1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad a_{ij}(t) \in C(a,b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau} \qquad \forall t \in (a,b),\ t_0 \in (a,b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n2} \end{vmatrix}}_{=a_{11}W(t)} + \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{n2} \end{vmatrix}}_{=a_{nn}W(t)}$$

1) решения лин. завис $\Rightarrow$ $W(t) = 0$ на (a,b)

2) решения лин. независ:

$\dot{x}_1 = Ax_1 \ \dots \ \dot{x}_1 = Ax_1$, ФМР $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\dot{\Phi}(t) = A\Phi$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} \\ \dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} \\ \dots \\ \dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} \end{gathered}$$

$$(\dot x_{11}\,\dot x_{12}\,\dots\,\dot x_{1n}) = a_{11}(x_{11}\,x_{12}\,\dots\,x_{1n}) + a_{12}(x_{21}\,x_{22}\,\dots\,x_{2n}) \\ + \dots + a_{1n}(x_{n1}\,x_{n2}\,\dots\,x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=W(t)} + a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0} + \\ + \dots + a_{1n}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\dot W(t) = trA \cdot W(t) \qquad W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau}$$

□

2 Формула остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a,b)$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть $y_1, \dots, y_n$ - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)}d\xi}$$

Доказательство. 1) $y_1, \dots, y_n$ лин завис $\Rightarrow$ $W(x) = 0$

2) $y_1, \ldots, y_n$ - лин независ

$$t = x \; x_1 = y \; x_2 = y' \; \ldots \; x_n = y^{n-1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_n = y^n = -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \cdots - -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \ldots & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}d\tau} \qquad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi}$$

$\square$

Замечание.

$$W(x_0) = 0 \to W(x) = 0 \text{ на } (a, b)$$
$$W(x_0) \neq 0 \to W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $W(x) = y_1(x) = y_1(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(\xi)}{x_1(\xi)}d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)}d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение
   (a) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x)$ $\quad e^{ax} \quad x^a$
   (b) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_2}\right)' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)}d\xi} \to y_2(x)$ - линейно незав. решение $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} + C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. однор. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \qquad b_0(x), b_1(x) \in C(a,b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$p(x) > 0$ на (a,b), $p(x) \in C'(a,b)$, $q(x) \in C(a,b)$.

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} > 0$, $p(x) \in C'(a,b)$, $q = b_0e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} \in C(a,b)$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \qquad r(x) \in C(a,b)$$

(a) b_0 и $b_1 \in C(a,b)$

если $b_1(x) \in C'(a,b)$ замена $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, = \infty)$

$$y' = \varphi' z + \varphi z' \qquad y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''$$
$$x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi z' + \varphi z = 0$$

Зануляем коэфициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$
$$\varphi' = -\frac{1}{x^2} \qquad \varphi'' = \frac{2}{x^2}$$
$$\frac{2}{x^2} z + z'' - 2z\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z = 0$$
$$z'' + \frac{1}{x} z = 0$$

(b) $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' \qquad y'' = \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2$$
$$py'' + p'y' + qy = 0 \qquad p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy = 0$$
$$p\psi'' + p'\psi' = 0 \qquad (p\psi') = 0 \qquad p\psi' = 1$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi)} \to$ сторого монот и непр, $\exists$ обратная функция $x = x(y)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \qquad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p\frac{1}{p^2}\ddot{y} + qy = 0$$
$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$