

1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad a_{ij}(t) \in C(a, b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau} \quad \forall t \in (a, b), t_0 \in (a, b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}$$

$=_{a_{11}} W(t) \qquad \qquad \qquad =_{a_{nn}} W(t)$

1) решения лин. завис $\Rightarrow W(t) = 0$ на (a, b)

2) решения лин. независ:

$$\dot{x}_1 = Ax_1 \dots \dot{x}_n = Ax_n, \text{ ФМР } \Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{\Phi}(t) = A\Phi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1}$$

$$\dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2}$$

\dots

$$\dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn}$$

$$(\dot{x}_{11} \dot{x}_{12} \dots \dot{x}_{1n}) = a_{11}(x_{11} x_{12} \dots x_{1n}) + a_{12}(x_{21} x_{22} \dots x_{2n}) \\ + \dots + a_{1n}(x_{n1} x_{n2} \dots x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \\ = W(t) \quad = 0 \\ + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \\ = 0$$

$$\dot{W}(t) = \text{tr} A \cdot W(t) \quad W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau}$$

□

2 Формула Остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a, b)$; y_1, y_2, \dots, y_n - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть y_1, \dots, y_n - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} d\xi}$$

Доказательство. 1) y_1, \dots, y_n лин завис $\Rightarrow W(x) = 0$

2) y_1, \dots, y_n - лин независ

$$\begin{aligned}
 t = x \quad x_1 = y \quad x_2 = y' \quad \dots \quad x_n = y^{n-1} \\
 \begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = y^n = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \dots - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 \end{cases} \\
 A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \\
 W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau} \quad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}
 \end{aligned}$$

□

Замечание.

$$\begin{aligned}
 W(x_0) = 0 &\rightarrow W(x) = 0 \text{ на } (a, b) \\
 W(x_0) \neq 0 &\rightarrow W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)
 \end{aligned}$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, W(x) = y_1(x) = y_1(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_0(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' y_1^2 = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение

(а) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x) e^{ax} x^a$

(б) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi} \rightarrow y_2(x)$ - линейно незав.
решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. одноп. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \quad b_0(x), b_1(x) \in C(a, b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$$p(x) > 0 \text{ на } (a, b), p(x) \in C'(a, b), q(x) \in C(a, b).$$

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} > 0, p(x) \in C'(a, b), q = b_0 e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} \in C(a, b)$$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \quad r(x) \in C(a, b)$$

$$(a) \quad b_0 \in C(a, b) \text{ и } b_1(x) \in C'(a, b) \text{ замена } y(x) = \varphi(x)z(x)$$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $b_0 = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} y' &= \varphi' z + \varphi z' & y'' &= \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z'' \\ x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi' z + 2\varphi z' + \varphi z &= 0 \end{aligned}$$

Зануляем коэффициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'}{\varphi} &= -\frac{1}{x} & \varphi(x) &= \frac{1}{x} \\ \varphi' &= -\frac{1}{x^2} & \varphi'' &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{2}{x^2} z + z'' - 2z \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z &= 0 \\ z'' + \frac{1}{x} z &= 0 \end{aligned}$$

(b) $b_0(x)$ и $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' & y'' &= \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2 \\ py'' + p'y' + qy &= 0 & p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy &= 0 \\ p\psi'' + p'\psi' &= 0 & (p\psi') &= 0 & p\psi' &= 1 \end{aligned}$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{p(\xi)} \rightarrow$ строго монот и непр, \exists обратная функция $x = x(t)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \quad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p \frac{1}{p^2} \ddot{y} + qy = 0$$

$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$

(с) Преобразование Фурье-Лиувилля - приведение к канон. виду

i. $t = \varphi(x)$ к виду $\ddot{y} + c(t)\dot{y} \pm y = 0$

ii. $c(t) \in C'(t_1, t_2)$, $y(t) = \psi(t)z(t)$ к канон. виду $\ddot{y} + \alpha(t)y = 0$

Пример.

$$\begin{aligned}
xy'' + 2y' + y &= 0 \quad x > 0 \\
y' &= \dot{y}\varphi'(x) \quad y'' = \dot{y}\varphi''(x) + \ddot{y}\varphi'^2 \\
x\dot{y}\varphi'' + x\ddot{y}\varphi'^2 + 2\dot{y}\varphi' + y &= 0 \\
x\varphi'^2 = 1 \quad \varphi' &= \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \varphi = 2\sqrt{x} \\
t = 2\sqrt{x} \quad \varphi'' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \\
\ddot{y} + \dot{y} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) + y &= 0 \\
\ddot{y} + \dot{y} \frac{3}{2\sqrt{x}} + y = 0 \quad \ddot{y} + \dot{y} \underbrace{\frac{3}{t}}_{c(t)} + y &= 0
\end{aligned}$$

При $t > 0$ непр дифф., делаем второй шаг

$$\begin{aligned}
y(t) &= z(t)\psi(t) \\
\ddot{z}\psi(t) + 2\dot{z}\dot{\psi} + z\ddot{\psi} + \frac{3}{t}\dot{z}\psi + \frac{3}{t}z\dot{\psi} + z\psi &= 0 \\
2\dot{z}\dot{\psi} + \frac{3}{t}z\dot{\psi} &= 0 \quad \psi = \frac{1}{t^{3/2}} \\
\dot{\psi} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{t^{5/2}} \quad \ddot{\psi} = \frac{15}{4} \frac{1}{t^{7/2}} \\
\ddot{z} \frac{1}{t^{3/2}} + z \left(\frac{15}{4} \frac{1}{t^{7/2}} - \frac{9}{2} \frac{1}{t^{7/2}} + \frac{1}{t^{3/2}} \right) &= 0 \\
\ddot{z} + z \left(1 - \frac{3}{4t^2} \right) &= 0 \quad t > 0
\end{aligned}$$

4.2 Асимптотический вид решения

$$\ddot{y} + y(m + \beta(t)) = 0 \quad m \neq 0$$

Теорема 4.1. Если $\beta(t)$ непр на $[t_0, +\infty)$ и $\beta(t) = O(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$ при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$, то

- $m > 0$: $y(t) = C_1 \cos \sqrt{mt} + C_2 \sin \sqrt{mt} + O(\frac{1}{t^\varepsilon})$
- $m < 0$: $y(t) = C_1 e^{\sqrt{|m|}t} (1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon})) + C_2 e^{-\sqrt{|m|}t} (1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon}))$

Пример.

$$\begin{aligned} \ddot{z} + z \left(1 - \frac{3}{4t^2} \right) &= 0 \quad t > 0 \\ m = 1 \quad \beta(t) &= -\frac{3}{4t^2} \quad \text{непр } (0, +\infty) \quad \varepsilon = 1 \\ z(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + O(t) \\ t = 2\sqrt{x} \quad y(t) &= z(t) \frac{1}{t^{3/2}} \\ y(t) &= C_1 \frac{\cos t}{t^{3/2}} + C_2 \frac{\sin t}{t^{3/2}} + O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right) \\ y(x) &= \tilde{C}_1 \frac{\cos 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + \tilde{C}_2 \frac{\sin 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right) \end{aligned}$$

Верно при $x \rightarrow \infty$

4.3 Исследование нулей решения уравн. второго порядка

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \quad b_0, b_1 \in C(a, b)$$

Определение 4.1. Точка x_0 называется нулём решения $y(x)$, если $y(x_0) = 0$

Теорема 4.2. Пусть $y(x)$ нетривиальное решение и $y(x_0) = 0$ тогда $y'(x_0) \neq 0$

Доказательство. Пусть $y'(x_0) = 0$, получаем задачу Коши $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ единст. реш., противоречит с нетрив реш. \square

Теорема 4.3. Любое нетривиальное решение может иметь на отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ не более конечного числа нулей.

Доказательство. Пусть число нулей бесконечно на $[c, d]$, счётное подмнож x_1, x_2, \dots, x_n - ограниченная послед, выделяем сход. подпослед. $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [c, d]$.

$$y(x_{n_k}) = 0, y(x_{n_k}) \rightarrow y(x_0) = 0 \text{ непр. } y(x)$$

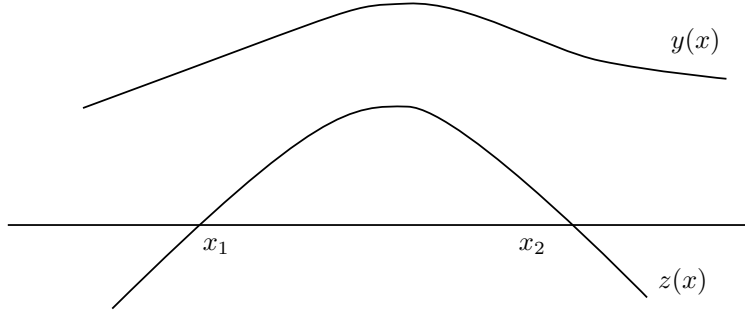
$$y(x) - \text{решение} \Rightarrow \exists y'(x_0)$$

$$y'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

Противоречие с пред. теоремой. \square

Теорема 4.4 (Теорема сравнения Штурма). Пусть $(p(x)z')' + q(x)z = 0$, $(p(x)y')' + Q(x)y = 0$, $p(x) \in C'(a, b)$, $q, Q \in C(a, b)$, $p(x) > 0$ на (a, b) и пусть x_1 и $x_2 \in (a, b)$ два последовательных нуля нетривиального решения $z(x)$ и $q(x) \leq Q(x)$ на $[x_1, x_2]$.

Тогда любое решение $y(x)$ имеет хотя бы один нуль на $[x_1, x_2]$.



Доказательство. Пусть $y(x) \neq 0$ на $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned}
 & (pz')'y + qzy' - (py')'z - Qyz = 0 \\
 & \underbrace{p'z'y + pz''y - p'y'z - py''z}_{(p(z'y - zy'))'} + yz(q - Q) = 0 \quad \int_{x_1}^{x_2} \\
 & p(z'y - zy')\big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} yz(q - Q)dx = 0 \\
 & \underbrace{\underbrace{p(x_2)}_{>0} \underbrace{(z'(x_2))}_{<0} \underbrace{y(x_2)}_{>0} - \underbrace{z(x_2)}_{=0} \underbrace{y'(x_2))}_{>0}}_{<0} - \underbrace{p(x_1)}_{>0} \underbrace{(z'(x_1))}_{>0} \underbrace{y(x_1)}_{>0} - \underbrace{z(x_1)}_{=0} \underbrace{y'(x_1))}_{>0}}_{<0} + \\
 & + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{yz}_{\geq 0} \underbrace{(q - Q)}_{< 0} dx}_{\leq 0} = 0
 \end{aligned}$$

Противоречие. \square

Следствие 4.1 (Теорема о перемежаемости нулей). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линейно независимых решения $(p(x)y(x))' + q(x)y = 0$, $p \in C'(a, b)$, $p > 0$ на (a, b) , $q \in C(a, b)$ и x_1 и x_2 два последовательных нуля $y_1(x)$ тогда $y_2(x)$ имеет ровно один нуль на (x_1, x_2) .

Доказательство. Пусть $y_1(x_0) = 0$ и $y_2(x_0) = 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Противоречие с линейной независ.

$$(py_1')' + qy_1 = 0 \quad (py_2')' + qy_2 = 0$$

По теореме Штурма y_2 имеет хотя бы один нуль на (x_1, x_2) .

Пусть два нуля $y_2(x_3) = y_2(x_4) = 0$, тогда по теореме сравнения Штурма $\exists x_5 : y_1(x_5) = 0$ противоречит с соседством x_1 и x_2 . \square

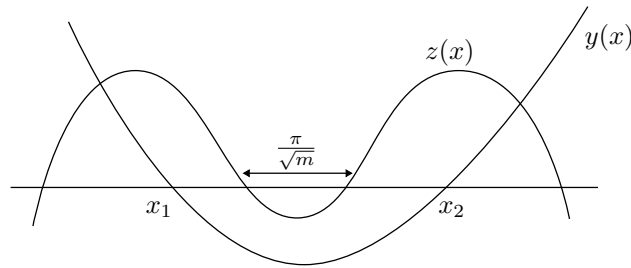
4.4 Оценка расстояние между нулями

Теорема 4.5. Пусть $y'' + qy = 0$, $q \in C(a, b)$, тогда для любого нетривиального решения расстояние между соседними нулями удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}} \quad 0 < m \leq q(x) \leq M \text{ на } (a, b)$$

Доказательство. Пусть $\Delta > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$

$$z'' + mz = 0 \quad z(x) = \sin(\sqrt{m}(x + \alpha)) \quad \forall \alpha$$



$m \leq q$ по т. ср. Штурма между двумя нулями $z(x) \exists$ нуль $y(x)$. Противоречие.

Аналогично $\Delta < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ □

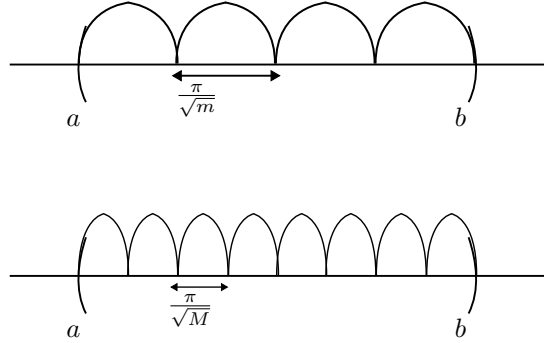
4.5 Оценка числа нулей на интервале

Теорема 4.6. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a, b)$, $0 < m \leq Q(x) \leq M$ на (a, b) , тогда число нулей любого нетривиального решения на (a, b) удовлетворяет неравенству:

$$\left[\sqrt{m} \frac{b-a}{\pi} \right] - 1 \leq N \leq \left[\sqrt{M} \frac{b-a}{\pi} \right] + 1$$

где $[\dots]$ - целая часть числа.

Доказательство. $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ - расстояние между соседними нулями.



□

Теорема 4.7. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a, b)$, $Q(x) \leq 0$ на (a, b) , тогда число нулей любого нетривиального решения на (a, b) удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq N \leq 1$$

(не более одного нуля)

Доказательство. Пусть 2 нуля x_1, x_2

$$z'' + 0z = 0 \Rightarrow z'' = 0$$

По т. сравн. Штурма на $[x_1, x_2]$ лежит хотя бы один нуль $z'' = 0$ любого решения. □

Замечание. • в Т. 1: (a, b) - открытое и ограниченное множество

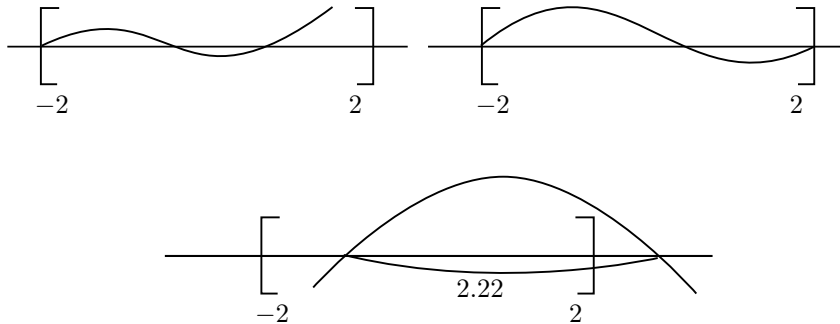
• в Т. 2 $(a, b), [a, b], (a, b]$ и может быть неогран.

Пример. Доказать \forall нетрив. реш $y'' + \sqrt{4 - x^2}y = 0$ имеет на $[-2, 2]$ не более 2 нулей.

$$0 \leq Q(x) = \sqrt{4 - x^2} \leq 2$$

$$(-2, 2) \quad N \leq \underbrace{\left[\sqrt{2} \frac{(2 - (-2))}{\pi} \right]}_{1.8} + 1 = 2$$

Пусть 3 нуля на $[-2, 2]$.



$$z'' + 2z = 0$$

$$z = \sin \sqrt{2}(x + \alpha) \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.22$$

Можем подобрать α так чтобы попадал только один ноль в $[-2, 2]$.

4.6 Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$x > 0 \quad \nu \in \mathbb{R} \quad \nu \geq 0$$

Попытаемся привести к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
y &= z(x)\varphi(x) \\
x^2(z''\varphi + z\varphi'' + 2z'\varphi') + x(z'\varphi + z\varphi') + (x^2 - \nu^2)z\varphi &= 0 \\
2x^2\varphi' + x\varphi &= 0 \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dx}{2x} \\
\varphi &= \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \varphi' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \quad \varphi'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^{3/2}} \\
z''x^{3/2} + z\left(\frac{3}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{3/2} - \nu^2\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= 0 \\
z'' + z\left(1 + \frac{.25 - \nu^2}{x^2}\right) &= 0 \\
\nu = \frac{1}{2} \quad z'' + z &= 0 \quad y(z) = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Одно решение ограничено (синус), а другое нет (косинус). Может быть это характерно для всех решений уравнения?

$$\begin{aligned}
W(x) &= W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{\xi}{\xi^2} d\xi} = W(x_0)\frac{x_0}{x} \\
W(x) &= \frac{C}{x} = y_1y_2' - y_2y_1' \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty
\end{aligned}$$

Действительно что-то стремится к бесконечности (или производные или сама функция).

$$z'' + z\left(1 + \underbrace{\frac{.25 - \nu^2}{x^2}}_{\alpha(x)}\right) = 0$$

Чтобы было почти с пост. коэф. α непр на $[x_0, +\infty)$, $\alpha(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
z(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)}_{O\left(\frac{1}{x}\right)} \\
y(x) &= C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}_{x \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

Обобщённый степенной ряд:

$$y(x) = x^\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

Полагаем что дифф. нужно число раз и после нахождения решения задним числом смотрим так ли это.

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} - \nu^2 a_k x^{k+\alpha} + a_k x^{k+\alpha+2}] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k)x^k + a_k x^{k+2}] = 0$$

$$k=0: a_0\alpha^2 - a_0\nu^2 = 0$$

$$k=1: a_1(1+\alpha)^2 - a_1\nu^2 = 0$$

$$k \geq 2: a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k + a_{k-2} = 0$$

$$a_0 \neq 0 \quad \alpha = \pm \nu \quad \alpha = \nu \geq 0$$

$$a_1(1+\nu^2+2\nu-\nu^2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{\nu^2 - (k+\nu)^2} = \frac{-a_{k-2}}{k(k+2\nu)}$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+2\nu)} = \frac{-a_{2n-2}}{4n(n+\nu)}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(a+\nu)} \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{\underbrace{4 \cdot 4}_{2^4} \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_6 = \frac{a_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(3+\nu)(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+\nu)(2+\nu) \dots (n+\nu)}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad s > 0 \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

$$\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)\Gamma(n+\nu) = \dots = (n+\nu)(n+\nu-1) \dots (\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n + \nu + 1)}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\overbrace{k}^{\nu} + \alpha}$$

$$\underbrace{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}_{\text{ф. Бесселя 1го рода}} = J_\nu(x)$$

Постфактум доказываем дифференцируемость (признак Доломбера):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(.5x)^2}{(n+1)(n+\nu+1)} \right| = 0$$

Получаем что радиус сходимости бесконечен ($R = \infty$), то есть можем бесконечно диф. где угодно.

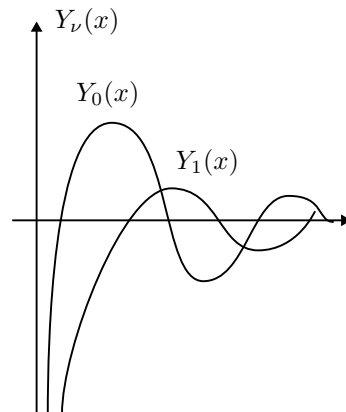
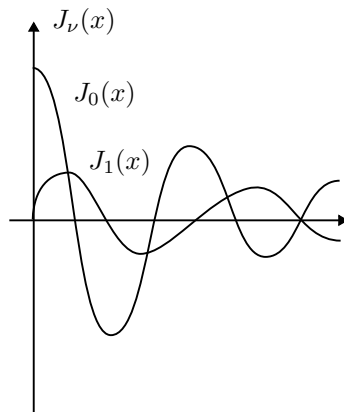
$J_\nu(x)$ беск. дифф $x > 0$.

Ищем второе решение через ФОЛ:

$$\left(\frac{y_2}{J_\nu(x)} \right)' = \frac{1}{J_\nu^2(x)} \frac{1}{x}$$

$y_2 = Y_\nu(x)$ функция Бесселя второго рода.

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$



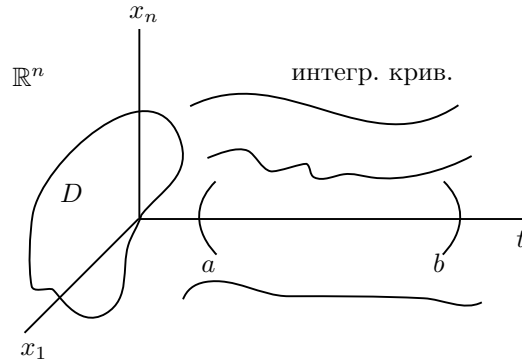
5 Автономные системы дифф. ур.

Определение 5.1. Нормальная система называется автономной, если правая часть не зависит явно от t .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dots \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases} & \quad f_i(x) \in C^1(D) \quad D \in \mathbb{R}^n \quad t \in (a, b) \end{aligned}$$

через $\forall t_0 \in (a, b)$ и $\forall x_0 \in D$ проходит единственная интегральная кривая.

Определение 5.2. Точка $\tilde{x} \in D$ называется положением равновесия автономной системы, если $F(\tilde{x}) = 0$.



Определение 5.3. Фазовая траектория - проекция инт. кр. на \mathbb{R}^n , где \mathbb{R}^n - фазовое пространство.

5.1 Свойства фазовых траекторий

1. Если $x = \varphi(t)$ решение системы на (a, b) (автономн.), то $\forall c \ x = \varphi(t + c)$ тоже решение на $(a - c, b - c)$.

Доказательство.

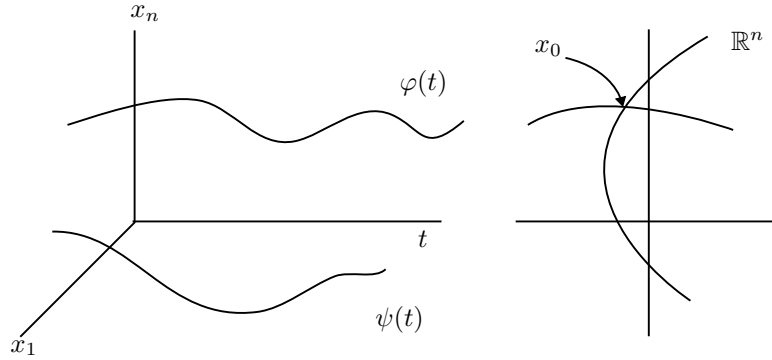
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= F(\varphi(t)) \quad t = \tau + c \\ \frac{d\varphi(\tau + c)}{d(\tau + c)} &= F(\varphi(\tau + c)) \end{aligned}$$

$\varphi(\tau + c) \rightarrow$ решение

□

2. Фазовые траектории не могут пересекаться

Доказательство. Пусть есть два решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на (a, b)



$\exists t_1, t_2 \in (a, b) : \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0, \chi(t) = \varphi(t + t_1 - t_2)$ - решение

$\chi(t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0$ противоречит Т. единст.

□

3. Пусть \tilde{x} положение равновесия, тогда $x = \varphi(t) = \tilde{x}$ - решение системы, а точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ - фазовая траектория.

Доказательство.

$$F(\tilde{x}) = 0 \quad \dot{x} = 0$$

Проекция фазовой траектории - точка.

□

4. Фазовая траектория, отличная от положения равн. является гладкой кривой.

Доказательство. $x = \varphi(t)$ - параметрически заданная кривая в фазовом пространстве

$\dot{x} = F(x), F \in C', \varphi(t)$ - непр. дифф. на (a, b) ,

$\dot{x} = \dot{\varphi}(t) \neq 0$ т.к. не явл. полож. равн.

□

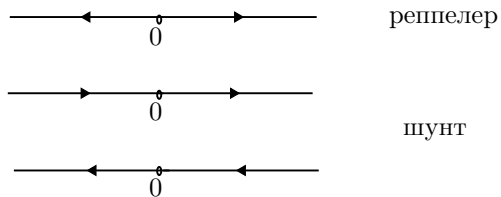
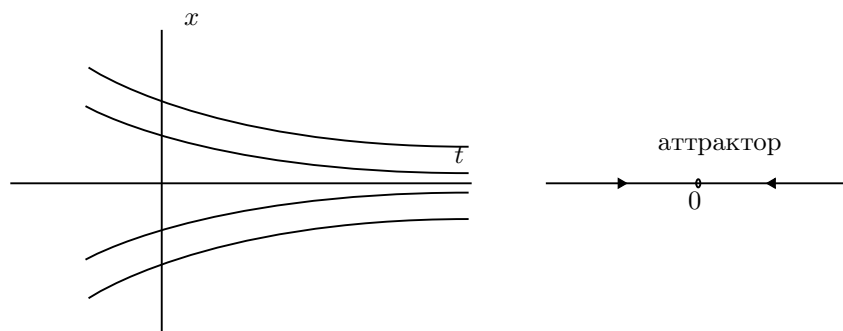
5. Фазовые траектории:

- точки
- незамкнутые гладкие кривые без самопересечения
- замкнутые гладкие кривые без самопересечения

5.2 Классификация положений равновесия

5.2.1 n=1

$$\dot{x} = -x \quad x(t) = Ce^{-t} \quad \tilde{x} = 0$$



5.2.2 n=2

$$\dot{x} = Ax \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5.2.3 Изолированные положения равновесия при n=2

$$\begin{aligned} \det A &\neq 0 & Ax &= 0 & \tilde{x} &= 0 \\ \lambda_1 &\neq 0 & \lambda_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

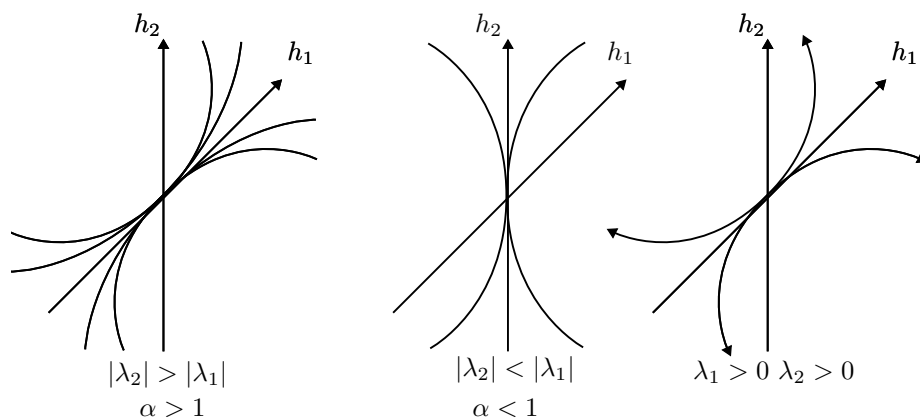
λ_1 и λ_2 действительны, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, h_1 и h_2 - базис

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = C_2 \left(\frac{\xi_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, & C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

1. $\alpha > 0$,



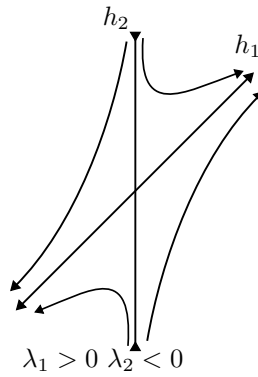
h_1 и h_2 - фазовые траектории

$\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ неустойчивый узел

$\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ устойчивый узел

2. $\alpha < 0$, $\xi_2 = A\xi_1^\alpha$

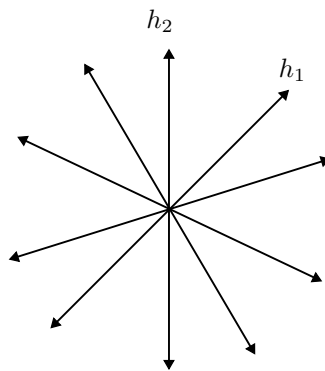
λ_1 и λ_2 разные знаки, седло



λ_1, λ_2 - действ., $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1. Два собственных вектора h_1 и h_2

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} h_2 \\
 \xi_1 &= C_1 e^{\lambda t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t} \\
 \begin{cases} \xi_2 = \frac{C_2}{C_1} \xi_1 & , C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

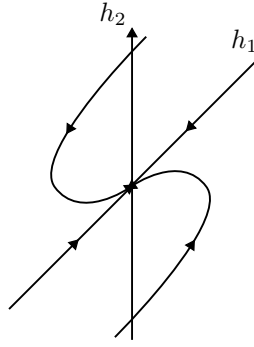


$\lambda > 0$ неустойчивый дикритический узел

$\lambda < 0$ устойчивый дикритический узел

2. h_1 - собственный вектор, h_2 - присоед.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 h_1 e^{\lambda t} + C_2 (h_1 t + h_2) e^{\lambda t} \\
 \xi_1 &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t} \\
 \begin{cases} \xi_1 = C_1 \frac{\xi_2}{C_2} + \xi_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{C_2} \\ \xi_2 = 0 \end{cases} &, C_2 \neq 0 \\
 &, C_2 = 0
 \end{aligned}$$



h_1 - фазовая траектория, h_2 - не явл. фаз. тр.

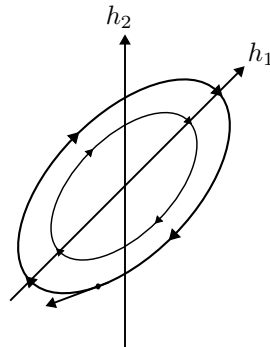
$\lambda > 0$ неустойчивый вырожденный узел

$\lambda < 0$ устойчивый вырожденный узел

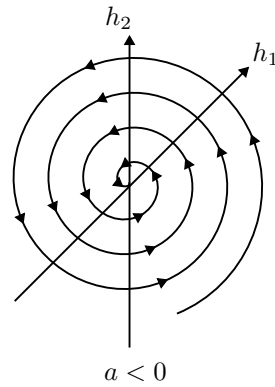
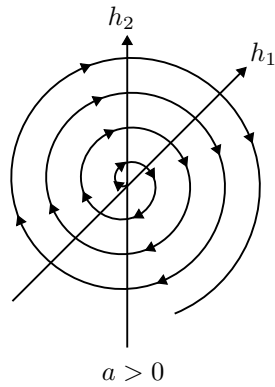
λ_1, λ_2 - комплексные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b > 0$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= a + ib \rightarrow h \\
 h_1 &= \operatorname{Re} h \quad h_2 = \operatorname{Im} h \\
 x(t) &= C_1 \operatorname{Re}(h e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(h e^{\lambda_1 t}) \\
 h e^{\lambda t} &= (h_1 + i h_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) = \\
 &= e^{at} [(h_1 \cos bt - h_2 \sin bt) + i(h_2 \cos bt + h_1 \sin bt)] \\
 x(t) &= h_1 \underbrace{(C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt)}_{\xi_1} + h_2 \underbrace{(-C_1 e^{at} \sin bt + C_2 e^{at} \cos bt)}_{\xi_2} \\
 C_1 &= A \cos \theta \quad A \geq 0 \\
 C_2 &= A \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi) \\
 \xi &+ e^{at} \cos(\theta - bt) A \\
 \xi_2 &= e^{at} \sin(\theta - bt) A
 \end{aligned}$$

1. $a = 0$, центр



2. $a \neq 0$, фокус



$a > 0$ неустойчивый фокус

$a < 0$ устойчивый фокус

5.2.4 Неизолированные полож. равн. при $n=2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax & x &\in \mathbb{R}^2 \\ Ax &= 0 & \det A &= 0 \end{aligned}$$

Хотя бы одно $\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, собст. век, h_1 и h_2

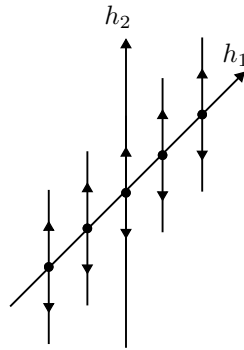
$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = C_1 \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$



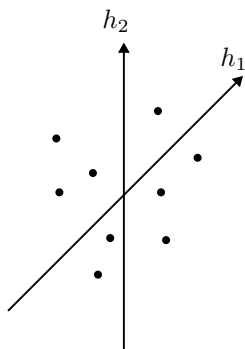
$\lambda_2 > 0$ нестабильная "антенна"

$\lambda_2 < 0$ стабильная "антенна"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 и h_2 собст. век.

$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2$$

Положение равновесия все точки фазовой плоскости.



"Точки"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 обст. век., h_2 присоед

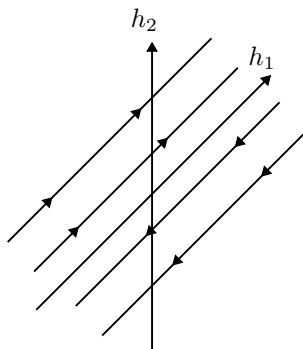
$$x = C_1 h_1 + C_2 (h_1 t + h_2)$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = C_1 + C_2 t \quad \xi_2 = C_2$$

h_1 - положение равновесия



"Улица"

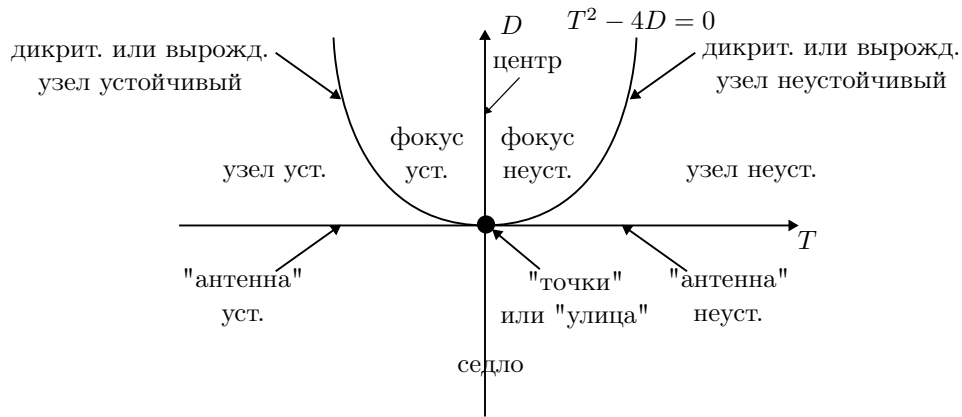
5.3 Второй взгляд на классификацию

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda \underbrace{a_{11} + a_{22}}_{Tr A} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{det A=0} = 0$$

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$



5.4 Третий взгляд на классификацию

Насколько влияют нелинейные коэффициенты?

Грубые: седло, узел, фокус

Негрубые: остальные

5.5 Устойчивость по Ляпунову

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$x(t_0) = x_0$, $\varphi(t)$ - решение задачи Коши, продолжаемое на $[t_0, +\infty)$

Определение 5.4. Решение $\varphi(t)$ задачи Коши называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x(t)$ реш. : $|x(t_0) - x_0| < \delta \forall t \geq t_0 \hookrightarrow x(t)$ определено на $[t_0, +\infty)$ и $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

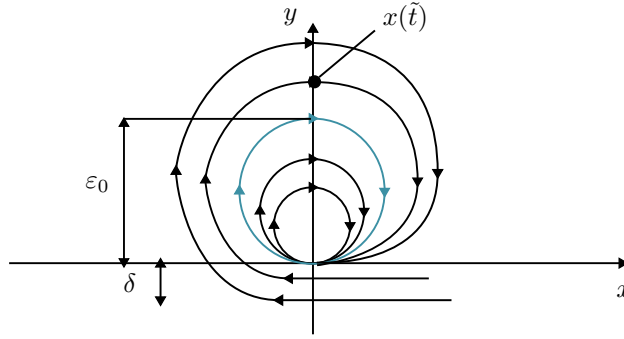
Определение 5.5. Решение $\varphi(t)$ з. К. называется асимптотически уст., если оно устойчиво и $\exists \delta_0 : \forall x(t) \text{ реш. с } |x(t_0) - x_0| < \delta_0 \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$

Определение 5.6 (Неустойчивость). Решение $\varphi(t)$ называется неуст. по Ляпунову, если $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x(t) \text{ реш. : } |x(t_0) - x_0| < \delta \exists \tilde{t} \geq t_0 \hookrightarrow x(\tilde{t}) \text{ неопределено или } |x(\tilde{t}) - \varphi(\tilde{t})| \geq \varepsilon_0$.

Замечание.

$$|x(t_0) - x_0| = \sqrt{(x_1(t_0) - x_{01})^2 + \dots + (x_n(t_0) - x_{0n})^2}$$

Пример (889).



$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

$\varphi(t) = 0$ - тривиальное решение, $\varphi(t_0) = 0, x_0 = 0$

Выполняются условия отрицания.

5.5.1 Исследование на устойчивость

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

$\varphi(t)$ - решение з. К., $x(t) = \varphi(t) + \varepsilon(t)$

$$\dot{\varphi} + \dot{\varepsilon} = F(t, \varphi + \varepsilon) \quad \varepsilon(t_0) = 0$$

Система уравнений возмущений:

$$\dot{\varepsilon} = F(t, \varphi(t) + \varepsilon(t)) - \dot{\varphi}(t) \quad \varepsilon(t) = 0$$

5.5.2 Теоремы об уст. (неуст.) полож. равн. авт. сис.

$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$F(x) = 0 \rightarrow \tilde{x}$ полож. равн., $\varphi(t) = \tilde{x}$

Теорема 5.1 (Об уст. по линейному пригл.). Пусть $\dot{x} = F(x)$, $F(\tilde{x}) = 0$, $F'(\tilde{x})$ матрица Якоби, λ_i - собст. числа $F'(\tilde{x})$, тогда

1. Если $\forall \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то \tilde{x} асимпт. уст.
2. Если $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то \tilde{x} неуст.

Определение 5.7 (Функция Ляпунова). $v(x)$ опр. и непр. дифф. в $O_\varepsilon(\tilde{x})$ (окрестности) и $v(\tilde{x}) = 0$.

Производная в силу системы:

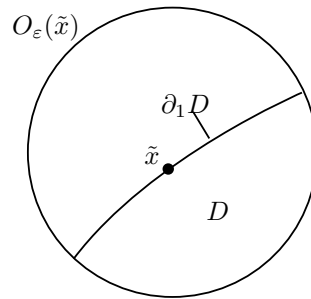
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x)$$

Теорема 5.2 (Ляпунова об устойчивости). Пусть $\exists v(x) : v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} \leq 0$ в $O_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - уст. по Ляпунову.

Теорема 5.3 (Ляпунова об асимпт. уст.). Пусть $\exists v(x) : v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} < 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - асимпт. уст. по Ляпунову.

Теорема 5.4 (Ляпунова о неустойчивости). Пусть $\exists v(x) : \forall O_\delta(\tilde{x}) \in O_\varepsilon(\tilde{x}) \exists x^* : v(x^*) > 0$ и $\frac{dv}{dt} > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - неуст.

Теорема 5.5 (Четаева о неустойчивости).



Пусть \exists область $D \subset O_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\exists v(x)$, $\tilde{x} \in \partial_1 D$, $v(x) = 0$ на $\partial_1 D$, $v(x) > 0$ в D , $\frac{dv}{dt} > 0$ в D , тогда \tilde{x} неуст.