1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad a_{ij}(t) \in C(a,b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau} \qquad \forall t \in (a,b),\ t_0 \in (a,b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=a_{11}W(t)} + \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}}_{=a_{nn}W(t)}$$

1) решения лин. завис $\Rightarrow$ $W(t) = 0$ на (a,b)

2) решения лин. независ:

$\dot{x}_1 = Ax_1 \ \dots \ \dot{x}_n = Ax_n$, ФМР $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\dot{\Phi}(t) = A\Phi$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1}$$
$$\dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2}$$
$$\dots$$
$$\dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn}$$

$$(\dot{x}_{11}\, \dot{x}_{12}\, \dots\, \dot{x}_{1n}) = a_{11}(x_{11}\, x_{12}\, \dots\, x_{1n}) + a_{12}(x_{21}\, x_{22}\, \dots\, x_{2n}) + \dots + a_{1n}(x_{n1}\, x_{n2}\, \dots\, x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=W(t)} + a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0} + \dots + a_{1n}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\dot{W}(t) = trA \cdot W(t) \qquad W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau}$$

□

2 Формула Остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a,b)$; $y_1, y_2, \dots, y_n$ - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть $y_1, \dots, y_n$ - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)}d\xi}$$

Доказательство. 1) $y_1, \dots, y_n$ лин завис $\Rightarrow$ $W(x) = 0$

2) $y_1, \dots, y_n$ - лин независ

$$t = x \; x_1 = y \; x_2 = y' \; \dots \; x_n = y^{n-1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = y^n = -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} x_n - \dots - -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} x_1 \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} d\tau} \qquad W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}$$

□

Замечание.

$$W(x_0) = 0 \to W(x) = 0 \text{ на } (a, b)$$
$$W(x_0) \neq 0 \to W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $W(x) = y_1(x) = y_1(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(\xi)}{x_1(\xi)} d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение
   (a) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x) \quad e^{ax} \quad x^a$
   (b) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi} \to y_2(x)$ - линейно незав. решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. однор. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \qquad b_0(x), b_1(x) \in C(a,b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$p(x) > 0$ на (a,b), $p(x) \in C'(a,b)$, $q(x) \in C(a,b)$.

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} > 0$, $p(x) \in C'(a,b)$, $q = b_0 e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} \in C(a,b)$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \qquad r(x) \in C(a,b)$$

(a) $b_0 \in C(a,b)$ и $b_1(x) \in C'(a,b)$ замена $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $b_0 = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, +\infty)$

$$y' = \varphi' z + \varphi z' \qquad y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''$$
$$x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi' z + 2\varphi z' + \varphi z = 0$$

Зануляем коэфициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$
$$\varphi' = -\frac{1}{x^2} \qquad \varphi'' = \frac{2}{x^2}$$
$$\frac{2}{x^2} z + z'' - 2z\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z = 0$$
$$z'' + \frac{1}{x} z = 0$$

(b) $b_0(x)$ и $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' \qquad y'' = \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2$$
$$py'' + p'y' + qy = 0 \qquad p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy = 0$$
$$p\psi'' + p'\psi' = 0 \qquad (p\psi') = 0 \qquad p\psi' = 1$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi)} \to$ сторого монот и непр, $\exists$ обратная функция $x = x(t)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \qquad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p\frac{1}{p^2}\ddot{y} + qy = 0$$
$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$

(c) Преобразование Фурье-Лиувилля - привидение к канон. виду

i. $t = \varphi(x)$ к виду $\ddot{y} + c(t)\dot{y} \pm y = 0$

ii. $c(t) \in C'(t_1, t_2)$, $y(t) = \psi(t)z(t)$ к канон. виду $\ddot{y} + \alpha(t)y = 0$

Пример.

$$xy'' + 2y' + y = 0 \quad x > 0$$
$$y' = \dot{y}\varphi'(x) \qquad y'' = \dot{y}\varphi''(x) + \ddot{y}\varphi'^2$$
$$x\dot{y}\varphi'' + x\ddot{y}\varphi'^2 + 2\dot{y}\varphi' + y = 0$$
$$x\varphi'^2 = 1 \qquad \varphi' = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \varphi = 2\sqrt{x}$$
$$t = 2\sqrt{x} \qquad \varphi'' = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}$$
$$\ddot{y} + \dot{y}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + y = 0$$
$$\ddot{y} + \dot{y}\frac{3}{2\sqrt{x}} + y = 0 \qquad \ddot{y} + \dot{y}\underbrace{\frac{3}{t}}_{c(t)} + y = 0$$

При $t > 0$ непр дифф., делаем второй шаг

$$y(t) = z(t)\psi(t)$$
$$\ddot{z}\psi(t) + 2\dot{z}\dot{\psi} + z\ddot{\psi} + \frac{3}{t}\dot{z}\psi + \frac{3}{t}z\dot{\psi} + z\psi = 0$$
$$2\dot{\psi} + \frac{3}{t}\psi = 0 \qquad \psi = \frac{1}{t^{3/2}}$$
$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{1}{t^{5/2}} \qquad \ddot{\psi} = \frac{15}{4}\frac{1}{t^{7/2}}$$
$$\ddot{z}\frac{1}{t^{3/2}} + z\left(\frac{15}{4}\frac{1}{t^{7/2}} - \frac{9}{2}\frac{1}{t^{7/2}} + \frac{1}{t^{3/2}}\right) = 0$$
$$\ddot{z} + z\left(1 - \frac{3}{4t^2}\right) = 0 \qquad t > 0$$

4.2 Асимптотический вид решения

$$\ddot{y} + y(m + \beta(t)) = 0 \qquad m \neq 0$$

Теорема 4.1. Если $\beta(t)$ непр на $[t_0, +\infty)$ и $\beta(t) = O(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$ при $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$, то

- $m > 0$: $y(t) = C_1 \cos\sqrt{m}t + C_2 \sin\sqrt{m}t + O(\frac{1}{t^{\varepsilon}})$
- $m < 0$: $y(t) = C_1 e^{\sqrt{|m|}t}\left(1 + O(\frac{1}{t^{\varepsilon}})\right) + C_2 e^{-\sqrt{|m|}t}\left(1 + O(\frac{1}{t^{\varepsilon}})\right)$

Пример.

$$\ddot{z} + z\left(1 - \frac{3}{4t^2}\right) = 0 \qquad t > 0$$

$$m = 1 \qquad \beta(t) = -\frac{3}{4t^2} \quad \text{непр } (0, +\infty) \quad \varepsilon = 1$$

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + O(t)$$

$$t = 2\sqrt{x} \qquad y(t) = z(t)\frac{1}{t^{3/2}}$$

$$y(t) = C_1 \frac{\cos t}{3^{3/2}} + C_2 \frac{\sin t}{t^{3/2}} + O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right)$$

$$y(x) = \tilde{C}_1 \frac{\cos 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + \tilde{C}_2 \frac{\sin 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$$

Верно при $x \to \infty$

4.3 Исследование нулей решения уравн. второго порядка

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \qquad b_0, b_1 \in C(a, b)$$

Определение 4.1. Точка x_0 называется нулём решения $y(x)$, если $y(x_0) = 0$

Теорема 4.2. Пусть $y(x)$ нетривиальное решение и $y(x_0) = 0$ тогда $y'(x_0) \neq 0$

Доказательство. Пусть $y'(x_0) = 0$, получаем задачу Коши $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ единст. реш., противоречит с нетрив реш. □

Теорема 4.3. Любое нетривиальное решение может иметь на отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ не более конечного числа нулей.

Доказательство. Пусть число нулей бесконечно на $[c, d]$, счётное подмнож $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ограниченная послед, выделяем сход. подпослед. $x_{n_k} \to x_0 \in [c, d]$.

$y(x_{n_k}) = 0$, $y(x_{n_k}) \to y(x_0) = 0$ непр. $y(x)$

$y(x)$ - решение $\Rightarrow \exists y'(x_0)$

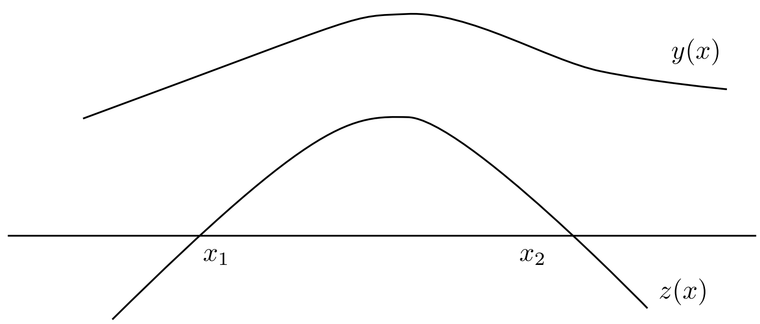
$$y'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

Противоречие с пред. теоремой. □

Теорема 4.4 (Теорема сравнения Штурма)**.** Пусть $(p(x)z')'+q(x)z=0$, $(p(x)y')'+Q(x)y=0$, $p(x)\in C'(a,b)$, $q,Q\in C(a,b)$, $p(x)>0$ на (a,b) и пусть x_1 и $x_2\in(a,b)$ два последовательных нуля нетривиального решения $z(x)$ и $q(x)\le Q(x)$ на $[x_1,x_2]$.

Тогда любое решение $y(x)$ имеет хотя бы один нуль на $[x_1,x_2]$.

Доказательство.



Пусть $y(x)\ne 0$ на $[x_1,x_2]$

$$(pz')'y+qzy'-(py')'z-Qyz=0$$

$$\underbrace{p'z'y+pz''y-p'y'z-py''z}_{(p(z'y-zy'))'}+yz(q-Q)=0 \quad \int_{x_1}^{x_2}$$

$$p(z'y-zy')\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}yz(q-Q)dx=0$$

$$\underbrace{\underbrace{p(x_2)}_{>0}(\underbrace{z'(x_2)}_{<0}\underbrace{y(x_2)}_{>0}-\underbrace{z(x_2)}_{=0}y'(x_2))-\underbrace{p(x_1)}_{>0}(\underbrace{z'(x_1)}_{>0}\underbrace{y(x_1)}_{>0}-\underbrace{z(x_1)}_{=0}y'(x_1))}_{<0}+$$

$$+\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{yz}_{\ge 0}\underbrace{(q-Q)}_{<0}dx}_{\le 0}=0$$

Противоречие. □

Следствие 4.1 (Теорема о премежаемости нулей)**.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линейно независимых решения $(p(x)y(x))' + q(x)y = 0$, $p \in C'(a,b)$, $p > 0$ на (a,b), $q \in C(a,b)$ и x_1 и x_2 два последовательных нуля $y_1(x)$ тогда $y_2(x)$ имеет ровно один нуль на (x_1, x_2).

Доказательство. Пусть $y_1(x_0) = 0$ и $y_2(x_0) = 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Противоречие с линейной независ.

$$(py_1')' + qy_1 = 0 \qquad (py_2')' + qy_2 = 0$$

По теореме Штурма y_2 имеет хотя бы один нуль на (x_1, x_2).

Пусть два нуля $y_2(x_3) = y_2(x_4) = 0$, тогда по теореме сравнения Штурма $\exists x_5 : y_1(x_5) = 0$ противоречит с соседством x_1 и x_2. □

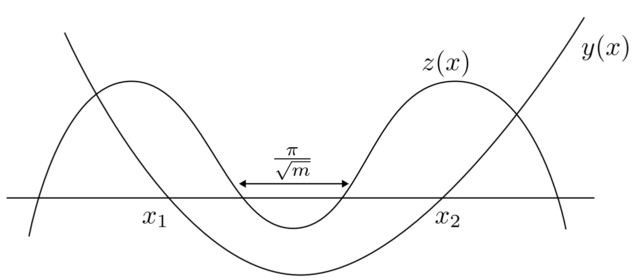
4.4 Оценка расстояние между нулями

Теорема 4.5. Пусть $y''+qy = 0$, $q \in C(a,b)$, тогда для любого нетривиального решения расстояние между соседними нулями удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \Delta \le \frac{\pi}{\sqrt{m}} \qquad 0 < m \le q(x) \le M \text{ на } (a,b)$$

Доказательство. Пусть $\Delta > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$

$$z'' + mz = 0 \qquad z(x) = \sin(\sqrt{m}(x + \alpha)) \qquad \forall \alpha$$



$m \leq q$ по т. ср. Штурма между двумя нулями $z(x)$ $\exists$ нуль $y(x)$. Противоречие.

Аналогично $\Delta < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ $\square$