Содержание

1

1.1 Закон Кулона, напряжённость

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} \qquad \vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Ф/м и $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.
Напряжённость $\vec{E}$ - сила действующая на единичный положительный неподвижный заряд.

1.2 Поток, теорема Гаусса

$$\Phi = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S} \qquad \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{\text{внутр}}$$

- Плоскость: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$
- Стена ширины d: $E = \begin{cases} \frac{\rho x}{\varepsilon_0} & , x < \frac{d}{2} \\ \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} & , x \geq \frac{d}{2} \end{cases}$
- Цилиндр: $E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} & , r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & , r > R \end{cases}$
- Шар: $E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & , r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , r > R \end{cases}$

1.3 Циркуляция и дивергенция E

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E}d\vec{l} = 0$$

1.4 Энергия электрического поля

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2h} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}(\frac{U}{h})^2 Sh = \frac{ED}{2}V$$

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \qquad W = \int wdV$$

2

2.1 Потенциал

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$$

Потенциал - величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке.

$$-d\varphi = \vec{E}\vec{dl} \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dV}{r}$$

2.2 Уравнения Пуассона и Лапласа

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$$

$$\triangle\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

В Лапласе правая часть равна 0.
Определение потенциала сводится к нахождению функции φ, удовлетворяющей этим уравнениям во всём пространстве (Лаплас между проводниками, и заданные значения на поверхности самих проводников).

2.3 Проводимость, обобщённый закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \qquad R = \rho\frac{l}{S}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \lambda\vec{E}$$

λ - удельная электропроводность, сименс на метр (См/м).
При наличии сторонних (некулоновских) сил ($\vec{E}^*$), обобщённый закон Ома:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^*)$$

$$I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = \int_1^2 \frac{\vec{j}\vec{dl}}{\lambda} = \int_1^2 \vec{E}\vec{dl} + \int_1^2 \vec{E}^*\vec{dl}$$

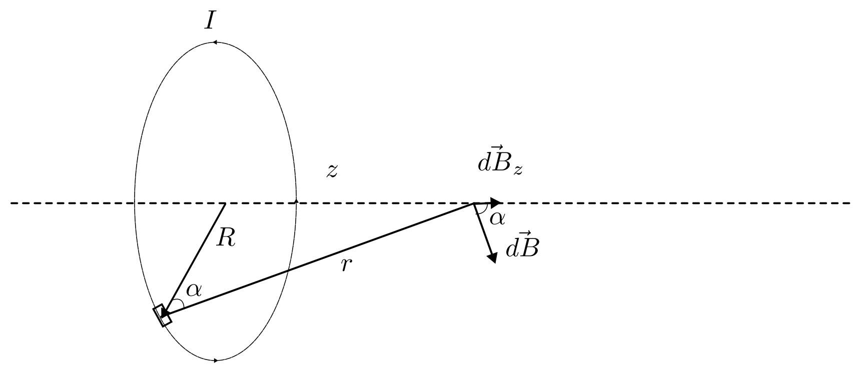
$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

ε_{12} - электродвижущая сила

3

3.1 Био-Савар, виток с током

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[\vec{dl}\times\vec{r}]}{r^3}$$



$$dB_z = dB\cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2} \qquad \cos\alpha = \frac{R}{r} \qquad r^2 = z^2 + R^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

3.2 Циркуляция магнитного поля

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j}d\vec{S}$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному контуру Г равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Г.

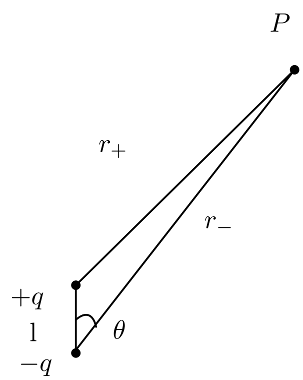
- Прямой провод: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $r \geq R$
- Внутри длинного соленоида: $B = \mu_0\mu n I$, где n - кол-во витков на метр
- Плоскость с током: $B = \frac{\mu_0 l}{2}$, где l сторона контура, параллельная плоскости

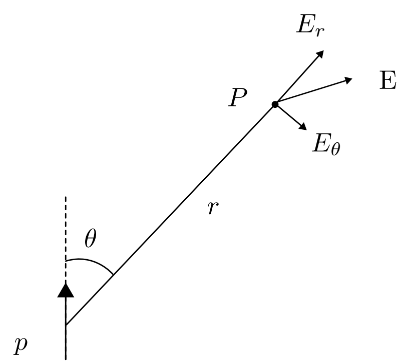
3.3 Ротор и дивергенция B

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4

4.1 Электрический диполь





Момент диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

где $\vec{l}$ направлен от - к $+$, q - положительный заряд

4.1.1 Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

где θ - угол между p и r

4.1.2 Напряженность поля диполя

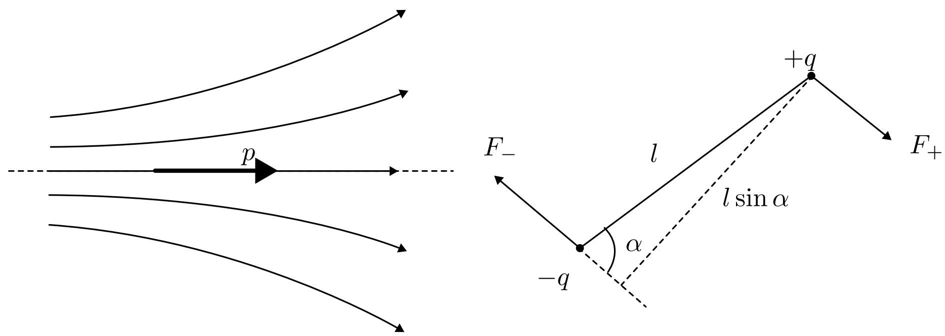
$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

В частности при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

4.1.3 Сила действующая на диполь



$$\vec{F} = q(\vec{E_+} - \vec{E_-}) = p\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{l}}$$

4.1.4 Момент сил действующих на диполь

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha$$
$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$$

4.1.5 Энергия диполя в поле

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q\frac{\partial \varphi}{\partial l} l = -qE_l l = -\vec{p}\vec{E}$$

4.2 Магнитный диполь

$\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где S - площать контура, $\vec{n}$ - нормаль по правилу правого винта.

4.2.1 Сила действующая на контур

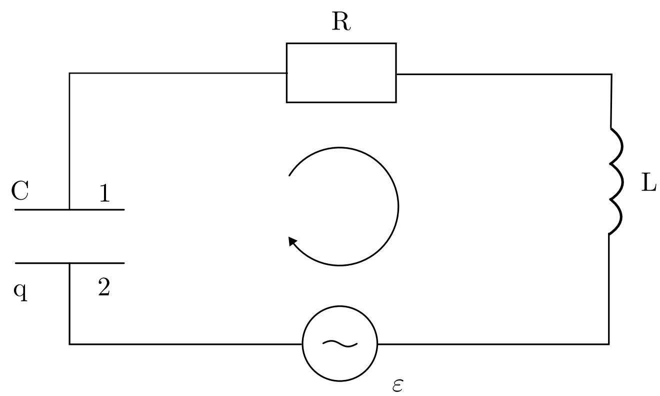
$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \qquad \vec{F_A} = l[\vec{I} \times \vec{B}]$$
$$\vec{F} = I\oint [d\vec{l} \times \vec{B}] \qquad \vec{F} = p_m\frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{n}}$$

где p_m - модуль момента, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{n}}$ - производная по направлению нормали $\vec{n}$.

4.2.2 Момент сил

$$\vec{M} = \oint [\vec{r} \times d\vec{F}] \qquad \vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

5



$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s + \varepsilon \qquad \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = \varepsilon \qquad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$2\beta = \frac{R}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

5.1 Свободные электрические колебания

5.1.1 Свободные незатухающие колебания

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad q = q_m \cos(\omega_0 t)$$

Период (формула Томпсона)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

5.1.2 Свободные затухающие колебания

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Напряжение на конденсаторе и ток в контуре

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}e^{-\beta t}cos(\omega t)$$

$$I = \omega q_m e^{-\beta t}cos(\omega t + \delta)$$

$$\cos\delta = -\frac{\beta}{\omega_0} \qquad \sin\delta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

5.1.3 Апериодические режим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

При $B^2 \geq \omega_0^2$ срыв:

$$\omega_0 = \beta \qquad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}$$

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

5.2 Величины характеризующие затухание

5.2.1 коэффициент затухания и время релаксации

время релаксации τ - время за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

5.2.2 Логарифмический декремент затухания

Определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд взятых через период колебания Т

$$\lambda = \ln\frac{\alpha(t)}{\alpha(t+T)} = \beta T$$

если затухание мало

$$\lambda \approx \beta\frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

5.2.3 Добротность

- По определению: $Q = \frac{\pi}{\lambda}$
- При слабом затухании: $Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Энергетический смысл: $Q \approx 2\pi\frac{W}{\delta W}$, δW - уменьшение энергии за период

5.3 Вынужденные электрические колебания

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m cos(\omega t)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L}cos(\omega t) \qquad q = q_m cos(\omega t - \psi)$$

где q_m - амплитуда заряда на конденсаторе, ψ - разность фаз между колебаниями заряда и внешней э.д.с ε

$$I = I_m cos(\omega t - \varphi)$$

где I_m амплитуда тока φ сдвиг по фазе между током и внешней э.д.с ε

$$I_m = \omega q_m, \qquad \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

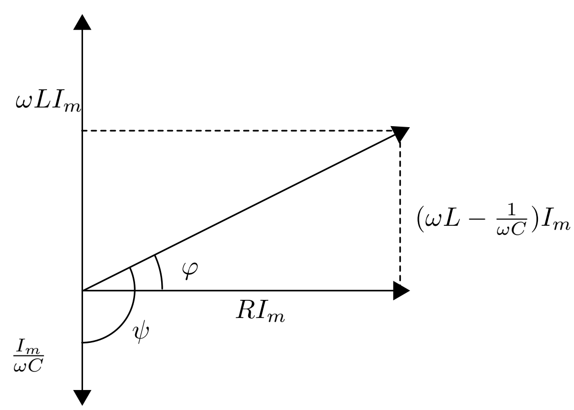
напряжения на индуктивности сопротивлении и емкости

$$U_R = RI_m cos(\omega t - \varphi)$$

$$U_C = \frac{I_m}{\omega C} cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$U_L = I_m \omega L cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

5.3.1 Векторная диаграмма



$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

учитывая что $q_m = I_m/\omega$

$$q_m = \frac{\varepsilon/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}$$

5.3.2 Резонанс

$$\omega_{I\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_{q\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

если $\beta << \omega_0$

$$\frac{U_{C\text{рез}}}{\varepsilon_m} = Q \qquad Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$$

где ω_0 - резонансная частота, $\delta\omega$ - ширина резонансной кривой на высоте $1/\sqrt{2}$ от максимальной

6

6.1 Условия квазистационарности

Квазистационарность - мгновенные значения тока практически одинаковы на всех участках цепи.

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} << T$$

где λ - проводимость, τ - характерное время растекания, а T - характерное время изменений

$$l_{\text{хар}<<\lambda_{\text{волны}}} = \frac{c}{\nu}$$

См. векторная диаграмма

6.2 Комплексные сопротивления

6.2.1 Резистор

$$Z_R = R$$

6.2.2 Конденсатор

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

$$U = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)} \qquad I = i\omega C U_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)}$$

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

6.2.3 Катушка индуктивности

$$U = -\varepsilon_s = L\frac{dI}{dt}$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} \qquad U = Li\omega I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}$$

$$Z_L = \frac{U}{I} = i\omega L$$

7

7.1 Правило Ленца

Индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

7.2 Закон Фарадея

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

При нескольких витках $\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$
В полном виде:

$$\oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\vec{v} \times \vec{B}]\vec{dl}$$

Первое слагаемое связано с изменением магнитного поля во времени, второе - с движением контура (на эелктроны действует сила Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{v}\times\vec{B}$, которой соответствует $E^* = [\vec{v} \times \vec{B}]$, циркуляция даёт эдс).

7.3 Самоиндукция

$$\Phi = LI$$

L - индуктивность

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}$$

7.3.1 Индуктивность катушки

Поле внутри (бесконечной) катушки (n - витки/метр):

$$dB = \mu ndh\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} \qquad B = \int_{-\inf}^{\inf} dB = \mu\mu_0 nI$$

$$L = \mathit{\Phi}/I \qquad \mathit{\Phi}_1 = BS \qquad \mathit{\Phi} = nlBS = \mu\mu_0 n^2 VI$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V$$

7.4 Взаимная индукция

Два неподвижных контура достаточно близких к друг другу:

$$\Phi_2 = L_{21} \cdot I_1 \qquad \Phi_1 = L_{12} \cdot I_2$$

Где $L_{12} = L_{21} = M$ - взаимная индуктивность, при отсутствии поблизости ферромагнетиков. (Может быть и отрицательна, в отличие от L.)

7.5 Энергия магнитного поля

Работа совершаемая сторонними силами против эдс самоиндукции:

$$\varepsilon_0 = RI - \varepsilon_s \mid \cdot\, Idt \;\Rightarrow\; \delta A_{\text{стор}} = \delta Q + Id\Phi$$

$$\delta A^{\text{доп}} = Id\Phi$$

Считаем что ферромагнетиков нет:

$$d\Phi = LdI \;\Rightarrow\; A^{\text{доп}} = \frac{LI^2}{2}$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \qquad nI = H = B/\mu\mu_0$$

$$W = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV \qquad w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu\mu_0} dV$$

8

8.1 Электрическое поле в веществе

Связанные заряды и их поле помечаются штрихом $(q', \rho', \sigma', \vec{E}')$, сторонне поле обозначено как $\vec{E}_0$.
Под действием внешнего поля положительные и отрицательные заряды смещаются в пределах нейтральных молекул, в следствие чего возникают нескомпенсированные поверхностные заряды и соответвующий им дипольный момент.

8.1.1 Поляризованность P

- дипольный момент объёма вещества.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p_i} \qquad \vec{P} = \eta \langle \vec{p} \rangle$$

Для изотропного диэлектрика:

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

где $\kappa = \varepsilon - 1$ - диэлектрическая восприимчивость.

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}} \qquad \nabla \cdot \vec{P} = -\rho'$$

Граничное условие:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

где индекс n означает проекцию на нормаль

8.1.2 Вектор D

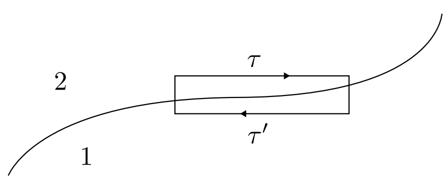
- электрическое смещение (индукция)

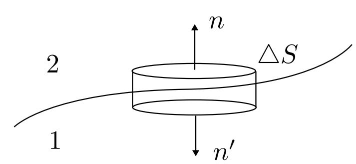
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}}^{\text{сторонние}}$$

$\varepsilon = 1 + \kappa$ - диэлектрическая проницаемость

8.1.3 Условия на границе





Два диэлектрика

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \qquad \oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad D_{2n} - D_{1n} = \sigma = 0$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Проводник - диэлектрик:

$$D_n = \sigma \qquad E_n = (\sigma + \sigma')/\varepsilon_0 = D_n/\varepsilon\varepsilon_0$$

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

8.1.4 Поле в однородном диэлектрике

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} \qquad \vec{D} = \vec{D}_0 \qquad \vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$$

8.2 Магнитное поле в веществе

В веществе, молекулы которого имеют дипольный момент, под действием внешнего поля эти элементарные моменты приобретают пеимущественную ориентацию, суммарные магнитный момент становится отличен от нуля, магнитные поля отдельных молекул перестают компенсировать друг друга. В веществе, молекулы которого не имеют дипольного момента, внешнее поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах, в следствие чего образуется магнитный момент.

8.2.1 Намагниченность J

- магнитный момент единицы объёма

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum \vec{p}_m \qquad \vec{J} = n\langle \vec{p}_m \rangle$$

У соседних молекул молекулярные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и макроскопически взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи образуют макроскопический поверхностный ток намагничивания I'.

$$\oint \vec{J}d\vec{l} = I' \qquad I' = \int \vec{j}'d\vec{S}$$

где I' - алгебраическая сумма токов намагничивания в контуре, а
$\vec{j}'$ - объёмная плотность тока намагничивания, интегрирование по произвольной поверхности, натянутой на контур.

$$\nabla \times \vec{J} = \vec{j}'$$

8.2.2 Вектор H

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(I + I')$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \qquad \oint \vec{H}d\vec{l} = I$$

где I - алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

где $\vec{j}$ - плотность тока проводимости

8.2.3 Связь J и H

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

χ - магнитная восприимчивость

- пармагнетики $\chi > 0$, $\vec{J} \upuparrows \vec{H}$
- диамагнетики $\chi > 0$, $\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}$
- ферромагнетики, J зависит от предыистории (гистерезис)

8.2.4 Связь B и H

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \qquad \mu = 1 + \chi$$

8.2.5 Граничные условия B и H

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad \oint \vec{H}d\vec{l} = I$$

$$B_{2n}\Delta S + B_{1n}\Delta S = 0 \qquad B_{2n} = B_{1n}$$

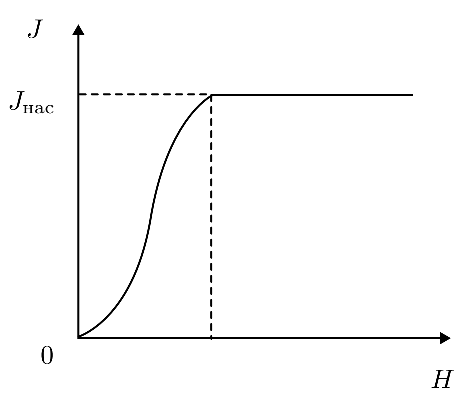
$$H_{2\tau}l + H_{2\tau}l = i_N l \qquad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$$

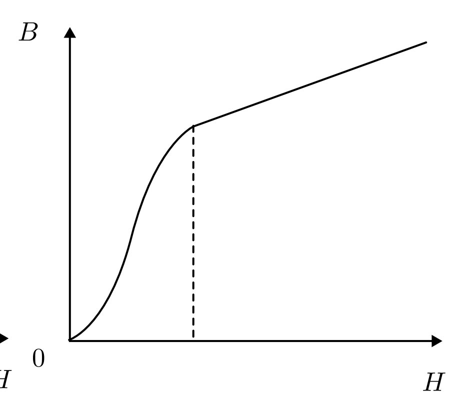
$\vec{N}$ - нормаль к контуру, i - плотность токов проводимости

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

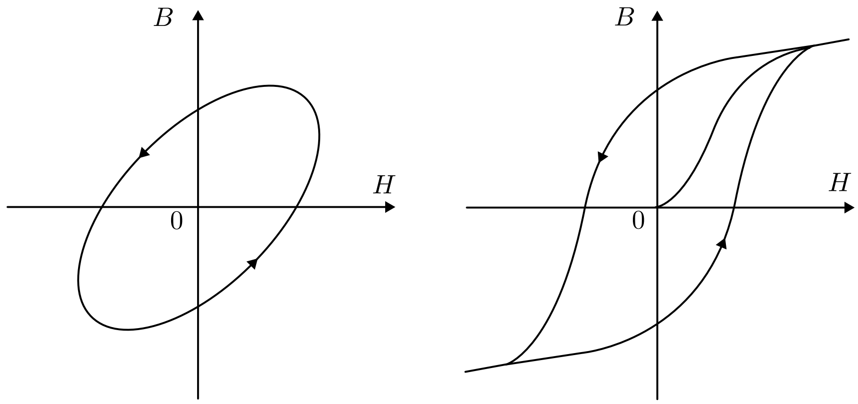
8.2.6 Ферромагнетики

- вещества, которые могут обладать намагниченность при отсутствии внешнего магнитного поля. В их кристаллах могут возникать обменные силы, которые заставляют магнитные моменты электронов устанавливаться параллельно друг другу. В результате возникают области (размером 1-10 мкм) спонтанного намагничения - домены. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Под действием внешнего поля домены ориентированные по нему растут, в слабых полях это обратимый процесс, в сильных - необратимый. Для ферромагнетиков μ вводится как функция H.





8.2.7 Гистерезис



Гистерезис - связь между B и H определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика. Линейный гистерезис наблюдается при слабых полях и высоких частотах, нелинейный - при сильных полях и низких частотах. Значение B при $H = 0$ называется остаточной намагниченностью, значение H_c при котором B обращается в нуль называется коэрцитивной силой. Для размагничивания образец помещают в катушку, по которой пропускают переменный ток и амплитуду его постепенно уменьшают до нуля.
Объёмная плотность потеранной энергии определяется площадью заключённой внутри петли.

$$w = \pi H_0 B_0 \sin\varphi = \pi H_0 B_1$$

9

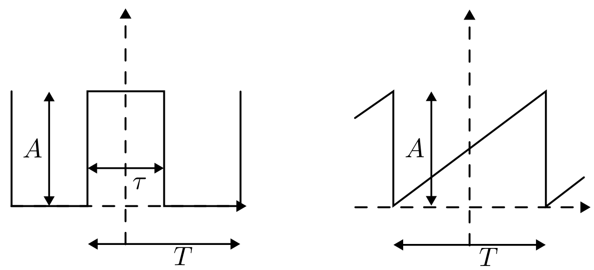
9.1 Разложение Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\inf}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)sin(n\omega t)dt$$

В чётной функции $b_n = 0$, в нечётной $a_n = 0$.

9.1.1 Основные разложения



(Это лучше перепроверить посчитав ручками)

- Прямоугольник :$\frac{4A}{\pi}[\sum\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n}\cos(n\omega t)]$
- Пила: $\frac{A}{2}+\sum\frac{A}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)$
- Двухполупериодное выпрямление (модуль косинуса):
  $A[\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 2}]+\frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5}+...]$

9.1.2 Амплитудно-модулированный сигнал

$$U=U_0[1+m\cos(\omega t)]\cos(\omega_0 t)$$

где U_0, ω_0 - амплитуда и частота модулируемого (несущего) сигнала, ω - частота модулирующего (информационного) сигнала, $m\le 1$ - коэффициент модуляции

$$U=U_0[\cos(\omega_0 t)+\frac{m}{2}\cos(\omega_0-\omega)+\frac{m}{2}\cos(\omega_0+\omega)]$$

Следовательно на спектре получаем 3 гармоники: несущего колебания и двух боковых полос.

9.1.3 Частотно-модулированный сигнал

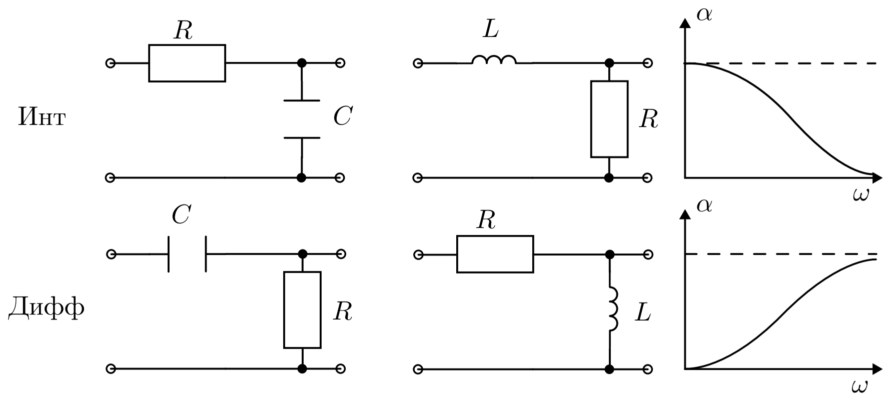
$$U=U_0\cos(\omega_0 t+m\cos(\omega t))$$

$$U=U_0\cos(\omega_0 t)\cos(m\cos(\omega t))-U_0\sin(\omega_0 t)\sin(m\cos(\omega t))$$

При малом m, имеем $\cos(m\cos(\omega t))\approx 1$, $\sin(m\cos(\omega t))\approx m\cos(\omega t)$

$$U=U_0\cos(\omega_0 t)+\frac{mU_0}{2}\cos[(\omega_0-\omega)t+\frac{\pi}{2}]+\frac{mU_0}{2}\cos[(\omega_0+\omega)t+\frac{\pi}{2}]$$

9.1.4 Фильтры RC, CR, RL, LR



Коэффициент передачи α (всегда ≤ 1):

$$\alpha = |\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}|$$

Интегрирующая цепочка пропускает низкие частоты, дифференцирующая - высокие.

- Инт RC: $U_{\text{вх}} = IR + I\frac{1}{i\omega C}$, $U_{\text{вых}} = I\frac{1}{i\omega C}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}$
- Диф RC: $U_{\text{вх}} = IR + I\frac{1}{i\omega C}$, $U_{\text{вых}} = IR$, $\alpha = \frac{R\omega C}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}$
- Инт RL: $U_{\text{вх}} = IR + Ii\omega L$, $U_{\text{вых}} = IR$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R})^2}}$
- Диф RL: $U_{\text{вх}} = IR + Ii\omega L$, $U_{\text{вых}} = Ii\omega L$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{R}{\omega L})^2}}$

Полоса пропускания - полоса частот, в пределах которой $\alpha \geq 1/\sqrt{2}$. (мощность $\geq 1/2$)
Для RC и LC цепочек вводится понятие частоты среза соответсвующей границе полосы пропускания. RC: $\nu_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi RC}$, RL: $\nu_{\text{ср}} = \frac{R}{2\pi L}$

9.2 Фильтр RLC

Резонанс в колебательном в колебательном контуре может быть использован для усиления или подавления определённой части частотного спектра. (см резонанс)

10

Период функции стремится к бесконечности $T \to \inf$, дискретный набор частот переходит в непрерывный $n\Omega \to \omega$, расстояние между соседними спектральными линиями стремится к нулю $(n+1)\Omega - n\Omega = \Omega = 2\pi/T \to 0$, сумма по гармоникам переходит в интеграл Фурье:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} C_n \to \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

10.1 Ширина спектра

- область частот, в пределах которой заключена основная часть (90%) энергии сигнала.
Из соотношения неопределённости:

$$\Delta p \Delta x \sim h$$

$$\delta x = \tau c \qquad \Delta p = h\Delta\nu/c$$

$$\frac{h\Delta\nu}{c}\tau c \sim h \qquad \tau\Delta\nu \sim 1$$

10.2 Спектр одиночного импульса

Одиночный импульс площади S, продолижтельности τ.

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{S}{\tau} e^{-i\omega t} dt = \frac{S}{2\pi} \frac{sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Ширину спектра можно охарактеризовать отрезком от $\omega = 0$ до $\omega_1\tau/2 = \pi$, откуда $\Delta\omega\tau = \omega_1\tau = 2\pi$ или $\Delta\nu\tau = 1$

10.3 Спектр конечного пакета колебаний

Задан отрезок синусоиды $S_m \sin(\Omega t)$, длины τ

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S_m \sin(\Omega t) e^{-i\omega t} dt = \frac{S_m}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{S_m}{2\pi} \frac{1}{2i} [\frac{e^{i(\Omega-\omega)\tau/2} - e^{-i(\Omega-\omega)\tau/2}}{i(\Omega-\omega)} - \frac{e^{i(\Omega+\omega)\tau/2} - e^{-i(\Omega+\omega)\tau/2}}{i(\Omega+\omega)}] =$$

$$= \frac{S_m\tau}{4\pi i} [\frac{\sin(-\Omega+\omega)\tau/2}{(-\Omega+\omega)\tau/2} - \frac{\sin(\Omega+\omega)\tau/2}{(\Omega+\omega)\tau/2}]$$

Максимум при $\omega = \Omega$, полуширину $\Delta\omega = \omega - \Omega$ характеризуем условием $(-\Omega+\omega)\tau/2 = \pi = \Delta\omega\tau/2$ или $\Delta\omega\tau = 2\pi$, итого $\Delta\nu\tau = 1$

10.4 Спектр затухающий сигнал

$$f(t) = ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t) \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad t \geq 0$$

$$\rho(\omega) = \frac{a}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\omega t}e^{-\beta t}\frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2}dt =$$

$$= \frac{a}{4\pi}\int_0^\infty (exp[(-i\omega + i\omega_1 - \beta)t] + exp[(-i\omega - i\omega_1 - \beta)t])dt =$$

$$= \frac{a}{4\pi}(\frac{1}{\beta + i(\omega - \omega_1)} + \frac{1}{\beta + i(\omega + \omega_1)})$$

$$|\rho(\omega)| = \frac{a}{4\pi}(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + (\omega - \omega_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + (\omega + \omega_1)^2}})$$

Введём характерную щирину спектра энергии: $\Delta\omega_{1/2} = |\omega - \omega_1|$, так что

$$\frac{1}{1 + (\frac{\omega - \omega_1}{\beta})^2} = \frac{1}{2}$$

Имеем $\omega_{1/2}/\beta = \Delta\omega_{1/2}\tau = 1$

10.5 Добротность в спектральном представлении

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$$

где ω_0 - резонансная частота, $\delta\omega$ - ширина резонансной кривой на высоте $1/\sqrt{2}$ от максимальной

11

11.1 Система уравнений Максвелла

$$\boxed{\begin{array}{ll} \int \vec{E}d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} & \oint \vec{B}d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H}d\vec{l} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})d\vec{S} & \oint \vec{D}d\vec{S} = \int \rho dV \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array}}$$

Вместе с силой Лоренца $d\vec{p}/dt = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$ диф. уравнения составляют фундаментальную систему (для интегрально нен ужно)

11.2 Ток смещения

$$\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t} \qquad \oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$\oint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$$

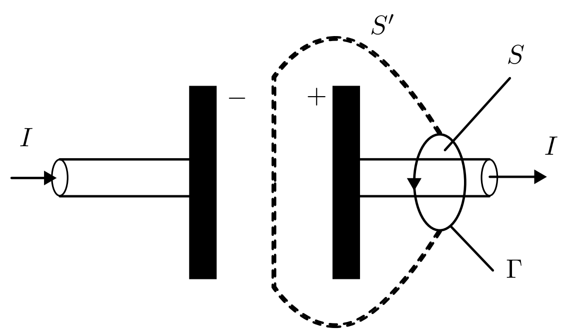
$\vec{j}_{\text{см}} = \partial \vec{D} / \partial t$ - ток смещения, $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - полный ток, его линии являются непрерывнами в отличии от линий тока проводимостки, токи проводимости замыкаются токами смещения.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{полн}} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности создавать магнитное поле. Ток смещения существует только там, где меняется со временем электрическое поле.

11.2.1 Ток смещения в конденсаторе



Циркуляция вектора H не должна зависить от выбора натянутой на контур поверхности. Но если учитывать только токи проводимости это условие не выполняется?! Дальше см. прошлый пункт.

11.3 Скин-эффект

В общем виде диффузионный процесс описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial n}{\partial t} \qquad j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

где n - концентрация, D - диффузионный коэффициент. Считая что концентрация равна 0 во всех точка правее l: $j \sim Dn/l$, в то же время $j = nv$, где v - скорость распространения, сдеовательно $v \sim D/l$, время диффундирования на расстояние l: $\tau \approx l/v \approx l^2/D$

$$l \sim \sqrt{D\tau}$$

Переходя к проникновению электромагнитного поля в металл:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D_e}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Для проводников в первом уравнении $j >> \partial D_e/\partial t$, в силу высокой проводимости, пренебрегаем вторым слогаемым.

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \vec{B} \qquad \nabla \times \vec{j} = -\lambda \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Полагая, что ток течёт по оси Y, магнитное поле направлено вдоль оси Z, и все величины зависят только от x:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\lambda \dot{B} \qquad j = -\frac{1}{\mu_0 \mu \lambda} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda B)$$

Проводя замену $n \to \lambda/c$ и полагая $D = \frac{1}{\mu_0 \mu \lambda}$, ток меняется своё направление за $T/2$ тогда толщина скин-слоя:

$$l \approx \sqrt{D\frac{T}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_0 \mu \lambda \nu}}$$