1 Некоторые свойства абсолютно инт функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале (a, b), если выполняются два условия:

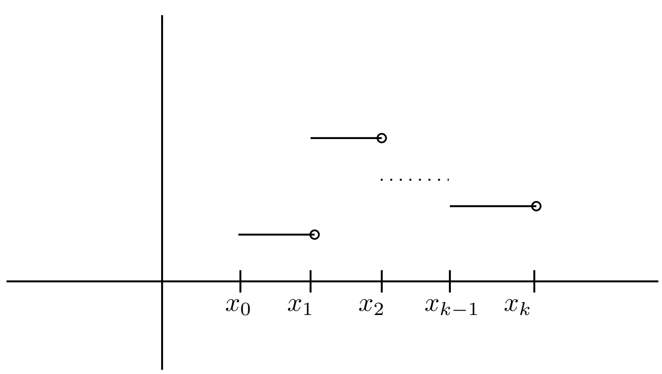
1. $\exists x_0, x_1, \ldots, x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$, что на любом отрезке $[\xi, \eta]$ из (a, b), не содерж x_i функция $f(x)$ интегрируема по Риману.
2. $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном (a, b). Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна и ограничена на (a, b).
$f(x)\varphi(x)$ - абсолютно интегрируемо на $[a, b]$

Доказательство. а) Рассмотрим $\forall [\xi, \eta] \subset (x_{i-1}, x_i)$. На нём $f(x)$ и $\varphi(x)$ - интегрируема по Риману, следовательно $f(x)\varphi(x)$ инт. по Риману $\Rightarrow 1$.
б) Так как $\varphi(x)$ - ограничена то $\exists M : |\varphi(x)| \le M$ на (a, b). Тогда $|f(x)\varphi(x)| \le |f(x)|M$ на (a, b). Т.к. $\int_a^b |f(x)| dx$ - сход., то $\int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx$ - сход. по признаку сравнения $\Rightarrow 2$.
$\Rightarrow f(x)\varphi(x)$ - абс. инт. на (a, b) $\square$

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$ определённая на $\mathbb{R}$ называется ступенчатой если $\exists$ числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \ x \in (-\infty, x_0) \cup [x_k, +\infty) \end{cases}$$



Замечание. Если положить

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0,\ x \notin [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

то $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1.1 (О приближении абс инт функций ступенчатыми)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на конечном или бесконечном (a, b) тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ ступенчатая функция $\varphi(x) : \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть для простоты записи у функции имеются только две особенности в точках a и b, т.е. $f(x)$ - инт по Риману на $\forall[\xi, \eta]$ из (a, b).

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Из абсолютной инт. $f(x)$ следует $\exists$ таких $[\xi, \eta] \in (a, b)$:

$$\int_a^\xi |f(x)|dx + \int_\eta^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $f(x)$ инт. по Риману на $[\xi, \eta]$ то для рассмотренного $\varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall$ разб. отр. $[\xi, \eta]$ $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ $(|\tau| < \delta)$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

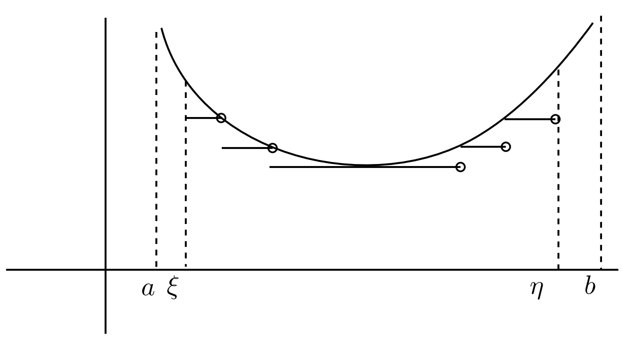
Выполняется $\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - \sigma_\tau\right| < \varepsilon/2$, где σ_τ - сумма Дарбу.

$\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$, где $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i$ $(m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$.

Также $\int_\xi^\eta f(x)dx \ge s_\tau \Rightarrow 0 \le \int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau \le \varepsilon/2$.

Рассмотрим ступенчатую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, x \notin [\xi, \eta) \end{cases}$$



Отметим: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i = \int_\xi^\eta f(x)dx$, $\varphi(x) \le f(x)$ на $[\xi, \eta]$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int_a^\xi |f|dx + \int_\xi^\eta |f - \varphi|dx + \int_\eta^b |f|dx$, но $\int_\xi^\eta |f-\varphi|dx = \int_\xi^\eta (f-\varphi)dx = \int_\xi^\eta f dx - s_\tau$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ ◻

Теорема 1.2 (Римана (об осциляциях))**.** Пусть $f(x)$ абс. инт. на конечном или бесконечном интервале (a, b), тогда $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\nu x dx = 0$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$

Доказательство. 1) Если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [\xi, \eta) \\ 0, \ x \notin [\xi, \eta) \end{cases}, \ [\xi, \eta] \in (a, b)$$

То:

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = \int_\xi^\eta \sin\nu x dx = -\frac{\cos\nu x}{\nu}\bigg|_\xi^\eta \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

2) Если $\varphi(x)$ - ступенчатая, то она является линейно комбинацией рассмотренных одноступенчатых функций, поэтому для неё утверждение справедливо.

3) Рассмотрим абс. инт. на (a, b) функцию $f(x)$. Возьмём $\underline{\forall\varepsilon > 0}$.

По предыдущей теорме $\exists\varphi(x)$ - ступенчатая функция: $\int_a^b |f - \varphi|dx < \varepsilon/2$.

Т.к. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = 0$, то $\underline{\exists\nu_\varepsilon} : \forall\nu \ (|\nu| > \nu_\varepsilon) \hookrightarrow |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| < \varepsilon/2$. Тогда $\underline{\forall\nu : \ (|\nu| > \nu_\varepsilon}$ выполняется:

$$\underline{|\int_a^b f(x)\sin\nu x dx|} = |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx + \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| \le$$
$$\le |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx| + |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| <$$
$$< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon}$$

Подчёркнутое означает,что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$. Аналогично косинус. ◻

Замечание. Интервал (a, b) при исследовании абсолютно интегрируемых на другой промежуток $[a, b], [a, b), (a, b]$

2 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 2.1. Ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ называется тригонометрическим рядом, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Определение 2.2. Множество функций $\{u_n(x)\} = \{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ называется тригонемтрической системой

Свойства тригоном. сист.

1. Триг. сист. "ортогональна"в смысле $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) u_k(x) dx = 0$, $\forall n, k : n \neq k$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} u_n^2(x) dx = \pi$, при $n \geq 2$

Доказательство. 1) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x) dx = 0$$

$\square$

Доказательство. 2) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \pi + 0 = \pi$$

$\square$

Лемма 2.1. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.1}$$

и ряд сходится равномерно тогда:

$$\begin{gathered} a_n = \frac{1}{\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Домножим 2.1 на $\cos mx$. Полученный ряд будет равномерно сходится.

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} \cos mx(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| = |\cos mx| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leq$$
$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right|$$

Из выполнения усл. Коши равномерной сходимости для исходного ряда 2.1 следует выполнение усл. Коши равномерной сходимости полученного в результате умножения ряда.

Тогда имеем право интегрировать равнество (по x от $-\pi$ до π)

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} \cos mx(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \pi$$
$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

Второе равество в 2.2 получается аналогично. □

Определение 2.3. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi;\pi]$ функция. Тригонометрический ряд с коэффицентами 2.2 называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты a_k, b_k - коэффициетами Фурье. Имеет место запись (здесь $\sim$ означает соответствие):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Перефразируем лемму:

Лемма 2.2 (2.1'). Рамномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$$

где $\alpha > 1$ является рядом Фурье своей суммы, так как он равномерно сходдится по признаку Веерштрасса

Замечание. Если функция абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то интегралы в 2.2 сходятся абсолютно по 1.1

Замечание. Если $f(x)$ - 2π периодична и абс. инт. на каком-либо $[a-\pi, a+\pi]$, то она будет абс. инт. на $\forall$ другом таком отрезке и интегралы (2.2) не зависят от отрезка.

Замечание. Любую абсолютно интегрируемую на $[a-\pi, a+\pi]((a-\pi, a+\pi); (a-\pi, a+\pi], [a-\pi, a+\pi))$ можно продолжить до 2π периодической функции, возможно доопределив или переопределив функцию в граничных точках. Интегралы при этом не меняются.

Следствие 2.1. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ - посл. коэфф. Фурье 2π периодической и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

По 1.1 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ - абс. инт.. По Т. Римана получаем нужный результат.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

Не может быть рядом Фурье какой-либо абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции.

2.1 Ядро Дирихле. Принцип локализации

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = S_n(x, b) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Преобразуем:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kxdt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt \cdot \sin kx =$$

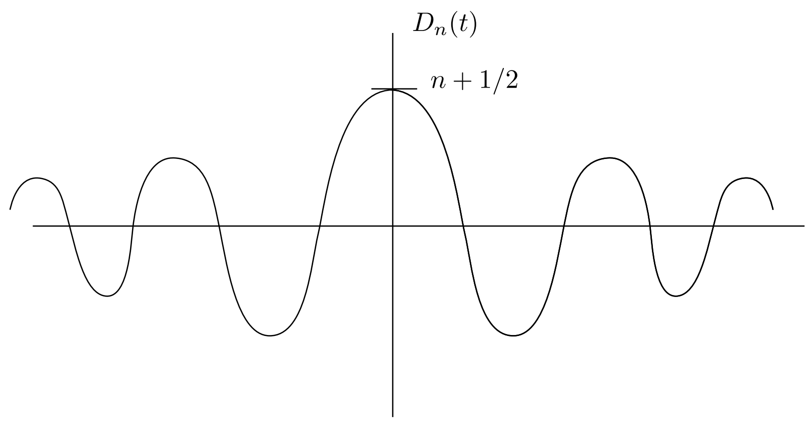
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt$$

Определение 2.4. Функция

$$D_n(t) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t)\right)$$

называется ядром Дирихле



Свойства ядра Дирихле:

1. $D_n(t)$ - четная, 2π период. и непр. функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$
3. $\max|D_n(t)| = \max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
4. $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, при $t \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. Следует из аналогичных свойств слогаемых
2. Очев
3. $\frac{1}{2} - n \leq D_n(t) \leq \frac{1}{2} + n = D_n(0)$
4.

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos 2t + \dots + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \dots - \sin(n-\frac{1}{2})t + \sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$\square$

Теорема 2.1 (Принцип локализации)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt$ существуют или нет одновременно. В случае существования равны.

Замечание. Таким образом сходимость и значение суммы ряда Фурье 2π пер. и абс. инт. на $[-\pi, \pi]$ зависит только от свойств функции в сколь угодно малой окрестности.

Доказательство. Преобр. S_n:

$$S_n(x_0) \underset{t=\tau+x_0}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\tau=-t} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}}_{\tau=t})f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{\pi}(\int_0^\pi f(x_0-t)D_n(-t)dt + \int_0^\pi f(x_0+t)D_n(t)dt)$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt \tag{2.4}$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi)\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{на}[\delta,\pi]$$

Тогда $\frac{(f(x_0-t)+f(x_0+t))}{2\sin\frac{t}{2}}$ - абс. инт на $[\delta,\pi]$ (см 1.1).

Тогда 2-ой инт. $\to 0$ при $n\to\infty$ (Т. Римана) и получаем нужный результат.

□

2.2 Признаки сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 2.2 (Признак Дини)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть в точке x_0 существуют $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Пусть для некоторого $\delta > 0$ $\int_0^\delta \frac{|f^*_{x_0}(t)|}{t}dt$ (где $f^*_{x_0}(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0+0))$ сходится. Тогда ряд Фурье сходится в точке x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Рассматриваем

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^*_{x_0}(t)D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^*_{x_0}(t)\frac{\sin(n+.5)t}{2\sin .5t}dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f^*_{x_0}(t)}{t}\frac{.5t}{\sin .5t}\sin(n+.5)tdt$$

Функция $f^*_{x_0}$ абс. инт. на $[0,\pi]$ (т.к. по сравнению с абс. инт функциями $f(x_0+t)$ и $f(x_0-t)$) у функции $f^*_{x_0}(t)$ появивлась лишь одна особенность при $t=0$, в окр. кот. функция по условию абс. инт. Функция $\frac{t/2}{\sin t/2}$ доопределима в до непрерывной и ограниченной на $[0,\pi]$ функции.

По лемме 1.1 $\frac{f^*_{x_0}}{t}\frac{t/2}{\sin t/2}$ - абс. инт. на $[0,\pi]$. По Т. Римана 1.2 интеграл $\to 0$ при $n\to\infty$
$$\Rightarrow S_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

□

Определение 2.5. Функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 правостороннему (левостороннему) условия Гёльдера с показателем α ($\alpha \in (0,1]$) если $\exists\delta>0, M>0 : \forall t\in(0,\delta) \hookrightarrow |f(x_0 \underset{(-)}{+} t) - f(x_0 \underset{(-)}{+} 0)| < Mt^\alpha$.

Замечание. При α это условие называется также условием Липшица.

Определение 2.6. Пусть $\exists\ f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Введём обобщение односторонней производной

$$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{t\to\pm 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$$

Лемма 2.3. Если $\exists$ (конечная) $f'_{\underset{(-)}{+}}(x_0)$, то $f(x)$ удовл. правостороннему (левостороннему) усл. Липшица.

Доказательство. (для $f'(x_0)$)

$\exists f'_+(x_0)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\Rightarrow\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}=f'_+(x_0)+\underset{t\to+0}{o(1)}$

$\Rightarrow$ В некоторой окр. $(0,\delta)$ выполнится $\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\le|f'_+(x_0)|+1$

$\Rightarrow|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le(|f'_+(x_0)|+1)t$ ☐

Теорема 2.3 (Признак Липшица)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ выполняются оба условия Гёльдера. Тогда ряд Фурье сходится в x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Пусть выполняются оба условия Гёльдера. Тогда на $(0,\delta)$ выполняются:

$$\frac{|f^*_{x_0}|}{t}\le\frac{|f(x_0+t)+f(x_0+0)|}{t}+\frac{|f(x_0-t)+f(x_0-0)|}{t}\le\frac{2Mt^\alpha}{t}=\underbrace{\frac{2M}{t^{1-\alpha}}}_{\text{абс.инт.}}$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения $\int_0^\delta\frac{|f^*_{x_0}(t)|dt}{t}$ сход

$\Rightarrow$ по признаку Дини $S_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$ ☐

Следствие 2.2. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть $\exists f(x_0\pm 0)$ и $f'_{\pm}(x_0)$.

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Следует из признака Липшица и леммы. ☐

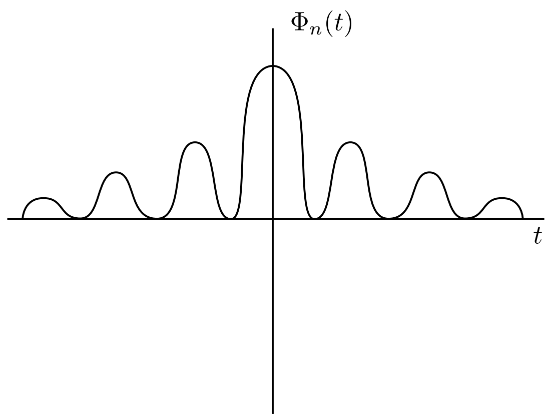
3 Суммирование рядов методом ср. арифм.

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция.

Определение 3.1. $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\dots+S_n(x)}{n+1}$ - сумма Фейера, где $S_k(x)$ - частичная сумма ряда Фурье.

Определение 3.2. $\Phi_n(x) = \frac{D_0(x)+D_1(x)+\dots+D_n(x)}{n+1}$ - ядро Фейера, где $D_k(x)$ - ядра Дирихле.

Из формулы 2.3 (принцип локализации) $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)dt$ следует $\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x+t)dt$.



Свойства ядра Фейереа:

1. $\Phi_n(t)$ - четная, 2π периодичекая, непр функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \pi$
3. $\max \Phi_n(t) = \Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$
4. $\Phi_n(t)$ - неотр.
5. $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$ при $t \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. из св. ядра Дирихле
2. из св. ядра Дирихле

3. Т.к. $\max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, то

$$\max \Phi_n(t) = \Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}(D_0(0) + D_1(0) + \dots + D_n(0)) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}+n\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n}{2}(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

4. из 5)

5.

$$(n+1)\Phi_n = D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t) =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3}{2}t + \dots + \sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{3}{2}t\sin\frac{t}{2} + \dots + 2\sin(n+\frac{1}{2})t\sin\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\cos 0 - \cos t + \cos t - \cos 2t + \dots + \cos nt - \cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

□

Теорема 3.1 (Фейера)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая, непрерывная $\Rightarrow \sigma_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$

Доказательство.

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt - f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt| =$$
$$= \frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)(f(x+t)-f(x))dt| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|dt$$

Т.к. $f(x)$ - непр., 2π период, то она ограничена и существует $C > 0 : |f(x)| \le C$. Также $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$ (в силу равн. непр.)

$$\exists\delta \in (0,\pi) : \forall x, x' : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt = \underbrace{\frac{1}{pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\dots dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\dots dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\dots dt}_{I_3}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt \le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)(|f(x+t)| + |f(x)|)dt \le$$
$$\le \frac{2C}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \le \frac{2C}{\pi}\pi\max_{[\delta,\pi]}\Phi_n(t) \le 2C\frac{1}{2(n+t)\sin^2\frac{\delta}{2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Тогда $\exists n_3 : \forall n \ge n_3 \hookrightarrow I_3 < \frac{\varepsilon}{3}\forall x$. Аналогично $\exists n_1 : \forall n \ge n_1 \hookrightarrow I_1 < \frac{\varepsilon}{3}\forall x$. $\underline{\exists n_0} = \max n_1, n_3 : \underline{\forall n \ge n_0 \hookrightarrow |\sigma_n(t) - f(x)| < \varepsilon\,\forall x}$.

Подчёркнутое означает $\sigma_n(t) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$ □

Следствие 3.1. Если ряд Фурье непр., 2π периодической функции сходится в точке x, то он сходится к $f(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(t) = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = A$.

По Т. (Фейера) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f(x) \Rightarrow A = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(t) = f(x)$. □

4 Приближение непр. функ. многочленами

Определение 4.1. Функция вида

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx + B_k\sin kx$$

называются тригонометрическим многочленом.

Теорема 4.1 (Т1 Веерштрасса)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр функция.

Тогда $\forall\varepsilon > 0\exists$ триг. многочлен $T(x) : \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Т.к. $\sigma_n(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\underline{\forall\varepsilon > 0}\exists N : \forall n \ge N, \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $\underline{\exists T(x)} = \sigma_n(x)$: $\underline{\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|T(x) - f(x)| < \varepsilon}$. □

Теорема 4.2 (T1' (перефразирование))**.** Пусть $f(x)$ - непр на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi) \Rightarrow \forall \varepsilon > \exists$ триг. многочлен $T(x) : \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Такая функция продолжаема до 2π периодической, непр. функции, можем применять T1. □

Теорема 4.3 (T2 Веерштрасса)**.** Пусть $f(x)$- непр. на $[a, b]$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ алгебраический многочлен $P(x) : \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$: $x = a + \frac{b-a}{\pi} t$, обозначим $f^*(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi} t)$, $t \in [0, \pi]$.

Продолжим $f^*(t)$ чётно на $[-\pi, \pi]$ и 2π периодически на $\mathbb{R}$, сохранив обозначение $f^*(t)$.

По T1 $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тр. мн. $T(t) : \max\limits_{t \in [0,\pi]} |f^*(t) - T(t)| \leq \max\limits_{t \in \mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ряды Тейлора для $\cos kt$ и $\sin kt$ и, следовательно, для $T(t)$ имеют радиус сходимости $+\infty$, и следовательно равномерно сходятся на любом отрезке.

Таким образом $\exists$ алг. многочлен $P(t) : \max\limits_{t \in [0,\pi]} |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\max\limits_{t \in [0,\pi]} |f^*(t) - P(t)| < \varepsilon$ или $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(\pi \frac{x-a}{b-a})| < \varepsilon$. □

4.1 Минимальное св-во коэфф. Фурье

Лемма 4.1. Если $f(x)$ инт (в несобственном смысле) на $[a, b]$ вместе с квадратом $f^2(x)$. $\Rightarrow f(x)$ абс. инт на $[a, b]$.

Доказательство. Следует из неравенства $|f(x)| \leq \frac{1+f^2}{2}$. □

Замечание.

$$\exists f = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

абс. инт на $[0, 1]$ но не явл. инт с кв.

Теорема 4.4. Пусть $f(x))$ - 2π период. и инт. вместе с квадратом функция на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $S_n(x)$ - частичные суммы ряда Фурье, a_n и b_n - коэф. Фурье.

Тогда:

1. $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx = \min\limits_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx$, где $T_n(x)$ - триг. многочлены степени не выше n.
2. $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ - неравенство Бесселя

Доказательство. Пусть $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\pi(\frac{a_0A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_kA_k + b_kB_k) + \pi(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) +$$

$$+\pi\left(\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right)$$

Видно, что последнее выражение минимально при $A_k = a_k$, $B_k = b_k$, что доказывает 1.

Для доказательства 2 возьмём $T_n = S_n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \pi\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

Частичн. суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$ составляют неубывающую, ограниченную последовательность, следовательно ряд сходится.

Переходим в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и получаем 2. $\square$

Теорема 4.5 (Равентсво Парсеваля)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична, непрерывна, a_n и b_n её коэф. Фурье, тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Замечание. Равенство верно и для интегрируемой функции вместе с квадратом.

Замечание. Равенство Парсеваля получается при формальной подстановке $S(x)$ вместо $f(x)$.

Доказательство. Возьмём $\underline{\forall \varepsilon > 0}$. По Т. Вейерштрасса $\exists T_n(x)$ - триг. многочлен, такой что $\max\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2dx < \varepsilon$$

Из минимального свойства коэф. Фурье:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2dx < \varepsilon \tag{1}$$

Тогда:

$$\underline{0 \overset{\text{нер. Б.}}{\leq} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right]} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2dx \underline{\overset{(1)}{\leq} \varepsilon}$$

Из подчёркнутого получаем равенство Парсвеваля. □

Определение 4.2 (Кусочно непр. дифф.)**.** Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывно дифф. на отрезке $[a, b]$, если $\exists$ такое разбиение отрезка, что на каждом отрезке разбиения, функция непрерывно дифф. (в концевых точках односторонне).

Теорема 4.6 (О почленном дифф. ряда Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. дифф. на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Тогда $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$. (т.е. ряд можно формально дифф.)

Замечание. О сходимости ничего не говорится.

Доказательство. Пусть $f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$

$$\alpha_0 = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n)\sin nx df = nb_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n)\cos nx df = -na_n$$

□

Лемма 4.2 (О порядке убывания коэф. Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична и непр. на $\mathbb{R}$.

Пусть $f(x)$ имеет непр. производную до порядка $k-1$ включительно на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. производную порядка k ($k \geq 1$) на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$, $|b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ - сход.

Доказательство. Пусть $f^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$.

Применяем предыдущую Т. k раз, получим либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n \qquad \beta_n = \pm n^k b_n \tag{1}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n \qquad \beta_n = \pm n^k a_n \tag{2}$$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{(k)})^2 dx$ (нер. Бесселя) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ (где $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$) сходится.

Если справедл (1), то

$$|a_n| = \frac{\alpha_n}{n^k} \leq \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k} \qquad |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$$

Аналогично в случае (2). □

Теорема 4.7 (О скорости сходимости ряда Ф. к функ.)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична и непр. на $\mathbb{R}$.

Пусть $f(x)$ имеет непр. производную до порядка $k-1$ включительно на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. производную порядка k ($k \geq 1$) на $[-\pi, \pi]$.

Тогда ряд Фурье равномерно и абсолютно сходится к $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и выполняется
$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\eta_n}{n^{k-.5}}$$
где $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ и $\{\eta_n\}$ - числовая посл.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ и $S_n(x)$ - сумма Фурье порядка n.

Выполняются достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.

Рассмотрм остаток ряда Фурье
$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

При анализе остатка будем использовать неравенства Коши-Буняковского-Шварца для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2} \tag{1}$$
которое получается из нер. К.-Б.-Ш. для конечной суммы
$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2}$$
после применения предельного перехода $N \to \infty$.

Также будем использовать нер.
$$\frac{1}{m^p} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^p},\ p > 0 \tag{2}$$
которое получается инт. нерав. $\frac{1}{m^p} \leq \frac{1}{x^p}$ по отрезку $[m-1, m]$.

$$|r_n(x)| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \le$$

$$\overset{(1)}{\le} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}} \overset{(1)}{\le} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}} =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2k}}} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}}_{\eta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0} \sqrt{\frac{1}{n^{2k-1}}} = \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ Ряд сходится равномерно, т.к. η_n не зависит от x.

Т.к. получилась оценка

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \le \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$$

из которой следует абсолютная сход. остатка, заключаем, что ряд сход. абс. □

Следствие 4.1 (Достаточное усл. равн. сход. ряда)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр на $\mathbb{R}$, имеет кус. непр. производную на $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ Ряд Фурье равномерно на $\mathbb{R}$ и абс. сходится к $f(x)$.

Доказательство. Следует из Т. при $k = 1$. □

Теорема 4.8 (О почленном инт. ряда Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период. и кусочно непр. на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

$\Rightarrow$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx)$$

и ряд в правой части сх. равн. на $\mathbb{R}$.