

1 Некоторые свойства абсолютно интегральных функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале (a, b) , если выполняются два условия:

1. $\exists x_0, x_1, \dots, x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$, что на любом отрезке $[\xi, \eta]$ из (a, b) , не содержащем x_i функция $f(x)$ интегрируема по Риману.
2. $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном (a, b) . Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна и ограничена на (a, b) . $f(x)\varphi(x)$ - абсолютно интегрируемо на $[a, b]$

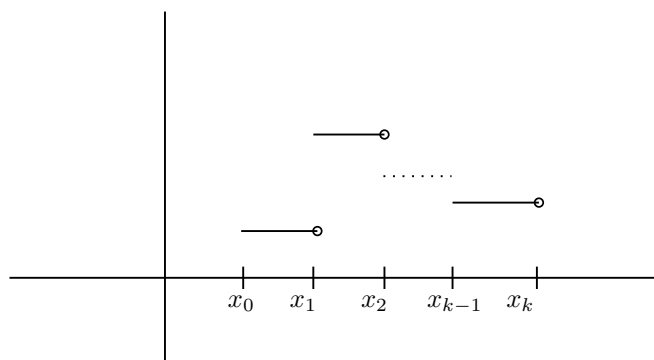
Доказательство. а) Рассмотрим $\forall [\xi, \eta] \subset (x_{i-1}, x_i)$. На нём $f(x)$ и $\varphi(x)$ - интегрируема по Риману, следовательно $f(x)\varphi(x)$ инт. по Риману $\Rightarrow 1$.

б) Так как $\varphi(x)$ - ограничена то $\exists M : |\varphi(x)| \leq M$ на (a, b) . Тогда $|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)|M$ на (a, b) . Т.к. $\int_a^b |f(x)| dx$ - сход., то $\int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx$ - сход. по признаку сравнения $\Rightarrow 2$.

$\Rightarrow f(x)\varphi(x)$ - абс. инт. на (a, b) □

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$ определённая на \mathbb{R} называется ступенчатой если \exists числа $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k : x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и c_1, c_2, \dots, c_k :

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \in (-\infty, x_0) \cup [x_k, +\infty) \end{cases}$$



Замечание. Если положить

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

то $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1.1 (О приближении абс инт функций ступенчатыми). Пусть $f(x)$ - абс. инт. на конечном или бесконечном (a, b) тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ ступенчатая функция $\varphi(x) : \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть для простоты записи у функции имеются только две особенности в точках a и b , т.е. $f(x)$ - инт по Риману на $\forall [\xi, \eta]$ из (a, b) .

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Из абсолютной инт. $f(x)$ следует \exists таких $[\xi, \eta] \in (a, b)$:

$$\int_a^\xi |f(x)| dx + \int_\eta^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $f(x)$ инт. по Риману на $[\xi, \eta]$ то для рассмотренного $\varepsilon > 0 \exists \delta : \forall$ разб. отр. $[\xi, \eta]$ $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n_\tau} (|\tau| < \delta), \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

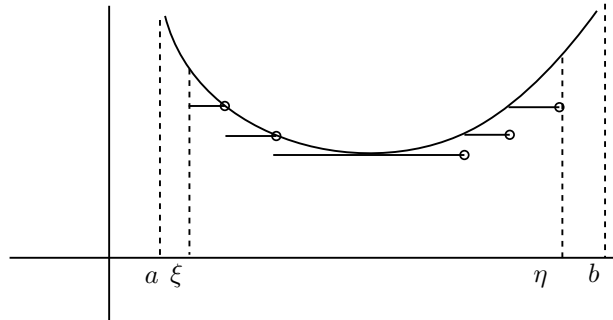
Выполняется $\left| \int_\xi^\eta f(x) dx - \sigma_\tau \right| < \varepsilon/2$, где σ_τ - сумма Дарбу.

$\left| \int_\xi^\eta f(x) dx - s_\tau \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, где $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i$ ($m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$).

Также $\int_\xi^\eta f(x) dx \geq s_\tau \Rightarrow 0 \leq \int_\xi^\eta f(x) dx - s_\tau \leq \varepsilon/2$.

Рассмотрим ступенчатую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin [\xi, \eta) \end{cases}$$



Отметим: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i = \int_\xi^\eta f(x) dx$, $\varphi(x) \leq f(x)$ на $[\xi, \eta]$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx = \int_a^\xi |f| dx + \int_\xi^\eta |f - \varphi| dx + \int_\eta^b |f| dx, \text{ но } \int_\xi^\eta |f - \varphi| dx = \int_\xi^\eta (f - \varphi) dx = \int_\xi^\eta f dx - s_\tau$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \square$$

Теорема 1.2 (Римана (об осцилляциях)). Пусть $f(x)$ абс. инт. на конечном или бесконечном интервале (a, b) , тогда $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = 0$ и $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0$

Доказательство. 1) Если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\xi, \eta) \\ 0, & x \notin [\xi, \eta) \end{cases}, \quad [\xi, \eta] \in (a, b)$$

То:

$$\int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx = \int_\xi^\eta \sin \nu x dx = -\frac{\cos \nu x}{\nu} \Big|_\xi^\eta \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

2) Если $\varphi(x)$ - ступенчатая, то она является линейно комбинацией рассмотренных одноступенчатых функций, поэтому для неё утверждение справедливо.

3) Рассмотрим абс. инт. на (a, b) функцию $f(x)$. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$.

По предыдущей теореме $\exists \varphi(x)$ - ступенчатая функция: $\int_a^b |f - \varphi| dx < \varepsilon/2$.

Т.к. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx = 0$, то $\exists \underline{\nu}_\varepsilon : \forall \nu (|\nu| > \underline{\nu}_\varepsilon) \hookrightarrow |\int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx| < \varepsilon/2$. Тогда $\forall \nu : (|\nu| > \underline{\nu}_\varepsilon)$ выполняется:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \nu x dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \nu x dx + \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \nu x dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx \right| < \\ &< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Подчёркнутое означает, что $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0$. Аналогично косинус. \square

Замечание. Интервал (a, b) при исследовании абсолютно интегрируемых на другой промежуток $[a, b], [a, b), (a, b]$

2 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 2.1. Ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ называется тригонометрическим рядом, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Определение 2.2. Множество функций $\{u_n(x)\} = \{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ называется тригонометрической системой

Свойства тригоном. сист.

1. Триг. сист. "ортогональна" в смысле $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) u_k(x) dx = 0, \forall n, k : n \neq k$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} u_n^2(x) dx = \pi$, при $n \geq 2$

Доказательство. 1) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x) dx = 0$$

□

Доказательство. 2) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \pi + 0 = \pi$$

□

Лемма 2.1. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

и ряд сходится равномерно тогда:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Домножим 2.1 на $\cos mx$. Полученный ряд будет равномерно сходиться.

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} \cos mx (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| = |\cos mx| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right|$$

Из выполнения усл. Коши равномерной сходимости для исходного ряда 2.1 следует выполнение усл. Коши равномерной сходимости полученного в результате умножения ряда.

Тогда имеем право интегрировать равенство (по x от $-\pi$ до π)

$$\begin{aligned} f(x) \cos mx &= \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} \cos mx (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi \\ &\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \end{aligned}$$

Второе равенство в 2.2 получается аналогично. □

Определение 2.3. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi; \pi]$ функция. Тригонометрический ряд с коэффициентами 2.2 называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты a_k, b_k - коэффициентами Фурье. Имеет место запись (здесь \sim означает соответствие):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Перефразируем лемму:

Лемма 2.2 (2.1'). Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

где $\alpha > 1$ является рядом Фурье своей суммы, так как он равномерно сходится по признаку Веерштрасса

Замечание. Если функция абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то интегралы в 2.2 сходятся абсолютно по 1.1

Замечание. Если $f(x)$ - 2π периодична и абс. инт. на каком-либо $[a - \pi, a + \pi]$, то она будет абс. инт. на \forall другом таком отрезке и интегралы (2.2) не зависят от отрезка.

Замечание. Любую абсолютно интегрируемую на $[a - \pi, a + \pi]((a - \pi, a + \pi); (a - \pi, a + \pi], [a - \pi, a + \pi))$ можно продолжить до 2π периодической функции, возможно доопределив или переопределив функцию в граничных точках. Интегралы при этом не меняются.

Следствие 2.1. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ - посл. коэфф. Фурье 2π периодической и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

По 1.1 $f(x) \cos nx, f(x) \sin nx$ - абс. инт.. По Т. Римана получаем нужный результат.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

Не может быть рядом Фурье какой-либо абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции.

2.1 Ядро Дирихле. Принцип локализации

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = S_n(x, b) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

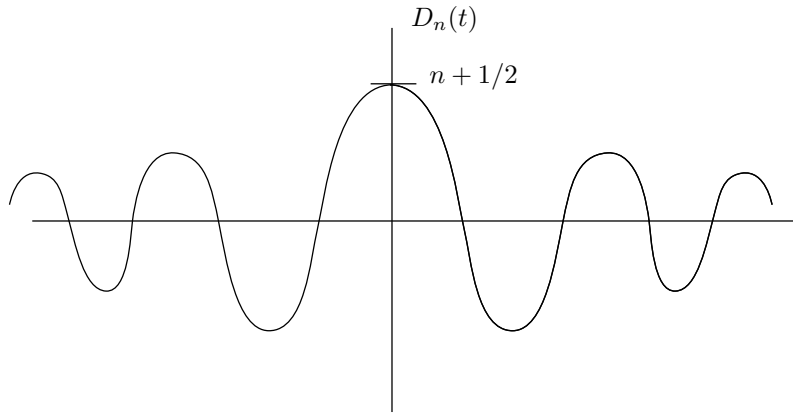
Преобразуем:

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx dt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \cdot \sin kx = \\
 &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt \\
 S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt
 \end{aligned}$$

Определение 2.4. Функция

$$D_n(t) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t) \right)$$

называется ядром Дирихле



Свойства ядра Дирихле:

1. $D_n(t)$ - четная, 2π период. и непр. функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \pi$
3. $\max |D_n(t)| = \max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
4. $D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$, при $t \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. Следует из аналогичных свойств слагаемых
2. Очев
3. $\frac{1}{2} - n \leq D_n(t) \leq \frac{1}{2} + n = D_n(0)$
- 4.

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \\
&= \frac{\sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \cos t + 2 \sin \frac{t}{2} \cos 2t + \dots + 2 \sin \frac{t}{2} \cos nt}{2 \sin \frac{t}{2}} = \\
&= \frac{\sin \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{3t}{2} + \dots - \sin(n - \frac{1}{2})t + \sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} = \\
&= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.1 (Принцип локализации). Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t) + f(x_0-t))dt$ существуют или нет одновременно. В случае существования равны.

Замечание. Таким образом сходимость и значение суммы ряда Фурье 2π пер. и абс. инт. на $[-\pi, \pi]$ зависит только от свойств функции в сколь угодно малой окрестности.

Доказательство. Преобр. S_n :

$$\begin{aligned}
S_n(x_0) &\underset{t=\tau+x_0}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0 + \tau) D_n(\tau) d\tau \\
S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + \tau) D_n(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^0}_{\tau=-t} + \underbrace{\int_0^{\pi}}_{\tau=t} \right) f(x_0 + \tau) D_n(\tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x_0 - t) D_n(-t) dt + \int_0^{\pi} f(x_0 + t) D_n(t) dt \right) \\
S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) dt
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \frac{\sin(n + \frac{1}{2}t)}{2 \sin \frac{t}{2}} (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) dt$$

$$\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \quad \text{на } [\delta, \pi]$$

Тогда $\frac{(f(x_0-t)+f(x_0+t))}{2 \sin \frac{t}{2}}$ - абс. инт на $[\delta, \pi]$ (см 1.1).

Тогда 2-ой инт. $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (Т. Римана) и получаем нужный результат. \square

2.2 Признаки сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 2.2 (Признак Дини). Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть в точке x_0 существуют $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$. Пусть для некоторого $\delta > 0$ $\int_0^\delta \frac{|f_{x_0}^*(t)|}{t} dt$ (где $f_{x_0}^*(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$) сходится. Тогда ряд Фурье сходится в точке x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Рассматриваем

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t)(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_{x_0}^*(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_{x_0}^*(t) \frac{\sin(n + .5)t}{2 \sin .5t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f_{x_0}^*(t)}{t} \frac{.5t}{\sin .5t} \sin(n + .5)t dt$$

Функция $f_{x_0}^*$ абс. инт. на $[0, \pi]$ (т.к. по сравнению с абс. инт функциями $f(x_0 + t)$ и $f(x_0 - t)$ у функции $f_{x_0}^*(t)$ появилась лишь одна особенность при $t = 0$, в окр. кот. функция по условию абс. инт. Функция $\frac{t/2}{\sin t/2}$ доопределима в до непрерывной и ограниченной на $[0, \pi]$ функции.

По лемме 1.1 $\frac{f_{x_0}^*}{t} \frac{t/2}{\sin t/2}$ - абс. инт. на $[0, \pi]$. По Т. Римана 1.2 интеграл $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow S_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

\square

Определение 2.5. Функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 правостороннему (левостороннему) условию Гёльдера с показателем α ($\alpha \in (0, 1]$) если $\exists \delta > 0, M > 0 : \forall t \in (0, \delta) \hookrightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| < Mt^\alpha$.
(-) (-)

Замечание. При α это условие называется также условием Липшица.

Определение 2.6. Пусть $\exists f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$. Введём обобщение односторонней производной

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Лемма 2.3. Если \exists (конечная) $f'_{\pm}(x_0)$, то $f(x)$ удовл. правостороннему (левостороннему) усл. Липшица.

Доказательство. (для $f'(x_0)$)

$$\exists f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \Rightarrow \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} = f'_+(x_0) + o(1)_{t \rightarrow +0}$$

$$\Rightarrow \text{В некоторой окр. } (0, \delta) \text{ выполнится } \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} \leq |f'_+(x_0)| + 1$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq (|f'_+(x_0)| + 1)t$$

□

Теорема 2.3 (Признак Липшица). Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ выполняются оба условия Гёльдера. Тогда ряд Фурье сходится в x_0 к значению $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Доказательство. Пусть выполняются оба условия Гёльдера. Тогда на $(0, \delta)$ выполняются:

$$\frac{|f^*_{x_0}|}{t} \leq \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 + 0)|}{t} + \frac{|f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)|}{t} \leq \frac{2Mt^\alpha}{t} = \underbrace{\frac{2M}{t^{1-\alpha}}}_{\text{абс. инт.}}$$

$$\Rightarrow \text{по признаку сравнения } \int_0^\delta \frac{|f^*_{x_0}(t)|}{t} dt \text{ сход}$$

$$\Rightarrow \text{по признаку Дини } S_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

□

Следствие 2.2. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть $\exists f(x_0 \pm 0)$ и $f'_\pm(x_0)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Доказательство. Следует из признака Липшица и леммы.

□

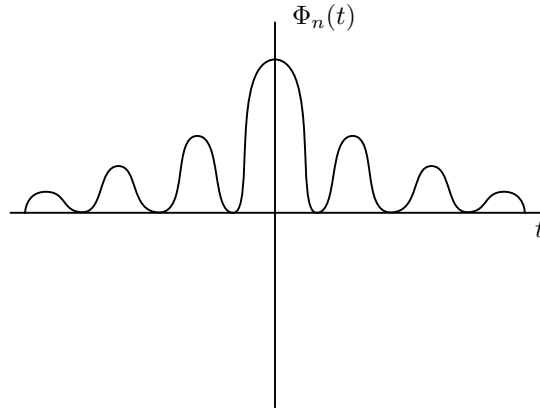
3 Суммирование рядов методом ср. арифм.

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция.

Определение 3.1. $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\dots+S_n(x)}{n+1}$ - сумма Фейера, где $S_k(x)$ - частичная сумма ряда Фурье.

Определение 3.2. $\Phi_n(x) = \frac{D_0(x)+D_1(x)+\dots+D_n(x)}{n+1}$ - ядро Фейера, где $D_k(x)$ - ядра Дирихле.

Из формулы 2.3 (принцип локализации) $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)dt$ следует $\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x+t)dt$.



Свойства ядра Фейера:

1. $\Phi_n(t)$ - четная, 2π периодическая, непр функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \pi$
3. $\max \Phi_n(t) = \Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$
4. $\Phi_n(t)$ - неотр.
5. $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}$ при $t \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Доказательство. 1. из св. ядра Дирихле

2. из св. ядра Дирихле

3. Т.к. $\max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned}\max \Phi_n(t) &= \Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}(D_0(0) + D_1(0) + \dots + D_n(0)) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + n \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n}{2} (n+1) = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

4. из 5)

5.

$$\begin{aligned}(n+1)\Phi_n &= D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t) = \\ &= \frac{\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3}{2}t + \dots + \sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{3}{2}t \sin \frac{t}{2} + \dots + 2 \sin(n + \frac{1}{2})t \sin \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{\cos 0 - \cos t + \cos t - \cos 2t + \dots + \cos nt - \cos(n+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}\end{aligned}$$

□