1 Введение

Определение 1.1 (Динамическая система)**.** Система у которой

- Определено состояние как совокупность велечин или функция в данный момент времени
- Задан закон эволюции системы

Изучаем вектор состояния $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\vec{x} \in X \in \mathbb{R}^n$

Определение 1.2 (Типы законов эволюции)**.** /

- Системы с непрерывным временем (потоки) $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}$ - автономная
- Системы с дискретным временем (каскады) $\vec{x}_{k+1} = T_k \vec{x}_k$, здесь T_k - оператор, в большинстве случаев - функция

Пример. Для описание системы движущегося колеса используем два параметра: скорость и угол. Вектор состояния $\vec{x} = \{x_0\ x_1\}$.

$$\frac{d\vec{x}}{t} = f(\vec{x}, t)$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\vec{x}, t) \\ \dots \\ x_n = f_n(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Определение 1.3 (Автономная система)**.** Если правая часть системы дифф. уравнений не зависит от времени система называется автономной. Когда система не автономная над ней находится сверхсистема, изменение которой нужно изучить и определить её воздействие на нашу систему в зависимости от времени.

Пример. Спутник на орбите - автономная система, сила воздействующая на него зависит только от координат. А если Земля не округлая и вращается нужно вводить начальное положение и изменение от времени, система уже не автономная.

Пример. Если мы смотрим на популяцию кроликов раз в пол года имеем следующий закон изменения.

$$x_{k+1} = f_1(x_k)$$

2 Описание системы

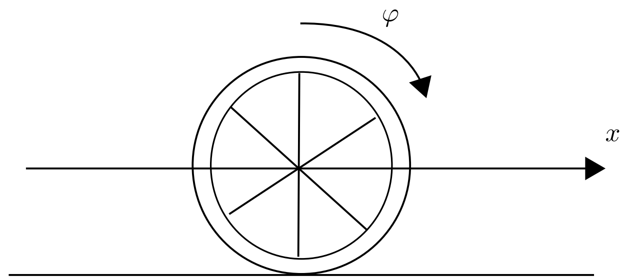
Определение 2.1 (Твёрдое тело)**.** Система мат точек, у которых не изменяется расстояние между любыми 2мя точками.

Имеем систему N материальных точек, где ν - номер точки. Движение описывается в виде

$$\vec{r}_\nu(t),\ \nu = 1, \ldots, N$$

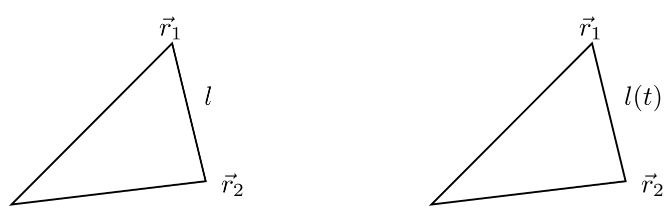
$$\vec{v}_\nu(t) = \dot{\vec{r}}_\nu(t) \qquad \vec{w}_\nu(t) = \dot{\vec{v}}_\nu(t)$$

Связи $f(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_\nu, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_\nu, \ldots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$, кратко $f(t, \vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_N) = 0$. Конечные связи - не зависят от скорости $f(t, \vec{r}_\nu) = 0$, стационарные - не зависят от времени $f(\vec{r}_\nu) = 0$, интегрируемые $f(t, \vec{r}_\nu) = G$



Пример.
В колесе без проскальзывания:

$$\dot{x_1} = R\dot{\varphi}_1$$



Пример.
Стационарная и нестационарная связи:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2 \qquad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2(t)$$

Определение 2.2 (Голономные системы)**.** Системы мат точек, в которых нет дифференицальных неинтегрирумеых связей.

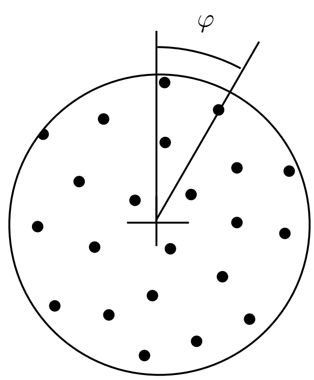
Замечание. Если налолжено d связей (голономных) для описание положения нужно $3N - d$ переменных.

Определение 2.3 (Кол-во степеней свободы)**.** Минимальное количество независимых переменных которые однозначно определяют **положение** системы называется количеством степеней свободы.

Замечание. Состояние отличается от положения тем, что в неё входят скорости и зная сотояние, мы может предсказать как система будет развиваться.

Определение 2.4 (Параметризация системы)**.** Введение параметров $q_1, \ldots, q_n$ ($q = \{q_1, \ldots, q_n\}$-обобщённые координаты) таких, что однозначнозначно описывают положение:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad \nu = 1, \ldots, N$$

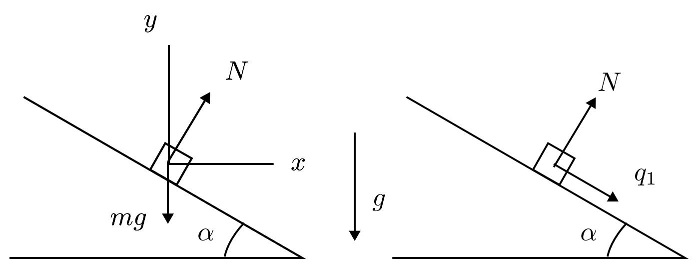


Пример.

Твёрдое тело круг на плоскости, три обощённые координаты x, y, φ соответственно q_1, q_2, q_3.

Определение 2.5. Если нет нестационарных связей то $\vec{r}_\nu(q)$ склерономные системы (не зависят от времени).

3 Лагранжева механика



$$\begin{cases} y = -x\tan\alpha \\ m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum \vec{F}_\nu \end{cases} \qquad \ddot{q}_1 = g\sin\alpha$$

3.1 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Применимо к голономным системам.

3.1.1 Кинетическая энергия

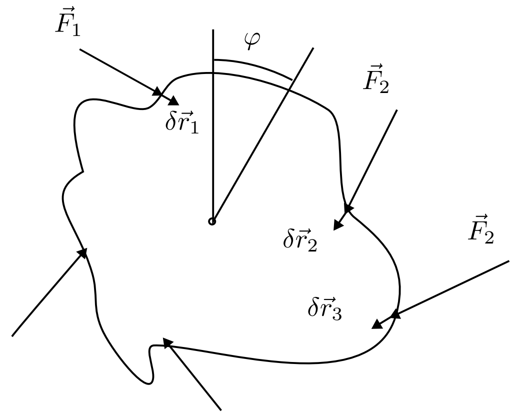
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1 \ldots n$$

$T(\dot{q}, q, t)$ - кинетическая энергия, $Q_i(\dot{q}, q, t)$ - обобщённые силы

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta q_i$$

$\delta\vec{r}_\nu$ - виртуальное перемещение.

Определение 3.1 (Виртуальное перемещение)**.** Виртуальное перемещение - перемещение точек системы с учётом наложенных связей не изменяющихся (замороженных) во времени.



Пример.
Одна степерь свободы - угол вращения. Начинаем варьировать φ чтобы выразить $\delta\vec{r}_\nu$ через δq_i получаем работу и тогда можем выразить Q_i. В случае когда степеней свободы много нужно жёстко фиксировать все кроме одной.

3.1.2 Потенциальная энергия

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q,t)}{\partial q_i}$$

3.1.3 Лагранжиан

$$L = T - \Pi$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n}$$

3.1.4 Стректура кинетической энергии

Для набора материальных точек ($\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q-t)$):

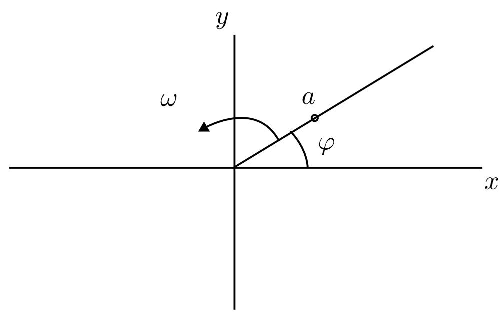
$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \qquad a_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \qquad a_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j\dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{a_0}_{T_0}$$

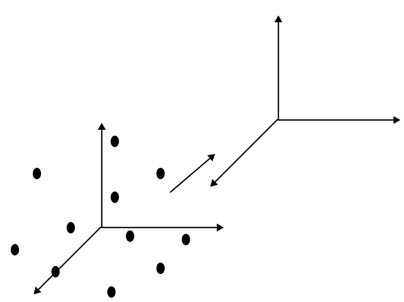
$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Для склерономной $T = T_2$



Пример.
q - расстояние от начала стержня до точки a

$$\varphi = \omega t \qquad x = q\cos(\omega t) \qquad y = q\sin(\omega t)$$
$$\dot{x} = \dot{q}\cos(\omega t) - q\omega\sin(\omega t) \qquad \dot{y} = \dot{q}\sin(\omega t) + q\omega\cos(\omega t)$$
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2 = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$
$$T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$



Пример.
Теорема Кёнига:

1. Кёнигова система отсчёта
   (a) Центр находится в центре масс
   (b) При движении системы кёнигова система точек движется поступательно

2. $T = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + T^{\text{отн}}$, для твёрдого тела (на плоскости) $T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} I_{\text{ось вр}} \omega^2$