). Una transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} –llamada el *dominio* de \mathcal{T} – a \mathcal{W} –llamada el *contradominio* de \mathcal{T} – es una correspondencia que asigna a cada vector v en \mathcal{V} un vector $\mathcal{T}(v)$ en \mathcal{W} de tal manera que:

a) $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$ para todos los vectores v_1 y v_2 .

b) $\mathcal{T}(\alpha v) = \alpha \mathcal{T}(v)$ para todo vector v y escalar α .

{Equivalentemente, $\mathcal{T}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{T}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(v_2)$ para todos los vectores v_1, v_2 y escalares α_1, α_2 .}

(6.2) **Ejemplo.**

- Sean $\mathcal{V} = \mathbb{R}^q$ y $\mathcal{W} = \mathbb{R}^p$, y suponga que A es una matriz real $p \times q$. Entonces \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(v) = Av$ es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} . Desde luego, lo mismo es válido para \mathbb{C}^q y \mathbb{C}^p .
- Sea $\mathcal{V} = \mathcal{W} = C[a, b]$, espacio de las funciones continuas de valor real en $a \leq t \leq b$; suponga que $f(t)$ es una función continua. Entonces \mathcal{T} se define haciendo que $\mathcal{T}(x)$ aquella función cuyo valor en t es $f(t)x(t)$ es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} .
- Si \mathcal{V} es un espacio vectorial real de dimensión p y B es una base ordenada de \mathcal{V} , entonces el isomorfismo de coordenadas c_B es una transformación lineal de \mathcal{V} a $\mathcal{W} = \mathbb{R}^p$.
- Sea $\mathcal{V} = C^2[0, 1]$ el espacio de funciones continuas diferenciables dos veces en $[0, 1]$, y sea $\mathcal{T}(v)$ aquella función cuyo valor en t es igual a

$$\mathcal{T}(v)(t) = \frac{d}{dt} (1+t) \frac{dv(t)}{dt} - (3 + e^t)v(t).$$

\mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a $\mathcal{W} = C[0, 1]$ del inciso b).

- Suponga que \mathcal{V} y \mathcal{W} son, ambos, espacios vectoriales reales (o ambos complejos), y denominese $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathcal{V} a \mathcal{W} . La suma $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ de dos elementos en \mathcal{L} se puede definir como aquella transformación en donde

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(v) = \mathcal{T}_1(v) + \mathcal{T}_2(v);$$

$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} , esto es, que está en \mathcal{L} . De igual modo, definiendo $\alpha\mathcal{T}$ para escalares α por

$$(\alpha\mathcal{T})(v) = \alpha\{\mathcal{T}(v)\};$$

$\alpha\mathcal{T}$ está en \mathcal{L} . La transformación cero \mathcal{O} tal que $\mathcal{O}(v) = \mathbf{0}$ en \mathcal{W} para toda v está en \mathcal{L} . El conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ con las operaciones como se definieron, es un espacio vectorial real (o complejo).

Para comprobar que cada uno de los objetos del ejemplo 6.2 es verdaderamente una transformación lineal, se deberán verificar las dos condiciones de la definición 6.1. Por ejemplo, en 6.2 a) se tiene que

$$\mathcal{T}(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$$

y también

$$\mathcal{T}(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha \mathcal{T}(v).$$

Véanse los problemas del 4 al 7.

Espacio imagen y espacio nulo

El ejemplo 6.2 a) muestra que las transformaciones lineales son generalizaciones de multiplicación de matrices por vectores $\mathcal{T}(v) = Av$. Se sabe, desde luego, que las ecuaciones $Ax = b$ son importantes como representaciones de sistemas de ecuaciones lineales con incógnitas $x_i = \langle x \rangle_i$. Por lo tanto, las ecuaciones $\mathcal{T}(v) = w$ cuando w está dado y hay que encontrar v son generalizaciones de la conocida ecuación $Ax = b$. Por ejemplo, una ecuación en donde \mathcal{T} se define como en el ejemplo 6.2 d), es una *ecuación diferencial ordinaria* y es muy importante en las aplicaciones prácticas. Por lo tanto, se considerará la existencia de soluciones de las ecuaciones $\mathcal{T}(v) = w$.

Es evidente, desde luego, que $\mathcal{T}(v) = w$ tiene una solución v si y sólo si w se produce mediante \mathcal{T} partiendo de algún vector en \mathcal{V} . Considere el conjunto \mathcal{W}_0 de todos estos vectores en \mathcal{W} : \mathcal{W}_0 es igual al conjunto de todos los vectores w_0 en \mathcal{W} tales que $w_0 = \mathcal{T}(v_0)$ para algún v_0 en \mathcal{V} . Es fácil usar el teorema 5.12 del subespacio para comprobar que \mathcal{W}_0 es realmente un subespacio de \mathcal{W} . Por ejemplo, si w_0 está en \mathcal{W}_0 y α es un escalar, entonces αw_0 está en \mathcal{W}_0 porque $\alpha w_0 = \alpha \mathcal{T}(v_0) = \mathcal{T}(\alpha v_0)$, siendo v_0 un vector en \mathcal{V} para el que $\mathcal{T}(v_0) = w_0$.

- (6.3) **Definición.** El *espacio imagen* de la transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} es aquel subespacio \mathcal{W}_0 de \mathcal{W} que consiste en todos los vectores w_0 en \mathcal{W} que son iguales a $\mathcal{T}(v_0)$ para alguna v_0 en \mathcal{V} .

Con esta definición, es lógico que la ecuación $\mathcal{T}(v) = w$ puede resolverse cuando w se escoge arbitrariamente en \mathcal{W} si y sólo si el espacio imagen de \mathcal{T} es efectivamente todo \mathcal{W} ; se dice que \mathcal{T} envía a \mathcal{V} sobre \mathcal{W} . Así, la generalización de la pregunta que nos preocupó tanto con las matrices –¿puede $Ax = b$ tener siempre solución?– se contesta mediante el estudio del espacio imagen de \mathcal{T} y la comprobación de su igualdad a todo \mathcal{W} . Resumiendo:

- (6.4) **Teorema** (existencia de solución de ecuaciones). Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} .

- a) Dada w , la ecuación $\mathcal{T}(v) = w$ se puede resolver si y sólo si w está en el espacio imagen de \mathcal{T} .
- b) Se puede encontrar v que resuelva $\mathcal{T}(v) = w$ para una w arbitraria en \mathcal{W} si y sólo si \mathcal{T} envía a \mathcal{V} sobre \mathcal{W} —esto es, el espacio imagen de \mathcal{T} es igual a \mathcal{W} .

Otra pregunta que se tenía al resolver $Ax = b$ era la *unicidad* —¿hay a lo más una solución de $Ax = b$? En un panorama más general, se preguntará si puede haber más de un v que resuelva $\mathcal{T}(v) = w$; si se supone que v_1 y v_2 lo hacen, entonces $0 = w - w = \mathcal{T}(v_1) - \mathcal{T}(v_2) = \mathcal{T}(v_1 - v_2)$, lo que simplemente dice que $v_1 - v_2$ resuelve la ecuación homogénea $\mathcal{T}(v) = 0$, exactamente como en el **teorema clave 4.16**. Así la cuestión de la unicidad depende del conjunto \mathcal{V}_0 de todas las soluciones de $\mathcal{T}(v) = 0$. El teorema 5.12 del subespacio de nuevo muestra fácilmente que \mathcal{V}_0 es un subespacio de \mathcal{V} ; por ejemplo, si v_1 y v_2 están en \mathcal{V}_0 , entonces también está $v_1 + v_2$ ya que

$$\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) = 0 + 0 = 0.$$

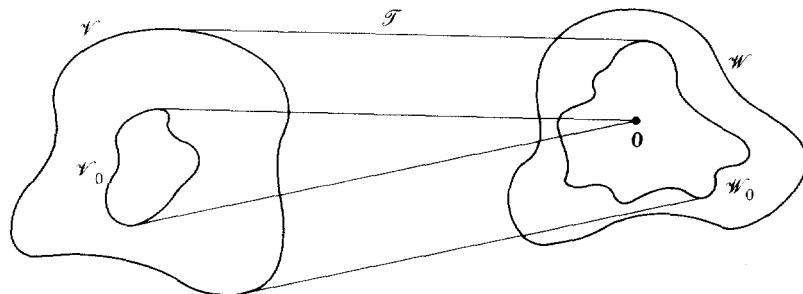
- (6.5) **Definición.** El *espacio nulo* (o *núcleo*) \mathcal{V}_0 de la transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} es el subespacio \mathcal{V}_0 de \mathcal{V} que consiste en todos aquellos vectores v en \mathcal{V} que satisfacen la ecuación $\mathcal{T}(v) = 0$ en \mathcal{W} .

El argumento que precede a la definición 6.5 muestra que es fácil generalizar el corolario 4.17 como sigue.

- (6.6) **Teorema** (unicidad de soluciones). La ecuación $\mathcal{T}(v) = w$ tiene a lo más una solución v si y sólo si el espacio nulo de \mathcal{T} es solamente $\{0\}$.

Las relaciones entre el dominio \mathcal{V} , el contradominio \mathcal{W} , el espacio nulo \mathcal{V}_0 y el espacio imagen \mathcal{W}_0 para una transformación \mathcal{T} se ilustran esquemáticamente en (6.7)

(6.7)



El esquema anterior parece sugerir que el “encogimiento” del espacio nulo \mathcal{V}_0 en \mathcal{V} hasta el vector 0 en \mathcal{W} es algo similar al “encogimiento” de \mathcal{V} hasta el

espacio imagen \mathcal{W}_0 . El siguiente teorema muestra que esto es correcto en términos de dimensión.

(6.8) **Teorema** (dominio, imagen y espacio nulo). Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal del espacio de dimensión finita \mathcal{V} a \mathcal{W} , entonces:

- La dimensión del dominio \mathcal{V} es igual a la suma de la dimensión del espacio nulo \mathcal{V}_0 y la dimensión del espacio imagen \mathcal{W}_0 .
- Con mayor detalle: Si $\{\mathcal{T}(\mathbf{v}_1), \mathcal{T}(\mathbf{v}_2), \dots, \mathcal{T}(\mathbf{v}_k)\}$ es una base para \mathcal{W}_0 y $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_r\}$ es una base para \mathcal{V}_0 , entonces el conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_r\}$$

es una base para el dominio \mathcal{V} .

DEMOSTRACION. Primero, observe que \mathcal{V} tiene alguna base finita $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ para alguna p . Como toda \mathbf{w}_0 en \mathcal{W}_0 es de la forma $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ para alguna \mathbf{v} en \mathcal{V} , y ya que tal \mathbf{v} es igual a $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{x}_p$ para escalares α_i adecuados, se tiene que

$$\mathbf{w}_0 = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{x}_p) = \alpha_1\mathcal{T}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_p\mathcal{T}(\mathbf{x}_p),$$

lo que dice que $\{\mathcal{T}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathcal{T}(\mathbf{x}_p)\}$ generan a \mathcal{W}_0 . Así, \mathcal{W}_0 es de dimensión finita; igualmente, \mathcal{V}_0 es de dimensión finita porque es un subespacio de \mathcal{V} , que es de dimensión finita y no puede haber más de p vectores en un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, todas las dimensiones de la parte a) del teorema tienen sentido y puesto que dicha parte es consecuencia inmediata de b), se estudiará sólo a b). Como \mathcal{W}_0 es de dimensión finita, tiene una base de, digamos, k vectores, cada uno de los cuales es igual a alguna $\mathcal{T}(\mathbf{v})$; es decir, \mathcal{W}_0 tiene bases de la forma $\{\mathcal{T}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathcal{T}(\mathbf{v}_k)\}$. Sea $\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r\}$ una base para \mathcal{V}_0 . Se debe demostrar que

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r\}$$

es una base de \mathcal{V} : un conjunto generador linealmente independiente.

(independencia lineal). Suponga que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \beta_1\mathbf{n}_1 + \dots + \beta_r\mathbf{n}_r = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_k\mathcal{T}(\mathbf{v}_k) &= \mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k) \\ &= \mathcal{T}(\mathbf{0} - \beta_1\mathbf{n}_1 - \dots - \beta_r\mathbf{n}_r) \\ &= \mathcal{T}(\mathbf{0}) - \beta_1\mathcal{T}(\mathbf{n}_1) - \dots - \beta_r\mathcal{T}(\mathbf{n}_r) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

porque las \mathbf{n}_i están en \mathcal{V}_0 . Pero como las $\mathcal{T}(\mathbf{v}_i)$ forman una base para \mathcal{W}_0 , la única combinación de esos vectores que es igual a $\mathbf{0}$ usa coeficientes cero,

entonces todas las α_i deben ser iguales a 0. Pero entonces queda una combinación de las \mathbf{n}_i (linealmente independientes) que da $\mathbf{0}$ lo que significa que también las β_i deben ser iguales a cero. Por lo tanto, B es linealmente independiente.

(generación). Para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} , se escribe $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ como combinación lineal de $\mathcal{T}(\mathbf{v}_i)$:

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \alpha_1 \mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_k \mathcal{T}(\mathbf{v}_k).$$

Entonces \mathbf{v}_0 definida como

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - \alpha_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_k \mathbf{v}_k$$

está en \mathcal{V}_0 porque

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}_0) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \alpha_1 \mathcal{T}(\mathbf{v}_1) - \cdots - \alpha_k \mathcal{T}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, \mathbf{v}_0 puede escribirse como una combinación de las \mathbf{n}_i :

$$\mathbf{v}_0 = \beta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \beta_r \mathbf{n}_r.$$

Pero esto dice que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \beta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \beta_r \mathbf{n}_r + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

y así B genera a \mathcal{V} . ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 20.

Inversas y adjuntas de transformaciones lineales

Al combinar los teoremas 6.4 y 6.6 se demuestra que la ecuación $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ tiene una solución única \mathbf{v} para cada \mathbf{w} si y sólo si el espacio imagen de \mathcal{T} es \mathcal{W} y el espacio nulo es $\{\mathbf{0}\}$. Sin embargo, se puede decir más: la correspondencia de \mathbf{w} a esa única \mathbf{v} que resuelve $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ es en realidad una transformación lineal.

- (6.9) **Teorema (inversas).** La ecuación $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ tiene una solución única \mathbf{v} en \mathcal{V} para cada \mathbf{w} en \mathcal{W} si y sólo si a) el espacio imagen de \mathcal{T} es igual a \mathcal{W} , y b) el espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $\{\mathbf{0}\}$. Cuando son válidos a) y b), la correspondencia de \mathbf{w} a la solución \mathbf{v} es lineal y se le designa como $\mathbf{v} = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w})$, de modo que

$$\mathcal{T}\{\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w})\} = \mathbf{w} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}(\mathbf{v})\} = \mathbf{v}$$

para toda \mathbf{w} en \mathcal{W} y toda \mathbf{v} en \mathcal{V} .

DEMOSTRACION. La primera parte es consecuencia inmediata de los teoremas 6.4 y 6.6; queda por demostrar que la correspondencia \mathcal{T}^{-1} de \mathbf{w} a \mathbf{v} es

una transformación lineal –se debe comprobar con la definición 6.1. Primero, considere $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$; defínase $\mathbf{v}_1 = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1)$ y $\mathbf{v}_2 = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_2)$ como la solución única de $\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ y $\mathcal{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Entonces, debido a que \mathcal{T} es lineal,

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Como esto significa que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ es solución de $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ y como tales soluciones son únicas, se deduce que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

–esto es, $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_2)$. El argumento para $\mathcal{T}^{-1}(\alpha\mathbf{w}_1)$ es igual a

$$\mathcal{T}(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{w}_1,$$

así que $\mathcal{T}^{-1}(\alpha\mathbf{w}_1) = \alpha\mathbf{v}_1 = \alpha\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}_1)$. Finalmente, las afirmaciones respecto a $\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}$ y a $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$ son consecuencia inmediata de la definición de \mathcal{T}^{-1} . ■

La inversa \mathcal{T}^{-1} se produce de la transformación lineal \mathcal{T} cuando son válidas las condiciones anteriores. Hay otra transformación lineal que puede producirse de \mathcal{T} que resulta ser importante en las aplicaciones –la transformación adjunta (*no tiene relación* con la matriz adjunta que se discutió en relación con los determinantes en la sección 4.6).

- (6.10) **Definición.** Sea \mathcal{T} una transformación lineal de \mathcal{V} , que tiene producto interior $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$ a \mathcal{W} que tiene producto interior $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Si existe una transformación lineal \mathcal{T}^* de \mathcal{W} a \mathcal{V} tal que

$$(\mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_{\mathcal{W}} = (\mathbf{v}, \mathcal{T}^*(\mathbf{w}))_{\mathcal{V}} \quad \text{para toda } \mathbf{v} \text{ en } \mathcal{V} \text{ y } \mathbf{w} \text{ en } \mathcal{W}$$

entonces se llama esa \mathcal{T}^* la transformación adjunta de \mathcal{T} .

- (6.11) **Ejemplo.** Suponga que la matriz real $p \times q$ \mathbf{A} define la transformación lineal \mathcal{T} de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^q$ a $\mathcal{W} = \mathbb{R}^p$ del modo acostumbrado: $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$. Suponga que \mathcal{V} y \mathcal{W} tienen los productos interiores estándar: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Entonces se tendrá

$$(\mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_{\mathcal{W}} = (\mathbf{Av}, \mathbf{w})_{\mathcal{W}} = (\mathbf{Av})^T \mathbf{w} = \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{A}^T \mathbf{w})_{\mathcal{V}},$$

lo cual significa que la transformación adjunta \mathcal{T}^* justamente se define por \mathbf{A}^T : $\mathcal{T}^*(\mathbf{w}) = \mathbf{A}^T \mathbf{w}$. Observe que si se usaran \mathbb{C}^q y \mathbb{C}^p , entonces \mathcal{T}^* estaría definida por \mathbf{A}^H en vez de por \mathbf{A}^T . Esto demuestra que la transformación

adjunta es una generalización de la útil transpuesta –lo cual da una idea de su importancia.

Véanse los problemas del 24 al 27 para tener en cuenta algunas propiedades importantes de las transformaciones adjuntas.

PROBLEMAS 6.1

- ▷ 1. Como se afirmó en la definición 6.1, demuestre que las condiciones a) y b) de esa definición son equivalentes a la condición

$$\mathcal{T}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(\mathbf{v}_2).$$
- ▷ 2. La transformación identidad \mathcal{I} de \mathcal{V} a \mathcal{V} se define como $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} . Demuestre que \mathcal{I} es una transformación lineal.
- 3. La transformación cero \mathcal{O} de \mathcal{V} a \mathcal{W} se define como $\mathcal{O}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en \mathcal{W} para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} . Demuestre que \mathcal{O} es una transformación lineal.
- 4. Demuestre que el ejemplo 6.2 a) define una transformación lineal.
- 5. Demuestre que los ejemplos 6.2 b) y d) definen transformaciones lineales.
- 6. Demuestre que el ejemplo 6.2 c) define una transformación lineal.
- 7. Demuestre que $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ del ejemplo 6.2 e) es un espacio vectorial
- ▷ 8. Suponga que \mathcal{S} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} y que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{W} a \mathcal{Z} . Demuestre que $\mathcal{T}\mathcal{S}$ es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{Z} , en donde $\mathcal{T}\mathcal{S}$ se define por $(\mathcal{T}\mathcal{S})(\mathbf{v}) = \mathcal{T}\{\mathcal{S}(\mathbf{v})\}$ para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} ; demuestre que $\mathcal{S}\mathcal{T}$ no está definida a menos que $\mathcal{V} = \mathcal{Z}$.
- 9. Demuestre que el espacio imagen de una transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} es un subespacio de \mathcal{W} .
- 10. Encuentre una fórmula para todos los vectores en el espacio imagen de \mathcal{T} , en donde \mathcal{T} va de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 y está definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 11. Sea \mathcal{T} la transformación lineal de \mathbb{R}^q a \mathbb{R}^p definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$, en donde \mathbf{A} es una matriz $p \times q$. Demuestre que el espacio imagen de \mathcal{T} es igual al espacio de columnas de \mathbf{A} .
- 12. Encuentre el espacio imagen de la transformación \mathcal{T} del ejemplo 6.2 b) suponiendo que $f(t) \neq 0$ para toda t .

13. \mathcal{T} es una transformación lineal desde $C^1[0, 1]$ –el espacio de todas las funciones continuamente diferenciales en $[0, 1]$ – a $C[0, 1]$ –el espacio de las funciones continuas en ese intervalo. Para toda y en $C^1[0, 1]$, $\mathcal{T}(y)$ es la función cuyo valor en t es igual a $y'(t) + y(t)$, en donde la prima quiere decir diferenciar con respecto a t . Demuestre que el espacio imagen de \mathcal{T} es todo $C[0, 1]$.
- ▷ 14. Demuestre que el espacio nulo de una transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} es un subespacio de \mathcal{V} .
15. Demuestre el teorema 6.6 sobre la unicidad de soluciones.
16. Encuentre una base para el espacio nulo de la transformación \mathcal{T} de \mathbb{R}^5 a \mathbb{R}^4 definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$, en donde
- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$
17. Demuestre que $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{y})$ si y sólo si $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ está en el espacio nulo de \mathcal{T} .
- ▷ 18. Sea \mathbf{A} una matriz $p \times q$ con rango k , y defina $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$. Demuestre que la dimensión del espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $q - k$.
19. Se dice que una transformación \mathcal{T} es *inyectiva* si y sólo si $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{y})$ implica que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Demuestre que una transformación lineal es inyectiva si y sólo si el espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $\{\mathbf{0}\}$.
20. Encuentre una base para el dominio de \mathcal{T} del tipo descrito en el teorema 6.8 si $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ y
- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$
- ▷ 21. Determine si la transformación definida en el problema 13 tiene inversa.
22. Suponga que \mathcal{T} es la transformación de \mathbb{R}^p a \mathbb{R}^p definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ para alguna matriz \mathbf{A} , $p \times p$. Demuestre que \mathcal{T} tiene una inversa si y sólo si \mathbf{A} es no singular, y que entonces $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$.
23. Suponga que \mathcal{S} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} y que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{W} a \mathcal{Z} ; suponiendo que tanto \mathcal{S} como \mathcal{T} inversas, demuestre que $\mathcal{T}\mathcal{S}$ –véase el problema 8– tiene una inversa y que $(\mathcal{T}\mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{T}^{-1}$.
- ▷ 24. Suponga que \mathcal{T} es la transformación lineal de \mathbb{C}^q a \mathbb{C}^p definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ para alguna matriz \mathbf{A} , $p \times q$. Demuestre que \mathcal{T}^* existe mostrando que $\mathcal{T}^*(\mathbf{w}) = \mathbf{A}^H\mathbf{w}$.

- 25.** Demuestre que $(\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T}$.
- 26.** Extienda el problema 5 de la sección 5.10 como sigue: suponga que \mathcal{V} es un espacio vectorial con un producto interior y que \mathcal{V}_0 es un subespacio. Defina el *complemento ortogonal* \mathcal{V}_0^\perp de \mathcal{V}_0 como el conjunto de vectores \mathbf{v} ortogonales a todos los vectores en \mathcal{V}_0 . Demuestre que \mathcal{V}_0^\perp es un subespacio.
- ▷ **27.** Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} , cada uno con productos interiores, y que existe la transformación adjunta \mathcal{T}^* . Sea \mathcal{N} el espacio nulo de \mathcal{T} y sea \mathcal{R}^* el espacio imagen de \mathcal{T}^* .
- Demuestre que $(\mathcal{R}^*)^\perp = \mathcal{N}$ (véase el problema 26).
 - Utilice la proyección ortogonal sobre \mathcal{R}^* para demostrar que si \mathcal{R}^* es de dimensión finita, $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{R}^*$.

6.2 REPRESENTACIONES MATRICIALES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

En la sección 5.4 se vio que todo espacio vectorial real o complejo de dimensión finita es básicamente \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p . Se vio también en el ejemplo 6.2 a) que las matrices $p \times q$ definen transformaciones lineales entre \mathbb{R}^q y \mathbb{R}^p . Estos hechos dan una pista sobre el hecho fundamental con respecto a las transformaciones lineales definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita: cada una no es más que una multiplicación matricial.

Representaciones matriciales

Suponga que $B = \{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_q\}$ es una base ordenada de \mathcal{V} , que $C = \{\mathbf{w}_1; \dots; \mathbf{w}_p\}$ es una base ordenada de \mathcal{W} , y que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} . Para cada \mathbf{v}_j en B , ya que $\mathcal{T}(\mathbf{v}_j)$ está en \mathcal{W} , se puede escribir en términos de la base ordenada C :

$$(6.12) \quad \mathcal{T}(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{pj}\mathbf{w}_p.$$

Esto quiere decir, en términos del isomorfismo de coordenadas c_C

$$c_C(\mathbf{v}_j) = [a_{1j} \quad \cdots \quad a_{pj}]^T.$$

A continuación, se escribe \mathbf{v} en \mathcal{V} en términos de sus coordenadas en B :

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_q\mathbf{v}_q,$$

de modo que $c_B(\mathbf{v}) = [x_1 \dots x_q]^T$. A continuación se calcula $\mathcal{T}(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{v}) &= \mathcal{T}(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_q\mathbf{v}_q) = x_1\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_q\mathcal{T}(\mathbf{v}_q) \\ &= x_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{p1}\mathbf{w}_p) + \cdots + x_q(a_{1q}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{pq}\mathbf{w}_p) \\ &= y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_p\mathbf{w}_p, \end{aligned}$$

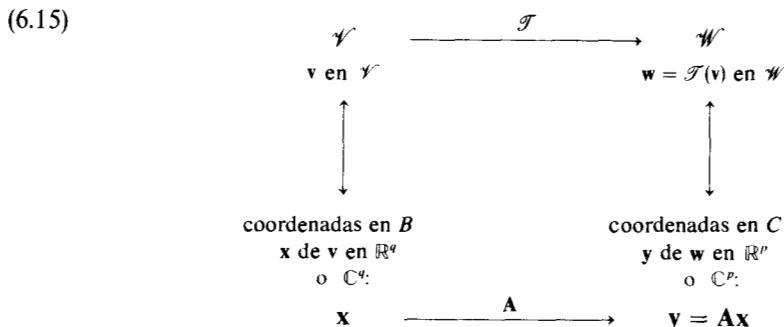
en donde las y_i son las coordenadas en C de $\mathcal{T}(v)$ y se calculan de

$$(6.13) \quad y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iq}x_q.$$

Si ahora se define la matriz A , $p \times q$ por los elementos $\langle A \rangle_{ij} = a_{ij}$ en donde las a_{ij} están definidas como en (6.12), se ve que las coordenadas en C y $= c_C\{\mathcal{T}(v)\}$ de la salida $\mathcal{T}(v)$ se relacionan con las coordenadas en B , $x = c_B(v)$ de la entrada v de acuerdo a (6.13) por una multiplicación matricial: $y = Ax$. De este modo, en vez de aplicar \mathcal{T} directamente a v , es posible, en su lugar, 1) encontrar las coordenadas en B x de v en V , 2) calcular $y = Ax$ y 3), usar los elementos de y como las coordenadas en C para formar un vector w en W ; w será lo mismo que $\mathcal{T}(v)$. Entonces todas las transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita reales o complejos son equivalentes a la multiplicación matricial en los vectores de coordenadas. Se ha demostrado:

- (6.14) **Teorema clave** (representaciones matriciales). Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal del espacio vectorial V de dimensión q con una base ordenada $B = \{v_1, \dots, v_q\}$ al espacio vectorial W de dimensión p con una base ordenada $C = \{w_1, \dots, w_p\}$. La matriz A , $p \times q$ se define por $\langle A \rangle_{ij} = a_{ij}$, en donde las a_{ij} se definen como en (6.12). Entonces, A representa (o es una representación de) \mathcal{T} :
- $\mathcal{T}(v) = w$ si y sólo si $Ax = y$, en donde $x = c_B(v)$ son las coordenadas en B de v y $y = c_C(w)$ que son las coordenadas en C de w .
 - Escrito simbólicamente, $\mathcal{T} = c_C^{-1}Ac_B$ para que $\mathcal{T}(v) = c_C^{-1}\{Ac_B(v)\}$.

El diagrama 6.15 representa esquemáticamente el teorema clave 6.14.



- (6.16) **Ejemplo.** Sea V el espacio vectorial real \mathcal{P}^3 de los polinomios con grado estrictamente menor que 3 y sea W el espacio análogo \mathcal{P}^2 . Se define \mathcal{T} de V a W por

$$\mathcal{T}(v) = \frac{v(t) - v(0)}{t}.$$

Sea B la base ordenada para \mathcal{V} , $B = \{1 + t; t + t^2; t^2 + 1\}$ y sea C la base ordenada para \mathcal{W} , $C = \{1 + t; 1 - t\}$. Es posible evaluar \mathcal{T} en términos de los polinomios mismos por

$$\mathcal{T}(a + bt + ct^2) = b + ct.$$

Para representar \mathcal{T} por una matriz A , se deben encontrar las a_{ij} de (6.12) como sigue:

$$\mathcal{T}(1 + t) = 1 = 0.5(1 + t) + 0.5(1 - t),$$

$$\mathcal{T}(t + t^2) = 1 + t = 1(1 + t) + 0(1 - t)$$

$$\mathcal{T}(t^2 + 1) = t = 0.5(1 + t) - 0.5(1 - t).$$

Esto resulta en

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

como la matriz que representa a \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas B y C . Para comprobar esto, se calcula $\mathcal{T}(1 + t + t^2)$ de dos maneras: directamente de \mathcal{T} e indirectamente a través de A . Para usar A , se necesitarán primero x , las coordenadas en B de

$$1 + t + t^2 = 0.5(1 + t) + 0.5(t + t^2) + 0.5(t^2 + 1),$$

y entonces x debe ser $x = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$. Por lo tanto, las coordenadas en C , y, de $\mathcal{T}(1 + t + t^2)$ deberían ser $Ax = [1 \ 0]^T$. Usando estos elementos como coordenadas en C , resulta

$$1(1 + t) + 0(1 - t) = 1 + t.$$

Por lo tanto, de acuerdo al cálculo usando A ,

$$\mathcal{T}(1 + t + t^2) = 1 + t;$$

es fácil ver que esto es correcto usando la definición de \mathcal{T} .

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 12.

Cambio de base

La representación A para una transformación lineal \mathcal{T} que se construyó anteriormente depende fuertemente de las bases ordenadas B y C usadas en \mathcal{V} y en \mathcal{W} . Si se cambian las bases, entonces la matriz A de la representación debe cambiarse. La pregunta es: ¿cómo? El **teorema clave 5.43** explicó cómo se relacionan las coordenadas de un vector con respecto a dos bases ordenadas B y

B' ; se puede usar fácilmente para explicar cómo cambian las representaciones matriciales de transformaciones lineales

- (6.17) **Teorema** (cambio de base y representaciones). Suponga que una transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} se representa por una matriz A con respecto a las bases ordenadas B y C de \mathcal{V} y \mathcal{W} , como en el **teorema clave 6.14**. También suponga que se introducen nuevas bases ordenadas B' y C' de \mathcal{V} y \mathcal{W} . Si las coordenadas en B , \mathbf{v}_B y las coordenadas en B' , $\mathbf{v}_{B'}$, de los vectores \mathbf{v} , están relacionadas por la matriz no singular P (llamada M en el **teorema clave 5.43**) por $\mathbf{v}_B = P\mathbf{v}_{B'}$, y si las coordenadas en C , \mathbf{w}_C y las coordenadas en C' , $\mathbf{w}_{C'}$, de los vectores \mathbf{w} , están relacionadas por la matriz no singular S por $\mathbf{w}_C = S\mathbf{w}_{C'}$, entonces la matriz A' que representa \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas B' y C' es $A' = S^{-1}AP$.

DEMOSTRACION. El problema es encontrar la matriz A' tal que $\mathbf{w} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ sea equivalente a $\mathbf{w}_{C'} = A'\mathbf{v}_{B'}$. Se sabe que $\mathbf{w} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ es equivalente a $\mathbf{w}_C = A\mathbf{v}_B$ y se tiene que $\mathbf{v}_B = P\mathbf{v}_{B'}$ y $\mathbf{w}_C = S\mathbf{w}_{C'}$. De todo lo anterior se obtiene que

$$\mathbf{w}_{C'} = S^{-1}\mathbf{w}_C = S^{-1}A\mathbf{v}_B = S^{-1}AP\mathbf{v}_{B'} = A'\mathbf{v}_{B'}, \text{ siendo } A' = S^{-1}AP,$$

que es lo que se había afirmado. ■

Una situación común es que $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, $B = C$ y $B' = C'$, en cuyo caso $S = P$.

- (6.18) **Ejemplo.** Considere la matriz A del ejemplo 2.17 sobre las poblaciones en competencia, en donde se encontró experimentalmente que las distribuciones de población $\mathbf{x}_{i+1} = A^i\mathbf{x}_1$ tendían a cero cuando i se hacía grande, aunque no se pudo probar que esto siempre pasaría. A define una transformación lineal \mathcal{T} de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ y de hecho \mathcal{T} está representada por A con respecto a las bases ordenadas $B = C = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ —véase el problema 10. Suponga que en su lugar se consideran las nuevas bases ordenadas

$$B' = C' = \{[5 \quad 3]^T; [0 \quad 1]^T\}.$$

De acuerdo al **teorema clave 5.43** las matrices $P = S$ que hacen el cambio de coordenadas se encuentran fácilmente y son

$$S = P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y así se obtiene } S^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 \end{bmatrix}.$$

A continuación se usará el teorema 6.17 para descubrir la forma en que \mathcal{T} está representada con respecto a las nuevas bases ordenadas B' y C' por

$$A' = S^{-1}AP = S^{-1}AS = A' = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.01 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Esta representación de \mathcal{T} hace mucho más fácil que \mathbf{A} la tarea de imaginar lo que pasa cuando \mathcal{T} se aplica repetidamente a una distribución inicial de poblaciones \mathbf{x}_1 . Aplicar \mathcal{T} repetidamente a \mathbf{x}_1 es equivalente a multiplicar \mathbf{A}' repetidamente por las coordenadas en B' de \mathbf{x}_1 . Pero es fácil notar, por la forma especial de \mathbf{A}' , que la multiplicación repetida por \mathbf{A}' —esto es, $(\mathbf{A}')^i$ — sólo es

$$(\mathbf{A}')^i = \begin{bmatrix} (0.9)^i & 0.01(i)(0.9)^{i-1} \\ 0 & (0.9)^i \end{bmatrix},$$

matriz en la cual cada elemento tiende a cero cuando i se hace grande. Así, las coordenadas en C' de \mathbf{x}_{i+1} —que es igual a $(\mathbf{A}')^i$ por las coordenadas en B' de \mathbf{x}_1 — deben tender a cero, lo que demuestra que las poblaciones \mathbf{x}_i tienden a cero sin importar la población inicial.

Las bases especiales B' y C' del ejemplo 6.18 fueron la clave para obtener una representación tan sencilla de \mathcal{T} con la que se pudo ver lo que sucedía a las poblaciones. El cambio de bases para obtener una representación sencilla de una transformación lineal a menudo es un paso fundamental en el estudio de una transformación y la aplicación que modela. El problema que queda es *cómo escoger una base ordenada para que la representación sea simple*. Se retomará esta dificultad en el capítulo 7.

PROBLEMAS 6.2

- ▷ 1. Sea \mathcal{I} la transformación identidad $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ de \mathcal{V} a \mathcal{V} , en donde \mathcal{V} es de dimensión finita y en donde se usa la misma base ordenada para \mathcal{V} como dominio y contradominio de \mathcal{I} . Encuentre la representación matricial de \mathcal{I} .
- 2. Sea \mathcal{O} la transformación cero $\mathcal{O}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ de \mathcal{V} a \mathcal{W} , ambos de dimensión finita. Encuentre la representación matricial de \mathcal{O} .
- ▷ 3. Sea \mathcal{V} igual a \mathcal{P}^3 , el espacio de polinomios con grado estrictamente menor que 3, y sea \mathcal{W} el espacio análogo \mathcal{P}^4 . Defina \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} de modo que, para cada polinomio f en \mathcal{V} , $\mathcal{T}(f)$ sea el polinomio de \mathcal{W} cuyo valor en t sea igual a $tf(t) + \{f(t) - f(0)\}/t$. Encuentre la representación matricial de \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas

$$B = \{1; 1+t; 1+t+t^2\} \quad \text{para } \mathcal{V},$$

y

$$C = \{1; 1-t; 1+2t+t^2; 1-3t+3t^2-t^3\} \quad \text{para } \mathcal{W}.$$

Compruebe que la representación es correcta calculando $\mathcal{T}(-2+3t-t^2)$ de dos maneras.

4. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ de dimensión p y sea \mathcal{I} la transformación identidad $\mathcal{I}(v) = v$ para toda v . Sea B la base ordenada que se usa para \mathcal{V} como el dominio de \mathcal{I} , y sea B' una base ordenada *distinta* usada para \mathcal{V} como el contradominio de \mathcal{I} . Compare la matriz que representa a \mathcal{I} con las matrices generadas para cambiar las bases del **teorema clave 5.43**.
5. Sean \mathcal{P}^3 y \mathcal{P}^4 los espacios del problema 3 y sea \mathcal{T} la transformación lineal de \mathcal{P}^4 a \mathcal{P}^3 que transforma cada polinomio en su derivada. Encuentre la representación matricial de \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas

$$B = \{1; t; t^2; t^3\} \quad \text{para } \mathcal{P}^4$$

y

$$C = \{1; t; t^2\} \quad \text{para } \mathcal{P}^3.$$

Compruebe que la representación es correcta calculando $\mathcal{T}(1 + 2t + t^2 + t^3)$ de dos maneras.

- ▷ 6. Sea \mathcal{P}^4 como en el problema 3 y sea \mathcal{T} la transformación lineal de \mathcal{P}^4 a \mathcal{P}^4 que transforma cada polinomio f en la derivada de $tf(t)$. Utilice la base ordenada $\{1; t; t^2; t^3\}$ de \mathcal{P}^4 tanto como dominio como contradominio para encontrar una representación matricial de \mathcal{T} y compruebe que la representación es correcta calculando $\mathcal{T}\{2 - 3t + t^2 - t^3\}$ por dos caminos.
- 7. Suponga que X representa a \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} con respecto a las bases ordenadas B para \mathcal{V} y C para \mathcal{W} , y suponga que Y representa a \mathcal{S} y \mathcal{W} a \mathcal{Z} con respecto a las bases ordenadas C para \mathcal{W} y D para \mathcal{Z} . Demuestre que YX representan \mathcal{ST} con respecto a B para \mathcal{V} y a D para \mathcal{Z} .
- 8. Suponga que A representa a \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{V} con respecto a alguna base ordenada usada en \mathcal{V} como dominio y como contradominio. Demuestre que A^i representa a \mathcal{T}^i para enteros $i > 0$.
- ▷ 9. Suponga que A representa a \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} . Demuestre que \mathcal{T}^{-1} existe si y sólo si A es no singular, y que entonces A^{-1} representa a \mathcal{T}^{-1} .
- 10. Suponga que A es una matriz $p \times q$ y que $\mathcal{T}(v) = Av$ como de costumbre. Demuestre que A representa a \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas $\{e_1; \dots; e_q\}$ del dominio y $\{e_1; \dots; e_p\}$ del contradominio.
- ▷ 11. Suponga que A representa a \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} con respecto a las bases ordenadas B para \mathcal{V} y C para \mathcal{W} . Demuestre que $\mathcal{T}(v) = \mathbf{0}$ si y sólo si $Av_B = \mathbf{0}$, en donde v_B representa las coordenadas en B de v .
- 12. Con la nomenclatura del problema 11, demuestre que w está en el espacio imagen de \mathcal{T} si y sólo si las coordenadas en C de w , w_C , están en el espacio de columnas de A .
- ▷ 13. Sea la transformación lineal $w = \mathcal{T}(v)$ de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 definida por

$$w_1 = v_1 - v_2, \quad w_2 = 2v_1 + v_2, \quad \text{y} \quad w_3 = v_1 - 2v_2$$

en donde $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T$ y $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$. Encuentre la matriz \mathbf{A} que representa a \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas $B = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ para \mathbb{R}^2 y $C = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ para \mathbb{R}^3 . Compruebe calculando $\mathcal{T}([2 \ 1]^T)$ por dos caminos

14. Sea $B' = \{[1 \ 0]^T; [1 \ 1]^T\}$. Mediante el teorema 6.17, encuentre la matriz que representa a \mathcal{T} del problema 13 con respecto a B' y C . Compruebe calculando $\mathcal{T}([2 \ 1]^T)$ de dos maneras.
15. Sea $C' = \{[1 \ 2 \ 1]^T; [0 \ 3 \ -1]^T; [0 \ 0 \ 1]^T\}$. Mediante el teorema 6.17 encuentre la matriz que representa a \mathcal{T} del problema 13 con respecto a B y a C' . Compruebe calculando $\mathcal{T}([2 \ 1]^T)$ por dos caminos.
- ▷ 16. Mediante el teorema 6.17 encuentre la matriz que representa a \mathcal{T} del problema 13 con respecto a B' del problema 14 y C' del problema 15. Compruebe calculando $\mathcal{T}([2 \ 1]^T)$ de dos maneras.
17. Considere el modelo de crecimiento de población de la sección 2.3 con $k = 0.1$ como en el ejemplo 2.16, en donde se demostró experimentalmente que las poblaciones tendían al infinito. Siguiendo el ejemplo 6.18, analice el comportamiento de las poblaciones a medida que i tiende a infinito mediante la base ordenada $\{[5 \ 1]^T; [1 \ 1]^T\}$ tanto para el dominio como para el contradominio.
18. Considere el modelo de crecimiento de población de la sección 2.3 con $k = 0.16$. Siguiendo el ejemplo 6.18, analice la conducta de las poblaciones a medida que i tiende a infinito usando la base ordenada $\{[5 \ 4]^T; [5 \ 2]^T\}$ tanto para el dominio como para el contradominio.

6.3 NORMAS DE TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

Como se indicó anteriormente, el matemático aplicado a menudo estudia las propiedades de transformaciones lineales tratando de entender sus efectos sobre las “entradas”. Un problema común es el de comprender el “tamaño” de la transformación en el sentido del *tamaño de sus efectos* sobre las magnitudes de esas entradas. Por ejemplo, en la sección 2.3 podría estar interesado en saber cuánto puede amplificarse la población de gallinas y zorros en un solo periodo de tiempo. Ya que se han presentado métodos precisos –normas– para medir la magnitud de los vectores, es posible usarlos para ayudar a medir el tamaño de los efectos de una transformación lineal; esto a su vez proporciona un método para medir el tamaño de matrices (como transformaciones lineales).

Normas de transformación lineales

Sea \mathcal{T} una transformación lineal de un espacio vectorial \mathcal{V} con una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ a un espacio vectorial \mathcal{W} con una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Para cada \mathbf{v} diferente de cero en \mathcal{V} ,

el cociente $\|\mathcal{T}(v)\|_W/\|v\|_V$ mide el aumento causado por la transformación \mathcal{T} en ese vector específico v ; un límite superior a este cociente que fuera válido para *toda* v mediría entonces el efecto general de \mathcal{T} sobre el tamaño de los vectores en V . Se puede demostrar que *en cada espacio V de dimensión finita*, el cociente anterior tiene un valor máximo al que se llega con un vector especial v . Por eso, en todos los espacios reales o complejos de dimensión finita, hay un máximo para el valor del cociente $\|\mathcal{T}(v)\|_W/\|v\|_V$ para todo $v \neq 0$, y este número mide el tamaño del *efecto* de \mathcal{T} : si este número es pequeño, entonces \mathcal{T} reducirá la norma de *todos* los vectores; si este número es grande, entonces *algunos* vectores aumentarán mucho su norma por \mathcal{T} . Por analogía con las normas vectoriales que miden el tamaño de los vectores, a este número se le llama la norma de \mathcal{T} *inducida* por las normas dadas sobre V y W .

En algunos espacios de dimensión infinita, el cociente $\|\mathcal{T}(v)\|_W/\|v\|_V$ puede no tener límite superior; inclusive si está acotado, puede ser que no se alcance el valor máximo con ninguna v especial. Sin embargo, cuando el cociente está acotado, tendrá una cota superior *mínima* llamada su *supremum*. La definición que sigue por lo tanto usa la palabra “supremum” en lugar de “máximo” para tener en cuenta esta posibilidad, aunque este caso no ocurrirá en este libro.

- (6.19) **Definición.** Sea \mathcal{T} una transformación lineal de V a W que tienen normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$. La *norma* (de la transformación) $\|\cdot\|_{V,W}$ *inducida por* $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ se define por

$$\|\mathcal{T}\|_{V,W} = \sup_{v \neq 0 \text{ en } V} \frac{\|\mathcal{T}(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

siempre que este supremum sea finito.

La norma de una transformación tiene la mayoría de las propiedades de las normas vectoriales que se describieron en la definición 5.54; de hecho – problema 6 – la norma de una transformación es una norma vectorial en el espacio vectorial $\mathcal{L}(V, W)$ de todas las transformaciones lineales de V a W (de dimensión finita). Además, satisface algunas propiedades especiales debido a que se calcula partiendo de transformaciones.

- (6.20) **Teorema clave (normas de transformaciones lineales).** Sean \mathcal{L} , \mathcal{M} y \mathcal{N} transformaciones lineales de V a W , de V a W , y de W a Z respectivamente, y suponga que cada una tiene una norma finita. Entonces:
- $\|\mathcal{L}\|_{V,W} \geq 0$, y $\|\mathcal{L}\|_{V,W} = 0$ si y sólo si \mathcal{L} es la transformación lineal cero, $\mathcal{L}(v) = 0$ para toda v .
 - $\|\alpha \mathcal{L}\|_{V,W} = |\alpha| \|\mathcal{L}\|_{V,W}$ para todos los escalares α .
 - $\|\mathcal{L} + \mathcal{M}\|_{V,W} \leq \|\mathcal{L}\|_{V,W} + \|\mathcal{M}\|_{V,W}$.

- d) $\|\mathcal{L}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} \leq \|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}$ para todo \mathbf{v} en \mathcal{V} .
- e) $\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = 1$, en donde \mathcal{I} es la transformación lineal idéntica en \mathcal{V} , $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo \mathbf{v} en \mathcal{V} .
- f) $\|\mathcal{NM}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{Z}} \leq \|\mathcal{N}\|_{\mathcal{W}, \mathcal{Z}} \|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ en donde \mathcal{NM} es la transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{Z} definida por $\mathcal{NM}(\mathbf{v}) = \mathcal{N}\{\mathcal{L}(\mathbf{v})\}$.
- g) Si $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, entonces $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \leq (\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{V}})^2$.

DEMOSTRACION. Es fácil ver que cada uno de los suprema es finito, porque son finitos para \mathcal{L} , \mathcal{M} , y \mathcal{N} .

- a), d) y e) son consecuencia inmediata de la definición de norma de una transformación.
 b) Es evidente para $\alpha = 0$ y se comprueba fácilmente para α diferente de cero porque $|\alpha|$ puede factorizarse fuera del supremum.
 c) De la desigualdad del triángulo para normas vectoriales se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L} + \mathcal{M})(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} &= \|\mathcal{L}(\mathbf{v}) + \mathcal{M}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} \leq \|\mathcal{L}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} + \|\mathcal{M}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} \\ &\leq (\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} + \|\mathcal{M}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}) \|\mathbf{v}\| \quad \text{usando (d).} \end{aligned}$$

Lo anterior dice que el cociente que define la norma de $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ está acotado superiormente por $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} + \|\mathcal{M}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$, de modo que la cota mínima es igual cuando más a esto.

- f) es consecuencia de un argumento semejante al de c), y entonces g) sigue por aplicación repetida de f). ■

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 8.

Normas matriciales

En este libro nos ocupamos principalmente de \mathbb{R}^p , \mathbb{C}^p , y sus subespacios; las transformaciones lineales de interés se definen por multiplicación matricial: $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$. En esos casos las normas vectoriales que más se usan son $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ que se definieron en 5.55. Es natural y útil considerar las normas de transformaciones lineales inducidas por esas normas vectoriales sobre transformaciones lineales definidas por matrices.

- (6.21) **Ejemplo.** Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times q$ siendo $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = a_{ij}$ y definase α por

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^q |a_{ij}|.$$

Para cualquier \mathbf{v} en \mathbb{R}^q (o \mathbb{C}^q), denóminese $\langle \mathbf{v} \rangle_i$ con v_i , y supóngase que el α máximo que se acaba de definir se alcanza para $i = i_0$. Entonces si $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_\infty &= \|\mathbf{Av}\|_\infty = \max_i |\langle \mathbf{Av} \rangle_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^q a_{ij} v_j \right| \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^q (|a_{ij}| |v_j|) \leq \max_i \sum_{j=1}^q (|a_{ij}| \max_k |v_k|) \\ &\leq \alpha \|\mathbf{v}\|_\infty,\end{aligned}$$

y así $\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_\infty / \|\mathbf{v}\|_\infty \leq \alpha$ para todo \mathbf{v} diferente de cero; esto quiere decir que esta norma de la transformación \mathcal{T} es, a lo más, α . De hecho es *igual* a α ; para demostrar esto, se debe encontrar una \mathbf{v} especial para que el cociente acostumbrado sea igual a α . Para cada j , escogemos a v_j con valor absoluto 1 tal que $a_{i_0 j} v_j = |a_{i_0 j}|$. Claramente $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$, por lo tanto $\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_\infty \leq \alpha$; aún más,

$$|\langle \mathcal{T}(\mathbf{v}) \rangle_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^q a_{i_0 j} v_j \right| = \left| \sum_{j=1}^q |a_{i_0 j}| \right| = \alpha,$$

de modo que, en efecto, $\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_\infty = \alpha$ para esta \mathbf{v} especial. Así, esta norma de la transformación \mathcal{T} es igual a α .

Como la transformación \mathcal{T} del ejemplo 6.21 es justamente una multiplicación por \mathbf{A} , parece razonable llamar a la norma que se ha calculado, una norma de \mathbf{A} así como una norma de \mathcal{T} .

- (6.22) **Definición.** Para una matriz \mathbf{A} , $p \times q$, por normas de la matriz $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_2$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$ –o cualquiera otra norma de la matriz $\|\mathbf{A}\|$ – se entenderán las normas de la transformación \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ que se inducen cuando se usa la correspondiente norma vectorial tanto en el dominio como en el contradominio de \mathcal{T} . En especial,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \right\} \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \right\} \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \right\}.\end{aligned}$$

En el ejemplo 6.21 se encontró que es posible calcular $\|\mathbf{A}\|_\infty$ con los elementos de \mathbf{A} ; un argumento semejante –problema 10– conduce a la fórmula relacionada para $\|\mathbf{A}\|_1$. Desafortunadamente, el cálculo de $\|\mathbf{A}\|_2$ es mucho más complejo e

involucra un concepto que no se encontrará sino hasta el capítulo siguiente; sin embargo, para completar el tema, se enunciará aquí la fórmula.

(6.23)

Teorema clave (normas matriciales). Sea $A, p \times q$; entonces:

- a) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^p |a_{ij}|$ (*máximo de las sumas de los valores absolutos de las columnas*).
- b) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^q |a_{ij}|$ (*máximo de las sumas de los valores absolutos de las columnas*).
- c) $\|A\|_2 = (\text{máximo eigenvalor de } A^T A)^{1/2}$
 $= \text{máximo valor singular de } A.$

(6.24)

Ejemplo. En la sección 2.3 se consideró –en el lenguaje presente– una transformación lineal que modelaba el crecimiento de poblaciones en competencia de gallinas y de zorros, desde un periodo de tiempo hasta el siguiente. En particular, en el ejemplo 2.17 se trató el modelo en que $\mathcal{F}(x) = Ax$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.18 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Si lo que interesa es el número *total* de animales en el modelo, entonces $\|x\|_1$ calcula esta cifra para cada x de poblaciones. Usando esta norma y la fórmula anterior, resulta en $\|A\|_1 = 1.7$, y así se sabe que la población total puede aumentarse por un factor de 1.7 en cualquier periodo de tiempo. Si, en su lugar, se está interesado en el número *máximo* de animales de un tipo, entonces $\|x\|_\infty$ calcula este número. Mediante esta norma y la fórmula anterior, resulta que $\|A\|_\infty = 1.38$, y así se sabe que la población máxima se puede aumentar por un factor de 1.38 en cualquier periodo. Observe también que según el **teorema clave 6.20 g)** es posible concluir que, por ejemplo, $\|A^i\|_\infty \leq (1.38)^i$, lo que daría la impresión de que se debería esperar que A^i contuviera números grandes para i grande; la desigualdad da sólo una *cota superior* de $\|A^i\|_\infty$, sin embargo –el ejemplo 6.18 de la sección anterior mostró que en realidad A^i converge a 0 a medida que i tiende a infinito. Las normas dan información útil sobre las matrices, pero son una herramienta bastante imprecisa –al menos para estudiar el comportamiento de las potencias de una matriz.

Recuerde que el teorema 5.59 sobre la equivalencia de normas, mostró que las normas vectoriales 1, 2 e ∞ son todas equivalentes. Es fácil usar las desigualdades

dades en el inciso b) de ese teorema para desarrollar hechos similares para las normas matriciales inducidas. Por ejemplo, para \mathbf{A} , $p \times q$, se tiene que

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 \leq p\|\mathbf{Ax}\|_\infty \leq p\|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_\infty \leq p\|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_1.$$

lo que significa que $\|\mathbf{Ax}\|_1/\|\mathbf{x}\|_1$ está acotado por $p\|\mathbf{A}\|_\infty$. Como $\|\mathbf{A}\|_1$ es la *mínima* cota superior para este cociente, se concluye que $\|\mathbf{A}\|_1 \leq p\|\mathbf{A}\|_\infty$. Argumentos semejantes conducen a semejantes desigualdades entre las demás normas matriciales. Aún más, es posible usar el concepto de *convergencia* de la definición 5.58 para considerar las sucesiones \mathbf{A}_i de matrices, de modo que \mathbf{A}_i converja a \mathbf{A}_∞ si y sólo si $\|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_\infty\|$ converge a 0 para cualquier norma que estemos usando. Como $|\langle \mathbf{A} \rangle_{jk}| \leq \|\mathbf{A}\|_\infty$ para toda j y k , la convergencia en este sentido significa que los elementos de \mathbf{A}_i convergen a los elementos correspondientes de \mathbf{A}_∞ . De este modo se tiene un análogo directo del teorema 5.59 que trata sobre la equivalencia de las normas vectoriales.

(6.25) **Teorema** (equivalencia de normas de matrices). Las normas 1, 2 e ∞ de las matrices son todas equivalentes en el siguiente sentido:

- a) Si una sucesión de matrices \mathbf{A}_i convergen a \mathbf{A}_∞ en una de las normas, entonces convergerán en las tres normas y los elementos $\langle \mathbf{A}_i \rangle_{jk}$ convergerán hacia los elementos $\langle \mathbf{A}_\infty \rangle_{jk}$.
- b) Para todas las matrices \mathbf{A} , $p \times q$,

$$\frac{\|\mathbf{A}\|_2}{\sqrt{p}} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2\sqrt{q}$$

$$\frac{\|\mathbf{A}\|_2}{\sqrt{q}} \leq \|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2\sqrt{p}$$

$$\frac{\|\mathbf{A}\|_1}{p} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_1q.$$

DEMOSTRACION. Véase el problema 14. ■

PROBLEMAS 6.3

- ▷ 1. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal, y que para todo \mathbf{v} en \mathcal{V} , se tiene

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}} \leq k\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}$$

para alguna k fija. Demuestre que $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} \leq k$.

2. Demuestre que cada supremum que define una norma de transformación en el **teorema clave 6.20 b), c), f) y g)**, es finito.

3. Dé los detalles de la demostración del **teorema clave 6.20 a) b) y d)-g).**
- ▷ 4. Suponga que \mathcal{I} es la transformación identidad, $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para toda \mathbf{v} en \mathcal{V} , y que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathcal{V} . Encuentre la norma de la transformación \mathcal{I} .
5. Suponga que \mathcal{O} es la transformación cero, $\mathcal{O}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en \mathcal{W} para todo \mathbf{v} en \mathcal{V} , y que ambos, \mathcal{V} y \mathcal{W} , tienen normas. Encuentre la norma de la transformación \mathcal{O} .
6. Suponga que \mathcal{V} y \mathcal{W} son espacios vectoriales de dimensión finita, cada uno con una norma. Demuestre que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ es una norma vectorial en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ de todas las transformaciones lineales de \mathcal{V} a \mathcal{W} . (Véase el ejemplo 6.2 e.)
- ▷ 7. Para cada función continua x en el espacio vectorial real $C[0, 1]$, defina $\|x\|$ como el valor máximo de $|x(t)|$ para $0 \leq t \leq 1$. Encuentre la norma de la transformación lineal \mathcal{T} definida en el ejemplo 6.2 b).
8. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{V} siendo $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} < 1$. Demuestre que $\mathcal{T}^i(\mathbf{v})$ converge a $\mathbf{0}$ cuando i tiende a infinito para cada vector \mathbf{v} .
- ▷ 9. Sea $k = 0.1$ en el modelo de la sección 2.3 de las poblaciones en competencia; véase el ejemplo 2.16. Para la matriz \mathbf{A} de allí, encuentre $\|\mathbf{A}\|_1$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$.
10. Demuestre que la fórmula del teorema 6.23 a) evalúa correctamente a $\|\mathbf{A}\|_1$.
11. Para cada una de las siguientes matrices \mathbf{A} , evalúe $\|\mathbf{A}\|_1$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$ y compruebe la desigualdad del teorema 6.25 b).
- a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} i & 3 & 2 \\ 1 & -i & 2 \end{bmatrix}$.
- ▷ 12. Para cada una de las siguientes matrices \mathbf{A} , evalúe $\|\mathbf{A}\|_1$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$ y compruebe la desigualdad del teorema 6.25 b).
- a) $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
13. Suponga que \mathbf{A} es una matriz cuadrada para la cual $\|\mathbf{A}\| < 1$. Demuestre que \mathbf{A}^i tiende a $\mathbf{0}$ cuando i tiende a infinito.
14. Utilice el teorema 5.59 sobre la equivalencia de normas vectoriales para demostrar el teorema 6.25 sobre la equivalencia de normas de matrices.

- ▷ 15. a) Utilice las fórmulas del **teorema clave 6.23** para demostrar que $\|I\|_1$ e $\|I\|_\infty$ son iguales a 1.
- b) Demuestre que $\|I\| = 1$ para toda norma matricial mediante la definición de norma de una transformación.
16. En la sección 2.2 se discutieron unas matrices especiales de transición que surgieron de modelos de competencia entre negocios; véanse en (2.3) las propiedades de esas matrices A . Utilice las normas para demostrar que, para tales matrices A , las potencias A^i deben permanecer acotadas cuando i tiende a infinito.

6.4 INVERSAS DE MATRICES PERTURBADAS:

CONDICION DE ECUACIONES LINEALES

Como ya se mencionó antes, en las aplicaciones prácticas es importante comprender que las inexactitudes en la medición y en el modelado llevan a la necesidad de usar vectores, matrices, ecuaciones, y cosas por el estilo que están ligeramente alteradas (cambiadas) de los valores ideales que resultarían de mediciones y modelos perfectos. Es esencial comprender qué efectos tienen estas perturbaciones en los datos creados en los capítulos fundamentales del álgebra lineal: no singularidad de matrices, posibilidad de solución de ecuaciones, soluciones de ecuaciones y cosas semejantes.

Inversas

Un tema de este tipo comprende o involucra la no singularidad. Alguna matriz “ideal” A podría ser no singular, pero la aproximación alterada a ella que nosotros medimos podría ser singular. Sin embargo, es posible que esto no suceda si las perturbaciones son suficientemente pequeñas. Pero se estudiará un caso especial para simplificar el caso general.

(6.26) **Lema clave (lema de Banach).** Sea P una matriz $p \times p$, y sea $\|\cdot\|$ cualquier norma vectorial y su correspondiente norma matricial. Suponiendo que $\|P\| < 1$, entonces $I_p + P$ es no singular, y

$$\frac{1}{1 + \|P\|} \leq \|(I_p + P)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|P\|}$$

DEMOSTRACION. De acuerdo con el **teorema clave 4.18**, $I_p + P$ es no singular si y sólo si la única solución de $(I_p + P)x = \mathbf{0}$ es $x = \mathbf{0}$. Suponga entonces que $(I_p + P)x = \mathbf{0}$ de modo que $x = -Px$. Entonces se obtiene

$$\|x\| = \|-Px\| = \|Px\| \leq \|P\| \|x\|,$$

y como $\|P\| < 1$ entonces hay una contradicción a menos que $x = \mathbf{0}$, como se ha tratado probar. Así $(I_p + P)^{-1}$ existe; se denotará con B . De $I_p = B(I_p + P) = B + BP$, se tiene que $1 = \|I_p\| = \|B(I_p + P)\| \leq \|B\| \|I_p + P\| \leq \|B\|(1 + \|P\|)$, lo que da $\|B\| \geq 1/(1 + \|P\|)$ como se afirmó. También, $B = I_p - BP$, lo que da por lo tanto $\|B\| = \|I_p - BP\| \leq 1 + \|BP\| \leq 1 + \|B\| \|P\|$, que produce $\|B\| \leq 1/(1 - \|P\|)$, con lo que se completa la demostración. ■

(6.27) *Ejemplo.* Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Es posible escribir A como $A = I + P$, en donde

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 \\ 0.8 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

Como $\|P\|_\infty = 0.9 < 1$, el lema de Banach dice que $A = I + P$ es no singular y que $1/1.9 \leq \|A^{-1}\|_\infty \leq 1/0.1$.

El lema de Banach simplifica la demostración del resultado general.

(6.28) **Teorema clave (inversas perturbadas)** Sean A y R matrices $p \times p$ siendo A no singular, y sea $\|\cdot\|$ cualquier norma vectorial y su correspondiente norma matricial. Definase $\alpha = \|A^{-1}R\|$ o $\alpha = \|RA^{-1}\|$. Si $\alpha < 1$ —es decir en especial si $\|R\| < 1/\|A^{-1}\|$ —entonces $A + R$ también es no singular y

$$\frac{\|A^{-1}\|}{1 + \alpha} \leq \|(A + R)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \alpha}$$

DEMOSTRACION. Se tomará el caso para $\alpha = \|A^{-1}R\| < 1$; el otro caso es semejante. Como A^{-1} existe, se puede escribir

$$A + R \text{ como } A(I_p + A^{-1}R) = A(I_p + P)$$

si se define $P = A^{-1}R$. Por hipótesis, $\|P\| = \alpha < 1$, de modo que se aplica el lema de Banach, e $I_p + P$ es no singular, como lo es A . Por lo tanto, el producto $A(I_p + P)$ —que es igual a $A + R$ —también es no singular y

$$(A + R)^{-1} = \{A(I_p + P)\}^{-1} = (I_p + P)^{-1}A^{-1}.$$

Esto da

$$\|(A + R)^{-1}\| \leq \|(I_p + P)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|/(1 - \alpha),$$

por el lema de Banach; ésta es la cota superior que se deseaba. Para obtener la cota inferior, se escribirá

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{I}_p + \mathbf{P})(\mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1}$$

y se deducirá que

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{I}_p + \mathbf{P}\| \|(\mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1}\| \leq (1 + \alpha) \|(\mathbf{A} + \mathbf{R})^{-1}\|.$$

La división entre $(1 + \alpha)$ da la cota inferior que se buscaba. ■

En esencia, el teorema dice que si \mathbf{A} es no singular y $\|\mathbf{R}\|$ es suficientemente pequeño, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{R}$ también es no singular y la norma de su inversa es comparable a la norma de \mathbf{A}^{-1} . Esto es, *todas las matrices suficientemente cercanas a una matriz no singular también son no singulares*. Las inexactitudes de los datos y de la modelación –si son suficientemente pequeñas– no perturbarán a una matriz no singular tanto como para hacerla singular; observe que lo *pequeñas* que necesitan ser las perturbaciones $\|\mathbf{R}\|$ para la no singularidad depende de qué tan grande sea $\|\mathbf{A}^{-1}\|$: $\|\mathbf{R}\| < 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ es suficiente, en especial. Por ejemplo, para que las perturbaciones $\mathbf{A} + \mathbf{R}$ de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10^{-10} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

estén garantizadas como no singulares por el **teorema clave 6.28**, es necesario que $\|\mathbf{R}\|_\infty$ sea menor que unos $10^{-10}/2$ porque $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ es aproximadamente $2(10^{10})$.

Condición

Es importante la noción de *condición* en todas las matemáticas aplicadas. Si cambios pequeños en los datos de un problema siempre llevan a cambios razonablemente pequeños en la respuesta del mismo, se dice que el problema está *bien planteado*. Si cambios pequeños en los datos de algún problema pueden *a veces* conducir a cambios inaceptablemente grandes en la respuesta, se dice que el problema está *mal planteado*. La razón de la importancia de este concepto debería ser evidente: en los problemas aplicados, casi siempre los datos son inexactos por errores de medición y de modelado, y es crucial conocer los efectos que tienen sobre la respuesta al problema las inexactitudes en los datos.

Se considerará aquí la condición de la solución \mathbf{x} al sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en términos de los datos \mathbf{b} y \mathbf{A} . Se desea conocer qué tanto cambia la solución \mathbf{x} –digamos de \mathbf{x} a $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ – cuando cambian los datos \mathbf{b} y \mathbf{A} –digamos hasta $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ y $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$.

- (6.29) **Teorema** (condición de ecuaciones). Sea \mathbf{A} no singular y sea $\|\cdot\|$ cualquier norma vectorial y su correspondiente norma matricial. Suponga que \mathbf{x}

resuelve a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mientras que

$$\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \text{ resuelve a } (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

para algunas perturbaciones $\delta\mathbf{A}$ y $\delta\mathbf{b}$ en los datos. Suponga que la perturbación $\delta\mathbf{A}$ es lo suficientemente pequeña como para que $\alpha < 1$, en donde $\alpha = \|(\delta\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\|$ o $\alpha = \|\mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{A})\|$. Entonces el cambio $\delta\mathbf{x}$ en la solución satisface

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq M \cdot c(\mathbf{A}) \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right),$$

en donde $M = 1/(1 - \alpha)$ y en donde $c(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ es el llamado *número de condición* de \mathbf{A} .

DEMOSTRACION. Como $\alpha < 1$, el **teorema clave 6.28** implica que $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ es no singular y da una cota de la norma de su inversa. Como $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ es no singular, la solución $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ al problema perturbado existe. De hecho, $\delta\mathbf{x}$ misma resuelve

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\delta\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} - \mathbf{Ax} - \delta\mathbf{Ax} = \delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{Ax},$$

así que

$$\delta\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{Ax}).$$

Al aplicar la cota superior en el **teorema clave 6.28**, siendo $\mathbf{R} = \delta\mathbf{A}$ en esta fórmula para $\delta\mathbf{x}$ se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{x}\| &\leq M \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{Ax}\| \\ &\leq M \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| (\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} &\leq M \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \|\delta\mathbf{A}\| \right) \\ &\leq M \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{A}\|} + \|\delta\mathbf{A}\| \right) \end{aligned}$$

ya que $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ implica que $\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$. Simplificando, se obtiene

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq M \cdot c(\mathbf{A}) \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right),$$

como se requería, lo cual completa la demostración. ■

Para ver qué dice este teorema sobre la condición, suponga que se decide medir el tamaño de los cambios δy en las cantidades y y examinando $\|\delta y\|/\|y\|$ —esto es, poniendo atención al tamaño global de los cambios con respecto al tamaño

global de las cantidades originales. Entonces el teorema compara los cambios –medidos en este sentido– en la solución x con aquéllos en los datos b y A . Si el cambio δA en A es suficientemente pequeño, la constante M en el teorema será cercana a 1; en este caso, la cota en el cambio $\|\delta x\|/\|x\|$ no será mucho mayor que los cambios en los datos *si el número de condición*

$$c(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

no es demasiado grande. Esto significa que un número moderado de condición $c(A)$ garantiza que las ecuaciones están bien planteadas: cambios pequeños en los datos producen cambios razonablemente pequeños en la solución. Sin embargo, si $c(A)$ es grande, los cambios en x causados por los cambios en los datos *pueden* ser mucho mayores que los cambios en los datos (si esto realmente ocurre, dependerá de la b específica, pero generalmente es aconsejable contemplar tal sistema como mal planteado.)

Nota. Se puede combinar el teorema 6.29 con los resultados (3.42) y (3.43) que dicen que la eliminación de Gauss con pivoteo parcial en aritmética de punto flotante, generalmente da una solución exacta a un problema ligeramente alterado. El resultado es una cota que vale en general para el error en la solución así producida; la cota está principalmente en término del número de condición de la matriz y de la naturaleza de la aritmética de la computadora –véase el problema 14.

El significado del número de condición $c(A)$ puede examinarse desde otro punto de vista. Si A es no singular, se sabe que $A + R$ es no singular para toda R que satisfaga $\|R\| < 1/\|A^{-1}\|$, de acuerdo con el **teorema clave 6.28**. Se puede volver a enunciar ese requisito para R como

$$\|R\|/\|A\| < 1/c(A).$$

Esto es,

$$A + \delta A \text{ es no singular siempre que } \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{c(A)}.$$

Expresado en forma diferente, si $A + \delta A$ es singular, entonces $\|\delta A\|/\|A\| \geq 1/c(A)$ y por lo tanto

$$(6.30) \quad c(A) \geq \frac{\|A\|}{\|\delta A\|} \quad \text{siempre que } A + \delta A \text{ sea singular}$$

De hecho, $c(A)$ es, en realidad, igual al supremum de $\|A\|/\|\delta A\|$ tomado sobre todo δA para el que $A + \delta A$ es singular. Así, el número de condición –más exactamente, su recíproco– mide qué tan lejos está A de la matriz singular más cercana.

Para fines prácticos, es desafortunado el hecho de que no es nada fácil reconocer una matriz A planteada es decir, una con un número de condición grande –sólo por la inspección de A . Como se mencionó en la sección 3.9, los buenos programas de computadora para resolver $Ax = b$ generalmente proporcionan al usuario un valor estimado de $c(A)$ partiendo de información compilada durante el cálculo, pero rara vez es posible estimar $c(A)$ sin esa ayuda computacional con excepción de los casos sencillos. La matriz 7×7 , A , del ejemplo 1.31, por ejemplo, parece muy inocente, pero la inversa que allí se encontró tiene una norma ∞ de aproximadamente $110,000,000 \approx 10^8$. Así, el número de condición de A es más o menos 10^8 , por lo que hay una matriz singular dentro de unos 10^{-8} de A , lo cual es una cosa que no fácilmente se puede adivinar examinando a A .

- Ejemplo.** En el análisis de reacciones químicas resulta que el número de factores verdaderamente independientes en un proceso puede calcularse como el rango de cierta matriz de mediciones de las concentraciones de las sustancias químicas en la reacción. Suponga que hay tres sustancias implicadas y que se mide la matriz C de concentraciones que resulta en

$$C = \begin{bmatrix} 1.02 & 2.03 & 4.20 \\ 0.25 & 0.51 & 1.06 \\ 1.74 & 3.46 & 7.17 \end{bmatrix},$$

en donde cada una de las mediciones puede estar sujeta a errores experimentales del tamaño 0.015. Para determinar el rango de C , se encontró una forma reducida de Gauss; trabajando primero en la primera columna produce

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 1.99 & 4.12 \\ 0 & 0.013 & -0.03 \\ 0 & 0.003 & 0.005 \end{bmatrix}$$

Si se aceptan esos números se puede proseguir para encontrar que el rango es 3; sin embargo, dado el hecho de que los números contienen errores experimentales, los dos últimos renglones se ven sospechosamente como ceros. En efecto, la matriz ligeramente perturbada

$$C' = \begin{bmatrix} 1.02 & 2.03 & 4.20 \\ 0.26 & 0.517451 \dots & 1.070588 \dots \\ 1.74 & 3.462941 \dots & 7.164706 \dots \end{bmatrix}$$

se reduce exactamente a

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 1.99 & 4.12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya que el mayor cambio en cualquier elemento de \mathbf{C} a \mathbf{C}' es $0.010588\dots < 0.015$, la cota del error experimental, los datos en \mathbf{C}' son tan buenos como los de \mathbf{C} para los que el rango era 3 en lugar de 1. Probablemente se concluiría que sólo hay un factor independiente en la reacción. Desde el punto de vista del número de condición, como $\|\mathbf{C}\|_\infty = 12.37$ mientras que \mathbf{C}' es singular y

$$\|\mathbf{C} - \mathbf{C}'\|_\infty = 0.028\dots$$

se sabe que el número de condición $c(\mathbf{C})$ para la norma $\|\cdot\|_\infty$ es cuando menos $12.37/0.028 \geq 441$. En efecto, perturbando de modo semejante sólo al tercer renglón de \mathbf{C} , se puede encontrar una matriz singular todavía más próxima y deducir que $c(\mathbf{C}) \geq 1502$. Mediante MATLAB o software semejante para encontrar la inversa de \mathbf{C} , se puede descubrir que $c(\mathbf{A}) \approx 6885$ y que en la norma ∞ la distancia a la matriz singular más cercana es de aproximadamente 0.0018, y a la matriz más cercana de rango 1 es de unos 0.006. En vista de que los errores de medición tenían un tamaño de 0.015, ciertamente parece que sólo podremos estar *confiados* en que haya un solo factor independiente en la reacción, aunque *puede* haber más.

PROBLEMAS 6.4

- ▷ 1. Suponga que \mathbf{P} es una matriz $q \times q$ cuyos renglones satisfacen

$$|\langle \mathbf{P} \rangle_{i1}| + |\langle \mathbf{P} \rangle_{i2}| + \cdots + |\langle \mathbf{P} \rangle_{iq}| < 1 \quad \text{para cada } i$$

Demuestre que $\mathbf{I}_q + \mathbf{P}$ es no singular.

2. Suponga que \mathbf{P} es una matriz $q \times q$ cuyas columnas satisfacen

$$|\langle \mathbf{P} \rangle_{1j}| + |\langle \mathbf{P} \rangle_{2j}| + \cdots + |\langle \mathbf{P} \rangle_{qj}| < 1 \quad \text{para cada } j.$$

Demuestre que $\mathbf{I}_q + \mathbf{P}$ es no singular.

3. Suponga que la matriz \mathbf{A} , $q \times q$, es estrictamente dominante diagonalmente respecto a los renglones, lo que quiere decir que sus renglones satisfacen, para cada i ,

$$|\langle \mathbf{A} \rangle_{ii}| > |\langle \mathbf{A} \rangle_{i1}| + \cdots + |\langle \mathbf{A} \rangle_{i,i-1}| + |\langle \mathbf{A} \rangle_{i,i+1}| + \cdots + |\langle \mathbf{A} \rangle_{iq}| \quad \text{para cada } i.$$

Demuestre que \mathbf{A} es no singular.

- ▷ 4. Suponga que la matriz \mathbf{A} , $q \times q$, es estrictamente dominante diagonalmente respecto a las columnas, lo que quiere decir que sus columnas satisfacen

$$|\langle \mathbf{A} \rangle_{jj}| > |\langle \mathbf{A} \rangle_{1j}| + \cdots + |\langle \mathbf{A} \rangle_{j-1,j}| + |\langle \mathbf{A} \rangle_{j+1,j}| + \cdots + |\langle \mathbf{A} \rangle_{qj}| \quad \text{para cada } j.$$

Demuestre que \mathbf{A} es no singular.

5. Demuestre el teorema clave 6.28 para el caso $\alpha = \|\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\| < 1$.
- ▷ 6. Demuestre que, sin importar la norma usada, el número de condición

$$c(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

satisface a $c(\mathbf{A}) \geq 1$.

7. Tanto para la norma 1 como para la norma ∞ , encuentre ejemplos de 2×2 para demostrar que el número de condición $c(\mathbf{A})$ puede ser arbitrariamente grande.
8. Dada la matriz \mathbf{A} siguiente,
- Encuentre su número de condición.
 - Encuentre una matriz singular cercana.
 - Compruebe (6.30) en este caso.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

9. Sea \mathbf{A} la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya sea en la norma $\|\cdot\|_1$ o en la norma $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\| = 1 + k \text{ para } k \geq 0,$$

de modo que el número de condición $c(\mathbf{A}) = (1+k)^2$, es grande para k grande. Sin embargo, si se considera el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, siendo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la solución es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-k \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que si sólo se altera a \mathbf{b} por medio de δ_1, δ_2 diferentes de cero a

$$\mathbf{b} + \delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 + \delta_1 \\ 1 + \delta_2 \end{bmatrix},$$

se encontrará que el cambio $\delta\mathbf{x}$ en la solución es

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta_1 - k\delta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una cota para $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ en términos de $\|\delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$ mediante la norma 1 o la norma ∞ para demostrar que este problema está bien condicionado, no obstante que el número de condición de \mathbf{A} es grande.

10. Haga cálculos semejantes a los del problema 9, pero esta vez con $\mathbf{b} = [1 \ -1/k]^T$ y demuestre que en este caso el problema está mal planteado.
 ▷ 11. Mediante la norma 1, demuestre que $c(\mathbf{A}) \geq 600$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1 & 2.1 & 3.1 \\ 1.0 & -1.0 & 2.0 \\ 0.2 & 3.3 & 1.4 \end{bmatrix}.$$

12. Sea \mathbf{A} , $p \times p$, y sea $c(\mathbf{A})$ su número de condición usando la norma que se desee. Demuestre que existe una \mathbf{b} y una perturbación $\delta\mathbf{b}$ tales que las soluciones \mathbf{x} y $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ tienen a $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ aproximadamente igual a $c(\mathbf{A})\|\delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$.
 13. Tomando una pequeña perturbación $\delta\mathbf{b}$ que resulte en un cambio grande $\delta\mathbf{x}$, demuestre que las ecuaciones

$$x_1 + x_2 = 2.0000$$

$$1.00001x_1 + x_2 = 2.00001$$

están mal condicionadas; encontrar $c(\mathbf{A})$ mediante la norma ∞ .

- ▷ 14. Mediante el teorema 6.29, con (3.42) y (3.43), obtenga cotas válidas generalmente en el error de la solución \mathbf{x} de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que se produce al aplicar la eliminación de Gauss con pivoteo parcial en una computadora usando aritmética de punto flotante de t dígitos.
 15. Utilice el teorema 6.29 y el tamaño del residuo encontrado en el ejemplo 3.44 para acotar el error –como en el problema 14– de la solución numérica encontrada en ese ejemplo.
 ▷ 16. Considere el sistema de ecuaciones

$$0.89x_1 + 0.53x_2 = 0.36$$

$$0.47x_1 + 0.28x_2 = 0.19$$

que tiene la solución exacta $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

- a) Encuentre $\delta\mathbf{b}$ tal que, si se sustituye el lado derecho \mathbf{b} por $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$, la solución exacta a $x_1 = 0.47$, $x_2 = -0.11$.
 b) ¿Está el sistema bien condicionado o mal condicionado?

- c) Encuentre el número de condición de la matriz para el sistema mediante la norma ∞ .
- M 17.** a) Utilice MATLAB o algún software semejante para obtener una solución \mathbf{x}' aproximada de las ecuaciones del problema 16.
 b) Compare el error $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ con la cota obtenida usando el problema 14 para este caso.
- M 18.** Utilice MATLAB o algún software semejante para calcular el número de condición de la matriz \mathbf{H} , 5×5 , formada por los 25 elementos de la esquina superior izquierda de la matriz del ejemplo 1.31, y deduzca qué tan lejos se encuentra de \mathbf{H} a la matriz singular más próxima. (Compare con el problema 18 de la sección 5.9.)

6.5 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 6.5

- ▷ 1. Encuentre una base para el espacio nulo de la transformación acostumbrada \mathcal{T} con $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ generada:
- Por la matriz
- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
- Por la matriz
- $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
2. Sea \mathcal{V}_0 el subespacio de $C^{(1)}[0, 1]$ —véase el ejemplo 5.9 e)—que consiste en aquellas funciones y que satisfacen $y(0) = 0$. Defina \mathcal{T} de \mathcal{V}_0 a $\mathcal{W} = C[0, 1]$ de modo que $\mathcal{T}(y)$ sea aquella función continua cuyo valor en t sea igual a $y'(t) + y(t)$, en donde la prima significa diferenciación.
- Demuestre que el espacio imagen de \mathcal{T} es \mathcal{W} y que \mathcal{T} tiene una inversa.
 - Demuestre la manera de encontrar $\mathcal{T}^{-1}(f)$ para f en \mathcal{W} .
3. Defina el producto interior de h y g en $C[0, 1]$ como la integral definida desde 0 a 1 del producto hg . Demuestre que la transformación adjunta \mathcal{T}^* de la transformación \mathcal{T} del ejemplo 6.2 b) es justamente la misma \mathcal{T} : $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.
- ▷ 4. Sean B y C bases ordenadas para el espacio vectorial \mathcal{V} de dimensión q y el espacio vectorial \mathcal{W} de dimensión p respectivamente. Sea $[\cdot]_{B,C}$ la transformación que toma cada transformación lineal \mathcal{T} de \mathcal{V} a \mathcal{W} en su representación matricial \mathbf{A} : $[\mathcal{T}]_{B,C} = \mathbf{A}$ si y sólo si \mathbf{A} representa a \mathcal{T} con respecto a las bases ordenadas B y C . Demuestre que la transformación $[\cdot]_{B,C}$ es un isomorfismo de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ —véase el ejemplo 6.2 e)—al espacio vectorial de todas las matrices $p \times q$.

5. Suponga que v_0 resuelve $\mathcal{T}(v_0) = w$, en donde \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} . Demuestre que v también resuelve a $\mathcal{T}(v) = w$ si y sólo si $v = v_0 + n$ para alguna n en el espacio nulo de \mathcal{T} .
6. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal. Demuestre que, dada w , la ecuación $\mathcal{T}(v) = w$ tiene, exactamente una solución, un número infinito de soluciones, o no tiene solución v .
- ▷ 7. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} , siendo ambos de dimensión p . Demuestre que los puntos siguientes son equivalentes:
1. El espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $\{0\}$.
 2. Existe una transformación lineal \mathcal{X} de \mathcal{W} a \mathcal{V} tal que $\mathcal{T}\mathcal{X}$ es la transformación identidad en \mathcal{W} .
 3. \mathcal{T}^{-1} existe y es igual a \mathcal{X} de 2).
 4. La ecuación $\mathcal{T}(v) = w$ tiene exactamente una solución para cada w en \mathcal{W} .
8. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} , siendo ambos de dimensión p . Demuestre que el espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $\{0\}$ si y sólo si el espacio imagen de \mathcal{T} es igual a \mathcal{W} .
9. Suponga lo mismo que en el problema 8. Demuestre que \mathcal{T}^{-1} existe si y sólo si el espacio nulo de \mathcal{T} es igual a $\{0\}$.
- ▷ 10. Suponga lo mismo en el problema 8. Demuestre que \mathcal{T}^{-1} existe si y sólo si el espacio imagen de \mathcal{T} es igual a \mathcal{W} .
11. Suponga que \mathcal{V} y \mathcal{W} son de dimensión finita que tienen productos interiores, y que \mathcal{T} tiene una transformación adjunta \mathcal{T}^* . Demuestre que la unión de una base para el espacio nulo de \mathcal{T} y una base para el espacio imagen de \mathcal{T}^* es una base para \mathcal{V} .
12. Suponga lo mismo que en el problema 11. Demuestre que la dimensión del espacio imagen de \mathcal{T}^* es igual a la dimensión del espacio imagen de \mathcal{T} .
13. Suponga lo mismo que en el problema 11. Demuestre que \mathcal{T} tiene una inversa si y sólo si \mathcal{T}^* tiene una inversa, y que entonces $(\mathcal{T}^*)^{-1}$ es igual a $(\mathcal{T}^{-1})^*$ (la cual existe).
- ▷ 14. Suponga que \mathcal{T} es una transformación lineal de \mathcal{V} a \mathcal{W} , que \mathcal{S} es una transformación lineal de \mathcal{W} a \mathcal{Z} , y que \mathcal{T}^* y \mathcal{S}^* existen para los productos interiores en \mathcal{V} , \mathcal{W} , y \mathcal{Z} . Demuestre que $(\mathcal{S}\mathcal{T})^*$ existe y que es igual a $\mathcal{T}^*\mathcal{S}^*$.
15. Suponga que \mathbf{P} es $q \times q$ y que $\|\mathbf{P}\|_\infty < 1$. Demuestre que la serie infinita

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \mathbf{P}^4 - \dots$$

converge a una matriz \mathbf{B} , y que

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{P}) = \mathbf{I},$$

de modo que, de hecho, la serie converge a $(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}$, la cual, por lo tanto, debe de existir.

7

Eigenvalores y eigenvectores: una panorámica

Uno de los enfoques más poderosos para analizar la conducta de algunos sistemas interesantes del mundo real, es determinar el llamado eigensistema de matrices involucradas en el modelado del sistema. En este capítulo se pretende dar una panorámica que sirva como preparación para los dos capítulos siguientes y como una visión general para aquéllos que no los lean. Los **teoremas clave** son 7.9, 7.10, 7.14, 7.18 y 7.38; también se incluyen a veces –véanse (7.13), (7.26), (7.42) y (7.43)– de los **teoremas clave** de los capítulos 8 y 9.

7.1 INTRODUCCION

El estudio de los llamados *eigenvalores* (o valores propios) y *eigenvectores* (o vectores propios) de matrices y de transformaciones lineales es, generalmente, de importancia fundamental en las matemáticas aplicadas. Una de las razones es que esos conceptos básicos surgen cuando los modelos se estudian desde una gran diversidad de puntos de vista. En esta sección se considerarán algunos ejemplos que ilustran cuatro puntos de vista fundamentales, en los que se hará hincapié a lo largo de los capítulos 7, 8 y 9: 1) singularidad de $A - \lambda I$, en donde λ es un parámetro, 2) subespacios invariantes; 3) representaciones sencillas de transformaciones; y 4) descomposición de matrices.

Singularidad de matrices dependientes de parámetros.

En las aplicaciones, es frecuente el caso en el que el modelo conduce a una matriz que depende de un parámetro desconocido pero importante, cuyo valor debe escogerse para hacer singular a la matriz. Una clase importante de tales proble-

mas es la que se produce al modelar fenómenos oscilatorios (tales como el movimiento de las alas de los aeroplanos bajo varias fuerzas aerodinámicas, las oscilaciones en la economía bajo ciertas fuerzas del mercado, y otros casos similares).

Como un ejemplo concreto, considere el movimiento de las dos masas suspendidas y acopladas por resortes en la sección 2.5. El análisis matemático de esa situación conduce a una matriz $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ 2×2 , en donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son matrices conocidas y ω es un parámetro desconocido. El problema es determinar ω tal que $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ sea singular. El ejemplo 2.34 mostró que esto es equivalente a tener a ω^2 como la raíz de un polinomio de grado exacto igual a 2. Más generalmente, si \mathbf{M} es no singular, el problema es equivalente a encontrar un parámetro λ para el que $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ sea singular, en donde $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ y $\lambda = \omega^2$.

(7.1) **Ejemplo.** En el caso específico del ejemplo 2.34, se tiene

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - \lambda & -4 \\ -8 & 8 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Del teorema 4.35 se conoce que una matriz es singular si y sólo si su determinante es igual a cero, y entonces λ se debe escoger para que

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (12 - \lambda)(8 - \lambda) - (-4)(-8) \\ &= \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda - 4)(\lambda - 16). \end{aligned}$$

Entonces los valores de λ ($= \omega^2$) debe ser $\lambda = 4$ o $\lambda = 16$.

Como se definirá en la próxima sección, el valor de λ que hace singular a $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ se llama un *eigenvalor* de \mathbf{A} .

Esto ilustra uno de los modos en que pueden surgir en la práctica los eigenvalores: en oscilaciones y otros problemas en los que debe determinarse un parámetro de tal manera que haga singular a una matriz que dependa del parámetro.

Subespacios invariantes

Se ha visto que los modelos matemáticos de problemas aplicados, a menudo conducen al estudio de transformaciones lineales definidas por matrices: $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, en donde \mathbf{A} es $p \times p$ y \mathbf{x} está en \mathbb{R}^p . Por ejemplo, la sección 2.2 modeló cómo cambiaban los patrones de las partes del mercado de lecherías de mes a mes en términos de una matriz \mathbf{A} de tal manera que las partes \mathbf{x}_i de un mes se transformaron en las partes \mathbf{x}_{i+1} del mes siguiente por medio de $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{Ax}_i$. En situaciones reales, es común el caso de que los vectores análogos a las \mathbf{x}_i tengan un número de elementos p extremadamente grande. En tales casos, una técnica útil consiste en intentar partir el sistema grande que se está modelando en una colección de subsistemas mucho más pequeños que se puedan manejar más fácilmente; esto

es, se buscan ciertas variables o combinaciones de variables cuyos valores, después de haber sido transformados, pueden expresarse sólo en términos de esas variables o combinaciones. Algebraicamente, esto corresponde a encontrar un subespacio \mathcal{V}_0 de \mathbb{R}^p de dimensión baja tal que $\mathbf{A}\mathbf{x}$ también esté en \mathcal{V}_0 siempre que \mathbf{x} esté en \mathcal{V}_0 . A ese subespacio se le llama un *subespacio invariante de \mathbf{A}* (y de \mathcal{T}).

El subespacio invariante más sencillo sería, desde luego, uno cuya dimensión fuera igual a 1 para que \mathcal{V}_0 fuera generado por un solo vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Para que $\mathbf{A}\mathbf{x}$ también estuviera en \mathcal{V}_0 se requeriría que $\mathbf{A}\mathbf{x}$ fuera un múltiplo de \mathbf{x} , es decir, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún escalar λ . Pero esto significaría que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y así $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ debería ser singular. Esto es, λ debe ser un eigenvalor de \mathbf{A} ; los vectores \mathbf{x} diferentes de cero asociados así con λ se llaman *eigenvectores* de \mathbf{A} .

- (7.2) **Ejemplo.** Considere el modelo de competencia entre las lecherías del ejemplo 2.6 mencionado arriba. En este caso, se encuentra que

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 - \lambda & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 - \lambda \end{bmatrix}$$

Para que $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ sea singular, es necesario que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Por el cálculo directo se obtiene

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 2.1\lambda^2 - 1.4\lambda + 0.3 = -(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.6)(\lambda - 1.0)$$

y entonces los eigenvalores λ deben ser

$$\lambda = 0.5, \quad \lambda = 0.6, \quad \lambda = 1.0.$$

Para encontrar los eigenvectores asociados, considere, por ejemplo, la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para $\lambda = 0.5$. En términos de los elementos x_1, x_2 y x_3 de \mathbf{x} esto es

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 &= 0 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 &= 0 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Las técnicas acostumbradas para los sistemas lineales de ecuaciones, reducen lo anterior a

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0; \end{aligned}$$

de aquí es posible hacer que x_3 sea una α arbitraria, $x_1 = \alpha$, y $x_2 = -2\alpha$, y entonces

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda = 0.5$ para toda α diferente de cero. Por métodos semejantes se encontrará que múltiplos arbitrarios de los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

son eigenvectores asociados con los eigenvalores $\lambda = 0.6$ y $\lambda = 1.0$ respectivamente. Los tres subespacios unidimensionales de \mathbb{R}^3 , cada uno generado por uno de esos tres eigenvectores, son, de este modo subespacios invariantes de \mathbf{A} .

Esto ilustra un segundo modo por medio del cual, surgen naturalmente los eigenvalores y los eigenvectores: al buscar subespacios invariantes bajo transformaciones lineales para simplificar el estudio de las transformaciones al secionar el sistema total en subsistemas menores.

Representaciones sencillas de transformaciones

Además de la búsqueda de subespacios invariantes, hay otro camino para simplificar el estudio de transformaciones lineales \mathcal{T} definidas por matrices \mathbf{A} , $p \times p$, $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$: encontrar bases distintas en cuyos términos \mathcal{T} se pueda representar una matriz más simple que sea más fácil de estudiar. \mathcal{T} se representa por \mathbf{A} con respecto a la base ordenada canónica $B = \{\mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_p\}$ de \mathbb{R}^p como dominio y como contradominio. Suponga que se utiliza una base ordenada distinta $B' = \{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_p\}$. De acuerdo con el **teorema clave 5.43** sobre cambio de base, las coordenadas en B' , $\mathbf{x}_{B'}$, de un vector \mathbf{x} y sus coordenadas en B , \mathbf{x}_B se relacionan por $\mathbf{x}_B = \mathbf{Mx}_{B'}$, en donde \mathbf{M} es la matriz $p \times p$ no singular cuya i -ésima columna contiene los coeficientes usados para escribir \mathbf{x}_i en términos de las \mathbf{e}_j –esto es, debido a la forma especial de las \mathbf{e}_j ,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p].$$

De acuerdo con el teorema 6.17 sobre cambio de base y representaciones, la matriz que representa a \mathcal{T} con respecto a B' es $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$. Entonces, nuestro problema es encontrar vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ tales que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ sea sencilla.

(7.3). **Ejemplo.** Considere la matriz A del ejemplo 7.2, y suponga que se consideran los *eigenvectores* de A como los vectores \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{x}_1 = [1 \ -2 \ 1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [1 \ -1 \ 0]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [9 \ 7 \ 4]^T,$$

por ejemplo. Con algunos cálculos se obtiene M^{-1} y después

$$A' = M^{-1}AM$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -0.20 & -0.20 & 0.20 \\ 0.75 & -0.25 & -1.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

una matriz diagonal con los *eigenvalores de A* en la diagonal.

De este modo se encuentra otro punto de vista sobre los *eigenvectores* y los *eigenvalores* de matrices $p \times p$: dan representaciones extremadamente sencillas de transformaciones lineales.

Factorizaciones de matrices

Queda por ilustrar un último punto de vista sobre los *eigenvalores* y los *eigenvectores* de una matriz A , de $p \times p$. En el ejemplo 7.3 se vio que $M^{-1}AM = A'$ es una matriz diagonal. Premultiplicando por M y postmultiplicando por M^{-1} , lo anterior se transforma en $A = MA'M^{-1}$, esto es, A se factoriza en un tipo especial de producto en donde A' tiene una forma especial.

Esta factorización puede ser sorprendentemente útil; estuvo presente como parte de los datos básicos en el ejemplo 6.18, en el que se analizó la conducta de potencias grandes A^i de la matriz A del ejemplo 2.17. En el ejemplo 6.18 se encontró una matriz M (representada allí por S y P) para la que A' , sin ser diagonal, era lo suficientemente sencilla para demostrar que sus potencias tendían a cero. Y como

$$A^i = (MA'M^{-1})(MA'M^{-1}) \cdots (MA'M^{-1}) = M(A')^i M^{-1}$$

y $(A')^i$ tiende a cero, también lo hará A^i . ¿Cuál es la relación de esto con los *eigenvalores* y con los *eigenvectores* si A' no es diagonal? La primera columna $\mathbf{x}_1 = [5 \ 3]^T$ de M satisface $A\mathbf{x}_1 = 0.9\mathbf{x}_1$ como puede comprobarse fácilmente; esto es, \mathbf{x}_1 es un *eigenvector* de A asociado con el *eigenvalor* 0.9. Es fácil ver que en este caso $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 0.9)^2$, de modo que hay un solo (pero doble) *eigenvalor* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.9$.

Así se obtiene otro uso para los eigenvalores y los eigenvectores: son medios para obtener factorizaciones útiles de matrices.

La variedad de maneras en las que surgen los eigenvalores y los eigenvectores indica por qué son tan importantes tanto teórica como prácticamente. Pero los ejemplos de arriba encubrieron muchas preguntas importantes: ¿Existen siempre los eigenvalores? ¿Existen siempre los eigenvectores? ¿Cuán sencilla puede ser la representación de una transformación lineal con una selección adecuada de las bases ordenadas? Para una matriz dada ¿cuán simples son las factorizaciones que se pueden encontrar? ¿Cómo se pueden encontrar en la práctica esos eigenvalores y esos eigenvectores? La próxima tarea será volver a esos y otros temas fundamentales.

PROBLEMAS 7.1

- ▷ 1. Sean $m_1 = 12$, $m_2 = 16$, $k_1 = 36$ y $k_2 = 48$ en el modelo de las masas oscilatorias de la sección 2.5. Encuentre las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} de (2.29), encuentre $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, y entonces encuentre los eigenvalores $\lambda = \omega^2$ de \mathbf{A} como en el ejemplo 7.1.
- 2. Encuentre los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} del ejemplo 2.16 sobre el modelo de competencia entre poblaciones cuando $k = 0.1$.
- ▷ 3. Encontrar los eigenvalores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5 & 2 \\ -6 & -3.5 \end{bmatrix}.$$

- 4. Encuentre los eigenvalores (véase el problema 2) y eigenvectores de la matriz \mathbf{A} del ejemplo 2.16 sobre el modelo de competencia entre poblaciones cuando $k = 0.1$.
- 5. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz \mathbf{A} del problema 3.
- ▷ 6. Utilice los eigenvectores de \mathbf{A} que se encontraron en el problema 5 como una base ordenada para \mathbb{R}^2 , como dominio y contradominio de $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, y encuentre la matriz \mathbf{A}' que representa a \mathcal{T} con respecto a esa base usando directamente el **teorema clave 6.14**.
- 7. Considere la matriz \mathbf{A} de transición del modelo de competencia entre lecherías del ejemplo 2.6, y a sus eigenvalores λ que se encontraron en el ejemplo 7.2. Cuando $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ es singular, también lo es $\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}$; entonces habrá una y tal que $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, esto es,

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^T.$$

(a \mathbf{y}^T se le llama un *eigenvector izquierdo* de \mathbf{A} .)

a) Demuestre que para cualquier distribución de mercado \mathbf{x}_i y las siguientes

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i,$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x}_{i+1} = \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{x}_i,$$

lo cual ilustra cómo cambia de mes a mes la combinación lineal $\mathbf{y}^T \mathbf{x}$ de las partes del mercado $\langle \mathbf{x} \rangle_i$.

- b) Encuentre el eigenvector izquierdo \mathbf{y}_i asociado con cada eigenvalor λ_i .
 - c) Mediante a) y el eigenvector izquierdo asociado a $\lambda = 1$, demuestre que la suma de las partes del mercado nunca cambia.
8. Utilice los eigenvectores y los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} del problema 3 para factorizar \mathbf{A} en $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{A}'\mathbf{M}^{-1}$ en donde \mathbf{A}' es una matriz diagonal.
9. Factorice la matriz \mathbf{A} del problema 4 en $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{A}'\mathbf{M}^{-1}$ siendo \mathbf{A}' una matriz diagonal.

7.2 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS

Los conceptos de eigenvalores y eigenvectores tienen sentido para una transformación lineal de cualquier espacio vectorial \mathcal{V} en sí mismo; sin embargo, la teoría para espacios de dimensión infinita es bastante complicada y por ello nos restringiremos a espacios vectoriales \mathcal{V} de dimensión finita. En este caso, partiendo del hecho de que todas las transformaciones lineales puedan representarse mediante matrices es posible restringirse todavía más al estudio de los eigenvalores y los eigenvectores.

Eigensistemas y polinomios característicos

- (7.4) **Definición.** Los eigenvalores de una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, real o compleja, son los números reales o complejos λ para los que hay una $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ diferente de cero tal que $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$. Los eigenvectores de \mathbf{A} son los vectores $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ diferentes de cero para los que hay un número λ tal que $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$. Si $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{x} es un eigenvector asociado con el eigenvalor λ , y viceversa. Los eigenvalores y eigenvectores asociados componen juntos el eigensistema de \mathbf{A} . Un subespacio invariante \mathcal{V}_0 de \mathbf{A} es un subespacio de \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p para el que \mathbf{Ax} está en \mathcal{V}_0 si \mathbf{x} está en \mathcal{V}_0 .

Si \mathbf{A} es 2×2 , la ecuación $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ es un sistema de dos ecuaciones; sin embargo, a) involucra tres incógnitas, x_1 , x_2 y λ ; y b) las ecuaciones son no lineales porque la incógnita λ multiplica a cada una de las incógnitas x_1 y x_2 . La primera tarea será demostrar que en realidad es posible “desacoplar” a las variables: primero se podrá encontrar λ a partir de una ecuación no lineal y entonces, una vez conocida λ , se resolverán las ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ para \mathbf{x} .

- (7.5) **Teorema** (eigenvalores y singularidad). λ es un eigenvalor de \mathbf{A} si y sólo si $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es singular, lo que a su vez es válido si y sólo si el determinante de $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es igual a cero: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ (la llamada ecuación característica de \mathbf{A}).

DEMOSTRACION. Si λ es un eigenvalor, esto significa que existe una x diferente de cero tal que $Ax = \lambda x$, esto es, $(A - \lambda I)x = 0$ y $x \neq 0$. Al aplicar el **teorema clave 4.18** a $A - \lambda I$, se demuestra que esto es equivalente a la singularidad de $A - \lambda I$, y esto –por el teorema 4.35– es equivalente a que $\det(A - \lambda I) = 0$. ■

De este modo, es posible encontrar primero aquellos valores λ que hagan a $\det(A - \lambda I) = 0$ y después resolver para cada λ conocida, $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$. Es necesario entender la naturaleza de la expresión $\det(A - \lambda I)$ en la ecuación característica de A .

- (7.6) **Teorema** (polinomios característicos). Suponga que A es $p \times p$. Entonces:
- $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado exacto: p en la variable λ ; a éste se le llama el *polinomio característico* $f(\lambda)$ de A .
 - El coeficiente de λ^p en $f(\lambda)$ es igual a $(-1)^p$.
 - El coeficiente de λ^{p-1} en $f(\lambda)$ es igual a $(-1)^{p-1} \operatorname{tr} A$, en donde $\operatorname{tr} A$ (la *traza* de A) es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de A .
 - El término constante de $f(\lambda)$ es igual al $\det A$.

DEMOSTRACION

- Inmediatamente después del ejemplo 4.29 de la sección 4.5, se hizo notar que el determinante de una matriz B es igual a la suma de todos los productos posibles –con signos adecuados– de los elementos de B , en donde en cada producto debe haber exactamente un elemento de cada renglón y exactamente uno de cada columna de B . Esto demuestra que el polinomio característico de A es, en verdad, un polinomio y que su grado exacto es p .
- El único producto de la forma descrita en a) que involucra p elementos de los cuales cada uno incluye a λ , es igual al producto de los elementos diagonales de $A - \lambda I$. Al desarrollar los determinantes repetidamente a lo largo del primer renglón, es fácil ver que el signo que se le da a este producto es positivo, de tal manera que la mayor potencia de λ aparece como $(-\lambda)^p$.
- Con una argumentación semejante a la de b), se puede ver que los únicos productos que incluyen a λ en $p - 1$ factores deben ser $p - 1$ de los p elementos de la diagonal principal, porque cada producto usa un término de cada uno de los renglones y uno de cada una de las columnas; el p -ésimo restante debe ser justamente el elemento sobrante de la diagonal. Así, el producto es el mismo que en b), es decir

$$+ (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{pp} - \lambda), \quad \text{donde } a_{ii} = \langle A \rangle_{ii}.$$

El coeficiente de λ^{p-1} en este término es como se afirmó.

- El término constante en cualquier polinomio $f(\lambda)$ se encuentra calculando $f(0)$. En este caso, es $\det(A - 0I) = \det A$. ■

Los eigenvalores de una matriz $A, p \times p$, son por lo tanto las raíces de un polinomio de grado exacto p . De la teoría de polinomios se sabe que ese polinomio tiene p raíces reales o complejas $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, y por ello se puede factorizar como

$$(7.7) \quad \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_p - \lambda), \text{ en donde las } \lambda_i \text{ pueden no ser distintas} - \text{es decir, que algunas de las } \lambda_i \text{ podrían ser iguales entre sí.}$$

Así, cada matriz $p \times p$ tiene p eigenvalores reales o complejos, algunos de los cuales pueden ser iguales entre sí. Por ejemplo, los eigenvalores de una matriz 7×7 podrían ser 3, 3, 3, 3, 2, 5, 5; hay siete eigenvalores, pero sólo tres eigenvalores *diferentes* 3, 2 y 5. De acuerdo con (7.7), el polinomio característico es en este caso

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(3 - \lambda)(3 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda)(5 - \lambda),$$

que puede representarse más compactamente como

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^4(2 - \lambda)^1(5 - \lambda)^2$$

escribiendo un término para cada eigenvalor distinto, pero elevándolo a la potencia igual al número de veces que se repite. Esto desde luego se puede hacer en general.

$$(7.8) \quad \textbf{Definición.} \text{ Cuando se escribe el polinomio característico de una matriz } A, \\ p \times p, \text{ en la forma}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{m_r}$$

siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $1 \leq i \neq j \leq r$ y $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = p$, al entero positivo m_i se le llama la *multiplicidad algebraica* del eigenvalor λ_i . A un eigenvalor de multiplicidad algebraica 1 se le llama un eigenvalor *simple*.

La multiplicidad *algebraica* se distingue de la multiplicidad *geométrica* que se definirá más adelante en 7.12.

Con la nomenclatura de la definición 7.8, la totalidad de los eigenvalores de A consiste en λ_1 contada m_1 veces, λ_2 contada m_2 veces, \dots , y λ_r contada m_r veces. La mítica matriz 7×7 que se trató con anterioridad a esta definición, tiene por lo tanto los eigenvalores $\lambda_1 = 3$ de multiplicidad algebraica $m_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ de multiplicidad algebraica $m_2 = 1$ (un eigenvalor simple), y $\lambda_3 = 5$, de multiplicidad algebraica $m_3 = 2$. Mediante la definición 7.8, se ha desarrollado una descripción bastante sencilla de la estructura del conjunto de los eigenvalores.

- (7.9) **Teorema clave (estructura de los eigenvalores).** El conjunto de los eigenvalores de una matriz $p \times p$ consiste en $r \leq p$ números distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, en donde cada λ_i tiene multiplicidad algebraica m_i , y $m_1 + m_2 + \dots + m_r = p$ –esto es, hay p eigenvalores si cada λ_i diferente se cuenta m_i veces, en donde m_i es igual a la multiplicidad de la λ_i como raíz del polinomio característico de A .

DEMOSTRACION. Es consecuencia inmediata de los teoremas 7.5 y 7.6, y la definición 7.8. ■

La situación con respecto a la estructura del conjunto de *eigenvectores* es bastante más sutil. Si λ es una raíz del polinomio característico –esto es, un eigenvalor– entonces por el teorema 7.5 se sabe que, cuando menos, hay un eigenvector asociado. Aunque la historia es más larga, se puede usar este simple hecho para hacer varias demostraciones sobre la estructura del conjunto de todos los eigenvectores asociados.

- (7.10) **Teorema clave (eigenvectores)** Sea $A, p \times p$. Entonces:
- Existe cuando menos un eigenvector x asociado con cada eigenvalor distinto λ ; si A y λ son reales, entonces se puede asegurar que también x es real.
 - El conjunto \mathcal{V}_λ de todos los eigenvectores asociados con un eigenvalor dado λ forma un subespacio invariante de A (si se le agrega $\mathbf{0}$ al conjunto, ya que $\mathbf{0}$ no es un eigenvector).
 - Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es una colección de eigenvalores diferentes (esto es, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $1 \leq i \neq j \leq r$) y si x_i es un eigenvector asociado con λ_i para cada i , entonces $\{x_1, \dots, x_r\}$ es linealmente independiente.
 - Si $A, p \times p$, tiene p eigenvalores diferentes, entonces cualquier conjunto de p eigenvectores –cada uno asociado con cada eigenvalor– es linealmente independiente, y cada eigenvector de A es un múltiplo de uno de esos p eigenvectores.
 - Si λ es un eigenvalor y $\|\cdot\|$ es una norma matricial (de una transformación), entonces $|\lambda| \leq \|A\|$.

DEMOSTRACION

- La primera parte es consecuencia del teorema 7.5. Si λ y A son reales y $x = u + iv$ para u y v reales, entonces si $Ax = \lambda x$

$$A(u + iv) = \lambda(u + iv)$$

lo que implica que $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ y $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Cuando menos uno de \mathbf{u} y \mathbf{v} deben ser distintos de cero porque \mathbf{x} es distinto de cero, y éste debe ser el eigenvector real requerido.

- b) \mathcal{V}_0 es no vacío. Si \mathbf{x} y \mathbf{y} están en \mathcal{V}_0 de tal modo que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ y $\mathbf{Ay} = \lambda\mathbf{y}$, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad y$$

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{Ax}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x})$$

para todos los escalares α . De este modo $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $\alpha\mathbf{x}$ están en \mathcal{V}_0 , el cual debe ser un subespacio por el teorema del subespacio. Como $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ para toda \mathbf{x} en \mathcal{V}_0 , claramente es un subespacio *invariante*.

- c) Suponga que el conjunto es linealmente dependiente; mediante el teorema 5.23 a) sobre independencia lineal, es posible considerar el *primer* vector \mathbf{x}_s que sea linealmente dependiente de las $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{s-1}$ precedentes:

$$\mathbf{x}_s = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}\mathbf{x}_{s-1}.$$

Multiplicando por λ_s resulta

$$\lambda_s\mathbf{x}_s = \alpha_1\lambda_s\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}\lambda_s\mathbf{x}_{s-1},$$

mientras que multiplicando esta vez por \mathbf{A} y sustituyendo $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ se obtiene

$$\lambda_s\mathbf{x}_s = \alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}\lambda_{s-1}\mathbf{x}_{s-1}.$$

Restando las dos últimas ecuaciones resulta

$$\mathbf{0} = \alpha_1(\lambda_s - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\mathbf{x}_{s-1}.$$

El conjunto $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{s-1}\}$ es linealmente independiente porque de otra manera \mathbf{x}_s no sería el *primer* de los vectores \mathbf{x}_i dependiente de sus predecesores; por lo tanto, los coeficientes $\alpha_i(\lambda_s - \lambda_i)$ en la combinación lineal anterior cuya suma es $\mathbf{0}$, deben ser todos iguales a cero para $1 \leq i \leq s-1$. Como $\lambda_s - \lambda_i \neq 0$ para eigenvalores diferentes, esto quiere decir que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{s-1} = 0$. Pero entonces también la \mathbf{x}_s debería ser cero, lo cual es imposible para un eigenvector; por lo tanto, la hipótesis que hablaba del conjunto original como linealmente dependiente debe haber sido falsa.

- d) Las primeras partes son consecuencia inmediata de a) y de c); es necesario demostrar que todo eigenvector \mathbf{x} debe ser un múltiplo de uno de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$. Como tenemos un conjunto linealmente independiente de p vectores en \mathbb{C}^p , generan a \mathbb{C}^p por el teorema 5.32 c); así

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{x}_p \text{ para alguna } \alpha_i.$$

Suponga que λ_r es el eigenvalor con el cual se asocia \mathbf{x}_r , y considere que $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \alpha_r \mathbf{x}_r$. Debido a b), \mathbf{v} es ya sea $\mathbf{0}$ o un eigenvector asociado con λ_r ; si \mathbf{v} es igual a $\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} = \alpha_r \mathbf{x}_r$, como se afirmaba; si por otro lado, \mathbf{v} fuera un eigenvector asociado con λ_r , entonces debido a c),

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1}, \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_p\}$$

sería linealmente independiente contradiciendo el hecho ya conocido

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \alpha_r \mathbf{x}_r = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{r-1} \mathbf{x}_{r-1} + \alpha_{r+1} \mathbf{x}_{r+1} + \cdots + \alpha_p \mathbf{x}_p.$$

- e) Se sabe que $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$ para toda \mathbf{x} , de modo que es válido para el eigenvector. Pero

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|;$$

ya que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces es posible dividir a esta última ecuación por $\|\mathbf{x}\|$ y usar la desigualdad anterior para obtener $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$. ■

Los ejemplos de la sección 6.1 ilustran el teorema 7.10. En el ejemplo 7.1 la matriz \mathbf{A} , 2×2 , tiene dos eigenvalores simples diferentes $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 16$; es fácil resolver $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ para encontrar los eigenvectores asociados

$$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 2]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T,$$

los que forman un conjunto linealmente independiente. La matriz \mathbf{A} , 3×3 del ejemplo 7.2 tenía tres eigenvalores simples diferentes y tres eigenvectores; se puede demostrar fácilmente que forman un conjunto linealmente independiente. Cada uno de esos casos involucró, únicamente, eigenvalores de multiplicidad algebraica 1; la situación con respecto al número de eigenvectores asociados con un eigenvalor no simple es bastante más complicada, como se verá a continuación.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 13.

Eigenvectores de eigenvalores múltiples

Se quiere examinar el asunto del número de eigenvectores asociados con un eigenvalor de multiplicidad algebraica mayor que 1. Desde luego se sabe que si \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado con λ , entonces también lo será $\alpha \mathbf{x}$ para toda $\alpha \neq 0$; de este modo se ha encontrado un número infinito de eigenvectores asociados con λ , pero todos ellos son linealmente dependientes del eigenvector \mathbf{x} del que se partió. Lo que se quiere saber es si habrá algunos eigenvectores “verdaderamente diferentes” –eigenvectores que sean linealmente independientes de \mathbf{x} .

(7.11) **Ejemplo.** Se considerará la matriz sencilla 5×5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Es fácil encontrar que el polinomio característico de \mathbf{A} es $(7 - \lambda)^2(4 - \lambda)^3$, de modo que los eigenvalores de \mathbf{A} son $\lambda_1 = 7$ de multiplicidad algebraica $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ de multiplicidad algebraica $m_2 = 3$. Los eigenvectores se consideran asociados a estos eigenvalores.

$(\lambda_1 = 7)$. Considere la ecuación $(\mathbf{A} - 7\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que se debe resolver para encontrar eigenvectores \mathbf{x} asociados a $\lambda_1 = 7$. La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right],$$

en donde es fácil ver que la solución general

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$$

debe ser $x_5 = 0$, $x_4 = k$ arbitraria, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_1 = h$ arbitraria. De aquí se obtiene

$$\mathbf{x} = [h \ 0 \ 0 \ k \ 0]^T = h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_4$$

como el conjunto de todos los eigenvectores asociados con $\lambda_1 = 7$ para h y k arbitrarias. Por lo tanto, \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_4 son eigenvectores asociados a $\lambda_1 = 7$, y todos los demás eigenvectores semejantes son linealmente dependientes de \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_4 . Se ha formado un conjunto linealmente independiente de dos eigenvectores asociados con este eigenvalor de multiplicidad algebraica dos.

$(\lambda_2 = 4)$. De modo semejante, considere $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y la matriz aumentada de este sistema que se deberá resolver para encontrar todos los eigenvectores asociados a $\lambda_2 = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nuevamente, es posible visualizar con facilidad que la solución general debe ser $x_5 = k$ arbitraria, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = h$ arbitraria y $x_1 = 0$. Esto da

$$\mathbf{x} = [0 \quad h \quad 0 \quad 0 \quad k]^T = h\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_5$$

como el conjunto de todos los eigenvectores asociados con $\lambda_2 = 4$. Por lo tanto, \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_5 son eigenvectores asociados con $\lambda_2 = 4$ y todos los demás eigenvectores semejantes son linealmente dependientes de \mathbf{e}_2 y de \mathbf{e}_5 . Esto parece similar a lo que pasó con $\lambda_1 = 7$, pero observe que en este caso para $\lambda_2 = 4$ se ha encontrado un conjunto linealmente independiente de sólo dos eigenvectores asociados con un eigenvalor de multiplicidad algebraica tres. Por lo anterior no es posible encontrar un tercer eigenvector asociado a $\lambda_2 = 4$ que sea linealmente independiente de los dos que ya se habían encontrado. Observe, sin embargo, que aunque no se puede encontrar ese tercer eigenvector, es posible encontrar un tercer vector –digamos \mathbf{e}_3 – tal que, junto con los dos eigenvectores, forme una base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5\}$ para un subespacio invariante de \mathbf{A} de dimensión 3, ya que es fácil visualizar que

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{e}_3 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_5) = 4\alpha\mathbf{e}_3 + (4\beta + \alpha)\mathbf{e}_2 + 4\gamma\mathbf{e}_5.$$

La situación ilustrada en el ejemplo 7.11 es típica: un eigenvalor λ_i de multiplicidad algebraica m_i puede o no tener un conjunto linealmente independiente de m_i eigenvectores asociados, pero siempre tendrán un subespacio invariante de dimensión m_i . A la multiplicidad algebraica se le llamó “algebraica” porque provino del concepto algebraico de λ_i como raíz múltiple del polinomio característico; el concepto de dimensión del espacio de los eigenvectores asociados es geométrico, y conduce a la noción de *multiplicidad geométrica* de un eigenvalor.

- (7.12) **Definición.** La multiplicidad geométrica μ_i de un eigenvalor λ_i de \mathbf{A} es el número máximo de eigenvectores asociados a λ_i que son linealmente independientes; es decir, μ_i es la dimensión del subespacio (cuando se incluye a 0) de todos los eigenvectores asociados a λ_i .

Con esta nomenclatura, la matriz \mathbf{A} del ejemplo 7.11 tiene $m_1 = \mu_1 = 2$, pero $m_2 = 3$ mientras que $\mu_2 = 2$. Es posible construir ejemplos en los que μ_i sea igual a cualquier entero si $1 \leq \mu_i \leq m_i$. No será sino hasta el capítulo 9 donde se tengan las herramientas para demostrar:

- (7.13) **Presentación preliminar del teorema clave 9.11.** La multiplicidad geométrica μ_i de un eigenvalor λ_i de multiplicidad algebraica m_i puede ser cualquier entero que satisfaga la condición $1 \leq \mu_i \leq m_i$, esto es, que la dimensión del subespacio (con 0 agregado) de los eigenvectores

tores asociados a λ_i pueden ser cualquier número desde 1 hasta el número de veces que se cuente λ_i como raíz del polinomio característico. Sin embargo, siempre habrá un subespacio invariante de dimensión m_i asociado a λ_i , y todo vector en \mathbb{R}^p o en \mathbb{C}^p (para una matriz $p \times p$) puede escribirse de modo único como una combinación lineal de vectores u_j , en donde cada u_j está en el subespacio invariante de dimensión m_i asociado a λ_i .

PROBLEMAS 7.2

1. Demuestre que la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores 2 y $2 \pm \sqrt{2}$, y encuentre los eigenvectores correspondientes.

- ▷ 2. Encuentre un conjunto linealmente independiente de dos eigenvectores de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

correspondiente al eigenvalor $\lambda = -2$. Encuentre el otro eigenvalor y el otro eigenvector.

3. Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de A si y sólo si A es singular.

- ▷ 4. Encuentre el polinomio característico de la matriz general 2×2 .
5. Demuestre que los eigenvalores de una matriz triangular (superior o inferior) T son los elementos $\langle T \rangle_{ii}$, y encuentre los eigenvectores asociados.
6. Para la matriz A del modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 2.13 con $k = 0.16$, encuentre el polinomio característico, los eigenvalores y los eigenvectores.
- ▷ 7. Encuentre el polinomio característico de la matriz A de transición solicitada en el problema 6 de la sección 2.2.
8. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz del problema 7.
9. Generalice el modelo de las masas oscilantes de la sección 2.5, para el caso de p masas m_1, m_2, \dots, m_p y p resortes con sus constantes de resorte $k_1,$

k_2, \dots, k_p , demostrando que las ecuaciones que generalizan (2.28) nuevamente se representan por medio de (2.30), en donde ahora \mathbf{K} y \mathbf{M} son $p \times p$,

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_p),$$

siendo \mathbf{K} tridiagonal: $\langle \mathbf{K} \rangle_{ii} = k_i + k_{i+1}$ (definiendo a $k_{p+1} = 0$ por conveniencia) para $1 \leq i \leq p$, $\langle \mathbf{K} \rangle_{i,i-1} = \langle \mathbf{K} \rangle_{i-1,i} = -k_i$ para $2 \leq i \leq p$, y todos los demás $\langle \mathbf{K} \rangle_{ij} = 0$.

- M 10.** Definiendo a $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ y a $\lambda = \omega^2$ como en el ejemplo 7.1, utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar los eigenvalores λ y las correspondientes ω si, en el problema 9, $p = 10$ y las masas $m_i = 5$ y $k_i = 40$ para toda i . También encuentre las frecuencias de oscilación $\omega/(2\pi)$ para el sistema de masas acopladas.
- 11.** Si \mathbf{A} tiene el eigenvalor λ_i , demuestre que:
- La transpuesta de \mathbf{A} tiene los mismos eigenvalores que \mathbf{A} .
 - La matriz $k\mathbf{A}$ tiene el eigenvalor $k\lambda_i$.
 - La matriz \mathbf{A}^r tiene el eigenvalor λ_i^r , siendo r un entero positivo.
 - Si \mathbf{A} es no singular, \mathbf{A}^{-1} tiene el eigenvalor $1/\lambda_i$.
 - La matriz $\mathbf{A} + k\mathbf{I}$ tiene el eigenvalor $\lambda_i + k$.
- ▷ **12.** Si $f(x)$ es un polinomio en x y \mathbf{A} es una matriz cuadrada, entonces $f(\mathbf{A})$ representa a la matriz obtenida sustituyendo a x^i por \mathbf{A}^i (y a x^0 por \mathbf{I}) en la fórmula de $f(x)$. Demuestre que $f(\lambda)$ es un eigenvalor de $f(\mathbf{A})$ asociado al eigenvector \mathbf{x} si λ es un eigenvalor de \mathbf{A} asociado a \mathbf{x} .
- 13.** a) Demuestre que si \mathbf{A} es una matriz hermitiana, entonces \mathbf{A} puede escribirse como $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$, en donde \mathbf{B} y \mathbf{C} son reales, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T$.
b) Describa la forma de deducir el eigensistema de \mathbf{A} en a) partiendo del de la matriz real simétrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

- 14.** Los eigenvalores de una matriz \mathbf{A} , 10×10 , son $3, 2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 12, 12$.
- Encuentre el polinomio característico de \mathbf{A} .
 - Encuentre la multiplicidad algebraica de cada eigenvalor diferente.
- 15.** Encuentre el polinomio característico y las multiplicidades algebraicas y geométricas para cada eigenvalor diferente de la matriz idéntica \mathbf{I} , $p \times p$, y de la matriz $\mathbf{0}$, cero, $p \times p$.
- 16.** Ya que $\lambda = -2$ es un eigenvalor de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encuentre los eigenvalores de \mathbf{A} y sus multiplicidades algebraicas y geométricas, así como tantos eigenvectores (que sean linealmente independientes) como sea posible.

- ▷ 17. Encuentre los eigenvalores de \mathbf{A} , así como sus multiplicidades algebraicas y geométricas, y tantos eigenvectores (que sean linealmente independientes) como sea posible, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Haga lo que se pidió en el problema 17, pero para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

7.3 EIGENSTEAMAS, FACTORIZACIONES Y REPRESENTACIONES DE TRANSFORMACIONES

Se comenzó el capítulo motivando al estudio de los eigensistemas desde cuatro diferentes puntos de vista. Los dos primeros se trataron en la sección 7.2: la singularidad de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ y los eigenvectores y subespacios invariantes más generales. Ahora se estudiarán los puntos de vista restantes.

Factorizaciones matriciales

De nuevo, considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

que originalmente surgió en el ejemplo 2.6 con el modelo de competencia entre lecherías, y cuyos eigenvalores y eigenvectores se encontraron en el ejemplo 7.2 en donde $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.6$ y $\lambda_3 = 1.0$, y

$$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -2 \quad 1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [1 \quad -1 \quad 0]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [9 \quad 7 \quad 4]^T$$

que forman un conjunto de eigenvectores linealmente independientes. Al escribir las ecuaciones $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ en la forma de bloque

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \lambda_3 \mathbf{x}_3]$$

se ve que, si se define a

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] \quad \text{y} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

la ecuación en bloque anterior puede escribirse $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\Lambda$. Como el conjunto de columnas de \mathbf{P} es linealmente independiente, por el **teorema clave 5.50 c)**, \mathbf{P} es no singular y así es posible reescribir $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\Lambda$ como $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$, lo que puede comprobarse fácilmente numéricamente (\mathbf{P}^{-1} surgió en el ejemplo 7.3, en donde se le llamó \mathbf{M}^{-1}). De este modo, la existencia de un conjunto de eigenvectores linealmente independiente permite *factorizar* la matriz \mathbf{A} , 3×3 , en un punto especial $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ en donde Λ es diagonal. Esto puede hacerse en general, para una matriz \mathbf{A} $p \times p$ y de hecho es *equivalente* a la existencia de un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores de \mathbf{A} .

(7.14) **Teorema clave** (factorizaciones y eigenvectores). Una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores si y sólo si existe una matriz no singular \mathbf{P} y una matriz diagonal Λ para las que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{e igualmente, } \Lambda = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}),$$

estas factorizaciones son válidas si y sólo si las columnas

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \text{ de } \mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_p]$$

forman un conjunto linealmente independiente de eigenvectores de \mathbf{A} , asociados a los eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, que son los elementos diagonales de $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

DEMOSTRACION. Se procederá de acuerdo al material presentado antes del teorema.

(eigensistema \Rightarrow factorizaciones) Forme una matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_p]$ partiendo de un conjunto de eigenvectores linealmente independiente y forme una matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ con los eigenvalores asociados. $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ significa que $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\Lambda$; como \mathbf{P} es no singular por el **teorema clave 5.50 c)**, se obtiene $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ Y $\Lambda = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ como se afirmó.

(factorización \Rightarrow eigensistema) Si $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ o $\Lambda = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ siendo Λ diagonal, las reglas de multiplicación para matrices separadas dicen que $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, en donde las \mathbf{x}_i son las columnas de \mathbf{P} , y las λ_i son los elementos diagonales de Λ (tomados ambos en orden). Ya que \mathbf{P} es no singular, las \mathbf{x}_i forman un conjunto linealmente independiente y son diferentes de cero; por ello forman un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores, como se afirmó. ■

(7.15) **Ejemplo.** Considere la matriz sencilla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es claramente igual a

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda);$$

entonces los eigenvalores (simples) son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Los eigenvectores correspondientes se encuentran fácilmente, como columnas de \mathbf{P} , forman

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un cálculo directo lleva a que

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 6.

Representaciones de transformaciones

Recuerde de la sección 6.2 la forma en que las matrices representan transformaciones lineales con respecto a bases ordenadas; de acuerdo al **teorema clave 6.14** la transformación lineal \mathcal{T} se representa por la matriz cuya i -ésima columna se forma a partir de los coeficientes que se usaron para escribir $\mathcal{T}(\mathbf{v}_i)$ en términos de las \mathbf{w}_i , en donde las \mathbf{v}_i forman la base ordenada del dominio y las \mathbf{w}_i la base ordenada del contradominio de \mathcal{T} .

Suponga ahora que \mathcal{T} se define por la matriz \mathbf{A} , $p \times p$ como $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ y que la base ordenada que se usa tanto para el dominio como para el contradominio \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p es la canónica $\{\mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_p\}$. Entonces, de acuerdo con la receta anterior, la matriz que representa a \mathcal{T} tiene como i -ésima columna a los coeficientes de $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ en la representación de $\mathcal{T}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{Ae}_i$, que es justamente la i -ésima columna de \mathbf{A} . Entonces:

- (7.16) $A, p \times p$, por sí misma, representa la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(v) = Av$ con respecto a la base ordenada $\{e_1; \dots; e_p\}$ que se usó tanto para el dominio como para el contradominio de \mathcal{T} .

También recuerde de la sección 6.2 la forma en que cambia la representación matricial de una transformación lineal al cambiar las bases ordenadas. De acuerdo al teorema 6.17, la matriz A que representa a \mathcal{T} con respecto a un par de bases ordenadas, se sustituye por $A' = S^{-1}AP$ con respecto a otro par, en donde las matrices S y P hacen el cambio entre las coordenadas en C y las coordenadas en C' en el contradominio, y las coordenadas en B y B' en el dominio respectivamente. Con la nomenclatura del teorema 6.2, suponga que las bases ordenadas originales B y C son

$$B = C = \{e_1; \dots; e_p\}$$

y que se usan tanto para el dominio como para el contradominio y, suponga también que las nuevas bases ordenadas son, por ejemplo,

$$B' = C' = \{x_1; \dots; x_p\}.$$

Entonces las matrices de cambio S y P son iguales pero se usará P como matriz común. ¿Cómo es esta matriz P ? De acuerdo al **teorema clave 5.43**, la i -ésima columna de esta matriz se obtiene a partir de los coeficientes usados para escribir el i -ésimo vector de $B' = C'$ como combinación lineal de los de $B = C$. En este caso, lo anterior significa que la i -ésima columna de P se origina al escribir x_i como combinación lineal de $\{e_1, \dots, e_p\}$ —y esos coeficientes no son otra que los elementos de la misma x_i . Esto es, la matriz de cambio P es igual a $[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_p]$, y la nueva matriz A' que representa a \mathcal{T} como en (7.16) es $A' = P^{-1}AP$. A continuación se resumirá lo que se ha demostrado.

- (7.17) **Teorema.** Suponiendo que A es $p \times p$ y que la transformación lineal \mathcal{T} se define por $\mathcal{T}(v) = Av$, y también que $B = \{e_1; \dots; e_p\}$ es la base ordenada canónica mientras que $B' = \{x_1; \dots; x_p\}$ es otra base ordenada; entonces:
- A por sí misma, representa a \mathcal{T} con respecto a la base ordenada B que se usó tanto para el dominio como para el contradominio de \mathcal{T} .
 - Con respecto a la base ordenada B' que se usó tanto para el dominio como para el contradominio de \mathcal{T} , \mathcal{T} se representa por $A' = P^{-1}AP$, en donde $P = [x_1 \ \cdots \ x_p]$.

Como $A' = P^{-1}AP$ y $A = PA'P^{-1}$ son equivalentes, el teorema 7.17 se combina con el **teorema clave 7.14** para describir el cuarto punto de vista sobre los eigensistemas.

(7.18)

Teorema clave (representaciones de transformación y eigenvectores). Una matriz A , $p \times p$, tiene un conjunto de p eigenvectores si y sólo si la transformación lineal \mathcal{T} , $\mathcal{T}(v) = Av$ puede representarse por una matriz diagonal Λ con respecto a alguna base ordenada única que se use para el dominio y para el contradominio de \mathcal{T} ; esta representación es válida si y sólo si los vectores x_1, \dots, x_p de la base ordenada forman un conjunto linealmente independiente de eigenvectores de A asociados con los eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, que son los elementos diagonales de Λ en el mismo orden que las x_i .

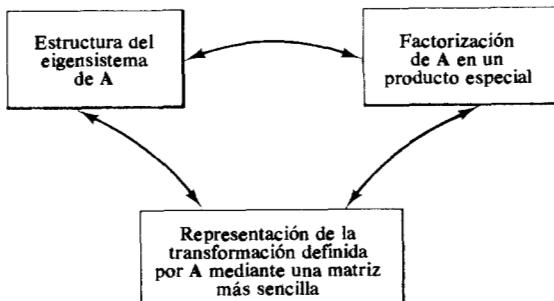
Véase el ejemplo 7.3 para ilustrar este teorema, así como el material que condujo a dicho ejemplo en la sección 7.1.

Hasta ahora, los eigensistemas se han discutido desde cuatro puntos de vista, aunque uno de ellos –la singularidad de $A - \lambda I$ – en realidad sólo se refiere a los eigenvalores. Los eigenvectores se han discutido en realidad desde tres puntos de vista: eigenvectores y subespacios invariantes, factorizaciones de matrices, y representaciones de transformaciones lineales. Por ejemplo, en esta sección se ha expresado una sola idea en cada una de estas tres formas:

1. A , $p \times p$, tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores.
2. A se puede descomponer como $A = P\Lambda P^{-1}$ –de modo que $\Lambda = P^{-1}AP$ – en donde Λ es diagonal.
3. $\mathcal{T}(v) = Av$ puede representarse por una matriz diagonal Λ .

Igualmente, se encontrará que estos distintos puntos de vista son útiles cuando A no tiene un conjunto de eigenvectores con una estructura tan sencilla; dependiendo de la situación, cualquiera de esos tres puntos de vista podría ser de mucha ayuda para comprender la naturaleza de una matriz en particular o de una transformación lineal. Por consiguiente, es importante captar la equivalencia de los puntos de vista como lo indica la figura (7.19).

(7.19)



PROBLEMAS 7.3

- ▷ 1. Encuentre una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ con Λ diagonal para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ con Λ diagonal, para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Encuentre una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ con Λ diagonal para la matriz \mathbf{A} del modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 2.13 cuando $k = 0.16$.

- ▷ 4. Determine si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

puede descomponerse como $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ siendo Λ diagonal; si es así, hágalo, si no, explique por qué no es posible.

5. Compruebe que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$ y que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ para una \mathbf{P} adecuada con Λ diagonal, para la matriz \mathbf{A} del problema 10 de la sección 7.2.
6. Para la matriz de cada uno de los siguientes problemas de la sección 7.2 determine si hay una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ con Λ diagonal. Si es así, encuéntrela, si no, explique por qué.
- a) Problema 1 b) Problema 2 c) Problema 16
 - d) Problema 17 e) Problema 18
- ▷ 7. Para la transformación lineal del modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 2.13, con $k = 0.16$, encuentre una base ordenada y la representación diagonal correspondiente de la transformación.
8. Encuentre una base ordenada y la matriz diagonal correspondiente para representar a la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ para la matriz \mathbf{A} del problema 2.
9. Haga lo mismo que se pidió en el problema 8, pero para la matriz del problema 1.
10. Para la matriz de cada uno de los siguientes problemas de la sección 7.2, determine si hay una base ordenada y la correspondiente representación diagonal para la transformación $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$. Si es así, encuéntrelas; si no, explique por qué.
- a) Problema 1 b) Problema 2 c) Problema 16
 - d) Problema 17 e) Problema 18

- ▷ 11. Haga lo mismo que se pidió en el problema 10, pero para la matriz del problema 4 anterior.
12. Considere la transformación lineal \mathcal{T} que envía a \mathbf{x} en \mathbb{R}^2 a $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ en \mathbb{R}^2 , en donde $y_1 = 2x_1 + x_2$ y $y_2 = x_1 + 2x_2$. Encuentre una base ordenada, de tal modo que la representación correspondiente de \mathcal{T} sea diagonal, y encuentre la representación.

7.4 TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA; FORMA DE JORDAN

En las secciones anteriores se ha acumulado información sobre las relaciones

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}'\mathbf{P}^{-1}$$

entre dos matrices $p \times p$, \mathbf{A} y \mathbf{A}' , y también sobre su importancia y utilidad; véanse por ejemplo, el ejemplo 6.18, el **teorema clave 7.14** y el teorema 7.17.

Transformaciones de semejanza

- (7.20) **Definición.** Si existe una matriz \mathbf{P} no singular tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{B}$, entonces se dice que \mathbf{B} es *semejante* a \mathbf{A} y que se obtiene de \mathbf{A} por medio de una *transformación de semejanza*.

- (7.21) **Ejemplo**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es semejante a} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

porque

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

como se podrá comprobar inmediatamente.

La semejanza tiene algunas propiedades sencillas y evidentes:

- (7.22) **Teorema** (semejanza como una equivalencia). La semejanza es una *relación de equivalencia* porque
- \mathbf{A} es semejante a sí misma.
 - Si \mathbf{B} es semejante a \mathbf{A} , entonces \mathbf{A} es semejante a \mathbf{B} .
 - Si \mathbf{C} es semejante a \mathbf{B} y \mathbf{B} es semejante a \mathbf{A} , entonces \mathbf{C} es semejante a \mathbf{A} .

DEMOSTRACIÓN

- a) Utilice $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ de modo que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{A}$.

- b) Si $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ siendo $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$.
c) Si $\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, entonces $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ siendo $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$. ■

(7.23) **Teorema** (semejanza y eigensistemas).

- a) Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y los mismos eigenvalores.
b) Suponga que \mathbf{B} es semejante a \mathbf{A} con $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Entonces \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado con el eigenvalor λ si y sólo si $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ es un eigenvector de \mathbf{B} asociado con el eigenvalor λ .

DEMOSTRACION

- a) Ya que $\det \mathbf{P}^{-1} = 1/(\det \mathbf{P})$, se tiene que

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \det\{\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}\} \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}) \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \det(\mathbf{P}) \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\end{aligned}$$

y los polinomios característicos son idénticos. Como los eigenvalores son precisamente las raíces de los polinomios característicos, a) queda demostrado.

- b) \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado con λ si y sólo si $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ –esto es, $(\mathbf{PB}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, lo cual es equivalente a $\mathbf{B}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x})$, como se afirmaba. Observe también que \mathbf{x} es cero si y sólo si $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ es cero. ■

(7.24) **Ejemplo.** Para las matrices semejantes \mathbf{A} y \mathbf{B} del ejemplo 7.21, se comprueba que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda + 1,$$

mientras que también lo es

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda + 1$$

(7.25) **Teorema** (semejanza y potencias). Suponiendo que \mathbf{B} es semejante a \mathbf{A} con $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, entonces:

- a) Para cada entero k positivo, \mathbf{B}^k es semejante a \mathbf{A}^k siendo $\mathbf{B}^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$.
b) $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.
c) \mathbf{B} es no singular si y sólo si \mathbf{A} es no singular.
d) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son no singulares, entonces \mathbf{B}^k es semejante a \mathbf{A}^k siendo $\mathbf{B}^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$ también para enteros k negativos de modo que en especial $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$.
e) Si f es un polinomio: $f(x) = a_0x^m + \cdots + a_m$ y si $f(\mathbf{X})$ para una matriz cuadrada \mathbf{X} es

$$a_0 \mathbf{X}^m + \cdots + a_m \mathbf{I},$$

entonces $f(\mathbf{B})$ es semejante a $f(\mathbf{A})$ siendo $f(\mathbf{B}) = \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}$.

DEMOSTRACION

- a) $\mathbf{B}^k = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \cdots (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$ – con k términos – y la ley asociativa permite la eliminación de los paréntesis de modo que $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}$ repetidamente da \mathbf{I} y el producto se colapsa a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$.
- b) $\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^{-1}) \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{P}) = \det \mathbf{A}$.
- c) Esto es consecuencia de b) y del hecho de que una matriz es no singular si y sólo si su determinante es diferente de cero.
- d) $\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$. El resultado para una k negativa arbitraria sigue de aplicar a) a \mathbf{B}^{-1} y a \mathbf{A}^{-1} con $|k|$.
- e)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{B}) &= a_0 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^m \mathbf{P} + a_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{P} + \cdots + a_m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}^{-1} (a_0 \mathbf{A}^m + a_1 \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_m \mathbf{I}) \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} f(\mathbf{A}) \mathbf{P}, \end{aligned}$$

como se afirmó. ■

Observe que la relación $\mathbf{B}^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$ puede ser en extremo útil si es necesario calcular o analizar \mathbf{B}^k y si \mathbf{A}^k se analiza con mayor facilidad; véase el ejemplo 6.18 sobre el modelo de competencia entre poblaciones y considérelo a este respecto.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 8.

Forma de Jordan

En el capítulo 9 se explotarán sistemáticamente las transformaciones de semejanza para transformar cualquier matriz $p \times p$ en otra semejante de alguna forma especial. Gracias a la relación de (7.19) entre la información sobre factorizaciones descrita por transformaciones de semejanza y la información sobre la estructura de eigensistemas, será posible utilizar esta forma especial para describir en general la estructura de eigensistemas tal y como se adelantó en (7.13).

(7.26)

Avance del teorema clave 9.4. Toda matriz \mathbf{A} , $p \times p$, es semejante a una matriz \mathbf{J} –su *forma de Jordan*– que tiene, entre otras, las siguientes propiedades especiales:

- a) \mathbf{J} es triangular superior.
- b) Los p elementos de la diagonal principal de \mathbf{J} son iguales a los p eigenvalores de \mathbf{A} (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas.)

- c) Cada uno de los $p - 1$ ($i, i + 1$) elementos de que está sobre la diagonal principal de \mathbf{J} , es igual a cero o a 1; el número de ceros es uno menos que el máximo número de eigenvectores de \mathbf{A} que sean linealmente independientes.
- d) Cada uno de los $(i, i + s)$ elementos con $s > 1$ –esto es, los elementos sobre estas dos diagonales son cero.

Nota. Este teorema sólo menciona la existencia de esta forma; *no* describe un método constructivo para encontrar a \mathbf{J} en la práctica.

(7.27) **Ejemplo.** La matriz \mathbf{J} está en la forma de Jordan:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores son $\lambda_1 = 4$ de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2, y $\lambda_2 = 7$ de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1. Así, hay tres eigenvectores que son linealmente independientes, como se indicó –de acuerdo con (7.26)– por la presencia de dos ceros en la primera sobrediagonal de \mathbf{J} .

Para relacionar el avance (7.26) con lo que ya se estudió cuando hay un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores para \mathbf{A} , $p \times p$, observe que (7.26) afirma que habrá $p - 1$ ceros en esa sobrediagonal, por lo tanto, \mathbf{J} será diagonal (como se sabe por el **teorema clave 7.14**).

(7.28) **Re-enunciado parcial del teorema clave 7.14.** Una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores si y sólo si \mathbf{A} tiene una forma de Jordan diagonal

La semejanza es una poderosa herramienta teórica para simplificar el estudio de matrices cuadradas; desafortunadamente, las transformaciones de semejanza en general, crean a menudo serias dificultades numéricas en los cálculos prácticos (véanse los problemas 14 y 15). Una *subclase* especial de transformaciones de semejanza es computacionalmente muy útil, no obstante, y por ello es de extrema importancia en las aplicaciones por esta y por otras razones. La próxima sección examinará en detalle las transformaciones de semejanza *unitaria* y *ortogonal*.

PROBLEMAS 7.4

- ▷ 1. Se sabe que \mathbf{A} es semejante a la matriz \mathbf{B} que se muestra a continuación; encuentre los eigenvalores de \mathbf{A} .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Mediante las matrices semejantes \mathbf{A} y \mathbf{B} del ejemplo 7.21, compruebe:
- El teorema 7.25 a) para $k = 2$
 - El teorema 7.25 b)
 - El teorema 7.25 d) para $k = -1$ y $k = -2$.
- ▷ 3. Suponga que \mathbf{A} es semejante a una matriz \mathbf{U} triangular superior; describa los eigenvalores de \mathbf{A} .
4. Demuestre que dos matrices diagonales son semejantes si y sólo si los elementos diagonales de una son exactamente los de la otra aunque quizá reacomodados.
5. Encuentre fórmulas explícitas para \mathbf{A}^k en términos del entero positivo k , si:
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- ▷ 6. Utilice el teorema 7.25 para analizar el comportamiento de los vectores de la población \mathbf{x}_i del modelo de competencia entre poblaciones cuando i tiende a infinito en el ejemplo 2.13 con:
- $k = 0.1$
 - $k = 0.16$
7. Sin experimentar con \mathbf{A}^k para varias k , utilice MATLAB o algún software semejante para determinar qué les pasa a las potencias \mathbf{A}^k cuando los enteros positivos k tienden a infinito si \mathbf{A} es la matriz del problema 10 de la sección 7.2.
8. Se ha afirmado que la multiplicidad geométrica μ_i de un eigenvalor λ_i de \mathbf{A} no puede ser mayor que la multiplicidad algebraica m_i . Demuestre esto con el método siguiente.
- Demuestre que se puede extender un conjunto de eigenvectores μ_i hasta obtener una matriz \mathbf{P} no singular tal que $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ tenga la forma

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I}_{\mu_i} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

siendo \mathbf{C} cuadrada.

- Demuestre que $\mu_i \leq m_i$ considerando los polinomios característicos de \mathbf{A} y de \mathbf{A}' .
- Demuestre que \mathbf{A} y \mathbf{B} son semejantes si y sólo si tienen una forma de Jordan común \mathbf{J} .

▷ 10. Demuestre que \mathbf{A} y \mathbf{B} no son semejantes si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Demuestre que \mathbf{A} y \mathbf{B} son semejantes si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Compruebe directamente las afirmaciones sobre eigenvalores y eigenvectores de la matriz \mathbf{J} del ejemplo 7.27.
- ▷ 13. Para la forma de Jordan \mathbf{J} siguiente, encuentre los eigenvalores y eigenvectores y compruebe en este caso, (7.26) c).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Se ha mencionado que las transformaciones de semejanza pueden ser computacionalmente difíciles. Considérense las matrices \mathbf{A} , \mathbf{P} , y $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \epsilon & 1 - \epsilon \\ -2 + 2\epsilon & -1 + 2\epsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 - \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} & \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \\ \frac{-1 + \epsilon^2}{\epsilon} & \frac{-1 + \epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad \text{siendo } \epsilon \text{ diferente de cero pero pequeño.}$$

\mathbf{A} (y por consiguiente \mathbf{B}) es no singular, tiene eigenvalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \epsilon$ y tiene determinante ϵ . Suponga que ϵ es de tal magnitud que, 1 + ϵ y expresiones semejantes, se calculan con exactitud en una computadora, mientras que $-1 + \epsilon^2$ se evalúa como -1 . Demuestre que la versión *computada* de \mathbf{B} en este caso será singular, y compare sus eigenvalores con los de \mathbf{A} .

- ▷ 15. Utilice MATLAB o algún software semejante para calcular \mathbf{A} , \mathbf{P}^{-1} , \mathbf{B} , los eigenvalores de \mathbf{A} y \mathbf{B} , los determinantes de \mathbf{A} y \mathbf{B} y los rangos de \mathbf{A} y \mathbf{B} para las matrices del problema 14; utilice a ϵ tan pequeño como se necesite –por ejemplo $\epsilon = 10^{-9}$ para la aritmética de 16 dígitos de muchas microcomputadoras con coprocesadores matemáticos.

7.5 MATRICES UNITARIAS Y SEMEJANZA UNITARIA; FORMAS DE SCHUR Y DIAGONAL

La sección anterior trató la semejanza: la relación $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, en donde \mathbf{P} es una matriz arbitraria no singular. Como se hizo notar allí y se indicó en los problemas 14 y 15 de esa sección, podría haber dificultad para trabajar computacionalmente con las transformaciones arbitrarias de semejanza. Por ello, se introducirá un tipo especial de transformación que evita esa dificultad y que es de extrema importancia en el uso práctico de las matrices.

Matrices unitarias y transformaciones

Las transformaciones de semejanza $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ se introdujeron en parte porque describen la forma en que cambia la matriz \mathbf{A} , que representa una transformación lineal, cuando las bases ordenadas cambian de $\{\mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_p\}$ a $\{\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_p\}$, en donde $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_p]$; véase el teorema 7.17 de la sección 7.3. Mucho antes, se mostró –veanse las secciones 5.8 y 5.9– que las bases *ortogonales* y *ortonormales* eran especialmente útiles y convenientes computacionalmente. Se considerará el uso de tales bases en las transformaciones de semejanza.

Suponiendo que $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ es un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^p (o en \mathbb{C}^p) con el producto interior estándar; entonces

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1 \quad (\text{o } \mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_i = 1)$$

para toda i , y

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_j = 0)$$

para toda i y j siendo $i \neq j$, en donde, como de costumbre, se consideró la matriz $1 \times 1 \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ (o $\mathbf{x}^H \mathbf{y}$) como igual a su único elemento. Si entonces se forma la matriz $p \times p$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_p],$$

por multiplicación de matrices separadas se sigue que

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (\text{o } \mathbf{P}^H \mathbf{P} = \mathbf{I}).$$

Esto es, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (o $\mathbf{P}^H = \mathbf{P}^{-1}$).

(7.29) **Definición.** Una matriz \mathbf{P} , $p \times p$, para la cual $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^H$, de tal modo que se dice que $\mathbf{P}\mathbf{P}^H = \mathbf{P}^H\mathbf{P} = \mathbf{I}$, es *unitaria*. Una matriz *ortogonal* es una matriz unitaria *real* \mathbf{P} , tal que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ y $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

(7.30) **Ejemplo.** Si

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

entonces \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 son unitarias, mientras que \mathbf{P}_2 también es ortogonal como lo mostrará el cálculo directo de $\mathbf{P}_1^H \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^H \mathbf{P}_2$ y de $\mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_2$. Observe que \mathbf{P}_1 no es ortogonal (por ejemplo, porque no es real).

Observe que cada matriz ortogonal es unitaria, pero cada matriz unitaria no es ortogonal; *cualquier afirmación válida para toda matriz unitaria es también válida para toda matriz ortogonal*. Si no se necesita manejar números complejos, entonces, por simplicidad, interprete cada afirmación sobre matrices unitarias como hecha para matrices (reales) ortogonales.

Las matrices unitarias tienen propiedades importantes.

(7.31) **Teorema** (matrices unitarias)

- Una matriz \mathbf{P} $p \times p$ es unitaria (u ortogonal) si y sólo si sus columnas forman un conjunto ortonormal.
- Una matriz \mathbf{P} , $p \times p$, es unitaria (u ortogonal) si y sólo si sus renglones forman un conjunto ortonormal.
- Si \mathbf{P} es unitaria (u ortogonal) entonces $|\det \mathbf{P}| = 1$ (o $\det \mathbf{P} = \pm 1$).
- Si \mathbf{P} y \mathbf{Q} son ambas unitarias (o ambas ortogonales), también lo es \mathbf{PQ} .
- Si \mathbf{P} es unitaria (u ortogonal) y si (\cdot, \cdot) es el producto interior estándar, entonces:
 - $(\mathbf{Px}, \mathbf{Py}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para toda \mathbf{x} y \mathbf{y} , entonces el ángulo entre \mathbf{Px} y \mathbf{Py} es igual al ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{y} .
 - $\|\mathbf{Px}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para toda \mathbf{x} , así la longitud de \mathbf{Px} es igual a la de \mathbf{x} .
 - $\|\mathbf{P}\|_2 = 1$.
- Si λ es un eigenvalor de la matriz unitaria (u ortogonal) \mathbf{P} , entonces $|\lambda| = 1$.
- Si \mathbf{P} es $p \times p$ unitaria (u ortogonal) siendo \mathbf{A} , $p \times r$ y \mathbf{B} , $r \times p$, entonces

$$\|\mathbf{PA}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{BP}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2.$$

DEMOSTRACION

- Es consecuencia del material que condujo a la definición 7.29.
- Esto es consecuencia de aplicar a) a \mathbf{P}^H (o a \mathbf{P}^T).
- Observe que

$$1 = \det \mathbf{I} = \det \mathbf{P}^H \mathbf{P} = (\det \mathbf{P}^H)(\det \mathbf{P}) = |\det \mathbf{P}|^2.$$

Para una \mathbf{P} ortogonal, observe que $\det \mathbf{P}$ es real ya que \mathbf{P} es real.

- $(\mathbf{PQ})^H (\mathbf{PQ}) = \mathbf{Q}^H \mathbf{P}^H \mathbf{PQ} = \mathbf{Q}^H \mathbf{I} \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.
1. $(\mathbf{Px}, \mathbf{Py}) = (\mathbf{Px}^H, \mathbf{Py}) = \mathbf{x}^H \mathbf{P}^H \mathbf{Py} = \mathbf{x}^H \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, y el ángulo entre los vectores se define por su producto interior
2. Esto es consecuencia de e) 1) siendo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $\|\mathbf{P}\|_2$ es igual al supremum de $\|\mathbf{Px}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$, el cual es igual a 1 para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- f) Si $\mathbf{Px} = \lambda \mathbf{x}$, entonces, debido a e) 2),

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{Px}\|_2 = \|\lambda\mathbf{x}\|_2 = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_2;$$

como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, esto da $|\lambda| = 1$.

- g) $\|\mathbf{PA}\|_2$ es igual al supremum de $\|\mathbf{PAX}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$, y por e) 2) esta relación es igual a $\|\mathbf{AX}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$, cuyo supremum es igual a $\|\mathbf{A}\|_2$. $\|\mathbf{BP}\|_2$ es igual al supremum de $\|\mathbf{Bx}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$, y esta relación es igual a

$$\frac{\|\mathbf{Bx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\|\mathbf{By}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2},$$

ya que \mathbf{P} es no singular, y recorre todos los vectores diferentes de cero puesto que \mathbf{x} recorre todos los vectores diferentes de cero, de modo que el supremum de esta última relación es igual a $\|\mathbf{B}\|_2$. ■

El inciso e) es responsable en gran parte de la importancia práctica, computacionalmente, de las matrices unitarias. Interpretada intuitivamente, esta parte dice que la multiplicación por una matriz unitaria no hace grandes a los vectores pequeños (ni hace pequeños a los vectores grandes) y no hace a los vectores “casi dependientes” vectores “más independientes” (ni hace “casi dependientes” a vectores “bastante independientes”). Así, por ejemplo, los errores de medición o modelado pequeños seguirán siendo pequeños bajo la multiplicación por matrices unitarias. Si los datos parecen “bastante independientes” después de haber sido transformados por matrices unitarias, entonces los datos originales también eran “bastante independientes.” Otra razón de la importancia práctica de las matrices *reales* unitarias (esto es, las matrices ortogonales) es que cada una de esas matrices puede calcularse como un producto de matrices ortogonales especiales (“matrices de Householder”) que son especialmente convenientes para trabajos computacionales; se regresará en breve a esto.

Se introdujeron las matrices unitarias con el propósito de efectuar transformaciones de semejanza; ahora se considerará este uso.

- (7.32) **Definición.** Si existe una matriz \mathbf{P} unitaria tal que $\mathbf{P}^H \mathbf{AP} = \mathbf{B}$, entonces se dice que \mathbf{B} es *unitariamente equivalente* a \mathbf{A} y que se obtiene de \mathbf{A} por medio de una *transformación de equivalencia unitaria*. Si \mathbf{P} es *real* y por lo tanto *ortogonal*, entonces se dice que \mathbf{B} es *ortogonalmente equivalente* a \mathbf{A} , y que se obtiene de \mathbf{A} por medio de una *transformación de equivalencia ortogonal*.

Ya que esos conceptos nuevos son casos especiales de la semejanza en general, en este caso serán válidos todos los resultados sobre matrices semejantes.

- (7.33) **Teorema** (semejanza unitaria)

- a) Los resultados de los teoremas 7.22, 7.23 y 7.25 son válidos cuando se

reemplaza la palabra “semejante” por “unitariamente equivalente” (u “ortogonalmente equivalente”) y cuando \mathbf{P}^{-1} se sustituye por \mathbf{P}^H (o por \mathbf{P}^T).

- b) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son unitaria u ortogonalmente equivalentes, entonces $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2$.

DEMOSTRACION

- a) Esto es inmediato ya que la semejanza unitaria es una semejanza.
 b) Si \mathbf{P} es unitaria, también lo será \mathbf{P}^H porque $(\mathbf{P}^H)^H \mathbf{P}^H = \mathbf{P} \mathbf{P}^H = \mathbf{I}$; entonces, del teorema 7.31 g) se obtiene

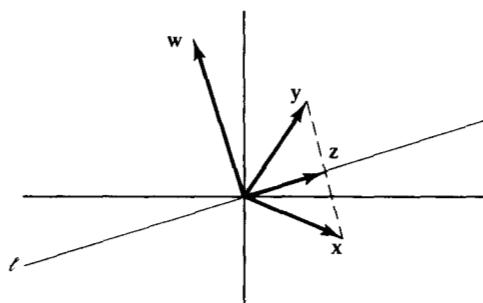
$$\|\mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P}\|_2 = \|\mathbf{P}^H \mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2. \blacksquare$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 9.

Reflexiones de Householder

Como en cualquier matriz, se puede usar una matriz \mathbf{P} unitaria para definir una transformación lineal \mathcal{T} vía $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Px}$. El teorema 7.31 e) afirma que \mathcal{T} preserva longitudes y ángulos. Se considerará ahora una transformación geométricamente sencilla en el plano, que preserva longitudes y ángulos y se demostrará que está, de hecho, descrita por una matriz unitaria *real* (esto es, una matriz ortogonal) de un tipo especialmente importante.

- (7.34) *Ejemplo.* Considere la recta fija ℓ perpendicular a un vector dado \mathbf{w} en el plano. Suponga que se transformará cada vector \mathbf{x} en el plano, *reflexión respecto a ℓ* : esto es, \mathbf{x} se transforma en $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, la imagen de espejo de \mathbf{x}



al lado opuesto de ℓ (véase el diagrama). El vector de \mathbf{x} a \mathbf{y} —esto es, $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ — es claramente perpendicular a ℓ , por lo tanto debe ser un múltiplo de \mathbf{w} :

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \alpha \mathbf{w}.$$

El punto medio \mathbf{z} de este vector debe quedar en ℓ , por lo tanto debe ser perpendicular a \mathbf{w} :

$$\mathbf{w}^T(\mathbf{x} + 0.5\alpha\mathbf{w}) = 0,$$

lo que da $\alpha = -2\mathbf{w}^T\mathbf{x}/\mathbf{w}^T\mathbf{w}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{x} + \alpha\mathbf{w} = \mathbf{x} - (2\mathbf{w}^T\mathbf{x}/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w} = \mathbf{x} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{x} \\ &= \{\mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} \mathbf{x} = \mathbf{H}_w\mathbf{x}\end{aligned}$$

en donde

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T$$

es una matriz 2×2 . Esto es, la transformación \mathcal{T} es, de hecho, la transformación lineal $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_w\mathbf{x}$ definida por la multiplicación por la matriz \mathbf{H}_w , 2×2 . Si, por ejemplo, $\mathbf{w} = [1 \ 2]^T$, entonces $\mathbf{H}_w = \mathbf{I} - \frac{2}{5}\mathbf{w}\mathbf{w}^T$, y así

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Observe que \mathbf{H}_w es simétrica y ortogonal.

La misma clase de transformación tiene sentido en espacios de mayores dimensiones; la reflexión es en la dirección de algún vector \mathbf{w} reflejando sobre el conjunto de vectores ortogonales a \mathbf{w} . Esencialmente, el mismo argumento que el del ejemplo 7.34, demuestra que tales reflexiones elementales también se representan por matrices \mathbf{H}_w .

(7.35) **Definición.** Para \mathbf{w} diferente de cero en \mathbb{R}^p , la *matriz de Householder* $p \times p$, \mathbf{H}_w , se define como

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{I}_p - \left(\frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \right) \mathbf{w}\mathbf{w}^T.$$

En el caso especial del ejemplo 7.34, \mathbf{H}_w fue simétrica y ortogonal. Esto es cierto en general porque

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_w^T\mathbf{H}_w &= \{\mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\}^T \{\mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} \\ &= \{\mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} \{\mathbf{I} - (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} \\ &= \mathbf{I} - (4/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T + (2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})(2/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{w}\mathbf{w}^T \\ &= \mathbf{I} - (4/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T + (4/\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^T \\ &= \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Resumiendo.

(7.36) **Teorema** (matrices de Householder). Sea \mathbf{H}_w la matriz de Householder definida por un \mathbf{w} diferente de cero en \mathbb{R}^p . Entonces:

- \mathbf{H}_w es simétrica.
- \mathbf{H}_w es ortogonal.
- Para cada \mathbf{x} , $\mathbf{H}_w\mathbf{x}$ es igual a la reflexión de \mathbf{x} respecto al subespacio de todas las \mathbf{v} ortogonales a \mathbf{w} .
- $\det \mathbf{H}_w = -1$.
- Para cualquier \mathbf{x} diferente de cero y \mathbf{y} diferente de cero en \mathbb{R}^p siendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existe una \mathbf{H}_w tal que $\mathbf{H}_w\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ para algún número real α . Con mayor exactitud:
 - A menos que \mathbf{x} sea igual a un múltiplo positivo de \mathbf{y} , \mathbf{w} se puede considerar como

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} - \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \mathbf{y} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{H}_w\mathbf{x} = \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \mathbf{y}.$$

- A menos que \mathbf{x} sea igual a un múltiplo negativo de \mathbf{y} , \mathbf{w} se puede considerar como

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \mathbf{y} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{H}_w\mathbf{x} = -\left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \mathbf{y}.$$

DEMOSTRACION

- , b) y c) son consecuencia de lo expuesto anteriormente.
- Sea \mathbf{A} una matriz $p \times p$ no singular cuya primera columna es igual a \mathbf{w} y cuyas columnas restantes son ortogonales a \mathbf{w} ; es posible encontrar tales columnas escogiéndolas como una base del subespacio de vectores ortogonales a \mathbf{w} . Es fácil ver que $\mathbf{H}_w\mathbf{A}$ tiene a $-\mathbf{w}$ como su primera columna y que sus columnas restantes son idénticas, en orden, a las de \mathbf{A} . Por lo tanto,

$$\det(\mathbf{H}_w\mathbf{A}) = -\det \mathbf{A};$$

pero también es igual a $\det(\mathbf{H}_w) \det(\mathbf{A})$. Dividiendo por $\det(\mathbf{A})$ resulta en $\det \mathbf{H}_w = -1$.

- es consecuencia de calcular directamente $\mathbf{H}_w\mathbf{x}$ usando los vectores \mathbf{w} dados; las condiciones sobre la relación de \mathbf{x} y \mathbf{y} garantizan que $\mathbf{w} \neq 0$. ■

El teorema 7.36 e) se usa con frecuencia en las aplicaciones de las matrices de Householder, especialmente para transformar a una \mathbf{x} dada en un múltiplo de \mathbf{e}_1 : $\mathbf{H}_w\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1$. De hecho, la matriz de Householder ‘hace ceros’ los elementos bajo el primero en \mathbf{x} .

(7.37) **Ejemplo.** Considere el vector $\mathbf{x} = [3 \ 4]^T$ y el problema de transformarlo, por

una matriz de Householder, en un múltiplo de \mathbf{e}_1 . Por el teorema 7.36 e) siendo $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1$, es posible considerar, por ejemplo,

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{x} - 5\mathbf{e}_1 = [-2 \quad 4]^T.$$

Esto da

$$\mathbf{H}_{\mathbf{w}} = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{20} \mathbf{w} \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_{\mathbf{w}} \mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1.$$

El problema 13 de la sección 5.9 describió cómo usar el poder de “hacer ceros” de las matrices de Householder para transformar una matriz \mathbf{A} en una matriz triangular superior, multiplicando a \mathbf{A} por una sucesión de matrices de Householder; una pequeña modificación a este proceso (problema 18 de esta sección) basada en el teorema 7.36 e) 1) demuestra la parte a) del siguiente resultado, que es de gran importancia para el cómputo.

(7.38)

Teorema clave (matrices de Householder y QR)

- a) Suponga que \mathbf{A} es $p \times q$ y que es real. Una sucesión $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_q$ de cuando más q matrices de Householder se puede calcular fácilmente (como en el problema 13 de la sección 5.9) de tal manera que

$$\mathbf{H}_q \mathbf{H}_{q-1} \cdots \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R},$$

en donde \mathbf{R} es triangular superior y tiene elementos no negativos en la diagonal principal; igualmente

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R},$$

en donde $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_q$ es $p \times p$ y es ortogonal.

- b) Cada matriz $p \times p$ ortogonal \mathbf{Q} puede escribirse como el producto $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_p$ de cuando más p matrices de Householder.

DEMOSTRACION

- a) Problema 13 de la sección 5.9 y problema 18.

- b) Aplique a) a \mathbf{Q} , de modo que $\mathbf{H}_p \cdots \mathbf{H}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{R}$; \mathbf{R} es ortogonal (porque sus factores son ortogonales), es triangular superior y sus elementos en la diagonal principal son no negativos. La primera columna de \mathbf{R} es algún múltiplo de \mathbf{e}_1 , y esta columna es ortogonal a las restantes columnas de \mathbf{R} ; por lo tanto, el primer renglón de \mathbf{R} tiene ceros en todos los elementos excepto en el primero. Con argumentos semejantes para la segunda columna y el segundo renglón, así como para los restantes, se verá que \mathbf{R} es diagonal. Como $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, los elementos diagonales son +1

$\alpha - 1$; como son no negativos, deben ser iguales a $+1$ —esto es, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Por ello, $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_p$. ■

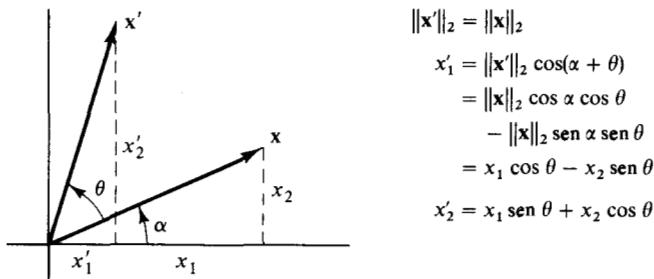
La primera parte del **teorema clave 7.38** es crucial para los procedimientos computacionales más avanzados en áreas tales como los cálculos de mínimos cuadrados y cálculos de eigensistemas. La segunda parte dice que (una sucesión de) las matrices de Householder puede hacer todo lo que hagan las matrices ortogonales en general, y así, ayuda a explicar por qué han llegado a ser indispensables en cálculos matriciales.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 20.

Rotaciones elementales

Si se trata de visualizar una transformación $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$ definida por una matriz unitaria u ortogonal (de modo que preserve longitud y ángulo), probablemente se imaginará algún tipo de rotación de vectores más que imaginarse una reflexión (como se describió por una matriz de Householder). Aunque —a diferencia del caso de las reflexiones— no toda matriz ortogonal puede escribirse como un producto de rotaciones especialmente sencillas (problema 25), las llamadas *rotaciones elementales* son útiles en las aplicaciones.

- (7.39) **Ejemplo.** Considere en \mathbb{R}^2 la transformación \mathcal{T} que cambia cada vector \mathbf{x} rotándolo un ángulo θ medido en la dirección del eje x_1 hacia el eje x_2 (esto es, contra las manecillas del reloj) para obtener $\mathbf{x}' = \mathcal{T}(\mathbf{x})$.



Mediante la trigonometría, se obtienen las fórmulas anteriores para \mathbf{x}' en términos de \mathbf{x} . Debido a que las fórmulas son lineales, es posible escribirlas en notación matricial como $\mathbf{x}' = \mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Px}$, en donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Es sencillo verificar que $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$, por lo tanto \mathbf{P} es ortogonal.

Es posible considerar la misma clase de rotaciones planas sencillas y las matrices que las generan, en mayores dimensiones.

- (7.40) **Definición.** La matriz de rotación elemental $p \times p$: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{kn}(\theta)$ se define por:

- $\langle \mathbf{R} \rangle_{kk} = \langle \mathbf{R} \rangle_{nn} = \cos \theta$.
- $\langle \mathbf{R} \rangle_{kn} = -\operatorname{sen} \theta$ y $\langle \mathbf{R} \rangle_{nk} = \operatorname{sen} \theta$.
- $\langle \mathbf{R} \rangle_{ii} = 1$ siendo $i \neq k$ e $i \neq n$.
- $\langle \mathbf{R} \rangle_{ij} = 0$ para todos los elementos que no sean los definidos en a), b) o c).

Las propiedades de las matrices de rotación elemental se pueden deducir directamente.

- (7.41) **Teorema** (matrices de rotación). Sea $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{kn}(\theta)$ una matriz de rotación elemental $p \times p$. Entonces:

- \mathbf{R} es ortogonal.
- Para cada \mathbf{x} , $\mathbf{R}\mathbf{x}$ es igual al vector que resulta de girar a \mathbf{x} un ángulo θ en el plano $x_k \cdot x_n$ en la dirección del eje x_k hacia el eje x_n .
- $\det \mathbf{R} = 1$.

DEMOSTRACION. Problema 40. ■

Formas de Schur, diagonal y de Hessenberg

En la sección 7.4, después de discutir las transformaciones de semejanza, se dio un avance del resultado del capítulo 9 sobre la forma especial de Jordan a la que se puede reducir toda matriz \mathbf{A} , $p \times p$, mediante una transformación de semejanza; esta forma especial de información sobre la estructura del eigensistema de \mathbf{A} . Se hizo una pausa para discutir las matrices y las semejanzas unitaria y ortogonal debido a los problemas computacionales que surgen con las semejanzas arbitrarias que se evitan mediante estas formas de semejanza. Ahora se estudiarán avances de formas especiales que se pueden producir usando semejanzas unitarias u ortogonales.

(7.42)

Avances del teorema 8.2 y del teorema clave 8.6

- Toda matriz \mathbf{A} , $p \times p$, es unitariamente semejante a una matriz \mathbf{T} en la forma de Schur, que se define como sigue: \mathbf{T} es triangular superior y los eigenvalores de \mathbf{A} , repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas, son los elementos de la diagonal principal de \mathbf{T} . Si \mathbf{A} y sus eigenvalores son reales, entonces \mathbf{A} es ortogonalmente semejante a esa \mathbf{T} .

- b) La forma Schur de toda matriz *normal* \mathbf{A} (una matriz que satisface $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ –por ejemplo, matrices hermitianas y simétricas reales) es diagonal.

La parte b) de este resultado da información sobre el eigensistema de una matriz normal.

- (7.43) **Avances del teorema clave 8.8.** Una matriz $p \times p$ es normal (por ejemplo, simétrica real o hermitiana) si y sólo si \mathbf{A} tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores que se puedan escoger para formar un conjunto ortonormal.

El resultado (7.43) dice que las matrices normales \mathbf{A} , $p \times p$, son precisamente aquéllas que 1) tienen un conjunto completo de p eigenvectores formando una base fácil de usar (esto es, una base ortonormal), 2) cuya transformación $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ puede representarse por una simple matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal, y 3) se puede factorizar en un producto sencillo $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^H$ siendo Λ diagonal y \mathbf{P} unitaria.

Nota. Como en el avance (7.26), esto menciona solamente que tales formas existen; no describe un método constructivo para encontrarlas en la práctica.

Existe una “forma simplificada”, computacionalmente útil, de una matriz \mathbf{A} que puede producirse directamente usando una sucesión de matrices de Householder.

- (7.44) **Teorema** (forma de Hessenberg). Suponga que \mathbf{A} es $p \times p$ que es real. Hay una sucesión de cuando más $p - 2$ matrices de Householder $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{p-2}$ que se calcula y que define fácilmente una semejanza ortogonal

$$(\mathbf{H}_{p-2} \cdots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1) \mathbf{A} (\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_{p-2}) = \mathbf{H}$$

tal que la matriz transformada \mathbf{H} está en la *forma (superior) de Hessenberg*, la cual se define como sigue: \mathbf{H} es casi triangular superior en el sentido de que, solamente, su primera subdiagonal puede contener elementos no cero, esto es, $\langle \mathbf{H} \rangle_{ij} = 0$ para $i \geq j + 2$.

DEMOSTRACION. Problemas 35 y 36. ■

PROBLEMAS 7.5

- 1.** Demuestre que la siguiente matriz es ortogonal, y encuentre su determinante.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

- ▷ **2.** Encuentre números a , b y c de tal manera que \mathbf{P} sea ortogonal, siendo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & a \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & b \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & c \end{bmatrix}.$$

- 3.** Suponga que \mathbf{P} es real. Demuestre que \mathbf{P} es ortogonal si y sólo si \mathbf{P} es unitaria.
- 4.** Suponga que \mathbf{R} y \mathbf{S} son reales. Demuestre que $\mathbf{P} = \mathbf{R} + i\mathbf{S}$ es unitaria si y sólo si $\mathbf{R}^T\mathbf{R} + \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \mathbf{I}$ y que $\mathbf{R}^T\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T\mathbf{R}$.
- ▷ **5.** Demuestre que \mathbf{P} es unitaria si y sólo si \mathbf{P}^H es unitaria.
- 6.** Demuestre que \mathbf{P} es unitaria si y sólo si \mathbf{P}^T es unitaria.
- 7.** Demuestre que \mathbf{P} es ortogonal si y sólo si \mathbf{P}^T es ortogonal.
- ▷ **8.** Suponga que \mathbf{P} es una matriz $p \times p$ unitaria. Demuestre que $1/\sqrt{p} \leq \|\mathbf{P}\| \leq \sqrt{p}$ tanto para la norma 1 como para la norma ∞ .
- 9.** Encuentre el eigensistema de la matriz ortogonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- 10.** Encuentre la matriz 2×2 que refleja los vectores en \mathbb{R}^2 sobre la recta $x_1 = x_2$.
- 11.** Si \mathbf{w} es complejo, demuestre que $\mathbf{I} = (2/\mathbf{w}^H\mathbf{w})\mathbf{w}\mathbf{w}^H$ es unitaria.
- ▷ **12.** Encuentre una matriz Householder \mathbf{H}_w tal que $\mathbf{H}_w\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_2$ en \mathbb{R}^2 .
- 13.** Encuentre una matriz Householder \mathbf{H}_w tal que $\mathbf{H}_w[1 \ 2]^T$ sea un múltiplo de $[2 \ 1]^T$.
- ▷ **14.** El trabajo de multiplicar una matriz \mathbf{P} , $p \times p$, por una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, es generalmente de unas p^3 multiplicaciones y p^3 sumas. Demuestre que \mathbf{PA} puede calcularse con cuando más $2p^2 + p + 1$ multiplicaciones y $2p^2 - 1$ sumas si \mathbf{P} es una matriz de Householder \mathbf{H}_w y si se conoce \mathbf{w} .

15. Para tener acceso a los p^2 elementos de una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, generalmente se requiere de p^2 lugares de almacenamiento. Demuestre que sólo se necesitan p lugares si \mathbf{A} es una matriz de Householder \mathbf{H}_w y si se conoce w .
16. Demuestre el teorema 7.36 e).
- ▷ 17. Demuestre que si los primeros r elementos de w son iguales a cero, entonces los primeros r renglones de $\mathbf{H}_w \mathbf{A}$ son iguales a los primeros r renglones de \mathbf{A} en orden.
18. Modifique el problema 13 de la sección 5.9 a modo de obtener elementos *no negativos* en la diagonal principal de las matrices \mathbf{A}_i usando el teorema 7.36 e) 1) con $y = \mathbf{e}_1$.
19. Como en el **teorema clave 7.38**, premultiplique la siguiente matriz por una sucesión de matrices de Householder para producir una matriz triangular superior \mathbf{R} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- ▷ 20. Haga lo mismo que en el problema 19, pero con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

21. Encuentre la matriz de rotación $3 \times 3 \mathbf{R}_{13}(45^\circ)$.
- ▷ 22. Encuentre la matriz de rotación $3 \times 3 \mathbf{R}_{21}(90^\circ)$.
23. Encuentre la matriz ortogonal $3 \times 3 \mathbf{P}$ tal que la multiplicación por \mathbf{P} sea equivalente a girar *primero* el eje x_1 45° hacia el eje x_3 (véase el problema 21) y a girar *después* el nuevo eje x_2 90° hacia el nuevo eje x_1 (véase el problema 22).
24. Escriba la rotación general de 2×2 , $\mathbf{R}_{12}(\theta)$ como producto de matrices de Householder.
- ▷ 25. Utilice el $\det \mathbf{R}_{kn}(\theta) = 1$ para demostrar que no toda matriz ortogonal es igual a un producto de matrices de rotación elemental.
26. Demuestre que la forma Schur de una matriz no es única considerando \mathbf{A} y $\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. La matriz \mathbf{A} , $p \times p$, define una transformación lineal \mathcal{T} de \mathbb{C}^p a \mathbb{C}^p por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$. Demuestre que hay una base ortonormal de \mathbb{C}^p con respecto a la cual \mathcal{T} se representa por la forma Schur de \mathbf{A} .

- ▷ 28. Demuestre que toda matriz real simétrica es normal.
- 29. Demuestre que toda matriz hermitiana es normal.
- 30. Demuestre que toda matriz unitaria (u ortogonal) es normal.
- ▷ 31. Demuestre que si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal, entonces A es normal.
- 32. Compruebe que cada una de las siguientes matrices es normal y demuestre que sus eigenvectores forman un conjunto ortogonal.
 - a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 - b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 - c) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$
- 33. Demuestre que si A es real y normal y tiene eigenvalores reales, entonces A es simétrica.
- 34. Demuestre que la matriz

$$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene sólo un eigenvector que es linealmente independiente, demostrando que las matrices simétricas *no reales* no necesitan tener un conjunto completo de eigenvectores como sucede con las matrices reales simétricas.

- ▷ 35. Suponga que A es real y que es $p \times p$.
 - a) Demuestre que se puede escoger a w , de $p \times 1$, con $\langle w \rangle_1 = 0$ de tal modo que los elementos en la primera columna de $H_w A$ sean iguales a cero desde el tercer renglón para abajo (pero no necesariamente en los primeros dos renglones).
 - b) Para esta elección de w , demuestre que $H_w A H_w$ tiene la misma estructura que la especificada para $H_w A$.
- 36. Utilice el problema 35 para demostrar que se puede tratar una columna de A cada vez y obtenga una forma de Hessenberg de A como dice el teorema 7.44.
- ▷ 37. Utilice el método del problema 36 para reducir a su forma de Hessenberg

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 38. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar una forma de Hessenberg de la matriz de transición A del modelo del mercado de la leche del ejemplo 2.6.
- 39. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar una forma de Schur de la matriz del problema 38.
- 40. Demuestre el teorema 7.41.

7.6 PROGRAMAS DE COMPUTADORA PARA ENCONTRAR EIGENSTIEMAS

A diferencia de la situación en la resolución de ecuaciones lineales, no se ha discutido el cálculo práctico de eigenvalores y eigenvectores; el tópico es demasiado detallado y especializado para tratarlo en detalle en este libro –véase Golub y Van Loan (46), por ejemplo. Aunque el problema de calcular los eigensistemas es apreciablemente más complicado que el de resolver sistemas lineales, a través de los años los expertos han desarrollado excelentes programas de carácter general de cómputo para la determinación eficiente y exacta de eigensistemas. Como en el caso de las ecuaciones lineales, tales programas están disponibles generalmente gratis o a bajo costo.

Método: el algoritmo QR

Para calcular los eigensistemas, el algoritmo a escoger –análogo a la eliminación de Gauss para las ecuaciones lineales– es el algoritmo *QR* para matrices reales y su extensión, el algoritmo *QZ*, para matrices complejas; se indicará el esquema del método *QR* básico (dejando los refinamientos importantes que lo hacen tan efectivo) para comunicar la idea detrás del método.

(7.45) *Esquema del algoritmo QR básico.*

1. Dada la matriz real \mathbf{A} $p \times p$, utilice $p - 2$ matrices de Householder para calcular la matriz ortogonalmente semejante \mathbf{H} de la forma de Hessenberg como en el teorema 7.44. Defina $\mathbf{A}_1 = \mathbf{H}$ y haga $i = 1$.
2. Utilice p matrices de Householder como en el teorema clave 7.38 para calcular una descomposición *QR* de \mathbf{A}_i , como $\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$, en donde \mathbf{Q}_i es ortogonal y \mathbf{R}_i es triangular superior.
3. Defina $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i$. Si \mathbf{A}_{i+1} converge a una forma \mathbf{T} de Schur como en (7.42), deténgase; en caso contrario, aumente 1 a i y vuelva al paso 2.

A primera vista, este método parece misterioso: ¿por qué definir \mathbf{A}_{i+1} como $\mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i$? Observe que

$$\mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i,$$

de modo que \mathbf{A}_{i+1} es de hecho ortogonalmente semejante a \mathbf{A}_i . (También resulta que \mathbf{A}_{i+1} hereda la forma de Hessenberg de \mathbf{A}_i , lo que reduce el esfuerzo computacional para obtener las descomposiciones *QR*.) Así, todas las matrices \mathbf{A}_i son ortogonalmente semejantes a \mathbf{A} ; si al método básico se le aumenta la potencia propiamente, la sucesión de \mathbf{A}_i converge rápidamente a una forma de Schur \mathbf{T} y \mathbf{A} como en (7.42). Esto proporciona los eigenvalores de \mathbf{A} ; si se desea, se encuentran entonces los eigenvectores (o subespacios invariantes, o eigenvectores seleccionados, o . . .) a partir de \mathbf{T} por procedimientos especiales (ver Golub y Van Loan). En la práctica, los eigenvalores de una matriz $p \times p$ pueden aproximarse por este método, de manera exacta a lo más unas $15 p^3$ –y a menudo

considerablemente menos—operaciones aritméticas. A manera de ejemplo sencillo, se usó MATLAB para generar al azar tanto una matriz de 20×20 como una matriz simétrica de 20×20 ; para cada matriz, se encontraron los eigenvalores con MATLAB con unos $3p^3 = 24,000$ flops (iniciales en inglés para floating-point operations, operaciones de punto flotante) que necesitaron de unos 6 segundos en la microcomputadora para cada matriz, comparados con aproximadamente un segundo para encontrar la inversa de la misma matriz.

¿Qué programas conseguir?

Así como LINPACK es lo estándar para cálculos matriciales que impliquen ecuaciones, EISPACK lo es para cálculos de eigensistemas. Desarrollado en la misma forma cooperativa que LINPACK, pero anterior a él, el programa EISPACK está disponible en varias formas y en varias fuentes comerciales y públicas —de hecho las mismas que para LINPACK (véase la sección 3.9). Se pueden obtener documentos sobre las rutinas del EISPACK en *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide*, 2^a edición (52) y en *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension* (44). Quien desee calcular eigensistemas deberá considerar la posibilidad de obtener el sistema EISPACK.

PROBLEMAS 7.6

1. Determine si el software EISPACK está disponible para usted.
2. Determine qué software puede conseguir para calcular los eigensistemas de:
 - a) matrices simétricas reales
 - b) matrices reales en general
 - c) matrices hermitianas complejas
 - d) matrices complejas en general
3. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar la descomposición QR así como para determinar de inmediato el algoritmo QR (7.45) de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Observe que esta matriz está en la forma de Hessenberg y que cada nueva A_i estará también en la forma Hessenberg; repítalo hasta que A_i sea aproximadamente diagonal. Compare con los eigenvalores encontrados directamente por el MATLAB o algún software semejante.

7.7 CONDICION DEL PROBLEMA DE LOS EIGENSISTEMAS

Recordará de la sección 6.4 la noción general de la *condición* de la respuesta a un problema: cómo cambia la respuesta en comparación a cambios en los datos —como los causados por errores de medición o de modelado. Este tópico es fundamental en cualquier área de las matemáticas aplicadas; se le considerará brevemente con respecto a los eigenvalores y eigenvectores de \mathbf{A} en términos de los cambios en los datos de la matriz \mathbf{A} .

Círculos de Gerschgorin

El siguiente resultado es fundamental para el estudio de la condición del problema de los eigensistemas.

(7.46) **Teorema** (círculos de Gerschgorin)

- a) Todo eigenvalor (real o completo) λ de \mathbf{B} , $p \times p$ $\langle \mathbf{B} \rangle_{ii} = b_{ii}$ satisface cuando menos una de las siguientes desigualdades

$$|\lambda - b_{ii}| \leq r_i, \text{ en donde } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |b_{ij}| \quad (i = 1, \dots, p).$$

Esto es, cada eigenvalor está, por lo menos, en uno de los discos con centro $b_{ii} = \langle \mathbf{B} \rangle_{ii}$ y con radio r_i en el plano complejo.

- b) Si la unión de n de los discos es ajena al resto, entonces habrá precisamente n eigenvalores de \mathbf{B} en esa unión.

DEMOSTRACION

- a) Si λ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ con $\langle \mathbf{x} \rangle_i = x_i$ satisfacen $\mathbf{Bx} = \lambda \mathbf{x}$, entonces,

$$(\lambda - b_{ii})x_i = \sum_{j=1}^p b_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, p),$$

en donde la prima indica que se ha omitido el término para $j = i$. Suponga que x_k tiene el mayor $|x_k|$ para toda x_j , de modo que $|x_j/x_k| \leq 1$ para toda j . Entonces

$$|\lambda - b_{kk}| \leq \sum_{j=1}^p |b_{kj}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j=1}^p |b_{kj}|$$

es válido para todo eigenvalor para algún valor de k , demostrando la primera parte del teorema.

- b) Problemas 9 y 10. ■

(7.47) **Ejemplo.** Considere la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 0.01 & 10 & 10 \\ -0.01 & 1 & 100 \end{bmatrix}.$$

La aplicación directa del teorema del círculo de Gershgorin a la matriz \mathbf{B} muestra que los tres eigenvalores satisfacen

$$|\lambda - 1| \leq 2.1, \quad |\lambda - 10| \leq 10.01, \quad |\lambda - 100| \leq 1.01.$$

Como el tercer disco es ajeno a los demás, habrá precisamente un eigenvalor λ_3 siendo $|\lambda_3 - 100| \leq 1.01$. Sin embargo, como los dos primeros discos se traslapan, solamente es posible concluir que dos eigenvalores quedan en algún lugar de la unión de los dos discos. También se sabe que los eigenvalores de \mathbf{B} y de \mathbf{B}^T son iguales. El teorema de Gershgorin aplicado a \mathbf{B}^T conduce a la existencia de un eigenvalor en cada uno de los tres discos ajenos

$$|\lambda_1 - 1| \leq 0.02, \quad |\lambda_2 - 10| \leq 1.1, \quad |\lambda_3 - 100| \leq 12.$$

Condición del problema del eigenvalor

Considere ahora las perturbaciones que cambian una matriz \mathbf{A} en $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$; suponga que \mathbf{A} , $p \times p$, tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores, de modo que –véase el **teorema clave 7.14**– hay una matriz \mathbf{P} no singular de eigenvectores de \mathbf{A} tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$ en donde Λ es diagonal y contiene los eigenvalores de \mathbf{A} . Entonces

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda + \delta\Lambda,$$

en donde $\delta\Lambda = \mathbf{P}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{P}$ en general, no es diagonal. Como los eigenvalores de matrices semejantes son idénticos, es posible estudiar los eigenvalores de $\Lambda + \delta\Lambda$ en lugar de los de $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$. Como $(\Lambda)_{ii} = \lambda_i$, el i -ésimo eigenvalor de \mathbf{A} , el teorema del círculo de Gershgorin dice inmediatamente que cada eigenvalor λ de $\Lambda + \delta\Lambda$ queda dentro de cuando menos uno de los discos con centro en λ_i con radio dado por la suma de las magnitudes de los elementos no diagonales en el i -ésimo renglón de $\delta\Lambda$ –que cuando más es

$$\|\delta\Lambda\|_\infty \leq \|\mathbf{P}^{-1}\|_\infty \|\delta\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{P}\|_\infty.$$

Esto demuestra la versión en la norma ∞ del siguiente teorema; para las otras normas, véase la segunda edición de este libro, por ejemplo.

(7.48) **Teorema** (condición del problema del eigenvalor). Suponga que \mathbf{A} , $p \times p$, tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ con los eigenvalores asociados λ_i , y que \mathbf{P} es la matriz (no singular)

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p].$$

Si λ es un eigenvalor de la matriz perturbada $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$, entonces λ satisface cuando menos una de las desigualdades

$$|\lambda - \lambda_i| \leq \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{P}\| \|\delta\mathbf{A}\| \quad \text{para } i = 1, \dots, p,$$

en donde $\|\cdot\|$ es cualquiera de las normas 1, 2 o ∞ . En especial, si \mathbf{P} es unitaria u ortogonal –por ejemplo, si \mathbf{A} es real simétrica o hermitiana o más en general normal– de manera que $\|\mathbf{P}\|_2 = \|\mathbf{P}^{-1}\|_2 = 1$, entonces λ satisface cuando menos uno de $|\lambda - \lambda_i| \leq \|\delta\mathbf{A}\|_2$.

Este teorema afirma que la condición del problema de los eigenvalores de \mathbf{A} cuán grande puede ser $|\lambda - \lambda_i|$ en comparación con $\|\delta\mathbf{A}\|$ –depende del factor $\|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}^{-1}\|$, el cual es el número de condición $c(\mathbf{P})$ de la matriz \mathbf{P} de los eigenvectores de \mathbf{A} .

(7.49) *Ejemplo.* Considere cómo cambian los eigenvalores cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

es perturbada a

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ \epsilon & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz \mathbf{A} tiene los eigenvalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, y los eigenvectores asociados $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_1 + 10^{-6}\mathbf{e}_2$. Así, se obtiene que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -10^6 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, –por el teorema 7.48– los eigenvalores λ' de \mathbf{A}' están en los discos

$$|\lambda' - 1| \leq 2(1 + 10^6)\epsilon, \quad |\lambda' - 2| \leq 2(1 + 10^6)\epsilon,$$

indicando perturbaciones muy grandes (comparadas con ϵ). De hecho, para $\epsilon = 0.75 \times 10^{-6}$ los eigenvalores perturbados son precisamente $\lambda'_1 = 0.5$ y $\lambda'_2 = 2.5$, comparados con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$; los eigenvalores han cambiado por aproximadamente $10^6\epsilon$.

Condición del problema del eigenvector

Una discusión detallada de la condición del problema de los eigenvectores está más allá del propósito de este libro. Se examinarán solamente tres ejemplos de la

condición del problema de los eigenvectores de matrices *diagonales* para dar una indicación de la naturaleza de las dificultades implicadas.

(7.50) **Ejemplo.** Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que tiene eigenvectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , y la matriz perturbada

$$\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que tiene eigenvectores \mathbf{e}_1 y $\epsilon\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Entonces los eigenvectores de \mathbf{A} están perturbados por $\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\| = 0$ y por $\|\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2 + \epsilon\mathbf{e}_1)\| = \|\epsilon\mathbf{e}_1\|$ que es de orden ϵ ; observe que en este caso los eigenvectores están bien condicionados.

(7.51) **Ejemplo.** Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 + \delta & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

donde $\delta \neq 0$ que tiene los eigenvectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Considere también la matriz perturbada

$$\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 + \delta & \epsilon \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

con eigenvectores \mathbf{e}_1 y $\mathbf{e}_2 - (\epsilon/\delta)\mathbf{e}_1$. Al perturbar \mathbf{A} por ϵ se perturban sus eigenvectores por 0 y $|\epsilon/\delta|$, lo que es $1/|\delta|$ veces el tamaño de la perturbación en \mathbf{A} . Por ello, la condición de los eigenvectores depende de la separación δ de los dos eigenvalores.

(7.52) **Ejemplo.** Considere las siguientes matrices \mathbf{A} y $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ siguientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \epsilon \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ tiene sólo un eigenvector que es linealmente independiente; digase \mathbf{e}_1 siempre que ϵ sea $\neq 0$. Sin embargo, la matriz \mathbf{A} tiene un conjunto linealmente independiente de dos eigenvectores que pueden escogerse como cualquier conjunto linealmente independiente $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$. Si, por ejemplo, se tiene que $\mathbf{x}_1 = [1 \ 1]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [1 \ -1]^T$, entonces no sólo se ha “perdido” un eigenvector al ir de \mathbf{A} a $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$, sino que también la perturbación en cualquier eigenvector de \mathbf{A} es al menos, de magnitud 1. Si en lugar de esto se hubiera escogido $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, entonces la perturbación en el primer eigenvector de \mathbf{A} hubiera sido $\mathbf{0}$.

Estos tres ejemplos indican que es posible pensar que una matriz con eigenvalores *distintos* y *bien separados* tengan eigenvectores bien condicionados, pero que matrices con eigenvectores repetidos o mal separados tengan, posiblemente, eigenvectores mal condicionados. En realidad éste es generalmente el caso. Para más detalles sobre este tema, ver Golub y Van Loan (46), Stewart (53) o Wilkinson (56).

PROBLEMAS 7.7

- 1.** Utilice el teorema del círculo de Gershgorin para acotar los eigenvalores de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -10^{-5} & 2 \cdot 10^{-5} \\ 4 \cdot 10^{-5} & 0.5 & -3 \cdot 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \cdot 10^{-5} & 0.1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ **2.** Sea \mathbf{S} la matriz diagonal 3×3 $\langle \mathbf{S} \rangle_{11} = \alpha$, $\langle \mathbf{S} \rangle_{22} = \langle \mathbf{S} \rangle_{33} = 1$.
- Encuentre $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ para la matriz \mathbf{B} del problema 1, y encuentre los círculos de Gershgorin para los eigenvalores de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ (que son iguales a los eigenvalores de \mathbf{B}).
 - Escoja a α de tal manera que el radio r_1 del círculo con centro en $\langle \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} \rangle_{11}$ sea tan pequeño como sea posible sin que se traslape este círculo con los otros dos, y entonces localice λ_1 en un círculo tan pequeño como se pueda.
 - Utilice matrices análogas \mathbf{S} para calcular λ_2 y λ_3 .

- 3.** Describa las perturbaciones en los eigenvalores de \mathbf{A} cuando se perturbe a \mathbf{A} por $\delta\mathbf{A}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

- 4.** Utilice el teorema del círculo de Gershgorin para acotar los eigenvalores de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 2 & -0.1 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

- 5.** Utilice el método del problema 2 para refinar las cotas del problema 4.
- 6.** Si λ es un eigenvalor de \mathbf{B} de modo que $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ sea singular, existe un $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (*eigenvector izquierdo*) tal que $\mathbf{y}^T\mathbf{B} = \lambda\mathbf{y}^T$. Utilice esta \mathbf{y} para dar una demostración análoga a la del teorema 7.46 para probar que los eigenvalores λ de \mathbf{B} satisfacen $|\lambda - b_{ii}| \leq r'_i$, en donde r'_i es la suma de la columna análoga a la suma del renglón r_i .
- ▷ **7.** Suponga que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$ es diagonal y que μ y \mathbf{v} son un eigenvalor/eigenvector *aproximado* lo que quiere decir que $\mathbf{r} = \mathbf{Av} - \mu\mathbf{v}$ se considera “pequeño”.
- Demuestre que hay un eigenvalor λ de \mathbf{A} que satisface

$$|\lambda - \mu| \leq \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

en donde $\|\cdot\|$ denota cualquiera de las columnas 1, 2, o ∞ .

- b) Si \mathbf{A} es normal, demuestre que

$$|\lambda - \mu| \leq \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2}.$$

8. Aplique la aproximación del problema 7 b) con $\mu = 1$ y compárela con los eigenvalores verdaderos cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.9 & 1 \\ 1 & 2.1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. Se sabe que las raíces de un polinomio son funciones continuas de sus coeficientes. Demuestre que los eigenvalores de una matriz son funciones continuas de sus elementos.
10. Demuestre el teorema 7.46 b) como sigue. Sea \mathbf{D} la matriz diagonal cuya diagonal principal es igual a la de \mathbf{B} y defina $\mathbf{E} = \mathbf{B} - \mathbf{D}$: defina G_t como la unión de los n discos de Gershgorin en cuestión, pero para la matriz $\mathbf{D} + t\mathbf{E}$ para $0 \leq t \leq 1$. Demuestre que G_0 contiene exactamente n eigenvalores, y utilice el problema 9 para demostrar que G_t siempre contiene exactamente n eigenvalores; G_1 es la región del teorema 7.46 b).
- ▷ 11. Demuestre que si cada uno de los p discos de Gershgorin de una matriz $p \times p$ es ajeno a los demás, entonces cada uno contiene exactamente un eigenvalor; concluya que si además \mathbf{B} es real, entonces los eigenvalores deben ser reales y deben satisfacer $b_{ii} - r_i \leq \lambda \leq b_{ii} + r_i$, empleando la nomenclatura del teorema 7.46.
12. Suponga como en el problema 11, que \mathbf{B} es real y que tiene discos de Gershgorin ajenos. Demuestre que si $b_{ii} > r_i$ para toda i , entonces los eigenvalores de \mathbf{B} son estrictamente positivos.
13. Utilice el problema 11 para dar toda la información posible sobre los eigenvalores de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{bmatrix}.$$

7.8 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 7.8

1. Si \mathbf{A} es $p \times p$ real, demuestre que sus eigenvalores son reales o pares de

complejos conjugados; si además p es impar demuestre que cuando menos hay un eigenvalor real.

- ▷ 2. Demuestre que la matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores x_i cuyo j -ésimo elemento es $\sin\{ij\pi/(n+1)\}$. Deduzca los eigenvalores correspondientes.

3. Demuestre que si A es real y $p \times p$ con p par y $\det A$ estrictamente negativo, entonces A tiene cuando menos dos eigenvalores reales.
 4. Demuestre que el polinomio característico de

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

en donde B y C son cuadradas, es el producto de los polinomios característicos de B y C . Investigue la relación entre los eigenvectores de A , B y C .

- ▷ 5. Demuestre que toda ecuación polinomial es la ecuación característica de alguna matriz. Más específicamente, demuestre que

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} -a_1 - \lambda & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

6. Si A es $p \times p$ con rango k , demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor cuya multiplicidad algebraica es cuando menos $p - k$, y proporcione un ejemplo para demostrar que puede ser mayor que $p - k$.
 7. P es la matriz de permutación $n \times n$ (definición 3.51) para la que $\langle P \rangle_{1n} = 1$ y $\langle P \rangle_{i,i-1} = 1$ para $2 \leq i \leq n$. Demuestre que su polinomio característico es $\lambda^n - 1$. Si se define

$$\mu = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

demuestre que los eigenvectores de P son

$$x_r = [\mu^r \quad \mu^{2r} \quad \cdots \quad \mu^{nr}]^T \quad (r = 1, \dots, n)$$

correspondientes a los eigenvalores μ^{n-r} , respectivamente. Demuestre que éstos son ortogonales. Demuestre que

$$\mathbf{P}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad \mathbf{P}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1.$$

Deduzca que si \mathbf{A} es el *circulante*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & & & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{bmatrix},$$

Entonces $\mathbf{A} = f(\mathbf{P})$ en donde $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$. Deduzca que los eigenvalores de \mathbf{A} están dados por $f(\mu^{n-r})$, $r = 1, \dots, n$, con los eigenvectores correspondientes \mathbf{x}_r definidos anteriormente.

8. Generalizar el teorema clave 7.10 e) demostrando lo siguiente. Suponga que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es una colección de eigenvalores distintos de \mathbf{A} y que para cada i el conjunto $S_i = \{\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{ir_i}\}$ es un conjunto linealmente independiente de eigenvectores asociados con λ_i . Entonces la unión de todas las S_i es linealmente independiente.
- ▷ 9. Pruebe o dé un contraejemplo: si \mathbf{A} es semejante a \mathbf{A}' y \mathbf{B} a \mathbf{B}' (y todas son $p \times p$), entonces \mathbf{AB} es semejante a $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$.
- ▷ 10. Suponga que f es un polinomio.
 - a) Utilice el teorema 7.25 e) para demostrar que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son semejantes y $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, entonces $f(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$.
 - b) Demuestre que si \mathbf{A} es semejante a una matriz diagonal y f es el polinomio característico de \mathbf{A} , entonces $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
- ▷ 11. Suponga que \mathbf{P} es una matriz $p \times p$ para la que $\|\mathbf{Px}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para toda \mathbf{x} . Demuestre que $(\mathbf{Px}, \mathbf{Py}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para toda \mathbf{x} y \mathbf{y} usando el producto interior estándar ya sea para \mathbb{R}^p o para \mathbb{C}^p .
12. Utilice el problema 11 para demostrar que la matriz \mathbf{P} , $p \times p$ es unitaria si y sólo si $\|\mathbf{Px}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para toda \mathbf{x} en \mathbb{C}^p .
13. Suponga que \mathbf{B} es unitariamente semejante a \mathbf{A} . Demuestre que $\mathbf{B}^H\mathbf{B}$ es unitariamente semejante a $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$.

8

Eigensistemas de matrices simétricas, hermitianas y normales, con aplicaciones

En este capítulo se explicará más detalladamente, la teoría señalada en el capítulo 7, concerniente a los eigensistemas de matrices normales. Mediante ella, se desarrollarán algunas herramientas de utilidad para el trabajo aplicado. Los teoremas clave 8.6, 8.8, 8.19 y 8.26 además de los corolarios clave 8.9 y 8.20 serán fundamentales en este desarrollo.

8.1 INTRODUCCION

Quizá reflejando una simetría inherente a la naturaleza, los modelos matemáticos de los problemas del mundo real a menudo producen matrices *simétricas* (o, en general, hermitianas o normales). Considérese, por ejemplo, el problema de las masas oscilantes modelado en la sección 2.5. Aunque el problema mismo no parezca simétrico –por ejemplo, el sistema está fijo arriba y libre abajo–, el modelo conduce a matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} en (2.29) que *son* simétricas.

El problema 9 de la sección 7.2 extendió ese modelo a p masas acopladas por p resortes; una vez más, aparecieron matrices simétricas \mathbf{K} y \mathbf{M} . Las frecuencias naturales de oscilación del sistema son $\omega/2\pi$, en donde $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ es singular. Anteriormente se ha hecho notar que esto significa que $\lambda = \omega^2$ es un eigenvalor de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ (no simétrica); en efecto, es posible reformular esto como un problema de eigenvalor para –una vez más– matrices *simétricas*. Ya que $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_p)$ con $m_i > 0$ se puede escribir $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$, en donde

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_p}).$$

Entonces \mathbf{D} es no singular, y así $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ es singular si y sólo si $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{D}^{-1}$ es singular, esto es, si y sólo si $\lambda = \omega^2$ es un eigenvalor de $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$, y \mathbf{B} es *simétrica*:

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1})^T = (\mathbf{D}^{-1})^T\mathbf{K}^T(\mathbf{D}^{-1})^T = (\mathbf{D}^{-1})\mathbf{K}(\mathbf{D}^{-1}) = \mathbf{B},$$

porque \mathbf{D}^{-1} es diagonal (por lo tanto simétrica) y \mathbf{K} es simétrica. Así, las frecuencias fundamentales del sistema oscilante que son físicamente importantes, se encuentran partiendo de los eigenvalores de la matriz simétrica \mathbf{B} aunque el sistema mismo parezca no simétrico.

- (8.1) **Ejemplo.** Considere el modelo concreto de dos masas acopladas del ejemplo 2.31, en donde se dan las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} . Es fácil encontrar la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$, en donde $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix},$$

Esta matriz ciertamente es simétrica.

La teoría de los eigensistemas de matrices simétricas también es importante por otra razón: proporciona una poderosa herramienta –la descomposición en valores singulares– para su uso con matrices arbitrarias. Los resultados de este capítulo reflejan ambas motivaciones para el estudio de matrices simétricas y sus generalizaciones.

PROBLEMAS 8.1

- ▷ 1. Encuentre la relación entre los vectores ξ que resuelven $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\xi = \mathbf{0}$, y los vectores \mathbf{x} que resuelven $(\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, en donde $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$ y $\mathbf{D}^2 = \mathbf{M}$.
- 2. Encuentre la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$, en donde $\mathbf{D}^2 = \mathbf{M}$, para el sistema de 10 masas acopladas del problema 10 de la sección 7.2, y demuestre que \mathbf{B} es simétrica.
- 3. Encuentre la fórmula general para la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$, siendo $\mathbf{D}^2 = \mathbf{M}$, para el sistema de p masas acopladas del problema 9 de la sección 7.2 y demuestre que \mathbf{B} es simétrica.

8.2 FORMA Y DESCOMPOSICIÓN DE SCHUR; MATRICES NORMALES

Mediante la forma reducida de Gauss y la forma escalón reducido por renglón se vio que las formas especiales a las que puede reducirse cualquier matriz pueden ser en extremo útiles para analizar las propiedades de las matrices. Este también es un método útil para el estudio de los eigensistemas.

Forma de Schur

(8.2) **Teorema** (Forma y descomposición de Schur). Sea $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$.

- a) A es unitariamente semejante a una matriz triangular superior $T = P^H A P$ con P unitaria y con los eigenvalores de A (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas) en la diagonal principal de T . Se llama a T una *forma de Schur* de A y a la descomposición $A = P T P^H$ una *descomposición de Schur* de A .
- b) Si A y sus eigenvalores son reales, entonces se puede considerar a P como real y por lo tanto ortogonal.

DEMOSTRACION. Las dos partes del teorema son claramente ciertas para $p = 1$. Se procederá por inducción, suponiendo que el teorema es válido para $p = k$ y se buscará comprobarlo para $p = k + 1$. Suponga entonces que A es $(k+1) \times (k+1)$. Sea λ_1 un eigenvalor de A asociado al eigenvector x_1 normalizado, de modo que $\|x_1\|_2 = 1$; si A y λ_1 son reales, entonces, por el **teorema clave 7.10 a)** será posible tomar a x_1 como real. Ya que $\{x_1\}$ se puede extender para formar una base para \mathbb{C}^{k+1} (o \mathbb{R}^{k+1} si x_1 es real) y entonces usar el proceso de Gram-Schmidt para producir de $\{x_1\}$ una base ortonormal; hay un conjunto de vectores (reales si x_1 es real) w_1, \dots, w_k tal que $\{x_1, w_1, \dots, w_k\}$ es ortonormal. Entonces la matriz

$$U = [x_1 \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_k] = [x_1 \quad W]$$

es unitaria (ortogonal si x_1 es real). Se calcula ahora $A' = U^H A U$:

$$\begin{aligned} A' &= U^H A U = [x_1 \quad W]^H A [x_1 \quad W] = [x_1 \quad W]^H [A x_1 \quad A W] \\ &= [x_1 \quad W]^H [\lambda_1 x_1 \quad A W] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^H A W \\ \mathbf{0} & W^H A W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

porque $\|x_1\|_2 = 1$ y porque $W^H x_1 = \mathbf{0}$ debido a que U es unitaria. Como A' es semejante a A , los eigenvalores de A y A' son idénticos, incluyendo sus multiplicidades. Desarrollando $\det(A' - \lambda I)$ respecto a su primera columna, se ve que el polinomio característico de A' es igual a $\lambda_1 - \lambda$ veces por el de C ; de este modo los eigenvalores de A , además de λ_1 , son justamente los de C . Pero C es $k \times k$ (y real, si A y λ_1 lo son), por lo tanto es válida la hipótesis inductiva y será posible encontrar una V unitaria (ortogonal si A y sus eigenvalores son reales), de modo que $V^H C V = T'$ siendo T' triangular superior con los eigenvalores de C (y por lo tanto de A) en su diagonal principal. Si ahora se define P como

$$P = U \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{bmatrix}, \text{ entonces } P^H A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H V \\ \mathbf{0} & T' \end{bmatrix},$$

la cual tiene la forma apropiada y de este modo demuestra que la hipótesis inductiva es válida para $p = k + 1$. Por lo tanto es verdadera para toda p . ■

Observe que éste es un teorema de existencia, el cual no dice, sin embargo, que T se calcule fácilmente; en la práctica, es necesario conocer los eigenvalores para obtener T . No obstante, es una poderosa herramienta teórica. Ahora se expresará este teorema en términos de representaciones de transformación en lugar de en términos de descomposiciones o semejanzas {véase (7.19)}.

- (8.3) **Corolario** (representaciones de Schur). Si \mathcal{T} es la transformación lineal de \mathbb{C}^p a \mathbb{C}^p definida por $\mathcal{T}(v) = Av$, entonces hay una base ortonormal de \mathbb{C}^p con respecto a la cual \mathcal{T} se representa por una forma de Schur de A .
- (8.4) **Ejemplo.** Considérese la matriz de transición A del modelo de competencia entre lecherías del ejemplo 2.6 de la sección 2.2; en el ejemplo 7.2 de la sección 7.1 se encontraron los eigenvalores y eigenvectores de A . Para construir una forma de Schur, se empezará con A , λ_1 y una x_1 normalizada:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0.6, \quad y \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede usar a x_1 como la primera columna de una matriz unitaria, digamos

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

en donde se han escogido las dos últimas columnas de Q de la manera más sencilla posible para hacer a Q unitaria; entonces se calcula

$$A_1 = Q^H A Q = \begin{bmatrix} 0.6 & \begin{array}{c|cc} 0.1 & -0.1\sqrt{2} \\ 0 & 0.9 & 0.2\sqrt{2} \\ 0 & 0.1\sqrt{2} & 0.6 \end{array} \end{bmatrix}.$$

A continuación se considerará a la submatriz 2×2 indicada anteriormente, que es

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2\sqrt{2} \\ 0.1\sqrt{2} & 0.6 \end{bmatrix},$$

de la cual se encuentra fácilmente que tiene un eigenvalor $\lambda = 1$ con un eigenvector asociado normalizado

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Se agrega, como una segunda columna, el vector ortogonal normalizado más sencillo en que se pueda pensar para obtener una matriz unitaria

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix};$$

finalmente, se usa la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

para obtener la matriz unitaria semejante a A_1 , que da la forma triangular deseada para A

$$\begin{bmatrix} 0.6 & \frac{0.1\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -0.1\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Matrices normales

El teorema 8.2 es sorprendentemente útil: contiene información importante sobre el eigensistema de una matriz simétrica (**corolario clave 8.9**). De hecho, permite analizar el eigensistema de una clase más amplia de matrices que las simétricas.

(8.5) **Definición.** Una matriz *normal* es una matriz $A, p \times p$, que satisface $A^H A = AA^H$.

Ciertamente, las matrices hermitianas ($A^H = A$) y su caso especial de matrices reales simétricas ($A^T = A$) son normales, porque tanto $A^H A$ como $A A^H$ son iguales a A^2 . De manera semejante, las matrices unitarias son normales ($A^H A$ y $A A^H$ son ambas iguales a I). Se usará ahora la forma de Schur de matrices normales para obtener un resultado notable.

- (8.6) **Teorema clave** (forma diagonal). Una matriz A , $p \times p$, es normal (por ejemplo, simétrica real, hermitiana o unitaria) si y sólo si A es unitariamente semejante a una matriz (forma de Schur) diagonal $D = P^H A P$, en donde P es unitaria y D es diagonal con los eigenvalores de A (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas) en la diagonal principal de D ; si A y sus eigenvalores son reales, entonces P se puede considerar como real y por lo tanto ortogonal.

DEMOSTRACION. (forma diagonal \Rightarrow normal) Si existe P unitaria tal que $P^H A P = D$ diagonal, entonces ciertamente A es normal porque las matrices diagonales comutan:

$$\begin{aligned} A^H A &= (P D P^H)^H (P D P^H) = P D^H P^H P D P^H = P D^H D P^H = P D D^H P^H \\ &= P D P^H P D^H P^H = (P D P^H)(P D P^H)^H = A A^H. \end{aligned}$$

(normal \Rightarrow forma diagonal) Suponga que A es normal, y sea T una forma de Schur, donde $P^H A P = T$. T también es normal:

$$T^H T = (P^H A P)^H (P^H A P) = P^H A^H A P = P^H A A^H P = (P^H A P)(P^H A P)^H = T T^H,$$

como se necesitaba. Si t_{ij} es $\langle T \rangle_{ij}$, se tiene que $t_{ij} = 0$ para $i > j$. Como $T T^H = T^H T$, sus elementos (i, i) son iguales. Se tiene entonces

$$\langle T T^H \rangle_{ii} = |t_{ii}|^2 + |t_{i,i+1}|^2 + \cdots + |t_{ip}|^2,$$

mientras que también

$$\langle T^H T \rangle_{ii} = |t_{1i}|^2 + |t_{2i}|^2 + \cdots + |t_{ii}|^2.$$

Igualando esas dos expresiones y restanto el término común $|t_{ii}|^2$ de cada lado, nos da

$$|t_{i,i+1}|^2 + \cdots + |t_{ip}|^2 = |t_{1i}|^2 + \cdots + |t_{i-1,i}|^2$$

para toda i . Si se hace $i = 1$ en esta igualdad, se obtendrá 0 en el lado derecho ya que no tiene términos; entonces en el lado izquierdo $t_{12} = t_{13} = \cdots = t_{1p} = 0$. Si entonces se hace $i = 2$, se obtendrá $|t_{12}|^2$ del lado derecho, que es igual a cero; entonces $t_{23} = t_{24} = \cdots = t_{2p} = 0$. Continuando de este modo se demuestra que, en efecto, T es diagonal, y así se

podrá considerar a $\mathbf{D} = \mathbf{T}$. La observación de la realidad de \mathbf{P} es consecuencia de la misma observación para la forma de Schur. ■

Como de costumbre, es posible interpretar inmediatamente cualquier resultado de descomposición o semejanza de este tipo de términos de representaciones de transformaciones.

- (8.7) **Corolario** Suponiendo que \mathcal{T} es la transformación lineal de \mathbb{C}^p a \mathbb{C}^p definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$, entonces \mathcal{T} se representa por una matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal si y sólo si \mathbf{A} es normal.

Desde luego, también es posible interpretar inmediatamente este resultado en términos de eigensistemas de matrices normales. Esta forma del teorema es tan importante que se colocará en una sección especial para darle énfasis.

PROBLEMAS 8.2

1. Demuestre que una matriz $p \times p$ triangular superior ya está en la forma de Schur.

- ▷ 2. Como en el ejemplo 8.4, encuentre una forma de Schur de la matriz del problema 2 de la sección 7.2.
3. Como en el ejemplo 8.4, encuentre una forma de Schur de la matriz del problema 1 de la sección 7.2.
4. Como en el ejemplo 8.4, encuentre una forma de Schur de la matriz \mathbf{A}^T , en donde la matriz \mathbf{A} es como la del ejemplo.
5. Demuestre que la forma de Schur no es única, demostrando que \mathbf{A} y $\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P}$ ($\neq \mathbf{A}$) son formas de Schur de \mathbf{A} , en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 6. Demuestre que las matrices antihermitianas ($\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$) son normales.
7. Suponga que \mathbf{A} , $p \times p$ es triangular superior pero definitivamente no diagonal; demuestre que \mathbf{A} no es normal.
8. Si los eigenvalores de la siguiente matriz normal \mathbf{A} son 9, 9, -3, encuentre una forma de Schur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

▷ 9. Determine si \mathbf{A} es normal y encuentre una forma de Schur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

▷ 10. Demuestre que \mathbf{A} es normal (pero no simétrica, ni hermitiana, ni unitaria, ni antihermitiana) y encuentre una forma de Schur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Para cada una de las matrices \mathbf{A} de los problemas 8, 9 y 10, encuentre una base ortonormal y una matriz diagonal \mathbf{D} tal que la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ se represente por \mathbf{D} con respecto a esa base (usada en el dominio y en el contradominio).

8.3 EIGENSTEAMS DE MATRICES NORMALES

Recuerde de (7.19) que las afirmaciones sobre descomposiciones/semejanzas, representaciones de transformaciones y eigensistemas son todas equivalentes. Se interpretará el **teorema clave 8.6** así como su corolario en la versión restante: eigensistemas.

(8.8) **Teorema clave** (normalidad y eigensistemas) Una matriz $\mathbf{A}, p \times p$ es normal (por ejemplo, simétrica real, hermitiana o unitaria) si y sólo si \mathbf{A} tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores que pueden escogerse para formar un conjunto ortonormal.

DEMOSTRACION. Es consecuencia inmediata de los **teoremas clave 8.6 y 7.14** (sobre descomposiciones y eigenvectores). ■

(8.9) **Corolario clave** (eigensistemas de matrices hermitianas). Los eigenvalores de una matriz hermitiana $\mathbf{A}, p \times p$ (o simétrica real) y los eigenvectores asociados se pueden escoger de modo que formen un conjunto ortonormal de p vectores.

DEMOSTRACION. La segunda parte es consecuencia de la normalidad de \mathbf{A} por el **teorema clave 8.8**. Debido a que es posible escribir $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^H$ con \mathbf{D} diagonal que contiene los eigenvalores en la diagonal principal y como $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$, se tiene que

$$\mathbf{D}^H = (\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P})^H = \mathbf{P}^H \mathbf{A}^H \mathbf{P} = \mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D},$$

y por lo tanto \mathbf{D} es real. ■

- (8.10) **Ejemplo.** Considere la matriz \mathbf{B} , 2×2 del ejemplo 8.1, cuyos eigenvalores dan las frecuencias fundamentales de las masas oscilantes de la sección 2.5. Se encuentra fácilmente que los eigenvalores son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 16$ y que los eigenvectores son $[\sqrt{2} \ 2]^T$ y $[\sqrt{2} \ -1]^T$. Normalizándolos, resulta el conjunto ortonormal $\{\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2\}$ de eigenvectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T.$$

Es necesario hacer un comentario sobre la frase del **teorema clave 8.8** y el **corolario clave 8.9** que afirma que “*pueden escogerse* para que formen un conjunto ortonormal” de eigenvectores. Ya que $c\mathbf{x}$ es un eigenvector para $c \neq 0$ si \mathbf{x} es un eigenvector, desde luego, es posible forzar a los eigenvectores para que se normalicen a 1 en la norma 2. Los eigenvectores asociados con eigenvalores distintos automáticamente serán ortogonales (problema 8), pero los eigenvectores asociados con un eigenvalor múltiple no necesitan ser ortogonales a menos que se les escoja así. Se aclarará este punto con un ejemplo.

- (8.11) **Ejemplo.** Considere la matriz real simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 405\lambda - 2187,$$

con raíces $\lambda_1 = 27$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -9$. las ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan, inmediatamente, y de manera precisa, un eigenvector, como se podría esperar, ya que λ_1 es una raíz simple:

$$\mathbf{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en donde α es una constante arbitraria. Las ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se reducen a una sola ecuación

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$$

La solución general es $x_3 = \beta$ arbitraria, $x_2 = \gamma$ arbitraria, y entonces $x_1 = \gamma + \beta/2$. Así, todos los eigenvectores asociados con $\lambda_2 = \lambda_3$ tienen la forma

$$\mathbf{x} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los dos eigenvectores en esta combinación lineal son linealmente independientes pero no ortogonales entre sí (nótese que son ortogonales a \mathbf{x}_1). Por lo tanto, se deben escoger dos combinaciones lineales distintas de la forma anterior para que sean mutuamente ortogonales. Para la primera se tomará simplemente $\gamma = 1$ y $\beta = 0$ obteniendo $[1 \ 1 \ 0]^T$. Para la segunda, se deben escoger γ y β de tal modo que la resultante $[\gamma + \beta/2 \ \gamma \ \beta]^T$ sea ortogonal a la primera, $[1 \ 1 \ 0]^T$. Esto es, se requiere que $\gamma + \beta/2 + \gamma = 0$, lo que da $\beta = -4\gamma$; tomando $\gamma = 1$ y por lo tanto $\beta = -4$, resulta el otro eigenvector $[-1 \ 1 \ -4]^T$. Normalizando los eigenvectores se obtiene finalmente un conjunto ortonormal de eigenvectores

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right]^T \quad \text{y} \quad \left[\frac{-\sqrt{2}}{6} \quad \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \frac{-2\sqrt{2}}{3} \right]^T \quad \text{para } \lambda_2 = \lambda_3 = -9,$$

junto con

$$\left[\frac{-2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right]^T \quad \text{para } \lambda_1 = 27.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 9.

Solubilidad de ecuaciones

Suponga que \mathbf{A} es $p \times p$. Se sabe que sólo es posible esperar resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{b} arbitraria cuando \mathbf{A} es no singular. Sin embargo, se sabe que, aun siendo \mathbf{A} singular, hay algunas \mathbf{b} para las que se puede resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. La cuestión es: ¿cómo se puede caracterizar a esas \mathbf{b} (además de decir que en el espacio de columnas de \mathbf{A} hay una tautología)? Para matrices normales \mathbf{A} , hay una caracterización elegante.

- (8.12) **Teorema** (matrices normales y solubilidad). Suponga que \mathbf{A} es una matriz normal $p \times p$ que tiene eigenvalores λ_i y un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$. Considere la pregunta de la existencia de una solución \mathbf{x} de $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en donde \mathbf{b} es una matriz $p \times 1$ dada y λ es un número dado. Entonces:
- Si λ no es uno de los eigenvalores, entonces la ecuación tiene una solución única que es

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \frac{(\mathbf{x}_i, \mathbf{b})}{\lambda_i - \lambda} \mathbf{x}_i.$$

- Si λ es uno de los eigenvalores λ_i , entonces la ecuación tiene una solución, si y sólo si \mathbf{b} es ortogonal a todos los eigenvectores asociados

con λ_i . Cuando hay soluciones, habrá infinidad de ellas, y cada una se puede obtener agregando a una solución \mathbf{x} una combinación lineal arbitraria de los eigenvectores asociados a λ_i .

DEMOSTRACION. Como $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ es una base ortonormal, es posible escribir a \mathbf{b} y a las soluciones posibles \mathbf{x} en términos de esos vectores como

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{b})\mathbf{x}_1 + \cdots + (\mathbf{x}_p, \mathbf{b})\mathbf{x}_p \\ \mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{x}_p \quad (\text{en donde se desconocen las } \alpha_i)\end{aligned}$$

de acuerdo al teorema 5.74 sobre bases ortogonales. Entonces la ecuación $\mathbf{b} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}$ es equivalente a

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^p (\mathbf{x}_j, \mathbf{b})\mathbf{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \sum_{j=1}^p \alpha_j\mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^p \alpha_j(\lambda_j - \lambda)\mathbf{x}_j;$$

de aquí que existe una solución $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 = \cdots = \alpha_p\mathbf{x}_p$ si y sólo si

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{b})$$

para $j = 1, \dots, p$. De aquí el teorema se deduce fácilmente. ■

(8.13) **Ejemplo.** Considérese la aplicación del teorema 8.12 cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix},$$

cuyos eigenvalores $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 16$ y los eigenvectores asociados están dados en el ejemplo 8.10. Se considerarán las condiciones para la solución de $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De acuerdo al teorema 8.12, \mathbf{b} debe ser ortogonal a $\mathbf{x}_1 = [\sqrt{3}/3 \quad \sqrt{6}/3]^T$. Esto es,

$$\begin{bmatrix} 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

tiene a una solución si y sólo si $c\sqrt{3}/3 + d\sqrt{6}/3 = 0$ —esto es, $c = -d\sqrt{2}$.

Aplicación: oscilaciones forzadas y resonancia

Como ejemplo de la utilización de este teorema en las aplicaciones, se aplicará a las masas oscilantes de la sección 2.5 cuando éstas se encuentran sujetas a fuerzas externas. Para ser específicos, suponga que una fuerza oscilante se aplica a la masa de abajo y nos preguntamos si todavía habrá una solución oscilante de amplitud fija, como en el caso en el que no hay tal fuerza externa.

Para tener una apreciación de lo que se debe esperar, considere lo que sucede cuando se empieza a empujar a un niño en un columpio. El columpio tiene

una frecuencia natural, y si la frecuencia de los empujones es la misma que la frecuencia natural, será posible lograr que el niño vaya más y más alto (esto es, la amplitud *no* es fija); éste es el fenómeno de *resonancia*. Por otro lado, si empuja a distinta frecuencia, la amplitud de las oscilaciones no crecerá. Se desea ver si el modelo puede indicar algo de esta conducta en el caso de las masas acopladas.

Suponga que se aplica una fuerza oscilante hacia abajo $F \cos(\mu t + \alpha)$ de frecuencia $\mu/(2\pi)$ siendo $\mu \neq 0$ a la masa inferior del caso específico del ejemplo 2.31. Entonces la segunda ecuación de (2.26) se cambia por la adición de este término a su miembro del lado derecho dando

$$\begin{aligned} m_1 X_1'' &= -k_1 X_1 + k_2(X_2 - X_1) \\ m_2 X_2'' &= -k_2(X_2 - X_1) + F \cos(\mu t + \alpha). \end{aligned}$$

Como estas ecuaciones son lineales, su solución general es la suma de dos términos: 1) la solución general del sistema homogéneo (cuando $F = 0$); y 2) una solución particular para F , μ y α específicas. En la sección 2.5, se desarrolló el punto 1) como combinaciones lineales de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ para valores especiales de ω ; véase (2.27).

Para encontrar la solución particular 2), se seguirán buscando soluciones oscilantes de magnitud fija y de frecuencia desconocida $\omega/(2\pi)$ como en (2.27), en donde se deberá determinar $\omega \neq 0$. Sustituyendo las expresiones para X_1 y X_2 en las ecuaciones anteriores, resultan ecuaciones como las inmediatamente anteriores a (2.28), excepto que la segunda ecuación tiene el cero en el miembro del lado derecho, sustituido por $F \cos(\mu t + \alpha)$, que es igual a

$$(F \cos \alpha) \cos \mu t - (F \sin \alpha) \sin \mu t.$$

Con algunos cálculos se demuestra que el único modo en que una combinación lineal no trivial de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ puede ser idénticamente igual a una combinación lineal no trivial de $\sin \mu t$ y $\cos \mu t$ para toda t , es haciendo que $\omega = \mu$ y los coeficientes de las funciones correspondientes deben ser iguales. Igualando los coeficientes correspondientes se llega a (2.28), excepto que la segunda ecuación allí, tiene a $-F \sin \alpha$ en el lado derecho y la cuarta tiene a $F \cos \alpha$. Escribiendo en términos matriciales, se obtiene finalmente el análogo de (2.30) como una combinación particular, usando la nomenclatura de (2.29):

$$(8.14) \quad (\mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}_1 \quad y \quad (\mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{b}_2, \quad \text{donde} \\ \mathbf{b}_1 = [0 \quad -F \sin \alpha]^T \quad y \quad \mathbf{b}_2 = [0 \quad F \cos \alpha]^T.$$

Para ser específicos, se regresará a las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} dadas en el ejemplo 2.31; el ejemplo 2.34 mostró que $\mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{M}$ es no singular excepto cuando $\mu^2 = 4$ o $\mu^2 = 16$. Como $\mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{M}$ es simétrica, es ciertamente normal y se puede aplicar el teorema 8.12. Si $\mu^2 \neq 4$ y $\mu^2 \neq 16$, habrá una solución única $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ a (8.14), lo que significa que $\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\xi} \sin \mu t + \boldsymbol{\eta} \cos \mu t$ es una solución particular de las ecuaciones diferenciales. Agregando esto a la solución general (2.35) del sistema

homogéneo, se demuestra que la solución general de las ecuaciones diferenciales es una combinación lineal de $\sin \mu t$, $\cos \mu t$, $\sin 4t$, $\cos 4t$, $\sin 2t$ y $\cos 2t$. Esto es,

si la frecuencia $\mu/(2\pi)$ de la fuerza aplicada es distinta de cada una de las frecuencias naturales $1/\pi$ y $2/\pi$, entonces el movimiento de las masas acopladas consiste en una combinación lineal de tres oscilaciones de amplitud fija a esas tres frecuencias distintas.

Pero, ¿qué pasa si $\mu^2 = 4$ o $\mu^2 = 16$ (los números que determinan las frecuencias naturales $1/\pi$ y $2/\pi$)? De acuerdo al teorema 8.12, el sistema (8.14) tendrá una solución si y sólo si \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 son ortogonales a los vectores \mathbf{x} para los que $(\mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Es fácil encontrar tales vectores \mathbf{x} de los resultados del ejemplo 8.10; se descubrirá que \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 pueden ser ortogonales a esas \mathbf{x} si y sólo si $F = 0$ (esto es, no hay fuerza aplicada). Como se supone que hay una fuerza aplicada $F \neq 0$, \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 no reúnen las condiciones necesarias para que (8.14) tenga soluciones. Por lo tanto

si la frecuencia $\mu/(2\pi)$ de la fuerza aplicada es igual a cualquiera de las frecuencias naturales $1/\pi$ o $2/\pi$, entonces el movimiento de las masas acopladas no puede consistir en una combinación lineal de oscilaciones de amplitud fija.

Como en el caso del niño y el columpio, éste es el fenómeno de *resonancia*. La fuerza externa se aplica a la frecuencia natural del sistema. Un conocimiento mayor de las ecuaciones diferenciales permitiría demostrar que en este caso hay soluciones que son combinaciones lineales de $t(\cos \mu t)$ y $t(\sin \mu t)$ –soluciones oscilatorias *con amplitudes que crecen sin frontera*.

PROBLEMAS 8.3

- ▷ 1. a) Si \mathbf{A} es $p \times p$, demuestre que λ es un eigenvalor de \mathbf{A} si y sólo si $\bar{\lambda}$ es un eigenvalor de \mathbf{A}^H .
 b) Si \mathbf{A} es normal, demuestre que \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado con el eigenvalor λ de \mathbf{A} si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A}^H asociado con el eigenvalor $\bar{\lambda}$ de \mathbf{A}^H .
- 2. Para la matriz \mathbf{A} siguiente, encuentre un par de eigenvectores que *no sean* ortogonales y un par de ellos que *sean* ortonormales.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 3. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de \mathbf{A} de modo que los eigenvectores formen un conjunto ortonormal,

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 4. Si los eigenvalores de \mathbf{A} siguientes son 9, 9 y -3 , encuentre un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Demuestre que la siguiente matriz es normal (pero no simétrica real, ni hermitiana, ni unitaria y tampoco antihermitiana), y encuentre sus eigenvalores y un conjunto ortonormal de eigenvectores.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Suponga que \mathbf{A} es antihermitiana ($\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$);

a) demuestre que $i\mathbf{A}$ es hermitiana.

b) demuestre que los eigenvalores de \mathbf{A} son imaginarios puros.

- ▷ 7. Demuestre que una matriz normal es hermitiana si y sólo si sus eigenvalores son reales.

8. Usando el problema 1 y suponiendo $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1^H\mathbf{x}_2$, demuestre que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son eigenvalores asociados con los eigenvectores \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 de una matriz normal, entonces \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son ortogonales.

9. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$, en donde $\mathbf{D}^2 = \mathbf{M}$ (véase el problema 2 de la sección 8.1), para \mathbf{K} y \mathbf{M} como en el problema 10 de la sección 7.2; compruebe que los eigenvectores son (aproximadamente) ortogonales.

- ▷ 10. Utilice el teorema 8.12 sobre matrices normales y solubilidad para encontrar las condiciones necesarias y suficientes de b_1 y b_2 para que el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

tenga solución cuando:

a) $\lambda = 1$

b) $\lambda = 3$

11. Utilice el teorema 8.12 sobre matrices normales y solubilidad para encontrar las condiciones necesarias y suficientes para b_1 y b_2 , para que exista una

solución de

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 12. Suponga que A es normal. Utilice el teorema 8.12 sobre matrices normales y solubilidad para demostrar que hay cuando más una solución de $Ax = b$ con b arbitraria si y sólo si al menos hay una solución de $Ax = b$ con b arbitraria.
- 13. Suponga que A , es $p \times p$ y normal. Utilice la proyección ortogonal y el teorema 8.12 para demostrar que cada vector v en \mathbb{C}^p puede escribirse como $v = Ax + h$ para alguna x en \mathbb{C}^p y alguna h que satisfaga a $Ah = 0$.
- 14. Dé los detalles de la deducción (8.14).
- 15. Suponga que en el modelo de oscilaciones forzadas (siendo K y M como en el ejemplo 2.31) se hacen $F = 2$, $\alpha = \pi/4$ y $\mu = 3$. Encuentre ξ y η que resuelvan (8.14).
- 16. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar las frecuencias a las que ocurriría la resonancia cuando se aplicaran oscilaciones forzadas a las 10 masas acopladas del problema 10 de la sección 7.2.

8.4 APPLICACION: DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES

Hasta ahora se han explorado cuando menos dos descomposiciones útiles que emplean matrices unitarias u ortogonales: 1) la descomposición QR , $A = QR$ para A $p \times q$ (hay varias versiones de ésta; compare los **teoremas clave 5.82** y **7.38**); y 2) las descomposiciones de Schur $A = PTP^H$ para A , $p \times p$.

De acuerdo al teorema 6.17 sobre cambio de base y representación, éstas se pueden interpretar como afirmaciones sobre representaciones de la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(v) = Av$ con respecto a varias bases ortonormales 1) \mathcal{T} se representa por R con respecto a la base ordenada ortonormal $\{e_1; \dots; e_q\}$ para el dominio y la base ordenada ortonormal que consiste en las columnas de Q para el contradominio de \mathcal{T} ; y 2) \mathcal{T} se representa por T con respecto a la base ordenada ortonormal que consiste en las columnas de P , que se usa tanto para el dominio como para el contradominio. La primera versión (QR) especifica la base para el dominio pero permite que se pueda escoger la del contradominio para producir una representación sencilla. La segunda (Schur) especifica que se use la misma base tanto para el dominio como para el contradominio. Se examinará ahora qué se puede conseguir por medio de una selección cuidadosa de bases ortonormales no restringidas y posiblemente distintas, tanto para el dominio como para el contradominio. El resultado es de gran importancia práctica.

Descomposición en valores singulares

Esta sección demostrará que toda matriz A , $p \times q$, puede descomponerse como

(8.15) $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$, en donde \mathbf{U} es $p \times p$ y unitaria, \mathbf{V} es $q \times q$ y unitaria, y Σ es $p \times q$ y “diagonal” porque $\langle \Sigma \rangle_{ij} = 0$ a menos que $i = j$, en cuyo caso se escribirá $\langle \Sigma \rangle_{ii} = \sigma_i$, donde σ_i es real y no negativo.

(8.16) **Ejemplo.** Cada una de las matrices siguientes es una Σ del tipo descrito en (8.15):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Antes de demostrar que se puede obtener (8.15), se considerará primero qué significaría si fuera cierto. Se observó primero que $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\Sigma$ significa que $\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ para $1 \leq i \leq \min\{p, q\}$, en donde las columnas de \mathbf{U} y \mathbf{V} son las \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i . También se tendría

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H \mathbf{A} &= (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^H(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H) = \mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H \\ &= \mathbf{V}(\Sigma^H\Sigma)\mathbf{V}^H \quad (\text{ya que } \mathbf{U} \text{ es unitaria}), \end{aligned}$$

en donde $\Sigma^H\Sigma = \mathbf{D} = \mathbf{V}^H(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{V}$ es $q \times q$ y diagonal con elementos reales no negativos en su diagonal principal. De acuerdo con el **teorema clave 8.6**, esto significa que

los eigenvectores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ forman a \mathbf{V} , con los eigenvalores (reales no negativos) asociados en la diagonal de $\mathbf{D} = \Sigma^H\Sigma$.

De modo parecido, se encuentra que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{U}(\Sigma\Sigma^H)\mathbf{U}^H,$$

en donde $\Sigma\Sigma^H = \mathbf{D}' = \mathbf{U}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\mathbf{U}$ es $p \times p$ y diagonal con elementos reales no negativos en su diagonal principal, lo que a su vez significa que

los eigenvectores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ forman a \mathbf{U} , con los eigenvalores (reales no negativos) asociados en la diagonal de $\mathbf{D}' = \Sigma\Sigma^H$.

Los elementos diagonales tanto de $\Sigma\Sigma^H$ y $\Sigma^H\Sigma$ son justamente las σ_i^2 (quizá con algunos ceros agregados), en donde $\langle \Sigma \rangle_{ii} = \sigma_i$.

Estos resultados se pueden usar para construir un método mediante el cual se demuestre que (8.15) se puede lograr: es posible *definir* \mathbf{V} de tal manera que contenga los eigenvectores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$, *definir* las σ_i para que los eigenvalores de

$\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ sean las σ_i^2 , y definir a \mathbf{U} para que contenga los eigenvectores de $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$. Sería necesario entonces demostrar que, verdaderamente, $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$. Como las demostraciones son bastante técnicas, se dará un ejemplo ilustrativo de cómo funcionaría este método.

(8.17) **Ejemplo.** Considere a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ya que

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores (!no negativos!) 18 y 0, se pueden considerar $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, y $\sigma_2 = 0$. Es posible encontrar con facilidad que un par normalizado de eigenvectores de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ sería

$$\mathbf{v}_1 = [\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = [\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2]^T,$$

mediante los cuales se formará $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]$ con la esperanza de obtener (8.15). Igualmente se encontrará que

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores 18 (que es igual a σ_1^2), 0 (que es igual a σ_2^2), y 0. Se encuentran fácilmente los eigenvectores normalizados

$$\mathbf{u}_1 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \right]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \left[-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \quad 0 \right]^T,$$

$$\mathbf{u}_3 = \left[\frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \frac{4\sqrt{5}}{15} \quad -\frac{\sqrt{5}}{3} \right]^T,$$

con los cuales se forma $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$ esperando obtener (8.15). Se comprobará que $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$ y corroborando que realmente lo es:

$$\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Observe también que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ y que $\mathbf{A}^H \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$ siendo $i = 1, 2$.

Note que se puede construir fácilmente la factorización (8.15) en los casos sencillos:

- (8.18)
1. Para una matriz \mathbf{A} , $p \times q$, cero, se tendrá $\mathbf{0} = \mathbf{I}_p \mathbf{0} \mathbf{I}_q^H$, de modo que $\mathbf{U} = \mathbf{I}_p$, $\Sigma = \mathbf{0}$, y $\mathbf{V} = \mathbf{I}_q$.
 2. Para \mathbf{A} , una matriz columna diferente de cero $p \times 1 \mathbf{a}$, es posible usar el proceso Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|_2, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ de \mathbb{C}^p y escribir

$$\mathbf{a} = \mathbf{U}(\|\mathbf{a}\|_2 \mathbf{e}_1)[1]$$

donde $\mathbf{U} = [\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|_2 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_p]$, $\Sigma = \|\mathbf{a}\|_2 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{V} = [1]$.

3. Si es posible obtener una descomposición (8.15) para $\mathbf{A}^H = \mathbf{U}_0 \Sigma_0 \mathbf{V}_0^H$, entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{V}_0$, $\Sigma = \Sigma_0^T$, $\mathbf{V} = \mathbf{U}_0$.

4. Para una matriz renglón \mathbf{A} diferente de cero, se puede aplicar 2) a \mathbf{A}^H y entonces usar 3).

Ahora se procederá formalmente.

- (8.19)
- Teorema clave** (descomposición en valores singulares). Sea \mathbf{A} , $p \times q$.

- a) Existe una matriz \mathbf{U} unitaria $p \times p$ (ortogonal si \mathbf{A} es real), una matriz unitaria \mathbf{V} , $q \times q$ (ortogonal si \mathbf{A} es real) y una matriz $p \times q$ “diagonal” Σ con $\langle \Sigma \rangle_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $\langle \Sigma \rangle_{ii} = \sigma_i \geq 0$ siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s$, en donde $s = \min\{p, q\}$, tal que la descomposición en valores singulares

$$\mathbf{AA}^H = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H \quad (\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \text{ si } \mathbf{A} \text{ es real})$$

es válida.

- b) Los números σ_i^2 conforman los eigenvalores de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ (quizá agregando algunos ceros), y los eigenvectores asociados son las columnas \mathbf{v}_i de \mathbf{V} ; igualmente, las σ_i^2 conforman los eigenvalores de $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ (quizá agregando algunos ceros), y los eigenvectores asociados son las columnas \mathbf{u}_i de \mathbf{U} . Las σ_i se llaman los *valores singulares* de \mathbf{A} , los \mathbf{u}_i se llaman los *vectores singulares izquierdos* de \mathbf{A} ; y los \mathbf{v}_i los *vectores singulares derechos* de \mathbf{A} , que se relacionan por $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ para $1 \leq i \leq s$.

DEMOSTRACION. Suponiendo (8.15) –que aquí es justamente a)– ya se ha deducido b); de modo que sólo será necesario demostrar a). Debido a (8.18) 3) y 1) es posible suponer que $p \geq q$ y que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. En la demostración se hará uso de la inducción: 1) por (8.18) 2) el resultado es válido para matrices $(p - q + 1) \times 1$; 2) se supondrá válido para matrices $(p - q + k) \times k$ y se demostrará válido para matrices $p' \times q'$ en donde $p' = p - q + k + 1$ y $q' = k + 1$.

Suponga que \mathbf{A} es $p' \times q'$ con $p' \geq q'$, que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, y que el teorema es válido para matrices $(p' - 1) \times (q' - 1)$. $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ es hermitiana (de aquí en adelante no se mencionará el caso real explícitamente), diferente de cero y tiene cuando menos un eigenvalor diferente de cero (de otro modo, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$). Si $\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces

$$\lambda\|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^H\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v} = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2,$$

por lo tanto, todos los eigenvalores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ son no negativos; sea λ_1 el mayor eigenvalor positivo, sea $\sigma_1 = +\sqrt{\lambda_1}$, sea \mathbf{v}_1 un eigenvector asociado normalizado, y sea $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{V}_0]$ una matriz unitaria formada por un conjunto ortonormal de eigenvectores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Defínase $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1/\sigma_1$ de modo que $\|\mathbf{u}_1\|_2 = 1$, y sea $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{U}_0]$ una matriz unitaria (supóngase construida mediante el procedimiento Gram-Schmidt). Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \sigma_1\mathbf{u}_1, & \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 &= 1, & \mathbf{U}_0^H\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, & \mathbf{v}_1^H\mathbf{V}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_1^H\mathbf{A}\mathbf{V}_0 &= \left(\frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\sigma_1}\right)^H \mathbf{A}\mathbf{V}_0 = \left(\frac{\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\sigma_1}\right)^H \mathbf{V}_0 = \sigma_1\mathbf{v}_1^H\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Esto da

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}_1^H\mathbf{A}\mathbf{V}_1 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{U}_0]^H\mathbf{A}[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{V}_0] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^H\mathbf{A}\mathbf{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}$$

siendo \mathbf{A}_0 una matriz $(p' - 1) \times (q' - 1)$. Por la hipótesis inductiva,

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{Q}_0^H \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_0^H \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_0 = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

en donde \mathbf{P}_0 y \mathbf{Q}_0 son unitarias. Pero entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_0 \end{bmatrix}^H \mathbf{U}_1^H\mathbf{A}\mathbf{V}_1 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma},$$

como se necesitaba para completar el argumento inductivo. ■

En la práctica, el cálculo de una descomposición en valores singulares de una matriz \mathbf{A} , $p \times q$, se hace con programación de computadora que hace uso de técnicas eficientes –véase la sección 7.6– para encontrar el eigensistema de una matriz simétrica hermitiana; el esfuerzo total involucrado, es generalmente un

múltiplo pequeño de $p^2q + pq^2 + \{\min(p, q)\}^3$ —aproximadamente comparable a varias inversiones de matrices cuando $p = q$.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 12.

Valores singulares y rango

La descomposición en valores singulares contiene gran cantidad de información sobre la matriz A.

- (8.20) **Corolario clave.** Sea A, $p \times q$.
- El rango k de A es igual al número de valores singulares de A diferentes de cero.
 - Los primeros k vectores singulares izquierdos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ forman una base ortonormal para el espacio de columnas de A, esto es, para el contradominio de \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$.
 - Los últimos $q - k$ vectores singulares derechos $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_q$ forman una base ortonormal para el espacio nulo de \mathcal{T} .

DEMOSTRACION. Problemas 13 y 14. ■

De este modo la descomposición en valores singulares se puede usar para determinar el rango de una matriz. Más importante aún es que puede usarse para analizar los diferentes rangos que podría tener A si sus elementos estuvieran sujetos a errores (por ejemplo, errores de medición o de modelado). Se vio el ejemplo en 6.31 que el número de factores independientes en una reacción química puede determinarse como el rango de cierta matriz que presenta concentraciones medidas de aquélla, y se vio cómo los errores en esas mediciones podrían ocasionar el creer que el rango es mayor de lo que en realidad pudiera ser. Esto se trató al buscar el rango mínimo de todas las matrices $\mathbf{C} + \delta\mathbf{C}$, en donde las perturbaciones $\delta\mathbf{C}$ de la matriz de concentraciones \mathbf{C} deberían ser menores que los errores que se creían inherentes a las mediciones. El siguiente teorema, cuya prueba se omite, es la base para encontrar el rango mínimo.

- (8.21) **Teorema** (rango aproximado y valores singulares). Sea A una matriz $p \times q$, y rango k. Consideremos, utilizando la misma notación del **teorema clave 8.19** una descomposición de A en valores singulares.
- Para una $r < k$ dada, la matriz \mathbf{A}_r de rango r que hace mínimo a $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|_2$ entre todas las matrices $p \times q$, A', de rango r está dada por

$$\mathbf{A}_r = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^H + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^H,$$

y el mínimo es $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_r\|_2 = \sigma_{r+1}$.

- b) Para una $\epsilon > 0$ dada, la matriz A_{\min} de rango mínimo entre todas las matrices A' que satisfacen a $\|A - A'\|_2 \leq \epsilon$ es igual a la A_r de a), en donde $\sigma_{r+1} \leq \epsilon$ pero $\sigma_r > \epsilon$.

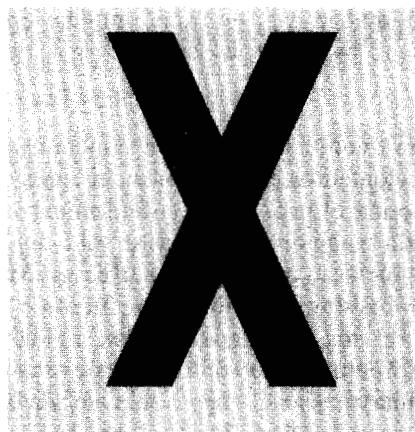
M (8.22) *Ejemplo.* Considérese nuevamente la matriz de concentraciones C del ejemplo 6.31, en donde los elementos están sujetos a errores experimentales de magnitud 0.015 y donde el problema es determinar el número de factores independientes en la reacción estudiada; se sabe que este número es igual al rango de C si se hicieran mediciones perfectas. Mediante MATLAB se calcularon los valores singulares de C , que fueron $\sigma_1 = 9.5213$, $\sigma_2 = 0.0071$ y $\sigma_3 = 0.0023$. Por el corolario clave 8.20, la C medida tiene rango $k = 3$; sin embargo, por el teorema 8.21 hay una matriz de rango 2 solamente a una distancia de 0.0023 y una matriz de rango 1 sólo alejada 0.0071, ambas distancias medidas en la norma 2. Como ningún elemento de una matriz A puede ser más grande que $\|A\|$ en cualquiera de las normas 1, 2 o ∞ (porque $\|Ae_i\| \leq \|A\|$), los elementos de esas matrices de rango 2 y rango 1 están dentro de los límites del error experimental de los ya medidos en C . Sólo se puede decir con seguridad que el rango de la matriz de concentraciones perfectamente medidas C es cuando menos uno, y así, sólo se puede confiar en que haya un factor independiente en la reacción química. Nótese que podría ser razonable *reemplazar* a C por la matriz $C_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T$, la aproximación más cercana de rango 1:

$$C_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T = \begin{bmatrix} 1.0193 & 2.0280 & 4.2011 \\ 0.2567 & 0.5107 & 1.0580 \\ 1.7395 & 3.4610 & 7.1696 \end{bmatrix},$$

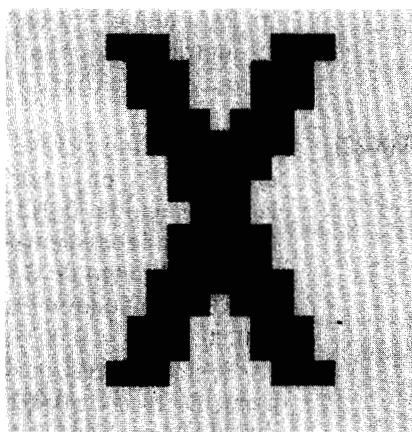
que queda, en realidad, dentro del error de medición de la C medida.

La capacidad de la descomposición en valores singulares para decir cómo obtener aproximaciones de bajo rango a una matriz dada, puede ser útil en la compresión de datos –por ejemplo al enviar fotografías desde el espacio. Considérese una cámara en un satélite lejos de la Tierra; ¿cómo se pueden transmitir hacia acá miles de fotos? Cada foto se puede *discretizar* o *digitalizar* dividiendo la imagen en muchos cuadrados pequeños y asignando un tono de gris a cada uno de ellos. Por ejemplo, se podría hacer sobre la foto un cuadriculado de 1000×1000 y asignar un tono de gris de 0 a 10 para cada cuadro pequeño, mandar a la Tierra el 1,000,000 de enteros para cada foto, y entonces reconstruir la foto en la Tierra.

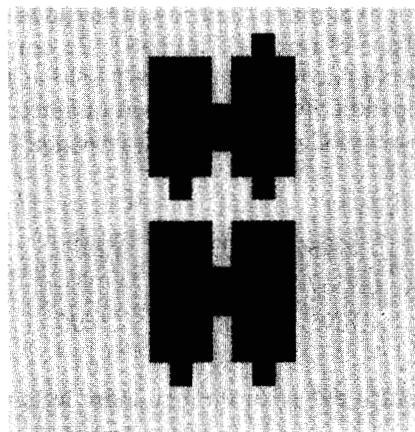
El problema con este esquema es el envío de 1,000,000 de datos para cada foto, cuando fácilmente puede haber miles de fotos ligadas a otros datos. Se necesita un método para comprimir los datos con objeto de transmitir una cantidad más pequeña. Un método es encontrar la descomposición en valores



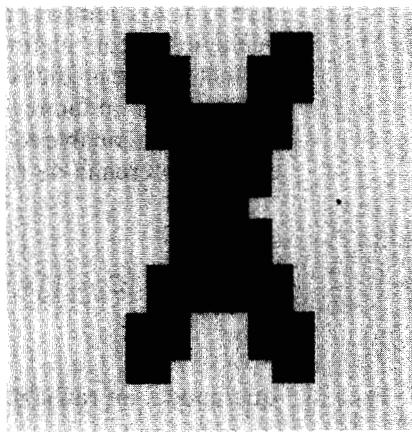
a) IMAGEN ORIGINAL



b) IMAGEN DISCRETIZADA



c) RECONSTRUCCION, GRADO 1



d) RECONSTRUCCION, GRADO 2

singulares de la matriz $1000 \times 1000 \mathbf{B}$ de tonos de grises y ver si una aproximación de bajo rango

$$\mathbf{B}_r = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$$

representaría adecuadamente la imagen; ésta podría transmitirse a la Tierra *no explícitamente como \mathbf{B}_r , sino en la forma de los $2r$ vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i y los r números σ_i* . Si $r = 5$ es suficiente para reconstruir la foto, por ejemplo, sólo $2 \times 5 \times 1000 + 5 = 10,005$ datos son necesarios por fotografía en vez del 1,000,000 –un ahorro de casi 99%.

- (8.23)** *Ejemplo.* Se considerará un ejemplo burdo y sencillo del método que se acaba de discutir. Suponga que la primera \mathbf{X} de la figura que en el original aparece en la página 382 es una foto de un objeto en forma de X, y sólo se permiten blanco y negro en la escala de grises. Se sobrepone un reticulado tosco de 20×20 sobre la foto, y asignando el valor 1 (negro) a cada cuadro que cuando menos sea la mitad negro y el valor 0 en caso contrario. Esto da una versión discretizada de la foto, con $20(20) = 400$ elementos. Si se transmitieran perfectamente esos 400 elementos y entonces se construyera una foto aproximada haciendo todo el cuadro negro si su valor fuera 1, se obtendría la segunda \mathbf{X} de la figura. Se desea, sin embargo, enviar una menor cantidad de datos; y el problema es si es posible hacerlo y obtener una foto reconstruida que sea tan cercana a la primera \mathbf{X} (la foto perfecta) como lo es la segunda \mathbf{X} . Mediante MATLAB se calcularon los valores singulares de la matriz \mathbf{B} , 20×20 , que representaba a los tonos aproximadamente como $\sigma_1 = 7.3$, $\sigma_2 = 4.6$, $\sigma_3 = 2.2$, $\sigma_4 = 1.7$, $\sigma_5 = 0.8$, $\sigma_6 = 0.7$, $\sigma_7 = 0.5$, y las otras $\sigma_i \approx 0.0000$. Así, el rango de \mathbf{B} , calculado con MATLAB es igual a 7. La aproximación de rango 1 más cercana a \mathbf{B} es

$$\mathbf{B}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T, \quad \text{y} \quad \|\mathbf{B} - \mathbf{B}_1\|_2 = \sigma_2 = 4.6;$$

la información en \mathbf{B}_1 está contenida en los 41 números de σ_1 , \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1 . Si se calcula \mathbf{B}_1 y se pinta de negro cualquier cuadro que tenga un elemento correspondiente en \mathbf{B}_1 de cuando menos $\frac{1}{2}$, se obtiene la forma escindida de la figura, la cual no es satisfactoria. Sin embargo, hay una matriz \mathbf{B}_2 de rango 2, $\mathbf{B}_2 = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$ que requiere sólo 82 números y con $\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_2\|_2 = \sigma_3 = 2.2$. Si se reconstruye análogamente la foto con \mathbf{B}_2 , se obtiene la foto final de la página 382. Tiene claramente la forma de X y parece bastante cercana a la versión discretizada de la foto verdadera (ver nuevamente la segunda \mathbf{X}); de hecho, esta reconstrucción de rango 2 sólo omite cuatro cuadros que debería haber ennegrecido y ennegrece sólo cuatro que no debería. Ocho errores en cuatrocientos cuadros –98% correcto –parece una representación adecuada.

PROBLEMAS 8.4

1. Compruebe que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ en el ejemplo 8.17.
- ▷ 2. Encuentre una descomposición en valores singulares de
- $[1 \ 2 \ -2]^T$
 - $[-4 \ 12 \ 3]$

3. “Derecho” en “vectores singulares derechos \mathbf{v}_i ” se refiere a $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$. Demuestre que $\mathbf{u}_i^H \mathbf{A} = \sigma_i \mathbf{v}_i^H$, como acepción de “izquierdo”.

- ▷ 4. En la demostración del teorema clave 8.19 con \mathbf{A} diferente de cero se afirma que $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y que $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ tiene cuando menos un eigenvalor diferente de cero. Demuestre esas afirmaciones.
- 5. Suponga que \mathbf{A} es $p \times q$. Demuestre que hay bases ortonormales para \mathbb{C}^q y \mathbb{C}^p con respecto a las cuales la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ se representa por la matriz Σ de una descomposición en valores singulares de \mathbf{A} .
- 6. Encuentre una descomposición en valores singulares de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 7. Utilice la descomposición en valores singulares para demostrar que $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$.
- 8. La *norma de Frobenius* $\|\mathbf{A}\|_F$ de una matriz \mathbf{A} , $p \times q$, se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las magnitudes de todos los elementos de \mathbf{A} .
 - a) Demuestre que $\|\mathbf{A}\|_F \geq 0$, y que $\|\mathbf{A}\|_F = 0$ si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, que $\|\alpha\mathbf{A}\|_F = |\alpha|\|\mathbf{A}\|_F$, y que $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F + \|\mathbf{B}\|_F$.
 - b) Calcule $\|\mathbf{I}_p\|_F$ y deduzca que $\|\cdot\|_F$ no puede ser una norma de transformación inducida por normas vectoriales.
- 9. Sea \mathbf{A} , $p \times q$, y sean \mathbf{U} y \mathbf{V} unitarias. Demuestre que

$$\|\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{U}\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A}\mathbf{V}\|_F = \|\mathbf{UAV}\|_F,$$

en donde $\|\cdot\|_F$ está definida en el problema 8.

- ▷ 10. Utilice el problema 9 para demostrar que $\|\mathbf{A}\|_F^2$ es igual a la suma de los cuadrados de los valores singulares de \mathbf{A} .
- 11. Suponga que por razones teóricas se sabe que cierta matriz \mathbf{Q}_0 debería ser unitaria, pero por errores de medición se ha producido una \mathbf{Q}_0 que no lo es. Demuestre que la matriz unitaria \mathbf{Q}_1 que hace mínima a $\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0\|_F$ de entre todas las matrices unitarias \mathbf{Q} es $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{UV}^H$ si $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ es una descomposición en valores singulares de \mathbf{Q}_0 .
- ▷ 12. Como en el problema 11, encuentre las matrices unitarias \mathbf{Q}_1 más próximas a cada una de las matrices \mathbf{Q}_0 .

a) $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$.

- 13. Demuestre el corolario clave 8.20 a) sobre el rango y los valores singulares.
- 14. Demuestre el corolario clave 8.20 b) y c) sobre vectores singulares y bases.

- M 15.** Utilice MATLAB o algún software semejante para calcular la aproximación de rango 3, \mathbf{B}_3 , a la matriz de los tonos del ejemplo 8.24 y reconstruya la foto mediante \mathbf{B}_3 .
- M 16.** Haga una discretización 40×40 de la \mathbf{X} del ejemplo 8.23 y mediante MATLAB o algún software semejante calcule aproximaciones de bajo rango a la fotografía para ver cuán buena aproximación se puede obtener usando poca información.
- M 17.** Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar las matrices de rango 5 y de rango 2 más cercanas a la matriz \mathbf{H}_6 del ejemplo 5.84.

8.5 APLICACION: MINIMOS CUADRADOS Y PSEUDOINVERSA

Los problemas de mínimos cuadrados son centrales en la modelación matemática. Por ejemplo, desde el capítulo 2 se vio que una buena técnica para encontrar una recta que quedara lo más cerca posible de algunos puntos dados, era la de plantear el problema en términos de mínimos; véase la sección 2.6. Este fue un caso de un fenómeno general: se tiene un modelo que depende de varios parámetros que deben determinarse para modelar, tan exactamente como sea posible, el comportamiento real de algún sistema en el pasado. El problema 12 de la sección 2.6 es de este tipo: se pide encontrar los elementos de la matriz de transición para el modelo de competencia entre lecherías de la sección 2.2, para que el modelo corresponda a los datos sobre la forma en que han cambiado realmente las partes del mercado. El problema 22 de la sección 5.9 es también de este tipo.

Más generalmente, el problema es determinar los parámetros \mathbf{x} para que la predicción \mathbf{Ax} del modelo sea cercana a los datos medidos \mathbf{b} . Con mínimos cuadrados, se busca encontrar la \mathbf{x} que minimiza $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ entre todas las \mathbf{x} posibles, en donde \mathbf{A} es una matriz $p \times q$ dada, \mathbf{b} es una matriz $p \times 1$ dada, y \mathbf{x} es $q \times 1$ e incógnita. El problema 26 de la sección 5.9 afirmó que \mathbf{x} resuelve esto si y sólo si $\mathbf{A}^H \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$; como se mostró en el problema 26 de la sección 5.9, sin embargo, éste puede ser un mal método computacionalmente. En esa sección se demostró que un método mucho mejor puede basarse en la descomposición QR normalizada de \mathbf{A} : escriba \mathbf{A} , $p \times q$, de rango k , como $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ en donde \mathbf{Q} es $p \times k$ y tiene columnas ortonormales, y \mathbf{R} es de $k \times q$, triangular superior y de rango k , y entonces \mathbf{x} es solución de $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H \mathbf{b}$ –la cual se puede resolver por una sencilla sustitución. Se considerará ahora otro método para resolver problemas de mínimos cuadrados que es igualmente efectivo.

Descomposiciones en valores singulares y mínimos cuadrados

Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ es la descomposición en valores singulares del teorema clave 8.19 para la matriz \mathbf{A} , $p \times q$, de rango k . Se considerará el problema de hacer

mínima a $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ con respecto a \mathbf{x} . Por el teorema 7.31 sobre matrices unitarias, es posible escribir

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \|\Sigma\mathbf{y} - \mathbf{U}^H\mathbf{b}\|_2,$$

en donde $\mathbf{y} = \mathbf{V}^H\mathbf{x}$ es la nueva variable con respecto a la cual se está minimizando. Por lo tanto, \mathbf{x} minimiza $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ si y sólo si \mathbf{y} ($= \mathbf{V}^H\mathbf{x}$) hace mínima a $\|\Sigma\mathbf{y} - \mathbf{b}'\|_2$, donde \mathbf{b}' denota a $\mathbf{U}^H\mathbf{b}$. Pero

$$\begin{aligned}\|\Sigma\mathbf{y} - \mathbf{b}'\|_2^2 &= |\sigma_1 y_1 - b'_1|^2 + \cdots + |\sigma_k y_k - b'_k|^2 \\ &\quad + |b'_{k+1}|^2 + \cdots + |b'_{p+1}|^2,\end{aligned}$$

en donde $y_i = \langle \mathbf{y} \rangle_i$ y $b'_i = \langle \mathbf{b}' \rangle_i$. Esta ecuación se minimiza haciendo cero tantos términos como sea posible: $y_i = b'_i/\sigma_i$ para $1 \leq i \leq k$ y y_i arbitraria para $k+1 \leq i \leq q$. Como $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{V}\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$, la \mathbf{x} que tiene la mínima norma entre todas las soluciones al problema de mínimos cuadrados viene de $y_i = 0$ para $k+1 \leq i \leq q$; todas las demás soluciones se pueden obtener agregando a esa \mathbf{x} una combinación lineal arbitraria de $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_q$, las últimas $q-k$ columnas de \mathbf{V} .

Esto da un método para resolver problemas de mínimos cuadrados:

- (8.24) Para encontrar la \mathbf{x} que hace mínima a $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ en donde \mathbf{A} tiene rango k :
1. Encontrar la descomposición en valores singulares $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$.
 2. Calcular $\mathbf{b}' = \mathbf{U}^H\mathbf{b}$.
 3. Calcular \mathbf{y} con $y_i = b'_i/\sigma_i$ para $1 \leq i \leq k$; en los otros casos, $y_i = 0$.
 4. Calcular $\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}\mathbf{y}$.
 5. \mathbf{x}_0 es la solución al problema de mínimos cuadrados, y tiene la menor norma 2 entre todas las soluciones; cualquier otra \mathbf{x}' será una solución si y sólo si \mathbf{x}' es igual a \mathbf{x}_0 más una combinación lineal de las últimas $q-k$ columnas de \mathbf{V} .

El proceso (8.24) se puede describir más compactamente mediante el sencillo artificio de definir una matriz que controle el paso 3.

- (8.25) **Definición.** Suponga que Σ es una matriz $p \times q$ tal que $\langle \Sigma \rangle_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y con $\langle \Sigma \rangle_{ii} = \sigma_i$ para toda i , en donde $\sigma_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$ y $\sigma_i = 0$ para $k+1 \leq i \leq \min\{p, q\}$. Entonces Σ^+ es aquella matriz $q \times p$ (nótese la inversión de p y q) cuyos únicos elementos diferentes de cero son $\langle \Sigma^+ \rangle_{ii} = 1/\sigma_i$ para $1 \leq i \leq k$.

Con esta notación, \mathbf{x}_0 en (8.24) es precisamente $\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H\mathbf{b}$; se ha demostrado el siguiente importante resultado.

- (8.26) **Teorema clave** (mínimos cuadrados y valores singulares). Supóngase que $A = U\Sigma V^H$ es la descomposición en valores singulares de la matriz A , $p \times q$, de rango k , y que $A^+ = V\Sigma^+U^H$ es la llamada *pseudoinversa* de A , en donde Σ^+ es como se definió en 8.25. Entonces:
- $x_0 = A^+b$ hace mínima a $\|Ax - b\|_2$ con respecto a x .
 - Entre todas las x' que hacen mínima a $\|Ax - b\|_2$, $x_0 = A^+b$ tiene la norma 2 mínima.
 - x' hace mínima a $\|Ax - b\|_2$ si y sólo si $x' = x_0 + v$, donde v es una combinación lineal arbitraria de las $q - k$ columnas finales de V , y $x_0 = A^+b$.

- (8.27) **Ejemplo.** Considere el siguiente problema de mínimos cuadrados $Ax \approx b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 8.17 se obtuvo la descomposición en valores singulares de A . Siguiendo el procedimiento de (8.24), se calculará $b' = U^H b$, $y = \Sigma^+ b'$ y entonces $x_0 = Vy$:

$$b' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -11\sqrt{5} \\ 16\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -11\sqrt{5} \\ 16\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{6} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

También se puede calcular la pseudoinversa $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Entonces se calcula \mathbf{x}_0 directamente como $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix},$$

como antes. Todas las demás soluciones \mathbf{x}' son de la forma $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Cuando se resuelve en la práctica un problema de mínimos cuadrados, a menudo es útil modificar la matriz Σ de los valores singulares. Suponga, como frecuentemente se da el caso, que los elementos de \mathbf{A} están sujetos a errores de medición; entonces los valores singulares diferentes de cero más pequeños que se calculen para \mathbf{A} , bien podrían ser cero si las mediciones fueran perfectas. Usar el recíproco de ese valor singular para resolver un problema de mínimos cuadrados bien podría ser desastroso. A menudo es mejor reemplazar la matriz Σ por una matriz Σ_0 obtenida reemplazando los valores singulares más pequeños en Σ por ceros exactos, lo cual es el efecto de la construcción en el teorema 8.21; aquellos valores singulares que fueran de la magnitud de los errores inherentes a los datos normalmente deberían tratarse de este modo. Véase el problema 6.

La pseudoinversa

El uso de la palabra “pseudoinversa” para designar a la matriz \mathbf{A}^+ del **teorema clave 8.26** es bastante razonable: \mathbf{A}^+ se comporta en varios aspectos como una especie de inversa. Por un lado, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ resuelve el problema de mínimos cuadrados $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$ exactamente como $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ resuelve $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en donde \mathbf{A} es no singular. También $(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H$ del mismo modo que $(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^{-1} = \mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^H$ cuando Σ es cuadrada y no singular; y, desde luego, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ cuando \mathbf{A} es no singular (problema 9). \mathbf{A}^+ es un ejemplo de una variedad de inversas generalizadas que se han desarrollado; a este miembro particular de esa clase también se le llama la *inversa generalizada Moore-Penrose* en honor de aquéllos que desarrollaron su teoría.

Aunque la pseudoinversa se dedujo a través de la descomposición en valores singulares, se la puede caracterizar independientemente de ella; este resultado, que se plantea sin demostración, puede ayudar a calcular \mathbf{A}^+ .

- (8.28) **Teorema** (caracterización de la pseudoinversa). Una matriz $\mathbf{A} p \times q$ tiene exactamente una pseudoinversa \mathbf{A}^+ , y una matriz $\mathbf{X} q \times p$ es igual a la pseudoinversa \mathbf{A}^+ si y sólo si \mathbf{X} satisface las siguientes tres condiciones:
- $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$
 - $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$
 - \mathbf{AX} y \mathbf{XA} son hermitianas.

- (8.29) **Teorema** ($\{\mathbf{BC}\}^+$). Supóngase que la matriz $\mathbf{A}, p \times q$, tiene rango k y que $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, en donde \mathbf{B} es $p \times k$ y con rango k , mientras que \mathbf{C} es $k \times q$ y de rango k , entonces

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^H(\mathbf{CC}^H)^{-1}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H.$$

DEMOSTRACION. \mathbf{CC}^H y $\mathbf{B}^H\mathbf{B}$ son no singulares; por ejemplo, $\mathbf{B}^H\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{0} = \mathbf{x}^H\mathbf{B}^H\mathbf{Bx} = \|\mathbf{Bx}\|_2^2$, de modo que $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ y de aquí que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ porque \mathbf{B} tiene rango k . El teorema es consecuencia de la verificación directa de las condiciones del teorema 8.28. ■

En el problema 11 se tiene un ejemplo de cómo se obtiene $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ para esas \mathbf{B} y \mathbf{C} . Otro caso importante se deriva de la descomposición QR normalizada, que es precisamente de la forma requerida en el teorema 8.29 en donde $\mathbf{B} = \mathbf{Q}$ tiene columnas ortonormales y $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ es triangular superior.

- (8.30) **Corolario** (QR y pseudoinversas). Supóngase que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ es una descomposición QR normalizada de la matriz $\mathbf{A} p \times q$, de rango k de modo que \mathbf{Q} es

$p \times k$ con columnas ortonormales y \mathbf{R} es de $k \times q$ y triangular superior, de rango k . Entonces

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^H(\mathbf{R}\mathbf{R}^H)^{-1}\mathbf{Q}^H.$$

Observe que es más sencillo resolver el problema de mínimos cuadrados $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$ con la descomposición QR normalizada resolviendo $\mathbf{Rx}_0 = \mathbf{Q}^H\mathbf{b}$, que escribir $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ en donde \mathbf{A}^+ es la del corolario 8.30; como en el caso de la eliminación de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales, es más fácil resolver sistemas directamente, que encontrar inversas (pseudoo reales) y usarlas para obtener la solución.

PROBLEMAS 8.5

1. Encuentre Σ^+ para cada Σ del ejemplo 8.16.
 - ▷ 2. Encuentre $\mathbf{0}^+$.
 3. Utilice (8.24) para resolver el problema de mínimos cuadrados
- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$
4. Utilice MATLAB o algún software semejante para implementar (8.24) y resuelva el problema de mínimos cuadrados del problema 22 de la sección 5.9.
 5. Utilice MATLAB o algún software semejante para implementar (8.24) y resuelva el problema de mínimos cuadrados del problema 12 de la sección 2.6.
 6. Considere el problema de predecir la población de Estados Unidos en 1990 como se describió en el problema 3 de la sección 2.6, pero utilice una ecuación cuadrática para ajustar los datos:

$$(\text{población en millones}) \approx a + b(\text{año}) + c(\text{año})^2.$$

Use MATLAB o algún software semejante para encontrar una descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{A} de ese modelo, y note la variación de tamaño entre los valores singulares.

- a) Use la descomposición en valores singulares completa para encontrar la solución al problema de mínimos cuadrados y prediga la población en 1990.
- b) Reemplace el menor valor singular por cero y use la descomposición en valores singulares resultante (de una matriz de rango 2 ligeramente dis-

- tinta) para obtener una solución al problema mínimos cuadrados y para predecir la población en 1990.
- Reemplace por cero los dos valores singulares más pequeños y de nuevo resuelva y prediga como en b).
 - Basado en este experimento, ¿cuál es su predicción para la población en 1990?
- M** 7. Sea ϵ un número tal que $1 + \epsilon$ se calcule con exactitud en su computadora, pero que $1 + \epsilon^2$ se calcule como 1; por ejemplo $\epsilon = 10^{-10}$ queda bien para la mayoría de las microcomputadoras con coprocesadores matemáticos. Use MATLAB o algún software semejante para encontrar la descomposición en valores singulares de la matriz A y resuelva el problema de mínimos cuadrados correspondiente del problema 24 de la sección 5.9; compare la solución con la obtenida cuando se reemplaza por cero el valor singular más pequeño.

▷ 8. Use la pseudoinversa para resolver el problema de mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 9. Demuestre que $A^+ = A^{-1}$ cuando A es no singular.
10. Demuestre que la pseudoinversa $X = A^+$ satisface las condiciones a)-c) del teorema 8.28.
11. Suponga que A $p \times q$, tiene rango k y que está separada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

en donde A_{11} es $k \times k$ y no singular. Demuestre que $A = B_1 C_1$ y que $A = B_2 C_2$ en donde

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} I \\ A_{21} A_{11}^{-1} \end{bmatrix}, & C_1 &= [A_{11} \quad A_{12}], \\ B_2 &= \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}, & \text{y} & C_2 = [I \quad A_{11}^{-1} A_{12}]. \end{aligned}$$

▷ 12. Use el problema 11 y el teorema 8.29 para encontrar la pseudoinversa de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- 13.** Demuestre que una descomposición en valores singulares no es necesariamente única encontrando todas las descomposiciones en valores singulares de I con $U = V$; demuestre que, sin embargo, todas esas descomposiciones conducen a la misma pseudoinversa.
- 14.** Demuestre detalladamente el teorema 8.29.
- 15.** Demuestre:
- El rango de A^+ es igual al rango de A .
 - Si A es simétrica, entonces A^+ es simétrica.
 - $(cA)^+ = (1/c)A^+$ para $c \neq 0$.
 - $(A^+)^T = (A^T)^+$
 - $(A^+)^+ = A$.
 - Demuestre con un contraejemplo, que en general $(AB)^+ \neq B^+A^+$.
 - Si A es $m \times r$, B es $r \times n$ y ambas matrices tienen rango r , entonces $(AB)^+ = B^+A^+$.
- ▷ **16.** Suponga que c es $p \times 1$ y que r es $1 \times p$. Encuentre:
- r^+
 - c^+
 - $(cr)^+$
- 17.** Use la descomposición QR normalizada $A = QR$ del ejemplo 5.83 para encontrar A^+ vía el corolario 8.30.
- 18.** Use la descomposición QR normalizada $A = QR$ del problema 15 de la sección 5.9 para encontrar A^+ vía el corolario 8.30.
- M 19.** Use MATLAB o algún software semejante para encontrar la pseudoinversa A^+ para las matrices de rango 3, rango 2 y rango 1 del problema 6.

8.6 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 8.6

- La forma de Schur de una matriz no está determinada de manera única. Analizar la variación posible para una matriz normal.
- El *método de Lanczos* que se da a continuación, reduce el problema de los eigenvalores de una matriz real simétrica $n \times n$ al de una matriz mucho más sencilla. Sea A una matriz real simétrica y \mathbf{u}_1 un vector real arbitrario. Establezca

$$\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \alpha_1\mathbf{u}_1,$$

en donde α_1 se determina de tal modo que haga ortogonales a \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_1 , lo cual implica que $\alpha_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)/(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)$. A continuación, forme

$$\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_2 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - \beta_1\mathbf{u}_1,$$

en donde α_2, β_1 se determinan de tal modo que \mathbf{u}_3 es ortogonal a \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_1 . Esto significa que $\alpha_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)/(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$, $\beta_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)/(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)$. A continuación, forme

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{A}\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_3 - \alpha_3\mathbf{u}_3 - \beta_2\mathbf{u}_2 - \gamma_1\mathbf{u}_1,$$

en donde α_3 , β_2 y γ_1 se determinan de tal modo que \mathbf{u}_4 es ortogonal a \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_1 . Demuestre que esto implica que $\gamma_1 = 0$. Demuestre que en el paso general se tiene

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{A}\mathbf{u}_r, \quad \mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{v}_r - \alpha_r\mathbf{u}_r - \beta_{r-1}\mathbf{u}_{r-1},$$

en donde \mathbf{u}_{r+1} es ortogonal a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Demuestre también que \mathbf{u}_{n+1} debe ser cero. Sea \mathbf{x} un eigenvector de \mathbf{A} y establezca

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n.$$

Forme \mathbf{Ax} y exprese $\mathbf{Au}_r = \mathbf{v}_r$ en término de las \mathbf{u}_s por las fórmulas anteriores. Deduzca que los eigenvalores de \mathbf{A} coinciden con los de la matriz tridiagonal

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

(Las condiciones de ortogonalidad que se usaron para determinar las α_i y las β_i también minimizan a $\|\mathbf{u}_i\|_2$. Esta es la razón por la que el método, debido a C. Lanczos, se llama también el *método de las iteraciones minimizadas*.)

- ▷ 3. Sea \mathbf{A} , $p \times p$, y sea $\mathbf{D} = \text{diag}(\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^p)$, en donde $\epsilon \neq 0$. Describa a $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{AD}$.
- 4. Sea $\mathbf{T} = \mathbf{P}^H\mathbf{AP}$ una forma de Schur de una matriz \mathbf{A} , $p \times p$. Use \mathbf{T} y el problema 3 para demostrar que hay una matriz \mathbf{S} no singular tal que $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$ es triangular superior y que todos sus elementos que no están en la diagonal principal son de magnitud tan pequeña como se quiera.
- 5. Dada una matriz no singular \mathbf{S} , se puede definir una norma vectorial $\|\cdot\|_S$ por $\|\mathbf{x}\|_S = \|\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\|_\infty$; ésta induce la norma de transformación $\|\mathbf{A}\|_S = \|\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}\|_\infty$. Use el problema 4 para demostrar que hay una norma inducida $\|\cdot\|_S$, que depende de \mathbf{A} , tal que $\|\mathbf{A}\|_S$ está tan cerca como se desee de la magnitud máxima de los eigenvalores de \mathbf{A} .
- ▷ 6. Demuestre que los eigenvalores de la matriz normal \mathbf{A} son todos iguales si y sólo si $\mathbf{A} = c\mathbf{I}$ para algún número c .
- 7. Demuestre que $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{x}$ es la proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre el subespacio que consiste en todas las \mathbf{v} tales que $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$, esto es, sobre el espacio nulo de \mathbf{A} .
- ▷ 8. Demuestre que $\mathbf{AA}^+\mathbf{x}$ es la proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre el espacio de columnas de \mathbf{A} .

9

Eigensistemas de matrices arbitrarias generales, con aplicaciones

La teoría sobre los eigensistemas de matrices arbitrarias generales esbozada en el capítulo 7, se tratará más a fondo en este capítulo. Se aprovechará después esa teoría para analizar el comportamiento en el tiempo de los sistemas cuya evolución se describe por medio de modelos discretos o continuos, así como para estudiar métodos iterativos para la solución de ecuaciones lineales; para ello, son fundamentales los teoremas clave 9.4, 9.11, 9.27 y 9.57.

9.1 INTRODUCCION

En el capítulo 7 se presentaron los hechos básicos sobre los eigensistemas de matrices cuadradas, haciendo hincapié en la equivalencia desde varios puntos de vista: formas especiales y descomposiciones, representaciones de transformaciones, y eigensistemas. Desde la perspectiva de los eigensistemas, los puntos principales fueron:

1. Toda matriz \mathbf{A} $p \times p$, tiene p eigenvalores si cada eigenvalor distinto λ_i se cuenta de acuerdo con su multiplicidad algebraica m_i , como una raíz del polinomio característico de \mathbf{A} .
2. Cada eigenvalor distinto λ_i , tiene cuando menos un eigenvector asociado, y toda colección de esos eigenvectores –cada uno asociado con un eigenvalor distinto– forma un conjunto linealmente independiente.
3. Cada eigenvalor distinto λ_i , tiene un número máximo μ_i de eigenvectores asociados que forman un conjunto linealmente independiente; esto es, el subespacio de eigenvectores asociados con λ_i tiene dimensión μ_i –la multiplicidad geométrica de λ_i .

Existe una pregunta importante con respecto a la relación entre μ_i y m_i : ¿cuántos eigenvectores que formen un conjunto independiente se pueden asociar con un eigenvalor repetido? Algunos ejemplos sencillos mostraron que μ_i podría ser cualquier número desde 1 hasta m_i . Por ejemplo, en cada una de las matrices siguientes, es fácil demostrar que $\lambda_1 = 4$ es un eigenvalor de multiplicidad algebraica $m_1 = 3$ pero sus multiplicidades geométricas son $\mu_1 = 3$, $\mu_1 = 2$ y $\mu_1 = 1$ respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ tiene } \mu_1 = 3; \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ tiene } \mu_1 = 2;$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ tiene } \mu_1 = 1.$$

Desde el punto de vista de las descomposiciones y semejanzas, se desarrolló el **teorema clave 7.14**:

Una matriz \mathbf{A} $p \times p$, es semejante a una matriz diagonal Λ –de modo equivalente, \mathbf{A} se puede descomponer en $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ en donde Λ es diagonal– si y sólo si \mathbf{A} tiene un conjunto de p eigenvectores linealmente independientes; los eigenvectores son las columnas de \mathbf{P} , y los eigenvalores la diagonal principal de Λ .

Este importante resultado se refiere al caso en que las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales para todos los eigenvalores: $\mu_i = m_i$ para toda i . Lo que resta por estudiar es el caso más complicado, cuando al menos una μ_i es menor que su m_i , de tal modo que en total hay menos de p eigenvectores formando un conjunto linealmente independiente

- (9.1) **Definición.** Una matriz $p \times p$ que no tenga un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores se llama *defectuosa*; en caso contrario se le llama *completa o no defectuosa*.

Así, el problema que queda es entender en detalle la estructura del eigensistema de matrices defectuosas. Cuando se estudió en el capítulo ocho la estructura de los eigensistemas de matrices normales, se encontró que era útil enfocar primero el punto de vista de las descomposiciones o formas sencillas, para después cambiar de perspectiva e interpretar los resultados en términos de eigensistemas. Aquí se seguirá el mismo camino.

PROBLEMAS 9.1

1. Compruebe las afirmaciones anteriores sobre los eigensistemas de las tres matrices dadas.
2. Resuelva el problema 8 de la sección 7.4, demostrando que $\mu_i \leq m_i$.

9.2 FORMA DE JORDAN

Esta sección desarrolla una forma especial a la que se puede reducir toda matriz mediante una transformación de semejanza. La forma especial se desarrolla en tres etapas: la forma de Schur, la forma diagonal en bloques triangulares superiores, y, finalmente, la forma de Jordan. Una vez que se sabe qué buscar como la forma de Jordan, es posible encontrar esa forma directamente (en casos sencillos) en lugar de hacerlo a través de las tres etapas.

Formas diagonales en bloques triangulares superiores

Supóngase que A es $p \times p$; por el teorema 8.2 se sabe que A es ortogonalmente semejante a su forma de Schur T : una matriz triangular superior con los eigenvalores de A en su diagonal principal. Por el modo en el que se construyó T en ese teorema, es claro que se puede construir T de tal modo que cada eigenvalor distinto λ_i se repita (m_i veces, desde luego) en posiciones consecutivas a lo largo de la diagonal principal de T . Para alcanzar la segunda etapa en el desarrollo de la forma de Jordan, se demostrará que T , a su vez, es semejante a otra matriz triangular superior con la misma estructura y con la propiedad adicional de ser diagonal en bloques: se le llamará *forma diagonal en bloques triangulares superiores*.

(9.2) **Lema** (forma diagonal en bloques triangulares superiores). Suponga que T es triangular superior y que además, tiene la forma

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1s} \\ \mathbf{0} & T_{22} & \cdots & T_{2s} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & T_{ss} \end{bmatrix},$$

en donde cada T_{ii} es $m_i \times m_i$ y triangular superior, con todos los elementos en la diagonal principal de T_{ii} iguales a λ_i , y las λ_i distintas para $1 \leq i \leq s$. Entonces, T es semejante a una matriz diagonal en bloques triangulares superiores

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & V_s \end{bmatrix},$$

en donde cada \mathbf{V}_i es $m_i \times m_i$ y triangular superior; todos los elementos de la diagonal principal de \mathbf{V}_i son iguales a λ_i , y desde luego las λ_i son distintas.

DEMOSTRACION. La idea básica es usar transformaciones de semejanza basadas en las matrices elementales $\mathbf{E}_{ij}(c)$ de la definición 3.31; recuerde que $\mathbf{E}_{ij}(c)$ es no singular y que su inversa es igual a $\mathbf{E}_{ij}(-c)$. Suponga que $i < j$, y considere la transformación de semejanza

$$\mathbf{E}_{ij}(-c)\mathbf{T}\mathbf{E}_{ij}(c) = \mathbf{T}'.$$

Esta reemplaza el elemento (i, j) de \mathbf{T} por

$$\langle \mathbf{T} \rangle_{ij} + c(\langle \mathbf{T} \rangle_{ii} - \langle \mathbf{T} \rangle_{jj})$$

y por lo demás, sólo modifica a los elementos en el i -ésimo renglón (a la derecha del elemento (i, j)) y en la j -ésima columna (arriba de ese elemento). Si se escogen a i y j para que correspondan a renglones en distintos bloques \mathbf{T}_{mm} y \mathbf{T}_{nn} , entonces

$$\langle \mathbf{T} \rangle_{ii} - \langle \mathbf{T} \rangle_{jj} = \lambda_m - \lambda_n \neq 0,$$

por lo tanto, es posible escoger a $c = -\langle \mathbf{T} \rangle_{ij}/(\lambda_m - \lambda_n)$ y el elemento (i, j) de la matriz semejante \mathbf{T}' será igual a cero. Se puede hacer una sucesión de tales transformaciones de semejanza que reemplace los bloques

$$\mathbf{T}_{s-1,s}, \mathbf{T}_{s-2,s-1}, \mathbf{T}_{s-2,s}, \dots, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{13}, \dots, \mathbf{T}_{1s}$$

en ese orden por bloques cero (siguiendo de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha dentro de cada bloque). Esto da \mathbf{V} . ■

Forma de Jordan

Recuerde que la diagonal principal de cada \mathbf{V}_i tiene todos sus elementos iguales a λ_i : $\langle \mathbf{V}_i \rangle_{kk} = \lambda_i$ para toda k . Por medio de algunos argumentos que se omitirán por ser muy complejos técnicamente, es posible demostrar que cada una de esas matrices \mathbf{V}_i es semejante a una matriz diagonal en bloques triangulares superiores \mathbf{J}_i , cada uno de cuyos bloques es un *bloque de Jordan* $\mathbf{J}(\lambda_i)$:

- (9.3) **Definición.** Un *bloque de Jordan* es una matriz cuadrada triangular superior $\mathbf{J}(\lambda)$ tal que:
- Todos sus elementos en la diagonal principal son iguales a λ : $\langle \mathbf{J}(\lambda) \rangle_{ii} = \lambda$.
 - Todos sus elementos en la primera sobrediagonal son iguales a 1: $\langle \mathbf{J}(\lambda) \rangle_{i,i+1} = 1$.
 - Todos los demás elementos son iguales a 0.

De este modo

$$\mathbf{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ya que la combinación de semejanzas sucesivas también es una semejanza, las transformaciones de \mathbf{A} a \mathbf{T} , de \mathbf{T} a \mathbf{V} y después a bloques de Jordan se pueden expresar como una sola transformación de semejanza:

(9.4) **Teorema clave** (forma de Jordan). Toda $\mathbf{A} p \times p$, es semejante a una matriz \mathbf{J} en la forma de Jordan $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, y $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ con

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_\mu \end{bmatrix} = \mathbf{J},$$

en donde cada \mathbf{J}_r es un bloque de Jordan $n_r \times n_r$, y $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_s$ es igual a la suma de las multiplicidades geométricas de los eigenvalores diferentes de \mathbf{A} . El mismo eigenvalor diferente puede estar en distintos bloques de Jordan \mathbf{J}_r , pero el número total de bloques con ese eigenvalor es igual a su multiplicidad geométrica μ_i , mientras que el número total de elementos en la diagonal principal con ese eigenvalor es igual a su multiplicidad algebraica m_i . Los números n_r y el número total de bloques quedan determinados únicamente por \mathbf{A} .

Observe que éste es un teorema de existencia, pero no es un teorema constructivo: no se da ningún método para encontrar \mathbf{J} en la práctica; sin embargo, la misma existencia de una \mathbf{J} en esa forma especial permite su cálculo. Ya que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{J}$, se tiene que $\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{J}$. Escribiendo \mathbf{Q} en términos de sus columnas como

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_p]$$

se ve que $\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{J}$ es equivalente a $\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda\mathbf{q}_i + \nu_i\mathbf{q}_{i-1}$, en donde λ es el eigenvalor en el bloque de Jordan que afecta a \mathbf{q}_i , y ν_i es igual a 0 o a 1. De manera más precisa, ya que las \mathbf{J}_r son $n_r \times n_r$, las columnas de \mathbf{Q} afectadas por el bloque \mathbf{J}_r en el producto $\mathbf{Q}\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$ son exactamente las n_r numeradas

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-1} + 1 \text{ hasta } n_1 + n_2 + \cdots + n_r.$$

Por conveniencia, se designarán esas columnas de \mathbf{Q} como $\mathbf{v}_{r1}, \dots, \mathbf{v}_{rn_r}$. Resulta entonces de $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$ que

- (9.5) $\mathbf{Av}_{r1} = \lambda_r \mathbf{v}_{r1}$ y $\mathbf{Av}_{rj} = \lambda_r \mathbf{v}_{rj} + \mathbf{v}_{r,j-1}$ para $j = 2, \dots, n_r$, en donde \mathbf{v}_{rj} es la columna de \mathbf{Q} numerada $n_1 + \dots + n_{r-1} + j$ y en donde $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{J}$ y $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$, en donde el r -ésimo bloque de Jordan de \mathbf{J} es $n_r \times n_r$.

Esta complicada relación (9.5) es la clave para entender el eigensistema de \mathbf{A} ; se volverá a ella más tarde. Por ahora, se demostrará cómo usar (9.5) como una guía para encontrar una forma de Jordan de \mathbf{A} cuando \mathbf{A} es lo suficientemente pequeña para cálculos a mano. La observación crucial es que (9.5) significa que \mathbf{v}_{r1} es un eigenvector de \mathbf{A} ; por lo tanto, se encuentran los eigenvectores \mathbf{v}_{r1} y después se les usa para ayudar a encontrar los \mathbf{v}_{rj} restantes.

- (9.6) *Ejemplo.* Encontrar una forma de Jordan de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se encuentra fácilmente que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-2 - \lambda)(4 - \lambda)^2$, y que $\lambda_1 = -2$ es un eigenvalor simple, mientras que $\lambda_2 = 4$ tiene multiplicidad algebraica $m_2 = 2$ pero sólo un eigenvector ($\mu_2 = 1$); $[1 \ -1 \ -1]^T$ es un eigenvector para λ_1 , que se tomará como \mathbf{v}_{11} en (9.5), mientras que uno para λ_2 es $[1 \ -1 \ 1]$, que se tomará como \mathbf{v}_{21} en (9.5). Ya que $\mu_1 = \mu_2 = 1$, sólo hay un bloque de Jordan con cada eigenvalor; como $m_2 = 2$, el eigenvalor $\lambda_2 = 4$ deberá aparecer dos veces en la diagonal y en consecuencia debe estar en un bloque 2×2 . De este modo, de acuerdo con (9.5), se buscará \mathbf{v}_{22} para que $\mathbf{Av}_{22} - \lambda_2 \mathbf{v}_{22} = \mathbf{v}_{21}$, esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{su solución } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha \mathbf{v}_{21}$$

para α arbitraria (porque $\mathbf{Av}_{21} - \lambda_2 \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}$). Se considerará a $\alpha = 0$, dando la tercera columna de \mathbf{Q} como $\mathbf{v}_{22} = [0 \ 1 \ -1]^T$. En este caso, (9.5) es

$$\mathbf{Av}_{11} = \lambda_1 \mathbf{v}_{11}, \quad \mathbf{Av}_{21} = \lambda_2 \mathbf{v}_{21}, \quad \mathbf{Av}_{22} = \lambda_2 \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{21}.$$

Al formar la matriz \mathbf{Q} de las columnas $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21}$ y \mathbf{v}_{31} se produce la forma de Jordan \mathbf{J} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

- (9.7)
- Ejemplo.**
- Encuentre una forma de Jordan para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se encuentra fácilmente que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)^3$; sólo hay un eigenvalor distinto $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 3$. Sólo es posible encontrar dos eigenvectores, por ejemplo $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [0 \ 1 \ 2]^T$; entonces $\mu_1 = 2$. Debe haber dos bloques de Jordan, por lo tanto uno será 1×1 y el otro 2×2 . Se considerará a $\mathbf{v}_{11} = \mathbf{x}_1$ como un eigenvector columna de \mathbf{Q} ; el segundo eigenvector columna \mathbf{v}_{21} de \mathbf{Q} debe ser alguna combinación de \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 tal que sea posible resolver (9.5) para una tercera columna \mathbf{v}_{22} . Sea $\mathbf{v}_{21} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$. Se buscará la solución para \mathbf{v}_{22} partiendo de $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_{22} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix}.$$

Al tratar de resolverlo, se encuentra que es necesario que $\beta = -\alpha$ para que haya una solución, en la cual es $x = \alpha + \gamma - 2\delta$, $y = \delta$, $z = \gamma$ para γ y δ arbitrarias. Ahora, $\alpha \neq 0$ debe ser distinta de cero para que $\mathbf{v}_{21} \neq \mathbf{0}$, pero desde luego, y por facilidad, es posible hacer que $\gamma = \delta = 0$ así, se escoge a $\alpha = 1$, de modo que $\beta = -1$. Esto da

$$\mathbf{v}_{11} = [1 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_{21} = [1 \ -1 \ -1]^T, \quad \mathbf{v}_{22} = [1 \ 0 \ 0]^T,$$

con

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{11} = \lambda_1\mathbf{v}_{11}, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_{21} = \lambda_1\mathbf{v}_{21}, \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_{22} = \lambda_1\mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{21}.$$

\mathbf{Q} se forma a partir de esas columnas \mathbf{v}_{ij} y se obtiene

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Al pasar de una forma general diagonal en bloques triangulares superiores, a la forma especial de Jordan, se afirmó que era útil obtener esta forma más sencilla. Ahora, con fines analíticos, se presentará el primero de varios casos de la forma de Jordan.

Considere la matriz sencilla $E_k = J(\lambda) - \lambda I$ para un bloque típico de Jordan $k \times k$, $J(\lambda)$, como el de la definición 9.3; E_k tiene unos en su primera sobrediagonal y ceros en los demás elementos. Es fácil ver que E_k^2 tiene unos en su segunda sobrediagonal y ceros en los demás elementos, que E_k^3 tiene unos en su tercera sobrediagonal y ceros en las demás posiciones, y así sucesivamente hasta $E_k^k = \mathbf{0}$.

A continuación, suponga que J es una forma de Jordan de una matriz A , $p \times p$ como en el teorema clave 9.4, y considere cualquiera de los bloques de Jordan J_n en el que aparezca un eigenvalor λ_i ; como λ_i aparecerá cuando más m_i veces en toda J , el bloque J_n puede ser a lo más $m_i \times m_i$. Por lo tanto, por el párrafo anterior, $(\lambda_i I - J_n)^{m_i} = \mathbf{0}$.

Ahora considere el polinomio característico f de A :

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{m_s}.$$

Si se considera $f(J)$, como las potencias de J comutan con I y con potencias de J , se tiene que

$$f(J) = (\lambda_1 I - J)^{m_1}(\lambda_2 I - J)^{m_2} \cdots (\lambda_s I - J)^{m_s}.$$

Debido a lo que ya se ha demostrado, cada bloque $(\lambda_i I - J_n)^{m_i} = \mathbf{0}$ siempre que J_n involucre a λ_i , y entonces el bloque correspondiente a J_n en $f(J)$ debe ser igual a cero; pero todo bloque en $f(J)$ es uno de esos bloques, y así, $f(J) = \mathbf{0}$. Esto conduce al siguiente resultado.

- (9.8) **Teorema** (teorema de Cayley-Hamilton). Si $f(\lambda)$ es el polinomio característico de una matriz A , entonces $f(A) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACION. Sea $Q^{-1}AQ = J$ una forma de Jordan de A . Ya se ha demostrado que $f(J) = \mathbf{0}$. Pero $f(A) = Qf(J)Q^{-1}$ por el teorema 7.25 e), por lo tanto $f(A) = Q\mathbf{0}Q^{-1} = \mathbf{0}$. ■

- (9.9) **Ejemplo.** Considérese la matriz A del ejemplo 9.6, en donde $f(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$; entonces

$$\begin{aligned} f(A) &= -A^3 + 6A^2 - 32I \\ &= -\begin{bmatrix} 112 & 84 & 36 \\ -48 & -20 & -36 \\ 48 & 12 & 28 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 24 & 14 & 6 \\ -8 & 2 & -6 \\ 8 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 32 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

como lo afirma el teorema de Cayley-Hamilton.

PROBLEMAS 9.2

1. Reduzca a su forma diagonal en bloques triangulares superiores la matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Reduzca a su forma diagonal en bloques triangulares superiores la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

▷ 3. Reduzca a su forma diagonal en bloques triangulares superiores la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Desarrolle (9.5) para $\mathbf{J} =$

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 + \epsilon & \epsilon \\ -\epsilon & 2 - \epsilon \end{bmatrix}.$$

- a) Suponiendo aritmética perfecta, encuentre la forma de Jordan de \mathbf{A} cuando $\epsilon \neq 0$ y cuando $\epsilon = 0$.
- b) Suponiendo aritmética de computadora con ϵ tan pequeño que $2 \pm \epsilon$ sea evaluado como 2, encuentre la forma de Jordan de la matriz \mathbf{A} resultante.
- c) Utilice los resultados de a) y b) para discutir la sensibilidad de la forma de Jordan a las perturbaciones en los elementos de la matriz.

▷ 6. Reduzca a la forma de Jordan la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

7. Reduzca a su forma de Jordan la matriz del problema 3.

8. Demuestre que \mathbf{A} es semejante a \mathbf{B} si y sólo si \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen una forma de Jordan común.

9. Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times p$, que cada una tiene un conjunto de p eigenvectores linealmente independientes, y que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Suponga también que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \Lambda$, en donde Λ es diagonal y tiene a los eigenvalores λ_i como los elementos de su diagonal principal, cada uno de multiplicidad algebraica y geométrica m_i .

a) Demuestre que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ debe ser diagonal en bloques con los bloques de la diagonal principal de tamaño $m_i \times m_i$.

b) Demuestre que \mathbf{Q} existe con $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ y $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BQ}$ diagonales.

c) Demuestre que b) es válido si y sólo si \mathbf{A} y \mathbf{B} comutan: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

▷ 10. Reduzca a la forma de Jordan la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Compruebe el teorema de Cayley-Hamilton con la matriz del ejemplo 9.7.

12. Para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 9.7, demuestre que $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ si

$$g(x) = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

13. Suponga que $h(x)$ es un polinomio tal que $h(\mathbf{J}) = \mathbf{0}$, en donde \mathbf{J} es la forma de Jordan del ejemplo 9.7. Demuestre que $h(1) = h'(1) = 0$, y entonces

$$h(x) = (1 - x)^2 q(x)$$

para algún polinomio q ; concluya que $(1 - x)^2$ es el polinomio $m(x)$ de menor grado (y coeficiente inicial 1) para el cual $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ — m es el llamado *polinomio mínimo de \mathbf{A}* .

▷ 14. Como en el problema 13, encuentre el polinomio mínimo de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

▷ 15. Generalice los problemas 13 y 14 para describir el polinomio mínimo de una forma general de Jordan \mathbf{J} .

9.3 EIGENSTEMAS PARA MATRICES ARBITRARIAS GENERALES

La forma de Jordan, desarrollada en la sección anterior, da información detallada sobre el eigensistema de una matriz. La clave es interpretar la relación $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ en la forma $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$ como se representa en (9.5):

Repaso de (9.5)

$$\mathbf{Av}_{r1} = \lambda_r \mathbf{v}_{r1} \quad \text{y} \quad \mathbf{Av}_{rj} = \lambda_r \mathbf{v}_{rj} + \mathbf{v}_{r,j-1} \quad \text{para } j = 2, \dots, n_r.$$

Eigenvectores generalizados y subespacios invariantes

Para hacer más concreta la relación general (9.5), se tratará primero el caso del ejemplo 9.6. Aquí, las relaciones son

$$(9.10) \quad \mathbf{Av}_{11} = \lambda_1 \mathbf{v}_{11}, \quad \mathbf{Av}_{21} = \lambda_2 \mathbf{v}_{21}, \quad \text{y} \quad \mathbf{Av}_{22} = \lambda_2 \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{21},$$

en donde $\lambda_1 = -2$ es un eigenvalor simple y $\lambda_2 = 4$ un eigenvalor de multiplicidad algebraica $m_2 = 2$ pero multiplicidad geométrica $\mu_2 = 1$. Los vectores \mathbf{v}_{11} y \mathbf{v}_{21} son los dos eigenvectores, mientras que \mathbf{v}_{22} se dice que es un *eigenvector generalizado*. Ya que $m_2 = 2$, se podría esperar encontrar dos eigenvectores asociados con λ_2 , pero esto es imposible (si han de formar un conjunto independiente); en lugar de ello, el eigenvector generalizado \mathbf{v}_{22} se asociará con λ_2 para proporcionar el segundo de dos ($=m_2$) vectores especiales asociados con λ_2 . ¿De qué modo es “especial” \mathbf{v}_{22} ? Recuerde que, si se tuvieran dos eigenvectores asociados con λ_2 , generarían un subespacio invariante bidimensional. \mathbf{v}_{22} sustituye esta capacidad: \mathbf{v}_{21} y \mathbf{v}_{22} generan juntos un subespacio invariante bidimensional. Para comprobar esto, se verá si con la aplicación de \mathbf{A} a cualquier combinación lineal de \mathbf{v}_{21} y \mathbf{v}_{22} se obtiene una de esas combinaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha \mathbf{v}_{21} + \beta \mathbf{v}_{22}) &= \alpha \mathbf{Av}_{21} + \beta \mathbf{Av}_{22} = \alpha(\lambda_2 \mathbf{v}_{21}) + \beta(\lambda_2 \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{21}) \\ &= (\alpha \lambda_2 + \beta) \mathbf{v}_{21} + (\beta \lambda_2) \mathbf{v}_{22}, \end{aligned}$$

como se afirmó.

Esto sucede también en lo general: los vectores \mathbf{v}_{rj} de (9.5) para $1 \leq j \leq n_r$, generan un subespacio invariante de n_r dimensiones. La unicidad de los números n_r y del número de bloques en la forma de Jordan, implica que ninguno de tales subespacios invariantes puede dividirse en subespacios invariantes de menores dimensiones. Esto demuestra la siguiente interpretación del teorema para la forma de Jordan en términos del eigensistema.

(9.11) **Teorema clave** (estructuras de eigensistemas). Sea $A, p \times p$ con un conjunto linealmente independiente de $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_s$ eigen vectores asociados con eigenvalores diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, en donde λ_i tiene multiplicidad algebraica m_i y multiplicidad geométrica μ_i . Existen entonces enteros positivos n_1, \dots, n_s con $n_1 + \dots + n_s = p$, y un conjunto linealmente independiente de p vectores v_{rj} para $1 \leq r \leq \mu$ y $1 \leq j \leq n_r$, tales que:

- $\{v_{11}, v_{21}, \dots, v_{\mu 1}\}$ es un conjunto linealmente independiente de eigen vectores de A , y ningún conjunto de éstos puede contener más vectores.
- Para cada r , con $1 \leq r \leq \mu$, el conjunto de vectores v_{rj} , para $1 \leq j \leq n_r$, es una base de un subespacio invariante \mathcal{V}_r de A que no puede descomponerse en dos o más subespacios invariantes no triviales que no tengan algún vector en común diferente de cero.
- Si λ es el eigenvalor asociado con v_{r1} , entonces las v_{rj} para $2 \leq j \leq n_r$ se llaman *eigen vectores generalizados* asociados con λ y satisfacen la ecuación

$$Av_{rj} = \lambda v_{rj} + v_{r,j-1}.$$

La descripción anterior es complicada, pero también lo es la situación que describe. El esquema siguiente podrá aclarar las cosas.

(9.12)

Bases para subespacios invariantes $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_\mu$				
	Para el subespacio \mathcal{V}_1 ↓	Para el subespacio \mathcal{V}_2 ↓	...	Para el subespacio \mathcal{V}_μ ↓
Eigensistema →	v_{11}	v_{21}	...	$v_{\mu 1}$
	v_{12} ⋮ v_{1n_1}	v_{22} ⋮ v_{2n_2}	...	$v_{\mu 2}$ ⋮ $v_{\mu n_\mu}$

(9.13)

Ejemplo. La situación del ejemplo 9.7, se describe en el lenguaje del teorema clave 9.11 como sigue:

- $\{v_{11}, v_{21}\}$ es un conjunto de eigen vectores de A linealmente independientes que contienen el número máximo posible, y tanto v_{11} como v_{21} están asociados con $\lambda_1 = 1$.
- $\{v_{11}\}$ y $\{v_{21}, v_{22}\}$ generan, cada uno, un subespacio invariante de A .
- $Av_{22} = \lambda_1 v_{22} + v_{21}$.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 3.

Eigenvectores izquierdos: solubilidad de ecuaciones

En el caso de las matrices normales, el hecho de que una semejanza unitaria produjo una forma diagonal, demostró la ortogonalidad mutua de los eigenvectores y la validez del teorema 8.12 que caracterizaba la solubilidad de sistemas de ecuaciones. Un resultado análogo es válido en casos más generales, pero es necesario introducir un nuevo concepto para sustituir al de la ortogonalidad mutua de eigenvectores.

Para desarrollar esta idea, se comenzará de nuevo con la relación clave $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{J}$ para la forma de Jordan, \mathbf{J} . Postmultiplicando por \mathbf{Q}^{-1} resulta $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$; sea \mathbf{y}_i^H el i -ésimo renglón de \mathbf{Q}^{-1} , de modo que

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^H \\ \mathbf{y}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{y}_p^H \end{bmatrix}.$$

De manera semejante a la relación encontrada usando las columnas de \mathbf{Q} , se tiene la relación $\mathbf{y}_i^H\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}_i^H + \xi_i\mathbf{y}_{i+1}^H$, en donde λ es el eigenvalor en el bloque de Jordan que afecta a \mathbf{y}_i^H en el producto $\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ y ξ_i es igual a 0 o a 1. Más exactamente, ξ_i será igual a 0 y por lo tanto $\mathbf{y}_i^H\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}_i^H$, precisamente cuando i sea el número de renglón de un renglón *inferior* en algún bloque de Jordan de \mathbf{J} . Por lo tanto, hay un vector \mathbf{y}_i^H de ese tipo para cada uno de los μ bloques de Jordan en \mathbf{A} .

(9.14) **Definición.** Un vector \mathbf{y} diferente de cero para el que $\mathbf{y}^H\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^H$ se llama un *eigenvector izquierdo* asociado con el eigenvalor λ de \mathbf{A} .

Como esta relación es equivalente a $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} = \lambda\bar{\mathbf{y}}$, en donde $\bar{\mathbf{y}}$ es el conjugado complejo de \mathbf{y} , se sigue que λ es un eigenvalor de \mathbf{A}^T ; ya que $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^T$ para toda \mathbf{B} , se sabe que $\det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) = 0$ si y sólo si $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, y por lo tanto eigenvectores izquierdos asociados con un número λ existen si y sólo si λ es un eigenvalor de \mathbf{A} , como estaba implícito en la definición 9.14.

Recuerde que los eigenvectores izquierdos presentados anteriormente, se seleccionaron de los renglones \mathbf{y}_i^H de \mathbf{Q}^{-1} . Si las columnas de \mathbf{Q} se denotan por \mathbf{q}_j , entonces la relación $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ es equivalente a

$$\mathbf{y}_i^H\mathbf{q}_i = 1 \quad y \quad \mathbf{y}_i^H\mathbf{q}_j = 0 \quad si \quad i \neq j;$$

Las \mathbf{y}_i y las \mathbf{q}_j forman lo que se llama un sistema *bi-ortogonal*. Al recordar que las μ de las \mathbf{y}_i son eigenvectores izquierdos de \mathbf{A} , resulta inmediatamente que

(9.15) **Teorema** (eigenvectores izquierdos). Sean \mathbf{A} , λ_i , m_i , μ_i , μ y \mathbf{v}_{ri} como se definieron en el **teorema clave 9.11**. Entonces:

- a) Hay un conjunto linealmente independiente de μ eigenvectores izquierdos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\mu$ de \mathbf{A} , y ninguno de esos conjuntos puede contener más vectores.
- b) \mathbf{u}_r está asociado con el mismo eigenvalor λ que el eigenvector (derecho) \mathbf{v}_{r1} .
- c) $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{rn_r}) = \mathbf{u}_r^H \mathbf{v}_{rn_r} = 1$.
- d) $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{ij}) = \mathbf{u}_r^H \mathbf{v}_{ij} = 0$, a menos que $i = r$ y $j = n_r$, como en c).

(9.16) **Ejemplo.** Se tomará la matriz \mathbf{A} y su forma de Jordan \mathbf{J} que se encontró en el ejemplo 9.7. Las \mathbf{u}_i se deben obtener a partir de los renglones de \mathbf{Q}^{-1} correspondientes al renglón inferior de cada uno de los bloques de Jordan en \mathbf{J} . Entonces

$$\mathbf{u}_1^H = [0 \quad -1 \quad 1]$$

es el primer renglón de \mathbf{Q}^{-1} y

$$\mathbf{u}_2^H = [1 \quad 2 \quad -1]$$

es el último renglón de \mathbf{Q}^{-1} . Es fácil comprobar que

$$\mathbf{u}_1^H \mathbf{A} = \lambda \mathbf{u}_1^H, \quad \mathbf{u}_2^H \mathbf{A} = \lambda \mathbf{u}_2^H, \text{ en donde } \lambda = 1.$$

Además, $\mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_{11} = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_{22} = 1$ como se necesitaba; las condiciones de ortogonalidad también son válidas.

Podremos tratar ahora el asunto de la solubilidad de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si λ no es un eigenvalor, desde luego que $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es no singular y habrá una solución única. Sin embargo, ¿qué pasa si λ es un eigenvalor? Se escribe $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ con su forma de Jordan \mathbf{J} y entonces se premultiplica por \mathbf{Q}^{-1} para convertir la ecuación en $(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I})\xi = \beta$, en donde $\xi = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$ y $\beta = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$. Cualquier bloque de Jordan que involucre al eigenvalor λ , tendrá un 1 en el elemento $(i, i+1)$ del i -ésimo renglón con excepción del renglón inferior (de ese bloque), el cual será un renglón de cero en toda $\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$. Así, habrá una solución ξ si y sólo si el elemento de ese renglón en β es igual a 0 para cada uno de tales renglones; observe que éste es precisamente el renglón que produce al eigenvector izquierdo \mathbf{u}_i en \mathbf{Q}^{-1} , así que $\langle \beta \rangle_i = \mathbf{u}_i^H \beta$. Esto generaliza el teorema 8.12 sobre matrices normales y solubilidad de ecuaciones.

(9.17) **Teorema** (matrices arbitrarias generales y solubilidad de ecuaciones). Suponga que \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ que tiene eigenvalores λ_i con multiplicidad geométrica μ_i para $1 \leq i \leq s$ y que tiene un conjunto linealmente independiente de $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_s$ eigenvectores izquierdos \mathbf{u}_j .

- a) Si λ no es un eigenvalor de \mathbf{A} , entonces $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada \mathbf{b} .

- b) Si λ es igual a un eigenvalor de \mathbf{A} , entonces $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución si y sólo si \mathbf{b} es ortogonal a todos los eigenvectores izquierdos \mathbf{u}_j asociados con λ . Cuando existen soluciones, hay un número infinito de ellas, y cada una se puede obtener agregando a una solución \mathbf{x} una combinación lineal arbitraria de eigenvectores (derechos) de \mathbf{A} asociados con λ .

DEMOSTRACION. Problema 6. ■

(9.18) **Ejemplo.** La matriz \mathbf{A} de la ecuaciones

$$6x_1 + 2x_2 = b_1$$

$$3x_1 + x_2 = b_2$$

es singular (por lo tanto $\lambda = 0$ es un eigenvalor); los eigenvectores izquierdos son múltiplos de $\mathbf{u}_1 = [1 \quad -2]^T$. El sistema de ecuaciones tiene una solución si y sólo si

$$0 = [1 \quad -2][b_1 \quad b_2]^T, \text{ esto es, } b_1 = 2b_2.$$

PROBLEMAS 9.3

1. Demuestre que las \mathbf{v}_{rj} para $1 \leq j \leq n_r$ en (9.5), generan verdaderamente un subespacio invariante de dimensión n_r .
- ▷ 2. Encuentre bases de los subespacios invariantes del **teorema clave 9.11** para la matriz:
- a) del ejemplo 9.7.
 - b) del ejemplo 9.8.
- c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$
- f) del problema 3 de la sección 9.2.
- g) del problema 6 de la sección 9.2.
- h) del problema 10 de la sección 9.2.
3. Demuestre que si uno de los subespacios invariantes del **teorema clave 9.11** se divide en dos subespacios invariantes no triviales que sólo se intersectan en $\{\mathbf{0}\}$, cada uno deberá contener un eigenvector de un bloque de Jordan, lo cual contradiría la estructura de bloque.
 4. Verifique la bi-ortogonalidad mencionada para los vectores del ejemplo 9.16.
- ▷ 5. Encuentre los eigenvectores izquierdos y compruebe la bi-ortogonalidad con los eigenvectores (derechos) de la matriz:
- a) del ejemplo 9.6

- b) del ejemplo 9.7
- c) del problema 3 de la sección 9.2
- d) del problema 6 de la sección 9.2
- e) del problema 10 de la sección 9.2

6. Demuestre el teorema 9.17 b) sobre solubilidad de ecuaciones.

▷ **7.** Encuentre las condiciones necesarias y suficientes para las b_i , para que exista una solución de

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= b_1 \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= b_2 \\ -6x_1 - 6x_2 - 12x_3 + 3x_4 &= b_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= b_4. \end{aligned}$$

8. Sea \mathcal{T} la transformación lineal de \mathbb{C}^p a \mathbb{C}^p definida por $\mathcal{T}(v) = Av$, y defina su transformación adjunta \mathcal{T}^* por A^H (véanse la definición 6.10 y el problema 24 de la sección 6.1). Demuestre que, dada w $\mathcal{T}(v) = w$ tiene solución si y sólo si w es ortogonal al espacio nulo de \mathcal{T}^* .

9.4 APLICACION: EVOLUCION DE SISTEMAS DISCRETOS Y POTENCIAS DE MATRICES

La forma de Jordan es extremadamente importante en las matemáticas aplicadas porque da la clave de la respuesta a un conjunto de preguntas concernientes a una amplia gama de aplicaciones.

La sección 2.2 modeló cómo evolucionaban de mes a mes las partes del mercado controlado por tres lecherías; el resultado fue (2.4) $-x_{r+1} = Ax_r$, en donde las tres componentes de x_r representan las fracciones del mercado en manos de cada lechería en el mes r y en donde la matriz A de transición describe el efecto de las fuerzas del mercado.

De manera similar, en la sección 2.3 se modeló la evolución de poblaciones de zorros y gallinas en competencia con (2.14) $-x_{i+1} = Ax_i$, en donde las dos componentes de x_i representan los números de zorros y gallinas en el tiempo i , y la matriz A describe su competencia.

En general, los modelos matemáticos conducen a menudo a una matriz $p \times 1$, x_i , que describe el estado de algún sistema complicado en el tiempo i y a una matriz A $p \times p$, que representa los procesos internos del sistema, de tal modo que

$$(9.19) \quad x_{i+1} = Ax_i$$

modela la evolución del sistema en el tiempo. Denotando el estado inicial por x_0 , es posible escribir lo anterior en forma equivalente

$$(9.20) \quad x_i = A^i x_0 \quad \text{para } i \geq 0.$$

Las preguntas importantes formuladas en el capítulo 2 para esos ejemplos específicos, y generalmente de importancia modular, son: ¿qué pasa conforme transcurre el tiempo?, ¿tiende el sistema al equilibrio? Los estados x_i ¿llegan a ser arbitrariamente grandes?, ¿tienden a cero?, ¿oscilan?

Gracias a (9.20), la forma de Jordan de A puede manejar tales asuntos. Escribiendo $A = QJQ^{-1}$, en donde J es una forma de Jordan de A , es posible aplicar el teorema 7.25 a), y entonces

$$(9.21) \quad A^i = QJ^iQ^{-1} \text{ y por lo tanto} \\ x_i = QJ^i(Q^{-1}x_0).$$

Esto permite estudiar el comportamiento de J^i –un problema mucho más simple que para A^i directamente. Esto se vuelve todavía más sencillo debido al **teorema clave 9.4** en el que J misma es una matriz diagonal en bloques con bloques de Jordan J_r en la diagonal; entonces, sólo es necesario estudiar las potencias de J_r^i , ya que

$$J^i = \begin{bmatrix} J_1^i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2^i & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_\mu^i \end{bmatrix}.$$

Matrices no defectuosas

Para empezar con facilidad, se supondrá que cada bloque de Jordan J_r –y por lo tanto J misma– es *diagonal*; por el **teorema clave 7.14**, esto es equivalente a que A tenga un conjunto de p eigenvectores linealmente independiente –esto es, A es no defectuosa. Como de costumbre, en este caso se escribe Λ en lugar de J , con los eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ como los elementos diagonales de Λ . Así, la matriz cuyo comportamiento se estudiará es simplemente

$$(9.22) \quad \Lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p^i \end{bmatrix}.$$

Para cualquier número λ , es claro el comportamiento de λ^i cuando i tiende a infinito:

- λ^i tiende a 0 si y sólo si $|\lambda| < 1$.
- $|\lambda|^i$ tiende a infinito si y sólo si $|\lambda| > 1$.
- λ^i está acotado, esto es, $|\lambda^i| \leq c$ para alguna c constante y para toda i –si y sólo si $|\lambda| \leq 1$.

Para extender (9.23) y aplicarlo a Λ^i y a \mathbf{A}^i en lugar de a λ^i , se requieren nociones de convergencia –“tiende a”– y acotamiento de matrices; las normas matriciales de la definición 6.22 y el **teorema clave 6.23** dan justamente lo necesario, porque ya se ha tratado la convergencia en términos de normas de la definición 5.58 y el teorema 5.59. Aquí se reafirmará el resultado de combinar todas esas ideas para fines prácticos.

(9.24) **Resumen sobre sucesiones de matrices.**

- Se dice que una sucesión $\{\mathbf{A}_i\}$ de matrices $p \times q$ *convergen* a la matriz \mathbf{A}_∞ $p \times q$, si y sólo si convergen las sucesiones de los elementos correspondientes: $\langle \mathbf{A}_i \rangle_{jk}$ converge a $\langle \mathbf{A}_\infty \rangle_{jk}$ para toda j y toda k .
- Se dice que una sucesión $\{\mathbf{A}_i\}$ de matrices $p \times q$ está *acotada* si y sólo si las sucesiones de elementos están acotadas: $|\langle \mathbf{A}_i \rangle_{jk}| \leq c$ para alguna c constante y para todas las i, j y k .
- La sucesión de matrices \mathbf{A}_i converge a \mathbf{A}_∞ si y sólo si la sucesión de números $\|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_\infty\|$ converge a cero, en donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial; así, si la sucesión converge en una norma, converge en todas las normas.
- La sucesión de matrices \mathbf{A}_i está acotada si y sólo si la sucesión de números $\|\mathbf{A}_i\|$ está acotada, en donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial; así, si la sucesión está acotada en alguna norma, está acotada en todas las normas.

(9.25) **Ejemplo.** La matriz 2×2

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \Lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^i & 0 \\ 0 & \lambda_2^i \end{bmatrix}$$

tipifica el caso general de (9.22). Mediante la norma ∞ , se obtiene

$$\|\Lambda^i\|_\infty = \max(|\lambda_1^i|, |\lambda_2^i|) = \{\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)\}^i.$$

Si se hace $\rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, entonces $\|\Lambda^i\|_\infty$ –y por lo tanto la misma Λ^i – tiende a cero si y sólo si $\rho < 1$ estará acotada si y sólo si $\rho \leq 1$. Cuando $\rho > 1$, con seguridad algunos elementos de Λ^i tenderán a infinito en magnitud, pero no todos los elementos lo hacen.

Generalmente, es útil el número ρ que se introdujo en el ejemplo 9.25.

(9.26) **Definición.** El *radiopectral* $\rho(\mathbf{A})$ de una matriz \mathbf{A} $p \times p$, es igual a la magnitud del eigenvalor que tiene la mayor magnitud:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_p|).$$

Del **teorema clave 7.10 e)**, observe que

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

para todas las normas matriciales.

El análisis del ejemplo 9.25 abarca claramente las matrices diagonales $\Lambda \in \mathbb{R}^p \times p$. Para extenderlo a las matrices $\mathbf{A}, p \times p$ no defectuosas $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}$ y sus sucesiones relacionadas $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0$, sólo se requiere de las siguientes observaciones que son consecuencia del hecho de que las normas matriciales están definidas como normas de transformaciones y de que $\mathbf{A}^i = \mathbf{Q}\Lambda^i\mathbf{Q}^{-1}$ y $\Lambda^i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^i\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^i\| &\leq \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}^{-1}\| \|\Lambda^i\| \\ \|\mathbf{A}^i\| &\geq \|\Lambda^i\| / (\|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}^{-1}\|) \\ \|\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0\| &\leq \|\mathbf{A}^i\| \|\mathbf{x}_0\| \quad \text{para toda } \mathbf{x}_0 \\ \|\mathbf{A}^i\mathbf{v}\| &= \{\rho(\mathbf{A})\}^i \|\mathbf{v}\| \quad \text{si } \mathbf{v} \text{ es un eigenvector asociado con un eigenvalor de magnitud } \rho(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

(9.27) **Teorema clave** (potencias de matrices no defectuosas). Sea $\mathbf{A}, p \times p$ una matriz no defectuosa. Entonces, a medida que i tiende a más infinito:

- a) \mathbf{A}^i converge a cero si y sólo si el radio espectral $\rho(\mathbf{A}) < 1$.
- b) $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0$ converge a cero para toda \mathbf{x}_0 si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) < 1$.
- c) \mathbf{A}^i está acotado si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$.
- d) $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0$ está acotada para toda \mathbf{x}_0 si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$.
- e) $\|\mathbf{A}^i\|$ tiende a infinito en alguna norma matricial (y por lo tanto en *todas* las normas matriciales) si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) > 1$.
- f) $\|\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0\|$ tiende a infinito para *algunas* \mathbf{x}_0 en alguna norma vectorial (y por lo tanto en *todas* las normas vectoriales) si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) > 1$.

(9.28) **Ejemplo.** La matriz de transición \mathbf{A} del modelo de competencia entre lecherías del ejemplo 2.6 tenía eigenvalores $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.6$ y $\lambda_3 = 1.0$, como se demostró en el ejemplo 7.2, así como un conjunto linealmente independiente de tres eigenvectores asociados \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 . Entonces como $\rho(\mathbf{A}) = 1$, se sigue del **teorema clave 9.27** que \mathbf{A}^i y $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0$ están acotadas para toda \mathbf{x}_0 . De hecho, como \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 forman una base para \mathbb{R}^3 , \mathbf{x}_0 se puede escribir como

$$\mathbf{x}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3.$$

Entonces,

$$\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0 = a_1(0.5)^i\mathbf{v}_1 + a_2(0.6)^i\mathbf{v}_2 + a_3(1.0)^i\mathbf{v}_3,$$

lo que demuestra que $A^i x_0$ converge a un múltiplo de $a_3 v_3$ para toda x_0 . En ese modelo, la suma de los elementos de cada estado $x_i (= A^i x_0)$ es igual a 1, de modo que esto debe ser cierto en el límite $a_3 v_3$ también; el límite entonces debe ser igual a

$$[0.45 \quad 0.35 \quad 0.20]^T$$

para toda x_0 como se observó experimentalmente en la sección 2.2. Esto finalmente contesta una de las preguntas fundamentales que allí surgieron sobre ese modelo.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Matrices defectuosas

Queda pendiente el asunto más complicado en el comportamiento de A^i para matrices A defectuosas. Como antes, nos guaremos por un ejemplo de una matriz 2×2 .

(9.29) **Ejemplo.** Un bloque de Jordan 2×2 tiene la forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

de donde se sigue que

$$\mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \lambda^i & i\lambda^{i-1} \\ 0 & \lambda^i \end{bmatrix} = \lambda^i \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $i\lambda^{i-1}$ tiende a cero si y sólo si $|\lambda| < 1$, \mathbf{J}^i tiende a cero si y sólo $|\lambda| < 1$, mientras que $\|\mathbf{J}^i\|$ tiende a infinito si $|\lambda| > 1$ –exactamente como en el caso de las matrices no defectuosas. El “sólo si” para el caso en el que $\|\mathbf{J}^i\|$ tiende a infinito y la situación de $|\lambda| = 1$ son distintos, sin embargo. La fórmula para \mathbf{J}^i demuestra que

$$\|\mathbf{J}^i\|_\infty = |\lambda|^i(1 + i/|\lambda|);$$

para $|\lambda| = 1$, esto resulta en $\|\mathbf{J}^i\|_\infty = 1 + i$. Así, en este caso, $\|\mathbf{J}^i\|$ está acotado si y sólo si $|\lambda| < 1$, en cuyo caso \mathbf{J}^i tiende realmente a $\mathbf{0}$ y $\|\mathbf{J}^i\|$ tiende a infinito si y sólo si $|\lambda| \geq 1$.

Está claro que los resultados del ejemplo 9.29 se extienden para bloques de Jordan $n \times n$. La extensión a la forma general de Jordan –y de este modo para \mathbf{A} en general por medio de $\mathbf{A}^i = \mathbf{Q}\mathbf{J}^i\mathbf{Q}^{-1}$ – es entonces directa; el único punto delicado involucra eigenvalores λ con $|\lambda| = 1$: si sólo aparecen en bloques de Jordan 1×1 , entonces las potencias de esos bloques están acotadas, pero si aparecen en bloques $n \times n$ con $n > 1$, las potencias de esos bloques se disparan como en el ejemplo 9.29.

- (9.30) **Teorema clave** (potencias matriciales). Sea \mathbf{A} $p \times p$ y posiblemente defectuosa. Entonces, cuando i tiende a más infinito:
- \mathbf{A}^i converge a cero si y sólo si el radio espectral $\rho(\mathbf{A}) < 1$.
 - $\mathbf{A}^i \mathbf{x}_0$ tiende a cero para toda \mathbf{x}_0 si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) < 1$.
 - \mathbf{A}^i está acotada si y sólo si
 - $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ y
 - si λ es un eigenvalor con $|\lambda| = 1$, entonces su multiplicidad algebraica es igual a su multiplicidad geométrica.
 - $\mathbf{A}^i \mathbf{x}_0$ está acotada para toda \mathbf{x}_0 si y sólo si se cumplen las condiciones 1) y 2) del inciso c) anterior.
 - $\|\mathbf{A}^i\|$ tiende a infinito si y sólo si:
 - $\rho(\mathbf{A}) > 1$, o bien
 - $\rho(\mathbf{A}) = 1$ y hay un eigenvalor λ de \mathbf{A} con $|\lambda| = 1$ cuya multiplicidad geométrica es estrictamente menor que su multiplicidad algebraica.
 - $\|\mathbf{A}^i \mathbf{x}_0\|$ tiende a infinito para algunas \mathbf{x}_0 si y sólo si se cumple ya sea 1) o bien 2) del inciso c) anterior.

- (9.31) **Ejemplo.** La matriz \mathbf{A} del modelo de competencia entre poblaciones con $k = 0.18$ en el ejemplo 2.17, tenía un eigenvalor doble $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.9$ como se demostró en el ejemplo 6.18 (aunque entonces no estaba disponible esa terminología). La matriz es defectuosa porque $(\mathbf{A} - 0.9\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ necesita que

$$\begin{bmatrix} -0.30 & 0.5 \\ -0.18 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para la cual toda solución es sólo un múltiplo de $[5 \ 3]^T$. Ya que $\rho(\mathbf{A}) = 0.9 < 1$, sabemos que \mathbf{A}^i tiende a cero como lo hace $\mathbf{A}^i \mathbf{x}_0$ para toda \mathbf{x}_0 . Esto prueba lo que se indicó experimentalmente en el ejemplo 2.17: las poblaciones en este caso mueren, sin importar la distribución inicial de zorros y gallinas.

Matrices no negativas y de Markov

El ejemplo 9.28 analizó el modelo de competencia entre lecherías del ejemplo 2.6 y mostró que en ese caso específico $A^i x_0$ converge a un múltiplo del eigenvector v_3 asociado con $\lambda_3 = 1$, sin importar la x_0 inicial se tome. El ejemplo 2.6 se incluyó en el capítulo 2 para ilustrar modelos más generales que llevan a las *matrices de Markov*.

- (9.32) **Definición.** Se dice que una matriz $A, p \times q$, es *no negativa* si y sólo si todos sus elementos son no negativos: $\langle A \rangle_{ij} \geq 0$. Una *matriz de Markov* es una matriz $p \times p$ no negativa tal que la suma de los elementos en cada una de sus columnas es igual a 1.

Gran parte del comportamiento visto en el ejemplo 2.6 es típico de las matrices de Markov.

Si se define la matriz $p \times 1, \mathbf{1} = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$, entonces $\mathbf{1}^T A = \mathbf{1}^T$, porque los elementos de cada columna de una matriz de Markov A suman 1; de modo que $\lambda = 1$ es un eigenvalor de A . Ya que $\|A\|_1 = 1$, $|\lambda| \leq 1$ para cada eigenvalor λ de A debido al **teorema clave 7.10 e)**; estos dos hechos juntos implican que $\rho(A) = 1$. Además, como $\|A^i\|_1 \leq \|A\|_1^i = 1$, se sabe que A^i está acotada; entonces el **teorema 9.30** implica que cada eigenvalor de magnitud 1 tiene multiplicidades algebraicas y geométricas iguales –esto es, que A tiene un “conjunto completo” de eigenvectores asociados con tales eigenvalores. Sin embargo, esto no es suficiente para demostrar que $A^i x_0$ converge para toda x_0 , como era el caso del ejemplo 2.6. Por ejemplo, la matriz de Markov

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene eigenvalores +1 y -1, y eigenvectores asociados $v_1 = [1 \ 1]^T$ y $v_2 = [1 \ -1]^T$; si se escribe $x_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2$, entonces $A^i x_0$ es igual ya sea a x_0 (para i par) o a $x_0 - 2a_2 v_2$ (para i impar), por lo tanto, $A^i x_0$ converge (a x_0 de hecho) si y sólo si $a_2 = 0$ –esto es, cuando x_0 es $\mathbf{0}$ o algún eigenvector asociado con $\lambda = 1$.

Si fuera posible de algún modo tener la seguridad de que todos los eigenvalores de A distintos de $\lambda = 1$ tuvieran una magnitud estrictamente menor que 1, no se daría la situación que se acaba de describir; esto requiere, sin embargo, de algunas condiciones adicionales en la matriz A de Markov como lo demuestra el ejemplo de la matriz 2×2 que se acaba de presentar.

La teoría desarrollada para tratar este tema se aplica más en general y no sólo a las matrices de Markov. Antes de proseguir, es necesaria cierta terminología.

- (9.33) **Definición.** Se dice que una matriz $p \times p$ es *reducible* si y sólo si existe una matriz de permutación P tal que

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

en donde \mathbf{B} , es $r \times r$ y \mathbf{D} es $(p - r) \times (p - r)$ para $1 \leq r \leq p - 1$. Una matriz es *irreducible* si y sólo si no es reducible.

El término “reducible” se refiere al hecho de que, para una matriz reducible \mathbf{A} con sus renglones y columnas permutadas como en la definición, las p ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con p incógnitas se reducen a resolver $p - r$ ecuaciones con $p - r$ incógnitas con la matriz de coeficientes \mathbf{D} , y luego a resolver r ecuaciones con r incógnitas con la matriz de coeficientes \mathbf{B} (pero observe la tercera matriz siguiente). Las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{son reducibles,}$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{son irreducibles.}$$

El cuarto ejemplo ilustra el hecho de que toda matriz cuadrada con elementos estrictamente positivos es irreducible; el tercer ejemplo muestra que nuestra descripción intuitiva del concepto “reducible” no es *equivalente* a la definición.

Mucho de lo que se ha demostrado para las matrices de Markov es válido para matrices no negativas irreducibles; esta elegante teoría recibe el nombre de los que la desarrollaron primero, O. Perron y G. Frobenius. Se plantearán los resultados sin demostración.

(9.34) **Teorema** (Perron Frobenius). Sea \mathbf{A} una matriz $p \times p$ no negativa irreducible. Entonces:

- \mathbf{A} tiene un eigenvalor real positivo λ_1 tal que $\lambda_1 = \rho(\mathbf{A})$.
- λ_1 del punto anterior tiene un eigenvector asociado \mathbf{x} con elementos estrictamente positivos.
- λ_1 tiene multiplicidad algebraica $m_1 = 1$.
- Todos los eigenvalores λ de \mathbf{A} que no son λ_1 satisfacen la desigualdad $|\lambda| < |\lambda_1|$ si y sólo si existe un entero positivo k , tal que todos los elementos de \mathbf{A}^k son estrictamente positivos.
- Si los elementos en la diagonal principal de \mathbf{A} son estrictamente positivos, entonces todos los elementos de \mathbf{A}^{p-1} son estrictamente positivos y –por d)– todos los eigenvalores λ de \mathbf{A} que no sean λ_1 satisfacen $|\lambda| < |\lambda_1|$.
- $\rho(\mathbf{A})$ aumenta estrictamente si cualquier elemento de \mathbf{A} aumenta estrictamente.

Los incisos de a) a c) dicen que las matrices no negativas irreducibles son muy parecidas a las matrices de Markov. El inciso d) dice que la condición que se necesitaba en una matriz de Markov para demostrar que $A^i x_0$ converge para toda x_0 es equivalente a que todos los elementos de A^k sean positivos para alguna k ; el inciso e) dice que esto pasará si los elementos diagonales de A son positivos. Un corolario directo de este teorema maneja la generalización del ejemplo 2.6.

(9.35) **Corolario** (potencias de matrices de Markov). Suponga que A es una matriz de Markov irreducible con elementos diagonales estrictamente positivos (una matriz de Markov es no negativa y los elementos de cada una de sus columnas suman 1). Entonces:

- Para cualquier x_0 , $A^i x_0$ converge a αx^* , en donde x^* es un eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda_1 = 1$, y x^* tiene elementos estrictamente positivos que suman 1, y en donde α es igual a la suma de los elementos de x_0 .
- A^i converge a $[x^* \ x^* \ \cdots \ x^*]$.

DEMOSTRACION. Problema 11. ■

Como ejemplo de este teorema se tiene a la matriz 3×3 del ejemplo 2.6; como todos sus elementos son estrictamente positivos, satisface las hipótesis del corolario, mientras que los cálculos de los ejemplos 2.6 y 2.9 ilustran las conclusiones con

$$x^* = [0.45 \quad 0.35 \quad 0.20]^T.$$

PROBLEMAS 9.4

- Demuestre el **teorema clave 9.27 b), d) y f)** escribiendo x_0 como una combinación lineal de los eigenvectores y después calculando $A^i x_0$.
 - Demuestre el **teorema clave 9.27 a), c) y e).**
- ▷ 3. Analice el comportamiento de x_i en el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 2.13 cuando i tiende a infinito si $k = 0.10$.
4. Analice el comportamiento de x_i en el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 2.13 cuando i tiende a infinito si $k = 0.16$.
- ▷ 5. Determine el comportamiento de A^i y de $A^i x_0$ para x_0 arbitraria si

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Demuestre el teorema clave 9.30.

7. Determine el comportamiento de \mathbf{A}^i si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -4 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Cuando x es un número real con $|x| < 1$, se muestra que $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ demostrando primero que la serie converge y segundo escribiendo $(1 - x)(1 + x + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}$ y tomando el límite cuando n tiende a infinito. Utilice un método semejante para demostrar que, si \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ con $\rho(\mathbf{A}) < 1$, entonces $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es no singular y su inversa está dada por la serie convergente

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots$$

▷ **9.** Utilice el problema 8 para demostrar que si $\alpha > \rho(\mathbf{A})$, entonces $\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es no singular y

$$(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{\alpha} + \frac{\mathbf{A}^2}{\alpha^2} + \dots \right).$$

▷ **10.** Demuestre que:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es irreducible

b) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es reducible

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ es reducible

11. Utilice el teorema Perron-Frobenius (9.34) para demostrar el corolario 9.35.

▷ **12.** Compruebe f) en el teorema de Perron-Frobenius (9.34) mediante MATLAB o algún software semejante para examinar explícitamente el radio espectral de la matriz $\mathbf{A}(\alpha)$ cuando $\alpha \geq 0$ aumenta, en donde

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 + 0.9\alpha \\ 3 & 0.8\alpha & 3 \\ \alpha & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

▷ **13.** Caracterice la \mathbf{x}_0 tal que $\mathbf{A}'\mathbf{x}_0$ converja a cero para una matriz \mathbf{A} de Markov.

14. Suponga que \mathbf{A} es no negativa. Utilice el problema 9 para demostrar que, si $\alpha > \rho(\mathbf{A})$, entonces $(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es no negativa.

- 15.** Considere la matriz \mathbf{B} no negativa irreducible: $\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = 0$ excepto cuando $|i - j| = 1$, en cuyo caso $\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = 1$. Comparando \mathbf{B} con la matriz \mathbf{B}' obtenida de \mathbf{B} al aumentar a 2 los 1 en los renglones superiores e inferiores y mediante el inciso e) del teorema de Perron-Frobenius, demuestre que $\rho(\mathbf{B}) < 2$.
- ▷ **16.** Utilice los problemas 14 y 15 para demostrar que $(2\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$ es no negativo, en donde \mathbf{B} es la matriz del problema 15.
- M 17.** Utilice MATLAB o algún software semejante para verificar los incisos del a) al d) del teorema de Perron-Frobenius y el corolario 9.35 en:
- la matriz de transición del modelo del problema 4 de la sección 2.2.
 - la matriz de transición del modelo del problema 6 de la sección 2.2.
- M 18.** Utilice MATLAB o algún programa semejante para comprobar los incisos del a) al d) del teorema de Perron-Frobenius para la matriz de Hilbert 6×6 \mathbf{H}_6 , en donde $\langle \mathbf{H}_6 \rangle_{ij} = 1/(i + j - 1)$.
- ▷ **19.** Suponga que \mathbf{A} es una matriz cuadrada con elementos estrictamente positivos. Demuestre que $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_1$ y que $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1$ si y sólo si $\mathbf{A}/\rho(\mathbf{A})$ es una matriz de Markov.

9.5 APLICACION: EVOLUCION DE SISTEMAS CONTINUOS Y EXPONENCIALES DE MATRICES

Esta sección da otro ejemplo del valor analítico de la forma de Jordan. En la sección anterior se desarrollaron los ejemplos de las secciones 2.2 y 2.3 para ver la evolución de sistemas generales cuyo estado en un punto específico del tiempo se da como una transformación lineal del estado en un tiempo específico anterior. Si el intervalo de tiempo en cuestión es extremadamente pequeño, o si el cambio en el estado es extremadamente pequeño en relación con el estado, a menudo es útil suponer que el estado \mathbf{x} se define para *todo* tiempo t por la función $\mathbf{x}(t)$ y que la información de los cambios de estado se da en términos de la derivada $\dot{\mathbf{x}}$, en donde $\dot{\mathbf{x}}$ es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_p}{dt}(t) \end{bmatrix}$$

si \mathbf{x} es $p \times 1$. En otros casos, particularmente en las ciencias físicas y en la ingeniería, se considera al tiempo como una variable muestreada continuamente, de modo que las descripciones naturales de la evolución del estado \mathbf{x} de un sistema usan la derivada $\dot{\mathbf{x}}$ y ecuaciones diferenciales ordinarias. Se darán tres

ejemplos para ilustrar la forma en que algunas ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en las aplicaciones se pueden expresar en una forma estándar: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

- (9.36) **Ejemplo.** Los modelos de crecimiento de población de la sección 2.3 surgieron esencialmente de la hipótesis de que el crecimiento es proporcional a la población presente:

$$p_{i+1} - p_i = (b - d)p_i$$

con la nomenclatura de esa sección. El modelo continuo análogo para pequeños intervalos de tiempo o para poblaciones con rápido crecimiento usaría la derivada con respecto al tiempo \dot{p} :

$$\dot{p}(t) = (\beta - \delta)p(t),$$

en donde β y δ reflejan las tasas de nacimientos y muertes. Para las poblaciones en competencia tales como las del modelo gallinas-zorros de esa sección, se debería sustituir (2.13) por

$$\begin{aligned}\dot{F}(t) &= -0.4F(t) + 0.5C(t), & F(t_0) &= 100 \\ \dot{C}(t) &= -kF(t) + 0.2C(t), & C(t_0) &= 1000\end{aligned}$$

o, en notación matricial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -k & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

- (9.37) **Ejemplo.** Suponga que $v(t)$ es el ingreso total en el tiempo t de una empresa dada (o quizás el PIB de una economía), y suponga también que, si $i(t)$ de este ingreso se reinvierte, la tasa de crecimiento de v será proporcional a i de modo que

$$\dot{v}(t) = gi(t)$$

para determinada razón de crecimiento g . Se propone reinvertir una parte fija r de los ingresos, de modo que $i(t) = rv(t)$, y se supone que el resto del ingreso, $(1 - r)v(t)$, deberá ser distribuido como ganancias entre los accionistas después de que se han deducido impuestos y otros gastos, de modo que la tasa de crecimiento de la ganancia o utilidad p sea proporcional a $(1 - r)v$, esto es,

$$\dot{p} = s(1 - r)v.$$

Entonces, en resumen, se obtiene el modelo

$$\dot{v} = grv,$$

$$\dot{p} = s(1 - r)v,$$

o, en notación matricial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax},$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} gr & 0 \\ s(1 - r) & 0 \end{bmatrix}.$$

Aquí, g , r y s son constantes.

- (9.38) **Ejemplo.** En la sección 2.5 se dedujeron las ecuaciones diferenciales (2.26) para el movimiento de un par de masas acopladas con resortes; suponga que además se aplican fuerzas externas hacia abajo $F_1(t)$ y $F_2(t)$ a las masas m_1 y m_2 . Esto añade a F_1 al miembro derecho de la primera ecuación en (2.26) y F_2 al de la segunda. Para eliminar segundas derivadas, se introducirán variables auxiliares: sean $x_1 = X_1$, $x_2 = \dot{X}_1$, $x_3 = X_2$ y $x_4 = \dot{X}_2$. Esto necesita de las ecuaciones adicionales $\dot{x}_1 = x_2$ y $\dot{x}_3 = x_4$. El resultado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ m_1 \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 + k_2(x_3 - x_1) + F_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ m_2 \dot{x}_4 &= -k_2(x_3 - x_1) + F_2. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, se puede escribir este sistema como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Cada uno de los tres ejemplos anteriores condujo a una ecuación diferencial

$$(9.39) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f},$$

en donde \mathbf{A} es una matriz de constantes dada $p \times p$, \mathbf{f} es una matriz $p \times 1$ dada de funciones de t y \mathbf{x} es una matriz $p \times 1$ de funciones desconocidas de t que deben

encontrarse para que se satisfaga (9.39) en t . En tales modelos de sistemas en evolución típicamente se da el estado en un tiempo t_0 , por lo tanto

$$(9.40) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

para algún t_0 dado y un vector constante \mathbf{x}_0 dado. Por simplicidad, se supondrá que $\mathbf{t}_0 = 0$ y –por el momento– que $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, de modo que se tratará con

$$(9.41) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Ecuaciones diferenciales con matrices no defectuosas

Como es común, el análisis es más sencillo cuando \mathbf{A} tiene un conjunto linealmente independiente de p eigenvectores, por esta razón se supondrá ésta; para tal matriz \mathbf{A} no defectuosa, es posible escribir

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$$

con la matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Como \mathbf{P}^{-1} es una matriz de constantes, si se premultiplica $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ por \mathbf{P}^{-1} , se obtiene $d(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x})/dt = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x})$, o $\dot{\mathbf{y}} = \Lambda\mathbf{y}$ si se hace que $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$. Ciertamente, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$, de modo que $\mathbf{y}(0)$ también se conoce. Denotando $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$ por \mathbf{y}_0 , es posible escribir el sistema como

$$(9.42) \quad \dot{\mathbf{y}} = \Lambda\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Si $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]^T$, lo anterior no es más que

$$(9.43) \quad \dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad y_i(0) = \langle \mathbf{y}_0 \rangle_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq p.$$

Las ecuaciones escalares (9.43) se resuelven con $y_i(t) = \langle \mathbf{y}_0 \rangle_i \exp(\lambda_i t)$, en donde \exp denota a la función exponencial: $\exp(s) = e^s$ para toda s . En notación matricial esto es

$$(9.44) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{L}(t)\mathbf{y}_0, \text{ en donde}$$

$$\mathbf{L}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_p t) \end{bmatrix}$$

Observe que $\mathbf{L}(t)$ es diagonal. Ya que $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ y $\mathbf{y}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$, (9.44) resulta en

$$(9.45) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{L}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$$

como la solución a (9.41). Esto también se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \mathbf{p}_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \mathbf{p}_2 \exp(\lambda_2 t) + \cdots + a_p \mathbf{p}_p \exp(\lambda_p t),$$

en donde \mathbf{p}_i es la i -ésima columna de \mathbf{P} y $a_i = \langle \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 \rangle_i$. Se resumirá lo que se ha demostrado.

- (9.46) **Teorema** (soluciones con matrices no defectuosas). Sea \mathbf{A} , $p \times p$, no defectuosa con $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$ diagonal con los eigenvalores λ_i de \mathbf{A} en la diagonal principal de Λ . Entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ de (9.41) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{L}(t) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0,$$

en donde $\mathbf{L}(t)$ es la matriz diagonal de (9.44).

- (9.47) **Ejemplo.** Si $k = 0.16$ en el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 9.36, entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.16 & 0.2 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.2$, y se reduce a la forma diagonal de Jordan por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Los elementos diagonales de $\mathbf{L}(t)$ son entonces $\exp(0t) = 1$ y $\exp(-0.2t)$; el teorema 9.46 da fácilmente $\mathbf{x}(t) = [F(t) \ C(t)]^T$ en donde

$$F(t) = 2400 - 2300 \exp(-0.2t) \quad \text{y} \quad C(t) = 1920 - 920 \exp(-0.2t).$$

Conforme pasa el tiempo, las poblaciones tienden a valores estables de 2400 y 1920.

Ecuaciones diferenciales con matrices defectuosas

La situación es casi igual de sencilla para el caso de matrices defectuosas; se tiene que repetir el análisis anterior, pero con \mathbf{J} en lugar de Λ en (9.42):

$$(9.48) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Ya que \mathbf{J} se compone de μ bloques de Jordan, es posible tratar cada bloque independientemente –justo como se trató a cada y_i independientemente para matrices no defectuosas. Por el momento se designarán con z_1, \dots, z_n las

variables afectadas por algún bloque de Jordan de $n \times n$ asociado con el eigenvalor λ . Entonces las ecuaciones para este bloque en (9.48) son

$$(9.49) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + z_2, & \text{de modo que } d\{z_1 \exp(-\lambda t)\}/dt = z_2 \exp(-\lambda t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= \lambda z_{n-1} + z_n, & \text{de modo que } d\{z_{n-1} \exp(-\lambda t)\}/dt = z_n \exp(-\lambda t) \\ \dot{z}_n &= \lambda z_n, & \text{de modo que } d\{z_n \exp(-\lambda t)\}/dt = 0. \end{aligned}$$

Estas se pueden resolver sucesivamente comenzando con la ecuación inferior; el resultado es que z_r es igual a $\exp(\lambda t)$ veces un polinomio de grado $n - r$ en t con coeficientes que involucran a los valores de $z_i(0)$ (problema 4). En forma matricial, esto se expresa como

$$(9.50) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{k}_\lambda(t)\mathbf{z}(0), \text{ en donde}$$

$$\mathbf{k}_\lambda(t) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

La forma completa de Jordan en (9.48) consiste de μ bloques como el que produjo esta solución (9.50). Cada bloque de esos da una $\mathbf{k}_\lambda(t)$ en donde la λ se reemplaza por el eigenvalor adecuado λ_i en ese bloque. Reconstruyendo \mathbf{x} de \mathbf{y} como en (9.45) se obtiene finalmente

$$(9.51) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{PK}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0, \text{ en donde}$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2(t) & \cdots & \mathbf{0} \\ & \cdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{k}_\mu(t) \end{bmatrix},$$

y en donde $\mathbf{k}_i(t)$ es la $\mathbf{k}_\lambda(t)$ de (9.50) siendo λ sustituida por el eigenvalor en el i -ésimo bloque de Jordan \mathbf{J}_i en una forma de Jordan \mathbf{J} de \mathbf{A} .

Resumiendo.

$$(9.52) \quad \textbf{Teorema} \text{ (soluciones generales). Sea } \mathbf{A}, p \times p, \text{ con una forma de Jordan } \mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \text{ con los eigenvalores } \lambda_i \text{ de } \mathbf{A} \text{ en el la diagonal principal de } \mathbf{J}. \quad \text{ (soluciones generales)}$$

Entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ a (9.41) está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{PK}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0,$$

en donde $\mathbf{K}(t)$ es la matriz diagonal en bloques en (9.51).

- (9.53) *Ejemplo.* Si $k = 0.18$ en el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 9.36, entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.40 & 0.5 \\ -0.18 & 0.2 \end{bmatrix}$$

tiene un eigenvalor doble $\lambda_1 = -0.1$, y todo eigenvector es un múltiplo de $[5 \ 3]^T$. Esto significa que \mathbf{A} tiene un bloque de Jordan 2×2 en su forma de Jordan que se encuentra fácilmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.3 \\ -0.06 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.40 & 0.5 \\ -0.18 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La fórmula (9.51) da entonces $\mathbf{x}(t) = [F(t) \ C(t)]^T$, en donde

$$F(t) = (100 + 470t) \exp(-0.1t), \quad C(t) = (1000 + 282t) \exp(-0.1t).$$

Ambas poblaciones mueren cuando t tiende a infinito.

Hasta este punto, se ha supuesto que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ en (9.39). En lugar de tratar ahora el caso no cero, se tomará otro camino. Se podría haber producido todo lo anterior introduciendo *exponentiales de matrices* $\exp(t\mathbf{A})$ en lugar de reducir el problema a ecuaciones escalares como en (9.43) y (9.49). Para ilustrar los dos enfoques se desarrollará a continuación el tema de exponentiales de matrices y después se usarán para tratar (9.39) cuando $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 7.

Exponentiales de matrices

De la sección anterior debería quedar claro que las exponentiales juegan un papel fundamental en la resolución de ecuaciones diferenciales: por ejemplo, $\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ tiene solución $\mathbf{x}(t) = \exp(at)\mathbf{x}_0$. Parece natural considerar la posibilidad de resolver $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ por medio de $\exp(\mathbf{At})\mathbf{x}_0$ si se definiera

adecuadamente $\exp(At)$. Haciendo que \mathbf{B} sea At , se considerará la expresión $\exp(\mathbf{B})$.

Para *números* b , $\exp(b)$ se define por la serie de potencias

$$\exp(b) = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \cdots,$$

la cual converge a $\exp(b)$ para todos los números b reales o complejos. Usando normas matriciales y el concepto de convergencia determinado por las normas, se puede demostrar que

$$\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}^2}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3}{3!} + \cdots$$

converge para toda matriz cuadrada real o compleja \mathbf{B} y por lo tanto se puede usar como una definición de $\exp(\mathbf{B})$. Es fácil ver hacia dónde converge esta serie. Si se encuentra la forma de Jordan $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, entonces, sustituyendo $\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ por \mathbf{B} en la serie, se obtiene

$$\exp(\mathbf{B}) = \mathbf{P} \left(\mathbf{I} + \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J}^2}{2!} + \cdots \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \exp(\mathbf{J}) \mathbf{P}^{-1}.$$

Además, \mathbf{J} y sus potencias son tan sencillas que es posible evaluar explícitamente esta serie en \mathbf{J} . De la fórmula que resulta, se puede probar directamente lo siguiente (problemas 8 a 11).

(9.54) **Teorema** (exponentiales de matrices)

a) La serie infinita

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots$$

converge para toda matriz \mathbf{A} cuadrada real o compleja.

- b) $\exp(r\mathbf{A})\exp(s\mathbf{A}) = \exp(s\mathbf{A})\exp(r\mathbf{A}) = \exp\{(r+s)\mathbf{A}\}$ para todo número r , s , y para toda matriz cuadrada \mathbf{A} .
- c) $\mathbf{A}\exp(\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{A})\mathbf{A}$ para toda matriz cuadrada \mathbf{A} .
- d) La derivada $d\{\exp(t\mathbf{A})\}/dt = \mathbf{A}\exp(t\mathbf{A})$.
- e) Suponiendo que $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es una forma de Jordan de \mathbf{A} –usando la nomenclatura del **teorema clave 9.4**– siendo los bloques de Jordan \mathbf{J}_r $n_r \times n_r$ para $1 \leq r \leq \mu$, entonces se puede encontrar al $\exp(\mathbf{A})$ haciendo $t = 1$ en la siguiente fórmula para $\exp(t\mathbf{A})$. Para cada número t , $\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{Q} \exp(t\mathbf{J}) \mathbf{Q}^{-1}$, en donde

$$\exp(t\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} \exp(t\mathbf{J}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \exp(t\mathbf{J}_\mu) \end{bmatrix},$$

- y en donde $\exp(t\mathbf{J}_r) = \mathbf{k}_\lambda(t)$ para el bloque de Jordan \mathbf{J}_r , $n_r \times n_r$, asociado con el eigenvalor λ , siendo $\mathbf{k}_\lambda(t)$ como se definió en (9.50) reemplazando a la n por n_r .
- f) $\exp(\mathbf{A})$ es no singular y $\{\exp(\mathbf{A})\}^{-1} = \exp(-\mathbf{A})$.
g) $\exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$.

Con esta información, se puede volver a enunciar el teorema 9.52 sobre la solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$.

(9.55) **Corolario.** La solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ es

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0.$$

(9.56) **Ejemplo.** En el ejemplo 9.53 se presentó una matriz \mathbf{A} 2×2 y su forma de Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ para } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.40 & 0.5 \\ -0.18 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Usando \mathbf{P} y \mathbf{P}^{-1} del ejemplo 9.53, resulta

$$\exp(t\mathbf{A}) = \exp(-0.1t) \begin{bmatrix} 1 - 0.3t & 0.5t \\ -0.18t & 1 + 0.3t \end{bmatrix};$$

haciendo $t = 1$, se obtiene

$$\exp(\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{1}\mathbf{A}) = \exp(-0.1) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ -0.18 & 1.3 \end{bmatrix}.$$

Una vez encontradas las soluciones de las ecuaciones diferenciales estudiadas en los ejemplos 9.47 y 9.53, se podría ver inmediatamente cómo se comportaron cuando t tenía a infinito. Como se pueden escribir esas soluciones como $\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0$, esos resultados deberían ser consecuencia de las propiedades de \mathbf{A} y de $\exp(t\mathbf{A})$. La fórmula explícita para $\exp(t\mathbf{A})$ contenida en el teorema 9.54, da una prueba inmediata de esos resultados una vez que se ha entendido el comportamiento de $\exp(\lambda t)$ para una λ posiblemente compleja. Si $\lambda = \alpha + \beta i$ con α y β reales, entonces la serie infinita para $\exp(\lambda t)$ se divide en la parte real y la parte imaginaria y resulta $\exp((\alpha + \beta i)t) = \exp(\alpha t) \{ \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t \}$. Si α , la parte real de λ es negativa, entonces $\exp(\lambda t)$ tiende a cero a medida que t tiende a infinito; si la parte real de λ es positiva, $|\exp(\lambda t)|$ tiende a infinito, y la parte real es cero, $\exp(\lambda t)$ está acotada.

(9.57) **Teorema clave (comportamiento experimental).** A medida que t tiende a más infinito:

- a) $\exp(t\mathbf{A})$ tiende a cero si y sólo si todos los eigenvalores de \mathbf{A} tienen partes reales estrictamente negativas.

- b) $\exp(tA)$ está acotada –esto es, $\|\exp(tA)\| \leq c$ para alguna constante c y toda $t \geq 0$ para una norma y por lo tanto para todas las normas, si y sólo si:
1. la parte real de cada eigenvalor de A es menor o igual a cero; y
 2. cada eigenvalor de A con parte real cero tiene iguales multiplicidades algebraica y geométrica.
- c) $\|\exp(tA)\|$ tiende a infinito –en una norma y por lo tanto en todas las normas– si y sólo si:
1. algún eigenvalor de A tiene parte real estrictamente positiva, o bien
 2. algún eigenvalor de A tiene parte real cero y tiene distintas multiplicidades algebraica y geométrica.

(9.58) **Ejemplo.** Los problemas en los ejemplos 9.47 y 9.53 ilustran este teorema. La matriz A 2×2 del ejemplo 9.47 tiene $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -0.2$; todas las soluciones están acotadas, así como la que allí se presentó. La matriz A 2×2 del ejemplo 9.53 tiene $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.2$; todas las soluciones tienden a cero, como lo hizo la que allí se encontró.

Ecuaciones no homogéneas

Finalmente se volverá a la ecuación *no homogénea* (9.39):

$$(9.59) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

en donde \mathbf{f} es una función de t . El camino a utilizar, basado en exponentes de matrices, se podría haber usado también cuando $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Premultiplicando ambos lados de (9.59) por $\exp(-tA)$, resulta

$$(9.60) \quad \exp(-tA)\dot{\mathbf{x}} - \exp(-tA)A\mathbf{x} = \exp(-tA)\mathbf{f}.$$

El lado izquierdo de (9.60) es justamente la derivada de $Z(t)$, si se define $Z(t)$ como $\exp(-tA)\mathbf{x}(t)$, de modo que el miembro derecho también sea igual a $\dot{Z}(t)$. Como $Z(t) - Z(0)$ es igual a la integral de $\dot{Z}(\tau)$ de 0 a t , se obtiene

$$\exp(-tA)\mathbf{x}(t) - \exp(0A)\mathbf{x}(0) = \int_0^t \exp(-\tau A)\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Ya que $\exp(0A) = \mathbf{I}$ y $\exp(tA) = \{\exp(-tA)\}^{-1}$, la premultiplicación de ambos miembros por $\exp(tA)$ completa la solución de la ecuación no homogénea.

(9.61) **Teorema** (ecuaciones diferenciales no homogéneas). La solución $\mathbf{x}(t)$ de

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

en donde \mathbf{A} y \mathbf{x}_0 son constantes y \mathbf{f} puede depender de t se da por

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp\{(t-\tau)\mathbf{A}\}\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Observe que si $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, esto se reduce al corolario 9.55.

PROBLEMAS 9.5

- ▷ 1. Escriba las ecuaciones diferenciales de la molécula triatómica del problema 4 de la sección 2.5 en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$.
- 2. Resuelva a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

- 3. Resuelva las ecuaciones diferenciales para el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 9.36 para $k = 0.1$
- 4. Demuestre que (9.50) es consecuencia de (9.49).
- 5. Resuelva $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = [2 \ -2 \ 2]^T$, con la matriz \mathbf{A} del ejemplo 9.6.

- ▷ 6. Resuelva

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2, & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2, & x_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

- 7. Resuelva las ecuaciones diferenciales del ejemplo 9.37 con $g = 0.08$, $r = 0.2$, $s = 0.7$, $v(0) = 100$, $p(0) = 5$.

- ▷ 8. Demuestre el teorema 9.54 g) y encuentre $\exp(\mathbf{I})$.
- 9. Utilice la fórmula de $\exp(\mathbf{A})$ del teorema 9.54 e) para demostrar el teorema 9.54 b) y c).
- 10. Demuestre que la serie $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2/2! + \mathbf{A}^3/3! + \dots$ del teorema 9.54 a) converge.
- ▷ 11. Demuestre el teorema 9.54 f).
- 12. Encuentre $\exp(t\mathbf{A})$ y después $\exp(\mathbf{A})$ para la \mathbf{A} del ejemplo 9.47.
- 13. Resuelva $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ siendo \mathbf{A} y \mathbf{x}_0 las del ejemplo 9.47, pero con $\mathbf{f}(t) = [1 \ 1]^T$.
- 14. Resuelva $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ siendo \mathbf{A} y \mathbf{x}_0 las del problema 5, pero con $\mathbf{f}(t) = [1 \ 0 \ t]^T$.
- 15. Compruebe que $\{\exp(\mathbf{A})\}^{-1} = \exp(-\mathbf{A})$ para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 9.47.
- ▷ 16. Encuentre $\exp(\mathbf{A})$ para la \mathbf{A} del ejemplo 9.6.

17. Sin resolver las ecuaciones diferenciales, determine el comportamiento cuando t tiende a más infinito de la solución $\mathbf{x}(t)$ del modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 9.36 cuando $k = 0.1$.

▷ 18. Encuentre un valor de k en el modelo de competencia entre poblaciones del ejemplo 9.36 tal que, a medida que t tiende a más infinito, todas las soluciones estén acotadas, pero no todas las soluciones tiendan a cero.

¶ 19. Utilice MATLAB o algún software semejante para sumar varios términos de la serie $\exp(\mathbf{A})$ para comprobar experimentalmente que la serie converge a $\exp(\mathbf{A})$ para la matriz \mathbf{A} del ejemplo 9.56.

8.6 APLICACION: SOLUCION ITERATIVA DE ECUACIONES LINEALES

Los modelos matemáticos de sistemas físicos o sociales muy complejos a menudo involucran sistemas de ecuaciones lineales con miles de variables, sistemas que se deben resolver muchas veces en el modelo. Hasta las supercomputadoras modernas podrían no ser capaces de almacenar y resolver las ecuaciones usando la eliminación de Gauss lo suficientemente rápido (si es que pueden) para que resulten útiles o efectivas en lo que respecta a su costo.

En tales problemas, a menudo se da el caso de que cada una de las miles de ecuaciones involucra sólo unas cuantas de las miles de variables; esto surge del hecho de que muy a menudo, cada parámetro de un modelo grande sólo interacciona *directamente* con unos pocos de los demás parámetros. En un modelo de economía, por ejemplo, cada individuo hace negocios con unas cuantas personas; en una estructura física complicada, como otro ejemplo, cada miembro está conectado sólo con unas cuantas personas. La matriz que representa tales ecuaciones es, por lo tanto, *poco densa*: sólo contiene un pequeño porcentaje de elementos diferentes de cero.

- (9.62) **Ejemplo.** Suponga que se tiene una matriz A , 10×10 , con la siguiente estructura, en donde “ x ” representa un elemento diferente de cero en la matriz A original, “ 0 ” representa un cero en la matriz A original, cuya presencia se puede aprovechar durante la eliminación de Gauss, y “ \otimes ” representa un cero en la A original que se reemplazará por un número diferente de cero durante la eliminación antes de que ésta se haya adelantado lo suficiente como para poder tomar ventaja del cero.

Aunque sólo 44 de los 100 elementos de \mathbf{A} son diferentes de cero, la mitad completa de los 56 elementos cero se deberán tratar como diferentes de cero durante la eliminación; y al resolver un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, la sustitución en reversa implicará multiplicar 28 veces por cero. Si es posible, se deberá evitar la pérdida de “la poca densidad” y el trabajo inútil de multiplicar por ceros.

Un enfoque es desarrollar procedimientos especiales de eliminación de Gauss para matrices poco densas; por ejemplo, con sólo notar la localización de los muchos ceros en la forma reducida de Gauss anterior, se evitan las multiplicaciones innecesarias, y el sencillo artificio de reordenar las incógnitas como $x_2, x_3, \dots, x_{10}, x_1$, conserva mucha de la poca densidad durante la eliminación: en efecto, se mueve la primera columna hasta la extrema derecha de la matriz, después de lo cual una eliminación de Gauss con intercambio puede aprovechar cada cero del triángulo inferior de \mathbf{A} , sustituyendo a lo más 13 ceros del triángulo superior.

Este ejemplo indica los ahorros potencialmente enormes que se pueden hacer diseñando programas especiales de eliminación de Gauss para matrices poco densas. Este importante tópico está más allá del alcance de este libro; sin embargo, véase Bjorck, Plemons, y Schneider (38); Bunch y Rose (39); Duff y Stewart (41); George y Liu (45); y Rose y Willoughby (51).

Hay métodos alternativos para aprovechar la poca densidad de las matrices, unos que fácilmente pueden explotar la poca densidad de \mathbf{A} y mantener un bajo almacenamiento y demás requisitos computacionales. Entre los más poderosos de esos métodos están los métodos *iterativos*: en lugar de calcular directamente la solución como en la eliminación de Gauss, calculan una sucesión (teóricamente infinita) de soluciones aproximadas \mathbf{x}_r , con el propósito de que converjan rápidamente hacia la solución. El resto de esta sección examinará tales métodos.

Para ejemplificar se tomará $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como problema modelo, en donde

(9.63) \mathbf{A} es 20×20 , simétrica, y tridiagonal:

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{ii} = 2 \text{ para } 1 \leq i \leq 20, \langle \mathbf{A} \rangle_{i,i-1} = \langle \mathbf{A} \rangle_{i-1,i} = -1 \text{ para } 2 \leq i \leq 20, \text{ y} \\ \text{todas las demás } \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = 0.$$

$$\mathbf{b} \text{ es } 20 \times 1: \langle \mathbf{b} \rangle_i = 0.01i \text{ para } 1 \leq i \leq 20.$$

Observe que sólo 58 de los 400 elementos de \mathbf{A} son diferentes de cero; esta cantidad, que representa el 15% es alta comparada con lo que se presenta en la práctica. Observe también que la eliminación de Gauss en \mathbf{A} es sencilla y que no se necesitan métodos iterativos; sólo se usará a \mathbf{A} para ejemplificar las fórmulas siguientes.

Cada uno de los métodos iterativos que se presentan, aunque difieren en la manera de hacerlo, el i -ésimo elemento de una nueva aproximación \mathbf{x}' usando la i -ésima ecuación y los valores de la aproximación anterior \mathbf{x} (y quizás algunos

de los elementos ya calculados de \mathbf{x}'). Se produce una serie de aproximaciones \mathbf{x}_r , comenzando por \mathbf{x} como \mathbf{x}_0 , calculando \mathbf{x}' de \mathbf{x} y haciendo \mathbf{x}_1 igual a \mathbf{x}' ; ponen a \mathbf{x}_1 en lugar de \mathbf{x} , calculan \mathbf{x}' a partir de \mathbf{x} y hacen \mathbf{x}_2 igual a \mathbf{x}' y así sucesivamente. (Se usa esta notación para reducir el número de subíndices y superíndices.)

En toda esta sección, \mathbf{A} es $p \times p$, a_{ij} es $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$, x_i denota a $\langle \mathbf{x} \rangle_i$, x'_i es $\langle \mathbf{x}' \rangle_i$, y b_i quiere decir $\langle \mathbf{b} \rangle_i$.

- (9.64) **Ejemplo.** El método iterativo de *Jacobi* sustituye a la aproximación anterior \mathbf{x} en la i -ésima ecuación para todas las variables excepto para la i -ésima, y calcula esa variable como x'_i :

$$a_{ii}x'_i = -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{ip}x_p + b_i \\ \text{para } 1 \leq i \leq p.$$

En el problema de ejemplo (9.63), esto viene a ser simplemente

$$2x'_i = x_{i-1} + x_{i+1} + 0.01i \quad \text{siendo } 1 \leq i \leq 20.$$

- (9.65) **Ejemplo.** El método iterativo de *Gauss-Seidel* sustituye la nueva aproximación \mathbf{x}' en la i -ésima ecuación para aquellas variables x'_1, \dots, x'_{i-1} que se han actualizado, sustituye la aproximación anterior \mathbf{x} en todas las demás variables excepto en la i -ésima y despeja esa variable como x'_i :

$$a_{ii}x'_i = -a_{i1}x'_1 - \cdots - a_{i,i-1}x'_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{ip}x_p + b_i \\ \text{para } 1 \leq i \leq p.$$

En el problema de ejemplo (9.63), esto simplemente viene a ser

$$2x'_i = x'_{i-1} + x_{i+1} + 0.01i \quad \text{para } 1 \leq i \leq 20.$$

- (9.66) **Ejemplo.** El método iterativo de *sobrerrelajaciones sucesivas* o *SRS*, calcula x'_i como sigue: primero calcula una aproximación temporal x^* a la i -ésima variable como en el método de Gauss-Seidel, y después encuentra a $x'_i = x_i + \omega(x^* - x_i)$ para un *parámetro de sobrerrelajacion fijo* ω , generalmente mayor que 1, cuyo uso tiene el propósito de mover más rápidamente la aproximación hacia la solución. Esto da

$$a_{ii}x^* = -a_{i1}x'_1 - \cdots - a_{i,i-1}x'_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{ip}x_p + b_i, \\ x'_i = x_i + \omega(x^* - x_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq p.$$

En el problema de ejemplo (9.63), esto simplemente es

$$2x^* = x'_{i-1} + x_{i+1} + 0.01i, \quad x'_i = x_i + \omega(x^* - x_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq 20.$$

No todos los métodos iterativos que se usen producirán aproximaciones que converjan a una solución, ni los tres métodos anteriores producirán una aproximación para todos los problemas. Esos tres métodos –y especialmente el SRS con una adecuada selección de ω – son muy efectivos para una extensa clase de matrices que surgen al resolver problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales; el problema ejemplo (9.63) es, de hecho, una de esas matrices. Se requiere de algunas herramientas analíticas para determinar si un método específico será efectivo en un problema específico.

Particiones de matrices

La aplicación de estos métodos al problema del ejemplo (9.63) revela su simplicidad en computación. Para analizar la conducta que los caracteriza, se introducirá notación matricial; *es importante darse cuenta que no se usan las versiones de matrices en los cálculos reales, sino sólo en el análisis*. Escribamos \mathbf{A} como

- (9.67) $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$, en donde \mathbf{D} es una matriz diagonal, \mathbf{L} es una matriz triangular inferior con cero en su diagonal principal, y \mathbf{U} es una matriz triangular superior con ceros en su diagonal principal.

Evidentemente, \mathbf{L} es igual al triángulo inferior de \mathbf{A} , \mathbf{D} es igual a la diagonal principal de \mathbf{A} , y \mathbf{U} es igual al triángulo superior de \mathbf{A} . El examen de las fórmulas para los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SRS muestra que pueden renunciarse como sigue (problemas 5 y 6):

- (9.68) a) El cálculo de Jacobi es

$$\mathbf{D}\mathbf{x}' = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

- b) El cálculo de Gauss-Seidel es

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}' = -\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

- c) El cálculo SRS es

$$(\mathbf{L} + \omega^{-1}\mathbf{D})\mathbf{x}' = -\{\mathbf{U} + (1 - \omega^{-1})\mathbf{D}\}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

De hecho, cada uno de ellos es un caso especial de una clase de métodos basados en partir las matrices $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$; así, se escribe

(9.69) $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}\mathbf{x}' = -\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$

Cada uno de los métodos de (9.68) es de este tipo:

Jacobi usa $\mathbf{M} = \mathbf{D}$, $\mathbf{N} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$.

Gauss-Seidel usa $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$, $\mathbf{N} = \mathbf{U}$.

SRS usa $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \omega^{-1}\mathbf{D}$, $\mathbf{N} = \mathbf{U} + (1 - \omega^{-1})\mathbf{D}$.

La sucesión de aproximaciones \mathbf{x}_r , calculada con esos métodos, la solución verdadera $\tilde{\mathbf{x}}$ y los errores $\delta_r = \mathbf{x}_r - \tilde{\mathbf{x}}$ satisfacen entonces

$$(9.70) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{x}_{r+1} &= -\mathbf{N}\mathbf{x}_r + \mathbf{b} \\ \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} &= -\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \\ \mathbf{M}\delta_{r+1} &= -\mathbf{N}\delta_r, \end{aligned}$$

en donde la tercera ecuación resulta de restar la segunda de la primera. Si \mathbf{M} es no singular, se obtiene

$$(9.71) \quad \begin{aligned} \delta_{r+1} &= \mathbf{H}\delta_r, \text{ en donde } \mathbf{H} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}, \text{ y así resulta} \\ \delta_r &= \mathbf{H}^r\delta_0. \end{aligned}$$

Como se quiere que \mathbf{x}_r converja a $\tilde{\mathbf{x}}$, es necesario que δ_r converja a cero sin importar cuál sea el error inicial δ_0 . Ya que $\delta_r = \mathbf{H}^r\delta_0$, el asunto del comportamiento de δ_r está tratado en el **teorema clave 9.30**: para asegurar que los errores δ_r converjan a cero, es necesario que el radiopectral $\rho(\mathbf{H}) < 1$. Evidentemente, mientras más pequeño sea $\rho(\mathbf{H})$ es la herramienta analítica que se necesita para el análisis de determinados métodos iterativos aplicados a problemas particulares.

- Ejemplo.** Se usa MATLAB para calcular los eigenvalores y después el radio espectral de las matrices adecuadas \mathbf{H} para los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SRS (con varios valores de ω) en los ejemplos 9.64 a 9.66 sobre el problema de ejemplo (9.63); esas matrices se designan respectivamente con \mathbf{H}_J , \mathbf{H}_{GS} y \mathbf{H}_ω (observe que SRS con $\omega = 1$ es precisamente Gauss-Seidel, así $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{GS}$). MATLAB calculó $\rho(\mathbf{H}_J) = 0.9888$ y $\rho(\mathbf{H}_{GS}) = 0.9778$, estando ambos bastante cerca de 1; como se espera que los errores $\|\delta_r\|$ se comporten como $\{\rho(\mathbf{H})\}^r$, entonces esto indica una convergencia bastante lenta. Despejando r en $\{\rho(\mathbf{H})\}^r = \frac{1}{10}$ para ver cuántos pasos se necesitan para reducir el error por un factor de 10, se encuentra que se requieren aproximadamente 204 pasos para el método de Jacobi y 103 pasos para el método de Gauss-Seidel. (Este factor de aproximadamente 2 entre el número de pasos en estos métodos es típico.) Ahora se examinará el desempeño del SRS para distintos valores de ω . Se usó el MATLAB para calcular $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ para ω de 0.0 a 2.0 en intervalos de 0.2, y se observó que era menor entre 1.6 y 2.0; entonces se le calculó en intervalos de 0.05 en esa región, observando que era mínimo de 1.7 a 1.8. Después se le calculó en intervalos de 0.01 en esa región y se encontró que fue mínimo en $\omega = 1.75$. La siguiente tabla muestra valores representativos.

ω	0.6	1.2	1.6	1.7	1.74	1.75	1.76	1.8
$\rho(\mathbf{H}_\omega)$	0.9905	0.9666	0.9056	0.8479	0.7562	0.7500	0.7600	0.8000

La tabla revela que la selección adecuada de ω puede hacer una diferencia dramática en la rapidez de la convergencia. Al escoger la ω óptima de aproximadamente 1.75 da $\rho(\mathbf{H}_{1.75}) = 0.75$, lo que significa que sólo se necesitarán unos 8 pasos –comparados con los 204 para Jacobi y 103 para Gauss-Seidel–de SRS con $\omega = 1.75$ para reducir el error en un factor de 10.

Las comparaciones ilustradas en el ejemplo 9.72 son típicas de una clase amplia de matrices que surgen en la solución numérica de ecuaciones diferenciales; la rapidez del método Gauss-Seidel es típicamente el doble del de Jacobi, siendo el método SRS (*con una selección óptima de ω*) dramáticamente más rápido. El siguiente teorema, enunciado sin demostración (véase por ejemplo la segunda edición en inglés de este libro) lo ilustra.

- (9.73) **Teorema** (Jacobi, Gauss-Seidel y SRS). Suponga que \mathbf{A} es una matriz tridiagonal con elementos diferentes de cero en la diagonal principal:

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{ii} \neq 0, \quad \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1.$$

Sea \mathbf{H}_J , \mathbf{H}_{GS} y \mathbf{H}_ω las matrices cuyos radios espectrales gobiernan la convergencia de esos métodos. Entonces:

- a) $\rho(\mathbf{H}_{GS}) = \{\rho(\mathbf{H}_J)\}^2$ –si Jacobi converge, también lo hace Gauss-Seidel y con doble rapidez; si Jacobi diverge, así lo hace Gauss-Seidel y con doble rapidez.
- b) Si \mathbf{A} tiene eigenvalores reales, entonces el valor de ω que minimiza a $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ es

$$\omega^* = 2/\{1 + (1 - \rho^2)^{1/2}\},$$

en donde $\rho = \rho(\mathbf{H}_J)$; para esta ω^* óptima, $\rho(\mathbf{H}_{\omega^*}) = \omega^* - 1$.

Para interpretar el teorema 9.73, suponga por el momento que $\rho(\mathbf{H}_J) = 1 - \epsilon$ para alguna ϵ pequeña, de modo que el método de Jacobi converja lentamente. Entonces

$$\rho(\mathbf{H}_{GS}) = (1 - \epsilon)^2 = 1 - 2\epsilon + \epsilon^2 \approx 1 - 2\epsilon,$$

algo más pequeño. También,

$$\omega^* = \frac{2}{\{1 + (2\epsilon - \epsilon^2)^{1/2}\}} \approx 2 - 2(2\epsilon)^{1/2},$$

y así $\rho(\mathbf{H}_{\omega^*}) \approx 1 - 2(2\epsilon)^{1/2}$, el cual es apreciablemente más pequeño. Si por ejemplo $\epsilon = 0.00005$, entonces

$$\rho(\mathbf{H}_J) = 0.99995, \quad \rho(\mathbf{H}_{GS}) \approx 0.99990, \quad \text{y} \quad \rho(\mathbf{H}_{\omega^*}) \approx 0.98.$$

Un aspecto interesante e importante de este teorema es que sólo requiere información de $\rho(\mathbf{H}_j)$ para determinar la ω óptima para SRS; esto es útil ya que \mathbf{H}_j es relativamente sencilla. Escribiendo $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ como en (9.67) y encontrando $\mathbf{H}_j = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$, se demuestra que el método de Jacobi será convergente si, por ejemplo, $\|\mathbf{H}_j\|_\infty < 1$; esta desigualdad es válida si y sólo si \mathbf{A} es estrictamente dominante diagonalmente respecto a los renglones —la magnitud de $\langle \mathbf{A} \rangle_{ii}$ es estrictamente mayor que la suma de las magnitudes de $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para $j \neq i$ — lo cual a menudo es válido en las aplicaciones {o es válida una versión ligeramente modificada de esta condición, en la que se omite lo de “estrictamente”, que es suficiente para garantizar que $\rho(\mathbf{H}_j) \leq 1$ }.

PROBLEMAS 9.6

1. Escriba las ecuaciones para aplicar el método de Jacobi a

$$2u + v = 4$$

$$u + 2v = 5.$$

- ▷ 2. Escriba las ecuaciones para aplicar el método de Gauss-Seidel en el problema 1.
- 3. Escriba las ecuaciones para aplicar el método SRS en el problema 1.
- 4. Compruebe (9.68) a), b) y c) en los problemas 1, 2 y 3.
- 5. Deduzca (9.68) a) y b).
- 6. Deduzca (9.68) c).
- ▷ 7. Encuentre las matrices \mathbf{H}_j , \mathbf{H}_{GS} , y \mathbf{H}_ω que sirven como \mathbf{H} en (9.71) en los problemas 1, 2 y 3.
- 8. Utilice las fórmulas generales para \mathbf{M} y \mathbf{N} para encontrar las matrices iterativas \mathbf{H} de (9.71), en general para los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SRS.
- ▷ 9. Encuentre $\rho(\mathbf{H}_j)$, $\rho(\mathbf{H}_{GS})$, y $\rho(\mathbf{H}_{1,1})$ en los problemas 1, 2 y 3.
- 10. Compare, en los problemas 1, 2 y 3 (con $\omega = 1.1$), el número real de pasos necesarios para reducir el error en un factor de 10 (comenzando con $u_0 = v_0 = 0$) con el número $n = -\log_{10}\{\rho(\mathbf{H})\}$ que se pronosticó teóricamente como la solución de $\{\rho(\mathbf{H})\}^n = \frac{1}{10}$.
- ▷ 11. Intercambie las dos ecuaciones a resolver en el problema 1.
 - Demuestre que el método de Jacobi no converge si se aplica a este nuevo sistema.
 - Determine si converge el método de Gauss-Seidel.
 - Examine si se puede encontrar ω de modo que SRS converja.

- 12.** Describa algunas particiones de matrices $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ para la matriz del ejemplo 9.62 que pudieran ser efectivas para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; recuerde que se necesita estar en posibilidad de resolver fácilmente $\mathbf{Mx}_{r+1} = -\mathbf{Nx}_r + \mathbf{b}$ en cada paso.
- 13.** Modifique los elementos en la diagonal principal de la matriz \mathbf{A} del problema de ejemplo (9.63) haciendo $\langle \mathbf{A} \rangle_{ii} = 2 + 0.1i$. Utilice MATLAB o algún programa semejante para encontrar $\rho(\mathbf{H}_I)$, $\rho(\mathbf{H}_{GS})$, y $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ para un rango de valores de ω lo suficientemente grande como para permitir la aproximación a una ω óptima ω^* .
- 14.** a) Utilice $\rho(\mathbf{H}_I)$, para el problema ejemplo (9.63) para determinar la $\omega = \omega^*$ óptima para el método SRS del teorema 9.73.
 b) Compare este valor con el valor de 1.75 determinado experimentalmente.
 c) Utilice MATLAB o algún programa equivalente para calcular $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ y después compárela con el valor teórico de $\omega^* = 1$.
- 15.** Haga lo que se pidió en el problema 14, pero para el problema ejemplo modificado del problema 13; para b), compare con la ω óptima determinada experimentalmente en el problema 13.
- 16.** a) Encuentre los eigenvalores de la matriz \mathbf{H}_ω del problema 3, y después determine la ω que minimiza a $\rho(\mathbf{H}_\omega)$.
 b) Compare la respuesta con la obtenida usando el teorema 9.73 y con $\rho(\mathbf{H}_I) = 0.5$.

9.7 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 9.7

- Demuestre que dos matrices $p \times p$ no defectuosas son semejantes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.
- Suponiendo que \mathbf{A} es una matriz real 2×2 con eigenvalores complejos conjugados $\alpha \pm \beta i$, demuestre que existe una \mathbf{P} real tal que

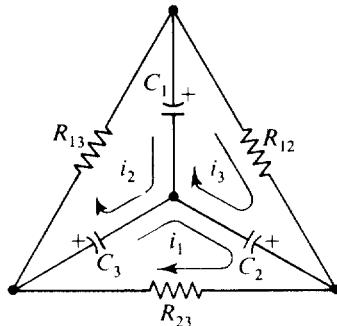
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

- Demuestre considerando el siguiente ejemplo, que hay matrices no defectuosas, con eigenvalores repetidos que no son normales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. El problema 9 de la sección 9.2 muestra que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son no defectuosas y $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, entonces $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ será diagonal en bloques siempre que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ sea diagonal. Suponga que \mathbf{A} es una matriz no defectuosa dada; si se puede encontrar una \mathbf{B} que commute con \mathbf{A} cuyo eigensistema sea fácil de encontrar, entonces se podrá producir una $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sencilla a partir de la cual será posible encontrar fácilmente el eigensistema de \mathbf{A} . Como un ejemplo sencillo, considere el sistema de resistencia y condensadores de la siguiente figura. Si q_i es la carga en el i -ésimo condensador, recordando que el voltaje a través de un condensador C que contiene una carga q es q/C y la corriente a través de él es $i = dq/dt$, demuestre que las ecuaciones para el circuito, suponiendo que todas las $R_{ij} = R$ y $C_i = C$, son

$$RC \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$



Por la simetría, el circuito no se cambia si al condensador 1 se le llama 2, al 2 se le llama 3, y el 3 es el 1. Esto sugiere la prueba de la siguiente matriz de permutación para \mathbf{B} . Los eigenvectores de \mathbf{B} que dan las columnas de \mathbf{P} se pueden encontrar fácilmente. Haciendo $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, para que $\omega^3 = 1$ y $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, se encuentra

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}.$$

Se encontrará rápidamente que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, y entonces se podrá usar el método anterior. Esto da

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

y entonces los eigenvalores de \mathbf{A} son $0, -3$ y -3 , y los eigenvectores son las columnas de \mathbf{P} .

- ▷ 5. Suponga que \mathbf{A} , $p \times p$, tiene un eigenvalor simple λ_1 siendo $|\lambda_1| = \rho(\mathbf{A})$, y que todos los otros eigenvalores λ satisfacen $|\lambda| < \rho(\mathbf{A})$. Muestre cómo usar los valores $\mathbf{A}^i \mathbf{x}_0$ calculados con una \mathbf{x}_0 inicial para obtener una aproximación a λ_1 .
- 6. Dé los detalles para el siguiente esquema de una demostración de que una matriz $n \times n$ de Markov con elementos estrictamente positivos no tiene eigenvalores λ con $|\lambda| = 1$ además del eigenvalor simple $\lambda = 1$: Si $|\lambda| = 1$ y λ es un eigenvalor de \mathbf{A} , entonces sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ que satisface a $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{x}^T$ y

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = |x_{i_0}| = 1$$

para alguna i_0 . De la ecuación i_0 -ésima de $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{x}^T$ deduzca que

$$|x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n a_{j i_0} |x_j| = |x_{i_0}| + \sum_{j=1}^n a_{j i_0} [|x_j| - |x_{i_0}|],$$

que por lo tanto $\sum_{j=1}^n a_{j i_0} [|x_j| - |x_{i_0}|] = 0$, y de aquí que $|x_j| = |x_{i_0}|$ para toda j . De

$$\lambda x_1 = \sum_{j=1}^n a_{j 1} x_j \quad \text{y} \quad |\lambda x_1| = |x_1| = \dots = |x_n| = 1$$

deduzca que $x_1 = \dots = x_n$ de modo que $\mathbf{x} = c \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^T = [1, \dots, 1]$.

Partiendo de

$$\lambda c \mathbf{1}^T = \lambda \mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A} = c \mathbf{1}^T \mathbf{A} = c \mathbf{1}^T,$$

deduzca que $\lambda = 1$. Concluya que $\lambda = 1$ es un eigenvalor simple ya que $\|\mathbf{A}^i\|_1 \leq 1$. Esto demuestra el resultado.

- ▷ 7. Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times p$ y que \mathbf{A} y \mathbf{B} conmutan: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Demuestre que

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{B})\exp(\mathbf{A}),$$

y, muestre por medio de un ejemplo de matrices 2×2 , que lo anterior no necesita ser válido si \mathbf{A} y \mathbf{B} no conmutan.

10

Formas cuadráticas y caracterizaciones variacionales de eigenvalores

Este capítulo continúa el desarrollo de las propiedades de los eigensistemas considerando algunas de las propiedades de sus valores extremos relacionados con funciones cuadráticas especiales; muchos de los resultados tienen un sabor netamente geométrico. Los teoremas clave son 10.14, 10.18, 10.25, 10.28, y 10.32

10.1 INTRODUCCION

Después de las funciones constantes y de las funciones lineales (estudiadas ya exhaustivamente a través de las ecuaciones lineales y de las transformaciones lineales), siguen en nivel de complejidad las funciones cuadráticas. Tales funciones surgen en distintas áreas de aplicación, pero los métodos matriciales permiten un estudio unificado de sus propiedades; a la inversa, las funciones cuadráticas proporcionan puntos de vista importantes sobre conceptos matriciales, especialmente en lo que se refiere a los eigensistemas.

Se estudiarán las funciones cuadráticas especiales llamadas *formas cuadráticas*: $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$, en donde \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ hermitiana, la variable \mathbf{x} se corre \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p , y (\cdot, \cdot) es el producto interior estándar en estos espacios. Ilustramos primero cómo surgen en forma matricial estas formas cuadráticas.

- (10.1) **Ejemplo.** En dos dimensiones, las llamadas *secciones cónicas* son las curvas más sencillas y juegan un papel fundamental en la geometría bidimensional. Clásicamente, se definió a la elipse (hipérbola) como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma (diferencia) de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es igual a una constante α . La geometría

analítica permite la descripción de estas curvas por medio de ecuaciones tales como $x_1^2/25 + x_2^2/16 = 1$ –una elipse con focos en $(\pm 3, 0)$ y $\alpha = 10$ constante– y $x_1^2/16 - x_2^2/9 = 1$ –una hipérbola con focos en $(\pm 5, 0)$ y $\alpha = 8$ constante. También es posible describirlas vía formas cuadráticas: $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 1$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

para la elipse anterior, por ejemplo. En p dimensiones, la ecuación $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 1$ para una $\mathbf{A} p \times p$, produce curvas análogas a las secciones cónicas y son fundamentales para la geometría de \mathbb{R}^p y de \mathbb{C}^p .

(10.2) **Ejemplo.** Muchas aplicaciones involucran optimizaciones: alcanzar alguna meta por el mejor (en cierto sentido) método. De este modo se busca minimizar los costos, minimizar el tiempo perdido, maximizar la eficiencia y así sucesivamente. Esto, matemáticamente, significa minimizar o maximizar alguna función $f(\mathbf{x})$ de p variables x_1, \dots, x_p (escritas como las componentes de la matriz columna \mathbf{x}). Si el valor extremo de f se encuentra, por simplicidad, en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces es posible tener una idea del comportamiento de f para valores cercanos a \mathbf{x} , con la serie de Taylor

$$f(x_1, \dots, x_p) = (f)_0 + \sum_{i=1}^p (f_i)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (f_{ij})_0 x_i x_j + \dots,$$

en donde

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

y $(\cdot)_0$ indica la evaluación en $\mathbf{0}$. En un punto extremo, desde luego, las primeras derivadas f_i son cero y entonces el comportamiento local de f se describe, aproximadamente, por la forma cuadrática $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ en donde $(\mathbf{A})_0 = (f_{ij})_0$. Esto generaliza la teoría cuando $p = 1$, en donde la naturaleza de los valores extremos –mínimo, máximo o punto de inflexión– se determina por la segunda derivada de f .

(10.3) **Ejemplo.** En el estudio de la dinámica de los sistemas físicos, valores físicamente importantes como la energía cinética y la energía potencial, a menudo se aproximan por medio de formas cuadráticas (vía la serie de Taylor) a un estado de equilibrio del sistema. La teoría de vibraciones pequeñas alrededor del equilibrio en sistemas dinámicos de muchas coordenadas involucra, en consecuencia, formas cuadráticas.

(10.4) **Ejemplo.** En el análisis estadístico de los datos descritos por variables aleatorias x_1, \dots, x_p , el *valor esperado* de x_i es el valor promedio de x_i de

un gran número de ensayos y se le llama $E(x_i)$. E es lineal porque $E(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1E(x_1) + a_2E(x_2)$ para todas las constantes a_i . Suponga que las variables aleatorias tienen promedios cero, de tal modo que $E(x_i) = 0$ para toda i . La *varianza* de x_i se define como $E(x_i^2)$, y la *varianza total* V del conjunto de x_i se define como $V = E(x_1^2 + \dots + x_p^2)$. La *matriz S de covarianza* es la matriz $p \times p$ en donde $\langle S \rangle_{ij} = s_{ij} = E(x_i x_j)$. De este modo, la varianza $E(x_i^2)$ es igual a s_{ii} para toda i , y la varianza total V es igual a $s_{11} + \dots + s_{pp}$.

A menudo es importante buscar en el análisis estadístico de datos algún conjunto pequeño de nuevas variables o factores que expliquen los resultados experimentales. Un método común es buscar una nueva variable

$$y_1 = a_1x_1 + \dots + a_px_p$$

cuyas variaciones reflejen en cierto sentido y tanto como sea posible las variaciones de las x_i . Técnicamente, esto requiere que se escoja $\mathbf{a} = [a_1 \ \dots \ a_p]^T$ para que maximice la varianza $E(y_1^2)$ en y_1 , estando sujeta a la condición que $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$. Como $\mathbf{S} = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$ si $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_p]^T$ y $y_1 = \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{a}$, se tiene que

$$E(y_1^2) = E(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{S}\mathbf{a}.$$

Esto es, se busca a \mathbf{a} para que maximice a $(\mathbf{a}, \mathbf{S}\mathbf{a})$ estando sujeta a la condición $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$. De nuevo, las formas cuadráticas son el corazón del asunto.

Habiendo visto algunos ejemplos de los distintos caminos por los que surgen las formas cuadráticas, será posible comenzar su estudio. Primero se verá el caso de dos variables, en el cual serán de gran ayuda la intuición y el sentido geométrico.

PROBLEMAS 10.1

- ▷ 1. Escriba explícitamente en términos de x_1 y x_2 las formas cuadráticas generadas por

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

2. Grafique la elipse cuya ecuación es $x_1^2/25 + x_2^2/16 = 1$.
 3. Grafique la elipse cuya ecuación es $x_1^2/16 + x_2^2/25 = 1$.
- ▷ 4. Encuentre una ecuación de la elipse que tiene focos en $(0, \pm 4)$ si la constante α que representa la suma de las distancias es 10. Grafíquela.
5. Grafique la hipérbola cuya ecuación es $x_1^2/16 - x_2^2/9 = 1$.

6. Grafique la hipérbola cuya ecuación es $x_1^2/9 - x_2^2/16 = 1$.
- ▷ 7. Encuentre una ecuación de la hipérbola que tiene focos en $(\pm 13, 0)$ si la constante α que representa la diferencia de las distancias es 24. Grafíquela.
8. Encuentre la serie de Taylor con términos cuadráticos para $\exp(2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2)$ desarrollada en la vecindad del punto minimizante $x_1 = x_2 = 0$.

10.2 FORMAS CUADRADICAS EN \mathbb{R}^2

Antes de explorar a profundidad las formas cuadráticas, es necesario explicar por qué surgen de modo natural las matrices hermitianas (o reales simétricas). Considere una cuadrática general en dos variables reales, $Q = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, en donde a, b , y c son reales. Varias matrices \mathbf{A} producen esta forma cuadrática como resultado de $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b+1 \\ b-1 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix},$$

para citar unos pocos ejemplos. Sólo uno de ellos (el último) es simétrico real (por consiguiente hermitiano); ya que en el capítulo ocho se han desarrollado resultados tan poderosos para matrices hermitianas, se buscará tomar ventaja de esto *escogiendo* una \mathbf{A} hermitiana para generar la forma cuadrática.

La pregunta ahora es cómo hacer uso del hecho de que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

que define la forma cuadrática

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

es simétrica real (por lo tanto hermitiana y por lo tanto normal). Por el **corolario clave 8.9** y el **teorema clave 8.6**, hay una matriz ortogonal \mathbf{P} y una matriz Λ real diagonal tales que $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$; los elementos en la diagonal principal de Λ son los eigenvalores λ_1 y λ_2 de \mathbf{A} , mientras que las columnas \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 de \mathbf{P} forman un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados. Si se sustituye $\mathbf{A} = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T$ en la definición de Q resulta

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T) \mathbf{x} = (\mathbf{P}^T \mathbf{x})^T \Lambda (\mathbf{P}^T \mathbf{x}).$$

Esto es,

$$(10.5) \quad Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = (\xi, \Lambda\xi) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2, \text{ en donde } \xi = \mathbf{P}^T\mathbf{x}.$$

La forma cuadrática Q toma una forma extremadamente sencilla en términos de las nuevas variables ξ . Para que esto sea útil, es necesario contestar dos preguntas:

1. ¿Cuál será la naturaleza de la forma cuadrática en ξ ?
2. ¿Cómo se puede convertir la información de la forma cuadrática en ξ en información en la forma cuadrática en \mathbf{x} ?

Un artificio estándar para comprender una función de dos variables es examinar sus *curvas de nivel*. Las curvas C_t que pasan por todos aquellos puntos en los cuales la función es igual a t para varios valores de t . Esto se hace usualmente en los mapas del clima que muestran curvas de temperatura constante y con los mapas topográficos que muestran curvas de altitud constante; estas curvas permiten ver fácilmente las distribuciones de temperatura en un caso e identificar las colinas y otras características del terreno en el otro caso. Por lo tanto, primero se examinarán las curvas de nivel \tilde{C}_t de todos aquellos puntos ξ en los cuales $\tilde{Q}(\xi) = t$, en donde $\tilde{Q}(\xi) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2$. Despues, se demostrará cómo obtener información sobre las curvas de nivel correspondientes C_t para $Q(\mathbf{x})$.

Gráficas en variables ξ

La curva de nivel \tilde{C}_t es la gráfica en un plano de coordenadas $\xi_1 - \xi_2$ de

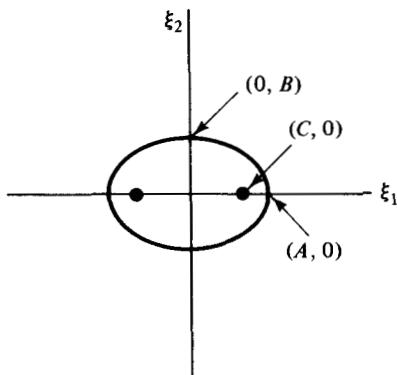
$$(10.6) \quad \tilde{Q}(\xi) = t, \text{ en donde } \tilde{Q}(\xi) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2;$$

esto es sencillamente una de las secciones cónicas conocidas de la geometría analítica y del cálculo que se repasará brevemente. Primero, los casos, “típicos”.

- (10.7) **Elipse.** Si λ_1, λ_2 y t son todos estrictamente positivos (o todos estrictamente negativos), entonces \tilde{C}_t es una elipse cuyos ejes mayor y menor quedan en los ejes ξ_1 y ξ_2 . Dividiendo entre t a (10.6) y reacomodando los términos se obtiene la forma acostumbrada de una elipse.

$$\frac{\xi_1^2}{A^2} + \frac{\xi_2^2}{B^2} = 1, \text{ en donde } A = \left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad B = \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{1/2}.$$

Si $A \geq B$, los focos están en $(\pm C, 0)$, en donde $C^2 = A^2 - B^2$; la elipse es el conjunto de todos aquellos puntos cuya suma de las distancias a los dos focos es igual a $2A$.

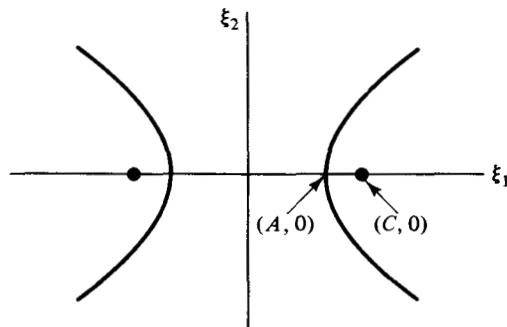


$$\frac{\xi_1^2}{A^2} + \frac{\xi_2^2}{B^2} = 1, \quad A \geq B, \quad C^2 = A^2 - B^2$$

- (10.8) **Hipérbola.** Si t es diferente de cero y si λ_1 y λ_2 son diferentes de cero y de signos opuestos, \tilde{C}_t es una hipérbola; para concretar, suponga que $t/\lambda_1 > 0$ y que $t/\lambda_2 < 0$. Dividiendo (10.6) entre t y reacomodando los términos, resulta la forma acostumbrada de una hipérbola:

$$\frac{\xi_1^2}{A^2} - \frac{\xi_2^2}{B^2} = 1, \text{ en donde } A = \left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad B = \left(-\frac{t}{\lambda_2}\right)^{1/2}.$$

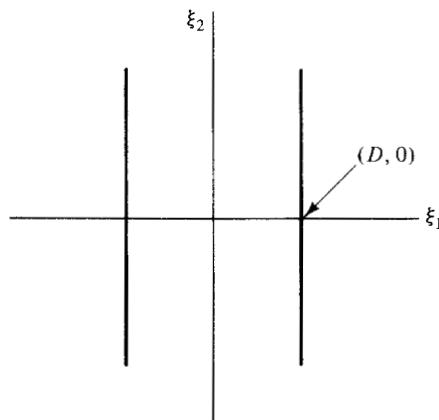
Los focos están en $(\pm C, 0)$, en donde $C^2 = A^2 + B^2$; la hipérbola es el conjunto de todos aquellos puntos cuya diferencia en magnitud de las distancias a los dos focos es igual a $2A$.



$$\frac{\xi_1^2}{A^2} - \frac{\xi_2^2}{B^2} = 1, \quad C^2 = A^2 + B^2$$

- (10.9) **Rectas paralelas.** Si una de las λ_i es exactamente igual a 0 mientras que la otra tiene el mismo signo que t (diferente de cero), entonces \tilde{C}_t es un par de rectas paralelas horizontales o verticales; suponga, para concretar, que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ y $t > 0$. Entonces (10.6) viene a ser $\xi_1 = \pm(t/\lambda_1)^{1/2}$ –un par de

rectas paralelas al eje ξ_2 . \tilde{C}_t se puede describir como el conjunto de todos los puntos cuya distancia a la recta $\xi_1 = 0$ es igual a $|(t/\lambda_1)^{1/2}|$.



$$\xi_1 = \pm D = (t/\lambda_1)^{1/2}$$

Hay también algunos casos “excepcionales” –tales como el de $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $t < 0$ en cuyo caso \tilde{C}_t es vacío; véanse los problemas 2 y 3.

- (10.10) **Ejemplo.** La forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = 13x_1^2 + 6\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2$ está generada por la matriz real simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}.$$

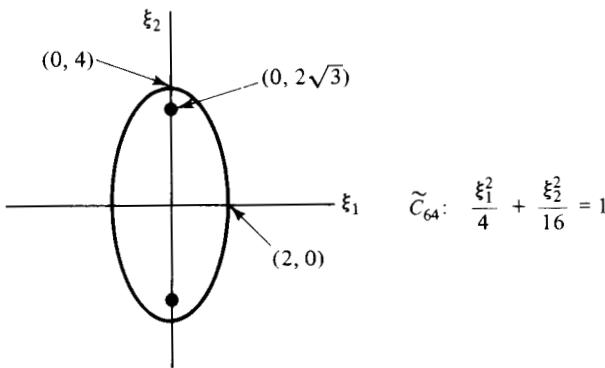
Se encuentra que fácilmente los eigenvalores son $\lambda_1 = 16$ y $\lambda_2 = 4$ con eigenvectores ortonormales asociados

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^T.$$

Con $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$, se obtiene $\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$ diagonal elementos 16 y 4. Se tiene

$$\tilde{Q}(\boldsymbol{\xi}) = 16\xi_1^2 + 4\xi_2^2,$$

cuyas curvas de nivel típicas \tilde{C}_t son elipses: por ejemplo, \tilde{C}_{64} tiene como gráfica



La relación entre x y ξ es

$$\xi = P^T x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} x, \quad x = P \xi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xi.$$

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 4.

Gráficas en variables x

Ahora se convertirá la información detallada en (10.7–9) sobre curvas de nivel \tilde{C}_t en variables ξ , en información sobre las curvas de nivel C_t en variables x . Para dos variables, el método tradicional es considerar la transformación de x a ξ como una rotación elemental; sin embargo, esto no se generaliza satisfactoriamente para p variables. En lugar de esto, se tomará un punto de vista que se puede generalizar.

El primer paso es notar que ξ está en \tilde{C}_t si y sólo si $x = P\xi$ está en C_t (observe que se tiene el mismo valor t). ξ en \tilde{C}_t significa que $t = (\xi, \Lambda\xi)$, lo cual es igual a (x, Ax) de acuerdo a (10.5) y viceversa. En otras palabras,

C_t es precisamente la imagen de \tilde{C}_t bajo la transformación lineal \mathcal{T} definida por $\mathcal{T}(\xi) = P\xi$.

El segundo paso es recordar el hecho crucial sobre matrices ortogonales: conservan la longitud $-\|\mathcal{T}(\xi)\|_2 = \|P\xi\|_2 = \|\xi\|_2$ para toda ξ .

Finalmente, observe que cada curva de nivel \tilde{C}_t en variables ξ se definió en términos de longitudes y puntos: en (10.7), \tilde{C}_t era el conjunto de puntos $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T$ la suma de cuyas distancias de los focos

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = [C \ 0]^T \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{f}}_2 = [-C \ 0]^T$$

es igual a $2A$. Esto significa que C_t es el conjunto de puntos $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$, la suma de cuyas distancias de $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}_1$ y $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}_2$ es igual a $2A$. Esto es justamente una elipse; ya que la distancia $2C$ entre los focos y la suma $2A$ es la misma para \tilde{C}_t que para C_t , las elipses son congruentes ($-C_t$ se podría haber sobre puesto a \tilde{C}_t y hubieran coincidido perfectamente).

Por lo tanto es posible concluir que, en general,

las curvas de nivel C_t en variables \mathbf{x} son congruentes con las curvas de nivel \tilde{C}_t en variables ξ y por lo tanto son elipses, hipérbolas, rectas paralelas o alguno de los casos excepcionales. (Note que esto depende mucho del hecho de que \mathbf{P} es unitaria; véase el problema 5.)

Otro modo generalizable para visualizar la transformación de \tilde{C}_t a C_t por \mathbf{P} es recordar que \mathbf{P} se puede escribir como el producto de, cuando más, dos reflexiones elementales sobre una recta **{(teorema clave 7.38 b)}**. Si se visualiza una reflexión en un plano con respecto a una recta como *una rotación del plano en el espacio tridimensional en 180° usando la recta dada como eje de rotación*, entonces será fácil ver que esto transforma cualquier figura geométrica en una figura congruente con la original. De este modo, toda transformación ortogonal –como producto de tales reflexiones– se comporta de manera semejante.

- (10.11) **Ejemplo.** Se encontró que las curvas de nivel \tilde{C}_t del ejemplo 10.10 eran elipses, y en particular que \tilde{C}_{64} tiene ξ focos

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = [0 \ C]^T \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{f}}_2 = [0 \ -C]^T,$$

siendo la suma de las distancias importantes igual a $2A$, en donde

$$A^2 = 16 \quad \text{y} \quad C^2 = A^2 - B^2 = 16 - 4 = 12.$$

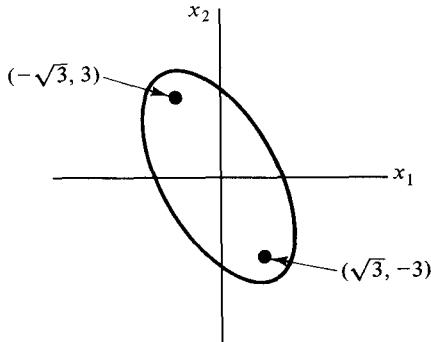
Por lo tanto los focos \mathbf{x} para C_t son

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}_1 = \left[\frac{C}{2} \quad -\frac{C\sqrt{3}}{2} \right]^T = [\sqrt{3} \ -3]^T$$

y

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}_2 = \left[-\frac{C}{2} \quad \frac{C\sqrt{3}}{2} \right]^T = [-\sqrt{3} \ 3]^T,$$

y la suma de las distancias relevantes es igual a $2A = 8$. La gráfica de abajo es la de C_{64} : $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 64$.



$$C_{64}: 13x_1^2 + 6\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2 = 64$$

PROBLEMAS 10.2

1. a) Demuestre que cada una de las cuatro matrices al comienzo de esta sección genera la misma forma cuadrática en \mathbb{R}^2 .
 b) Encuentre todas las matrices reales $2 \times 2 \mathbf{A}$ que generan la misma forma cuadrática en \mathbb{R}^2 .
 c) Encuentre todas las matrices reales simétricas 2×2 que la generan.
 d) Encuentre todas las (posiblemente complejas) matrices hermitianas $2 \times 2 \mathbf{A}$ que la generan en \mathbb{R}^2 .
- ▷ 2. Encuentre todas las condiciones para λ_i y t para las cuales las curvas de nivel \tilde{C}_t de (10.6) son vacías.
3. Encuentre todas las condiciones para λ_i y t para las cuales las curvas de nivel \tilde{C}_t de (10.6) son sólo puntos.
- ▷ 4. Para cada una de las formas cuadráticas en \mathbf{x} siguientes, encuentre la forma sencilla (10.5) en ξ y grafique las curvas de nivel \tilde{C}_t para varias t para ver la forma en que varía \tilde{C}_t conforme varía t :
 - a) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$
 - b) $x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2$
 - c) $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$
 - d) $-5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$
 - e) $11x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$
- ▷ 5. Considere el círculo \tilde{C} en ξ dado por $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 9$. Se sabe que el conjunto de $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$ es congruente a \tilde{C} cuando ξ varía sobre \tilde{C} , por lo tanto será un círculo si \mathbf{P} es unitaria. Demuestre que la curva C de todas las $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$ no es congruente a \tilde{C} cuando ξ varía en \tilde{C} , si $\mathbf{P} = \text{diag}(8, 1)$ (la cual no es unitaria).

6. Grafique la curva de nivel C_t en \mathbf{x} correspondiendo a cada curva de nivel \tilde{C}_t en ξ para cada una de las formas cuadráticas del problema 4 a), b) c), d) y e).

10.3 FORMAS CUADRATICAS EN \mathbb{R}^p Y EN \mathbb{C}^p

Con excepción de la omisión de las gráficas debido a la imposibilidad de dibujar en p dimensiones, aquí se seguirá la misma ruta tan útil en la sección precedente para \mathbb{R}^2 . El primer asunto será la restricción a matrices hermitianas o simétricas reales.

En la práctica, generalmente uno sólo se preocupa de las formas cuadráticas $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ que sólo toman valores *reales*; en los casos en que Q es compleja, por lo general sólo se puede estudiar la parte real de Q . Se supondrá, por lo tanto, que $Q(\mathbf{x})$ es real, pero *no que \mathbf{x} y \mathbf{A} sean reales*. Aun cuando \mathbf{A} y \mathbf{x} puedan ser complejas, necesariamente $Q(\mathbf{x})$ será real si, por ejemplo, \mathbf{A} es hermitiana ($\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$):

$$\mathbf{x}^H(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^H\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{x} = (\mathbf{Ax})^H\mathbf{x};$$

como el término del extremo derecho también es igual al complejo conjugado del término del extremo izquierdo, su valor común debe ser entonces real. Pero ¿podría haber matrices *no* hermitianas cuyas formas cuadráticas sean reales? El siguiente teorema contesta la pregunta.

- (10.12) **Teorema** (formas cuadráticas reales). Suponga que la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ está generada por una matriz $\mathbf{A} p \times p$, entonces:
- $Q(\mathbf{x})$ es real para toda \mathbf{x} compleja si y sólo si \mathbf{A} es hermitiana.
 - $Q(\mathbf{x})$ es real para toda \mathbf{x} real si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{H}$, en donde \mathbf{R} es real y \mathbf{H} es hermitiana; en este caso, en que $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{H}$, la forma cuadrática generada por \mathbf{A} es idéntica a la generada por una matriz real simétrica \mathbf{A}' , en donde $\mathbf{A}' = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$.

DEMOSTRACION

- (hermitiana \Rightarrow real) Lo cual se acaba de demostrar.
- (real \Rightarrow hermitiana) Como $Q(\mathbf{e}_r) = \langle \mathbf{A} \rangle_{rr}$, los elementos diagonales a_{11}, \dots, a_{pp} de \mathbf{A} deben ser reales; sea $\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{pp})$. Ya que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{Dx}) = a_{11}|x_1|^2 + \dots + a_{pp}|x_p|^2$$

es real, como lo es $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$, así lo será la forma cuadrática generada por $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{D}$. Sea α el elemento $\langle \mathbf{A}_0 \rangle_{rs} = \langle \mathbf{A} \rangle_{rs}$ para $r > s$; sea $\beta \langle \mathbf{A}_0 \rangle_{sr} = \langle \mathbf{A} \rangle_{sr}$, sea $\mathbf{x}_{rs} = \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_s$, y sea $\mathbf{y}_{rs} = \mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_s$. Entonces, si c se define como $(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{rs}) = \beta + \alpha$ y d se define como $(\mathbf{y}_{rs}, \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_{rs}) = i(\beta - \alpha)$, ambos

deben ser reales. Despejando a α y β en términos de los reales c y d , resulta

$$\alpha = \frac{c}{2} + \frac{id}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{c}{2} - \frac{id}{2},$$

esto es, $\beta = \bar{\alpha}$ y por lo tanto \mathbf{A}_0 (y también \mathbf{A}) es hermitiana ya que r y s son arbitrarias.

- b) ($\mathbf{R} + \mathbf{H} \Rightarrow$ real) La forma cuadrática en \mathbb{R}^p generada por \mathbf{R} real, es real, y la generada por la \mathbf{H} hermitiana es real por a); así, será real la generada por $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{H}$.

(real $\Rightarrow \mathbf{R} + \mathbf{H}$) Sean $\mathbf{D}, \mathbf{A}_0, r, s, \alpha, \beta, \mathbf{x}_{rs}$ y c como en la demostración de a). \mathbf{D} y $c = \alpha + \beta$ serán de nuevo reales. Sea \mathbf{R} la matriz real $p \times p$ formada partiendo de las partes reales de los elementos de \mathbf{A} , y sea \mathbf{H} la matriz puramente imaginaria de los elementos de \mathbf{A} ; es claro que $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{H}$. Entonces

$$c \text{ real} = \langle \mathbf{A} \rangle_{rs} + \langle \mathbf{A} \rangle_{sr} = \langle \mathbf{R} \rangle_{rs} + \langle \mathbf{R} \rangle_{sr} + \langle \mathbf{H} \rangle_{rs} + \langle \mathbf{H} \rangle_{sr},$$

de modo que el número puramente imaginario $\langle \mathbf{H} \rangle_{rs} + \langle \mathbf{H} \rangle_{sr}$ es real y por lo tanto cero. Esto significa que $\langle \mathbf{H} \rangle_{rs} = -\langle \mathbf{H} \rangle_{sr}$ y por lo tanto \mathbf{H} es hermitiana como se afirmó, ya que r y s son arbitrarias.

$(\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{A}')$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{A}'\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}' \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} / 2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} / 2 + (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{x} / 2 \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} / 2 + \mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) / 2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

y ciertamente las formas cuadráticas serán idénticas. Para ver que \mathbf{A}' es real y simétrica, observe primero que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T,$$

por lo tanto \mathbf{A}' será simétrica. En lo que respecta a que \mathbf{A}' es real, se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T &= \mathbf{R} + \mathbf{H} + \mathbf{R}^T + \mathbf{H}^T = \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + \mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}^H \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + \mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

(porque \mathbf{H} es hermitiana), lo cual es real. ■

Lo anterior justifica la restricción a las formas cuadráticas generadas por matrices hermitianas y simétricas reales.

(10.13) **Definición.**

- a) Una forma cuadrática en \mathbb{C}^p es una función de valor real

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^H \mathbf{Ax}$$

definida por una matriz \mathbf{A} , $p \times p$ hermitiana para toda \mathbf{x} en \mathbb{C}^p .

b) Una *forma cuadrática en \mathbb{R}^p* es una función de valor real

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$$

definida por una matriz \mathbf{A} , $p \times p$, simétrica real para toda \mathbf{x} en \mathbb{R}^p .

No hay diferencia en las teorías de formas cuadráticas en \mathbb{C}^p y en \mathbb{R}^p excepto por la aparición de H en lugar de T . Las dos se tratarán simultáneamente usando $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ para denotar la forma cuadrática, en donde (\cdot, \cdot) , como de costumbre, significa el producto interno estándar en \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p ; generalmente, simplemente se hará referencia a la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ sin nombrar explícitamente a \mathbb{R} o a \mathbb{C} .

Se procederá como en la sección anterior.

(10.14)

Teorema clave (formas cuadráticas diagonales). Sea $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ la forma cuadrática definida por una matriz hermitiana \mathbf{A} , $p \times p$. Entonces:

- a) Existen p números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ y una matriz unitaria \mathbf{P} tales que

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\xi) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \dots + \lambda_p |\xi_p|^2 \text{ en donde } \xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$$

Se dice que \tilde{Q} es una *forma diagonal* de Q , y se dice que Q se ha *diagonalizado* por la transformación a ξ , ya que

$$\tilde{Q}(\xi) = (\xi, \Lambda \xi) \quad \text{con } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

- b) Los números λ_i son los eigenvalores de \mathbf{A} , las columnas de \mathbf{P} forman un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados, y $\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$.
c) Si \mathbf{A} es simétrica real y \mathbf{x} es real, entonces \mathbf{P} puede tomarse como ortogonal y $|\xi_i|^2$ se puede reemplazar por ξ_i^2 .

DEMOSTRACION. Es consecuencia directa del **corolario clave 8.9** y del **teorema clave 8.6** sustituyendo $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$ en $Q(\mathbf{x})$ como en la sección anterior. ■

(10.15)

Ejemplo. Considere la forma cuadrática definida por la matriz simétrica real 3×3 \mathbf{A} , del ejemplo 8.11:

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_3^2 - 32x_1x_2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3.$$

En ese ejemplo se encontró que el eigensistema es

$$\lambda_1 = 27 \quad \text{con } \mathbf{v}_1 = \left[\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right]^T$$

y

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -9 \quad \text{con } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{ y}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}^T.$$

Si se forma $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]$ y se definen entonces nuevas variables $\xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x}$ de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$, se obtiene

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\xi) = 27\xi_1^2 - 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2,$$

en donde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left(-\frac{2}{3}\right)x_1 + \left(\frac{2}{3}\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 \\ \xi_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_2 \\ \xi_3 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)x_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)x_2 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)x_3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(-\frac{2}{3}\right)\xi_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi_2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\xi_3 \\ x_2 &= \left(\frac{2}{3}\right)\xi_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\xi_3 \\ x_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)\xi_1 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\xi_3. \end{aligned}$$

La forma sencilla de $\tilde{Q}(\xi)$ que sólo involucra tres términos, muestra la ventaja de diagonalizar con un cambio adecuado de variables.

Ahora podrá resolver el problema 1.

Superficies de nivel en \mathbb{R}^p

El análogo a las curvas de nivel estudiados en la sección 10.2, son las *superficies de nivel* S_t : el conjunto de todas las \mathbf{x} que satisfacen $Q(\mathbf{x}) = t$. Suponga que la \mathbf{A} , $p \times p$, que define la forma cuadrática, es real simétrica y que \mathbf{x} varía en \mathbb{R}^p . De acuerdo al **teorema clave 10.14**, Q se puede diagonalizar por una transformación ortogonal \mathbf{P} que la lleva a la forma cuadrática diagonal $\tilde{Q}(\xi)$ con $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$. Como en

la sección 10.2, está claro que \mathbf{x} está en la superficie de nivel S_t si y sólo si ξ está en la superficie de nivel \tilde{S}_t de aquellas ξ que satisfacen a $\tilde{Q}(\xi) = t$. El **teorema clave 7.38 b)** dice entonces que \mathbf{P} se puede escribir como el producto de cuando más p reflexiones elementales, cada una de las cuales produce claramente superficies congruentes a \tilde{S}_t ; esto implica que

las superficies de nivel S_t determinadas por $Q(\mathbf{x}) = t$ son congruentes a aquellas \tilde{S}_t determinadas por $\tilde{Q}(\xi) = t$.

La naturaleza de esas superficies de nivel depende, como en el caso de $p = 2$, de los signos de los términos λ_i en la forma diagonal \tilde{Q} –esto es, de los signos de los eigenvalores de \mathbf{A} . En dos dimensiones, por ejemplo, se vió que si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo (diferente de cero), se producen elipses; que si λ_1 y λ_2 tienen signos contrarios, producen hipérbolas, y que una λ_i cero produce líneas rectas paralelas– una forma geométrica fundamentalmente distinta en cada caso. En tres dimensiones, en donde

$$\tilde{Q}(\xi) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2,$$

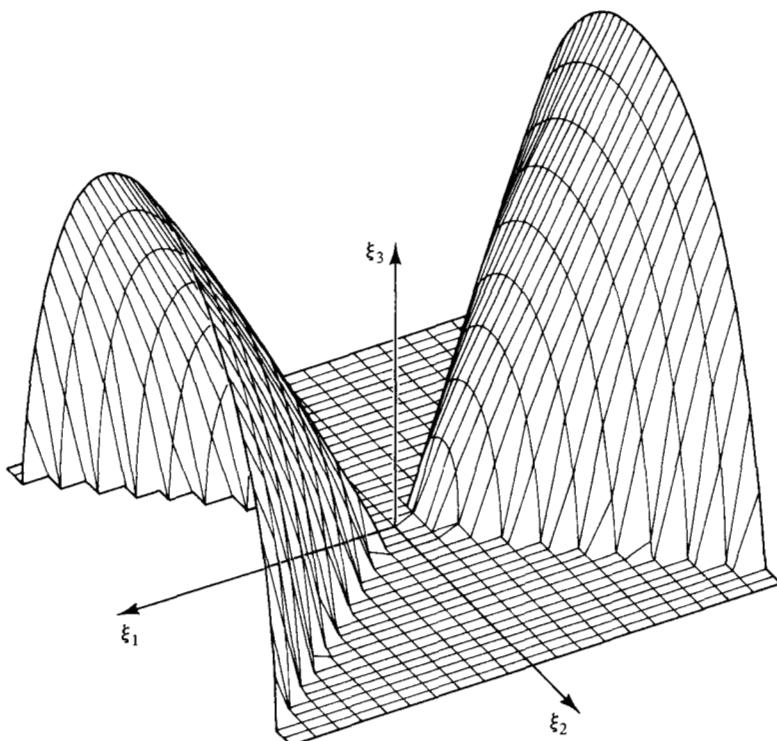
los casos típicos de \tilde{S}_t para t positiva, se pueden clasificar y visualizar en el espacio físico como sigue:

1. *Elipsoide* si λ_1 , λ_2 y λ_3 son estrictamente positivas. Si dos de las λ_i son iguales, la superficie es un elipsoide de revolución (los cortes transversales en una dirección son círculos); si las tres λ_i son iguales, la superficie es una esfera.
2. *Hiperboloide de un manto* si dos λ_i son positivas y una es negativa. Si las λ_i positivas son iguales, la superficie será un hiperboloide de revolución.
3. *Hiperboloide de dos mantos* si una λ_i es positiva y dos son negativas. Si las λ_i negativas son iguales, la superficie es un hiperboloide de revolución.
4. *Cilindro elíptico o hiperbólico* si exactamente una de las λ_i es igual a cero. El cilindro será elíptico si las otras λ_i son positivas, e hiperbólico si tiene signos opuestos y no son cero.
5. *Dos planos paralelos* si exactamente dos de las λ_i son iguales a cero y la tercera es positiva.

Clasificaciones semejantes son válidas en p dimensiones, aunque los resultados son difíciles de visualizar. Sin embargo, se puede hacer esa clasificación para las superficies de nivel \tilde{S}_t de la forma diagonal $\tilde{Q}(\xi)$ sabiendo que la clasificación es válida para la superficie general de nivel S_t determinada por $Q(\mathbf{x})$ ya que S_t es congruente con \tilde{S}_t .

(10.16) *Ejemplo.* Considere la superficie de nivel S_1 para la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ del ejemplo 10.15:

$$7x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_3^2 - 32x_1x_2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 = 1.$$



Gráfica en perspectiva de \tilde{S}_1 sobre el plano $\xi_1-\xi_2$, hecha con MATLAB

en esta forma, la naturaleza de la superficie S_t es irreconocible. Sin embargo, del ejemplo 10.15, se sabe que

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\boldsymbol{\xi}) = 27\xi_1^2 - 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2;$$

por el caso 3) anterior, la superficie de nivel \tilde{S}_1 es un hiperboloide de revolución de dos mantos. Como S_1 es congruente a \tilde{S}_1 , tendremos entonces que la superficie de nivel S_1 de $Q(\mathbf{x}) = 1$ es un hiperboloide de revolución de dos mantos, un hecho muy difícil de diagnosticar sin la diagonalización a $\tilde{Q}(\boldsymbol{\xi})$.

Formas cuadráticas definidas

En general, una forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ asumirá valores positivos, negativos y cero para varios valores de \mathbf{x} . Sin embargo, a veces las formas cuadráticas representan fenómenos físicos para los cuales valores con algún signo particular carecen de sentido, y en tales casos se espera que Q no asuma valores con un signo carente de significado. Un ejemplo sencillo de una forma cuadrática que nunca es negativa es $(x_1 - x_2)^2$ en \mathbb{R}^2 , aunque es igual a cero para algunas \mathbf{x} diferentes de cero. Un ejemplo de una forma cuadrática que nunca es negativa y que, además, sólo es cero cuando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $x_1^2 + x_2^2$ en \mathbb{R}^2 . Se usa una terminología especial para distinguir tales formas cuadráticas.

(10.17) **Definición**

- Se dice que una forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ es *positiva definida* si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- Se dice que $Q(\mathbf{x})$ es *positiva semidefinida* si $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ para toda \mathbf{x} .
- Se dice que $Q(\mathbf{x})$ es *negativa definida* o *negativa semidefinida* si y sólo si $-Q(\mathbf{x})$ es positiva definida o positiva semidefinida, respectivamente.
- Se dice que $Q(\mathbf{x})$ es *indefinida* si y sólo si existen \mathbf{x}_- y \mathbf{x}_+ tales que $Q(\mathbf{x}_-) < 0 < Q(\mathbf{x}_+)$.
- Se dice que una matriz \mathbf{A} es *positiva definida* (etcétera) cuando la forma cuadrática $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ que define es positiva definida (etcétera).

Observe que una matriz positiva definida también es positiva semidefinida, pero que lo inverso no es necesariamente cierto (aunque podría serlo).

El **teorema clave 10.14** dice que cada forma cuadrática puede diagonalizarse, de modo que

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\xi) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \cdots + \lambda_p |\xi_p|^2,$$

en donde las λ_i son los eigenvalores de la matriz hermitiana \mathbf{A} , $p \times p$ que define a Q y $\xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x}$ en donde \mathbf{P} es unitaria. Como \mathbf{P} y \mathbf{P}^H son no singulares, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\xi = \mathbf{0}$, en donde $\xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$; y claramente, \tilde{Q} es positiva definida si y sólo si todas las λ_i son estrictamente positivas. Este tipo de argumento conduce inmediatamente a la siguiente caracterización de las matrices definidas.

(10.18)

Teorema clave (matrices definidas). Suponga que \mathbf{A} es hermitiana, entonces

- \mathbf{A} será positiva (negativa) definida si y sólo si todos sus eigenvalores son estrictamente positivos (negativos).
- \mathbf{A} será positiva (negativa) semidefinida si y sólo si todos sus eigenvalores son no negativos (no positivos).
- \mathbf{A} será indefinida si y sólo si \mathbf{A} tiene tantos eigenvalores estrictamente positivos como estrictamente negativos.

DEMOSTRACION. Problema 4. ■

Para usar este teorema a fin de comprobar si una matriz es positiva definida se requiere el conocimiento de sus eigenvalores; por ello, parece razonable creer que debería haber una caracterización que sólo requiera información que se pudiera comprobar directamente. Por ejemplo, como toda $A, p \times p$, tiene $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_p$, queda claro que toda A positiva definida debe tener un determinante positivo. También, ya que $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i) = \langle A \rangle_{ii}$, toda matriz positiva definida debe tener elementos positivos en su diagonal principal. Si sólo se considera a (x, Ax) para aquellas x que no son cero en los elementos i -ésimo y j -ésimo, entonces (x, Ax) es igual a (x_0, A_0x_0) en donde A_0 es 2×2 y x_0 es 2×1 :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \langle A \rangle_{ii} & \langle A \rangle_{ij} \\ \langle A \rangle_{ji} & \langle A \rangle_{jj} \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} \langle x \rangle_i \\ \langle x \rangle_j \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la forma cuadrática definida por A_0 debe también ser positiva definida, así que por ejemplo, el $\det A_0$ debe ser positivo. Aplicando el mismo argumento con x diferente de cero sólo en los elementos i, j y k , se encontrará que los determinantes de varias submatrices 3×3 de A deben ser también positivos. Y así sucesivamente con las submatrices $4 \times 4, 5 \times 5, \dots, y (p-1) \times (p-1)$. Entre todas esas condiciones necesarias sobre la positividad de determinantes hay suficiente información para garantizar que la matriz original sea positiva definida.

(10.19) **Teorema** (definición y determinantes). Suponga que $A, p \times p$ es hermitiana, entonces:

- a) A es positiva definida si y sólo si cada una de sus *submatrices principales* $k \times k$ A_k para $1 \leq k \leq p$, tiene determinante estrictamente positivo, en donde A_k es la matriz $k \times k$ formada de los elementos de la esquina superior izquierda de A :

$$\langle A_k \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k \quad y \quad 1 \leq j \leq k.$$

- b) A es positiva definida si y sólo si cada pivote es estrictamente positivo cuando A se reduce a la forma reducida de Gauss o a la forma escalón reducida por renglón *sin intercambiar renglones*.

DEMOSTRACION. Problemas 8, 9 y 10. ■

(10.20) **Ejemplo.** Para determinar si la forma cuadrática

$$2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$$

es positiva definida. Se forma una matriz hermitiana definiéndola y transformándola a la forma reducida de Gauss, teniendo control sobre los pivotes:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{pivot } = 2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{47}{8} \end{array} \right] \boxed{} \\
 \boxed{} \xrightarrow{\text{pivot } = 1/2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{pivot } = -1/4} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

ya que uno de los pivotes es negativo, la forma cuadrática no es positiva definida.

PROBLEMAS 10.3

- ▷ 1. Encuentre una forma cuadrática diagonal $\tilde{Q}(\xi) = Q(\mathbf{x})$ para cada una de las formas cuadráticas $Q(\mathbf{x})$ a continuación:
 - $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$
 - Q generada por la A del problema 8 de la sección 8.2
 - Q generada por la A del problema 3 de la sección 8.3
- 2. Describa la naturaleza de cada una de las superficies de nivel \tilde{S}_t del problema 1 a), b) y c).
- 3. Utilice MATLAB o algún software semejante para obtener una gráfica en perspectiva de una superficie de nivel no trivial \tilde{S}_t para cada \tilde{Q} del problema 1 a), b) y c).
- 4. Demuestre el **teorema clave 10.18**.
- ▷ 5. Utilice el teorema 10.19, tomando en cuenta a $-A$, para enunciar y demostrar un teorema que caracterice las matrices negativas definidas.
- 6. Utilice el teorema 10.19 con $A + \epsilon I$, para enunciar y demostrar un teorema que caracterice las matrices positivas semidefinidas.
- ▷ 7. Utilice el teorema 10.19 para determinar cuáles de las matrices del problema 1 a), b) y c), son positivas definidas.
- 8. En la sección 3.7 se presentó la descomposición LU de una matriz. Demuestre que $A, p \times p$, se puede escribir como $A = LU$, en donde U es unitaria triangular superior y L triangular inferior, y $\langle L \rangle_{ii} \neq 0$ para toda i , si y sólo si los determinantes de las submatrices principales A_k son diferentes de cero para $1 \leq k \leq p$.
- ▷ 9. Suponga que una matriz $A, p \times p$, hermitiana y no singular se puede descomponer como $A = L_1 D_0 U_1$, en donde L_1 es unitaria triangular inferior, D_0 diagonal y U_1 unitaria triangular superior. Demuestre que $L_1 = U_1^H$, de modo que $A = L_1 D_0 L_1^H$.
- 10. Utilice los problemas 8 y 9 para demostrar el teorema 10.19.

- ▷ 11. Suponga que \mathbf{A} es hermitiana y positiva semidefinida. Demuestre que \mathbf{A} es positiva definida si y sólo si \mathbf{A} es no singular, y deduzca que esa \mathbf{A} es singular si y sólo si existe una \mathbf{x} tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 0$.
12. Suponga que \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{S} son $p \times p$, que \mathbf{S} es no singular y que $\mathbf{B} = \mathbf{S}^H \mathbf{AS}$; se dice entonces que \mathbf{A} y \mathbf{B} son *congruentes hermitianas*. Demuestre que \mathbf{A} es positiva definida (o positiva semidefinida o negativa definida o negativa semidefinida o indefinida) si y sólo si \mathbf{B} lo es.
13. Demuestre que toda matriz hermitiana $p \times p$, \mathbf{A} , es congruente hermitiana –véase problema 12– a una matriz de la forma

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

en donde hay r elementos $+1$, s elementos -1 y $p - r - s$ elementos cero, y que los números r y s son iguales al número de eigenvalores positivos y negativos de \mathbf{A} (respectivamente), por lo que serán los mismos en toda la forma diagonal. (Esto es la ley de la inercia de Sylvester.)

- ▷ 14. a) Suponga que \mathbf{A} es hermitiana y positiva definida; demuestre que \mathbf{A} es no singular y que \mathbf{A}^{-1} es positiva definida.
 b) Suponga que \mathbf{A} es hermitiana y no singular; demuestre que \mathbf{A} es positiva definida (negativa definida o indefinida) si y sólo si \mathbf{A}^{-1} lo es.
15. Utilice los problemas 8 y 9 y el teorema 10.19 para demostrar que \mathbf{A} es hermitiana (o simétrica real) y positiva definida si y sólo si a \mathbf{A} se le puede aplicar la *descomposición de Cholesky*

$$\mathbf{A} = \mathbf{CC}^H \quad (\text{o } \mathbf{A} = \mathbf{CC}^T),$$

en donde \mathbf{C} es triangular inferior y $\langle \mathbf{C} \rangle_{ii} \neq 0$ para toda i .

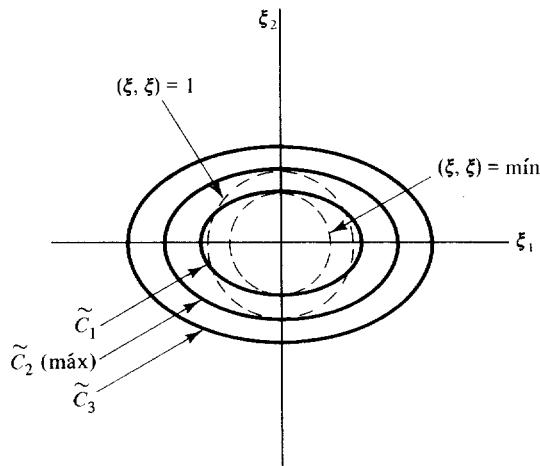
10.4 VALORES EXTREMOS DE FORMAS CUADRATICAS: EL PRINCIPIO DE RAYLEIGH

Los problemas aplicados que involucran formas cuadráticas conducen a menudo a la tarea de encontrar valores extremos –máximos y mínimos– de una forma cuadrática $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ sujeta a la condición $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$. El problema estadístico del ejemplo 10.4, por ejemplo, necesitaba de esa maximización para determinar una nueva variable que contuviera todo lo posible de la variancia de un experimento. La diagonalización de las formas cuadráticas simplifica el estudio de estos problemas de valores extremos.

(10.21) **Ejemplo.** Encontrar el máximo de la forma cuadrática diagonalizada:

$$\tilde{Q}(\xi) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 \quad \text{sujeta a} \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$$

en donde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Las curvas de nivel \tilde{C}_t de toda ξ que atisface a $\tilde{Q}(\xi) = t$ son elipses (para $t > 0$) con ejes mayores a lo largo del eje de las ξ_1 , con semiejes mayores iguales a $(t/\lambda_1)^{1/2}$ y con semiejes menores iguales a $(t/\lambda_2)^{1/2}$. Esas elipses se “expanden” conforme t aumenta, y entonces $t = \tilde{Q}(\xi)$ es mayor con $(\xi, \xi) = 1$ cuando \tilde{C}_t circunscribe al círculo $(\xi, \xi) = 1$ y es tangente a él en el extremo de cada semieje menor –esto es, cuando $t = \lambda_2$. Aun sin geometría, desde luego, es claro que $\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2$ es máxima cuando ξ_2 se hace tan grande como sea posible (ya que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$), y es claro que esto ocurre cuando $\xi_2 = \pm 1$ (ya que $\xi_1^2 + \xi_2^2 = t$) dando $\tilde{Q}(\xi) = \lambda_2$.



Es interesante observar que el mismo diagrama muestra que, si se busca el punto ξ en \tilde{C}_1 con el *mínimo* (ξ, ξ) , éste ocurre de nuevo, con un círculo inscrito, tangente al extremo del semieje menor siendo $(\xi, \xi) = 1/\lambda_2$. Esos problemas *diales* surgen generalmente en matemáticas, y en problemas de extremos especialmente. La solución de un problema particular de *máximos* es equivalente a la solución de un problema relacionado de *mínimos*.

El hecho de que el eigenvalor mayor es igual al máximo de $\tilde{Q}(\xi)$ sujeto a la condición que $(\xi, \xi) = 1$ se cumple más a menudo que sólo en el ejemplo 10.21. Antes de demostrarlo, se introducirá un artificio que simplifica la condición.

El cociente de Rayleigh

(10.22) **Teorema** (problemas equivalentes de extremos). Suponga que A es hermitiana. Entonces \mathbf{x}_0 maximiza a $(\mathbf{x}, A\mathbf{x})/(x, x)$ siempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y produce la M máxima si y sólo si $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0/\|\mathbf{x}_0\|_2$ hace máxima a $Q(\mathbf{x})$ con la condición $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ y produce $Q(\mathbf{x}_1) = M$.

DEMOSTRACION. (\mathbf{x}_0 máx $\Rightarrow \mathbf{x}_1$ máx) Suponga que \mathbf{x}_0 es como se afirmó y definase a

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 / \|\mathbf{x}_0\|_2.$$

Para toda \mathbf{x} tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$, se tiene que

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq M = \frac{(\mathbf{x}_0, \mathbf{Ax}_0)}{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{Ax}_1) = Q(\mathbf{x}_1),$$

y por lo tanto \mathbf{x}_1 es como se afirmó.

(\mathbf{x}_1 máx $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ máx) Suponga que \mathbf{x}_1 hace máxima a $Q(\mathbf{x})$ la cual está sujeta a que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$. Sea $\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{x}_1$, para una $\alpha \neq 0$ real y arbitraria. Para toda \mathbf{x} diferente de cero, $\tilde{\mathbf{x}}$ hace que $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) = 1$ cuando se define a \mathbf{x} como $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$, por lo tanto

$$Q(\tilde{\mathbf{x}}) \leq M = Q(\mathbf{x}_1);$$

pero

$$Q(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad \text{y} \quad Q(\mathbf{x}_1) = \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{Ax}_1)}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)}$$

como $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 1$, la desigualdad anterior viene a ser

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq M = \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{Ax}_1)}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)} = \frac{(\mathbf{x}_0, \mathbf{Ax}_0)}{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}$$

y por lo tanto \mathbf{x}_0 es como se afirmó. ■

Este teorema muestra que es posible reemplazar la condición $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ por la de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si se trabaja con el cociente especial $Q(\mathbf{x})/(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ en lugar de solamente $Q(\mathbf{x})$.

(10.23) **Definición.** El *cociente de Rayleigh* de una matriz hermitiana \mathbf{A} es la función ρ_A definida para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ por

$$\rho_A(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

La diagonalización de Q por la sustitución de ξ en lugar de \mathbf{x} es igualmente útil cuando se maneja el cociente de Rayleigh. Si se tiene en la nomenclatura del **teorema clave 10.14**, que

$$\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad \text{y} \quad \xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x}, \mathbf{x} = \mathbf{P} \xi$$

siendo \mathbf{P} unitaria, entonces no solamente

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\xi), \quad \text{sino también} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\xi, \xi)$$

ya que \mathbf{P} es unitaria. Como $\rho_A(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})/(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, esto demuestra que $\rho_A(\mathbf{x}) = \rho_\Lambda(\xi)$.

(10.24) **Teorema** (cociente de Rayleigh diagonalizado). Si \mathbf{A} es hermitiana, entonces $\rho_A(\mathbf{x}) = \rho_\Lambda(\xi)$, en donde Λ y ξ son como en el **teorema clave 10.14**:

$$\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}\xi,$$

y \mathbf{P} es unitaria.

Ahora se demostrará que los eigenvalores extremos λ_1 y λ_p resuelven problemas de valores extremos que involucran a $\rho_A(\mathbf{x})$.

Problemas de valores extremos y eigenvalores extremos

(10.25) **Teorema clave** (λ_{\min} , λ_{\max} y ρ_A). Sea \mathbf{A} $p \times p$ hermitiana con eigenvalores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$$

y un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. Entonces:

- a) $\lambda_1 \leq \rho_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_p$ para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- b) λ_1 es el valor mínimo de $\rho_A(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y $\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_1$ si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector asociado con λ_1 .
- c) λ_p es el valor máximo de $\rho_A(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y $\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_p$ si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector asociado con λ_p .

DEMOSTRACION. Por el teorema 10.24 es posible trabajar con la más fácil $\rho_\Lambda(\xi) = \rho_A(\mathbf{x})$. Ya que $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$ si y sólo si $\xi = \mathbf{P}^H \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, la i -ésima matriz columna unitaria, sólo será necesario demostrar que $\lambda_1 \leq \rho_\Lambda(\xi) \leq \lambda_p$, que \mathbf{e}_1 minimiza a $\rho_\Lambda(\xi)$ con $\rho_\Lambda(\mathbf{e}_1) = \lambda_1$, y que \mathbf{e}_p maximiza a $\rho_\Lambda(\xi)$ con $\rho_\Lambda(\mathbf{e}_p) = \lambda_p$.

- a) Esto es consecuencia inmediata de b) y c) siguientes.
- b) Es claro que $\rho_\Lambda(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 1^2/1^2 = \lambda_1$, entonces $\rho_\Lambda(\mathbf{e}_1) = \lambda_1$; por lo tanto, $\rho_A(\mathbf{v}_1) = \lambda_1$. También

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \dots + \lambda_p |\xi_p|^2) / (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_p|^2) \\ &\leq (\lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \dots + \lambda_p |\xi_p|^2) / (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_p|^2) \\ &= \rho_\Lambda(\xi) \end{aligned}$$

siendo válida la igualdad si y sólo si $\xi_i = 0$ para toda i para la cual $\lambda_i > \lambda_1$ –esto es, si y sólo si $\Lambda\xi = \lambda_1\xi$. Reemplazando ξ por $\mathbf{P}^H \mathbf{x}$ se completa la demostración de b).

- c) es consecuencia de aplicar b) a $-\mathbf{A}$ (véase el problema 3). ■

(10.26) **Corolario** (matriz de norma 2). Para cualquier matriz \mathbf{A} , $p \times q$, la matriz de norma 2 es igual al mayor valor singular de \mathbf{A} : $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$.

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_2^2 &= \left\{ \max \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \right\}^2 = \max \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \\ &= \max \frac{(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \max \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{A}^H \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \\ &= \lambda_q,\end{aligned}$$

el mayor eigenvalor de la matriz hermitiana $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$. Pero σ_1 se define por $\sigma_1^2 = \lambda_q$. ■

Como $\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_1$ si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado con λ_1 , es posible esperar razonablemente que $\rho_A(\mathbf{x})$ esté cercano a λ_1 cuando \mathbf{x} esté cerca de un eigenvector asociado con λ_1 . Esto también debería valer para otros eigenvalores, porque

$$\rho_A(\mathbf{v}_i) = \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{Av}_i)}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = \frac{(\mathbf{v}_i, \lambda_i \mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = \lambda_i$$

si \mathbf{v}_i es un eigenvector asociado con λ_i . Suponga que $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\epsilon}$; entonces un cálculo directo demuestra que

$$\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_i + \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|_2^2 \{\rho_A(\boldsymbol{\epsilon}) - \lambda_i\}}{\|\mathbf{x}\|_2^2};$$

esto es, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_2$ es de magnitud ϵ , entonces $\rho_A(\mathbf{x}) - \lambda_i$ es de magnitud ϵ^2 . Cuando esto se usa para aproximar al mayor eigenvalor λ_p , se sabe desde luego que $\rho_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_p$ y que $\rho_A(\boldsymbol{\epsilon}) \geq \lambda_1$, así se obtiene

$$\lambda_p \geq \rho_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_p - \frac{(\lambda_p - \lambda_1) \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_p\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$$

y en particular desde luego que se tiene una cota inferior garantizada $\rho_A(\mathbf{x})$ para λ_p . De modo semejante $\rho_A(\mathbf{x})$ es una cota superior para λ_1 , y

$$\lambda_1 \leq \rho_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_1 + \frac{(\lambda_p - \lambda_1) \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_1\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

En problemas de vibración, el menor eigenvalor corresponde a la menor frecuencia natural del sistema vibratorio, y a menudo es posible, con fundamentos físicos, adivinar la forma de esa vibración y por lo tanto obtener información que permita una aproximación burda a \mathbf{v}_1 ; el análisis anterior demuestra que esta burda aproximación a \mathbf{v}_1 puede de hecho producir una buena estimación de λ_1 ; véase también el problema 1 de la sección 10.5.

(10.27) **Ejemplo.** La matriz \mathbf{A} siguiente se produjo en un problema de vibración en el cual, con fundamentos físicos, se puede esperar razonablemente que el eigenvector \mathbf{v}_1 , asociado con el menor eigenvalor λ_1 , tenga elementos no negativos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Partiendo del teorema del círculo de Gershgorin y de la simetría de \mathbf{A} , es posible ver que los eigenvalores de \mathbf{A} son no negativos. El problema 14 de la sección 9.4 muestra que existe \mathbf{A}^{-1} y es no negativa, y entonces el teorema de Perron-Frobenius afirma que en efecto \mathbf{v}_1 es positivo. De este modo, las bases físicas tienen fundamentos teóricos sólidos.) Toda \mathbf{x} da un $\rho_A(\mathbf{x})$ que es una cota superior de λ_1 ; por ejemplo,

$$\rho_A([1 \ 1 \ 1]^T) = 0.57$$

debe ser mayor o igual a λ_1 . El cálculo exacto muestra que de hecho, $\lambda_1 = 0.5$ y que $[1.0 \ 1.2 \ 0.8]^T$ es un eigenvector asociado, de modo que $\rho_A(\mathbf{x})$ fue diferente de λ_1 por sólo 0.07.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Problemas de valores extremos y eigenvalores intermedios

El ejemplo 10.4 introdujo una forma cuadrática cuyo vector que la hace máxima a (sujeto a que $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$) produce una nueva variable $y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_p x_p$ en un problema estadístico; esta nueva variable explica la mayor parte de la varianza experimental y se le llama la primera *componente principal* de la matriz de covarianza \mathbf{S} que define la forma cuadrática $Q(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{Sa})$. Se sabe que esta \mathbf{a} maximiza a $\rho_S(\mathbf{a})$ sujeta a $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y de hecho será un eigenvector de \mathbf{S} asociado con el mayor eigenvalor de \mathbf{S} .

Si la nueva variable y_1 no representa adecuadamente la varianza total V , el perito en estadística podrá buscar una segunda componente principal

$$y_2 = b_1x_1 + \cdots + b_p x_p$$

que sea estadísticamente independiente de la nueva variable y_1 que ya se encontró; se sabe en estadística que esta independencia estadística es equivalente a la condición de ortogonalidad $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Así, se busca a \mathbf{b} para hacer máximo a $\rho_S(\mathbf{b})$ sujeta tanto a $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ como a $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, en donde \mathbf{a} es la solución dada al problema original de maximizar a $\rho_S(\mathbf{a})$ con la condición $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

El problema anterior es sólo un caso de la forma en que surgen tales problemas de valores extremos en las aplicaciones en estadística. El problema general es maximizar a $\rho_A(\mathbf{x})$ sujeta a las condiciones

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}_p) = 0,$$

en donde \mathbf{v}_p es un eigenvector asociado con el mayor eigenvalor λ_p de A y por ello maximiza a $\rho_A(\mathbf{x})$ sujeta sólo a $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Resulta que una solución a este problema es \mathbf{v}_{p-1} , un eigenvector asociado con el segundo eigenvalor mayor λ_{p-1} ; éste, a su vez, conduce al siguiente problema de valores extremos: el maximizar a $\rho_A(\mathbf{x})$ sujeto a

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}_p) = 0, \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}_{p-1}) = 0.$$

El siguiente teorema clásico caracteriza las soluciones de todos esos problemas en términos del eigensistema de A .

(10.28)

Teorema clave (principio de Rayleigh). Sea A $p \times p$, hermitiana con eigenvalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$ y con un conjunto ortonormal de eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. Sea

S_j = el conjunto de todas las $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ que son ortogonales a los j eigenvectores $\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p-1}, \dots, \mathbf{v}_{p-j+1}$ asociados con los j eigenvalores mayores,

y sea

T_j = el conjunto de todas las $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ que son ortogonales a los j eigenvectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j$ asociados con los j eigenvalores menores.

Entonces:

- a) $\rho_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_{j+1}$ para toda \mathbf{x} en T_j y $\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_{j+1}$ con \mathbf{x} en T_j si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector asociado con λ_{j+1} . De este modo \mathbf{v}_{j+1} minimiza a $\rho_A(\mathbf{x})$ en T_j con el valor mínimo λ_{j+1} .
- b) $\rho_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_{p-j}$ para toda \mathbf{x} en S_j y $\rho_A(\mathbf{x}) = \lambda_{p-j}$ con \mathbf{x} en S_j si y sólo si \mathbf{x} es un eigenvector asociado con λ_{p-j} . De este modo \mathbf{v}_{p-j} maximiza a $\rho_A(\mathbf{x})$ en S_j con el valor máximo λ_{p-j} .

DEMOSTRACION. Como de costumbre, se trabajará con $\rho_A(\xi) = \rho_A(\mathbf{x})$, en donde

$$\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_p]$ es unitaria, y $\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi$, $\xi = \mathbf{P}^H\mathbf{x}$. Recuerde que $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$ si y sólo si $\xi = \mathbf{e}_i$; de este modo la condición $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0$ es equivalente a $(\xi, \mathbf{e}_i) = 0$ –esto es, a que $\xi_i = 0$.

a) Es claro que \mathbf{x} está en T_j si y sólo si $\xi = \mathbf{P}^H\mathbf{x}$ está en \tilde{T}_j , el conjunto de todas las $\xi \neq \mathbf{0}$ tales que $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_j = 0$. Para estas ξ , un argumento como el de la demostración de b) en el **teorema clave 10.25** muestra fácilmente que $\rho_{\Lambda}(\xi)$ satisface a $\rho_{\Lambda}(\xi) \geq \lambda_{i+1}$ y $\rho_{\Lambda}(\xi) = \lambda_{j+1}$ si y sólo si $\xi_r = 0$ para toda r tal que $\lambda_r > \lambda_{j+1}$. Sustituyéndolo $\xi = \mathbf{P}^H\mathbf{x}$ se completa la demostración de a).

b) es consecuencia de aplicar a) a $-A$ –problema 8. ■

(10.29) **Ejemplo.** Suponga que la matriz \mathbf{S} de covarianza en un experimento (véase ejemplo 10.4) con tres variables x_1, x_2, x_3 es

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix};$$

se busca una nueva variable cuya varianza sea igual a, cuando menos, el 55% de la varianza total

$$V = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1.0.$$

De acuerdo con el ejemplo 10.4 y con lo visto anteriormente, se tomará

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

en donde \mathbf{a} hace máximo a $\rho_{\mathbf{S}}(\mathbf{a})$ para $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ –esto es,

$$\mathbf{a} = \frac{[1 \ 1 \ 1]^T}{\sqrt{3}},$$

un eigenvector normalizado asociado con el mayor eigenvalor $\lambda_3 = 0.6$ de \mathbf{S} . También, $\rho_{\mathbf{S}}(\mathbf{a}) = \lambda_3 = 0.6 > 55\% \times 1.0$, de modo que la primera componente principal

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}$$

es suficiente. Si se hubiera querido explicar, digamos el 80% de la varianza total V , y_1 hubiera sido inadecuada y se hubiera buscado a \mathbf{b} para maximizar a $\rho_{\mathbf{S}}(\mathbf{b})$ sujeta a $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0$. Esto es, \mathbf{b} hubiera sido el eigenvector

$$\mathbf{b} = \frac{[2 \ -1 \ -1]^T}{\sqrt{6}}$$

asociado con el segundo eigenvalor mayor $\lambda_2 = 0.3$. La componente principal

$$y_2 = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{\sqrt{6}}$$

explica un $\rho_S(\mathbf{b}) = 0.3$ adicional de la varianza, dando un total de

$$0.6 + 0.3 > 80\% \times 1.0,$$

de modo que los dos componentes principales son suficientes.

PROBLEMAS 10.4

- ▷ 1. Utilice a ρ_A para encontrar cotas inferiores para el mayor eigenvalor y cotas superiores para el menor eigenvalor de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 2. Un eigenvector asociado con el menor eigenvalor de la siguiente matriz tiene la forma $\mathbf{x}_\alpha = [1 \quad \alpha \quad 1]^T$. Encuentre el valor exacto de α definiendo la función $f(\alpha) = \rho_A(\mathbf{x}_\alpha)$ y haciéndola mínima por medio del cálculo diferencial.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre el teorema clave 10.25 e) aplicando b) a $-\mathbf{A}$.
 4. Suponga que \mathbf{A} es hermitiana y positiva definida. Demuestre que \mathbf{x}^* hace máxima a $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ sujeta a la condición $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ si y sólo si $\alpha\mathbf{x}^*$ hace mínima a (\mathbf{x}, \mathbf{x}) sujeta a la condición $Q(\mathbf{x}) = 1$, en donde $\alpha = 1/(\mathbf{x}^*, \mathbf{Ax}^*)^{1/2}$.

- ▷ 5. Para cada una de las siguientes matrices \mathbf{A} , utilice ρ_A para obtener cotas inferiores al mayor eigenvalor y cotas superiores al menor eigenvalor.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Mediante $\mathbf{v}_3 = [1 \quad -1 \quad -1]^T$ como un eigenvector asociado con el mayor eigenvalor λ_3 de la matriz \mathbf{A} del problema 1, utilice ρ_A para obtener cotas inferiores del segundo eigenvalor mayor λ_2 .

- ▷ 7. Mediante $\mathbf{v}_1 = [1 \ 2 \ -1]^T$ como un eigenvector asociado al menor eigenvalor λ_1 de la matriz \mathbf{A} del problema 1, utilice a ρ_A para obtener cotas superiores al segundo eigenvalor menor λ_2 .
8. Demuestre el teorema clave 10.28 b) aplicando a) a $-\mathbf{A}$.
9. Apegándose al ejemplo 10.29, suponga que la matriz \mathbf{S} de covarianza de un experimento con tres variables x_1 , x_2 y x_3 es

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix};$$

encuentre los componentes principales que ejemplifiquen a) el 80%, y b) el 95% de la varianza total de 1.6.

- ▷ 10. Para cada una de las tres matrices del problema 5 a), b) y c), utilice los eigenvectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_3 siguientes como asociados con el menor eigenvalor λ_1 y el mayor eigenvalor λ_3 respectivamente, para obtener cotas superiores e inferiores al eigenvalor intermedio λ_2 :

a) $\mathbf{v}_1 = [1 \ 2 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \ -1 \ 1]^T$
 b) $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [-2 \ 2 \ 1]^T$
 c) $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \ -2 \ 1]^T$

10.5 VALORES EXTREMOS DE FORMAS CUADRATICAS: EL PRINCIPIO DE MINIMAX

El principio de Rayleigh en la sección anterior caracteriza a cada eigenvalor y a cada eigenvector de una matriz \mathbf{A} hermitiana $p \times p$ en términos de un problema de valores extremos. Observe, sin embargo, que esta caracterización de los eigenvalores/eigenvectores que no sean los mayores ni los menores, necesita el conocimiento de eigenvectores adicionales al que se está caracterizando; para caracterizar o estimar a λ_j para $1 < j < p$ son necesarios los eigenvectores $\mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_p$ o los eigenvectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$. El objeto de esta sección es presentar una caracterización que permita la estimación de cada eigenvalor enteramente independientemente del resto del eigensistema.

El segundo eigenvalor mayor

Se considerará primero, por facilidad, a λ_{p-1} , el segundo de los eigenvalores mayores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{p-1} \leq \lambda_p.$$

Recuerde que el cociente de Rayleigh $\rho_A(\mathbf{x})$ satisface $\rho_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_p$ dándose la igualdad cuando \mathbf{x} es un eigenvector asociado con λ_p . Suponga ahora que se restringe a \mathbf{x} para que quede en el plano $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0$ para una \mathbf{c} fija arbitraria; esta limitación es del tipo que se usa para caracterizar a λ_{p-1} en el principio de Rayleigh; si $\mathbf{c} = \mathbf{v}_p$, entonces la $M(\mathbf{c})$ máxima de $\rho_A(\mathbf{x})$ en este plano es igual a λ_{p-1} y ocurre cuando $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{p-1}$: $M(\mathbf{v}_p) = \lambda_{p-1}$. ¿Qué pasará, sin embargo, si \mathbf{c} no es un múltiplo de \mathbf{v}_p ?

Se dice que $M(\mathbf{c})$, el máximo de $\rho_A(\mathbf{x})$ cuando \mathbf{x} varía sujeto a estar en el plano π_c de las \mathbf{x} que satisfacen $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0$ para una \mathbf{c} fija dada, siempre satisface a $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-1}$. Como $M(\mathbf{c})$ es el *máximo* de ρ_A cuando \mathbf{x} varía, para demostrar que $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-1}$ sólo es necesario producir una \mathbf{x}_0 en π_c que tenga $\rho_A(\mathbf{x}_0) \geq \lambda_{p-1}$. Para hacerlo, se considerarán tres casos: a) \mathbf{v}_p es ortogonal a \mathbf{c} ; b) \mathbf{v}_{p-1} es ortogonal a \mathbf{c} y c) ni \mathbf{v}_p ni \mathbf{v}_{p-1} son ortogonales a \mathbf{c} .

a) Si \mathbf{v}_p es ortogonal a \mathbf{c} , entonces $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_p$ está en π_c , y

$$\rho_A(\mathbf{x}_0) = \rho_A(\mathbf{v}_p) = \lambda_p \geq \lambda_{p-1},$$

como se afirmó.

b) Si \mathbf{v}_{p-1} es ortogonal a \mathbf{c} , entonces $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_{p-1}$ está en π_c , de modo que

$$\rho_A(\mathbf{x}_0) = \rho_A(\mathbf{v}_{p-1}) = \lambda_{p-1},$$

como se afirmó.

c) Si ni \mathbf{v}_p ni \mathbf{v}_{p-1} son ortogonales a \mathbf{c} , entonces se define

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_{p-1} - \alpha \mathbf{v}_p \text{ siendo } \alpha = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{v}_{p-1})}{(\mathbf{c}, \mathbf{v}_p)} \neq 0;$$

esto hace a $(\mathbf{c}, \mathbf{x}_0) = 0$ y a $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. El cálculo directo da

$$\rho_A(\mathbf{x}_0) = \lambda_{p-1} + \frac{\|\alpha \mathbf{v}_p\|_2^2 (\lambda_p - \lambda_{p-1})}{\|\mathbf{x}_0\|_2^2} \geq \lambda_{p-1},$$

como se afirmó.

por lo anterior $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-1}$ para toda \mathbf{c} .

El siguiente paso es minimizar a $M(\mathbf{c})$ entre todos los vectores \mathbf{c} posibles. Se sabe ya que $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-1}$ para toda \mathbf{c} . Si se toma a \mathbf{v}_p como \mathbf{c} , entonces $M(\mathbf{v}_p) = \lambda_{p-1}$ como ya se hizo notar. En otras palabras,

$$\lambda_{p-1} = \min_{\mathbf{c}} M(\mathbf{c}) \quad \text{cuando } \mathbf{c} \text{ varía}$$

Recordando la definición de $M(\mathbf{c})$, resulta

$$(10.30) \quad \lambda_{p-1} = \min_{\mathbf{c}} \max_{(\mathbf{c}, \mathbf{x})=0} \rho_A(\mathbf{x}).$$

El hecho importante de (10.30) es que caracteriza a λ_{p-1} sin referirse al resto del eigensistema de \mathbf{A} .

- (10.31) **Ejemplo.** La matriz \mathbf{S} , 3×3 del ejemplo 10.29 tiene elementos estrictamente positivos y es irreducible, por lo tanto, el teorema de Perron-Frobenius (9.34) dice que el mayor (en este caso el mayor en magnitud así como el mayor incluyendo el signo) eigenvalor λ_3 es positivo y tiene un eigenvector asociado de elementos estrictamente positivos. Suponga que se desea información de λ_2 y no de λ_3 ; se sabe que $\lambda_2 = \min M(\mathbf{c})$, en donde $M(\mathbf{c})$ es el máximo de $\rho_S(\mathbf{x})$ sujeto a que $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0$. Si por ejemplo se hace $\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 1]^T$, entonces \mathbf{x} se restringe a la forma $[\alpha \ \beta \ -\alpha]^T$ de la cual

$$\rho_S(\mathbf{x}) = \frac{(0.5\alpha^2 + 0.3\beta^2 - 0.2\alpha\beta)}{(2\alpha^2 + \beta^2)},$$

si esto se maximiza en términos de α y de β , se encuentra que

$$M([1 \ 0 \ 1]^T) = 0.35.$$

Como $\lambda_2 = \min M(\mathbf{c})$, entonces $\lambda_2 \leq 0.35$ como un cálculo aproximado y una cota para λ_2 . De hecho, $\lambda_2 = 0.3$.

El principio de minimax en general

Lo anterior solamente trató la caracterización de λ_{p-1} . El caso general es semejante.

- (10.32) **Teorema clave (principio de minimax).** Sea \mathbf{A} $p \times p$, hermitiana y con eigenvalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$, con su conjunto ortonormal de eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. Entonces, para $0 \leq r \leq p - 1$,

$$a) \quad \lambda_{p-r} = \min_{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r} \max_{\mathbf{x}} \rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0$$

en donde el mínimo lo es con respecto a todos los conjuntos de, exactamente, r vectores arbitrarios $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r$, mientras que el máximo lo es con respecto a toda $\mathbf{x} \neq 0$ que satisfaga a $(\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0$ para $1 \leq i \leq r$.

$$b) \quad \lambda_{p+1} = \min_{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r} \max_{\mathbf{x}} \rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0$$

en donde el máximo lo es con respecto a todos los conjuntos de, exactamente r vectores arbitrarios $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r$, mientras que el mínimo lo es con respecto a toda $\mathbf{x} \neq 0$ que satisfaga a $(\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0$ para $1 \leq i \leq r$.

DEMOSTRACION. Como de costumbre, se diagonaliza y se trabajará con $\tilde{Q}(\xi) = Q(\mathbf{x})$, y $\rho_A(\xi) = \rho_A(\mathbf{x})$ y

$$\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_p] \text{ unitaria, } \mathbf{P}\xi = \mathbf{x}, \quad \text{y} \quad \xi = \mathbf{P}^H \mathbf{x}.$$

Ya que \mathbf{P} es unitaria, la condición $(\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0$ es equivalente a la condición $(\tilde{\mathbf{c}}_i, \xi) = 0$ con $\tilde{\mathbf{c}}_i = \mathbf{P}^H \mathbf{c}_i$.

- a) La demostración sigue a la que condujo a (10.30) para λ_{p-r} . Para cualquier conjunto $\tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_r$, denotemos $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$ al conjunto de todas las ξ que satisfacen a $(\tilde{\mathbf{c}}_i, \xi) = 0$ para $1 \leq i \leq r$ y denotemos $M(\mathbf{c})$ al máximo de las $\rho_A(\xi)$ conforme ξ varía en $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$, donde las $\tilde{\mathbf{c}}_i = \mathbf{P}^H \mathbf{c}_i$ son fijas. Quedaría demostrado si se puede demostrar que el mínimo de $M(\mathbf{c})$ de entre todas las elecciones posibles de las $\tilde{\mathbf{c}}_i = \mathbf{P}^H \mathbf{c}_i$ es igual a λ_{p-r} . Primero se demostrará que $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-r}$; ya que $M(\mathbf{c})$ es el *máximo* de $\rho_A(\xi)$ con ξ en $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$, para hacerlo sólo es necesario encontrar a ξ en $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$ con $\rho_A(\xi) \geq \lambda_{p-r}$, lo cual se hará a continuación. Se afirmó que hay una ξ en $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$ tal que $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{p-r-1} = 0$; ya que estar en $\tilde{\Pi}_{\mathbf{c}}$ es equivalente a satisfacer r ecuaciones homogéneas en las $r+1$ variables restantes ξ_{p-r}, \dots, ξ_p ; el tener más incógnitas que ecuaciones homogéneas significa que hay algunas variables no delanteras y por lo tanto algunas soluciones diferentes de cero. Para cualquiera de estas soluciones diferentes de cero, se tendrá que

$$\begin{aligned} \rho_A(\xi) &= \frac{\lambda_1 |\xi_1|^2 + \cdots + \lambda_p |\xi_p|^2}{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_p|^2} \\ &= \frac{\lambda_{p-r} |\xi_{p-r}|^2 + \cdots + \lambda_p |\xi_p|^2}{|\xi_{p-r}|^2 + \cdots + |\xi_p|^2} \\ &\geq \lambda_{p-r}, \end{aligned}$$

en donde la desigualdad final es consecuencia de reemplazar cada λ_i para $i \geq p-r$ por la λ_{p-r} que es más pequeña. Esto completa el argumento de que $M(\mathbf{c}) \geq \lambda_{p-r}$. Tomando a $\tilde{\mathbf{c}}_i = \mathbf{e}_{p-i+1}$ para $1 \leq i \leq r$, se forza a que

$$\xi_{p-r+1} = \cdots = \xi_p = 0$$

y, con el principio de Rayleigh, se obtiene $M(\mathbf{c}) = \lambda_{p-r}$. Así, λ_{p-r} es igual al mínimo de $M(\mathbf{c})$, como se afirmó, completando la demostración de a).

- b) Es consecuencia de aplicar a) a $-\mathbf{A}$ -problema 2. ■

Comparación de eigenvalores de distintas matrices

La caracterización minimax de eigenvalores, independientemente del resto del eigensistema, conduce a un resultado fundamental sobre la relación de eigenvalores de distintas matrices; este resultado proporciona información sobre la forma en que cambian las frecuencias de un sistema vibratorio cuando cambian los parámetros del sistema –por ejemplo, es posible concluir matemáticamente que el tono de una cuerda de guitarra sube cuando la cuerda se pone tensa.

- (10.33) **Teorema** (comparación de eigenvalores). Suponga que las matrices hermitianas $p \times p$, \mathbf{A} y \mathbf{B} , satisfacen $(\mathbf{x}, \mathbf{AX}) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{Bx})$ para toda \mathbf{x} , y sean $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ y $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_p$ los eigenvalores de \mathbf{A} y de \mathbf{B} respectivamente. Entonces $\lambda_i \leq \mu_i$ para toda $1 \leq i \leq p$.

DEMOSTRACION. Claramente, $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \leq \rho_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ para toda \mathbf{x} . Por lo tanto, el máximo de $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ con \mathbf{x} restringida a cualquier conjunto Π , es menor o igual al máximo de $\rho_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ estando \mathbf{x} restringida al mismo conjunto. De modo semejante, el mínimo de esos máximos será menor para \mathbf{A} que para \mathbf{B} a medida que \mathbf{M} varía. Esto es,

$$\min_{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r} \max_{(\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0} \rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r} \max_{(\mathbf{c}_i, \mathbf{x}) = 0} \rho_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}).$$

El término del lado izquierdo de arriba es igual a λ_{p-r} , mientras que el del lado derecho es igual a μ_{p-r} . ■

- (10.34) **Ejemplo.** En la sección 8.1 se demostró que las frecuencias fundamentales $\omega/2\pi$ de las masas oscilantes del ejemplo de la sección 2.5 se pueden obtener de $\omega^2 = \lambda$, en donde λ es cualquier eigenvalor de

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^2 = \mathbf{M}$$

con \mathbf{M} y \mathbf{K} como en (2.29). El teorema de arriba se puede usar para ver la forma en que varían estas frecuencias con los parámetros del modelo; suponga, por ejemplo, que la constante de resorte k_1 para el primer resorte del modelo aumenta de k_1 a $k'_1 = k_1 + k$. Entonces la matriz cambia de \mathbf{B} a \mathbf{B}' :

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k + k_2}{m_1} & \frac{-k_2}{(m_1 m_2)^{1/2}} \\ \frac{-k_2}{(m_1 m_2)^{1/2}} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \begin{bmatrix} \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ve claramente que la forma cuadrática para \mathbf{B}' es mayor que la correspondiente para \mathbf{B} en $(k/m_1)x_1^2$. De acuerdo al teorema de comparación de eigenvalores, los de \mathbf{B}' son mayores que los de \mathbf{B} . Esto es, las frecuencias

naturales de las masas oscilantes aumentan si el primer resorte se hace más rígido.

PROBLEMAS 10.5

- ▷ 1. Utilice el principio de minimax para obtener una cota superior para el segundo eigenvalor mayor λ_3 de la A siguiente, si el mayor eigenvalor λ_4 tiene un eigenvector asociado con elementos estrictamente positivos (por el teorema de Perron-Frobenius).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestre el **teorema clave 10.32 b)** aplicando a) a $-A$.
3. Utilice $c = [1 \ 1 \ 1]^T$ en el principio de minimax para obtener una cota superior del segundo eigenvalor mayor de la matriz A del ejemplo 10.29.
- ▷ 4. Haga lo que se pidió en el problema 3, pero utilice $c = [1 \ 2 \ 3]^T$.
5. Con $[1 \ 1 \ -1]^T$ como aproximación a v_1 , y $[1 \ 0 \ 0]^T$ como aproximación a v_3 , con el principio de minimax (y máx-mín) obtenga cotas superiores e inferiores para el eigenvalor central de la matriz del problema 1 de la sección 10.4,
6. Como en el ejemplo 10.34, determine lo que pasa con las frecuencias en el sistema de masas oscilantes cuando aumenta la segunda constante de resorte k_2 .
- ▷ 7. Sin encontrar los eigenvalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ de A , o $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ de B , demuestre que $\lambda_i \leq \mu_i$ para $i = 1, 2, 3$, si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar los eigenvalores en el problema 7 y comprobar lo que allí se afirmó.
9. Demuestre que cada uno de los eigenvalores de una matriz hermitiana no decrece a medida que aumentan los elementos en la diagonal principal de la matriz.
- ▷ 10. Para cada uno de los cuatro eigenvalores de la matriz A siguiente, encuentre un intervalo en el cual debe estar el eigenvalor, haciendo uso del hecho de que los eigenvalores de la matriz E siguiente son (aproximadamente) ± 0.3 y ± 0.8 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1.4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1.8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- PROBLEMA 11.** Utilice MATLAB o algún software afín para comprobar que los intervalos que se encontraron en el problema 10 contienen en realidad a los eigenvalores de \mathbf{A} .
- PROBLEMA 12.** Con las hipótesis del teorema 10.33, utilice el principio de Rayleigh en lugar del principio de minimax, para demostrar que $\lambda_1 \leq \mu_1$, y que $\lambda_p \leq \mu_p$, y explique por qué no se puede usar el principio de Rayleigh para demostrar los resultados parecidos para los eigenvalores intermedios λ_i y μ_i .

10.6 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 10.6

- PROBLEMA 1.** Considere una curva (una sección cónica) definida por una función cuadrática que incluye términos lineales y constantes:

$$ax_1^2 + 2kx_1x_2 + bx_2^2 + 2cx_1 + 2dx_2 + e = 0.$$

- a) Demuestre que la sustitución de $x_1 = \eta_1 + x_{10}$, $x_2 = \eta_2 + x_{20}$ cambia esta ecuación a

$$a\eta_1^2 + 2k\eta_1\eta_2 + b\eta_2^2 + 2C\eta_1 + 2D\eta_2 + E = 0,$$

en donde

$$C = ax_{10} + kx_{20} + c, \quad D = kx_{10} + bx_{20} + d,$$

y en donde se debe determinar a E .

- b) Demuestre que ya sea $ab - k^2 \neq 0$, o bien $ab - k^2 = 0$ con $ad = bc$, entonces x_{10} y x_{20} se pueden escoger de tal modo que se anulen todos los términos de primer grado y sólo quede

$$a\eta_1^2 + 2k\eta_1\eta_2 + b\eta_2^2 + E = 0,$$

cuya gráfica se puede analizar por el método de la sección 10.2.

- c) Demuestre que, si $a \neq 0$ y $ab = k^2$ y $ad \neq bc$, entonces se puede escoger a x_{10} y a x_{20} de tal modo que la ecuación sea

$$a\eta_1^2 + 2k\eta_1\eta_2 + b\eta_2^2 + 2D\eta_2 + E = 0.$$

- d) Demuestre que esta última ecuación se puede reducir por un cambio posterior de variables a $\alpha\xi_1^2 + 2\gamma\xi_2 = f$, la ecuación de una parábola.
- ▷ 2. Utilice el problema 1 para analizar la naturaleza de las curvas definidas por las ecuaciones siguientes, y haga un esquema de las curvas:
- $5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 + 18x_2 + 8 = 0$
 - $9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 42x_1 - 2x_2 + 7 = 0$
3. En algunas aplicaciones, es importante encontrar una sola matriz S no singular tal que S^HAS y S^HBS sean ambas diagonales, dadas A y B , $p \times p$. Suponga que A y B son hermitianas y que B es positiva definida.
- Demuestre que existe una matriz P unitaria y

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$$

con todas las $d_i > 0$, tal que

$$B = (PD)(PD)^H = PD^2P^H \quad \text{y} \quad Q^H B Q = I,$$

en donde $Q = PD^{-1}$.

- b) Demuestre que existe una matriz R unitaria tal que

$$R^H(Q^H A Q) R = \Lambda \text{ diagonal.}$$

- c) Sea $S = QR$; demuestre que

$$S^H A S = \Lambda \quad \text{mientras que} \quad S^H B S = I,$$

que era lo que se deseaba.

4. En el problema 3, sea

$$S = [s_1 \quad \cdots \quad s_p] \quad \text{y} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

Demuestre que λ_i y s_i resuelven el *problema del eigenvalor generalizado* $As_i = \lambda_i Bs_i$.

5. Como en el problema 3, reduzca simultáneamente a A y B a una forma diagonal, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 75 & 35 \\ 35 & -117 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

- ▷ 6. Suponga que A es $p \times p$, hermitiana y positiva definida y que B es $p \times q$.
- Demuestre que $A' = B^H A B$ es positiva semidefinida.
 - Demuestre que A' es positiva definida si y sólo si el rango de B es igual a q .
7. Demuestre que toda submatriz principal de una matriz hermitiana positiva definida es hermitiana y positiva definida.

- ▷ 8. Suponga que \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} son $p \times p$, hermitianas y positivas definidas. Demuestre que si

$$\det(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \lambda^2\mathbf{C}) = 0,$$

entonces la parte real de λ es negativa.

- ▷ 9. Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son $p \times p$ y hermitianas, y que \mathbf{B} es positiva definida. Demuestre que los eigenvalores de \mathbf{BA} son reales.
- ▷ 10. Suponga que \mathbf{B} y \mathbf{C} son $p \times p$ y hermitianas, que \mathbf{B} es positiva definida y que \mathbf{C} es positiva semidefinida. Demuestre que:
- $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ es positiva definida.
 - $\det \mathbf{B} \leq \det(\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
 - $\mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1}$ es positiva semidefinida.

11. Encuentre una forma cuadrática diagonal $\tilde{Q}(\xi) = Q(\mathbf{x})$ para cada una de las siguientes formas cuadráticas $Q(\mathbf{x})$ y haga un esquema de las superficies de nivel $\tilde{Q}(\xi) = 1$.

- $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
- $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_3x_1$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$

- ▷ 12. a) Si \mathbf{A} es $p \times p$, hermitiana y positiva definida, demuestre que

$$\det \mathbf{A} \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{pp},$$

en donde $a_{ii} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ii}$.

- b) Si \mathbf{B} es $p \times p$ con $\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = b_{ij}$, demuestre que

$$|\det \mathbf{B}|^2 \leq \prod_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p |b_{ij}|^2 \right).$$

A esto se le conoce como la *desigualdad de Hadamard*. El valor absoluto del determinante de una matriz se puede interpretar como el volumen, en el espacio de p dimensiones, de sólido cuyas aristas se describen por los vectores renglón que forman los renglones de la matriz. Entonces, la desigualdad de Hadamard dice que este volumen es menor, o igual al del sólido rectangular en p dimensiones cuyos lados tienen las mismas longitudes. Compruebe esto para $p = 2, 3$, mediante sus conocimientos de la geometría de paralelogramos y paralelepípedos en dos y tres dimensiones. ¿Bajo qué condiciones se alcanza la igualdad en la desigualdad de Hadamard? Dé una demostración independiente de la igualdad en este caso. Demuestre que si $b = \max |b_{ij}|$, entonces

$$|\det \mathbf{B}| \leq b^p p^{p/2}.$$

13. Demuestre que $\mathbf{x}(t)$ tiende a cero cuando t tiende a más infinito si $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ y \mathbf{A} es negativa definida.

- ▷ 14. Se dice que A es *idempotente* si $A^2 = A$. Demuestre que:
- Todo eigenvalor de una matriz idempotente es o 0 o 1.
 - La única matriz idempotente no singular es la matriz idéntica.
 - Una condición necesaria y suficiente para que una matriz hermitiana $p \times p$, sea idempotente, es que k de sus eigenvalores sean iguales a 1, y que los restantes $p - k$ sean cero, en donde k es el rango de la matriz.
 - La traza de una matriz hermitiana idempotente es igual a su rango.
15. Suponga que se representan n mediciones por un vector $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$. El promedio y la varianza de las mediciones están dados por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Demuestre que

$$s^2 = (\mathbf{x}, \{\mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{J}\}\mathbf{x}),$$

en donde \mathbf{J} es una matriz cuadrada con todos sus elementos iguales a 1, y demuestre que $\mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{J}$ es idempotente (véase el problema 14). (La aplicación de matrices idempotentes aparece en estadística y en teoría de regresión.)

16. Exienda el teorema 10.19 b) sobre definición y eliminación demostrando que, para una matriz real simétrica, los números de pivotes positivos, negativos y cero, son iguales a los números de eigenvalores positivos, negativos y cero.

- ▷ 17. Demuestre que:
- Si A es hermitiana y positiva definida, entonces hay una B hermitiana y positiva definida tal que $B^2 = A$.
 - Si A es hermitiana y positiva semidefinida, entonces hay una matriz B hermitiana y positiva semidefinida tal que $B^2 = A$.
 - B es única tanto en a) como en b).
- ▷ 18. Demuestre que:
- $\{\exp(\mathbf{B})\}^H = \exp(\mathbf{B}^H)$.
 - $\exp(i\mathbf{A})$ es unitaria si A es hermitiana.
 - Si U es unitaria, entonces existe una A hermitiana tal que $U = \exp(i\mathbf{A})$.
 - Si A es cuadrada, entonces existen unas matrices hermitianas M y N positivas semidefinidas y unas U y V unitarias tales que $A = UM = NV$. {Se conoce a la parte d) como la *representación polar* de A por analogía con $a = r \exp(i\theta)$ para cada número complejo a . M y N son únicas; si A es no singular, entonces $U = V$ y esta matriz también es única.}
19. Suponga que A $p \times p$, es hermitiana, que B es la matriz real formada de las partes reales de los elementos de A , y que iC es la matriz imaginaria pura formada con las partes imaginarias de los elementos de A –esto es, $A = B + iC$. Definiendo a la matriz \mathcal{A} $2p \times 2p$, como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

- a) Demuestre que \mathcal{A} es simétrica real.
 b) Demuestre que la forma cuadrática generada por \mathbf{A} en \mathbb{C}^p y la forma cuadrática generada por \mathcal{A} en \mathbb{R}^{2p} son equivalentes en el sentido de que, estando \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathbb{R}^p ,

$$(\{\mathbf{u} + i\mathbf{v}\}, \mathbf{A}\{\mathbf{u} + i\mathbf{v}\}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} = [\mathbf{u}^T \ \mathbf{v}^T]^T.$$

- c) Describa cómo se podría usar esto para encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz compleja hermitiana \mathbf{A} sin hacer cálculos con números complejos.

- 20.** El principio de Rayleigh se enuncia para matrices \mathbf{A} hermitianas.
 a) Demuestre que es falso si $\alpha \neq 0$ en la matriz no hermitiana.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Aunque son idénticas sus formas cuadráticas en \mathbb{R}^2 , demuestre que \mathbf{A} y $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$ no tienen los mismos eigenvalores.

- 21.** Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son hermitianas y que \mathbf{B} es positiva definida. Se define a

$${}_{\mathbf{B}}\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{Bx})}.$$

Extienda el principio de Rayleigh para que se aplique a esta generalización del cociente de Rayleigh, en donde ahora los eigenvalores caracterizados son eigenvalores generalizados λ_i , siendo $\mathbf{Av}_i = \lambda_i \mathbf{Bv}_i$ (véanse los problemas 3 y 4).

- 22.** Suponga que \mathbf{A} es hermitiana; demuestre que la norma 2 de \mathbf{A} es igual al radio espectral de \mathbf{A} .

11

Programación lineal

En este capítulo se aplican métodos matriciales a la solución de programas lineales, una de las mayores áreas en donde las matrices se usan tanto en los negocios como en la ciencia y la ingeniería. Se presenta información sobre teoría y métodos, incluyendo el famoso método simplex y su reciente variante de Karmarkar. Son fundamentales los **teoremas clave 11.37, 11.44, 11.50 y 11.53**.

11.1 ANALISIS DE UN EJEMPLO SENCILLO

En una amplia variedad de operaciones económicas, políticas, sociales y científicas, se originan situaciones en las cuales uno quiere minimizar o maximizar alguna cantidad que mida la eficiencia o algún otro aspecto importante de una actividad, producción, costo, ganancia y similares. Muchos de los problemas de optimización de este tipo se llaman *problemas de programación matemática* o *programas matemáticos*. Este capítulo examina una subclase especial pero importante de programas matemáticos que sólo involucran ecuaciones *lineales* y desigualdades; la sección comienza con un problema modelo de la sección 2.7.

Un problema modelo

Recuerde el modelo de planeación de producción de la sección 2.7 y su problema sobre la distribución de los recursos de una planta (tiempo disponible limitado para tres tipos de máquinas) entre dos productos para maximizar las utilidades. El análisis produjo un programa lineal (2.54), (2.55):

$$(11.1) \quad \begin{aligned} &\text{maximizar } M = 40x_1 + 60x_2 \\ &\text{sujeta a las restricciones} \\ &2x_1 + x_2 \leq 70 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 90$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Esto se reescribió en notación matricial como (2.56), (2.57) y (2.58):

(11.2) maximizar a $M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

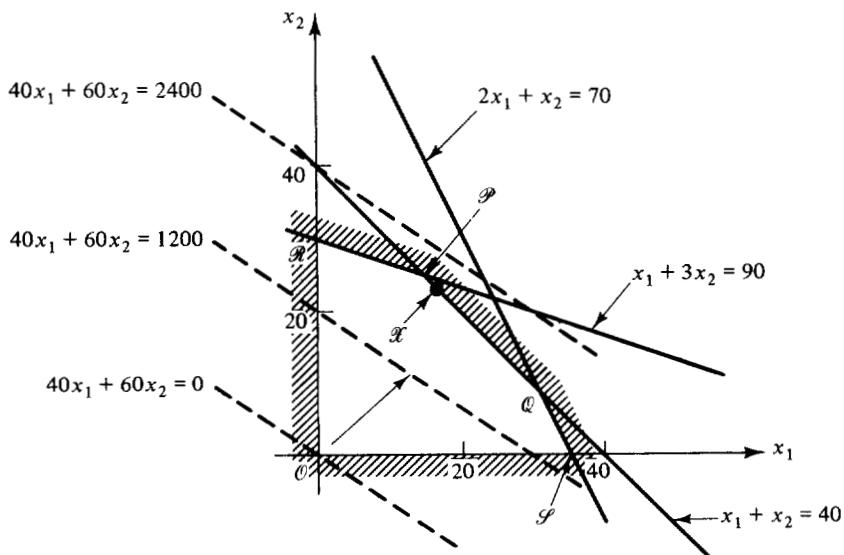
sujeto a las restricciones

$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La solución óptima $\mathbf{x} = [15 \ 25]^T$ se obtuvo geométricamente en (2.59) al examinar el conjunto de restricciones (aquellas \mathbf{x} que satisfacen las restricciones) y al observar que el problema era el encontrar el valor mayor de M para el cual la gráfica de la línea recta $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = M$ intersectaba al conjunto de restricciones.

(11.3)



O , R , P , Q , y S son vértices relevantes para el método simplex; X aparece en el método de Karmarkar.

Geométricamente, es evidente que las soluciones siempre estarán en los vértices del conjunto de restricciones sin importar el valor de c : el último punto en el cual la gráfica de $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = M$ se intersecta con el conjunto de restricciones

siempre será un vértice. De este modo, un método posible para la resolución de programas lineales es simplemente evaluar a $c^T x$ en cada uno de los vértices, sabiendo que los vértices que dan los valores más grandes proporcionaran una solución. Pero de esto resultan cuando menos dos problemas: 1) puede suceder que $c^T x$ se haga arbitrariamente grande y siga satisfaciendo las restricciones, de modo que no se pueda detectar una solución; y 2) cuando se generaliza a partir de dos variables hasta q , el número de vértices crece rápidamente con el número de variables y de restricciones, resultando demasiado caro computacionalmente el examen extenso de los vértices.

El famoso *método simplex** usa la idea básica de examinar los vértices pero trata las dos dificultades anteriores mediante 1), la implementación de un método garantizado para detectar la falta de cotas, y 2), al evitar el examen de vértices con valores de $c^T x$ menores que los que ya se han encontrado. De este modo, mientras que el método aleatorio anterior probaría a todos los cinco vértices \emptyset , S , Q , P , y R en (11.3), el método simplex, comenzando en \emptyset , examinaría a \emptyset , R , y P en orden, o a \emptyset , S , Q , y P en orden antes de detectar que P es la solución; de hecho, usa el primer camino, \emptyset , R , y P .

Durante aproximadamente 40 años, el método simplex fue, sin duda, el método a escoger para resolver programas lineales. Esto cambió dramáticamente a mediados de los ochentas con la sorprendente invención del *método de Karmarkar* y otros *métodos interiores* que se derivaron de él. Al tiempo de esta publicación, se ha dicho que ciertas ejecuciones cuidadosas del método de Karmarkar y de sus métodos derivados son varias veces más rápidas que el método simplex *en cuanto a clases especiales de problemas altamente estructurados*. En todo el mundo se está realizando la investigación sobre esos métodos interiores así como la prueba de sus implementaciones; lo que se aprenda de este trabajo puede cambiar totalmente este capítulo para la próxima edición. Por lo pronto, sólo se intentará indicar lo que involucran los nuevos métodos. La diferencia básica con lo que hasta ahora se ha descrito es que los métodos interiores no consideran simplemente a los vértices si se mueven de uno a otro a lo largo de las aristas; en vez de ello, se mueven a través del interior del conjunto de restricciones como se ilustrará después en esta sección.

Introducción de variables de holgura

Antes de mostrar el método simplex y los métodos interiores, se transformará al programa lineal en una forma más accesible para su solución mediante métodos matriciales. La mayor parte de lo que se ha tratado en este libro involucra *igualdades* más que *desigualdades* del tipo de (11.2); las poderosas herramientas computacionales –operaciones de renglón, eliminación, sustituciones y otras afines– se han desarrollado para las ecuaciones. Para aprovecharlas, se reformulará el programa lineal (11.2) de tal modo que aparezcan igualdades con excepción de las desigualdades extremadamente sencillas $x \geq 0$.

*También llamado “de Dantzig”, N. del T.

Al introducir *variables de holgura* no negativas x_3, x_4, x_5 en las primeras tres desigualdades de (11.1), se llega a

$$(11.4) \quad \begin{aligned} & \text{maximizar } M = 40x_1 + 60x_2 \\ & \text{sujeta a las restricciones} \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 70 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\ & x_1 + 3x_2 + x_5 = 90 \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned}$$

El hecho de que x_3, x_4 y x_5 sean no negativas hace que (11.4) sea equivalente a (11.1). En notación matricial, las matrices \mathbf{A} , \mathbf{x} y \mathbf{c} se extienden para dar cabida a cinco x_i :

$$(11.5) \quad \begin{aligned} & \text{maximizar } M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e \\ & \text{sujeta a las restricciones} \\ & \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}, \text{ en donde} \\ & \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_e = [40 \ 60 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ & \mathbf{x}_e = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = [70 \ 40 \ 90]^T. \end{aligned}$$

Los vértices \mathcal{O} , \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{P} , y \mathcal{R} ; son puntos importantes en la formulación original; estos puntos siguen siendo importantes y se identifican fácilmente en la nueva disposición. Los valores x_i para cada punto son:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O}: 0, 0, 70, 40, 90 & \mathcal{S}: 35, 0, 0, 5, 55 \\ \mathcal{Q}: 30, 10, 0, 0, 30 & \mathcal{P}: 15, 25, 15, 0, 0 \\ \mathcal{R}: 0, 30, 40, 10, 0 & \end{array}$$

Observe que cada vértice corresponde a una \mathbf{x}_e que tiene exactamente dos elementos cero y exactamente tres elementos diferentes de cero. Las variables diferentes de cero en esa solución se llaman *variables básicas*, las variables cero se llaman *variables no básicas*, y a la misma solución \mathbf{x}_e se le llama una *solución básica*. Las soluciones a $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$ que también satisfacen $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ se llaman *factibles*. Como los vértices corresponden a soluciones básicas factibles, el método simplex se moverá de una solución básica factible a otra solución básica factible, porque se espera que se dé una solución óptima como una solución básica factible (esto es, un vértice).

El método simplex

El método simplex se mueve de vértice a vértice y por lo tanto deberá comenzar en un vértice, esto es, una solución básica factible. Una de esas soluciones básicas factibles –que corresponde a \emptyset en (11.3)– es evidente de (11.4):

$$(11.6) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 70, \quad x_4 = 40, \quad x_5 = 90.$$

Esta se localiza fácilmente porque tanto x_3 como x_4 y x_5 (las variables diferentes de cero y por lo tanto básicas) aparecen sólo en una ecuación y por ello se obtiene fácilmente su valor cuando x_1 y x_2 (las variables cero y por lo tanto no básicas) se igualan a cero. Observe que $M = 40x_1 + 60x_2$ está definida solamente en términos de variables no básicas.

Ahora ya es posible moverse hacia otro vértice con un mayor valor para M . Como el valor de M cambia, se tratará a M como una variable y las ecuaciones de (11.4) se reescribirán como

$$(11.7) \quad \begin{aligned} 0M + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 70 \\ 0M + 1x_1 + 1x_2 + &\quad + 1x_4 = 40 \\ 0M + 1x_1 + 3x_2 + &\quad + 1x_5 = 90 \\ 1M - 40x_1 - 60x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como de costumbre, es conveniente el describir las ecuaciones mediante una matriz aumentada:

$$(11.8) \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \\ 1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ya que $x_1 = x_2 = 0$, en este punto $M = 0$. Para aumentar $M = 40x_1 + 60x_2$, es posible hacer a x_1 o a x_2 (o a ambas) positivas; el *método simplex siempre cambia una variable a la vez*, y se escogerá a x_2 , porque al aumentarla en una unidad, M aumenta en 60 en comparación de 40 que aumentaría con el mismo cambio en x_1 . Al mantener a $x_1 = 0$, pero cambiando a x_2 , se necesita cambiar a x_3 , x_4 y x_5 para satisfacer a (11.7):

$$x_3 = 70 - x_2, \quad x_4 = 40 - x_2, \quad y \quad x_5 = 90 - 3x_2.$$

Ya que es necesario que $x_i \geq 0$, la primera ecuación anterior necesita inmediatamente que $x_2 \leq 70$, la segunda, que $x_2 \leq 40$ y la tercera, que $x_2 \leq 30$. Para satisfacer las tres restricciones, es necesario que x_2 se incremente sólo hasta la cota menor 30; esto resulta en que

$$(11.9) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 40, \quad x_4 = 10, \quad x_5 = 0, \quad \text{con } M = 1800$$

como una nueva *solución básica factible*. Observe que este punto corresponde a \mathcal{P} en (11.3).

El siguiente paso es repetir el proceso que se acaba de completar. Recuerde que se cumplieron dos condiciones útiles al comenzar con (11.7) y (11.8): 1) cada variable básica (diferente de cero) sólo aparecía en una ecuación –cada variable básica sólo tiene un elemento diferente de cero en su columna en (11.8); y 2) M se expresa solamente en términos de las variables no básicas (cero)– aparecen ceros en las columnas de variables básicas en el último renglón de (11.8). Estas dos condiciones se unen:

- (11.10) Toda variable básica tiene sólo un elemento diferente de cero en la columna que le corresponde en la matriz aumentada y esa variable no está en el renglón inferior.

Ya que ahora las variables básicas son x_2, x_3 y x_4 , el formato estándar descrito por (11.10) ya no será válido para la matriz aumentada (11.8) –la columna de x_2 viola lo dicho en (11.10). Esto se puede enmendar con la eliminación de Gauss-Jordan: usando el tercer renglón (para no perturbar los ceros en las columnas de x_3 y x_4) para eliminar tanto arriba como abajo en la columna de x_2 , así (11.8) se transforma en

$$(11.11) \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} | & 40 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} | & 10 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} | & 30 \\ 1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 | & 1800 \end{array} \right].$$

Esta matriz tiene la forma de (11.10) para las columnas de x_2, x_3 y x_4 ; observe también que el renglón inferior dice que $M = 20x_1 + 20x_5 = 1800$, en donde $x_1 = x_5 = 0$ son las variables no básicas.

Nuevamente, es posible llegar a otra solución básica factible con un valor aumentado de M . Como ahora $M = 1800 + 20x_1 - 20x_5$ y $x_i \geq 0$, M se puede incrementar aumentando a x_1 para que sea positivo y manteniendo a $x_5 = 0$. Esto, desde luego, obliga a que se hagan cambios en las variables básicas:

$$x_3 = 40 - \frac{5}{3}x_1, \quad x_4 = 10 - \frac{2}{3}x_1, \quad x_2 = 30 - \frac{1}{3}x_1.$$

El mantener a $x_i \geq 0$ requiere que x_1 no sea mayor que 24, 15 y 90 respectivamente; por lo tanto es posible incrementarla solamente a 15, la menor de las tres. Esto da una nueva solución básica factible:

$$(11.12) \quad x_1 = 15, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 15, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad \text{con } M = 2100.$$

Observe que este punto corresponde a \mathcal{P} en (11.3). Como las variables básicas son ahora x_1, x_2 y x_3 , (11.11) ya no está en la forma estándar (11.10). Usando

el segundo renglón (para no perturbar los ceros en las columnas de x_2 y x_3) para eliminar arriba y abajo en la columna de x_1 , se produce

$$(11.13) \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 2100 \end{array} \right].$$

Esta matriz tiene la forma (11.10) para las columnas de x_1 , x_2 y x_3 ; observe también que el último renglón dice que

$$M + 30x_4 + 10x_5 = 2100,$$

en donde $x_4 = x_5 = 0$ son las variables no básicas.

Es posible pasar a otra solución básica factible. Sin embargo, de

$$M = 2100 - 30x_4 - 10x_5$$

se ve que si x_4 o x_5 aumentan, M disminuirá; en el método simplex ésta es la señal de que se ha encontrado ya una solución óptima. En verdad,

$$x_1 = 15, x_2 = 25, \quad y \quad M = 2100$$

es la solución óptima que se encontró gráficamente

El método simplex, ejecutado con matrices aumentadas, es conceptualmente sencillo:

(11.14) Comenzando con una matriz aumentada de la forma (11.10):

1. Determinar la variable no básica (cero) que se va a aumentar.
2. Determinar cuánto se puede aumentar, y hacerlo.
3. Identificar las nuevas variables básicas y no básicas.
4. Usar la eliminación de Gauss-Jordan para poner la matriz aumentada en la forma (11.10) con respecto a las nuevas variables básicas y no básicas.

El proceso (11.14) se repite hasta que se encuentre una solución óptima (después se dirá más sobre esto). De hecho, los pasos anteriores son bastante mecánicos:

(11.15) Comenzando con una matriz aumentada en la forma (11.10):

1. Incrementar la variable no básica que corresponda al término negativo con mayor valor absoluto en el último renglón.
2. Dividir los elementos del lado derecho entre los elementos positivos de la columna de la variable no básica que aumenta, y aumentarla en el menor de esos cocientes.
3. Las variables básicas son las variables diferentes de cero, mientras que las variables no básicas serán las variables cero.
4. Usar la eliminación de Gauss-Jordan para escribir la matriz aumentada en la forma (11.10) con respecto a las nuevas variables básicas y no básicas.

Observe también que la primera columna de la matriz aumentada no tuvo importancia principal en los cálculos; solamente sirvió para permitir interpretar la relación entre M y las variables x_i . Siempre que se recuerde la forma de interpretar el renglón inferior, será posible omitir la primera columna de las matrices aumentadas (11.8), (11.11) y (11.13).

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 5.

Gradientes proyectados: un método interior

Una idea clave en los *métodos interiores* en general y en los *métodos afines al de Karmarkar* en particular, es el evitar la restricción del movimiento a lo largo de los bordes del conjunto de restricciones. Suponga que se han introducido variables de holgura para escribir el problema en la forma (11.5). Suponga también que la solución aproximada en este momento es \mathbf{x}_e y que se están considerando direcciones para un posible desplazamiento partiendo de \mathbf{x}_e . Se buscará aquella dirección que dé el aumento más rápido en la función a maximizar. Como las derivadas miden la rapidez del cambio, se buscará aquella dirección \mathbf{n} (esto es, un vector unitario \mathbf{n}) que parte de \mathbf{x}_e en la cual –si se está maximizando una función $f(\mathbf{x}_e)$ – la derivada de f en la dirección de \mathbf{n} sea mayor.

En este caso, la función que se está maximizando es $f(\mathbf{x}_e) = (\mathbf{c}_e, \mathbf{x}_e)$. La derivada es justamente la derivada de $f(\mathbf{x} + t\mathbf{n})$ en $t = 0$; entonces

$$f(\mathbf{x}_e + t\mathbf{n}) = f(\mathbf{x}_e) + t(\mathbf{c}_e, \mathbf{n}),$$

de modo que esta derivada direccional es simplemente $(\mathbf{c}_e, \mathbf{n})$. Así, el problema de escoger una dirección se transforma en:

encontrar un vector unitario \mathbf{n} –tal que $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$ – que maximice a $(\mathbf{c}_e, \mathbf{n})$.

Recordando que

$$(\mathbf{c}_e, \mathbf{n}) = \|\mathbf{c}_e\|_2 \|\mathbf{n}\|_2 \cos \theta = \|\mathbf{c}_e\|_2 \cos \theta,$$

en donde θ es el ángulo entre \mathbf{c}_e y \mathbf{n} , se ve que $(\mathbf{c}_e, \mathbf{n})$ se maximiza con $\theta = 0$ –esto es, con \mathbf{n} en la dirección de \mathbf{c}_e .

En el análisis anterior se pasó por alto un aspecto importante del problema: las restricciones $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$. No hay garantía alguna de que $\mathbf{x}_e + t\mathbf{n}$ satisface las restricciones a menos que se fuerce esta condición para \mathbf{n} , es decir:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_e(\mathbf{x}_e + t\mathbf{n}) = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + t\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{b} + t\mathbf{A}_e \mathbf{n}.$$

Por lo tanto,

se debe restringir la dirección \mathbf{n} para que quede en el espacio nulo \mathcal{N} de \mathbf{A}_e :
 $\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Nuevamente, se tratará de maximizar a $(\mathbf{c}_e, \mathbf{n})$ pero ahora con \mathbf{n} restringida al subespacio \mathcal{N} de vectores que satisfacen $\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Sea P_0 la proyección ortogonal sobre este subespacio como en la sección 5.8; recuerde que $\mathbf{c}_e - P_0 \mathbf{c}_e$ es, por lo tanto, ortogonal a todos los vectores en \mathcal{N} . Escribiendo

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}_e, \mathbf{n}) &= (\mathbf{c}_e - P_0 \mathbf{c}_e + P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n}) = (\mathbf{c}_e - P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n}) + (P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n}) \\ &= 0 + (P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n}) \\ &= (P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

se demuestra que se debe escoger a \mathbf{n} de longitud 1 en \mathcal{N} para que maximice a $(P_0 \mathbf{c}_e, \mathbf{n})$, en donde el mismo $P_0 \mathbf{c}_e$ está en \mathcal{N} . Por lo tanto, la solución es que \mathbf{n} sea un vector unitario en la dirección de $P_0 \mathbf{c}_e$.

En resumen:

- (11.16) El vector unitario \mathbf{n} en la dirección del aumento más rápido de $(\mathbf{c}_e, \mathbf{x})$, restringido por $\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$ para que se satisfagan todas las limitantes, está dado por la dirección de la proyección ortogonal de \mathbf{c}_e sobre el conjunto \mathcal{N} de las \mathbf{n} que satisfacen $\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$. A esta dirección se le llama el *gradiente proyectado*; véase el problema 8.

Encontrar esta dirección \mathbf{n} en la práctica, no es el formidable problema que podría parecer a primera vista. Recuerde el **corolario clave 8.20 c)** de la sección 8.4 sobre las descomposiciones en valores singulares de matrices: si $\mathbf{A}_e = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ es una descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{A}_e $p \times q$, de rango k , entonces las últimas $q - k$ columnas de \mathbf{V} forman una base ortonormal para el espacio de las \mathbf{n} que satisfacen a $\mathbf{A}_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Si se forma a

$$\mathbf{V}_0 = [\mathbf{v}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_q]$$

partiendo de esas columnas, la matriz $q \times q$, $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0^H$ efectúa esta proyección ortogonal:

$$P_0 \mathbf{c}_e = \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0^H \mathbf{c}_e \quad (\text{véase teorema 5.79})$$

Hay otras formas de calcular a $P_0 \mathbf{c}_e$, pero ésta es una de las mejores (cuando menos en este caso con pocas variables y pocas restricciones) debido a la disponibilidad de buenos programas de cómputo para encontrar a \mathbf{V} .

En el caso específico del programa lineal muestra (11.4) y (11.5), se debe calcular la proyección ortogonal de

$$\mathbf{c}_e = [40 \quad 60 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ sobre } \mathcal{N}.$$

MATLAB produjo la dirección.

$$(11.17) \quad [2.5 \quad 3.75 \quad -8.75 \quad -6.25 \quad -13.75]^T$$

para desplazarse desde el vector factible inicial $[0 \quad 0 \quad 70 \quad 40 \quad 90]^T$. Así, se consideran los vectores \mathbf{x}_e de la forma

$$\mathbf{x}_e = [0 \quad 0 \quad 70 \quad 40 \quad 90]^T + t[2.5 \quad 3.75 \quad -8.75 \quad -6.25 \quad -13.75]^T,$$

los cuales satisfacen a $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$ para cualquier valor de t . Sin embargo, también es necesario que $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$, por lo tanto t no puede ser mayor que $70/8.75, 40/6.25$ o que $90/13.75$ –el menor de los cuales es 6.4. Usando este valor para t , se obtiene una nueva \mathbf{x}_e igual a

$$[16 \quad 24 \quad 14 \quad 0 \quad 2]^T.$$

En resumen: se comienza con el mismo punto factible inicial que en el método simplex:

$$(11.18) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 70, \quad x_4 = 40, \quad x_5 = 90, \quad \text{con } M = 0$$

y en un paso ha habido un *desplazamiento a través del interior del conjunto de restricciones* para alcanzar a

$$(11.19) \quad x_1 = 16, \quad x_2 = 24, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 2, \quad \text{con } M = 2080;$$

esto está bastante cerca de $x_1 = 15, x_2 = 25$ con $M = 2100$ –la solución óptima. Observe que no se llegó a un vértice del conjunto de restricciones; este nuevo punto corresponde al marcado con \mathcal{X} en (11.3).

La discusión anterior indica algo del atractivo de los métodos interiores en general, y de este método del *gradiente proyectado* en particular, pero no contempla una dificultad: ¡no es posible repetir el proceso tal y como se describió y alejarse de (11.19)! ¿Por qué? Debido a la elección de la dirección \mathbf{n} en la cual el desplazamiento no dependió de la \mathbf{x}_e desde la que parte el movimiento; \mathbf{n} simplemente está definida por \mathbf{c}_e y el espacio nulo \mathcal{N} , y ninguno de los dos cambia. Así, si se aplicará nuevamente el método en (11.19), se volvería a encontrar la dirección (11.17) y se descubriría que no es posible aumentar a M en esa dirección; se detendrá en (11.19), que no es lo óptimo.

La idea básica del método del gradiente proyectado que se describió se ha conocido durante años; aunque se han encontrado formas para evitar el fracaso del método, ninguno ha podido competir con el método simplex. La contribución de Karmarkar fue el encontrar un método poderoso para rodear la dificultad, el cual bien puede competir con el método simplex.

Un método afín al de Karmarkar

El enfoque de Karmarkar se puede considerar como uno que transforma el

programa lineal después de cada paso para tener un *nuevo problema para el cual la dirección del gradiente proyectado es distinta de la que había en el problema original*. Se han usado varias transformaciones ingeniosas y los investigadores las están estudiando en lo que se refiere a su impacto. Aquí se describirá sólo una de las ideas: el *reescalado*.

Suponga que cada variable se *reescala* –esto es, se reemplaza por un múltiplo positivo de sí misma: $x'_i = x_i/d_i$. En notación matricial, esto es $\mathbf{x}'_e = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}_e$ o $\mathbf{x}_e = \mathbf{D}\mathbf{x}'_e$, en donde $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_5)$ en este caso. En las nuevas variables \mathbf{x}'_e , las restricciones vienen a ser

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{D} \mathbf{x}'_e \quad \text{y} \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x}_e = \mathbf{D} \mathbf{x}'_e;$$

la función a maximizar es

$$\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e = \mathbf{c}_e^T \mathbf{D} \mathbf{x}'_e = (\mathbf{D} \mathbf{c}_e)^T \mathbf{x}'_e.$$

Entonces, el problema reescalado (11.5) es ahora

$$(11.20) \quad \begin{aligned} & \text{maximizar } (\mathbf{D} \mathbf{c}_e)^T \mathbf{x}'_e \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & (\mathbf{A}_e \mathbf{D}) \mathbf{x}'_e = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}'_e \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Si se usa la idea del gradiente proyectado, es necesario encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{D}\mathbf{c}_e$ sobre el espacio nulo de \mathbf{AD} ; una vez que encontrada esta dirección \mathbf{n}' , nos moveremos a una nueva $\mathbf{x}'_e + t\mathbf{n}'$. Como $\mathbf{x}_e = \mathbf{D}\mathbf{x}'_e$, esto corresponde a un desplazamiento a una nueva $\mathbf{x}_e + t\mathbf{D}\mathbf{n}'$. Así,

$$(11.21) \quad \begin{aligned} & \text{El reescalamiento de } \mathbf{x}_e = \mathbf{D}\mathbf{x}'_e \text{ tiene el siguiente efecto –la nueva dirección} \\ & \text{del movimiento desde } \mathbf{x}_e \text{ es } \mathbf{n} = \mathbf{D}\mathbf{n}', \text{ en donde } \mathbf{n}' \text{ tiene la dirección de la} \\ & \text{proyección ortogonal } P'_0(\mathbf{D}\mathbf{c}_e) \text{ de } \mathbf{D}\mathbf{c}_e \text{ sobre el espacio nulo de } \mathbf{A}_e \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Esto se puede interpretar de otro modo. Recuerde del teorema 5.73 sobre la mejor aproximación, que la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathcal{V}_0 es el punto más cercano a \mathbf{v} en \mathcal{V}_0 . Así, $P'_0(\mathbf{D}\mathbf{c}_e)$ es el punto más cercano a $\mathbf{D}\mathbf{c}_e$ en el espacio nulo de $\mathbf{A}_e \mathbf{D}$. Ahora, que \mathbf{v}' esté en el espacio nulo de $\mathbf{A}_e \mathbf{D}$ significa que

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}_e \mathbf{D}) \mathbf{v}' = \mathbf{A}_e (\mathbf{D} \mathbf{v}') = \mathbf{A}_e \mathbf{v},$$

entonces $\mathbf{v} = \mathbf{D} \mathbf{v}'$ está en el espacio nulo de \mathbf{A}_e . Esto quiere decir que $P'_0(\mathbf{D}\mathbf{c}_e)$ es igual a $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}$ en donde \mathbf{v} minimiza a

$$(\mathbf{D}\mathbf{c}_e - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{D}\mathbf{c}_e - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{v})$$

sobre \mathbf{v} recorriendo el espacio nulo de \mathbf{A}_e . Y es en esta dirección \mathbf{v} –o, más bien, $\mathbf{n} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_2$ –en la cual se moverán las variables \mathbf{x}_e . La expresión de arriba se reescribe como

$$(\mathbf{D}^{-1}\{\mathbf{D}^2\mathbf{c}_e - \mathbf{v}\}, \mathbf{D}^{-1}\{\mathbf{D}^2\mathbf{c}_e - \mathbf{v}\})$$

y se introduce un nuevo producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{D}^{-1}\mathbf{w});$$

entonces \mathbf{v} minimiza a

$$\langle \mathbf{D}^2\mathbf{c}_e - \mathbf{v}, \mathbf{D}^2\mathbf{c}_e - \mathbf{v} \rangle.$$

Esto es, la dirección del movimiento desde \mathbf{x}_e es la más cercana a $\mathbf{D}^2\mathbf{c}_e$, medida con este nuevo producto interior. $\mathbf{D}^2\mathbf{c}_e$ tiene una interpretación sencilla: la función a maximizar en el programa lineal es igual a

$$\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e = (\mathbf{c}_e, \mathbf{x}_e) = \langle \mathbf{D}^2\mathbf{c}_e, \mathbf{x}_e \rangle.$$

Es decir, que $\mathbf{D}^2\mathbf{c}_e$ está en la dirección de aumento más rápido cuando se usa el nuevo producto interior.

Resumiendo

- (11.22) Reescalando mediante $\mathbf{x}'_e = \mathbf{D}\mathbf{x}_e$ tiene el siguiente efecto –la nueva dirección de movimiento a partir de \mathbf{x}_e es la dirección del gradiente proyectado con respecto al nuevo producto interior no estándar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{D}^{-1}\mathbf{w}) = \mathbf{u}^T \mathbf{D}^{-2} \mathbf{w}.$$

Esto es, el reescalamiento sencillamente introduce una nueva forma de medir longitud y ángulo al encontrar la dirección del gradiente proyectado.

Nada de lo dicho anteriormente explica *la forma de escoger a D*. Una de las ideas de Karmarkar es que el estar en la orilla del conjunto de restricciones causa dificultades, de modo que uno nunca se debe mover en una dirección particular a lo largo del camino hacia la orilla, y las variables se deberían reescalar de tal manera que la aproximación \mathbf{x}'_e esté, en cierto sentido, centrada en el conjunto de restricciones. La efectividad de los métodos afines al de Karmarkar depende fuertemente de la manera precisa de diseñar e implementar ese escalado y otras transformaciones. La investigación y experimentación indican que la solución adecuada de estas sutilezas permite aplicar el método, no sólo con rapidez para llegar cerca de la solución óptima, sino también para identificar rápidamente las variables básicas para una solución óptima para después llegar directamente a ella. Los detalles para la realización de esto se investigan y se debaten intensamente por el momento, y están más allá del propósito de este libro.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 11.

Dualidad

Recuerde que (11.1) sirve de ejemplo para ilustrar algunos conceptos generales

de programación lineal. A continuación se ilustrará el importante concepto de la *dualidad*, presentándolo desde dos distintos puntos de vista.

Primero se examinará la idea en el marco de la aplicación de la que derivó (11.1). Recuerde que el problema es determinar los números x_1 y x_2 de dos tipos de productos para fabricarlos a modo de maximizar las utilidades, dado que la ganancia por unidad del primer producto es de 40, y de 60 por unidad del segundo producto; las restricciones reflejan el hecho de que las máquinas que se usan en la fabricación sólo tienen 70, 40 y 90 horas disponibles, y que una unidad de cada producto necesita cierto lapso del tiempo de cada máquina. Véase la sección 2.7 y especialmente (2.53).

Suponga que otra división (digamos la división 2) de la compañía quiera usar esas mismas máquinas para fabricar otros productos; la división 2 quiere saber cuánto le debería pagar a la división 1 por hora de cada máquina para que la división 1 pusiera la máquina a disposición de la división 2, y desde luego que la división 2 desea que esto se haga de la manera más económica posible. Modelamos matemáticamente esto haciendo que y_1 , y_2 y y_3 sean los (hasta ahora desconocidos) precios que la división 2 pagará por hora del tiempo de cada uno de los tres tipos de máquinas. El pago total a la división 1, que la división 2 quiere minimizar, será entonces $m = 70y_1 + 40y_2 + 90y_3$. Para que la división 1 esté de acuerdo con el trato, debería obtener la misma ganancia haciendo el trato que usando las máquinas. Cuando la división 1 se reduce a no hacer una unidad de su primer producto, perderá \$40 de sus utilidades; sin embargo, libera 2, 1 y 1 hora respectivamente a sus tres máquinas, por lo cual recibirá $2y_1 + 1y_2 + 1y_3$ de la división 2. De este modo el intercambio le convendrá a la división 1 en lo referente al primer producto siempre que la ganancia sea mayor que su pérdida: $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$. Al analizar de igual modo el segundo producto se obtiene $y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 60$. Entonces el problema para la división 2 es el determinar los precios y_1 , y_2 y y_3 para

$$(11.23) \quad \begin{aligned} &\text{minimizar } m = 70y_1 + 40y_2 + 90y_3 \\ &\text{sujeto a las restricciones} \\ &2y_1 + y_2 + y_3 \geq 40 \\ &y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 60 \\ &y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Este programa lineal (11.23) se llama *el dual* de (11.1). En notación matricial, es sorprendente su relación con (11.2):

$$(11.24) \quad \begin{aligned} &\text{minimizar } m = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ &\text{sujeta a las restricciones} \\ &\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

en donde \mathbf{A} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son como en (11.2) y

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T.$$

Comparando (11.2) y (11.24) se muestra que “minimizar” queda en lugar de “maximizar”, “ \mathbf{A}^T ” reemplaza a “ \mathbf{A} ,” “ \geq ” sustituye a “ \leq ,” “ \mathbf{c} ” reemplaza a “ \mathbf{b} ,” y “ \mathbf{b} ” reemplaza a “ \mathbf{c} . ”

Este programa dual (11.24) se puede deducir por otro camino, mediante geometría en lugar de la descripción de la aplicación. Examine la figura (11.3) y, especialmente, el punto óptimo \mathcal{P} . La perpendicular en dirección “noreste” a la recta $40x_1 + 60x_2 = 2100$ que pasa por \mathcal{P} queda en el ángulo entre las perpendiculares semejantes a \mathcal{RP} y a \mathcal{PQ} . Esto dice que la primera perpendicular es una combinación lineal no negativa de las otras dos. Ya que estas perpendiculares son precisamente $[40 \quad 60]^T$, $[1 \quad 3]^T$ y $[1 \quad 1]^T$, la combinación se encuentra fácilmente: $[40 \quad 60]^T = 30[1 \quad 1]^T + 10[1 \quad 3]^T$. Observe que $[40 \quad 60]^T$ es precisamente \mathbf{c} , mientras que los otros dos vectores son los transpuestos de aquellos renglones de \mathbf{A} que corresponden a las desigualdades que de hecho serán igualdades en el punto óptimo \mathcal{P} . Esto se puede escribir en notación matricial como

$$(11.25) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}$$

$$\text{en donde } \mathbf{y}^* = [0 \quad 30 \quad 10]^T \geq \mathbf{0}.$$

La sorprendente verdad es que esta \mathbf{y}^* resuelve el programa lineal (11.24). Para ver esto, suponga que \mathbf{y} satisface las restricciones duales $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ y $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, y sea \mathbf{x}^* la solución óptima $[15 \quad 25]^T$ al programa original –llamado *primal*– (11.2). Ya que $\mathbf{Ax}^* \leq \mathbf{b}$ mientras que $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, se tiene que

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Ax}^* \leq \mathbf{y}^T \mathbf{b}.$$

Como también $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ mientras que $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, se tiene

$$\mathbf{x}^{*T} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{x}^{*T} \mathbf{c}.$$

Al combinar esas dos desigualdades y usar $\mathbf{y}^T \mathbf{Ax}^* = (\mathbf{Ax}^*)^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ se obtiene

$$(11.26) \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \text{ para toda } \mathbf{y} \text{ que satisfaga } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Recuerde que \mathbf{y}^* tiene elementos cero en donde $\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}$ tiene elementos diferentes de cero, mientras que los elementos diferentes de cero de \mathbf{y}^* aparecen en donde $\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}$ tiene elementos cero. Por lo tanto,

$$\mathbf{y}^{*T} (\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}) = 0, \text{ esto es } \mathbf{y}^{*T} \mathbf{Ax}^* = \mathbf{y}^{*T} \mathbf{b}.$$

Ya que $\mathbf{y}^{*T} \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{y}^*)^T \sim \mathbf{c}^T$ de (11.25), se obtiene $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*T} \mathbf{b}$. De la combinación de esto con (11.26), resulta

$$(11.27) \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \text{ para toda } \mathbf{y} \text{ que satisfaga } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

En otras palabras, y^* minimiza a $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ sujeto a las restricciones $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ y $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ —por lo tanto y^* resuelve el problema lineal dual (11.24). Observe también que $\mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$: el valor óptimo (mínimo) m del dual es igual al valor óptimo (máximo) M del primal. En el ejemplo (11.2), (11.24), se tenía $M = 2100$; ahora

$$m = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = [70 \ 40 \ 90][0 \ 30 \ 10]^T = 1200 + 900 = 2100 = M$$

como se afirmaba. En nuestra aplicación, esto significa que la división 2 puede ofrecer el pago por el uso de las máquinas, lo que redituará a la división 1 exactamente la misma ganancia que si usaran las máquinas (que intuitivamente parece ser lo que se debería ofrecer).

En la sección 11.4 se verá que el dual tiene gran importancia práctica.

PROBLEMAS 11.1

- ▷ 1. Resuelva el siguiente programa lineal a) geométricamente y b) por el método simplex

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } x_1 + 2x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & x_1 \leq 25 \\ & x_1 + x_2 \leq 30 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- ▷ 2. Resuelva el siguiente programa lineal a) geométricamente y b) por el método simplex

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } x_1 + 2x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1 \leq 50 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Resuelva el siguiente problema lineal a) geométricamente y b) por el método simplex

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } 3x_1 + 2x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 70 \\x_1 + x_2 &\leq 40 \\3x_1 + x_2 &\leq 90 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

4. Explique por qué, en el método simplex, el valor actual de M que corresponde a la solución básica factible \mathbf{x}_e , aparece como el elemento (4,7) en las matrices aumentadas en los ejemplos.
5. Reste una variable de holgura x_4 de la desigualdad $x_2 - x_1 \geq -5$ de modo que se transforme en $x_2 - x_1 - x_4 = -5$ para usar el método simplex para resolver el programa lineal

maximizar a $2x_1 + x_2$
sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 10 \\-x_1 + x_2 &\geq -5 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

- ▷ 6. Demuestre que en lo que concierne a las variables x_1 y x_2 , la dirección del gradiente proyectado (11.17) es tan sólo un múltiplo de \mathbf{c} , esto es, de $[40 \quad 60]^T$.
- 7. Demuestre que no hay movimiento posible que incremente a M en la dirección del gradiente proyectado (11.17) partiendo de los vectores básicos factibles correspondientes a $\mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P}$, y \mathcal{R} que sean distintos de \mathcal{O} .
- ▷ 8. Suponga que $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, en donde $\langle \mathbf{x} \rangle_i = x_i$, y que \mathbf{c} y \mathbf{x} son ambos $p \times 1$. Demuestre que ∇f , la matriz $p \times 1$ formada de la primera derivada parcial de $f - \langle \nabla f \rangle_i = \partial f / \partial x_i$ — satisface $\nabla f = \mathbf{c}$. (Esto explica el término “gradiente proyectado.”)
- 9. Utilice MATLAB o algún software similar para calcular la dirección del gradiente proyectado del programa lineal del problema 1, y entonces muévase lo más lejos posible en esa dirección desde el vector básico factible inicial.
- 10. Haga lo que se pidió en el problema 9, pero para el programa del problema 2.
- 11. Para el programa lineal de ejemplo en esta sección.
 - a) Encuentre el vector factible que resulta de mover sólo el 95% de la distancia sobre la arista del conjunto de restricciones desde el punto básico factible (11.18) hacia (11.19) en la dirección (11.17)
 - b) Utilice MATLAB o algún software semejante para encontrar la dirección del gradiente proyectado escalado que se obtuvo usando $\mathbf{D} = \text{diag}(0.95, 1.75, 0.675, 0.18, 0.18)$.

- c) Muévase desde el punto alcanzado en a) en la dirección encontrada en b) para alcanzar la arista del conjunto de restricciones.
- ▷ 12. Encuentre el dual para el programa lineal del problema 1; use el argumento geométrico en el punto óptimo del programa primal para encontrar un vector óptimo para el dual.
13. Haga lo que se pide en el problema 12, pero para el programa del problema 2.
14. Haga lo que se pide en el problema 12, pero para el programa del problema 3.
- ▷ 15. Reescriba el dual (11.23) como un problema de maximización (esto es, maximizar a $-m = -70y_1 - 40y_2 - 90y_3$) y use el método simplex para resolver el programa lineal resultante.
16. Haga lo que se pide en el problema 15, pero para el dual del programa del problema 1.
17. Haga lo que se pide en el problema 15, pero para el dual del programa del problema 2.
18. Haga lo que se pide en el problema 15, pero para el dual del programa del problema 3.

11.2 UN PROGRAMA LINEAL GENERAL

Para definir con precisión un programa lineal general se requiere de algo de nomenclatura.

Terminología

- (11.28) **Definición.** Suponga que \mathbf{A} y \mathbf{B} son ambas matrices reales de $p \times q$, se escribirá $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ si y sólo si $\langle \mathbf{A}_{ij} \rangle \geq \langle \mathbf{B}_{ij} \rangle$ para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq q$; definiciones semejantes serán válidas para $>$, \leq y $<$. Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{A} se llama *no negativa*; si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, entonces \mathbf{A} se llama (estrictamente) *positiva*.

Esto proporciona el fundamento para una definición de un programa lineal general.

- (11.29) **Definición**
- Todo problema para encontrar valores extremos (maximizar o minimizar) una función $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ con \mathbf{x} en \mathbb{R}^q y sujeto a un número finito de restricciones lineales de igualdad y de desigualdad usando \leq o \geq o ambos, se llama un *programa lineal*.
 - Se dice que un programa lineal está en su *forma estándar* si y sólo si se escribe como

$$\begin{aligned} &\text{maximizar a } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeta a las restricciones} \\ &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

No hay una forma estándar que esté universalmente aceptada para programas lineales; la anterior es una de las muchas posibilidades. Cualquier programa lineal se puede reescribir en esta forma estándar. Toda variable z que originalmente no esté restringida a ser no negativa se puede reemplazar haciendo $z = z_+ - z_-$ con $z_+ \geq 0$ y $z_- \geq 0$; toda desigualdad lineal $\alpha^T x \geq \beta$ se puede reemplazar por $(-\alpha^T)x \leq (-\beta)$ y toda igualdad lineal $\alpha^T x = \beta$ se puede reemplazar por el par $\alpha^T x \leq \beta$ y $(-\alpha^T)x \leq (-\beta)$.

Para aplicar los poderosos métodos desarrollados para trabajar con ecuaciones, la forma estándar se convertirá a una que involucre ecuaciones y desigualdades sencillas, exactamente como en la sección 11.1. Si A es de $p \times q$, se introducirán *variables de holgura* x_{q+1}, \dots, x_{q+p} —una para cada una de las p desigualdades en $Ax \leq b$. Las matrices *extendidas* A_e , x_e y c_e se definen como en la sección 11.1:

$$(11.30) \quad \begin{aligned} A_e &= [A \quad I_p] \text{ es } p \times (p + q) \\ x_e &= [x^T \quad x_{q+1} \quad \cdots \quad x_{q+p}]^T \text{ es } (q + p) \times 1 \\ c_e &= [c^T \quad \mathbf{0}^T]^T \text{ es } (q + p) \times 1. \end{aligned}$$

Esto nos permite definir la *forma de variables de holgura* en la definición 11.29:

$$(11.31) \quad \begin{aligned} &\text{maximizar a } c_e^T x_e \\ &\text{sujeta a las restricciones} \\ &A_e x_e = b, \quad x_e \geq 0, \text{ en donde } A_e \text{ es } p \times (q + p). \end{aligned}$$

Observe que un programa lineal se podría enunciar con p restricciones de igualdad con $q + p$ variables como en (11.31) sin que su aparición sea la adición de variables de holgura a un problema en la forma estándar; sin embargo, nos referiremos a un programa lineal de la forma (11.31) como en su forma de variables de holgura sin tomar en cuenta su origen o la estructura precisa de A_e —que no sea otra que $p \times (q + p)$.

$$(11.32) \quad \text{Definición}$$

- a) Todo vector que satisface todas las restricciones de un programa lineal se dice que es *factible* para ese programa lineal.
- b) Todo vector factible que extremice la función en un programa lineal se dice que es *óptimo* (factible).

El siguiente concepto es el de los vectores *básicos* factibles; en la sección 11.1 correspondieron a los vértices del conjunto de restricciones en \mathbb{R}^2 para el programa lineal en su forma estándar. Se identificó un vértice como la intersección de, precisamente, dos de las rectas definidas al convertir en igualdades a exactamente dos de las desigualdades para el caso de dos variables. En la forma de variables de holgura con cinco variables y tres ecuaciones, el método equiva-

lente fue hacer cero dos variables (por lo tanto seleccionando aquellas dos desigualdades a estudiar como igualdades) y resolver las tres ecuaciones para las tres variables restantes.

Para un programa lineal en forma estándar en \mathbb{R}^q , el procedimiento análogo sería identificar vértices resolviendo como igualdades q de las p desigualdades. En la forma de variables de holgura (11.31), el procedimiento equivalente es hacer cero a q de las variables en \mathbf{x}_e y resolver entonces las p ecuaciones $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$ para las p variables restantes. A tal solución se le llama *básica*:

- (11.33) **Definición.** Se dice que un vector factible \mathbf{x}_e para la forma de variables de holgura (11.31) es un vector *básico* factible si y sólo si (cuando menos) q de los elementos de \mathbf{x}_e es igual a cero.

Computacionalmente, el proceso de *encontrar* vectores básicos factibles implica el hacer cero q de los elementos de \mathbf{x}_e y *resolver entonces las p ecuaciones con los p elementos restantes de \mathbf{x}_e* . Para estar seguros de poder resolver esas ecuaciones se necesita que la submatriz relevante de $p \times p$, de \mathbf{A}_e , sea no singular –lo cual en la práctica puede no ser el caso. Manejar estas situaciones es una de las complicaciones de la programación lineal que cae fuera del propósito de este libro; nos restringiremos por lo tanto a los casos en los que esto no se puede dar al tratar programas que sean *no degenerados* (una condición un poco más estricta).

- (11.34) **Definición.** Se dice que un programa lineal en su forma de variables de holgura (11.31) es *no degenerado* si y sólo si cada submatriz de $p \times p$ de la matriz aumentada $[\mathbf{A}_e \quad \mathbf{b}]$ es no singular; en caso contrario, se dice que el programa es *degenerado*.

Teoría fundamental

Las variables “no básicas” en la sección 11.1 eran aquéllas que se igualaron a cero, y entonces las variables despejadas fueron siempre diferentes de cero (las llamamos “variables básicas”). Si alguna de esas variables calculadas hubiera sido igual a cero, un observador hubiera entonces tenido dificultad para distinguirla de aquellas variables que inicialmente se igualaron a cero. Se considerará la posibilidad de que ocurra este caso.

Suponga que se hace cero a q de los elementos $q + p$ de \mathbf{x}_e de un programa lineal no degenerado escrito en la forma de variables de holgura; así, quedan para su determinación p elementos y p ecuaciones. Ya que la matriz de coeficientes de este sistema de p ecuaciones con p incógnitas es una submatriz de \mathbf{A}_e , es no singular por la hipótesis de que es no degenerado. Así, hay una solución a $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$, la cual desde luego hace que \mathbf{b} sea una combinación lineal (usando a los elementos de \mathbf{x}_e como coeficientes) de las columnas de \mathbf{A}_e . Si alguno de los elementos de \mathbf{x}_e es cero además de los q elementos que se igualaron primero a cero, entonces cuando menos $q + 1$ elementos de \mathbf{x}_e son cero; esto hace que cuando más $p - 1$ de los elementos de \mathbf{x}_e sean diferentes de cero. Por lo tanto, \mathbf{b}

podría escribirse como una combinación lineal de $p - 1$ columnas de \mathbf{A}_e y por lo tanto la submatriz de $p \times p$ de $[\mathbf{A}_e \quad \mathbf{b}]$ formada por esas $p - 1$ columnas de \mathbf{A}_e y \mathbf{b} sería singular –contradicidiendo la hipótesis de no degeneración. Esto completa una demostración del siguiente.

- (11.35) **Teorema** (vectores básicos). Si el programa lineal en su forma de variables de holgura (11.31) es no degenerado, entonces todo vector básico factible tiene exactamente q elementos cero; esas variables cero se llaman *no básicas*, mientras que a las p variables diferentes de cero se les llama *básicas*.

El método para resolver programas lineales se basó en la idea de que estos tienen soluciones y que siempre se puede encontrar *una solución en un vértice* (esto es, como una solución *básica* factible en el planteamiento de variables de holgura). Desde luego, los programas lineales pueden no tener solución: el problema de maximizar a $x_1 + x_2$ sujeto a $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ no tiene solución porque $x_1 + x_2$ se puede hacer arbitrariamente grande aun satisfaciendo las restricciones; y el problema de maximizar a x_1 sujeta a que $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$ no tiene solución porque no existen tales números x_1 . Pero de lo contrario, cuando el conjunto de restricciones es no vacío y la función a maximizar está acotada superiormente en el conjunto de restricciones –parece claro geométricamente que existe un vector óptimo factible y que existe un vector óptimo *básico* factible. Esto se deberá demostrar, esté claro o no geométricamente.

- (11.36) **Lema.** Suponga que la forma de variables de holgura (11.31) de un programa lineal es no degenerada, que $M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$ no se puede hacer arbitrariamente grande en el conjunto de restricciones, y que $\tilde{\mathbf{x}}_e$ es un punto factible, entonces existe un punto *básico* factible \mathbf{x}_e^* con cuando menos un valor igual de M :

$$\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e^* \geq \mathbf{c}_e^T \tilde{\mathbf{x}}_e.$$

DEMOSTRACION. Si $\tilde{\mathbf{x}}_e$ es en sí mismo un vector básico factible, se podrá considera $\mathbf{x}_e^* = \tilde{\mathbf{x}}_e$ y con esto queda demostrado. Por lo tanto, se supondrá que $\tilde{\mathbf{x}}_e$ no es un vector básico, ya que el programa lineal es no degenerado, el teorema 11.35 implica que $\tilde{\mathbf{x}}_e$ tiene a lo más $q - 1$ elementos cero. Se demostrará que se puede encontrar un vector factible con cuando menos un elemento cero más que en $\tilde{\mathbf{x}}_e$ y con a lo más un valor tan grande como el de M ; repitiendo este procedimiento se obtendrá un vector factible con cuando menos q elementos cero, y éste deberá ser el vector básico factible \mathbf{x}_e^* que se necesitaba. Lo único que se deberá demostrar será que, en realidad, es posible encontrar un \mathbf{x}_e' factible tal que $\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e' \geq \mathbf{c}_e^T \tilde{\mathbf{x}}_e$, y, con cuando menos, un elemento cero más que en $\tilde{\mathbf{x}}_e$. A continuación se demostrará esto.

Como toda submatriz de $p \times p$ de la matriz \mathbf{A}_e de $p \times (q + p)$, es no

singular, A_e tiene un rango p ; por el teorema 6.8 sobre dominios, imágenes y espacios nulos, el espacio nulo de A_e —el conjunto de soluciones \mathbf{n} para $A_e \mathbf{n} = \mathbf{0}$ —tiene dimensión q y por lo tanto tiene alguna base $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_q$. Sea $\mathbf{x}'_e = \tilde{\mathbf{x}}_e + \mathbf{n}$, en donde $\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \alpha_q \mathbf{n}_q$ debiéndose determinar las $A_e \mathbf{x}'_e = \mathbf{b}$ para cualquier valor de las α_i que se escoja. Se buscan las α_i de tal manera que $\mathbf{x}'_e \geq \mathbf{0}$, que \mathbf{x}'_e tenga al menos un elemento cero más que $\tilde{\mathbf{x}}_e$ y que $c_e^T \mathbf{n} \geq 0$ (lo que implica que $c_e^T \mathbf{x}'_e \geq c_e^T \tilde{\mathbf{x}}_e$). Sea $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_q]^T$ una solución diferente de cero del sistema de $q - 1$ ecuaciones homogéneas con q incógnitas formadas haciendo cero a algunos $q - 1$ de los elementos de \mathbf{n} , incluyendo los a lo más $q - 1$ elementos que corresponden a los elementos cero de $\tilde{\mathbf{x}}_e$; por el teorema clave 4.13 (3), existe tal $\boldsymbol{\alpha}$ diferente de cero porque hay menos ecuaciones (homogéneas) que incógnitas. Como $\boldsymbol{\alpha}$ es diferente de cero y las \mathbf{n}_i forman un conjunto linealmente independiente $\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \alpha_q \mathbf{n}_q$ es diferente de cero. Todos los $p + 1$ elementos restantes de $\tilde{\mathbf{x}}_e$ son diferentes de cero, y cuando menos uno de los correspondientes elementos de \mathbf{n} debe ser diferente de cero debido a que \mathbf{n} es diferente de cero. Reemplazando \mathbf{n} por $-\mathbf{n}$ si $c_e^T \mathbf{n} < 0$, es posible suponer que $c_e^T \mathbf{n} \geq 0$. Si todos los elementos diferentes de cero de \mathbf{n} son estrictamente positivos y $c_e^T \mathbf{n} > 0$, entonces M podría hacerse arbitrariamente grande en el vector factible $\tilde{\mathbf{x}}_e + t\mathbf{n}$ al hacer a t arbitrariamente grande, contradiciendo la hipótesis de que M está acotada; si todos esos elementos son positivos pero $c_e^T \mathbf{n} = 0$, de nuevo será posible reemplazar a \mathbf{n} por $-\mathbf{n}$ y seguir teniendo $c_e^T \mathbf{n} \geq 0$ (en realidad, $= 0$) con algún elemento negativo en la nueva \mathbf{n} . De este modo se podrá suponer que cuando menos un elemento de \mathbf{n} es estrictamente negativo. Sea r el número del elemento para el cual $-\langle \tilde{\mathbf{x}}_e \rangle_i / \langle \mathbf{n} \rangle_i$ es menor entre las $\langle \mathbf{n} \rangle_i$ estrictamente negativas y sea t igual a este cociente (positivo). Entonces $\mathbf{x}'_e = \tilde{\mathbf{x}}_e + t\mathbf{n}$ es factible, tiene cuando menos un elemento cero más —el r -ésimo— que en $\tilde{\mathbf{x}}_e$ y cumple $c_e^T \mathbf{x}'_e \geq c_e^T \tilde{\mathbf{x}}_e$. ■

(11.37)

Teorema clave (resolubilidad de un programa lineal). Suponga que un programa lineal en forma (11.31) de variables de holgura es no degenerado, que el conjunto de restricciones es no vacío y que la función M a maximizar está acotada superiormente en el conjunto de restricciones. Entonces existe un vector básico factible \mathbf{x}_e^* que maximiza a M en el conjunto de condiciones —esto es, existe un vector factible básico óptimo.

DEMOSTRACION. Como el programa lineal es no degenerado, las soluciones básicas factibles se pueden obtener haciendo cero cualesquiera q elementos de \mathbf{x}_e , resolviendo para los p elementos restantes de las p ecuaciones $A_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$, y comprobando si $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$. Por el lema 11.36, existe cuando menos un vector básico factible porque el conjunto de restricciones es no vacío. Como existen, a lo más, N_{pq} subconjuntos de q elementos de los p

+ q elementos que se pueden escoger para hacerlos cero, en donde $N_{pq} = (q+p)!/(q!p!)$, el número N de vectores básicos factibles satisface a $1 \leq N \leq N_{pq}$. Sea \mathbf{x}_e^* el que maximiza a $M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$ para cualquiera \mathbf{x}_e de los N vectores básicos factibles. Entonces \mathbf{x}_e^* es el vector básico factible óptimo que se necesitaba; ningún $\tilde{\mathbf{x}}_e$ factible puede dar un valor de M mayor porque entonces, por el lema 11.36, uno de los vectores básicos factibles daría un valor aún mayor de M , contradiciendo a la hipótesis de que \mathbf{x}_e^* da el mayor valor de este tipo. ■

PROBLEMAS 11.2

- ▷ 1. Escriba en la forma estándar el programa lineal

$$\text{maximizar a } -2x_1 + 5x_2$$

sujeto a las restricciones

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$3x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Escriba el programa lineal del problema uno en su forma de variables de holgura.

3. Enuncie en la forma estándar el programa lineal

$$\text{minimizar a } 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

sujeto a las restricciones

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 5$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

- ▷ 4. Enuncie el programa lineal del problema tres en su forma de variables de holgura.

5. Enuncie en la forma estándar el programa lineal

$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$

$$-x_1 - 5x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 5$$

$$x_2 \geq 0.$$

6. Enuncie el programa lineal del problema cinco en su forma estándar.

7. Dé un ejemplo de un programa lineal degenerado y una solución básica factible para él con, estrictamente, más de q elementos cero.
8. Determine si los programas lineales de los siguientes problemas en la sección 11.1 son degenerados:
- Problema uno
 - Problema dos
 - Problema tres
 - Problema cinco

- ▷ 9. a) Determine si el siguiente programa lineal es degenerado.
 b) Resuelva el problema por el método simplex.

Maximizar a $x_1 + 2x_2$
 sujeto a las restricciones

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

10. Utilice la construcción en el lema 11.36 para encontrar un vector factible para el problema modelo (11.1) que tenga (cuando menos) un elemento cero más que en el vector

$$\mathbf{x}_e = [20 \quad 15 \quad 15 \quad 5 \quad 25]^T.$$

- ▷ 11. Suponga que se necesita maximizar al menor de dos números no negativos u y v sujetos a las restricciones $2u + v \leq 5$ y $u + 3v \leq 8$. Escriba un programa lineal cuya solución permita calcular u y v , y enuncie el problema en forma estándar.

11.3 RESOLUCION DE UN PROGRAMA LINEAL GENERAL

Como ocurre con los sistemas de ecuaciones lineales y con los problemas de eigensistemas, los programas lineales en la práctica se resuelven con una sofisticada programación de computadora. En esta sección solamente se extenderán las ideas básicas sobre los métodos presentados en la sección 11.1 de los programas lineales generales de la sección 11.2 sin entrar en detalle; esta introducción debería ser suficiente para la mayoría de los usuarios de la programación lineal.

Métodos afines al de Karmarkar

Regresamos la versión de variables de holgura (11.31) de programas lineales:

$$\text{maximizar a } M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$$

sujeto a las restricciones

$$\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}, \quad \text{siendo } \mathbf{A}_e \text{ de } p \times (q + p).$$

Los aspectos clave a recordar sobre los nuevos métodos afines al de Karmarkar son que 1) son métodos *interiores*, y no métodos cuyo movimiento esté restringido a lo largo de las aristas del conjunto de restricciones; y 2) operan en las versiones *transformadas iterativamente* del programa lineal –esto es, en cada paso se transforma de nuevo el programa antes de que se encuentre una nueva solución aproximada.

Aunque son posibles otros caminos, el aspecto de la interioridad del método está bien caracterizado por el procedimiento del gradiente proyectado: desplazarse desde la solución aproximada actual \mathbf{x}_e hasta una nueva solución aproximada $\mathbf{x}_e + t\mathbf{d}$, en donde $\mathbf{d} = P_0\mathbf{c}_e$ y P_0 es la proyección ortogonal sobre el espacio nulo \mathcal{N} de \mathbf{A}_e –el conjunto de \mathbf{n} que satisfacen a $\mathbf{A}_e\mathbf{n} = \mathbf{0}$. En la sección 11.1 se mencionó que la proyección ortogonal $P_0\mathbf{c}_e$ se puede calcular fácilmente usando la descomposición en valores singulares $\mathbf{A}_e = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ de \mathbf{A}_e ; esto es definitivamente cierto para p y q moderadas, pero a menudo los programas lineales implican p y q enormes (y \mathbf{A}_e dispersas y altamente estructuradas) en cuyo caso serán preferibles otros caminos. El encontrar el punto más cercano $P_0\mathbf{c}_e$ a \mathbf{c}_e en \mathcal{N} es esencialmente un problema de mínimos cuadrados, aunque no está en la forma $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ como se le trató en las secciones 5.9 y 8.5, cuando se presentaron métodos que usaron las descomposiciones *QR* o en valores singulares; sin embargo, el siguiente teorema muestra que la proyección y los mínimos cuadrados son lo mismo.

- (11.38) **Teorema** (proyección sobre espacios nulos). Sea \mathbf{B} , $p \times q$ y sea P_0 la proyección ortogonal sobre el espacio nulo \mathcal{N} de \mathbf{B} –todas las \mathbf{n} que satisfacen a $\mathbf{B}\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Entonces $P_0\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}$, en donde $\tilde{\mathbf{x}}$ resuelve el problema de mínimos cuadrados $\mathbf{B}^H\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$.

DEMOSTRACION. Recuerde el problema 26 en la sección 5.9 que $\tilde{\mathbf{x}}$ resuelve a $\mathbf{C}\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{C}^H\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^H\mathbf{y}$; en este caso, $\mathbf{C} = \mathbf{B}^H$, de modo que $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución de $\mathbf{B}^H\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{B}\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Esto, a su vez, es equivalente a $\mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ –esto es, a $\mathbf{y} - \mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}$ en donde $\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}$ está en el espacio nulo \mathcal{N} de \mathbf{B} . Sea $\mathbf{n}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}$; el problema será demostrar que $\mathbf{n}_0 = P_0\mathbf{y}$. Sea $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0 - P_0\mathbf{y}$. Como \mathbf{n}_1 está en \mathcal{N} , $(\mathbf{y} - P_0\mathbf{y}, \mathbf{n}_1) = 0$ por el teorema 5.71 a). Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}_1\|^2 &= (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{n}_0 - \mathbf{y} + \mathbf{y} - P_0\mathbf{y}, \mathbf{n}_1) = (-\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{n}_1) \\ &= (-\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{B}\mathbf{n}_1) = (-\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Así, en el problema de programación lineal, cualquier método para resolver $\tilde{\mathbf{z}}$ de $\mathbf{A}_e^H\tilde{\mathbf{z}} \approx \mathbf{c}_e$ permitirá el cálculo de la nueva dirección \mathbf{d} por medio de $\mathbf{d} = P_0\mathbf{c}_e = \mathbf{c}_e - \mathbf{A}_e^H\tilde{\mathbf{z}}$. Un método para calcular $\tilde{\mathbf{z}}$ es por medio de la descomposición en valores singulares, que desde luego se podría usar directamente para calcular $P_0\mathbf{c}_e$ como

se mencionó en la sección 11.1. También se podría resolver a $\mathbf{A}_e^H \tilde{\mathbf{z}} \approx \mathbf{c}_e$ mediante la descomposición QR de \mathbf{A}_e . El problema de resolver sistemas extremadamente grandes y esparcidos de mínimos cuadrados ha sido –y está siendo– investigado extensivamente por motivos no relacionados con la programación lineal; este trabajo, se está aplicando ahora en el estudio de los métodos afines al de Karmarkar.

Como se subrayó en la sección 11.1, el camino del gradiente proyectado no se puede aplicar repetidamente tal y como se describió, porque se produciría la misma dirección \mathbf{d} en cada paso; la más sencilla de las transformaciones propuestas por Karmarkar –el *escalado* de las variables $\mathbf{x}_e = \mathbf{D}\mathbf{x}'_e$ con una matriz \mathbf{D} diagonal– evita esta dificultad, porque la siguiente dirección \mathbf{d} es la proyección ortogonal de $\mathbf{D}\mathbf{c}_e$ (y no de \mathbf{c}_e) sobre el espacio nulo de $\mathbf{A}_e\mathbf{D}$ (y no sobre el de \mathbf{A}_e). La naturaleza sencilla de \mathbf{D} permite hacer más manejables los problemas de mínimos cuadrados que deben resolverse en cada paso, que en el caso de tratar sólo a $\mathbf{A}_e\mathbf{D}$ comenzando desde el principio cada vez que \mathbf{D} cambie. Karmarkar propone transformaciones adicionales que tienen efectos todavía más dramáticos sobre el problema –reemplazar la función lineal $\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$ por expresiones logarítmicas tales como $\log(\mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e)$, cambios no lineales en las variables \mathbf{x}_e , y así por el estilo. Aunque parece que en la naturaleza de esas transformaciones reside el secreto de la potencia de los métodos, este tópico y una discusión posterior de los métodos afines al de Karmarkar queda fuera del alcance de este libro.

El método simplex: construcción de la tabla

El método simplex trabaja con la matriz aumentada de la forma de variables de holgura de un programa lineal, con la adición de una ecuación final $M - \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e = u$ para permitir el cambio de valores de M ; recuerde de la sección 11.1 que se acordó omitir la columna de las matrices aumentadas correspondientes a M porque esa columna nunca participa en los cálculos. Así, el método simplex trata con lo que se llama la *tabla simplex*:

$$(11.39) \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_e^T & u \end{bmatrix}.$$

El método simplex, tal como se describió en la sección 11.1, involucra principalmente al realizar los pasos de la eliminación de Gauss-Jordan en \mathbf{T} , produciendo una nueva tabla \mathbf{T}' ; exactamente como en los sistemas de ecuaciones lineales, primero se deberá tratar el asunto de si las soluciones de los dos problemas son idénticas.

- (11.40) **Teorema** (equivalencia de tablas). Suponga que una sucesión de operaciones elementales de renglón transforma una tabla simplex \mathbf{T} en una tabla simplex \mathbf{T}' .

en donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_e^T & u \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_e & \mathbf{b}' \\ -(\mathbf{c}'_e)^T & u' \end{bmatrix}$$

y en donde las operaciones de renglón que se realicen con el último renglón sólo pueden ser de la forma: sumar al último renglón un múltiplo de un renglón superior. Entonces, \mathbf{z}^* es solución del programa lineal

$$\text{maximizar a } M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$$

sujeto a las restricciones

$$\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$$

si y sólo si \mathbf{z}^* es solución del programa lineal

$$\text{maximizar a } M' = \mathbf{c}'_e^T \mathbf{x}'_e$$

sujeto a las restricciones

$$\mathbf{A}'_e \mathbf{x}'_e = \mathbf{b}' \quad \mathbf{x}'_e \geq \mathbf{0}.$$

DEMOSTRACION. Como no se puede usar el último renglón para cambiar los renglones superiores, $[\mathbf{A}'_e \quad \mathbf{b}']$ se produce a partir de $[\mathbf{A}_e \quad \mathbf{b}]$ mediante operaciones elementales de renglón; por el teorema 4.12 sobre la eliminación de Gauss y los conjuntos de soluciones, los conjuntos de restricciones de los dos programas lineales son, por lo tanto, idénticos. Debido a la restricción de las operaciones que se realicen en el renglón inferior, los renglones inferiores $[-\mathbf{c}_e^T \quad u]$ y $[-\mathbf{c}'_e^T \quad u']$ deberán estar relacionadas por $[-\mathbf{c}'_e^T \quad u'] = [\mathbf{c}_e^T \quad u] + \mathbf{w}^T [\mathbf{A}_e \quad \mathbf{b}]$. De este modo, $-\mathbf{c}'_e^T = -\mathbf{c}^T + \mathbf{w}^T \mathbf{A}_e$ y $u' = u + \mathbf{w}^T \mathbf{b}$. Se sabe que los dos conjuntos de restricciones son idénticos; para una \mathbf{z} en cualquiera de ellos, se tiene que

$$M = \mathbf{c}_e^T \mathbf{z} + u \quad \text{y} \quad M' = \mathbf{c}'_e^T \mathbf{z} + u'.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M - M' &= (\mathbf{c}_e^T - \mathbf{c}'_e^T) \mathbf{z} + (u - u') \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{A}_e \mathbf{z} - \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ya que los conjuntos de restricciones son idénticos y las funciones M y M' a maximizar son idénticas, los dos programas son equivalentes. ■

El método simplex genera una serie de tablas y cada una de ellas describe programas equivalentes; el análisis del método simplex requiere entonces del conocimiento de:

1. cómo decir a partir de una tabla si se ha encontrado ya una solución;
2. cómo decir a partir de una tabla si existe una solución;
3. cómo producir la siguiente tabla a partir de la que se está tratando.

Se responderá a esos tres “cómo” sin demostración –véanse los problemas del 5 al 8– generalizando el método de la sección 11.1. Recuerde que el método simplex se ejecuta de tal modo que a cada paso (para programas lineales no degenerados) precisamente los elementos q –las variables no básicas– de \mathbf{x}_e son iguales a cero, y precisamente los elementos p –las variables básicas– son estrictamente positivos.

- (11.41) 1. Se ha demostrado una solución cuando todos los elementos (además de la posibilidad de u en la última columna) en el último renglón de la tabla son mayores o iguales a cero.

Si (11.41) no es válido, entonces se ejecuta otro paso del método simplex. Se identifica al menor elemento negativo (que no está en u) del último renglón (en caso de empate, escoger cualquier “ganador”); éste corresponderá a una variable, por el momento no básica (cero) x_n , y es esta variable la que se hará básica (positiva) en el siguiente paso del método simplex. Para ver qué tan grande se puede hacer x_n , todo elemento *positivo* en la columna de x_n se divide entre el elemento correspondiente de la última columna, y el más pequeño de esos cocientes será el nuevo valor de x_n .

- (11.42) 2. Se sabe que M se puede hacer arbitrariamente grande en el conjunto de restricciones, de manera que no hay solución óptima cuando no hay elementos estrictamente positivos en la columna que corresponde a la variable x_n que se esté haciendo básica.

Si (11.42) no es válido, suponga que (uno de) el cociente mínimo (o los cocientes) anteriores está en el renglón i de la columna x_n .

- (11.43) 3. La tabla siguiente se produce usando el i -ésimo renglón para eliminar arriba y abajo de ese renglón en la columna x_n .

Suponiendo que el método simplex comienza con una solución básica factible, el procedimiento anterior aumenta la variable x_n que antes era cero hasta que fuerza a ser cero a otra variable; de este modo quedan cuando menos q variables cero –es decir, se ha producido otro vector básico factible. Como el procedimiento incrementa estrictamente a M cada vez, no podrá nunca regresar a un vector básico factible anterior (de los cuales sólo hay un número finito). En resumen.

(11.44)

Teorema clave (solución simplex). Si el método simplex se aplica a un programa lineal no degenerado en su forma de variables de holgura, entonces ocurrirá exactamente una de las siguientes alternativas en un número finito de pasos:

- La condición en (11.41) será válida y se habrá encontrado una solución básica factible.
- Es válida la condición (11.42) y no hay solución óptima.

Ahora podrá resolver los problemas del 1 al 9.

El método simplex: implementación revisada

Un aspecto del método simplex, tal y como se describió, parece bastante ineficiente. Para determinar si se ha encontrado una solución y si no, cuál variable x_n no básica habrá que hacer básica, sólo se necesitan los q elementos diferentes de cero del renglón inferior de la tabla; si se requiere un paso simplex más, entonces sólo los elementos $2p$ de la última columna y la columna de x_n son los necesarios para determinar si M es no acotada, y si no lo es, qué tan grande se hace x_n , y determinar al siguiente pivote para la eliminación. Esto es:

Sólo se necesitan $2p + q$ de los elementos $(p + 1)(q + p + 1)$ de la tabla para determinar si se ha encontrado una solución, si se sabe que no hay solución, y cuáles habrán de ser las siguientes variables básicas y no básicas.

El llamado *método simplex revisado* busca implementar el método simplex sin producir los elementos ajenos $qp + p^2 + 1$.

Al principio, recuerde que se tiene una solución básica factible: q elementos de \mathbf{x}_e se han igualado a cero y los elementos p positivos se han encontrado como la solución a p ecuaciones lineales con p incógnitas. *Todo lo que se necesita para este paso es la inversa (o mejor aún, una descomposición LU) de la submatriz de $p \times p$ de la matriz original \mathbf{A}_e que es la matriz de coeficientes para este sistema, junto con el lado derecho \mathbf{b} .* Análogamente, *con esta inversa y los renglones de la tabla original se puede calcular el nuevo renglón inferior.* Del nuevo renglón inferior se puede saber, como de costumbre, si se ha encontrado un vector factible básico óptimo. Si no, y si se debe proseguir con otro paso simplex, lo que se necesita a continuación son los elementos en la columna sobre la variable que pronto se hará básica; esta columna no se ha calculado todavía, pero se *puede encontrar a partir de la inversa obtenida anteriormente y la columna correspondiente de la tabla original.* Con esta columna a la mano, se determina cuál

variable, por el momento diferente de cero (básica), se volverá cero. De nuevo se tienen q variables cero y p variables positivas y se puede continuar el proceso; es importante observar que sólo una de las p variables diferentes de cero ha sido cambiada; por lo tanto la nueva matriz de $p \times p$ cuya inversa (o descomposición LU) se necesita, difiere de la anterior submatriz de $p \times p$ de A_e en solamente una columna, por lo tanto puede modificarse (o "ponerse al corriente") eficientemente (en lugar de calcularse partiendo del principio) por métodos tales como el teorema 3.63.

El método simplex revisado, como se esquematizó anteriormente, maneja esencialmente submatrices de $p \times p$ de A_e y unas pocas columnas adicionales sin calcular nunca las nuevas versiones de tablas completas. Cuando el número p de restricciones es modesto comparado con el número q de variables, los ahorros en la implementación del método simplex revisado pueden ser muy significativos. La mayoría del software actualizado para el método simplex usa la implementación revisada con modificaciones para manejar dificultades numéricas.

El método simplex: iniciación

Un asunto que hasta ahora se ha evitado consistentemente es el de la iniciación: cómo encontrar una solución *inicial* básica factible. En teoría, se podría igualar a cero q elementos de x_e metódicamente, resolver los p elementos restantes de p ecuaciones y comprobar si $x_e \geq 0$. Sin embargo, aun en el pequeño ejemplo de la sección 11.1, habría 10 sistemas como esos para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas en cada uno, y sólo cinco de los cuales producen en realidad vectores factibles; a medida que aumenta el número de variables y de condiciones, este camino se hace cada vez menos atractivo. La mayoría del software de programación lineal incluye una etapa llamada *Phase I* hecha para localizar un vector básico factible para el arranque del método simplex (*Phase II*). El truco está en definir una nuevo programa lineal con dos propiedades: 1) el nuevo programa tiene un vector básico factible inicial evidente, y 2) toda solución al nuevo programa es un vector básico factible para el programa original. Si se hace adecuadamente, esto detectará si el conjunto de restricciones es vacío para el programa original. Se examinará un ejemplo en detalle.

- (11.45) **Ejemplo.** Considere el programa de ejemplo en la sección 11.1 con una modificación en su segunda restricción:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar a } 40x_1 + 60x_2 \\
 & \text{sujeto a las restricciones} \\
 & \quad 2x_1 + x_2 \leq 70 \\
 & \quad -x_1 - x_2 \leq -40 \\
 & \quad x_1 + 3x_2 \leq 90 \\
 & \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ahora, $x_1 = x_2 = 0$ ya no satisface las condiciones, ni es particularmente evidente que las restricciones se puedan satisfacer. Si se introduce una variable de holgura s en la horrible segunda desigualdad, ésta se transforma en la igualdad

$$-x_1 - x_2 + s = -40,$$

y la dificultad se hace aparente con el hecho de que al probar $x_1 = x_2 = 0$ la variable de holgura s se hace negativa –lo cual no está permitido. El truco es introducir todavía otra variable, llamada *variable artificial*, para manejar la dificultad. Específicamente se agregan, como de costumbre, variables de holgura x_3 , x_4 y x_5 en las tres desigualdades, pero también *se resta una variable artificial (x_6) en la desigualdad no deseada*:

$$(11.47) \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 70 \\ -x_1 - x_2 + x_4 - x_6 & = & -40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 & = & 90 \end{array}$$

todas las $x_i \geq 0$.

En este nuevo conjunto de restricciones, es posible hacer $x_1 = x_2 = 0$, resultando $x_3 = 70$ y $x_5 = 90$ como en la sección 11.1, y al hacer $x_4 = 0$ resulta $x_6 = 40$. Observe que ahora se tiene $p = 3$ restricciones y $q + p = 6$ variables, de manera que un vector factible para esas nuevas condiciones debería tener $q (= 3)$ elementos cero; los cuales, de hecho, tiene el vector de arriba. Desafortunadamente, un vector que es factible para (11.47) no necesariamente será factible para el conjunto original (11.46) de restricciones *a menos que x_6 sea igual a cero*: Si $x_6 = 0$ en (11.47), entonces de x_1 a x_5 es factible para (11.46). Como $x_6 \geq 0$, hacer $x_6 = 0$ es equivalente a *minimizar a x_6 sujeto a (11.47)*; y si este mínimo es estrictamente positivo, entonces no hay vector factible para el programa original (11.47). Esto es,

se puede determinar si hay vectores factibles para (11.46)
y es posible encontrar si existe uno resolviendo el pro-
grama lineal de minimizar a x_6 sujeta a las restric-
ciones (11.47).

Al reescribir el problema como un problema de *maximización* buscando maximizar a $M = -x_6$ se podrá comenzar con el método simplex; la tabla inicial es

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 70 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -40 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

y el vector básico factible inicial es como se encontró arriba:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = x_4 = 0 \text{ como variables no básicas} \\x_3 &= 70, x_5 = 90, x_6 = 40 \text{ como variables básicas.}\end{aligned}$$

Esto *no* está en la forma estándar (11.10) en donde cada variable básica tiene sólo un elemento diferente de cero en su columna (y no en el último renglón): la columna x_6 viola esto, de modo que se usará el segundo renglón para eliminar el elemento ofensivo, entonces se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 70 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 40 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 90 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -40 \end{array} \right],$$

lo cual está en la forma (11.10). Hay un empate para el elemento negativo de mayor valor absoluto en el último renglón. Se escogerá (al azar) la segunda columna. Los cocientes formados con los elementos positivos en esa columna son $90/3$, $40/1$ y $70/1$, de los cuales el menor $-30-$ está en el tercer renglón; el elemento (3, 2), por lo tanto, será el pivote para la eliminación de Gauss-Jordan, resultando la siguiente tabla:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 40 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 10 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 30 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -10 \end{array} \right].$$

El elemento negativo de mayor valor absoluto en el último renglón es $-\frac{2}{3}$; los cocientes formados con elementos positivos en esa columna son

$$30/(\frac{1}{3}) = 90, 10/(\frac{2}{3}) = 15, \quad \text{y} \quad 40/(\frac{5}{3}) = 24,$$

de los cuales el menor $-15-$ está en el segundo renglón; el elemento (2, 1), por lo tanto, será el pivote para la eliminación de Gauss-Jordan, dando la siguiente tabla

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 15 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Como no hay elementos negativos en el último renglón, el método simplex

ha encontrado una solución al problema de maximizar a $-x_6$ sujeta a las restricciones (11.47). Las variables básicas son aquéllas que corresponden a las matrices columna unitarias x_1, x_2, x_3 y las variables no básicas son las otras x_4, x_5, x_6 ; como las variables no básicas son iguales a cero, resulta

$$x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad x_1 = 15, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 15.$$

Observe que $x_6 = 0$ y, por lo tanto, de x_1 a x_5 hay un vector básico factible para el programa lineal original (11.46). Con fines ilustrativos, se continuará con la solución al programa lineal original (11.46) en su forma de variables de holgura.

Este da una tabla inicial de

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -40 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \\ -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

El vector básico factible que se encontró por el método de la variable artificial, tiene a x_1, x_2 y x_3 como variables básicas y así –de acuerdo con (11.10)– las columnas correspondientes deberán ser matrices columna unitarias. Sólo x_3 satisface esta condición, de modo que se deberá efectuar una eliminación de Gauss-Jordan en las columnas de x_1 y de x_2 ; esto produce una tabla en la forma adecuada de (11.10):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 10 & 2100 \end{array} \right].$$

El elemento negativo de mayor valor absoluto en el renglón inferior es -30 ; los cocientes con los elementos positivos de arriba son $25/(\frac{1}{2}) = 50$ y $15/(\frac{5}{2}) = 6$, de los cuales el menor -6 está en el primer renglón. Por lo tanto, se usará ese elemento (1, 4) como pivote para la eliminación de Gauss-Jordan, produciendo la tabla

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 6 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 24 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} & 22 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 16 & 2280 \end{array} \right].$$

Ya que no hay elementos negativos en el último renglón, se ha alcanzado un vector básico factible óptimo. Las variables básicas (diferentes de cero)

corresponden a las matrices columna unitarias en la tabla y serán, por consiguiente, x_1 , x_2 y x_4 , dejando a x_3 y a x_5 como variables no básicas (cero). Haciendo $x_3 = x_5 = 0$ resulta que $x_1 = 24$, $x_2 = 22$ y $x_4 = 6$ como una solución óptima con $M = 2280$. Esto resuelve el programa lineal original (11.46) con $x_1 = 24$, $x_2 = 22$ y $M = 2280$.

PROBLEMAS 11.3

1. Escriba los programas lineales representados por cada una de las tablas (11.11) y (11.13) producidas al resolver (11.1).
- ▷ 2. Maximice $-4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4$
sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$
 todas las $x_i \geq 0$.
3. Maximice a $x_1 + 4x_2 + 3x_3$
sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 14 \end{aligned}$$
 todas las $x_i \geq 0$.
4. Maximice a $3x_1 - x_2$
sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$
5. Demuestre que (11.41) es válido al detectar una solución en el método simplex, como sigue:
 - Demuestre que M no se puede aumentar haciendo positiva alguna de las variables no básicas.
 - Utilice la no degeneración para demostrar que el vector factible presente es el único con todas las variables no básicas presentes iguales a cero.
 - Deduzca que el vector factible presente es el óptimo.
6. Demuestre que es válido (11.42) al detectar una solución no acotada.
- ▷ 7. Demuestre que, en un problema no degenerado, si (11.41) y (11.42) no pueden ser válidas para un vector factible, la última columna de la tabla en

uso (excepto quizá por el elemento inferior) es estrictamente positiva y se puede encontrar una nueva solución básica factible con una M estrictamente mayor.

8. Si todos los elementos del último renglón de una tabla (con la posible excepción de la última columna) son mayores o iguales a cero, y si uno de los elementos que corresponden a una variable *no básica*, es igual a cero, hay más de un vector básico factible óptimo. Demuestre esto describiendo cómo se puede construir otro aumentando la variable no básica.
- ▷ 9. a) Maximice a $40x_1 + 40x_2$ sujeto a las restricciones de (7.1) dando razones geométricas, y demuestre que hay un número infinito de vectores óptimos factibles y dos vectores óptimos básicos factibles.
 b) Utilice el método simplex para resolver este problema y verifique que aparece la condición descrita en el problema ocho para señalar la no unicidad.
10. En el método simplex revisado, la necesidad principal no es para la inversa de la submatriz de $p \times p$, \mathbf{B} de \mathbf{A}_e , sino para la capacidad para resolver $\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{w}$ dadas varias \mathbf{w} . \mathbf{B} cambia sólo en una columna en cada paso. Explique cómo usar una descomposición LU de \mathbf{B} con el teorema 3.63 b) para sacar ventaja de esto.
- ▷ 11. a) Utilice variables artificiales para encontrar un punto inicial básico factible para el siguiente programa lineal.
 b) Resuelva el problema.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar a } x_1 + x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

12. Haga lo que se pidió para el problema 11 a) y b) pero para el programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{maximizar a } 2x_1 + 3x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 0.2x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 14 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

13. Haga lo que se pidió para el problema 11 a) y b) pero para el programa lineal

minimizar a $2x_1 - x_2$
 sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\10x_1 + x_2 &\geq 11 \\4x_1 + 3x_2 &\leq 33 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- 14.** Haga lo que se pidió para el problema 11 a) y b) pero para el programa lineal

maximizar a $x_1 + x_2 + x_3$
 sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 3 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

- ▷ **15.** Utilice variables artificiales para determinar si hay vectores que satisfagan a

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\geq 70 \\x_1 + x_2 &\leq 40 \\x_1 + 3x_2 &\geq 90 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- 16.** Haga lo que se pidió en el problema 11 a) y b), pero para el programa lineal

minimizar a $3x_1 - 5x_2$
 sujetos a las restricciones

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\geq 70 \\x_1 + x_2 &\geq 40 \\x_1 + 3x_2 &\geq 90 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- 17.** Haga lo que se pidió en el problema 11 a) y b) pero para el programa lineal

maximizar a $3x_2 - x_1$
 sujetos a las restricciones

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 10 \\x_1 + x_2 &\geq 5\end{aligned}$$

$y,$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 5 \\x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

11.4 DUALIDAD

En la sección 11.1 se demostró que dos distintos programas lineales –(11.1)/(11.2) y (11.23)/(11.24)– estaban sorprendentemente relacionados tanto geométricamente como a través de la aplicación de la cual surgieron. Esta sección trata de manera más general el asunto de la *dualidad* e indica su importancia computacional.

(11.48) **Definición.** Un programa lineal en la forma estándar

$$\begin{aligned}\text{maximizar } M &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\&\text{sujeta a las restricciones} \\A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ en donde } A \text{ es de } p \times q,\end{aligned}$$

se dice que es un programa lineal *primal*. El *dual* de este primal se define como el programa lineal

$$\begin{aligned}\text{minimizar } m &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\&\text{sujeta a las restricciones} \\A^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \text{ en donde } A^T \text{ es de } q \times p.\end{aligned}$$

(11.49) **Teorema** El dual del dual es el primal.

DEMOSTRACION. Para escribir el dual del dual se necesita al dual en su forma estándar. Es posible reescribir el dual en la definición 11.48 como

$$\begin{aligned}\text{maximizar } M' &= \mathbf{c}'^T \mathbf{y} \text{ con } \mathbf{c}' = -\mathbf{b}, \\&\text{sujeta a las restricciones} \\A'\mathbf{y} &\leq \mathbf{b}', \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \text{ siendo } A' = -A^T \text{ y } \mathbf{b}' = -\mathbf{c},\end{aligned}$$

lo cual está en la forma estándar. Su dual es

$$\begin{aligned}\text{minimizar a } m' &= \mathbf{b}'^T \mathbf{z} (= -\mathbf{c}^T \mathbf{z}) \\&\text{sujeta a las restricciones}\end{aligned}$$

$$A'^T \mathbf{z} \geq \mathbf{c}', \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \text{ (esto es, } -A\mathbf{z} \geq -\mathbf{b}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}).$$

que es equivalente al primal. ■

Dualidad y el método simplex

En la tabla final (11.13) para el método simplex aplicado para resolver el programa lineal primal (11.2) de la sección 11.1, los elementos 0, 30 y 10 en su renglón inferior en las columnas correspondientes a las variables de holgura (básicas) de la tabla original (11.8), son precisamente los números que se usaron como elementos de y^* en (11.25), la cual se demostró que es la solución del programa lineal dual (11.24). Esto es, la tabla simplex para la solución óptima para el programa primal también contenía la solución óptima al programa dual. Esto es verdadero de un modo más general; la relación es la más sencilla cuando $x = \mathbf{0}$ se puede tomar como un vector inicial factible (esto es, cuando $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$), de modo que esta hipótesis se hará por conveniencia.

(11.50)

Teorema clave (primal, dual y el método simplex). Suponiendo que se ha aplicado el método simplex a la forma de variables de holgura del programa lineal no degenerado de la definición 11.48, en el cual $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, y se ha obtenido una tabla final con una solución básica factible óptima para el programa primal. Sean $[y^{*T} \ u]$ los últimos $q + 1$ elementos del renglón inferior de esa tabla final, entonces y^* es una solución óptima del programa lineal dual de la definición 11.48, y $\mathbf{b}^T y^* = \mathbf{c}^T x^* = u$, en donde x^* es óptima para el programa primal.

DEMOSTRACION. Ya que $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, es posible escoger a x , de tal manera que los primeros q elementos de x_e , sean cero y se obtenga un vector inicial básico factible. Esto significa que la tabla de partida

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

tiene la forma estándar (11.10) para comenzar el método simplex. La tabla final \mathbf{T}' se produce partiendo de \mathbf{T} por una secuencia de operaciones elementales de renglón, con la limitante que las únicas operaciones que involucren al último renglón, reemplazan a este renglón por sí mismo más un múltiplo de un renglón superior. Esto significa que el renglón inferior de \mathbf{T}' es igual al último renglón de \mathbf{T} más una combinación lineal de los renglones superiores de \mathbf{T} . El renglón inferior de \mathbf{T}' es sólo $[-\mathbf{c}^T \ \mathbf{0}^T \ 0]$ y es posible separar al último renglón de \mathbf{T}' como $[\mathbf{d}^T \ y^{*T} \ u]$ del mismo modo. Se ha demostrado que hay algún v tal que

$$[\mathbf{d}^T \ y^{*T} \ u] = [-\mathbf{c}^T \ \mathbf{0}^T \ 0] + v^T [\mathbf{A} \ \mathbf{I} \ \mathbf{b}].$$

La regla para multiplicar matrices separadas dice que

$$\mathbf{d}^T = -\mathbf{c}^T + v^T \mathbf{A}, \quad y^{*T} = v^T, \quad y \quad u = v^T \mathbf{b}.$$

Ahora, recordando lo que significa para el método simplex el terminar en la tabla T' : el renglón inferior (exceptuando posiblemente a u) es no negativo, y u es igual al valor óptimo $c_e^T x_e$ ya que los elementos diferentes de cero en el renglón inferior de T' corresponden a los elementos cero (no básicos) de x_e de acuerdo a (11.10). Así, $d \geq \mathbf{0}$, $y^* \geq \mathbf{0}$ y $v^T = y^{*T}$, de lo cual se sigue que

$$A^T y^* \geq c, \quad y^* \geq \mathbf{0}.$$

Es decir que y^* es un vector factible para el programa lineal dual. De $u = v^T b$ y $c_e^T x_e = u$ para la x_e óptima, y ya que $v = y^*$, entonces

$$b^T y^* = c^T x^* \text{ para la } x^* \text{ óptima formada de la } x_e \text{ óptima.}$$

Pero entonces si y es algún vector factible para el programa dual con $y \geq \mathbf{0}$ y $A^T y \geq c$, como $Ax^* \leq b$, se obtiene como en casos anteriores

$$b^T y \geq (Ax^*)^T y = x^{*T} A^T y \geq x^{*T} c = b^T y^*,$$

Pero si $b^T y \geq b^T y^*$ para toda y factible, entonces y^* es solución del programa lineal dual. ■

(11.51) **Ejemplo.** Considere el programa lineal primal

$$\begin{aligned} & \text{maximizar a} && 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & \text{sujeta a} && 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 1 \\ & && x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ & && x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

y a su programa lineal dual

$$\begin{aligned} & \text{minimizar a} && y_1 + y_2 \\ & \text{sujeta a} && 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & && y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & && 6y_1 + y_2 \geq 3 \\ & && y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La tabla inicial para la versión de variables de holgura del primal es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Se toma como pivote al elemento (1, 3) y se produce la tabla

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{5}{6} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Se toma como pivote al elemento (2, 2) y se produce la tabla

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{3}{11} & 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{5}{11} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & \frac{9}{11} & \frac{13}{11} \end{array} \right].$$

Se toma como pivote al elemento (1, 1) y se produce la tabla

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right],$$

de modo que la solución en las variables x es $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, y $x_3 = 0$, mientras que la solución en las variables y viene del cuarto y quinto elementos del último renglón, es decir, $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$. Observe que, como se afirmó, el valor mínimo $y_1 + y_2$ para el dual ($\frac{4}{3}$) es igual al valor máximo $2x_1 + 2x_2 + 3x_3$ para el programa primal.

Uso computacional de la dualidad

La relación primal/dual puede ser muy útil computacionalmente, ya que la tabla simplex para la solución de uno de ellos da una solución del otro (porque el dual del dual es el primal). Así, en la práctica es posible resolver cualquiera de los programas lineales que sea más conveniente computacionalmente.

Suponga, por ejemplo, que se tienen mucho más restricciones que variables, de modo que $p \gg q$. Cada paso del método simplex necesita hacer eliminaciones en un gran número p de renglones, y el método simplex revisado necesita inversas de grandes matrices de $p \times p$. Sin embargo, el programa dual es de $q \times p$; por ejemplo, el método simplex revisado sólo necesita inversas de las matrices de $q \times q$ que son mucho menores cuando se aplica a este dual. Una vez resuelto el dual de $q \times p$, se podrá leer una solución al primal de la tabla final como en el **teorema clave 11.50**. La resolución del dual puede ser mucho más eficiente cuando $p \gg q$.

Suponga, como otro ejemplo, que se deben resolver varios programas lineales que sólo difieren por la adición de nuevas restricciones, una situación que se presenta en las aplicaciones. Una vez que se ha encontrado una solución óptima para un programa primal, no es clara la forma en que ha de usarse para resolver el siguiente programa con mayor facilidad, porque esa solución óptima no necesita satisfacer la restricción adicional. Sin embargo, agregar una restricción al primal significa solamente agregar una *variable* al dual, y la solución óptima del primer dual da un vector factible inicial para el nuevo dual sólo igualando a cero la nueva variable dual. El programa dual puede manejar fácilmente esta situación.

- (11.52) **Ejemplo.** Suponga que en el programa lineal primal modelo (11.1) que mostró un problema de planeación de producción, la gerencia de planta se da cuenta que debido a reglamentos gubernamentales de seguridad sobre sus productos, se necesitará un paso adicional de manufactura en un cuarto tipo de máquina, y que las necesidades de tiempo para la nueva máquina, así como los requisitos de uso de la máquina para cada producto, se traducen en la restricción adicional

$$1.5x_1 + 2x_2 \leq 70.$$

La solución óptima original es $x_1 = 15$, $x_2 = 25$, pero ellas no satisfacen la nueva restricción. En lugar de reescribir el método simplex desde $x_1 = x_2 = 0$ para resolver el nuevo programa lineal formado al unir esta nueva restricción a las de (11.1), se tratará mejor el programa dual (replanteados en lenguaje de maximización):

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } -70y_1 - 40y_2 - 90y_3 - 70y_4 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2y_1 + y_2 + y_3 + 1.5y_4 \geq 40 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \geq 60 \\ & \text{toda } y_i \geq 0. \end{aligned}$$

Esto difiere del programa dual original (11.23) sólo por la presencia de una variable adicional y_4 . El resultado final de la sección 11.1 fue demostrar que $y_1 = 0$, $y_2 = 30$, $y_3 = 10$ era un vector óptimo factible para el dual original; esto, junto con $y_4 = 0$ da un vector factible (aunque ya no óptimo) para el nuevo programa dual. Es, en efecto, un vector *básico* factible porque tiene dos elementos cero. Agregando variables de holgura y_5 y y_6 en las desigualdades se produce una tabla inicial

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 60 \\ 70 & 40 & 90 & 70 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Las variables básicas (diferentes de cero) son $y_2 = 30$ y $y_3 = 10$, de modo que las columnas de y_2 y y_3 deberán ser matrices columna unitarias. La eliminación de Gauss-Jordan produce una tabla que cumple con (11.10):

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 30 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 10 \\ 15 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 15 & 25 & -2100 \end{array} \right].$$

El método simplex lleva a tomar como pivote al elemento $(1, 4), \frac{4}{5}$ lo que resulta en la tabla

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & \frac{4}{5} & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 24 \\ -1 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 4 \\ 20 & 2 & 0 & 0 & 12 & 26 & -2040 \end{array} \right].$$

Como los elementos del renglón inferior son no negativos (además de posiblemente la última columna), se tiene una solución $y_1 = y_2 = y_5 = y_6 = 0, y_3 = 4$ y $y_4 = 24$. Esto, sin embargo, no era lo que se buscaba; se resolvió el dual para resolver el primal (el dual del dual). De acuerdo con el **teorema clave 11.50**, es posible leer la solución primal de los elementos en el renglón inferior bajo las variables de holgura: $x_1 = 12, x_2 = 26$. Este plan de producción da una nueva utilidad máxima de $40(12) + 60(26) = 2040$. El uso del dual sólo necesitó de un paso simplex en una tabla de 3×7 ; el uso del primal hubiera requerido de dos pasos simplex en tablas de 5×7 .

Teoría de la dualidad

La teoría de la dualidad en programación lineal es elegante y profunda, con interpretaciones –como se vio en la sección 11.1 en el problema ejemplo– algebraicas, geométricas y de aplicación. Ya se han desarrollado y demostrado algunas partes de esta teoría –por ejemplo el teorema 11.49 y el **teorema clave 11.50**. Se reenunciará algo de esto y se presentarán algunos hechos adicionales en los siguientes resultados.

- (11.53) **Teorema clave** (teoría de la dualidad). Sean “el primal” y “el dual” los programas lineales de la definición 11.48, entonces:
- a) El dual del dual es el primal.
 - b) Si \mathbf{x} es factible para el primal y \mathbf{y} es factible para el dual, entonces $M = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} = m$.
 - c) Si \mathbf{x}^* es factible para el primal y \mathbf{y}^* es factible para el dual y $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, entonces \mathbf{x}^* es óptimo para el primal y \mathbf{y}^* es óptimo para el dual.
 - d) Si el dual (o primal) tiene un vector factible, entonces los valores de M (o de m) en el conjunto de restricciones del primal (o dual) están acotados arriba (o abajo).
 - e) Si tanto el primal como el dual son no degenerados y ambos tienen vectores factibles, entonces ambos tienen vectores óptimos factibles y el valor máximo de la M del primal es igual al valor mínimo de la m del dual.
 - f) Si el primal (o el dual) no tiene un vector factible y el dual (o primal) es no degenerado, entonces ninguno de los dos tiene un vector óptimo factible.

DEMOSTRACION

- Véase el teorema 11.49.
- Calcular simplemente: $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq (\mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.
- Si \mathbf{x} es factible para el primal, entonces, por b), $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, lo que es igual a $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ por hipótesis; pero $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ porque toda \mathbf{x} factible para el primal significa que \mathbf{x}^* es óptima para el primal. De manera semejante es para la \mathbf{y}^* óptima del dual.
- Esto es consecuencia inmediata de b).
- Por d), ambos programas están acotados; por el teorema clave 11.44 sobre soluciones simplex, ambos programas tienen soluciones óptimas que se pueden obtener por el método simplex. El teorema clave 11.50 sobre el primal, el dual y el método simplex, muestra que el mínimo ($\mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ en ese teorema) para el dual es igual al máximo ($\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ allí) para el primal.
- Si el dual tiene un vector óptimo, entonces el teorema clave 11.44 establece que se puede encontrar por el método simplex, y el teorema clave 11.50 establece que de esa tabla final es posible construir un vector (óptimo) factible para el primal, el cual por hipótesis no existe; por lo tanto, el dual no puede tener un vector óptimo. De modo semejante para el enunciado alterno. ■

(11.54) **Ejemplo.** Considerar las desigualdades

$$2x_1 + x_2 \geq 70$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 90$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

y la pregunta es si existe algún vector que las satisfaga. Se agregará una función a maximizar, $M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, en donde $\mathbf{c} = [1 \ 1]^T$, y se considerará el dual (multiplicando las \geq desigualdades por -1 para obtener la forma adecuada de encontrar al dual):

minimizar a $-70y_1 + 40y_2 - 90y_3$
sujeto a las restricciones

$$-2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$$

$$-y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Si se hace $y_1 = 2\alpha$, $y_2 = 1 + 5\alpha$, y $y_3 = \alpha$, entonces las restricciones del dual se satisfacen si $\alpha \geq 0$; también

$$m = -70y_1 + 40y_2 - 90y_3 = 40 - 3\alpha,$$

lo cual no está acotado inferiormente porque se puede tomar arbitrariamente una α grande y positiva. Por el teorema clave 11.53 d), no podrán existir puntos factibles para las restricciones primales

Hay conexiones elegantes entre dualidad en programación lineal y la teoría de las desigualdades lineales, especialmente los llamados *teoremas de la alternativa* (algo parecido a la alternativa de Fredholm para las igualdades). Como un ejemplo de la conexión, suponga que es imposible encontrar una x que satisfaga a $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ y $c^T x > 0$. Como $x = 0$ satisface a las primeras dos desigualdades, esto significa que 0 es solución del programa lineal de maximizar $c^T x$ sujeto a $Ax \leq 0$ y $x \geq 0$. Si este programa lineal fuera no degenerado –que no lo es; de hecho, es degenerado– se podría usar f) del teorema de la teoría de la dualidad para deducir que hay un vector y que es factible para el dual, de modo que $A^T y \geq c$, y $y \geq 0$. Aunque aquí no se ha desarrollado una teoría lo suficientemente poderosa para probarlo, es cierto que tal y existe. También es fácil de ver que es válida la inversa: si existe esa y , entonces no puede haber una x como arriba porque, si la hubiera, se tendría que $0 < c^T x \leq (y^T A)x = y^T(Ax) \leq 0$, una contradicción intrínseca. De modo que el siguiente teorema de la alternativa es de hecho válido (aunque se carece de las herramientas para una corta demostración).

- (11.55) **Teorema** (un teorema de la alternativa). Sean A de $p \times q$ con $p \geq q$ y $q \geq 1$ y c dos matrices reales. Entonces será válida exactamente una de las siguientes alternativas:

1. Existe una x que es solución de $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ y $c^T x > 0$;
o bien
2. Existe una y que es solución a $A^T y \geq c$ y $y \geq 0$.

Hay muchos teoremas de este tipo relacionados entre sí, algunos de los cuales son equivalentes. Se concluirá con uno de los más famosos como un corolario del teorema anterior. Geométricamente dice que si un vector d , no puede formar un ángulo agudo con ningún vector z que forma ángulos obtusos con cada uno de los vectores b_i de cierto conjunto, entonces d es una combinación lineal no negativa de las b_i .

- (11.56) **Corolario** (teorema de Farkas de la alternativa). Sean B y d matrices reales de $p \times q$ y $q \times 1$ respectivamente. Entonces ocurrirá una de las siguientes dos alternativas:

Ya sea que

1. existe una z que es solución a $Bz \leq 0$, $d^T z > 0$;

o bien que

2. existe una y que es solución de $B^T y = d$, $y \geq 0$.

DEMOSTRACION. Sea $A = [B \ -B]$, $c^T = [d^T \ -d^T]$, $x^T = [u^T \ v^T]$. Entonces 1) equivale a resolver a $Ax \leq 0$, $x \geq 0$, en donde podemos escribir $z = u - v$ con $u \geq 0$ y $v \geq 0$. Así, por el teorema 11.55, el no resolver a 1) es equivalente a despejar a y con $A^T y \geq c$ y $y \geq 0$; pero $A^T y \geq c$ es precisamente

$$\begin{bmatrix} B^T \\ -B^T \end{bmatrix} y \geq \begin{bmatrix} d^T \\ -d^T \end{bmatrix},$$

lo que es equivalente a $B^T y = d$. ■

PROBLEMAS 11.4

- ▷ 1. Reescribiendo el programa en forma estándar, encuentre el dual del programa lineal

$$\text{maximizar a } f^T z$$

sujeto a las restricciones

$$Bz = d, \quad z \geq 0.$$

2. Reescribiendo el programa en forma estándar, encuentre el dual del programa lineal (*no* hay restricciones de no negatividad)

$$\text{maximizar a } f^T z$$

sujeto a las restricciones

$$Bz = d.$$

- ▷ 3. Encuentre el dual de cada uno de los siguientes problemas de la sección 11.2:
- problema 1
 - problema 3
 - problema 5
4. Encuentre el dual del dual de (11.1) y demuestre que es precisamente (11.1) de nuevo.
5. Utilice el método simplex en el dual para resolver el programa lineal

$$\text{maximizar } x_1 + x_2$$

sujeto a las restricciones

$$-x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 50$$

$$5x_1 + x_2 \leq 160$$

$$x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

6. Suponga que A es de $p \times q$ en un programa lineal en forma estándar, de modo que la tabla para la versión de variables de holgura del primal es de $(p+1) \times (q+p+1)$ mientras que la tabla para la versión de variables de holgura del dual es de $(q+1) \times (q+p+1)$. Cuente las operaciones aritméticas implicadas en la eliminación Gauss-Jordan en una columna de cada tabla y entonces explique por qué, por lo general, es mejor resolver el dual en lugar del primal cuando $p \gg q$.
7. Adjunte una nueva restricción $4x_1 + x_2 \leq 80$ al programa lineal (11.1) y entonces use la dualidad como en el ejemplo 11.52 para resolver el primer primal.
8. Use el método simplex para resolver el dual en el ejemplo 11.54 y de allí descubra que el dual no es acotado y que el primal no tiene vectores factibles.
9. Use la dualidad para demostrar que el programa lineal del problema 16 de la sección 11.3 no tiene solución óptima.
- ▷ 10. Utilice la dualidad para descubrir la naturaleza de o la solución al programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } -x_1 + 2x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & -5x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 4x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

11. Utilice la dualidad para descubrir la naturaleza de o la solución al programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } x_1 - x_2 \\ & \text{sujeto a las restricciones} \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- ▷ 12. Se usó el teorema 11.55 para demostrar el teorema de Farkas sobre la alternativa; demuestre que esos dos teoremas son equivalentes usando el teorema de Farkas para demostrar el teorema 11.55.
13. Aplique adecuadamente el teorema de Farkas sobre la alternativa a $[z^T \quad \alpha]^T$ para demostrar el siguiente teorema sobre la alternativa:
Ya sea que
hay una solución a $Bz \leq f$,

o bien,

hay una solución a $\mathbf{B}^T \mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}^T \mathbf{w} = -1$, pero nunca ambas alternativas.

11.5 PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMAS 11.5

1. Demuestre que el programa lineal

$$\text{maximizar } 0.75x_1 - 150x_2 + 0.02x_3 - 6x_4$$

sujeto a las restricciones

$$\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$\text{todas las } x_i \geq 0$$

es degenerado. Cuando se aplica el método simplex, hay “empate” para decidir cuál renglón se debe usar en la eliminación; si se decide el empate escogiendo el renglón más cercano a la parte superior de la tabla, entonces el método simplex se hace cíclico y nunca converge. Demuestre esto aplicando el método simplex. (La degeneración se presenta *a menudo* en las aplicaciones, pero que sea cíclico ocurre *rara vez* en estas situaciones; el inventor del método simplex, George Dantzig, recuerda haberse encontrado sólo con un caso en la práctica desde que inventó el método.)

2. El programa lineal

$$\text{minimizar } \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e$$

$$\text{sujeto a las restricciones } \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_e \geq \mathbf{0},$$

en donde \mathbf{A}_e es de $m \times n$ y $(n/2) < m < n$, y \mathbf{A}_e tiene rango completo m . Demuestre cómo reduce esto a un problema *más pequeño* en tamaño $(n-m) \times n$ como sigue. Demuestre que se puede encontrar una matriz \mathbf{S} de $n \times n$, tal que

$$\mathbf{A}_e \mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{0}],$$

en donde \mathbf{B} es de $m \times m$ y no singular. Sea $\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_e$, y sepárense las matrices de modo que

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2],$$

en donde \mathbf{y}_1 está en \mathbb{R}^m , \mathbf{y}_2 está en \mathbb{R}^{n-m} , \mathbf{S}_1 es de $n \times m$ y \mathbf{S}_2 es de $n \times (n-m)$. Demuestre entonces que $\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$, y que $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\mathbf{S}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{S}_2\mathbf{y}_2 \geq \mathbf{0}$. Deduzca que el programa lineal primal es equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{c}^T \mathbf{S}_2 \mathbf{y}_2 \\ & \text{sujeto a que } \mathbf{S}_2 \mathbf{y}_2 \geq -\mathbf{S}_1 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}, \end{aligned}$$

cuyo dual es

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } -(\mathbf{S}_1 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})^T \mathbf{x}_2 \\ & \text{sujeto a que } \mathbf{S}_2^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{S}_2^T \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y la matriz de las restricciones de igualdades ahora sólo de $(n-m) \times n$ (esta técnica fue comunicada por David M. Gay).

- 3. a) Utilice el método del problema dos sobre la forma de variables de holgura del problema modelo (11.1) para cambiar de cinco variables y tres igualdades a cinco variables y dos igualdades.
b) Resuelva el programa lineal en la nueva forma y úselo para obtener una solución al programa original.
- ▷ 4. Una biblioteca universitaria abre las 24 horas del día, y cada bibliotecario trabaja un turno continuo de ocho horas comenzando a las 12 de la noche, 4 AM, 8 AM, 12 del medio día, 4 PM u 8 PM. Para manejar la demanda de servicio, la biblioteca necesita el siguiente número de bibliotecarios trabajando durante varios períodos de tiempo : 3 de media noche a 3:59 AM; 2 de 4 AM a 7:59 AM; 10 de 8 AM a 11:59 AM; 14 de medio día a 3:59 PM; 8 de 4 PM a 7:59 PM; y 10 de 8 PM a 11:59 PM. Sean x_1, x_2, \dots, x_6 el número de personas que inician su turno de ocho horas a la media noche, a las 4 AM, ..., 8 PM respectivamente, planteé como un programa lineal el problema de minimizar el número total de bibliotecarios necesarios para operar la biblioteca. Demuestre que una solución óptima está dada por $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 14, x_4 = 0, x_5 = 8, x_6 = 2$ una vez que el sistema esté en operación.
- 5. A menudo se han discutido maneras de escoger a \mathbf{z} para que \mathbf{Bz} quede lo más cerca posible a \mathbf{w} en el sentido de la norma dos, estando dadas \mathbf{B} y \mathbf{w} ; esto es sólo el problema de mínimos cuadrados que se puede resolver, por ejemplo, con las descomposiciones QR o en valores singulares. Se puede usar la programación lineal para resolver esto en un sentido de norma ∞ . Para hacer que el máximo de los valores absolutos de dos variables u y v sea lo más pequeño posible, se puede minimizar a m sujeta a las restricciones $u \leq m, -u \leq m, v \leq m$ y $-v \leq m$.
 - a) Explique por qué esto minimiza al máximo de $|u|$ y a $|v|$.
 - b) Utilice esta idea para formar un programa lineal cuya solución determine a la \mathbf{z} que minimiza a $\|\mathbf{Bz} - \mathbf{w}\|_\infty$.
- ▷ 6. La programación lineal se puede usar de modo semejante a como se usó en el problema cinco, para determinar la \mathbf{z} que minimiza a $\|\mathbf{Bz} - \mathbf{w}\|_1$. Para minimi-

zar a $|u| + |v|$, se puede minimizar a $m_1 + m_2$ sujeto a las restricciones $u \leq m_1$, $-u \leq m_1$, $v \leq m_2$, $-v \leq m_2$.

a) Explique por qué esto minimiza a $|u| + |v|$.

b) Utilice esta idea para formar un programa lineal cuya solución determine a una \mathbf{z} que minimice a $\|\mathbf{Bz} - \mathbf{w}\|_1$.

7. Utilice el problema cinco para resolver el siguiente problema. Se supone que el número N de divisiones celulares en determinado organismo en cada periodo de tiempo es aproximadamente $N_0 + bp$, en donde p es la cantidad que se añade de cierto estimulante del crecimiento, y N_0 y b son parámetros del modelo a determinar. Se efectúa un experimento usando tres cantidades distintas $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 6$ del estimulante, y se encuentra que los números respectivos de divisiones celulares son $N_1 = 40$, $N_2 = 102$ y $N_3 = 190$. Determine los parámetros del modelo N_0 y b para minimizar el error máximo en el modelo para los tres experimentos, esto es, para minimizar a

$$\max \{|N_0 + b - 40|, |N_0 + 3b - 102|, |N_0 + 6b - 190|\}.$$

8. Suponga que una compañía panificadora tiene tres panaderías con capacidades de producción de 5000, 7000 y 9000 panes diarios. Suponga también que la empresa embarca a cinco bodegas para su ulterior distribución, y que las demandas diarias en esas bodegas son de 2000, 6000, 8000, 4000 y 1000. Debido a las diferentes distancias entre las tres panaderías y las cinco bodegas, los costos de transporte varían dependiendo de quién manda y cuál es el destino. Suponga que el costo monetario de remitir 1000 panes desde la panadería i hasta la bodega j es el elemento (i, j) es la siguiente matriz de costo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 30 & 20 & 40 & 20 \\ 60 & 50 & 80 & 30 & 40 \\ 30 & 20 & 50 & 70 & 10 \end{bmatrix}$$

Construya un programa lineal para determinar cuántos panes habrá que mandar cada día desde cada panadería a cada bodega para satisfacer las demandas de las mismas con el menor costo. (Este es un ejemplo del famoso *problema de transporte* y es de enorme importancia práctica para grandes negocios.) Resulta que la solución es que la panadería i debería enviar a la bodega j el número de panes especificado por el elemento i, j de la siguiente matriz solución \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 4000 & 0 \\ 2000 & 3000 & 3000 & 0 & 1000 \end{bmatrix}.$$

El costo mínimo es de \$650 diarios. Verifique que esta solución sea factible para el programa lineal y que su costo sea el citado.

- ▷ 9. Suponga que \mathbf{x}^* es óptima para el primal y que \mathbf{y}^* es óptima para el dual de la definición 11.48, y sean \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y las variables de holgura correspondientes: $\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}_x = \mathbf{b}$, y $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{s}_y = \mathbf{c}$, siendo $\mathbf{s}_x \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{s}_y \geq \mathbf{0}$.
- a) Demuestre la *condición de complementaridad* para programas lineales:

$$\mathbf{s}_x^T \mathbf{y}^* = \mathbf{s}_y^T \mathbf{x}^* = 0.$$

- b) Deduzca que \mathbf{c}^T es una combinación lineal no negativa de los renglones de \mathbf{A} correspondientes a aquellas restricciones satisfechas como igualdades en \mathbf{x}^* , y de $-\mathbf{e}_i^T$ para aquellas i para las que $\langle \mathbf{x}^* \rangle_i = 0$.

Apéndice uno

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1 Problemas 1.1

1. a) $7i$. d) $6 - 4i$. g) $-46 - 9i$. k) $-\frac{3}{2} - i$.
4. b) y . f) 0 .

Problemas 1.2

1. $x = 6, z = 2$.
4. $\langle \mathbf{A} + \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = 2\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle 2\mathbf{A} \rangle_{ij}$.
8. $\langle \mathbf{A} + \mathbf{0} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle \mathbf{0} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + 0 = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$ para toda \mathbf{A} .
11. $\langle \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + \langle -\mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij} + (-\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}) = 0 = \langle \mathbf{0} \rangle_{ij}$.
14. $\langle (-r)\mathbf{A} \rangle_{ij} = (-r)\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = -(r\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}) = -\langle r\mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle -(r\mathbf{A}) \rangle_{ij}$.

Problemas 1.3

4. $\langle \mathbf{A} \rangle_{3j} = 4\langle \mathbf{A} \rangle_{1ij}$, y $\langle \mathbf{AB} \rangle_{3i} = \langle \mathbf{A} \rangle_{31}\langle \mathbf{B} \rangle_{1i} + \cdots + \langle \mathbf{A} \rangle_{3q}\langle \mathbf{B} \rangle_{qi}$.
7. \mathbf{CD} tiene sentido para \mathbf{C} de $m \times n$ y \mathbf{D} de $k \times s$ si y sólo si $n = k$.
11. a) $\langle \mathbf{A} \square \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}\langle \mathbf{B} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} \rangle_{ij}\langle \mathbf{A} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{B} \square \mathbf{A} \rangle_{ij}$. c) $\langle \mathbf{E} \rangle_{ij} = 1$ para toda i, j .
14. \mathbf{A} debe commutar con

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$17. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

$$20. \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{bmatrix}, \text{ es el punto de partida.}$$

$$24. \langle \mathbf{A}\mathbf{0} \rangle_{ij} = \langle \mathbf{A} \rangle_{i1}\langle \mathbf{0} \rangle_{1j} + \cdots + \langle \mathbf{A} \rangle_{iq}\langle \mathbf{0} \rangle_{qj} = \langle \mathbf{A} \rangle_{i1}0 + \cdots + \langle \mathbf{A} \rangle_{iq}0 = 0 = \langle \mathbf{0} \rangle_{ij}.$$

$$26. \text{b)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \\ -3 & 9 & 18 \end{bmatrix}. \quad \text{c)} [23].$$

$$30. \langle (c\mathbf{A})^H \rangle_{ij} = \overline{\langle c\mathbf{A} \rangle_{ji}} = \bar{c}\overline{\langle \mathbf{A}^H \rangle_{ji}} = \bar{c}\langle \mathbf{A}^H \rangle_{ij} = \langle \bar{c}\mathbf{A}^H \rangle_{ij}.$$

33. Use la inducción matemática: 1) cierto para $k = 2$; 2) si es cierto para $k = i$, será cierto para $k = i + 1$ escribiendo $(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1}$ y sabiendo que es válido para $k = 2$ y para $k = i$.

37. $\begin{bmatrix} a & b + ci \\ b - ci & d \end{bmatrix}$ para a, b, c y d reales.

41. a) $(\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{AA})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^T)^2$. c) Considere a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

45. b) $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$.

48. Escriba $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$ con \mathbf{B} y \mathbf{C} reales, y desarrolle lo que significa $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

51. Como e^{kix} evaluado en x_j es igual a z^{kj-1} , las ecuaciones simplemente serán

$$f_j = c_0 + c_1 z^{j-1} + c_2 (z^{j-1})^2 + \cdots + c_{N-1} (z^{j-1})^{N-1}$$

para $j = 1, 2, \dots, N$.

Problemas 1.4

1. No hay ninguna.

4. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

8. a) \mathbf{L} es la inversa izquierda de \mathbf{A} si y sólo si $\mathbf{LA} = \mathbf{I}$ si y sólo si $(\mathbf{LA})^T = \mathbf{I}^T$ si y sólo si $\mathbf{A}^T \mathbf{L}^T = \mathbf{I}$ si y sólo si \mathbf{L}^T es una inversa derecha de \mathbf{A}^T .

10. a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. a) Use $\text{diag}(d_1, \dots, d_p)\text{diag}(e_1, \dots, e_p) = \text{diag}(d_1 e_1, \dots, d_p e_p)$.
b) Véase el problema 6 de la sección 1.3.

15. Compruebe, mediante el teorema 1.22 d), que $(\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1})^T(\mathbf{A}^T) = \mathbf{I}$.

19. Use el teorema 1.35 c).

21. Véase la sugerencia para el problema 33 de la sección 1.3.

23. d) $z = \cos \pi/6 \approx 0.87$.

26. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$.

29. b) Ambos métodos deberían dar $[-8 \quad 28 \quad -20]^T$.

32. b) $s(x) = 2 \sin x + 2 \cos 2x$.

Problemas 1.5

2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & -8 \\ 9 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ en ambas formas.

5. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -11 & 35 \\ 9 & 28 & 25 \end{bmatrix}$ en ambas formas.

7. Se obtiene $[19 \quad -25 \quad 58]^T$ de ambas formas.

11. a) Escriba $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$.

13. Escriba en detalle $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$ y use la no singularidad de \mathbf{A} para resolver a $\mathbf{B}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$, a

en donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{w} \\ \mathbf{z}^T & \mathbf{a} \end{bmatrix}.$$

16. $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} -c - \frac{1}{3} & -c + \frac{2}{3} & c \end{bmatrix}$ para c arbitraria.

Problemas 1.6

2. Considere los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}^H\mathbf{B}$ para demostrar que \mathbf{A} y \mathbf{B} son iguales a $\mathbf{0}$.
3. Use $(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} - \mathbf{K}) = \mathbf{I} - \mathbf{K}^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{K})$, el teorema 1.22 d) y el teorema 1.35 c).
4. Desarrolle $\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ o $\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y compruebe que el renglón o columna cero produce una contradicción.
6. Use a) para deducir b).

Capítulo 2 Problemas 2.2

4. a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 & 0.05 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.90 \end{bmatrix}$.

6. a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.30 \\ 0.10 & 0.20 & 0.50 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$.

13. Convergen.

17. $\mathbf{A}^{\text{impar}}[x_0 \ y_0 \ z_0]^T = [z_0 \ y_0 \ x_0]^T$.

21. $\mathbf{A}^{\text{impar}} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\text{par}} = \mathbf{I}_3$.

Problemas 2.3

3. “de guerra”.
5. a) Compare $1000(1.1)^i$ con $10(1.15)^i$. b) Con i aproximadamente 104.
9. F_i tiende a 2400 y C_i a 1920.
12. En $k = 0.16$.

Problemas 2.4

3. $d_1 = -0.0078$, $d_2 = 0.0561$.
7. $d_1 = 9$, $d_2 = 7.5$, $d_3 = 9.5$.

Problemas 2.5

4. b) $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\xi = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\eta = \mathbf{0}$, en donde

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}.$$

6. $\omega^2 = 0, 6, \text{ o } 10.$

Problemas 2.6

3. $9x_1 + 17,460x_2 = 1288.3, 17,460x_1 + 3,387,400x_2 = 2,510,405.$

6. $y \approx -3.194 + 2.522t.$

10. $\mathbf{x} = [-0.027 \quad 1.216]^T.$

13. $5a + 26b + 198c = 33, 26a + 198b + 1664c = 227, 198a + 1664b + 14,802c = 1871.$

Problemas 2.7

3. Minimice a $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ con $\mathbf{b} = [70 \quad 40 \quad 90]^T$ y las restricciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} \geq \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

5. La primera desigualdad se convierte en $2x_1 + x_2 \leq 55$, satisfecha todavía por 15,25. Esta todavía es óptima, porque los nuevos planes permisibles forman un subconjunto de los antiguos planes permisibles.

8. $x_1 = 0, x_2 = 30.$

10. Cualquier c y d positiva tales que $1 \leq c/d \leq 2$.

Capítulo 3 *Problemas 3.2*

1. a) $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4.$

4. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -1.$

8. a) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{5} & \frac{39}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

10. No hay soluciones.

12. $\mathbf{b} = [\alpha \quad \beta \quad \alpha + \beta]^T, \alpha \text{ y } \beta \text{ arbitrarias.}$

Problemas 3.3

1. $x = y = 1.$

4. $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0.$

8. a) Las columnas 1 y 2; x_1, x_2 ; la última columna es no delantera, todas las variables son delanteras, por lo tanto exactamente una solución.

10. $\begin{bmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} = \mathbf{X} \text{ para } a, b \text{ y } c \text{ arbitrarias.}$

Problemas 3.4

1. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T, \mathbf{x}_2 = [4 \quad 1 \quad 2]^T, \mathbf{x}_3 = [1 \quad 2 \quad 1]^T.$

Problemas 3.5

2. $\mathbf{E}_i(c) = \text{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$ estando c en la i -ésima posición; sólo calcular $\mathbf{E}_i(c)\mathbf{A}$.

6. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Utilice $(\mathbf{EA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$ y el problema 7.

Problemas 3.6

1. b) 0.57.
4. a) $x_1 = -0.04$, $x_2 = 2.2$.
6. El residual es $[0.01 \quad 0]^T$.
9. El residual es $[0 \quad -0.0001]^T$.

Problemas 3.7

1. $\alpha_{11} = 2$, $m_{21} = -4$, $m_{31} = -2$, $\alpha_{22} = -3$, $m_{32} = 2$, $\alpha_{33} = -1$.
4. Resuelva $\mathbf{Lx}_i = \mathbf{e}_i$ para toda i .
6. Utilice inducción matemática; para dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} triangulares inferiores, escriba en detalle $\langle \mathbf{AB} \rangle_j$ para $j > i$.
10. Utilice los problemas del 4 al 8 para comprobar que $\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1$ es triangular inferior mientras que $\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1^{-1}$ es unitaria triangular superior, y deduzca que cada una es igual a \mathbf{I} .

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

17. a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Problemas 3.8

1. Un renglón por una columna implica s productos; la suma de s términos necesita de $s - 1$ sumas; cada uno de los r renglones debe multiplicar a cada una de las t columnas.
5. a) 430. b) 119,210.
7. Por ejemplo, para multiplicaciones o divisiones, el método $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ cuesta $(p^3 - p)/3 + kp^2$, el otro cuesta p^3 para la inversa y luego kp^2 para las soluciones, y $(p^3 - p)/3 + kp^2 \leq p^3 + kp^2$ para toda $k \geq 0$ y toda $p \geq 0$.
11. Observe que \mathbf{K} es sólo de 1×1 .
15. a) El dividir el renglón i por el pivote cuesta 1 multiplicar o dividir por $1 \leq i \leq p - 1$. La eliminación en el siguiente renglón cuesta 1 multiplicar o dividir y 1 sumar o restar por $1 \leq i \leq p - 1$.

Problemas 3.10

2. a) Para $k = 0$, $x_1 = 3 - 3\alpha$, $x_2 = 1$, $x_3 = \alpha$ siendo α arbitraria.
 b) No hay solución para $k = -4$.
5. $l_{i1} = a_{i1}$ para $1 \leq i \leq p$; entonces $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$ para $2 \leq j \leq p$; entonces $l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{1j}$ para $2 \leq i \leq p$; entonces $u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j})/l_{22}$ y así sucesivamente.
7. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.
10. a) Escriba primero $A = LU$ como en el **teorema clave 3.48**; después haga $D_0 = \text{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{pp})$, $U_1 = U$, $L_1 = LD^{-1}$.
13. Si $L_1 D_0 U_1 = L'_1 D_0 U'_1$, entonces $L_1^{-1} L'_1$ es unitaria triangular inferior y es igual a $D_0 U_1 U_1'^{-1} D_0'^{-1}$ triangular superior, ambas, por lo tanto, deben ser iguales a I . Entonces, $L_1 = L'_1$ y la $U_1 U_1'^{-1}$ unitaria triangular superior es igual a $D_0^{-1} D_0'$ diagonal de modo que ambas son iguales a I .
15. $L_1 D_0 U_1 = A = A^T = U_1^T D_0^T L_1^T$, utilice el problema 13 o su demostración.

Capítulo 4 Problemas 4.2

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (d) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{19} & -\frac{6}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Las primeras p columnas sirven para tener a la matriz en la forma adecuada.
8. Aplicar a $[A \ B]$ las operaciones de renglón que transforman a A en la forma reducida de Gauss G y explicar por qué la $[G \ B']$ que se obtiene está en la forma reducida de Gauss, en vista del hecho de que A y G tienen rango p .
10. Intercambie renglones de modo que los renglones diferentes de cero queden entre los $p - n$ renglones superiores; reduzca la matriz superior $(p - n) \times p$ a su forma reducida de Gauss y explique por qué esto transforma a A en su forma reducida de Gauss.
14. La forma escalón reducida por renglón es igual a I_2 .

Problemas 4.3

1. a) Infinitas. c) Ninguna solución. f) Una solución.
3. Las soluciones se dan cuando $b = [\alpha \ \beta \ \alpha + \beta]^T$.
7. El punto común es (x, y) si y sólo si $[a \ b][x \ y]^T = c$.
9. a) $\mathbf{h} = \alpha[-\frac{1}{2} \ 1 \ 0]^T$ para α arbitraria.
13. Toda $R = R_0 + Y$, en donde R_0 es cualquier inversa derecha fija y Y es cualquier solución a $AY = \mathbf{0}$.
16. $Ax_\infty = x_\infty$ significa que $\mathbf{0} = Ax_\infty - x_\infty = (A - I)x_\infty$.

Problemas 4.4

2. a) Sea F una matriz no singular que reduce a A a su forma reducida de Gauss R , argumente el hecho de que el rango p significa que $R = I_p$. Demuestre entonces que

las mismas operaciones de renglón en $[A \ I_p]$ producen $F[A \ I_p] = [FA \ F] = [I_p \ F]$. Como $FA = I_p$, entonces $F = A^{-1}$.

- 6.** Revise la posibilidad de solución de $Ax_i = e_i$ mediante el **teorema clave 4.13**.
- 8.** a) Demuestre que hay una $x \neq 0$ tal que $(AB)x = 0$ determinando a $x \neq 0$ con $Bx = 0$.
- 11.** Sea F no singular con $FA = R_1$ en la forma reducida de Gauss con rango k_1 , y sea G no singular tal que $G(AA^T) = R_2$ en la forma reducida de Gauss con rango k_2 . Demuestre que $F(AA^T)$ tiene $p - k_1$ renglones cero y deduzca que $k_2 \leq k_1$. Demuestre que $GAA^TG^T = R_2G^T$ tiene $p - k_2$ renglones cero, y deduzca que GA tiene $p - k_2$ renglones cero examinando a $\langle GAA^TG^T \rangle_{ii}$ y entonces deduzca que $k_1 \leq k_2$.

Problemas 4.5

- 1.** c) $\det A = 30$.
- 4.** Desarrolle repetidamente respecto al primer renglón o a la primera columna.
- 8.** $\det A = 60$.
- 10.** Utilice $\det A^T = \det A$.
- 12.** Si T es triangular inferior, desarrolle repetidamente respecto al renglón superior.
- 15.** El problema 14 dice que la recta pasa a través de los tres puntos $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, si y sólo si esto es válido.
- 18.** Utilice inducción matemática en n y los teoremas 4.35 y 4.36.

Problemas 4.6

- 1.** $A(\text{adj } A) = 0$.
- 4.** b) $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.
- 7.** $A(\text{adj } A) = (\det A)I_p$, entonces $(\det A) \det(\text{adj } A) = (\det A)^p$.
- 9.** b) Los determinantes son iguales a 1 y a $10^8 + 1$.
- 12.** $x_1 = 2, x_2 = -1$.
- 14.** a) $x' = A^{-1}b' = A^{-1}(b + \epsilon e_i) = A^{-1}b + \epsilon A^{-1}e_i = x_0 + \epsilon A^{-1}e_i$.
- b) $\langle x_0 \rangle_j$ varía $\epsilon A_{ij}/(\det A)$ siendo A_{ij} el cofactor (i, j) .

Problemas 4.7

- 2.** Si F es no singular y FR está en la forma reducida de Gauss, y G es no singular y GS está en la forma reducida de Gauss, entonces $\text{diag}(F, G)$ es no singular y coloca a A en una forma en que se obtiene fácilmente la forma reducida de Gauss mediante unos pocos intercambios.
- 5.** Hay una F no singular tal que $FA = G$ en la forma reducida de Gauss con $G = [g \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Entonces $A = F^{-1}G = cr$, siendo c la primera columna de F^{-1} y r el primer renglón g^T de G .
- 7.** Parta R en R_{ij} , escriba $AR = \text{diag}(I, \dots, I)$, y observe que esto necesita que $A_{ii}R_{ii} = I$.
- 10.** a) Desarrolle respecto al último renglón o a la última columna.

11. Comenzando con la penúltima columna, reste a cada columna x_1 veces la columna a su izquierda. Desarrolle entonces respecto al renglón superior y factorice a $(x_p - x_1) \cdots (x_2 - x_1)$ del resultado. Finalmente, utilice la inducción para manejar el determinante Vandermonde de $(p - 1) \times (p - 1)$ resultante.

$$14. \det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

18. Si $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $0 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2^2$, de modo que $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y así $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ porque \mathbf{A} tiene el rango q .

Capítulo 5 Problemas 5.1

4. Aproximadamente a 5.8 m/h a un ángulo de 30° aguas abajo con el otro lado del río.
 7. Velocidad del aire alrededor de 141 m/h; viento alrededor de 28 m/h hacia el noreste.
 9. La magnitud de $\alpha\vec{u}$, es $|\alpha|$ veces la de \vec{u} , en la misma (u opuesta) dirección como \vec{u} si $\alpha \geq 0$ (< 0).

Problemas 5.2

3. $0 + 0 = 0$, $r0 = 0$, $-0 = 0$, por lo tanto es válido todo lo expresado en la definición 5.8.
 5. a) No. b) Sí. c) No.
 7. Si \mathcal{V}_0 es vacío, entonces no es un subespacio. Si contiene algún vector \mathbf{v}_0 , entonces $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0$ no está en \mathcal{V}_0 porque $\mathbf{b} + \mathbf{b} \neq \mathbf{b}$ si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.
 10. Debe contener a $\mathbf{0}$.
 14. Utilice el ejemplo 5.14 en $\mathbf{A} = \mathbf{I}_q$.

Problemas 5.3

4. \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 .
 6. Demuestre que $a + bt + ct^2 = \alpha(2) + \beta(3+t) + \gamma(2-t^2)$ se resuelve con $\gamma = -c$, $\beta = b$, $\alpha = a/2 - c$.
 9. La única solución a $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + c(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, esto es, a $a + c = 0$, $a + b = 0$ y $b + c = 0$, es $a = b = c = 0$.
 12. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. \mathbf{v}_1 depende de $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, \mathbf{v}_1 de $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, \mathbf{v}_2 de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, \mathbf{v}_2 de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, \mathbf{v}_3 de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y \mathbf{v}_3 de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$.
 15. La segunda.
 19. Un conjunto infinito de vectores F es linealmente dependiente si y sólo si alguna combinación lineal de un conjunto finito de vectores de F es igual a $\mathbf{0}$, sin que todos los coeficientes sean 0.
 20. b) Un subconjunto finito será una colección finita de \mathbf{x}_i ; sea N el subíndice mayor que se usó. Sumando $0\mathbf{x}_i$ si \mathbf{x}_i no es uno de los vectores de la combinación, será posible suponer que el conjunto es $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$. El j -ésimo término en la secuencia definida por la combinación lineal $c_1\mathbf{x}_1 = \dots = c_N\mathbf{x}_N$ es c_j si $j \leq N$, por lo tanto $c_j = 0$.

Problemas 5.4

1. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$.
5. Por ejemplo, los tres primeros vectores.
7. Por ejemplo, los tres primeros vectores.
8. Todo polinomio, por definición, es una combinación lineal de los vectores dados; el conjunto es linealmente independiente por el problema 20 a) de la sección 5.3
11. $-6\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.
14. No; sólo hay dos vectores en el conjunto, \mathbb{R}^3 tiene dimensión 3 de modo que se requieren tres vectores para generararlo.
16. a) $[6 \ -9 \ 5]^T$.
19. \mathbf{v} es linealmente dependiente de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ si y sólo si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r$ si y sólo si $c_B(\mathbf{v}) = c_B(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r) = c_1c_B(\mathbf{v}_1) + \dots + c_rc_B(\mathbf{v}_r)$ si y sólo si $c_B(\mathbf{v})$ es linealmente dependiente de $c_B(\mathbf{v}_1), \dots, c_B(\mathbf{v}_r)$.
21. Véanse los problemas 18 y 19.
24. $\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$.
28. $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Problemas 5.5

1. Utilice los dos primeros vectores en S .
5. $k = 1, 3$, o 4 .
7. Por ejemplo, una $[1 \ -1 \ 0 \ 1]^T$.
11. Utilice las dos primeras columnas.
13. Utilice las tres primeras columnas.
14. Dimensión = 3. a) $[1 \ 0 \ 0 \ 2]^T, [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$.
16. La forma común escalón reducida por renglones es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

19. $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2]^T,$
 $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1]^T$.
22. b) $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}$, por ejemplo; $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^T$, por ejemplo.

Problemas 5.6

1. (a) $\|\mathbf{x}\|_1 = 7$. (c) $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{54}$. (f) $\|\mathbf{x}\|_\infty = 5$.
5. El círculo unitario $\|\cdot\|_1$ es un cuadrado con vértices $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.
8. a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \mathbf{u}^H\mathbf{v} + \mathbf{v}^H\mathbf{u} + \|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\mathbf{u}\|_2^2 + 2\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 = (\|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2)^2$.
- b) $\|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|_2^2 \leq (\|\mathbf{u}\|_2 + \|t\mathbf{v}\|_2)^2$ da $t\mathbf{u}^H\mathbf{v} + \bar{t}\mathbf{v}^H\mathbf{u} \leq 2|t|\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2$. Sea $t = \mathbf{v}^H\mathbf{u}$, el complejo conjugado de $\mathbf{u}^H\mathbf{v}$.
12. $\mathbf{x}_\infty = [2 \ 0 \ 1]^T$.

13. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, de modo que $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$; el resultado se obtiene intercambiando a \mathbf{u} y a \mathbf{v} .
15. $|\mathbf{u}_i^H \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_\infty^H \mathbf{v}_\infty| = |\mathbf{u}_i^H \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i^H \mathbf{v}_\infty + \mathbf{u}_i^H \mathbf{v}_\infty - \mathbf{u}_\infty^H \mathbf{v}_\infty| \leq |\mathbf{u}_i^H(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_\infty)| + |(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_\infty)^H \mathbf{v}_\infty| \leq \|\mathbf{u}_i\| \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_\infty\| + \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_\infty\| \|\mathbf{v}_\infty\|$ el cual tiende a cero porque $\|\mathbf{u}_i\|$ está acotado y $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_\infty\|$.
18. $\|[a \ b \ c]^T\| = (a^2/2 + 11b^2/6 + 47c^2/60 + 2ab + 5ac/3 + 31bc/12)^{1/2}$.

Problemas 5.7

1. 30° .
4. $[c - 2b \ b \ c]^T$.
7. La ecuación $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$ tiene una variable delantera; las otras $p - 1$ variables podrán tomar valores arbitrarios y esto se puede usar para construir una base que contenga $p - 1$ vectores.
9. Utilice $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
12. a) Demuestre que las propiedades de (\cdot, \cdot) en un espacio se heredan por el subespacio.
b) 30.4° o 0.53 radianes.
15. Compruebe las condiciones de la definición 5.63 mediante las propiedades de c_B .
a) Por ejemplo, $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_F = (c_B(\mathbf{u}), c_B(\mathbf{u})) \geq 0$, y esto es igual a 0 si y sólo si $c_B(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, que era lo que se necesitaba.
18. Use la inducción sobre p . Para $p = 2$, $\|\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2\|^2 = |\alpha_1|^2 \|\mathbf{v}_1\|^2 + |\alpha_2|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.

Problemas 5.8

1. a) $[0 \ 2 \ 3]^T$
4. Observe que $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}\| = 0$, y use el teorema 5.73 sobre la mejor aproximación.
7. Si el conjunto original es ortogonal con vectores diferentes de cero, entonces el procedimiento reproduce al conjunto.
10. $1 + t, -\frac{1}{2} + t/2 + t^2, \frac{2}{3} - 2t/3 + 2t^2/3$.
12. $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 + \epsilon \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ -\epsilon \ \epsilon \ 0]^T$, $\mathbf{u}_3 = [0 \ -\epsilon/2 \ -\epsilon/2 \ \epsilon]^T$; ángulos dentro de ϵ aproximadamente 90° .
16. $\mathbf{H}_+ \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2)(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2) / (2\|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2) = -\mathbf{y} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2$.
17. b) Haga $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1$ en el problema 16 y escoja el signo + o - en \mathbf{w} de modo que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

Problemas 5.9

1. $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ es diagonal con elementos no negativos.

4. $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

$$8. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \frac{9}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

11. Si \mathbf{y} está en el espacio de columnas de \mathbf{A} , entonces $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{R}_0\mathbf{x})$, lo cual permite escribir a \mathbf{y} como una combinación lineal del conjunto ortogonal de las columnas de \mathbf{Q}_0 . Aplique el mismo argumento a la matriz formada por las primeras i columnas de \mathbf{A} .
16. Por ejemplo, la primera matriz de Householder es

$$\begin{bmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

20. $\mathbf{A} = [\sqrt{5}/5 \quad 2\sqrt{5}/5]^T [\sqrt{5} \quad \sqrt{5}]^T$, $\mathbf{x} = [3.6 - \alpha \quad \alpha]^T$ con α arbitraria.
23. $\mathbf{A} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2][\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2]$ con $\mathbf{q}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T/\sqrt{5}$, $\mathbf{r}_1 = [\sqrt{5} \quad 0]^T$, $\mathbf{q}_2 = [-26 \quad -11 \quad -1 \quad 14 \quad 24]^T/\sqrt{1570}$, $\mathbf{r}_2 = [26\sqrt{5}/5 \quad \sqrt{1570}/5]^T$.

Problemas 5.10

1. Todo número complejo es igual a $a + bi$ con a y b reales; compruebe las condiciones en la definición 5.8.
4. $1 - \beta + \alpha\beta \neq 0$.
5. b) Base: $\{[2 \quad -7 \quad -1]^T\}$.
9. Sea $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = s\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2$ con $|s| = 1$. Para t real, demuestre que $\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|_2^2 = (\|\mathbf{u}\|_2 - t\|\mathbf{v}\|_2)^2$ y sea $t = \|\mathbf{u}\|_2/\|\mathbf{v}\|_2$ para $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; trate el caso $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ por separado.
11. b) El nuevo conjunto es linealmente dependiente porque \mathbf{v}_0 es una combinación lineal de los otros.

Capítulo 6 Problemas 6.1

1. Si $\mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\mathcal{T}(\mathbf{v}_2)$, primero haga $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, después hacer $\alpha_2 = 0$. Recíprocamente, $\mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{v}_1) + \mathcal{T}(\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\mathcal{T}(\mathbf{v}_2)$.
2. $\mathcal{I}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathcal{I}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{I}(\mathbf{v}_2)$, $\mathcal{I}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} = \alpha\mathcal{I}(\mathbf{v})$.
8. Por ejemplo, $(\mathcal{TS})(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{T}\{\mathcal{S}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\} = \mathcal{T}\{\mathcal{S}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{S}(\mathbf{v}_2)\} = \mathcal{T}\{\mathcal{S}(\mathbf{v}_1)\} + \mathcal{T}\{\mathcal{S}(\mathbf{v}_2)\} = (\mathcal{TS})(\mathbf{v}_1) + (\mathcal{TS})(\mathbf{v}_2)$.
11. \mathbf{y} está en el espacio imagen si y sólo si $\mathbf{y} = \mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_q\mathbf{a}_q$, en donde $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_q]$.

14. Use el teorema del subespacio: $\mathcal{T}(\mathbf{0}) = \mathcal{T}(0\mathbf{0}) = 0\mathcal{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ por lo tanto el espacio nulo \mathcal{N} es no vacío; si \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 están en \mathcal{N} entonces $\mathcal{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{T}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, por lo tanto $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está en \mathcal{N} ; de igual modo para $\alpha\mathbf{v}_1$.
18. Use el teorema 6.8.
21. No; no es inyectiva: $\mathcal{T}(e^{-t}) = \mathbf{0}$, por ejemplo.
24. $(\mathcal{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^H\mathbf{v})$, de modo que $\mathcal{T}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{A}^H\mathbf{v}$.
27. a) \mathbf{n} está en $(\mathcal{R}^*)^\perp$ si y sólo si $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$ para toda \mathbf{x} en \mathcal{R}^* si y sólo si $(\mathbf{n}, \mathcal{T}^*(\mathbf{y})) = 0$ para toda \mathbf{y} en \mathcal{W} si y sólo si $(\mathcal{T}(\mathbf{n}), \mathbf{y}) = 0$ para toda \mathbf{y} en \mathcal{W} ; haciendo a $\mathbf{y} = \mathcal{T}(\mathbf{n})$ ayuda a demostrar que esto es válido si y sólo si \mathbf{n} está en el espacio nulo \mathcal{N} de \mathcal{T} .
- b) Sea P_0 la proyección ortogonal sobre \mathcal{R}^* y sea \mathbf{x} en \mathcal{N}^\perp . Demuestre que $\mathbf{x} - P_0\mathbf{x}$ está en $\mathcal{R}^{*\perp}$ y así—por a)—estará en \mathcal{N} , lo que quiere decir que \mathbf{x} es ortogonal a él. Escriba $\|\mathbf{x} - P_0\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x} - P_0\mathbf{x}) - (P_0\mathbf{x}, \mathbf{x} - P_0\mathbf{x})$ y demuestre que esto es cero; concluya que \mathbf{x} está en \mathcal{R}^* . La otra dirección es más fácil: \mathbf{x} en \mathcal{R}^* significa que $\mathbf{x} = \mathcal{T}^*(\mathbf{y})$ y $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = (\mathbf{n}, \mathcal{T}^*(\mathbf{y})) = (\mathcal{T}(\mathbf{n}), \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (0, \mathbf{y}) = 0$ para toda \mathbf{n} en \mathcal{N} .

Problemas 6.2

1. I.
3.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
6. $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 2, 3, 4)$.
9. \mathcal{T}^{-1} existe si y sólo si \mathcal{T} es inyectiva y sobre, \mathcal{T} es inyectiva por ejemplo, si y sólo si $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{Av}_B = \mathbf{0}_C = \mathbf{0}$ porque C es linealmente independiente, y $\mathbf{Av}_B = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ si y sólo si \mathbf{A} es no singular.
11. $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{Av}_B = \mathbf{0}_C$, y $\mathbf{0}_C = \mathbf{0}$ porque C es linealmente independiente.
13.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
16.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problemas 6.3

1. Para $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathcal{T}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{W}}/\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \leq k$, y así el supremum, cuando más será k .
4. $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = 1$.
7. $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = \|f\|$.
9. $\|\mathbf{A}\|_1 = 1.7$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 1.3$.
12. (a) $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$. (d) $\|\mathbf{A}\|_1 = 16$.
15. b) $\|\mathbf{I}\|$ es igual al supremum de $\|\mathbf{Ix}\|/\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| = 1$.

Problemas 6.4

1. Utilice el **lema clave 6.26** y $\|\cdot\|_\infty$.
4. Utilice el **teorema clave 6.28** siendo una matriz la diagonal principal de \mathbf{A} y la otra el resto de \mathbf{A} .
6. $1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{AA}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = c(\mathbf{A})$.
11. La eliminación de Gauss muestra que el renglón 2 $\approx 1.1(\text{renglón 1}) - \text{renglón 3}$; usar (6.30).
14. La magnitud del elemento de magnitud máxima en una matriz columna es igual a la norma ∞ de esa matriz; la magnitud del elemento de mayor magnitud en una matriz de $p \times q$ es cuando más la norma ∞ de la matriz y es cuando menos $(1/q)$ veces esa norma ∞ .
16. c) $c(\mathbf{A}) = 19,312$.

Problemas 6.5

1. a) $\{[-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$, por ejemplo, de la solución general de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
4. Se debe demostrar que $[\cdot]_{B,C}$ es una transformación lineal, que $[\mathcal{T}]_{B,C} = \mathbf{0}$ si y sólo si \mathcal{T} es igual a la transformación cero \mathcal{O} ; siendo $\mathcal{O}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para toda \mathbf{v} , y que para toda \mathbf{A} , de $p \times q$, hay una \mathcal{T} tal que $[\mathcal{T}]_{B,C} = \mathbf{A}$. Para esto último, por ejemplo, solamente defina a $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ tal que $\mathbf{w}_C = \mathbf{Av}_B$.
7. Represente a \mathcal{T} por una matriz \mathbf{A} , de $p \times p$, y utilice el **teorema clave 4.18** demostrando que cada una de las condiciones para \mathcal{T} es equivalente a una condición semejante para \mathbf{A} .
10. Utilice simplemente los problemas 8 y 9.
14. $((\mathcal{S}\mathcal{T})\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{S}\{\mathcal{T}(\mathbf{u})\}, \mathbf{v}) = (\mathcal{T}(\mathbf{u}), \mathcal{S}^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathcal{T}^*\{\mathcal{S}^*(\mathbf{v})\}) = (\mathbf{u}, (\mathcal{T}^*\mathcal{S}^*)\mathbf{v})$.

Capítulo 7 Problemas 7.1

1. $\lambda = 1$ o 9 .
3. $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = -0.5$.
6. $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$.

Problemas 7.2

2. $\{[1 \ -2 \ 0]^T, [0 \ 3 \ 1]^T\}$, por ejemplo; $\lambda_3 = 6$, $[2 \ 1 \ -1]^T$.
4. $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ para $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
7. $-\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 0.95\lambda + 0.15$.
12. Para cualquier $i \geq 0$, $\mathbf{A}^i\mathbf{x} = \mathbf{A}^{i-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{i-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{x} = \cdots = \lambda^i\mathbf{x}$. Entonces $f(\mathbf{A})\mathbf{x} = (c_n\mathbf{A}^n + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I})\mathbf{x} = c_n\mathbf{A}^n\mathbf{x} + \cdots + c_1\mathbf{A}\mathbf{x} + c_0\mathbf{I}\mathbf{x} = c_n\lambda^n\mathbf{x} + \cdots + c_1\lambda\mathbf{x} + c_0\mathbf{x} = f(\lambda)\mathbf{x}$.
17. $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$; $\lambda_2 = 3$, $m_2 = \mu_2 = 1$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$.

Problemas 7.3

1. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \text{diag}(1, 3)$.

4. No.

7. $B = \{[5 \ 4]^T; [5 \ 2]^T\}$, $\Lambda = \text{diag}(1.0, 0.8)$.

11. No. No tiene un conjunto linealmente independiente de dos eigenvectores.

Problemas 7.4

1. 4, -2, 3.

3. $\lambda_i = \langle \mathbf{U} \rangle_{ii}$.

6. b) Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$ siendo $\Lambda = \text{diag}(1.0, 0.8)$.

De este modo, $\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\Lambda^i \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{P} \text{diag}(1, (0.8)^i) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0$, lo cual tiende a $\mathbf{P} \text{diag}(1, 0) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = [2400 \ 1920]^T$ si $\mathbf{x}_0 = [100 \ 1000]^T$.

10. Sus eigenvalores no son los mismos. También, $\det \mathbf{A} \neq \det \mathbf{B}$.

13. $\lambda_1 = 3, m_1 = 4, \mu_1 = 3; \lambda_2 = 5, m_2 = 3, \mu_2 = 1$.

Problemas 7.5

2. $a = 0, b = \pm\sqrt{2}/2, c = \mp\sqrt{2}/2$.

5. \mathbf{P} es unitaria si y sólo si $\mathbf{P}\mathbf{P}^H = \mathbf{P}^H\mathbf{P} = \mathbf{I}$; \mathbf{P}^H es unitaria si y sólo si $\mathbf{P}^H\mathbf{P}^{HH} = \mathbf{P}^{HH}\mathbf{P}^H = \mathbf{I}$; son idénticas porque $\mathbf{P}^{HH} = \mathbf{P}$.

8. Utilice el teorema 6.25.

12. $\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{PA} = \mathbf{H}_w \mathbf{A} = \mathbf{A} - (2/\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \mathbf{w} (\mathbf{w}^T \mathbf{A})$. Para las multiplicaciones o divisiones: $\mathbf{w}^T \mathbf{A}$ cuesta p^2 , $\mathbf{w}^T \mathbf{w}$ cuesta p más, $(2/\mathbf{w}^T \mathbf{w})$ cuesta 1 más, $(2/\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \mathbf{w}$ cuesta p más, $(2/\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \mathbf{w} (\mathbf{w}^T \mathbf{A})$ cuesta p^2 más, haciendo total de $2p^2 + 2p + 1$.

17. Sea ω la matriz de $(p - r) \times 1$ formada de los $p - r$ elementos inferiores de \mathbf{w} . Entonces

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix}$$

20. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$, por ejemplo,

22. $\mathbf{R}_{21}(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- 25.** Si \mathbf{Q} es un producto de matrices elementales de rotación, entonces $\det \mathbf{Q} = 1$. No todas las matrices ortogonales cumplen con $\det \mathbf{Q} = 1$. Por ejemplo,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \text{ por ejemplo:}$$

- 28.** $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{AA} = \mathbf{AA}^T = \mathbf{AA}^H$.

- 31.** Si $\mathbf{A} = \mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P}$ con \mathbf{P} unitaria y \mathbf{D} diagonal, entonces $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = (\mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P})^H(\mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^H\mathbf{D}^H\mathbf{P}\mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{P}^H\mathbf{D}^H\mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{P}^H\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{P}^H\mathbf{D}^H\mathbf{P} = \mathbf{AA}^H$.

- 35.** Primero, escoja una ω de $(p-1) \times 1$ tal que \mathbf{H}_ω veces los $p-1$ elementos inferiores de la primera columna $[\alpha \ \mathbf{c}^T]^T$ sea igual a $\lambda \mathbf{e}'_1$, un múltiplo de la primera matriz unitaria de $(p-1) \times 1$, y entonces forma $\mathbf{w} = [0 \ \omega^T]^T$. De aquí

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\omega \mathbf{A} \mathbf{H}_\omega &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{c} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{r}^T \mathbf{H}_\omega \\ \lambda \mathbf{e}'_1 & \mathbf{H}_\omega \mathbf{A}_0 \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{r}^T \mathbf{H}_\omega \\ \lambda \mathbf{e}'_1 & \mathbf{H}_\omega \mathbf{A}_0 \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- 37.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ está en la forma de Hessenberg.

Problemas 7.7

- $|\lambda_1 - 1| \leq 3 \times 10^{-5}$, $|\lambda_2 - 0.5| \leq 7 \times 10^{-5}$, $|\lambda_3 - 0.1| \leq 4 \times 10^{-5}$.
- Aproximadamente $|\lambda_1 - 1| \leq 2 \times 10^{-9}$.
- a) Demuestre que $\mathbf{v} = \mathbf{P}(\Lambda - \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}$ si μ no es un eigenvalor exacto (cuando sea claramente válida la desigualdad), de modo que $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{P}\| \|(\Lambda - \mu\mathbf{I})^{-1}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{r}\|$. Demuestre entonces que $\|(\Lambda - \mu\mathbf{I})^{-1}\|$ es el recíproco de la distancia mínima de μ a algún eigenvalor de Λ , por ejemplo $1/|\mu - \lambda_s|$. Finalmente, reescriba la desigualdad como $|\mu - \lambda_s| \leq \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{v}\|$.
- La primera parte, es $n = 1$ en b) del teorema del círculo de Gershgorin. Los eigenvalores de \mathbf{B} real son las raíces de un polinomio con coeficientes reales cuyas raíces por lo tanto aparecerán como números reales o como pares de complejos conjugados (en cuyo caso dos caerían en el mismo disco de Gershgorin). Por lo tanto los eigenvalores son reales.

Problemas 7.8

- $\lambda_r = k + 2 \cos\{r\pi/(n+1)\}$; sólo comprobar que las \mathbf{x}_i sean eigenvectores.
- Utilice la inducción matemática para n , y desarrolle con respecto a la última columna.
- La afirmación es falsa.
- b) Utilice a).
- Utilice una identidad para $(\mathbf{Px}, \mathbf{Py})$ y para $(\mathbf{P}^T\mathbf{x}, \mathbf{Py})$ análoga a $ab = (1/4)\{a+b\}^2 - (a-b)^2\}$.

Capítulo 8 Problemas 8.1

1. $\mathbf{x} = \mathbf{D}\xi$.

Problemas 8.2

2. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = (-\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$

9. Sí; por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

10. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$.

Problemas 8.3

1. a) Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ si y sólo si $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$ si y sólo si $0 = \det(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\lambda}\mathbf{I}) = \det(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\lambda}\mathbf{I})^T = \det(\mathbf{A}^H - \lambda\mathbf{I})$ si y sólo si $\bar{\lambda}$ es un eigenvalor de \mathbf{A}^H .
b) $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^H$ si y sólo si $\mathbf{A}^H = \mathbf{P}\mathbf{D}^H\mathbf{P}^H$, y entonces usar el **teorema clave 7.14**.
4. $\{[1 \ 1 \ 0]^T/\sqrt{2}, [-1 \ 1 \ 2]^T/\sqrt{6}, [1 \ -1 \ 1]^T/\sqrt{3}\}$, por ejemplo.
7. Utilice $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^H$ y $\mathbf{D} = \mathbf{D}^H$ si y sólo si \mathbf{D} es real.
10. (a) $b_1 - b_2 = 0$. (b) $b_1 + b_2 = 0$.
12. Cuando menos hay una solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si y sólo si ya sea que 0 no es un eigenvalor, o bien 0 es un eigenvalor y todas las \mathbf{b} son ortogonales a todos los eigenvectores \mathbf{x}_0 asociados con $\lambda = 0$, pero al hacer $\mathbf{b} = \mathbf{x}_0$ en este último caso, se demuestra que \mathbf{x}_0 no es un eigenvector y por eso \mathbf{A} es no singular, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Problemas 8.4

2. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $[1][13 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{12}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$.

4. Los elementos en la diagonal principal de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ son iguales a las normas 2 de las columnas de $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ elevadas al cuadrado, de modo que cuando menos uno de esos elementos es diferente de cero. $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ es hermitiana de modo que $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{P}^H\Lambda\mathbf{P}$ con Λ diagonal, y $\Lambda = \mathbf{0}$ querría decir que $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
7. $\|\mathbf{A}\|^2 = \|\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\|_2 = \|\Sigma\|_2$, lo cual puede evaluarse mediante la definición de una norma matricial.
10. $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \|\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_s^2$.

12. b) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.95 & 0.32 \\ -0.32 & 0.95 \end{bmatrix}$.

Problemas 8.5

2. $(\mathbf{0}_{p \times q})^+ = \mathbf{0}_{q \times p}$.

8. $x = 14/9$.

9. $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ y Σ son no singulares y entonces, por construcción, $\Sigma^{-1} = \Sigma^+$. Entonces $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^{-1} = (\mathbf{V}^H)^{-1}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H = \mathbf{A}^+$.

12. $\mathbf{A}^+ = \frac{1}{102} \begin{bmatrix} -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ 6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

16. (b) $\mathbf{c}^+ = \mathbf{c}^H/\mathbf{c}^H\mathbf{c}$. (c) $(\mathbf{cr})^+ = \mathbf{r}^H\mathbf{c}^H/\{\mathbf{(c}^H\mathbf{c})(\mathbf{rr}^H)\}$.

Problemas 8.6

3. $\langle \mathbf{D}^{-1}\mathbf{AD} \rangle_{ij} = \epsilon^{i-j} \langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$.

6. Todos los eigenvalores de una \mathbf{A} normal son iguales (digamos, a c) si y sólo si la matriz de los eigenvalores es $\Lambda = c\mathbf{I}$, lo cual es válido si y sólo si $\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^H = c\mathbf{I}$.

8. Si $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$, entonces $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H$, y entonces $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\Sigma\Sigma^+\mathbf{U}^H$.

$$\Sigma\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

en donde k es el rango, y por lo tanto $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{U}_0\mathbf{U}_0^H$ en donde \mathbf{U}_0 es igual a la matriz de las primeras k columnas de \mathbf{U} . Utilice el teorema 5.79 y el **corolario clave 8.20 b**).

Capítulo 9 Problemas 9.2

3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{J} =$ Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{J} =$ Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$.

14. $(\lambda - 4)^3 = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 64$.

15. Para cada eigenvalor diferente λ_i , sea de $p_i \times p_i$ el mayor bloque de Jordan que contiene a λ_i . Entonces el polinomio mínimo es igual a

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

Problemas 9.3

2. a) Por ejemplo, $\{[1 \ 0 \ 1]^T\}$ y $\{[1 \ -1 \ -1]^T, [1 \ 0 \ 0]^T\}$.
 c) Por ejemplo, $\{[1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ \frac{1}{2} \ 0]^T\}$ y $\{[0 \ 1 \ 1]^T\}$.
 f) Por ejemplo, $\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \ 0]^T, [0 \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{2} \ 0]^T\}$ y $\{[15 \ 2 \ -8 \ 8]^T\}$.
5. a) $\mathbf{v}_{11} = [1 \ -1 \ -1]^T$, $\mathbf{v}_{21} = [1 \ -1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_{22} = [0 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_1 = [0 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$. $\mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_{21} = \mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_{22} = \mathbf{u}_2^T \mathbf{v}_{11} = \mathbf{u}_2^T \mathbf{v}_{21} = 0$.
 d) $\mathbf{v}_{11} = [1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_{21} = [1 \ -2 \ 4]^T$, $\mathbf{v}_{31} = [1 \ -3 \ 9]^T$, $\mathbf{u}_1 = [6 \ 5 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [3 \ -2 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_3 = [2 \ -1 \ -1]^T$. $\mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_{21} = \mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_{31} = \mathbf{u}_2^T \mathbf{v}_{11} = \mathbf{u}_2^T \mathbf{v}_{31} = \mathbf{u}_3^T \mathbf{v}_{11} = \mathbf{u}_3^T \mathbf{v}_{21} = 0$.
7. $5b_1 + b_2 - 7b_4 = 0$, $9b_1 + b_3 - 12b_4 = 0$.

Problemas 9.4

3. Eigenvalores: 1.1, 0.7, de modo que $\|\mathbf{x}\|$ tiende a infinito para ciertas \mathbf{x}_0 (incluyendo $\mathbf{x}_0 = [100 \ 1000]^T$ en el ejemplo 2.31).
 5. Eigenvalores: 1, -1, 1/2; todas las potencias \mathbf{A}^i y \mathbf{x}_i permanecen acotadas.
 9. Sea $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\alpha$, de modo que $\rho(\mathbf{A}') = \rho(\mathbf{A})/\alpha < 1$. Entonces $\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A} = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{A}')$ es no singular porque $\mathbf{I} - \mathbf{A}'$ lo es y $\alpha \neq 0$, siendo $(\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}' + \mathbf{A}'^2 + \cdots$ y $(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}$.
 10. a) La única permutación da la misma \mathbf{A} , y ésta no es la forma requerida en la definición 9.33.
 c) Utilice $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_1]$.
 13. \mathbf{x}_0 debe ser ortogonal a los eigenvectores izquierdos de \mathbf{A} asociados con $\lambda = 1$.
 16. El problema 15 dice que es posible hacer $\alpha = 2$ en el problema 14.
 19. Todo eigenvalor satisface a $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ para toda norma, de modo que verdaderamente $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_1$. Si $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\rho(\mathbf{A})$ es una matriz de Markov, entonces $1 = \|\mathbf{A}'\|_1 = \|\mathbf{A}\|_1/\rho(\mathbf{A})$, así $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1$. Si $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1$, entonces toda columna de \mathbf{A} debe sumar 1; si no, algún elemento de \mathbf{A} podría aumentarse estrictamente para dar una nueva matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ con $\|\tilde{\mathbf{A}}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_1$, pero también $\rho(\tilde{\mathbf{A}}) > \rho(\mathbf{A})$ debido a f) en el teorema de Perron-Frobenius, lo que da la contradicción $\|\tilde{\mathbf{A}}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_1 = \rho(\mathbf{A}) < \rho(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \|\tilde{\mathbf{A}}\|_1$.

Problemas 9.5

- Por ejemplo,
1.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} & 0 & -\frac{2k}{M} & 0 & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

6. $x_1(t) = (1 + t) \exp(2t)$, $x_2(t) = \exp(2t)$.

8. $\exp(\mathbf{I}) = e\mathbf{I}$.

11. Utilice el teorema 9.54 b).

$$16. \exp(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2e^4 & \frac{3}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-2} & \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-2} \\ -e^4 & \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^4 & \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^4 \\ e^4 & \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^4 & \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^4 \end{bmatrix}.$$

18. Escoja a k de modo que ningún eigenvalor tenga parte real positiva y algún eigenvalor tenga parte real cero.

Problemas 9.6

2. $u_{r+1} = -0.5v_r + 2$, $v_{r+1} = -0.5u_{r+1} + 2.5$.

7. $\mathbf{H}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H}_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

9. $\rho(\mathbf{H}_J) = 0.5$, $\rho(\mathbf{H}_{GS}) = 0.25$, $\rho(\mathbf{H}_{1,1}) = 0.1$.

11. (a) $\rho(\mathbf{H}_J) = 2$. (b) $\rho(\mathbf{H}_{GS}) = 4$.

16. a) $\omega^* = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1.072$. Experimente con varios valores de ω como en el ejemplo 9.72 para minimizar $\rho(\mathbf{H}_\omega)$.

Problemas 9.7

2. Si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$ y se podrá tomar como un conjunto linealmente independiente de eigenvectores asociados con $\lambda = \alpha + i\beta$ y con $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ un conjunto $\{\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}\} = \{\mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a} - i\mathbf{b}\}$ siendo \mathbf{a} y \mathbf{b} reales. $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ debe ser linealmente independiente, porque $\{\mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a} - i\mathbf{b}\}$ lo es. Ahora, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ significa que $\mathbf{A}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) + i(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a})$; esto resulta en $\mathbf{A}\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$ y $\mathbf{A}\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}$, esto es: $\mathbf{A}[\mathbf{a} \quad \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Sea $\mathbf{P} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}]$.

5. Si $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$, entonces $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0 = \lambda_1^i\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2/\lambda_1)^i\mathbf{v}_2 + \dots + c_p(\lambda_p/\lambda_1)^i\mathbf{v}_p\}$, de modo que una $\mathbf{A}^i\mathbf{x}_0$ normalizada convergerá a un múltiplo del eigenvector \mathbf{v}_1 siempre que $c_1 \neq 0$.

7. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} commutan, entonces el orden de los productos en la serie $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ podrán intercambiarse como si \mathbf{A} y \mathbf{B} fueran números, dando como resultado el producto de las series para $\exp(\mathbf{A})$ y para $\exp(\mathbf{B})$. Contraejemplo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 10 Problemas 10.1

1. (b) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

4. $x_1^2/9 + x_2^2/25 = 1$.

7. $x_1^2/144 - x_2^2/25 = 1$.

Problemas 10.2

2. $t < 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0; t > 0, \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0.$
 4. b) $\{(5 + \sqrt{153})/2\}\xi_1^2 + \{(5 - \sqrt{153})/2\}\xi_2^2 = t$, una hipérbola.
 5. La curva C es la elipse no circular $x_1^2/64 + x_2^2 = 9$.

Problemas 10.3

1. a) $\xi_1^2 + 3\xi_2^2 + 4\xi_3^2$, por ejemplo.
 5. A es negativa definida si y sólo si las submatrices principales A_k satisfacen a $(-1)^k \det A_k > 0$ para $1 \leq k \leq p$.
 7. b) Los pivotes son $5, \frac{9}{5}, -27$, y por lo tanto es indefinida.
 9. $L_1 D_0 U_1 = A = A^H = (L_1 D_0 U_1)^H = U_1^H D_0^H L_1^H$; utilice el problema 13 de la sección 3.10.
 11. Utilice el **teorema clave 10.18** que relaciona definición y eigenvalores.
 14. Utilice el **teorema clave 10.18** que relaciona definición y eigenvalores.

Problemas 10.4

1. Los eigenvalores son en realidad $-2, 0, 1$.
 2. Los eigenvalores son en realidad $1, 3, 4$.
 5. b) Los eigenvalores son en realidad $-5, 23, -9$.
 7. Los eigenvalores son en realidad $-2, 0, 1$.
 10. c) Los eigenvalores son en realidad $1, 2, 4$.

Problemas 10.5

1. Los eigenvalores son en realidad aproximadamente $8.2057, -2.8089, 0$ y 2.6032 .
 4. Los eigenvalores son en realidad $0.6, 0.3, 0.1$.
 7. Demuestre que $B - A$ es positiva semidefinida para usar el teorema 10.33.
 10. Encuentre matrices A_I y A_u para las cuales se puedan encontrar los eigenvalores (por ejemplo, de $aI - E$) de modo que $x^H A_I x \leq x^H A x \leq x^H A_u x$, y utilice el teorema 10.33. $0.6 \leq \lambda_1 \leq 1.2, 1.1 \leq \lambda_2 \leq 1.7, 1.7 \leq \lambda_3 \leq 2.3, 2.2 \leq \lambda_4 \leq 2.8$.

Problemas 10.6

2. a) La curva es semejante a la gráfica de $\xi_1^2 + 9\xi_2^2 = 1$.
 6. a) $x^H A' x = x^H B^H A B x = (Bx)^H A (Bx)$.
 b) $Bx = 0$ siendo $x \neq 0$ si y sólo si B tiene un rango menor que q .
 8. Hay una $x \neq 0$ tal que $(A + \lambda B + \lambda^2 C)x = 0$, de modo que $0 = x^H A x + \lambda x^H B x + \lambda^2 x^H C x = a + b\lambda + c\lambda^2$ siendo a, b y c positivos; utilice la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática.
 9. Del problema 15 de la sección 10.3 o de $B = PAP^H$, escriba $B = MM^H$ siendo M no singular. Entonces $C = M^{-1}(BA)M$ y BA son semejantes y por lo tanto tienen los mismos eigenvalores. Pero $C = M^{-1}(MM^H A)M = M^H A M$, la cual es hermitiana porque A es hermitiana; por lo tanto los eigenvalores son reales.

10. Del problema 15 de la sección 10.3 o partiendo de $\mathbf{B} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^H$, escriba $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{M}^H$ para \mathbf{M} no singular y sea $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$. Defina $\mathbf{B}' = \mathbf{NBN}^H = \mathbf{I}$ y a $\mathbf{C}' = \mathbf{NCN}^H$. Utilice eigenvalores para demostrar que de a) a c) son válidos para \mathbf{B}' y \mathbf{C}' en lugar de \mathbf{B} y \mathbf{C} , y entonces deduzca que también serán válidos para \mathbf{B} y \mathbf{C} .

12. a) Separe \mathbf{A} y defina una matriz \mathbf{E} como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H & a_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^H \mathbf{A}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

siendo \mathbf{A}_1 también positiva definida y con $\det \mathbf{E} = 1$. Entonces $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{EA}$, y \mathbf{EA} es igual a

$$\mathbf{EA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^H & a_{pp} - \mathbf{c}^H \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

Debido a la estructura de \mathbf{EA} , su determinante es igual a $(a_{pp} - \mathbf{c}^H \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{c}) \det \mathbf{A}_1$. Ya que \mathbf{A}_1 y por consiguiente \mathbf{A}_1^{-1} son positivas definidas, se obtiene $\det \mathbf{A} \leq a_{pp} \det \mathbf{A}_1$. Utilice la inducción matemática de aquí en adelante.

- b) Si $\det \mathbf{B} = 0$, el resultado será claramente válido. Para $\det \mathbf{B} \neq 0$, la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{B}^H \mathbf{B}$ es positiva definida; aplique a) a esta \mathbf{A} .

14. a) $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implica que $(\mathbf{A}^2 - \lambda \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $(1 - \lambda)\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\lambda = 1$, o bien $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, lo cual implica que $\lambda = 0$.
 b) Si \mathbf{A} es no singular, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ quiere decir que $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
 d) La traza es igual a la suma de los eigenvalores.

17. Para a) y b), sea $\mathbf{A} = \mathbf{P}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}$ siendo $\mathbf{\Lambda}$ no negativa y diagonal, y defínase a \mathbf{L} no negativa y diagonal siendo $\mathbf{L}^2 = \mathbf{\Lambda}$; entonces $\mathbf{B} = \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{P}$ da $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ como se necesitaba. c) Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ para alguna \mathbf{B} ; el problema es demostrar que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{P}$ partiendo de a) y b). Sea $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^H \mathbf{D} \mathbf{Q}$ siendo \mathbf{D} no negativa y diagonal, de modo que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{Q}^H \mathbf{D}^2 \mathbf{Q}$ y sin embargo $\mathbf{A} = \mathbf{P}^H \mathbf{L}^2 \mathbf{P}$. De este modo $\mathbf{D}^2 = \mathbf{S}^H \mathbf{L}^2 \mathbf{S}$, en donde $\mathbf{S} = \mathbf{PQ}^H$ es unitaria, por lo tanto $\mathbf{SD}^2 = \mathbf{L}^2 \mathbf{S}$; esto es, $\langle \mathbf{S} \rangle_{ij} d_j^2 = \langle \mathbf{S} \rangle_{ij} l_i^2$, en donde $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ y $\mathbf{L} = \text{diag}(l_1, \dots, l_p)$. Por lo tanto, $\langle \mathbf{S} \rangle_{ij} (d_j - l_i)(d_j + l_i) = 0$ para toda i y j . Si d_j o l_i son positivas, entonces esto da $\langle \mathbf{S} \rangle_{ij} (d_j - l_i) = 0$ –lo cual también es válido si tanto d_j como l_i son iguales a 0. Pero $\langle \mathbf{S} \rangle_{ij} d_j = \langle \mathbf{S} \rangle_{ij} l_i$ quiere decir que $\mathbf{SD} = \mathbf{LS}$, y entonces $\mathbf{D} = \mathbf{S}^H \mathbf{L} \mathbf{S}$. Por lo tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^H \mathbf{D} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \mathbf{S}^H \mathbf{L} \mathbf{S} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{P}$, que era lo que se necesitaba.

18. d) Sea $\mathbf{A} = \mathbf{U}_0 \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{V}_0^H$ una descomposición en valores singulares de \mathbf{A} . Es posible reescribir ésta como $\mathbf{A} = (\mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0^H)(\mathbf{V}_0 \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{V}_0^H)$ y como $\mathbf{A} = (\mathbf{U}_0 \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{U}_0^H)(\mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0^H)$, lo cual es precisamente $\mathbf{A} = \mathbf{UM} = \mathbf{NV}$ siendo $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0^H$, $\mathbf{M} = \mathbf{V}_0 \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{V}_0^H$, y $\mathbf{N} = \mathbf{U}_0 \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{U}_0^H$.

Capítulo 11 Problemas 11.1

1. $x_1 = 10, x_2 = 20$.
2. $x_1 = 40, x_2 = 20$.
6. $16[2.5 \quad 3.75 \quad -8.75 \quad -6.25 \quad -13.75]^T = [40 \quad 60 \quad -140 \quad -100 \quad -220]^T$.
8. $f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \cdots + c_p x_p$, por lo tanto $\partial f / \partial x_i = c_i$ y $\nabla f = \mathbf{c}$.

- 12.** Minimice $24y_1 + 30y_2 + 10y_3$
sujeta a las restricciones

$$y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$$

$$y_2 + y_3 \geq 2$$

toda $y_i \geq 0$.

$[1 \ 2]^T = 0[1 \ 0]^T + (3/2)[1 \ 1]^T + (1/2)[-1 \ 1]^T$, y la solución óptima es
 $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 1/2$.

- 15.** Maximice $-70y_1 - 40y_2 - 90y_3$
sujeta a las restricciones

$$-2y_1 - y_2 - y_3 \leq -40$$

$$-y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -60$$

toda $y_i \geq 0$.

Solución óptima $y_1 = 0$, $y_2 = 30$, $y_3 = 10$.

Problemas 11.2

- 1.** Maximice $-2x_1 + 5x_2$

sujeta a las restricciones

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 - x_2 \leq -6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- 4.** Mediante $z_1 = x_1$, $z_2 = z_3 = x_2$, $z_4 = x_3$, con variables de holgura z_5 , z_6 , z_7 y z_8):

Maximice $4z_1 + 3z_2 - 3z_3 - 2z_4$

Sujeto a las restricciones

$$-z_1 - z_2 + z_3 + z_5 = -4$$

$$z_1 - z_2 + z_3 + z_6 = 6$$

$$z_1 + 3z_2 - 3z_3 + 6z_4 + z_7 = 5$$

$$-z_1 - 3z_2 + 3z_3 - 6z_4 + z_8 = -5$$

toda $z_i \geq 0$.

- 9. a)** Es degenerada (las columnas 1, 3 y 5 de $[A_e \ b]$ son, por ejemplo, linealmente dependientes).

- 11.** Maximice m

sujeta a las restricciones

$$m - u \leq 0$$

$$m - v \leq 0$$

$$2u + v \leq 5$$

$$u + 3v \leq 8$$

$$m \geq 0, u \geq 0, v \geq 0.$$

Problemas 11.3

- 2.** Los valores del programa lineal no están acotados superiormente, y por ello no hay solución óptima.
- 7.** Como el problema es no degenerado, exactamente q variables son iguales a cero en el vector básico factible actual, y las p variables básicas son estrictamente positivas; utilice la estructura de la tabla para demostrar que los valores de esas p variables

forman el lado derecho actual. Como el renglón inferior tiene un elemento negativo, digamos en la columna x_n , con cuando menos un elemento positivo en esa columna, hay cocientes de elementos positivos del lado derecho entre elementos positivos de la columna x_n para revisar; el menor de ellos será estrictamente positivo, dando un incremento estricto de x_n y por ende de M .

9. a) $x_1 = 25 + \alpha$, $x_2 = 15 - \alpha$ es óptimo para $0 \leq \alpha \leq 10$.

11. b) $x_1 = 10$, $x_2 = 20$.

15. No hay ninguna que satisfaga a las restricciones.

Problemas 11.4

1. Minimice $\mathbf{d}^T \mathbf{u} - \mathbf{d}^T \mathbf{v}$

sujeto a las restricciones

$$\mathbf{B}^T \mathbf{u} - \mathbf{B}^T \mathbf{v} \geq \mathbf{f}$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

(o bien, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se puede reemplazar por \mathbf{w} sin limitaciones de signo para \mathbf{w}).

3. a) Minimice $7y_1 + 6y_2 - 6y_3$

sujeto a las restricciones

$$2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq -2$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$$

toda $y_i \geq 0$.

10. No hay vectores factibles para este primal (los valores en el dual no están acotados).

12. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0$ es equivalente a $\mathbf{Bx} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0$ siendo $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}$. Esto

es equivalente a *no* poder resolver $\mathbf{B}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ por el teorema de Farkas. Pero lo anterior es sólo $[\mathbf{A}^T \quad -\mathbf{I}] \mathbf{y} = \mathbf{c}$; separando a \mathbf{y} para que $\mathbf{y}^T = [y_1^T \quad y_2^T]$, esto se transforma en $\mathbf{A}^T y_1 = \mathbf{c} + \mathbf{y}_2 \geq \mathbf{c}$, siendo $\mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}$.

Problemas 11.5

4. Minimice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

sujeto a las restricciones

$$\begin{array}{rl} x_1 & + x_6 \geq 3 \\ x_1 + x_2 & \geq 2 \\ x_2 + x_3 & \geq 10 \\ x_3 + x_4 & \geq 14 \\ x_4 + x_5 & \geq 8 \\ x_5 + x_6 & \geq 10 \end{array}$$

Toda $x_i \geq 0$.

Para mostrar que la solución factible dada sea óptima, forme la tabla y póngala en el formato acostumbrado para las variables básicas actuales. ($x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_9$); observe que no hay elementos negativos en el renglón inferior (excepto en la irrelevante columna final).

6. b) Minimice $[0^T \quad 1^T][z^T \quad m^T]$ —en donde $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$ — sujeto a las restricciones

$$\mathbf{Bz} - \mathbf{m} \leq \mathbf{w}$$

$$-\mathbf{Bz} - \mathbf{m} \leq -\mathbf{w}$$

9. a) Por el **teorema clave 11.53 e)**, $c^T x^* = b^T y^*$. Por lo tanto, $c^T x^* = (A^T y^* - s_y)^T x^* = y^{*T} A x^* - s_y^T x^* = y^{*T}(b - s_x) - s_y^T x^* = b^T y^* - s_x^T y^* - s_y^T x^*$ de modo que $s_x^T y^* + s_y^T x^* = 0$. Pero todas las s_x , s_y , x^* y y^* son no negativas, de modo que $s_x^T y^* = s_y^T x^* = 0$.
- b) La ecuación $A^T y^* - s_y = c$ resulta en $c^T = y^{*T} A - s_y^T \mathbf{I}$, lo cual explícitamente dice que c^T es una combinación lineal no negativa de *todos* los renglones de A y *todos* los de $-\mathbf{e}_i^T$. Siendo $s_x \geq 0$ y $y^* \geq 0$, de $s_x^T y^* = 0$ se sigue que $\langle y^* \rangle_i = 0$ siempre que $\langle s_x \rangle_i > 0$; esto es, el i -ésimo renglón de A en realidad no está relacionado con la representación de c^T arriba si la restricción corresponde a ese renglón no es una igualdad en x^* . De modo semejante, $s_y^T x^* = 0$ resulta en que $\langle s_y \rangle_i = 0$ siempre que $\langle x^* \rangle_i > 0$; esto es, aquellas $-\mathbf{e}_i^T$ para las cuales $\langle x^* \rangle_i > 0$ en realidad no están relacionadas en la representación anterior de c^T .

Apéndice dos

Bibliografía

Teoría de álgebra lineal y matrices

1. F. R. Gantmacher, *Theory of Matrices*, Vols. I. II, Chelsea (1959).
2. P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Van Nostrand (1958).
3. M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon (1964).
4. T. Muir, *Determinants*, Dover (1960).

Aplicaciones de álgebra lineal y matrices

5. A. Albert, *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*, Academic Press (1972).
6. N. R. Amundsen, *Mathematical Models in Chemical Engineering; Matrices and Their Applications*, Prentice-Hall (1966).
7. R. Bellman and K. R. Cooke, *Modern Elementary Differential Equations*, 2nd edition, Addison-Wesley (1971).
8. M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer Verlag (1975).
9. G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press (1963).
10. R. A. Frazer, W. J. Duncan, and A. R. Collar, *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations*, Cambridge University Press (1938).
11. F. R. Gantmacher, *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience (1959).
12. F. A. Graybill, *An Introduction to Linear Statistical Models*, Vol. I, McGraw-Hill (1961).
13. R. Haberman, *Mathematical Models*, Prentice-Hall (1977).
14. G. Hadley, *Linear Programming*, Addison-Wesley (1962).
15. J. Heading, *Matrix Theory for Physicists*, Wiley (1960).
16. W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall (1964).
17. S. Karlin, *Mathematical Models and Theory in Games, Programming, and Economics*, Vols. I, II, Addison-Wesley (1959).
18. N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Combinatorica*, Vol. 4, No. 4, 373–395 (1984).
19. J. G. Kemeny and J. L. Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand (1960).
20. J. G. Kemeny and J. L. Snell, *Mathematical Models in the Social Sciences*, MIT Press (1972).

21. J. G. Kemeny, J. L. Snell, and G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall (1957).
22. I. Linnik, *Method of Least Squares and Principles of the Theory of Observations*, Pergamon Press (1961).
23. D. Maki and M. Thompson, *Mathematical Models and Applications*, Prentice-Hall (1973).
24. O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill (1969).
25. H. C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill (1966).
26. M. Z. Nashed, *Generalized Inverses and Applications*, Academic Press (1976).
27. L. A. Pipes, *Matrix Methods in Engineering*, Prentice-Hall (1963).
28. C. R. Rao, *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*, Wiley (1952).
29. J. Robinson, *Structural Matrix Analysis for the Engineer*, Wiley (1966).
30. J. T. Schwartz, *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, Gordon and Breach (1961).
31. S. R. Searle, *Matrix Algebra for the Biological Sciences (Including Applications in Statistics)*, Wiley (1966).
32. S. Senturia and B. Wedlock, *Electronic Circuits and Applications*, Wiley (1975).
33. M. Simonnard, *Linear Programming*, translated by W. S. Jewell, Prentice-Hall (1966).
34. G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press (1986).
35. A. M. Tropper, *Matrix Theory for Electrical Engineers*, Addison-Wesley and Harrap (1962).
36. R. E. Walpole and R. H. Myers, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 2nd edition, Macmillan (1978).
37. A. V. Weiss, *Matrix Analysis for Electrical Engineers*, Van Nostrand (1964).

Cálculos matriciales y de álgebra lineal

38. A. Bjorck, R. J. Plemmons, and H. Schneider, *Large-Scale Matrix Problems*, North Holland (1981).
39. J. R. Bunch and D. J. Rose (eds.), *Sparse Matrix Computations*, Academic Press (1976).
40. J. J. Dongarra, C. B. Moler, J. R. Bunch, and G. W. Stewart, *LINPACK User's Guide*, SIAM Publications (1979).
41. I. S. Duff and G. W. Stewart (eds.), *Sparse Matrix Proceedings*, SIAM Publications (1979).
42. G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computation*, Prentice-Hall (1977).
43. G. E. Forsythe and C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall (1967).
44. B. S. Garbow, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, and C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension*, Springer Verlag (1972).
45. J. A. George and J. W. Liu, *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice-Hall (1981).
46. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press (1983).
47. L. A. Hageman and D. M. Young, Jr., *Applied Iterative Methods*, Academic Press (1981).
48. A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell (1964).

49. C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall (1974).
50. B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall (1980).
51. D. Rose and R. Willoughby (eds.), *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press (1972).
52. B. T. Smith, J. M. Boyle, J. Dongarra, B. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema, and C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide*, 2nd edition, Springer Verlag (1976).
53. G. W. Stewart, *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press (1973).
54. R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall (1962).
55. J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall (1963).
56. J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford (1965).
57. IMSL mathematical software, International Mathematical and Statistical Laboratories, Inc., 7500 Bellaire Blvd., Houston, TX 77036.
58. MATLAB matrix software, The Math Works, Inc., 158 Woodland St., Sherborn, MA 01770.
59. NAG mathematical software, Numerical Algorithms Groups, Inc., 1101 31st St., Downers Grove, IL 60515.

Indice de símbolos

$\mathbf{A}, \mathbf{X}, \dots$	negritas mayúsculas: matrices –definición 1.1
$\mathbf{a}, \mathbf{x}, \dots$	negritas minúsculas: matrices de renglón y de columna y vectores –definiciones 1.1 y 5.8
a, k, μ, \dots	cursivas: números
$\bar{\mathbf{A}}$	complejo conjugado de \mathbf{A} –sección 1.1
\mathbf{A}^T	transpuesta de \mathbf{A} –definición 1.20
\mathbf{A}^H	transpuesta hermitiana de \mathbf{A} –definición 1.20
\mathbf{A}^{-1}	inversa de \mathbf{A} –definiciones 1.34 y 1.26
\mathbf{A}^+	pseudoinversa de \mathbf{A} –definición 8.25, teorema clave 8.26 .
$\mathbf{A}_e, \mathbf{x}_e, \mathbf{c}_e$	matrices aumentadas en programas lineales –(11.30), (11.5)
A_{rj}	cofactor (r, j) de \mathbf{A} –definición 4.26
$\text{adj } \mathbf{A}$	matriz adjunta de \mathbf{A} –definición 4.38
\mathbb{C}	conjunto de los números complejos –sección 1.1
\mathbb{C}^p	espacio vectorial complejo de matrices columna $p \times 1$ –ejemplo 5.9 c), definición 5.15
C_t	curva de nivel de una forma cuadrática en \mathbf{x} –sección 10.2
\tilde{C}_t	curva de nivel de una forma cuadrática en ξ –sección 10.2
$C^{(k)}[a, b]$	espacio vectorial real de funciones continuas diferenciables k veces en el intervalo $[a, b]$ –ejemplo 5.9 e)
$c(\mathbf{A})$	número de condición de \mathbf{A} –teorema 6.29
c_B	isomorfismo de coordenadas con respecto a la base ordenada B –definición 5.35
D	a menudo una matriz diagonal –definición 1.3
$\det \mathbf{A}, \det(\mathbf{A})$	determinante de \mathbf{A} –definición 4.27
$\text{diag}(d_1, \dots, d_p)$	matriz diagonal $p \times p$ –definición 1.3
\exp en $\exp(t)$	función exponencial: $\exp(t) = e^t$
\exp en $\exp(\mathbf{A})$	función exponencial de una matriz –teorema 9.54
\mathbf{e}_i	matriz columna unitaria –definición 1.43
$\mathbf{E}_{ij}, \mathbf{E}_{ii}(c), \mathbf{E}_i(c)$	matrices elementales –definición 3.31

H_w	matriz de Householder definida por w –problema 15 de la sección 5.8, definición 7.35
H_j, H_{GS}, H_o	matrices de iteración para los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR –ejemplo 9.72, teorema 9.73
i	imaginario puro, $\sqrt{-1}$ –sección 1.1
i, j	enteros
I_r	matriz identidad $r \times r$ –definición 1.18
I	matriz identidad –definición 1.18
\mathcal{I}	transformación lineal idéntica –problema 2 de la sección 6.1
J	forma de Jordan – teorema clave 9.4 , (7.26)
$J_i, J(\lambda)$	bloque de Jordan –definición 9.3
L, L_0 en LU y L_0U_0	matriz triangular inferior en las descomposiciones LU –sección 3.7, definición 1.3
m_i	multiplicidad algebraica de un eigenvalor –definición 7.8
\mathfrak{M}	símbolo para un ejemplo o problema o resolver con computadora
\mathcal{N}	espacio nulo de una transformación lineal –definición 6.5
\mathbf{P} en $\mathbf{P}^H\mathbf{A}\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^H$	generalmente una matriz unitaria –definiciones 7.29 y 7.32, (7.42), y teorema clave 8.6
\mathbf{P} en $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$	matriz no singular –definiciones 1.34 y 7.20, teorema clave 7.14
\mathbf{P} en $\mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$	matriz de permutación –definición 3.51
P_0	proyección ortogonal sobre un subespacio –teorema 5.71
\mathcal{P}	espacio vectorial real de los polinomios de grado arbitrario –ejemplo 5.9 f)
\mathcal{P}^k	espacio vectorial real de polinomios de grado estrictamente menor que k –ejemplo 5.9 g)
\mathbf{Q}, Q_0 en QR y $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$	matriz con columnas ortogonales u ortonormales en descomposiciones QR – teorema clave 5.82
\mathbf{Q} en $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ y $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$	matriz no singular –definición 1.34, teorema clave 9.4
$Q(x), \tilde{Q}(\xi)$	formas cuadráticas –definición 10.13, teorema clave 10.14 , (10.5)
\mathbf{R}, R_0 en QR y $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$	matriz triangular superior en descomposiciones QR –definición 1.3, teorema clave 5.82
\mathbb{R}	conjunto de los números reales
\mathbb{R}^p	espacio vectorial real de matrices columna $p \times 1$ –ejemplo 5.9 b), definición 5.15
$R_{kn}(\theta)$	matriz de rotación elemental –definición 7.40
S_t	superficie de nivel de una forma cuadrática en x –sección 10.3
\tilde{S}_t	superficie de nivel de una forma cuadrática en ξ sección 10.3
$\mathcal{T}, \mathcal{S}, \dots$	mayúsculas script: generalmente transformaciones lineales –definición 6.1
\mathcal{T}^*	transformación adjunta de \mathcal{T} –definición 6.10
\mathcal{T}^{-1}	transformación inversa de \mathcal{T} –teorema 6.9
$\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr}(\mathbf{A})$	traza de A –problema 6 de la sección 1.2, teorema 7.6 c)
\mathbf{U} en $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ y $\mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H$	matriz unitaria en la descomposición en valores singulares –definición 7.29, (8.15), teorema clave 8.19

\mathbf{V} en $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ y $\mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H$	matriz unitaria en descomposiciones en valores singulares –definición 7.29, (8.15), teorema clave 8.19
$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \dots$	letras mayúsculas script que generalmente denotan espacios vectoriales –definición 5.8
$\mathcal{V}_0, \mathcal{W}_0$	generalmente subespacios –definición 5.11
$\mathbf{0}$	matriz cero o vector cero –definiciones 1.9 y 5.8
\emptyset	transformación lineal cero –problema 3 de la sección 6.1
λ	eigenvalor –definición 7.4
\mathbf{A}	matriz diagonal de eigenvalores –definición 1.3, teorema clave 7.14
μ_i	multiplicidad geométrica de un eigenvalor –definición 7.12
$\rho(\mathbf{A})$	radiopectral de \mathbf{A} –definición 9.26
$\rho_A(\mathbf{x})$	cociente de Rayleigh para \mathbf{A} en \mathbf{x} –definición 10.23
σ_i	valor singular – teorema clave 8.19
Σ en $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$	matriz “diagonal” de valores singulares –(8.15), teorema clave 8.19
$\langle \cdot \rangle_{ij}$ en $\langle \mathbf{A} \rangle_{ij}$	elemento (i, j) de una matriz –definición 1.1
$\langle \cdot \rangle_i$ en $\langle \mathbf{x} \rangle_i$	elemento $(i, 1)$ o $(1, i)$ de una matriz columna o renglón –definición 1.1
(\cdot, \cdot) en (\mathbf{u}, \mathbf{v})	producto interior –definición 5.63, ejemplo 5.64
$\langle \cdot \rangle$ en $\langle \mathbf{x} \rangle$	valor de x después de redondear a t dígitos de punto flotante –definición 3.35
$\ \cdot\ $ en $\ \mathbf{x}\ $ y $\ \mathbf{A}\ $	norma de un vector o de una matriz –definiciones 5.54 y 6.22, teorema 5.68
$\ \cdot\ _{\mathcal{Y}}$ en $\ \mathbf{v}\ _{\mathcal{Y}}$	norma de un vector en \mathcal{Y} –definición 5.54
$\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _{\infty}$ en $\ \mathbf{x}\ _1, \ \mathbf{A}\ _2, \ \mathbf{b}\ _{\infty}$	normas 1, 2 e ∞ de una matriz –definiciones 5.55 y 6.22, problema 7 de la sección 8.4, corolario 10.26
$\ \cdot\ _F$ en $\ \mathbf{A}\ _F$	norma de Frobenius de una matriz –problema 8 de la sección 8.4
$\ \cdot\ _{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ en $\ \mathcal{T}\ _{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$	norma de transformación de una transformación lineal –definición 6.19
$[\cdot]$ en $[1 \ 2 \ 3]$	paréntesis rectangulares que definen una matriz –definición 1.1
$[\cdot]$ en $[a, b]$	intervalo cerrado de números t que satisfacen $a \leq t \leq b$
$<, \leq, >, \geq$ con matrices	desigualdades para matrices –definiciones 11.28 y 9.32
T en \mathbf{A}^T	transpuesta de una matriz –definición 1.20
H en \mathbf{A}^H	transpuesta hermitiana de una matriz –definición 1.20
$^{-1}$ en \mathbf{A}^{-1} y \mathcal{T}^{-1}	inversa de una matriz o de una transformación lineal –definición 1.34, teorema 6.9
$^+$ en \mathbf{A}^+	pseudoinversa de una matriz –definición 8.25, teorema clave 8.26
$*$ en \mathcal{T}^*	transformación adjunta de una transformación lineal –definición 6.10
$\bar{}$ en \bar{z} y $\bar{\mathbf{A}}$	complejo conjugado de un número o de una matriz –sección 1.1
$\hat{}$ en \hat{u}	vector geométrico –sección 5.1
\approx	igualdad aproximada –(2.37)
■	final de una demostración
▷	problema que tiene respuesta o guía en el apéndice uno

Indice analítico

A

Ajuste de datos, 74-81, 385-386 (*véase también* Mínimos cuadrados)

Algebra de matrices 1-45

Algebra matricial, 1-45

Algoritmo QR, 352

Alternativa, teoremas de la, 521-522, 523

Análisis de error retrospectivo, 120-124

Ancho de banda, 136 (*véase también* Matriz, banda de)

Angulo (*véase* Producto interior)

Angulo entre vectores, 196, 246-247 (*véase también* Producto interior)

Aplicaciones (*véase* Modelos)

Aritmética computacional (*véase* Punto flotante, aritmética de, dígito- t)

Aritmética de matrices, 1-45

B

Banach, lema de, o premisa, 300

Base, 216-218

cambio de, 224-225

en representaciones de transformaciones lineales, 289-290

relación entre coordenadas-B, 224-225, 290

conjuntos infinitos, 226

definición de, 217

de un conjunto generador, 216-218, 232

de un conjunto linealmente independiente, 219-220, 232-233

número de vectores, 219

ordenada, 220

ortogonal, 254-274

de una columna o un espacio nulo, 381

representación única de vectores, de una, 218

Base ordenada, 220 (*véase también* Base)

Base ortogonal, 254-274

existencia de la, 258

procedimiento Gram-Schmidt:

formulación matricial, 263-266

mediante proyecciones, 256

modificado, 259, 272-273

tradicional, 257, 258-259, 263-264, 272-273

representación en términos de la, 255

BIME, 149 (Bibliotecas Internacionales de Matemáticas y Estadística)

C

Cambio de base, 224-225 (*véase también* Base, cambio de)

Cancelación, ley de, 13-14

Cayley-Hamilton, teorema de, 401-402

Cero:

columna, 46, 154, 177

matriz, 5, 6, 13, 21, 45

renglón, 45, 154, 177

transformación, 279, 284

vector, 201, 203

y ortogonalidad, 249

Cerrada bajo multiplicación por escalares, 205

Cerrada bajo suma de vectores, 205

Cholesky, descomposición de, 459 (*véase también* descomposiciones-LU $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$)

Cilindro, 454

Circulante, 360

Cofactor (*véase* Determinantes)

Columna, 1

Combinación lineal, 198, 205, 208

de los renglones de una matriz, 231

Competencia entre lecherías (*véase* Modelos, competencia entre lecherías)

Complejo conjugado, 2

y la transpuesta hermitiana, 14-15

Complemento ortogonal, 287 (*véase también* Subespacio ortogonal a un subespacio dado)

Condensación de datos, 382-384

Condición, 126, 302-305 (*véase también* Número condicional; Problema bien acondicionado; Problema mal acondicionado)

de rango, 190-191

de sistema de ecuaciones, 126, 190-191, 302, 303

y número condicional, 303, 306-307

determinante, 189

eigen sistemas, 353-358

forma de Jordan de matrices, 403

Congruencia hermitiana, 459, 475

- Conjunto de soluciones:**
 sistemas de ecuaciones, 162-171
 efecto de la eliminación de Gauss, 162-163
 efecto de transformar, 153, 162-163
 teorema clave, 166
- Conjunto generador**, 208-209
 como una base, 219-220
 definición de, 209
 eliminación de un vector, 209-210, 216-217, 232
 formación de una base de un, 216-217, 232
 justificación, 207-208
 número de vectores, 226
- Conjunto linealmente dependiente:**
 columnas de una matriz, 231
 conjuntos infinitos, 216
 definición de, 210
 y linealmente dependiente de, 211-212
- Conjunto linealmente independiente:**
 bases, 219-220
 columnas de una matriz, 231
 en la forma reducida de Gauss, 232
 conjuntos infinitos, 216
 definición de, 210
 extensión a una base, 219-220, 232-233
 número de vectores en, 218, 219, 220
 razón para el, 208-209
 subconjunto de, 212
 y la no singularidad, 221
 y representaciones únicas, 216, 218
- Conjunto ortogonal:**
 definición de, 249
 independencia lineal, 253-254
 que define una proyección ortogonal, 253
- Conjunto ortonormal**, 249
- Contradominio**, 278
- Convergencias:**
 de potencias de matrices, 299, 407, 408
 de sucesión de matrices, 298, 405-406
 secuencia de transformación, 299
 sucesión de vectores, 241-242
- Convolución** (*véase* Producto, convolución)
- Coordenadas**, 220-225 (*véase también* Vector de coordenadas-*B*)
- Coordenadas-*B***, 222 (*véase también* Vector de coordenadas-*B*)
- Cramer, regla de**, 187
- Curva de nivel**, 443-449
 definición de, 443
 relación entre aquélla en, x , y aquélla en ξ , 448-449
- D**
- Demostración**, 5
- Dependencia lineal**, 207-216 (*véase también* Linealmente dependiente en; Conjunto linealmente independiente)
- Derivada**, 45, 90, 419
- Descomposición de matrices mediante eigensistemas**, 315, 326-327 (*véase también* Descomposición de valor singular) mediante una matriz diagonal, 326-327, 366-367
- Descomposición de valor singular**, 375-385
 base para espacio de columna o espacio nulo, 380
 casos simples, 377
 eigensistema de \mathbf{AA}^H y $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$, 376, 380-381
 existencia de, 378
 gradientes proyectados en programación lineal, 441
 mínimos cuadrados, 385-387
 procesamiento de imagen, 382-384
 seudoinversa, 387
 trabajo necesario para encontrar la, 381
 unicidad de, 391
 valores singulares, 380-381
 y rango, 381-384
 vectores singulares, 380-381, 384
- Descomposición-*LDU***, 151-152 (*véase también* Descomposiciones-*LU*)
- Descomposiciones de matrices** (*véase* Descomposición de matrices mediante eigensistemas; Descomposiciones-*LU*; Descomposiciones-*QR*; Descomposición en valor singular)
- Descomposiciones-*LU***, 127-138, 149-159
 $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$, 152, 458
 $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$, 152, 459
 $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, 127-135, 458
 unicidad del, 136
 sin eliminación de Gauss, 151
 $\mathbf{A} = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$, 128-135
 unicidad de, 151
 sin eliminación de Gauss, 151
 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LDU}$, 151-152
 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$, 134-135
 en la evaluación del $\det \mathbf{A}$, 185, 188-189
 en la solución de ecuaciones, 139-141
 unicidad de, 136
 trabajo que involucra el encontrar, 139
 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$, 133-134, 136-137
 con intercambios, **teorema clave**, 133
 resumen, 134
 sin intercambios, **teorema clave**, 129
 software, 147-150
 y matrices singulares, 130, 134, 138
- Descomposiciones-*QR***, 263-266
 con \mathbf{Q} como matriz ortogonal, 345
 mediante matrices Householder, 271-273, 345
 no normalizadas: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$, 264-266
 normalizadas: $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, 264-266
 y seudoinverso, 389
 unicidad (existencia única) de, 276
 y mínimos cuadrados, 266-268
- Desigualdades de matrices**, 83, 91, 495 (*véase también* Desigualdades lineales)
- Desigualdades lineales**, 520-522
- Determinantes**, 174-190
 caracterización de matrices definidas, 457-477

- cofactor- (i, j) , 174
 con límite superior, 476
 definición de, 175
 de la descomposición-LU, 184, 188-189
 de la matriz identidad, 183
 de la transpuesta, 176
 de matrices adjuntas, 188
 de matrices de 3×3 , 175-176
 de matrices de 2×2 , 33, 175
 de matrices elementales, 179
 de matrices hermitianas, 192
 de matrices triangulares, 183
 de Vandermonde, 192
 ecuaciones para gráficas, 184, 193
 evaluación de, 176, 180, 183, 184, 188-189, 193
 expansión a lo largo del renglón o columna, 177
 Hadamard, desigualdad de, 476
 interpretación geométrica, 476
 menor- (i, j) , 174
 operaciones de renglón, 178-179
 potencias de los, 184
 producto de, 181-182
 propiedades básicas, 177-180
 que representan matrices inversas, 184-186
 que representan soluciones de ecuaciones, 186-187
 software, 147-150
 y no singularidad, 33, 181
- Diagonal principal, 2
 Diferencia (*véase* Substracción)
 Dimensión, 218-220
 definición de, 219
 intervención geométrica, 197, 219
- Distancia:
 entre dos vectores, 240
 de vector a subespacio, 253, 264, 273
- Dominio, 278 (*véase también* Transformación lineal, dominio de la)
- E**
- Ecuación característica, 317-318, 359
 matriz que satisface la, 401-402
- Ecuación diferencial, 419-430
 modelo de masas acopladas, 66-72 (*véase también* Modelos, masas acopladas)
- $\dot{x} = Ax$:
 A no deficiente, 421-423
 A posiblemente deficiente, 423-425
 solución utilizando la matriz exponencial, 426
- $x = Ax + f$, 428-429
- Ecuaciones homogéneas (*véase* Sistemas homogéneos)
- Ecuaciones inconsistentes, 104-105
- Ecuaciones lineales (*véase también* Sistemas de ecuaciones)
- Eficiencia (*véase también* Medidas de trabajo):
 cómo encontrar en cálculo de matrices inversas, 42, 44, 186
- condensación de datos, 382-384
 eliminación de Gauss, 101, 110, 111, 161
 eliminación de Gauss-Jordan, 101, 104, 159
 en la solución de ecuaciones, 35, 187
 formas de renglón-escalón, 159
 programación lineal, 505-506, 517-518, 524-525
- Eigenvalores (*véase* Eigenvector; Eigenvalor)
 condición, 353-358
 de A y de A^H , relacionadas, 373
 definición de 316-317
 de la forma de Jordan, 404-406
 de matrices hermitianas, 368-370 (*véase también* Matriz hermitiana)
 de matrices permutadas, 403
 de subespacios invariantes, 311-312, 319-323
 de una matriz normal, 368-370 (*véase también* Matriz normal)
 de una matriz simétrica, 368-370 (*véase también* Matriz simétrica)
 del algoritmo QR, 352, 405
 diagonalización de formas cuadráticas, 443, 452
 diagonalización de los cocientes de Rayleigh, 461
 en representaciones simples de transformaciones, 314-315, 328-330, 364, 367
 estructura de, 405-406
 singularidad de $A - \lambda I$, 310-311, 316-324
 software, 351-353
 valores mínimos o máximos de una forma cuadrática o del cociente de Rayleigh, 462, 464-465, 470-471 (*véase también* Mín-máx, principios de; Rayleigh, principio de,)
 y descomposición de matrices, 284, 326-328, 362-366 (*véase también* Descomposición de matrices mediante eigensistemas)
- Eigenvalor (*véase* Eigensistema; Eigenvector):
 aproximación mediante el cociente de Rayleigh, 461-462
 aproximado, 357-358
 caracterización de matrices definidas, 457
 condición del, 355
 definición de, 316-317
 de una matriz singular, 325
 de una matriz triangular, 325
 dependencia funcional de los términos de una matriz, 358
 distinto, 318
 en el modelo de masas acopladas, 69-71, 311, 473
 estructura del conjunto de, 319
 generalizado, 474, 478
 método de Lanczos para encontrar el, 392
 multiplicidad (*véase* Eigenvalor, multiplicidad algebraica; Eigenvalor, multiplicidad geométrica)
 multiplicidad algebraica:
 comportamiento de las potencias de una matriz, 413

- definición de, 318
 - y multiplicidad geométrica, 324, 337, 405
- multiplicidad geométrica, 318-322
 - comportamiento de las potencias de una matriz, 413
 - definición de, 324
 - y la forma de Jordan, 398
 - y multiplicidad algebraica, 324, 337, 405-406
- para comparación de matrices diferentes, 472-473, 474
- real, 319
- simple, 318
- valores máximos o mínimos de una forma cuadrática o un cociente de Rayleigh, 462, 465-466, 470-471 (*véase también* Mín-máx, principio de; Rayleigh, principio de)
- y la transpuesta, 325
- y oscilaciones, 66-72, 310-311 (*véase también* Modelos, sistemas oscilatorios)
- y potencias de una matriz, 325
- y rango, 359
- y una matriz inversa, 325
- Eigenvector (*véase* Eigensistemas; Eigenvalor):
 - aproximado, 357-358
 - condición del, 356-357
 - conjunto asociado con un eigenvalor, 319-321
 - conjunto linealmente independiente de, 319-323, 327-328, 347, 405-406
 - conjunto ortonormal de, 347, 368-370
 - definición de, 316
 - de matrices defectuosas, 395
 - de matrices no defectuosas, 395
 - estructura del conjunto de, 319-321, 405-406
 - generalizado, 404-406
 - izquierdo, 406-408
 - maximizador o minimizador de una forma cuadrática o un cociente de Rayleigh, 462, 465-466, 470-471 (*véase también* Mín-máx, principio de; Rayleigh, principio de)
 - real, 319
- EISPACK, 352-353
- Elementos de una matriz, 1
- Eliminación de un elemento, 94
- Eliminación de una variable, 92
- Eliminación, métodos de (*véase* Gauss, eliminación de; Gauss-Jordan, eliminación de)
- Elipse, 440-441, 445
- Elipsoide, 453
- Equilibrio:
 - competencia entre lecherías, 50-51, 53, 170-171, 185
 - en redes, 60-66, 90, 171
- Equivalecia de renglón, 115
- Errores (*véase* Análisis de error retrospectivo; Inexactitudes; Modelos, errores en)
- Escalamiento, 121-122, 126
- Escalar, 7, 201
- Espacio de columna, 234-237
 - cubierto por vectores ortogonales, 264-265, 270
 - definición de, 235
 - de matrices que representan una transformación lineal, 291
 - del producto AB, 240
 - dimensión y rango del, 235
- Espacio de imagen, (*véase también* Transformación lineal, espacio de imagen)
- Espacio de renglón, 234-237
 - definición de, 235
 - dimensión y rango, 235
 - equivalencia para dos matrices, 235-237
- Espacio nulo, 280-281 (*véase también* Transformación lineal, espacio nulo)
- Espacio vectorial, 194-276 (*véase también* Espacio vectorial complejo; Espacio vectorial real)
 - complejo, 201 (*véase también* Espacio vectorial complejo)
 - \mathbb{C}^p , 202, 206 (*véase también* Espacio vectorial complejo, \mathbb{C}^p)
 - dimensión de, 219
 - definición de, 201
 - de transformaciones lineales, 278
 - dimensión de, 218-220 (*véase* Dimensión)
 - dimensionalmente finito, 219
 - ejemplos, 201-202, 278
 - espacio de producto, 202-204, 207
 - general, 200-276
 - p -dimensional, 219
 - real, 201 (*véase también* Espacio vectorial real)
 - \mathbb{R}^p , 202, 206 (*véase también* Espacio vectorial real, \mathbb{R}^p)
 - dimensión de, 219
 - subespacio de, 203-206 (*véase también* Subespacio)
 - $\{0\}$, 206, 207, 219, 228
 - Espacio vectorial complejo:
 - \mathbb{C}^p , 202, 206
 - producto interior estándar, 248
 - definición de, 201
 - isomórfico a \mathbb{C}^p , 223
 - Espacio vectorial real:
 - definición de, 201
 - producto interior estándar, 248
 - \mathbb{R}^p , 202, 206
 - Estadística, 441-442, 465, 466-467, 477
 - Evolución de sistemas:
 - modelos continuos, 419-430 (*véase también* Ecuación diferencial)
 - modelos discretos, 47-60, 289, 311-312, 409-419
 - Existencia de soluciones (*véase también* Soluciones, cómo encontrar; número de soluciones):
 - con programas lineales, 490-492, 519-520
 - de ecuaciones de transformaciones lineales, 279, 282
 - de desigualdades lineales, 519-522

de mínimos cuadrados, 268
 en sistemas de ecuaciones, 162-171, 370-371, 406-408
 e inversas derechas, 31
 e inversas (bilaterales), 31
 ejemplos de, 104-109
 equivalentes a la unicidad, 166-167
 matrices normales, 370-371
teorema clave cuando $p = q$, 166
 y rango, 163-164
Exponential de una matriz, 426-428, 435
 comportamiento para una t grande, 427-428
 de matrices hermitianas, 477
 en la solución de $\dot{x} = Ax$, 427

F

Farka, teorema de, 521-522, 523
Flops (*véase Eficiencia*)
Forma cuadrática, 440-478 (*véase también Rayleigh, cociente de*)
 curva de nivel, 401 (*véase también Curva de nivel*)
 definida: definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa, indefinida, 456-458 (*véase también Matriz, definida*)
 definición de, 451
 diagonal y diagonalización, 452
 ejemplos, 440-442
 en \mathbb{R}^2 , 442-449
 gráficas de, 444-448
 forma simple mediante el uso de eigensistemas, 443-448
 equivalencia sobre \mathbb{C}^p y \mathbb{R}^{2p} , 478
 extremamente, 459-474 (*véase también Mín-máx, principios de; Rayleigh, principio de*)
 forma simple mediante el uso de eigensistemas, 452-458
 principio de mín-máx, 470-471 (*véase también Mín-máx, principio de*)
 principio de Rayleigh, 465-466 (*véase también Rayleigh, principio de*)
 restringida a matrices hermitianas o simétricas reales, 450-451
 superficie de nivel, 453 (*véase también Superficie de nivel*)
 valor real, 450-451
 y el cociente de Rayleigh, 460-461 (*véase también Rayleigh, cociente de*)
Forma Jordan de una matriz, 335-337, 396-404
 cómo encontrar la, 399-401
 condición para la, 403
 de matrices similares, 337, 403
 existencia de la, 335-336, 398-399
 y el polinomio mínimo, 403-405
 y estructura del eigensistema, 336

Forma de Schur de una matriz, 349, 362-366, 392
Forma reducida de ecuaciones 93 (*véase también Gauss, eliminación de; Gauss, forma reducida*)
Fourier, análisis de (*véase Fourier, análisis discreto de*)
Fourier, análisis discreto de, 22-23, 35-36
Fourier, series de, 22-23, 36
Fourier, transformada de (*véase Fourier, transformada discreta de*)
Fourier, transformada discreta de, 23, 35-36
Fragmentación de matrices, 433-436
Fredholm, alternativa de, 168, 519
Frobenius, norma de, 385

G

GAN, 149 (Grupo de algoritmos numéricos)
Gauss, eliminación de (*véase también Gauss, forma reducida de, Soluciones cómo encontrar sistemas de ecuaciones*):
 costo (*véase Medidas de trabajo*)
 intercambios en, 97-99 (*véase también Pivot, selección de*)
 buen criterio de, 117-126
 necesidad de, 98-100
 posibilidad de, 97-98
 para ecuaciones, 91-93
 para encontrar matrices inversas, 109-112
 costo de, 141-142
 para la forma reducida de Gauss, 154
 para matrices aumentadas, 93-104
 algoritmo definido, 100
 para una matriz general, 154
 reducción de una matriz, 154
 software para, 147-149
 variante de Crout, 151 (*véase también Descomposiciones-LU, A = LU*)
 variante de Doolittle, 151-152 (*véase también Descomposiciones-LU, A = I_nU₀*)
 y aritmética de punto flotante, 119-126
 y descomposiciones-LU, 127-138
 y matrices definidas, 457-458, 477
Gauss, forma reducida de, 93, 154
 definición de la, 154-155
 dependencia/independencia lineal de las columnas, 232
 matriz no singular, 173
 no singularidad de la, 155-157
teorema clave de la, 155-157
Gauss-Jordan, eliminación de, 100-101
 costo (*véase Medidas de trabajo*)
 forma modificada, 104 (*véase también Renglón-escalón, reducción de*)
Gauss-Seidel, método de, 432-434
Generar, 208 (*véase también Conjunto generador*)
Gershgorin, círculos de, 353-354, 357, 358
Gram-Schmidt, proceso de, 255-258

H

Hadamard, desigualdad de, 476
 Hessenberg, forma de, 348-349, 351
 Hipérbola, 440-441, 445-446
 Hipérboleoide, 454

I

Igualdad de matrices, 3
 Inducción matemática, 44
 Inercia, ley de Sylvester sobre la, 459
 Inexactitudes:
 cómputo del punto flotante, 117-118 (*véase también* Punto flotante, aritmética de, dígito-t)
 efectos de las (*véase* Condición)
 en modelos, 73-76, 122, 299-300
 medición de las, 73-76, 122, 299-300, 388

Interpolación, 168, 170

Inversa:

de una matriz, 23-36 (*véase también* Matriz inversa; Matriz no singular; Inversa derecha; Inversa bilateral)
 de una transformación lineal, 283-284
 existencia de, 283, 309
 producto de, 285
 Inversa bilateral (*véase también* Matriz inversa; Matriz no singular):
 cómo encontrar la, 40, 109-112
 definición de, 24
 de la inversa, 28
 de un producto, 28, 32-33
 existencia de la, 26-27, 45, 166
 matriz de bloque diagonal, 191
 relacionada a la inversa izquierda y derecha, 27, 166, 170
 representación en determinantes, 32, 183-185
 transpuesta hermitiana y transpuesta, 28
 unicidad de, 26-27
 verificación de, 28

Inversa derecha:

de vectores geométricos, 197
 de la multiplicación de matrices, 11-14, 19
 de la suma de matrices, 4-5
 de la suma de vector geométrico, 197
 de la suma vectorial, 201
 del producto elemento a elemento, 19

Inversas de matrices (*véase* Inversa izquierda; Inversa derecha; Inversa bilateral)

Inversa izquierda:

de vectores geométricos, 197
 de la multiplicación de matrices, 11-14, 19
 de la suma de matrices, 4-5
 de la suma de vector geométrico, 197
 de la suma vectorial, 201
 del producto elemento a elemento, 19

Isomorfismo, 222

principio del, 224, 226
 base del, 227
 dependencia/independencia lineal, 227
 normas vectoriales, 245
 productos interiores, 252

Isomorfismo coordinado, 223 (*véase también*

Mapeo coordinado)

como transformación lineal, 278

inverso, 227

y base, 227

y dependencia/independencia lineal, 227

y normas vectoriales, 245

y productos interiores, 252

J

Jacobi, método de, 432-436

Jordan, bloque de, 397

L

Lanczos, método de, 392

Ley asociativa:

de la convolución, 22
 de la suma de matrices, 4-5
 de la suma de un vector geométrico, 197
 del producto cruz, 18
 del producto de elemento por elemento, 19
 del producto de vectores, 18
 del producto Kronecker, 18
 del producto tensorial, 18
 de multiplicación de matrices, 12-13
 de suma de vectores, 201

Ley conmutativa:

de la convolución $x * y$, 22
 de la multiplicación de matrices, 11-14, 19
 de la suma de matrices, 4-5
 de la suma de vector geométrico, 197
 de la suma vectorial, 201
 del producto elemento a elemento, 19

Ley distributiva:

de vectores geométricos, 197
 de la multiplicación de matrices, 12-14

Límite (*véase también* Convergencia):

sucesión matricial, 51-55, 87-88, 298, 299
 sucesión vectorial, 241-242

Linealmente dependiente de:

base geométrica de, 198
 definición, 208

y conjuntos linealmente dependientes, 211-212

Linealmente independiente de, definición de, 208

LINPACK, 149

Longitud de un vector, 196, 239-243 (*véase también* Norma vectorial)

M

Magnitud de un complejo, 2

Mapeo coordinado, 222-223 (*véase también* Isomorfismo coordinado)

- Marco (*véase Modelos, marco*)
 Markov, cadenas de, 47-55, 87, 89 (*véase también Matriz, de Markov*)
 Masas acopladas (*véase Modelos, masas acopladas*)
 MATLAB, 149
Matriz(es):
 adjunta, 184 (*véase también Adjunta, matriz*)
 adjugada 184 (*véase también Adjunta, matriz*)
 aumentada, 100 (*véase también Aumentada, matriz*)
 cero, 5 (*véase también Cero, matriz*)
 covarianza de una, 441-442
 componente principal de la, 465, 466-467
 cuadrada, 2
 de banda, 136, 147
 de Hilbert, 267, 273
 de Markov, 414-416, 438-439
 de un sistema de ecuaciones lineales, 29
 defectiva, 395
 definición de, 1
 definida: definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa, indefinida, 455-457
 caracterizada por determinantes, 456, 477
 caracterizada por eigenvalores, 456
 caracterizada por la eliminación de Gauss, 456-457, 477
 diagonal, 2 (*véase también Matriz diagonal*)
 diagonal principal, 2
 dominante diagonalmente (*véase Matriz, estrictamente dominante diagonalmente por columna; Matriz, estrictamente dominante diagonalmente por renglón*)
 elemento (i, j) , 1
 esparcida, 89, 136, 430
 estrictamente dominante diagonalmente por columna, 306
 estrictamente dominante diagonalmente por renglón, 305, 436
 hermitiana, 16 (*véase también Matriz hermitiana*)
 idempotencia de, 477
 irreducible, 415
 limitada, 42
 multiplicación de, 9-23 (*véase también Multiplicación, de matrices*)
 múltiplo escalar de, 6 (*véase también Múltiplo escalar de una matriz*)
 no defectiva, 356
 no negativa, 89, 414-416, 495
 inversa, 418
 teorema de Perron-Frobenius, 416-417
 no singular, 28-36 (*véase también Matriz no singular*)
 normal, 348, 350-351, 366-367 (*véase también Matriz normal*)
 potencias de, 11, 13 (*véase también Potencias de una matriz*)
 proyección de, 262-263, 269
 raíz cuadrada de, 477
 reducible, 416
 representación polar de, 477
 separada, 36-44 (*véase Matriz separada*)
 simétrica, 15 (*véase Matriz simétrica*)
 suma de, 4-5 (*véase también Suma de matrices*)
 triagonal, 137, 146
 unitaria, 305 (*véase también Matriz unitaria*)
Matrices elementales, 113-116
 determinantes de las, 179
 multiplicación anterior por, 113
 multiplicación posterior por, 115-116
 no singularidad de, 114
 producto de, para matrices no singulares, 172-173
 y operaciones de renglón, 113
Matrices semejantes, 332-334 (*véase también Matrices ortogonalmente semejantes; Matrices unitariamente semejantes; Transformación de semejanza*)
 definición de, 332
 eigensistemas de, 332-333
 no singularidad de, 333-334
 potencias de, 333-334
 y la forma Jordan, 336, 403
Matrices unitariamente semejantes, 340-349 (*véase también Matrices semejantes; Ortogonalmente semejantes, matrices; Transformación de semejanza unitaria*)
 definición de, 340
 norma de, 341
Matriz adjugada, 186-187 (*véase también Matriz adjunta*)
Matriz adjunta, 185-186
 determinante de la, 187
 de una matriz singular, 188
 fórmula para A^{-1} , 186
Matriz aumentada, 93, 100
 múltiplo-aumentada, 112-113, 141
Matriz aumentada multiplicada, 112-113, 141
Matriz columna, 1
 multiplicación de, 9
Matriz columna unitaria, 40
Matriz cuadrada, 2
Matriz de Householder, 261, 276, 342-344
 definición de, 340
 para descomposiciones-QR, 271-272, 344
 para la forma de Hessenberg, 348-349, 351
 para obtener ceros, 271-272, 343-344
 propiedades básicas de la, 342-343
 trabajo mediante, 349-350
Matriz de permutación, 133-134
 determinante de la, 184
Matriz de proyección, 262-263, 268
Matriz de renglón, 1
 multiplicación de, 9, 39
Matriz de rotación elemental, 345

- Matriz de transición, 50
 Matriz diagonal, 2
 hermitiana, 21
 no singular, 33
 simétrica, 21
 Matriz: forma de bloque triangular y forma diagonal de bloque, 396-397
 Matriz hermitiana (*véase también* Matriz normal; Matriz simétrica):
 definición de, 15
 eigenistema de la, 368-369 (*véase* Matriz normal, eigenistema de la; Mín-máx, principio de; Rayleigh, principio de)
 inversa, 33
 potencias de la, 20
 producto de la, 16, 20
 Matriz hermitiana oblicua, 21, 368, 374
 Matriz identidad, 12-13, 20
 Matriz inversa, 23 (*véase también* Matriz no singular; Inversa bilateral)
 cómo encontrarla, 40
 eliminación de Gauss, 109-112
 costo de, 141-142, 186
 forma renglón-escalón, 173
 software, 147-150
 de una matriz modificada, 42, 45, 116-117, 143-145, 448
 de una matriz perturbada, 299-301
 fórmula de la, mediante la matriz adjunta, 185
 lema o premisa de Banach, 300
 positiva definida, 459
 representada por determinantes, 185-187
 Matriz no negativa (*véase* Matriz. no negativa)
 Matriz no singular, 28-36 (*véase también* Matriz singular; Inversa bilateral)
 $A^T A$ y rango de A , 192
 como producto de matrices elementales, 172-173
 definición de, 28
 determinante de una, 181
 e independencia lineal de columnas o renglones, 235
 dominante diagonalmente, 305-306
 forma de renglón-escalón, 173
 forma reducida de Gauss de una, 173
 inversa como una, 28
 $I + P$, 300
 matrices elementales, 172-173
 perturbaciones de, 300-301, 304-305
 producto como, 173, 174
 producto de, 28
 rango de una, 169, 172
 transpuesta hermitiana y transpuesta, 28
 y el **teorema clave** sobre existencia igual a unicidad en ecuaciones, 166
 Matriz normal, 347, 349-350, 366-367 (*véase* Matriz hermitiana; Matriz simétrica)
 definición de la representación diagonal de transformación, 367
 eigenistemas de una, 368-370
 posibilidad de solución de ecuaciones, 370, 371
 similitud unitaria a una matriz diagonal, 366-367
 Matriz nula, 5 (*véase también* Cero, matriz)
 Matriz ortogonal, 44-45, 338-349 (*véase también* Matriz unitaria)
 como producto de matrices de Householder, 348
 definición de, 339
 matriz de rotación elemental, 347
 matriz Householder, 342 (*véase también* Matriz de Householder)
 no como producto de rotaciones, 350
 Matriz separada, 36-44
 álgebra de la, 37-38
 definición de, 37
 en los modelos, 38
 inversa de la, 41, 42, 45
 transpuesta de la, 40-41
 Matriz simétrica (*véase también* Matriz hermitiana; Matriz normal):
 compleja, 351
 definición de, 16
 eigenistema de una, 368-369
 inversa, 33
 potencias de una, 21
 producto de una, 16, 20
 Matriz simétrica oblicua, 21 (*véase también* Matriz hermitiana oblicua)
 determinante, 183
 Matriz singular (*véase también* Matriz no singular; Inversa bilateral)
 $A^T A$ y rango, 171
 definición de, 28
 producto como, 174
 Matriz triangular (*véase* Matriz triangular inferior; Matriz triangular superior; Matriz unitaria triangular inferior; Matriz unitaria triangular superior)
 Matriz triangular inferior, 2
 determinante de la, 183
 inversa de la, 135
 producto de la, 135
 Matriz triangular superior, 2
 determinante de, 183
 inversa de, 135
 producto de, 135
 Matriz unidad (*véase* Matriz identidad)
 Matriz unitaria, 338-349 (*véase también* Matriz ortogonal)
 definición de, 340
 más cercana a una matriz dada, 385
 propiedades básicas de una, 340-341, 360
 Matriz unitaria triangular inferior, 2 (*véase también* Matriz triangular inferior)
 Matriz unitaria triangular superior, 2 (*véase también* Matriz triangular superior)
 Medidas de trabajo, 138-147 (*véase también* Eficiencia)

- con matrices Householder, 349-350
 descomposición en valor singular, 381
 en la eliminación de Gauss, 139-141, 161-162
 matrices de banda, 147
 matrices tridiagonales, 147
 en la eliminación de Gauss-Jordan, 141
 forma modificada de, 161-162
 reducción de renglón-escalón, 161-162
 solución de ecuaciones mediante el uso de $A = P'LU$, 140-142
 solución de sistemas de ecuaciones modificados, 141-145
 Mejor aproximación, 253
 uso de programación lineal, 525-526
 Menor, 175
 Métodos iterativos, 89, 430-437 (*véase también* Gauss-Seidel, método de; Jacobi, método de; Sobre-relajaciones sucesivas, método de)
 Mínimos cuadrados, 73-81, 267-269
 aritmética de punto flotante, 274
 descomposiciones-QR, 267-269
 descomposición en valor singular, 386-388
 ecuaciones equivalentes de los, 76, 78, 80, 89, 170, 276
 existencia de soluciones de los, 267
 ponderados, 78-79
 seudoinversos, 387-388
 y proyección ortogonal en espacios nulos, 502
 Mín-máx, principio de, 468-474
 para el segundo eigenvalor mayor, 468-470
 para todos los eigenvalores, 470-471
 teorema clave del, 470-471
Modelos:
 competencia de dentífricos, 53
 competencia entre lecherías, 47-55, 81, 170-171, 184, 322, 326
 eigenistema de la, 312-313
 forma de Schur de la matriz que representa la, 364-365
 competencia entre zorros y gallinas, 56-59, 88-89, 273, 289, 297, 403-404
 versión continua de la, 420, 422-423, 424
 comportamiento cualitativo de, 56
 crecimiento poblacional, 55-59
 dieta balanceada, 86-87
 embarques de pan, 526
 errores en los, 74, 76, 299-300
 horario de una biblioteca, 525
 ingresos-utilidad, 379
 marco, 60-66
 masas acopladas, 66-73, 311, 325, 361-362, 371-373, 421, 473
 mínimos cuadrados y cuadrados generales, 73-81, 88, 267, 385-386
 molécula triatómica lineal, 72-73
 movimiento lineal, 74-76
 patrones de ocupación, 52-53
 planeación de la producción, 81-86, 491-493
 población estadunidense, 79-81, 276, 390
 poblaciones en competencia (*véase* Modelos, competencia entre zorros y gallinas)
 problema en los transportes, 526
 procesamiento de imágenes, 382-384
 reacciones químicas, 302-303, 379, 380
 red electrónica, 63, 88, 437-438
 red mecánica, 60-66
 redes, 60-66
 referencias sobre, 87-89
 sistema económico, 63-65, 88
 sistemas oscilatorios, 66-72, 88, 310-311, 325, 361-362, 371-373, 463, 472, 473
 subsistemas de, 142
 suplementos alimenticios, 112
 vibraciones (*véase* Modelos, sistemas oscilatorios)
 Moore-Penrose, inversa generalizada de, 387-391
 (*véase también* Seudoinversa)
Multiplicación (*véase también* Producto):
 de matrices, 9-23
 definición de, 9
 desde la izquierda, 11
 desde la derecha, 11
 de transpuestas hermitianas, 15, 20
 orden de, 11-15
 propiedades de, 11-23
 resultado hermitiano de, 16
 resultado simétrico de, 16
 transpuestas, 15, 20
 y determinantes, 181-182
 por un escalar (*véase también* Múltiplo escalar de una matriz)
 de vectores geométricos, 197
 en transformaciones lineales, 278
 vectores, 212, 214
 transformaciones lineales en la, 278
Multiplicación posterior, 11
Multiplicadores, 128
Múltiplo escalar (*véase* Multiplicación, por un escalar)
Múltiplo escalar de una matriz:
 definición del, 7
 transpuestas hermitianas y transpuestas, 15

N

- Negación:**
 matricial, 5, 6
 vectorial, 212, 214
Negativo (*véase* Negación)
Norma (*véase* Norma de una matriz; Norma de una transformación; Norma vectorial)
Norma de una matriz, 293-298
 definición de, 294
 eigenvalores, 319-321
 equivalencia de la, 297-298
 fórmulas de la, 297, 385, 463, 478

mayor eigenvalor más cercano, 393
y potencias de una matriz, 297

Norma de una transformación, 292-293
como norma vectorial, 298
definición de, 292
de potencias, 294
del producto, 294
inducida por normas vectoriales, 293
propiedades básicas de, 293
transformación cero, 294
transformación de identidad de, 294

Norma vectorial, 240-245
definición de, 241
desigualdad triangular de una, 241
en \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p , 241
en el espacio de todas las transformaciones lineales, 298
equivalencia en \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p , 243
inducida por producto interno, 248, 250

Núcleo, 280-281 (*véase también* Transformación lineal, espacio nulo de la)

Número complejo, 2

Número condicional, 150, 302-305 (*véase también* Condición)

Número de soluciones (*véase también* Unicidad de soluciones)
ecuaciones de transformaciones lineales, 308
sistemas de ecuaciones:
 revisión previa, 109
 y rango, 164-165

Número en punto flotante, 117-118

Número imaginario, 2

Número imaginario puro, 2

O

Operaciones de renglón, 112-117 (*véase también* Operaciones elementales de renglón)

Operaciones elementales de renglón, 112-117
y determinantes, 178-179
y matrices elementales, 113
teorema clave sobre las, 116

Operaciones en punto flotante (*véase* Eficiencia; Punto flotante, aritmética de, dígito-*t*)

Ortonormalidad, 249-276 (*véase también* Conjunto ortogonal; Vectores ortogonales)

Ortogonalmente semejantes, matrices, 340-349
(*véase* Matrices semejantes; Matrices unitariamente semejantes; Transformación mediante semejanza ortogonal)
definición de, 340

Oscilaciones (*véase*, Modelos, sistemas oscilatorios)

P

Perpendicular, 196 (*véase también* Vectores ortogonales)

Perron-Frobenius, teorema de, 415-416

Pivote, 100
selección de, 117-126 (*véase también* Gauss, eliminación de, intercambios en la.)
 en pivoteo completo, 122-123
 en pivoteo parcial, 122-123
y matrices definidas, 457-458, 477

Planeación de producción (*véase* Modelos, planeación de producción)

Polinomio característico, 316-317, 332-333, 359, 401-402, 437

Polinomio mínimo, 403-404

Posibilidad de solución (*véase* Existencia de soluciones)

Potencias de una matriz:
comportamiento de las, 12, 19, 54, 57, 55-59, 81, 289, 299, 409-419
definición de las, 11, 13, 33
determinantes de las, 185
ley commutativa de las, 11, 13, 33
matrices de Markov, 414-416
matrices no defectivas, 410-412
matrices no negativas, 414-416
matrices posiblemente defectivas, 412-414
y semejanza, 333-334

Premultiplicación, 11

Primera columna, 107

Primera variable, 107

Prinicio Mín-máx (*véase* Mín-máx, principio de)

Problema bien acondicionado, 302

Problema mal acondicionado, 126, 300

Procesamiento de imagen, 382-384

Producto (*véase también* Multiplicación; Múltiplo escalar; Producto interior):
convolución, 21-22, 35-36
cruz, 17
elemento por elemento, 19, 22, 35-36
Kronecker, 17, 39
matriz estándar, 19-22 (*véase también* Multiplicación de matrices)
tensor, 18, 43
vectorial, 18

Producto interior, 245-251
definición de, 247
estándar en \mathbb{R}^p y \mathbb{C}^p , 248
norma, inducida por el, 248, 250

Programa lineal, 89, 479-527
interpretación geométrica
modelo de planeación de producción, 81-87, 479-495

- para minimizar $\|Ax - y\|_1$ o $\|Ax - y\|_\infty$, 526-527
- problema de transporte, 526
- problema general de un, 495-523
- definición del, 495-496
 - degenerado y no degenerado, 497, 524
 - dirección del gradiente proyectado, 501-502
 - dualidad, 514-523
 - complementariedad, 526
 - teorema clave**, 519-520
 - eficiencia en la solución de, 505-506, 517-519
 - existencia del vector básico óptimo, 499-500, 419-420
 - forma de variable remisa, 496
 - forma estándar, 495-496
 - matrices extendidas, 496
 - método simplex, 503-511
 - convergencia del, 505
 - cuadro del, 503-505
 - implementación estándar, 503-505
 - implementación revisada, 505-507
 - métodos similares al de Karmarkar, 501-502
 - programa lineal dual, 514-521
 - primo, agregar una restricción al, 518-519
 - primo, vector óptimo del cuadro final para el, 515-517
 - programa lineal primo, 514-515
 - unicidad del vector óptimo, 512
 - variable artificial, 509-511
 - variable básica, 498
 - variable no básica, 498
 - vector básico factible, 497-498
 - vector factible, 596
 - existencia del, 519-521
 - vector inicial básico factible, 508-511
 - vector óptimo, 496
- problema modelo, 479-480
- solución básica factible, 482
- descripción geométrica, 480-481
 - dirección del gradiente proyectado, 487-488, 489, 494
 - dualidad en la aplicación del, 490-491
 - dualidad en la geometría, 491-492
 - forma de variable remisa, 481-482, 494
 - matrices extendidas, 482
 - métodos interiores, 481, 487, 489-491
 - método similar al de Karmarkar, 489-491
 - método simplex, 483-485
 - procedimientos para el, 485
 - programa lineal dual, 492-493
 - programa lineal primo 492
 - solución básica, 482
 - solución factible, 482
- variable básica, 482
- variable no básica, 482
- Programación lineal 479-526 (véase también Programa lineal)
- Proyección ortogonal, 252-276
- definida por un conjunto ortogonal, 253
 - en el lenguaje matricial, 261-263, 269
 - interpretación geométrica de la, 253
 - sobre un espacio columna o espacio nulo, 393, 502
 - y gradientes proyectados en programación lineal, 487-488, 489-490
 - y longitud, 259
- Punto flotante, aritmética de, dígito-*t*, 117-118
- determinantes, 189, 192
 - eliminación de Gauss, 119-125, 307
 - mínimos cuadrados, 276
 - que produce una base ortonormal, 260
 - transformaciones de semejanza, 303-304
- Punto más cercano, 252
- ## R
- Radio espectral, 307
- como matrices hermitianas de norma 2, 478
 - convergencia de métodos iterativos del, 434-436
 - matrices no negativas del, 311-312
 - potencias de matrices del, 308-309
- Rango, 158-160
- aproximación de rango mínimo, 382-384
 - aproximado, 382
 - condición de, 190-191
 - de A^T , 175, 235
 - de AA^T , 175
 - de matrices cercanas, 382-384
 - de una matriz multiplicada por una matriz no singular, 174
 - de una submatriz, 190
 - definición de, 158
 - del producto AB , 215
 - dimensión del espacio renglón/columna, 235
 - existencia de la inversa izquierda, 173, 174-175
 - existencia de la inversa derecha, 172-173, 175
 - existencia de soluciones, 162-174
 - no singularidad del, 170, 173
 - sensibilidad, 190-191
 - teorema clave** sobre la existencia igual a la unicidad, 166
 - unicidad de soluciones, 163-164
 - valores singulares de, 381-384
 - y multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$
 - y número de soluciones, 163-164
 - y submatrices no singulares, 277
- Rango de renglón, 158 (véase también Rango)

Rango de una columna, 158-159 (*véase también Rango*)
 Rayleigh, cociente de, 460-462
 definición del, 461
 diagonal y diagonalización, 461
 en la aproximación de eigenvalores, 462-463
 extremamente, 462, 464-465, 469-470
 principio de mín-máx, 469-470 (*véase también Min-máx, principio de*)
 principio de Rayleigh, 464-465 (*véase también Rayleigh, principio de*)
 y formas cuadráticas, 460-461
 Rayleigh, principio de, 459-467
 falsedad para matrices no hermitianas, 478
 para los eigenvalores mayores y menores, 462-463
 para todos los eigenvalores, 464-465
 teorema clave del, 464-465
 Red (*véase Modelos, redes*)
 Redondeo de números, 118
 Reflexión, 341-344
 Reflexión de Householder, 341-344
 Relación de equivalencia, 116, 332
 Renglón, 1
 Renglón-escalón, forma de, 156
 definición de, 159
 igualdad de espacios renglón, 235-237
 matrices no singulares, 174
 reducida, 159
 teorema clave, 160
 unicidad, 160
 Renglón-escalón, reducción de, 159 (*véase también Gauss-Jordan, eliminación de, forma modificada*)
 Renglón o columna no cero, 154
 Representación matricial de una transformación lineal, 286-291
 cambio de base de la, 288-290
 como un isomorfismo, 308
 definición, **teorema clave**, 287
 producto de transformaciones, 291
 simple, 289-290
 eigensistemas, 310-311
 transformación definida por $\mathbf{A}\mathbf{v}$, 291
 transformación inversa de la, 291
 Residual, 74-79
 Resolución (*véase Soluciones, cómo encontrar*)
 Resonancia, 371-373
 Restricción, 83
 Rotación, 345-346
 Rotación elemental, 345-346

S

Schur, descomposición de, 362-363
 Schwarz, desigualdad de:
 productos internos generales, 248
 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, 241
 igualdad en, 275
 Sección cónica, 440-441, 445-446, 474-475
 Sensibilidad (*véase Condición*)
 Seudoíversa, 387-391
 de la descomposición QR normalizada, 389
 propiedades de la, 391
 Si y sólo si, 3
 Sistema bi-ortogonal, 406-408
 eigenvectores y eigenvectores izquierdos de un, 407
 Sistemas de ecuaciones (*véase también Existencia de soluciones; Soluciones, cómo encontrar; Unicidad de soluciones*):
 dispersas, 388-389
 modificada, 109-111, 138-142
 representación matricial de, 29
 Sistemas homogéneos, 166, 206
 para transformaciones lineales, 252
 teorema clave de la existencia es igual a la unicidad, 167
 Sobre-relajaciones sucesivas, 390-394
 Sobre-relajaciones sucesivas, método de (SRS, método de), 390-394
 Software:
 eigensistemas, 351-353
 eliminación de Gauss, 147-149
 Solución diferente de cero, 67-69
 en sistemas homogéneos, 168
 y determinantes, 184
 Solución general:
 de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 166, 370-371, 407-408
 de $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$, 268, 276, 486-487
 de $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, 308
 Soluciones (*véase Existencia de soluciones; Número de soluciones; Soluciones, cómo encontrar; Unicidad de soluciones*)
 Soluciones, cómo encontrar (*véase tambien Existencia de soluciones*):
 con programas lineales (*véase Programa lineal*)
 de mínimos cuadrados, 170, 267-276, 386-388
 en sistemas de ecuaciones:
 costo (*véase Medidas de trabajo*)
 eliminación de Gauss para matrices aumentadas, 91-101
 eliminación de Gauss para ecuaciones, 90-92
 esparcidas, 430-431
 mediante métodos iterativos, 430-437

- sistemas modificados, 109-111, 138-142
Subespacio invariante, 311-312, 319-324 (*véase* Eigensistemas; Eigenvectores)
 definición de, 316-317
 dimensión del, 324
 dimensión mínima del, 405-406, 408
Subespacio, teorema de, 205
Submatriz, 37
 de eigenvectores (con $\mathbf{0}$) asociados con un eigenvalor, 219-221
 definición, 204
 justificación geométrica, 198
 principal, 128
 producto interno en, 250
 ortogonal a un subespacio dado, 275 (*véase también* Complemento ortogonal)
 ortogonal a un vector, 250, 343
 rango, 190
 subespacio, 204-206
 verificación del, 205
Substracción:
 matricial, 5
 transpuestas hermitianas y transpuestas, 15
 vectorial, 201
Sucesión acotada, 410-411
Suma:
 de matrices, 4-5
 transpuestas hermitianas, 15
 transpuestas, 15
 de vectores geométricos, 195-197
 transformaciones lineales de la, 278
 vectorial, 182
 Suma de columna máxima absoluta, 297
 Suma de renglón máxima absoluta, 297
 Suma, leyes de la, 4-5
Superficie de nivel, 453-455
 relación entre aquélla en x , y aquélla en ξ , 453-454
Supremo, 292
Sustitución retrospectiva, 94
Sylvester, ley de inercia de, 459
- T**
- Teoremas de la alternativa**, 521-522, 523
Término- (i, j) , 1
Transformación adjunta, 283-284 (*véase también* Transformación lineal, adjunta)
Transformación de semejanza unitaria, 340-349
 (*véase también* Matrices unitariamente semejantes; Transformación de semejanza; Transformación de semejanza ortogonal)
 imagen, 286
 definición de, 340
 como una transformación de semejanza, 307
Transformación lineal, 277-309
 adjunta, 283-284
 complemento ortogonal del espacio de la imagen, 286
 de la adjunta, 286
 de un producto, 309
 dimensión del espacio de la imagen, 309
 transformación inversa, 309
 biunívoca, 285
 cero, 278, 284
 contradominio de la, 278
 definición de, 278
 definida por $A\mathbf{v}$, 278
 adjunta, 284, 409
 espacio de la imagen, 285
 espacio nulo, 285
 inversa, 285
 representación matricial, 291
 mediante eigensistemas, 329-330
 mediante bases ortonormales, 364, 369, 384
 dominio de, 278
 base del, 281-282, 309
 dimensión del, 280-281
 ejemplos de, 278
 en, 279
 espacio de la imagen, 279-281
 base del, 280-281
 definición del, 281
 dimensión del, 280-281
 espacio correspondiente a columna de la matriz, 291
 posibilidad de solución de las ecuaciones, 279
 y el espacio nulo, 280-281, 309
espacio nulo de la, 280-281
 base del, 280-281
 complemento ortogonal del, 286
 definición de, 280
 dimensión del, 280-281
 existencia de la transformación inversa, 309
 existencia única; Unicidad de solución de las ecuaciones, 281, 309
 y el espacio de la imagen, 280-281, 309
 y uno a uno, 285
 identidad de la, 284
 inversa, 283-284 (*véase también* Inversa, de una transformación lineal)
 norma de la, 292 (*véase también* Norma de una transformación)
 núcleo 281 (*véase también* Transformación lineal, espacio nulo de la)
 representación matricial, 286-291 (*véase tam-*

bién Representación matricial de una transformación lineal)
representación mediante matrices, 286-291
 (*véase también Representación matricial de una transformación lineal*)
Transformación ortogonal de semejanza, 340-349
 (*véase también Ortogonalmente semejantes, matrices; Transformación semejante; Transformación semejante unitaria*)
Transformación semejante, 332-334 (*véase también Matrices semejantes; Transformación mediante semejanza ortogonal; Transformación unitaria de semejanza*)
 definición de, 332
Transpuesta (*véase también Transpuesta hermitiana*):
 definición de, 14
 sumas, diferencias, múltiplos escalares, y productos, 15
Transpuesta hermitiana (*véase también Transpuesta*):
 definición de la, 14-15
 y sumas, diferencias, múltiplos escalares y productos, 15
Traza, 8, 9, 45

U

Unicidad de soluciones:
de ecuaciones de transformaciones lineales, 279-280, 282

programas lineales, 512
sistemas de ecuaciones:
 ejemplos de, 104-109
 equivalente a la existencia, 166-167
 inversas bilaterales, 31
 inversas izquierdas, 31
 rango de, 164-165, 168, 170
 sistemas homogéneos, 165, 168
teorema clave para $p = q$, 166

V

Valor esperado, 442-443
Variable aleatoria, 442-443, 465
Varianza, 442-443, 465, 466-467
Varianza total, 442-443, 465
Vector, 194, 276
 de coordenadas-*B*, 195, 199
 definición de, 202
 geométrico, 194-201
Vector de coordenadas-*B*:
 definición de, 222
 en la representación de transformaciones lineales, 287-290
Vector normalizado, 249
Vectores ortogonales, 249
Velocidad de avión relativa a la Tierra, 201
Velocidad en el aire, 201
Vibración (*véase Modelos, sistemas oscilatorios*)

Z

Zorro-gallina, competencia entre (*véase Modelos, competencia entre zorros y gallinas*)