

# 1 Введение

**Определение 1.1** (Динамическая система). Система у которой

- Определено состояние как совокупность величин или функция в данный момент времени
- Задан закон эволюции системы

Изучаем вектор состояния  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\vec{x} \in X \in \mathbb{R}^n$

**Определение 1.2** (Типы законов эволюции). /

- Системы с непрерывным временем (потoki)  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ ,  $\vec{x}$  - автономная
- Системы с дискретным временем (каскады)  $\vec{x}_{k+1} = T_k \vec{x}_k$ , здесь  $T_k$  - оператор, в большинстве случаев - функция

**Пример.** Для описание системы движущегося колеса используем два параметра: скорость и угол. Вектор состояния  $\vec{x} = \{x_0 \ x_1\}$ .

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$$
$$\begin{cases} x_1 = f_1(\vec{x}, t) \\ \dots \\ x_n = f_n(\vec{x}, t) \end{cases}$$

**Определение 1.3** (Автономная система). Если правая часть системы дифф. уравнений не зависит от времени система называется автономной. Когда система не автономная над ней находится сверхсистема, изменение которой нужно изучить и определить её воздействие на нашу систему в зависимости от времени.

**Пример.** Спутник на орбите - автономная система, сила действующая на него зависит только от координат. А если Земля не округлая и вращается нужно вводить начальное положение и изменение от времени, система уже не автономная.

**Пример.** Если мы смотрим на популяцию кроликов раз в пол года имеем следующий закон изменения.

$$x_{k+1} = f_1(x_k)$$

## 2 Описание системы

**Определение 2.1** (Твёрдое тело). Система мат точек, у которых не изменяется расстояние между любыми 2мя точками.

Имеем систему  $N$  материальных точек, где  $\nu$  - номер точки. Движение описывается в виде

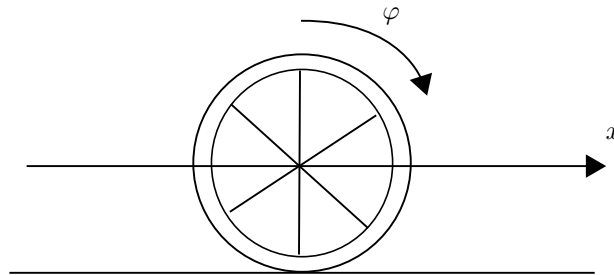
$$\vec{r}_\nu(t), \nu = 1, \dots, N$$

$$\vec{v}_\nu(t) = \dot{\vec{r}}_\nu(t) \quad \vec{w}_\nu(t) = \dot{\vec{v}}_\nu(t)$$

Связи  $f(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_\nu, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_\nu, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$ , кратко  $f(t, \vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu) = 0$ .

Конечные связи - не зависят от скорости  $f(t, \vec{r}_\nu) = 0$ , стационарные - не зависят от времени  $f(\vec{r}_\nu) = 0$ , интегрируемые  $f(t, \vec{r}_\nu) = G$

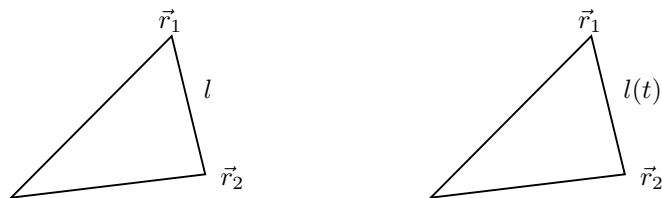
**Пример.**



В колесе без проскальзывания:

$$\dot{x}_1 = R\dot{\varphi}_1$$

**Пример.**



Стационарная и нестационарная связи:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2 \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2(t)$$

**Определение 2.2** (Голономные системы). Системы мат точек, в которых нет дифференциальных неинтегрируемых связей.

**Замечание.** Если наложено  $d$  связей (голономных) для описание положения нужно  $3N - d$  переменных.

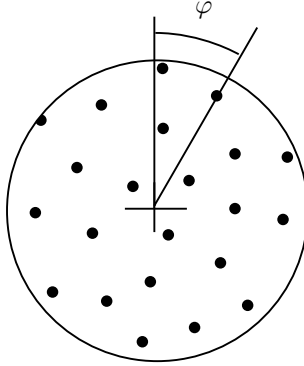
**Определение 2.3** (Кол-во степеней свободы). Минимальное количество независимых переменных которые однозначно определяют **положение** системы называется количеством степеней свободы.

**Замечание.** Состояние отличается от положения тем, что в неё входят скорости и зная состояние, мы может предсказать как система будет развиваться.

**Определение 2.4** (Параметризация системы). Введение параметров  $q_1, \dots, q_n$  ( $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ -обобщённые координаты) таких, что однозначно описывают положение:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad \nu = 1, \dots, N$$

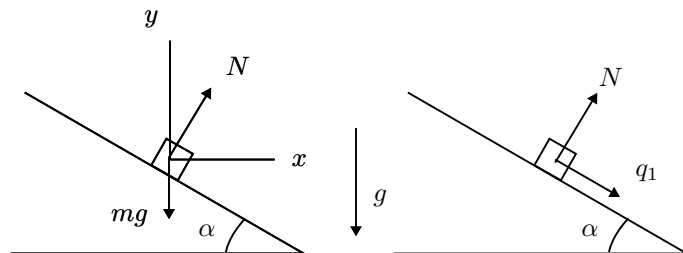
**Пример.**



Твёрдое тело круг на плоскости, три обобщённые координаты  $x, y, \varphi$  соответственно  $q_1, q_2, q_3$ .

**Определение 2.5.** Если нет нестационарных связей то  $\vec{r}_\nu(q)$  склерономные системы (не зависят от времени).

### 3 Лагранжева механика



$$\begin{cases} y = -x \tan \alpha \\ m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum \vec{F}_\nu \end{cases} \quad \ddot{q}_1 = g \sin \alpha$$

#### 3.1 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Применимо к голономным системам.

##### 3.1.1 Кинетическая энергия

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1 \dots n$$

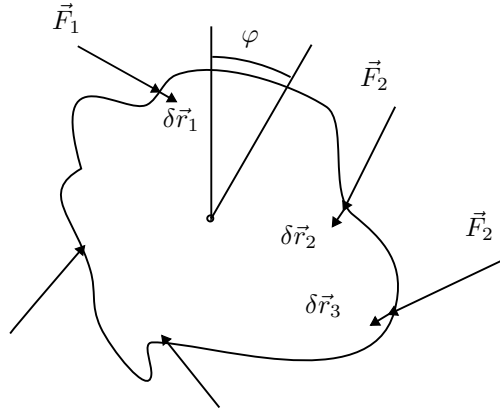
$T(\dot{q}, q, t)$  - кинетическая энергия,  $Q_i(\dot{q}, q, t)$  - обобщённые силы

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i$$

$\delta \vec{r}_\nu$  - виртуальное перемещение.

**Определение 3.1** (Виртуальное перемещение). Виртуальное перемещение - перемещение точек системы с учётом наложенных связей не изменяющихся (замороженных) во времени.

**Пример.**



Одна степень свободы - угол вращения. Начинаем варьировать  $\varphi$  чтобы выразить  $\delta \vec{r}_i$ , через  $\delta q_i$  получаем работу и тогда можем выразить  $Q_i$ . В случае когда степеней свободы много нужно жёстко фиксировать все кроме одной.

### 3.1.2 Потенциальная энергия

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q, t)}{\partial q_i}$$

**Пример.**

- Гравитационное поле:  $\Pi = mgh$  или  $\Pi = -\frac{\gamma Mm}{r}$  при нескольких телах.
- Пружина  $\Pi = \frac{c(\Delta x)^2}{2}$ .
- Точка на стержне прикреплённого к оси вращения: возникает центробежная сила если рассматривать систему отсчёта связанную с осью и стержнем  $F_x(x) = m\omega^2 x$  тогда потенциальная энергия центробежной силы  $\Pi = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$

**Замечание.** Потенциальная энергия всегда увеличивается в сторону обратную направлению силы.

### 3.1.3 Лагранжиан

$$L = T - \Pi$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n}$$

### 3.1.4 Структура кинетической энергии

Для набора материальных точек ( $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q - t)$ ):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2$$

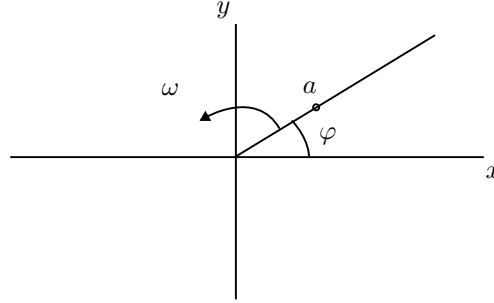
$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \quad a_j = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{a_0}_{T_0}$$

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Для склерономной  $T = T_2$

**Пример.**



$q$  - расстояние от начала стержня до точки  $a$

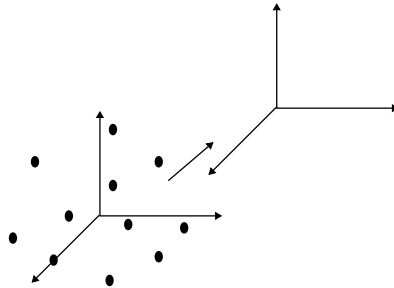
$$\varphi = \omega t \quad x = q \cos(\omega t) \quad y = q \sin(\omega t)$$

$$\dot{x} = \dot{q} \cos(\omega t) - q\omega \sin(\omega t) \quad \dot{y} = \dot{q} \sin(\omega t) + q\omega \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

$$T = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

**Пример.**



Теорема Кёнига:

1. Кёнигова система отсчёта
  - (а) Центр находится в центре масс
  - (б) При движении системы кёнигова система точек движется поступательно
2.  $T = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + T^{\text{отн}}$ , для твёрдого тела (на плоскости)  $T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} I_{\text{ось вр}} \omega^2$

### 3.1.5 Алгоритм решения

1. Определить количество степеней свободы
2. Выбрать обобщённую систему координат
3.  $T(\dot{q}, q, t)$
4.  $\Pi(q, t)$
5.  $L = T - \Pi$
6.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, n$
7. Вычислить производные

### 3.2 Классификация обобщённых сил

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}, q, t)$$

$\tilde{Q}$  - непотенциальная сила

$$N = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i$$

- мощность обобщённых сил.

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= -Q_q q - Q_{\dot{q}} \dot{q} \\ C &= \frac{1}{2}(Q_q + Q_q^T) = C^T \quad B = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} + Q_{\dot{q}}^T) = B^T \\ P &= \frac{1}{2}(Q_q - Q_q^T) = -P^T \quad G = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} - Q_{\dot{q}}^T) = -G^T \\ \vec{Q} &= -Cq - Pq - B\dot{q} - G\dot{q}\end{aligned}$$

матрица	$q$	$\dot{q}$
симметричные	консервативные $C$	диссипативные $B$
кососимметричные	существенно непотенц. $P$	гироскопические $G$

$$T(\dot{q}, q, t) = T_2 + T_1 + T_0$$

Индекс показывает степень с которой  $T_i$  зависит от  $\dot{q}$ . В склерономной  $T_1$  и  $T_0$  нет.

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi$$

### 3.2.1 Изменение полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Условия консервативной системы (не учитывая экзотику когда слогаемые сокращаются):

1. Если система склерономная  $T_1 = T_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$
2. Если  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ .
3. Если  $\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$

## 4 Гамильтонова механика

$$\begin{aligned}L(\dot{q}, q, t) &= T - \Pi \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{cases}\end{aligned}$$

В лагранжевой механике на очевидно что такое лагранжиан и итоговые уравнения получаются в ненормальном виде из-за чего их сложно решать.



#### 4.1 Переход к новым переменным

$q, \dot{q}, t$  ( $\dot{q}$ -обобщённые скорости)  $\Rightarrow q, p, t$  ( $p$  - обобщённый импульс)

$L(\dot{q}, q, t) \Rightarrow H(q, p, t)$  функция гамильтона (гамильтониан)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

Преобразование Лежандра:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

На место  $\dot{q}$  нужно подставить зависимость выше.

Канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Уравнения 1го порядка в нормальном виде!

$$H = T_2 - T_0 + \Pi$$

В склерономной систему  $T_0 = 0 \Rightarrow H = T_2 + \Pi = T + \Pi = E$