

1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad a_{ij}(t) \in C(a, b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau} \quad \forall t \in (a, b), t_0 \in (a, b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} W(t) \qquad \qquad \qquad = a_{nn} W(t)$

1) решения лин. завис $\Rightarrow W(t) = 0$ на (a, b)

2) решения лин. независ:

$$\dot{x}_1 = Ax_1 \dots \dot{x}_n = Ax_n, \text{ ФМР } \Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{\Phi}(t) = A\Phi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1}$$

$$\dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2}$$

\dots

$$\dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn}$$

$$(\dot{x}_{11} \dot{x}_{12} \dots \dot{x}_{1n}) = a_{11}(x_{11} x_{12} \dots x_{1n}) + a_{12}(x_{21} x_{22} \dots x_{2n}) \\ + \dots + a_{1n}(x_{n1} x_{n2} \dots x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \\ = W(t) \quad = 0 \\ + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \\ = 0$$

$$\dot{W}(t) = \text{tr} A \cdot W(t) \quad W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau}$$

□

2 Формула Остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a, b)$; y_1, y_2, \dots, y_n - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть y_1, \dots, y_n - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} d\xi}$$

Доказательство. 1) y_1, \dots, y_n лин завис $\Rightarrow W(x) = 0$

2) y_1, \dots, y_n - лин независ

$$\begin{aligned}
 t = x \quad x_1 = y \quad x_2 = y' \quad \dots \quad x_n = y^{n-1} \\
 \begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = y^n = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \dots - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 \end{cases} \\
 A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \\
 W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau} \quad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}
 \end{aligned}$$

□

Замечание.

$$\begin{aligned}
 W(x_0) = 0 &\rightarrow W(x) = 0 \text{ на } (a, b) \\
 W(x_0) \neq 0 &\rightarrow W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)
 \end{aligned}$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, W(x) = y_1(x) = y_1(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_0(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' y_1^2 = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение

(а) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x) e^{ax} x^a$

(б) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi} \rightarrow y_2(x)$ - линейно незав.
решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. однор. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \quad b_0(x), b_1(x) \in C(a, b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$$p(x) > 0 \text{ на } (a, b), p(x) \in C'(a, b), q(x) \in C(a, b).$$

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} > 0, p(x) \in C'(a, b), q = b_0 e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} \in C(a, b)$$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \quad r(x) \in C(a, b)$$

$$(a) \quad b_0 \in C(a, b) \text{ и } b_1(x) \in C'(a, b) \text{ замена } y(x) = \varphi(x)z(x)$$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $b_0 = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} y' &= \varphi' z + \varphi z' & y'' &= \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z'' \\ x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi' z + 2\varphi z' + \varphi z &= 0 \end{aligned}$$

Зануляем коэффициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'}{\varphi} &= -\frac{1}{x} & \varphi(x) &= \frac{1}{x} \\ \varphi' &= -\frac{1}{x^2} & \varphi'' &= \frac{2}{x^2} \\ \frac{2}{x^2} z + z'' - 2z \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z &= 0 \\ z'' + \frac{1}{x} z &= 0 \end{aligned}$$

(b) $b_0(x)$ и $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' & y'' &= \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2 \\ py'' + p'y' + qy &= 0 & p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy &= 0 \\ p\psi'' + p'\psi' &= 0 & (p\psi') &= 0 & p\psi' &= 1 \end{aligned}$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{p(\xi)} \rightarrow$ строго монот и непр, \exists обратная функция $x = x(t)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \quad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p \frac{1}{p^2} \ddot{y} + qy = 0$$

$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$

(с) Преобразование Фурье-Лиувилля - приведение к канон. виду

i. $t = \varphi(x)$ к виду $\ddot{y} + c(t)\dot{y} \pm y = 0$

ii. $c(t) \in C'(t_1, t_2)$, $y(t) = \psi(t)z(t)$ к канон. виду $\ddot{y} + \alpha(t)y = 0$

Пример.

$$\begin{aligned}
xy'' + 2y' + y &= 0 \quad x > 0 \\
y' &= \dot{y}\varphi'(x) \quad y'' = \dot{y}\varphi''(x) + \ddot{y}\varphi'^2 \\
x\dot{y}\varphi'' + x\ddot{y}\varphi'^2 + 2\dot{y}\varphi' + y &= 0 \\
x\varphi'^2 = 1 \quad \varphi' &= \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \varphi = 2\sqrt{x} \\
t = 2\sqrt{x} \quad \varphi'' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \\
\ddot{y} + \dot{y} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) + y &= 0 \\
\ddot{y} + \dot{y} \frac{3}{2\sqrt{x}} + y = 0 \quad \ddot{y} + \dot{y} \underbrace{\frac{3}{t}}_{c(t)} + y &= 0
\end{aligned}$$

При $t > 0$ непр дифф., делаем второй шаг

$$\begin{aligned}
y(t) &= z(t)\psi(t) \\
\ddot{z}\psi(t) + 2\dot{z}\dot{\psi} + z\ddot{\psi} + \frac{3}{t}\dot{z}\psi + \frac{3}{t}z\dot{\psi} + z\psi &= 0 \\
2\dot{\psi} + \frac{3}{t}\psi &= 0 \quad \psi = \frac{1}{t^{3/2}} \\
\dot{\psi} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{t^{5/2}} \quad \ddot{\psi} = \frac{15}{4} \frac{1}{t^{7/2}} \\
\ddot{z} \frac{1}{t^{3/2}} + z \left(\frac{15}{4} \frac{1}{t^{7/2}} - \frac{9}{2} \frac{1}{t^{7/2}} + \frac{1}{t^{3/2}} \right) &= 0 \\
\ddot{z} + z \left(1 - \frac{3}{4t^2} \right) &= 0 \quad t > 0
\end{aligned}$$

4.2 Асимптотический вид решения

$$\ddot{y} + y(m + \beta(t)) = 0 \quad m \neq 0$$

Теорема 4.1. Если $\beta(t)$ непр на $[t_0, +\infty)$ и $\beta(t) = O(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$ при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$, то

- $m > 0$: $y(t) = C_1 \cos \sqrt{mt} + C_2 \sin \sqrt{mt} + O(\frac{1}{t^\varepsilon})$
- $m < 0$: $y(t) = C_1 e^{\sqrt{|m|}t} (1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon})) + C_2 e^{-\sqrt{|m|}t} (1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon}))$

Пример.

$$\begin{aligned} \ddot{z} + z \left(1 - \frac{3}{4t^2} \right) &= 0 \quad t > 0 \\ m = 1 \quad \beta(t) &= -\frac{3}{4t^2} \quad \text{непр } (0, +\infty) \quad \varepsilon = 1 \\ z(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + O(t) \\ t = 2\sqrt{x} \quad y(t) &= z(t) \frac{1}{t^{3/2}} \\ y(t) &= C_1 \frac{\cos t}{t^{3/2}} + C_2 \frac{\sin t}{t^{3/2}} + O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right) \\ y(x) &= \tilde{C}_1 \frac{\cos 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + \tilde{C}_2 \frac{\sin 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right) \end{aligned}$$

Верно при $x \rightarrow \infty$

4.3 Исследование нулей решения уравн. второго порядка

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \quad b_0, b_1 \in C(a, b)$$

Определение 4.1. Точка x_0 называется нулём решения $y(x)$, если $y(x_0) = 0$

Теорема 4.2. Пусть $y(x)$ нетривиальное решение и $y(x_0) = 0$ тогда $y'(x_0) \neq 0$

Доказательство. Пусть $y'(x_0) = 0$, получаем задачу Коши $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ единст. реш., противоречит с нетрив реш. \square

Теорема 4.3. Любое нетривиальное решение может иметь на отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ не более конечного числа нулей.

Доказательство. Пусть число нулей бесконечно на $[c, d]$, счётное подмнож x_1, x_2, \dots, x_n - ограниченная послед, выделяем сход. подпослед. $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [c, d]$.

$$y(x_{n_k}) = 0, y(x_{n_k}) \rightarrow y(x_0) = 0 \text{ непр. } y(x)$$

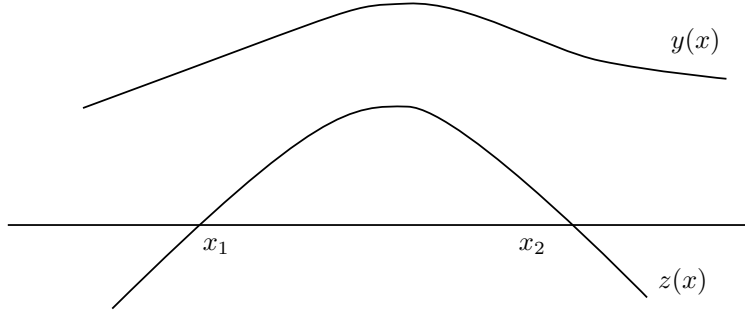
$$y(x) - \text{решение} \Rightarrow \exists y'(x_0)$$

$$y'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

Противоречие с пред. теоремой. \square

Теорема 4.4 (Теорема сравнения Штурма). Пусть $(p(x)z')' + q(x)z = 0$, $(p(x)y')' + Q(x)y = 0$, $p(x) \in C'(a, b)$, $q, Q \in C(a, b)$, $p(x) > 0$ на (a, b) и пусть x_1 и $x_2 \in (a, b)$ два последовательных нуля нетривиального решения $z(x)$ и $q(x) \leq Q(x)$ на $[x_1, x_2]$.

Тогда любое решение $y(x)$ имеет хотя бы один нуль на $[x_1, x_2]$.



Доказательство. Пусть $y(x) \neq 0$ на $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned}
 & (pz')'y + qzy' - (py')'z - Qyz = 0 \\
 & \underbrace{p'z'y + pz''y - p'y'z - py''z}_{(p(z'y - zy'))'} + yz(q - Q) = 0 \quad \int_{x_1}^{x_2} \\
 & p(z'y - zy')\big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} yz(q - Q)dx = 0 \\
 & \underbrace{\underbrace{p(x_2)}_{>0} \underbrace{(z'(x_2))}_{<0} \underbrace{y(x_2)}_{>0} - \underbrace{z(x_2)}_{=0} \underbrace{y'(x_2))}_{<0}}_{<0} - \underbrace{p(x_1)}_{>0} \underbrace{(z'(x_1))}_{>0} \underbrace{y(x_1)}_{>0} - \underbrace{z(x_1)}_{=0} \underbrace{y'(x_1))}_{<0}}_{<0} + \\
 & + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{yz}_{\geq 0} \underbrace{(q - Q)}_{< 0} dx}_{\leq 0} = 0
 \end{aligned}$$

Противоречие. \square

Следствие 4.1 (Теорема о перемежаемости нулей). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линейно независимых решения $(p(x)y(x))' + q(x)y = 0$, $p \in C'(a, b)$, $p > 0$ на (a, b) , $q \in C(a, b)$ и x_1 и x_2 два последовательных нуля $y_1(x)$ тогда $y_2(x)$ имеет ровно один нуль на (x_1, x_2) .

Доказательство. Пусть $y_1(x_0) = 0$ и $y_2(x_0) = 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Противоречие с линейной независ.

$$(py_1')' + qy_1 = 0 \quad (py_2')' + qy_2 = 0$$

По теореме Штурма y_2 имеет хотя бы один нуль на (x_1, x_2) .

Пусть два нуля $y_2(x_3) = y_2(x_4) = 0$, тогда по теореме сравнения Штурма $\exists x_5 : y_1(x_5) = 0$ противоречит с соседством x_1 и x_2 . \square

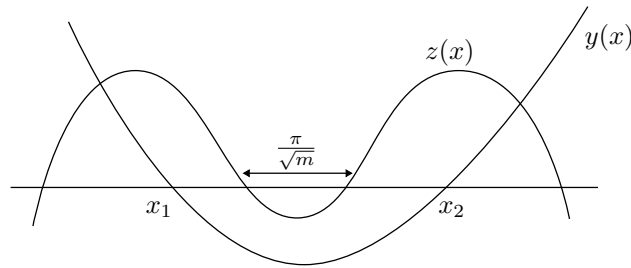
4.4 Оценка расстояние между нулями

Теорема 4.5. Пусть $y'' + qy = 0$, $q \in C(a, b)$, тогда для любого нетривиального решения расстояние между соседними нулями удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}} \quad 0 < m \leq q(x) \leq M \text{ на } (a, b)$$

Доказательство. Пусть $\Delta > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$

$$z'' + mz = 0 \quad z(x) = \sin(\sqrt{m}(x + \alpha)) \quad \forall \alpha$$



$m \leq q$ по т. ср. Штурма между двумя нулями $z(x) \exists$ нуль $y(x)$. Противоречие.

Аналогично $\Delta < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ □

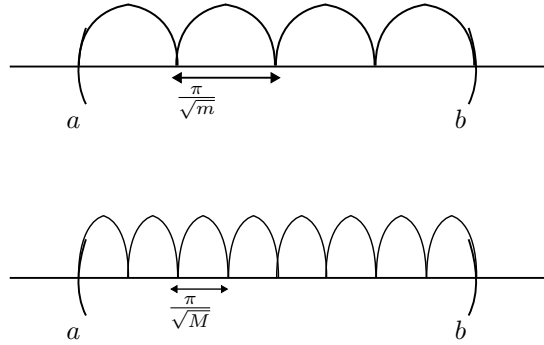
4.5 Оценка числа нулей на интервале

Теорема 4.6. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a, b)$, $0 < m \leq Q(x) \leq M$ на (a, b) , тогда число нулей любого нетривиального решения на (a, b) удовлетворяет неравенству:

$$\left[\sqrt{m} \frac{b-a}{\pi} \right] - 1 \leq N \leq \left[\sqrt{M} \frac{b-a}{\pi} \right] + 1$$

где $[\dots]$ - целая часть числа.

Доказательство. $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ - расстояние между соседними нулями.



□

Теорема 4.7. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a, b)$, $Q(x) \leq 0$ на (a, b) , тогда число нулей любого нетривиального решения на (a, b) удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq N \leq 1$$

(не более одного нуля)

Доказательство. Пусть 2 нуля x_1, x_2

$$z'' + 0z = 0 \Rightarrow z'' = 0$$

По т. сравн. Штурма на $[x_1, x_2]$ лежит хотя бы один нуль $z'' = 0$ любого решения. □

Замечание. • в Т. 1: (a, b) - открытое и ограниченное множество

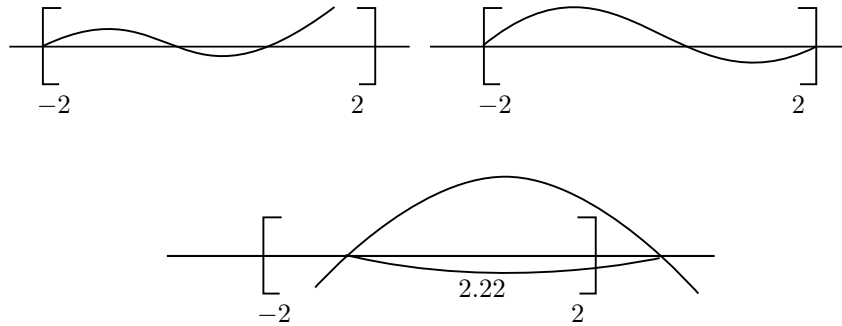
• в Т. 2 $(a, b), [a, b], (a, b]$ и может быть неогран.

Пример. Доказать \forall нетрив. реш $y'' + \sqrt{4-x^2}y = 0$ имеет на $[-2, 2]$ не более 2 нулей.

$$0 \leq Q(x) = \sqrt{4-x^2} \leq 2$$

$$(-2, 2) \quad N \leq \underbrace{\left[\sqrt{2} \frac{(2 - (-2))}{\pi} \right]}_{1.8} + 1 = 2$$

Пусть 3 нуля на $[-2, 2]$.



$$z'' + 2z = 0$$

$$z = \sin \sqrt{2}(x + \alpha) \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.22$$

Можем подобрать α так чтобы попадал только один ноль в $[-2, 2]$.

4.6 Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$x > 0 \quad \nu \in \mathbb{R} \quad \nu \geq 0$$

Попытаемся привести к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
y &= z(x)\varphi(x) \\
x^2(z''\varphi + z\varphi'' + 2z'\varphi') + x(z'\varphi + z\varphi') + (x^2 - \nu^2)z\varphi &= 0 \\
2x^2\varphi' + x\varphi &= 0 \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dx}{2x} \\
\varphi &= \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \varphi' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \quad \varphi'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^{3/2}} \\
z''x^{3/2} + z\left(\frac{3}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{3/2} - \nu^2\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= 0 \\
z'' + z\left(1 + \frac{.25 - \nu^2}{x^2}\right) &= 0 \\
\nu = \frac{1}{2} \quad z'' + z &= 0 \quad y(z) = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Одно решение ограничено (синус), а другое нет (косинус). Может быть это характерно для всех решений уравнения?

$$\begin{aligned}
W(x) &= W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{\xi}{\xi^2} d\xi} = W(x_0)\frac{x_0}{x} \\
W(x) &= \frac{C}{x} = y_1y_2' - y_2y_1' \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty
\end{aligned}$$

Действительно что-то стремится к бесконечности (или производные или сама функция).

$$z'' + z\left(1 + \underbrace{\frac{.25 - \nu^2}{x^2}}_{\alpha(x)}\right) = 0$$

Чтобы было почти с пост. коэф. α непр на $[x_0, +\infty)$, $\alpha(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
z(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)}_{O\left(\frac{1}{x}\right)} \\
y(x) &= C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}_{x \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

Обобщённый степенной ряд:

$$y(x) = x^\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

Полагаем что дифф. нужно число раз и после нахождения решения задним числом смотрим так ли это.

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} - \nu^2 a_k x^{k+\alpha} + a_k x^{k+\alpha+2}] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k)x^k + a_k x^{k+2}] = 0$$

$$k=0: a_0\alpha^2 - a_0\nu^2 = 0$$

$$k=1: a_1(1+\alpha)^2 - a_1\nu^2 = 0$$

$$k \geq 2: a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k + a_{k-2} = 0$$

$$a_0 \neq 0 \quad \alpha = \pm \nu \quad \alpha = \nu \geq 0$$

$$a_1(1+\nu^2+2\nu-\nu^2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{\nu^2 - (k+\nu)^2} = \frac{-a_{k-2}}{k(k+2\nu)}$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+2\nu)} = \frac{-a_{2n-2}}{4n(n+\nu)}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(a+\nu)} \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{\underbrace{4 \cdot 4}_{2^4} \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_6 = \frac{a_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(3+\nu)(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+\nu)(2+\nu) \dots (n+\nu)}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad s > 0 \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

$$\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)\Gamma(n+\nu) = \dots = (n+\nu)(n+\nu-1) \dots (\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n + \nu + 1)}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\overbrace{k}^{\nu} + \alpha}$$

$$\underbrace{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}_{\text{ф. Бесселя 1го рода}} = J_\nu(x)$$

Постфактум доказываем дифференцируемость (признак Доломбера):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(.5x)^2}{(n+1)(n+\nu+1)} \right| = 0$$

Получаем что радиус сходимости бесконечен ($R = \infty$), то есть можем бесконечно диф. где угодно.

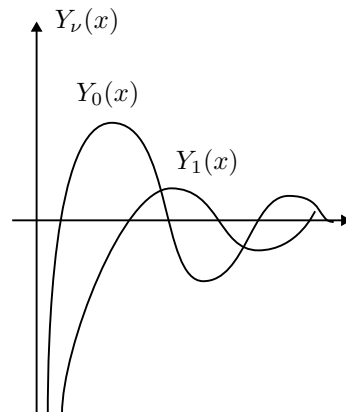
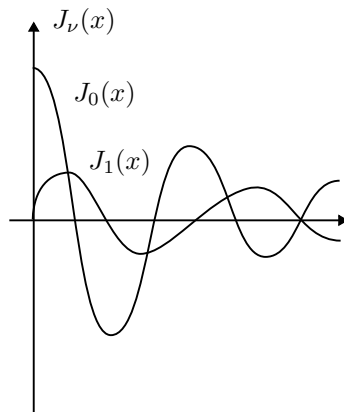
$J_\nu(x)$ беск. дифф $x > 0$.

Ищем второе решение через ФОЛ:

$$\left(\frac{y_2}{J_\nu(x)} \right)' = \frac{1}{J_\nu^2(x)} \frac{1}{x}$$

$y_2 = Y_\nu(x)$ функция Бесселя второго рода.

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$



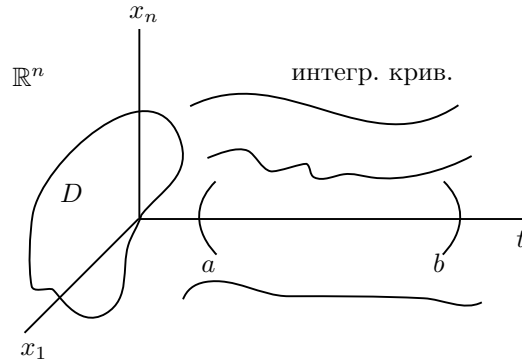
5 Автономные системы дифф. ур.

Определение 5.1. Нормальная система называется автономной, если правая часть не зависит явно от t .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dots \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases} & \quad f_i(x) \in C^1(D) \quad D \in \mathbb{R}^n \quad t \in (a, b) \end{aligned}$$

через $\forall t_0 \in (a, b)$ и $\forall x_0 \in D$ проходит единственная интегральная кривая.

Определение 5.2. Точка $\tilde{x} \in D$ называется положением равновесия автономной системы, если $F(\tilde{x}) = 0$.



Определение 5.3. Фазовая траектория - проекция инт. кр. на \mathbb{R}^n , где \mathbb{R}^n - фазовое пространство.

5.1 Свойства фазовых траекторий

1. Если $x = \varphi(t)$ решение системы на (a, b) (автономн.), то $\forall c \ x = \varphi(t+c)$ тоже решение на $(a-c, b-c)$.

Доказательство.

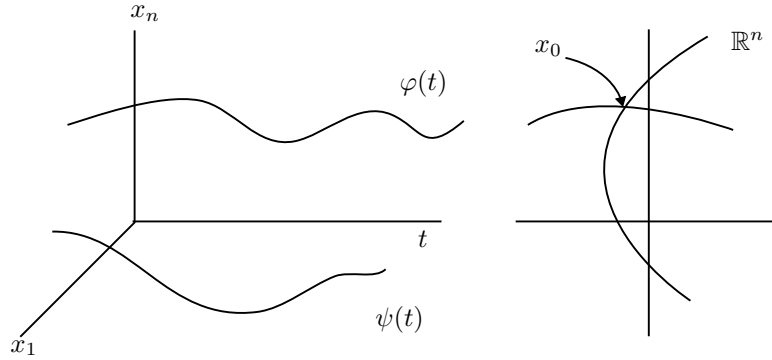
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= F(\varphi(t)) \quad t = \tau + c \\ \frac{d\varphi(\tau + c)}{d(\tau + c)} &= F(\varphi(\tau + c)) \end{aligned}$$

$\varphi(\tau + c) \rightarrow$ решение

□

2. Фазовые траектории не могут пересекаться

Доказательство. Пусть есть два решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на (a, b)



$\exists t_1, t_2 \in (a, b) : \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0, \chi(t) = \varphi(t + t_1 - t_2)$ - решение

$\chi(t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0$ противоречит Т. единст.

□

3. Пусть \tilde{x} положение равновесия, тогда $x = \varphi(t) = \tilde{x}$ - решение системы, а точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ - фазовая траектория.

Доказательство.

$$F(\tilde{x}) = 0 \quad \dot{x} = 0$$

Проекция фазовой траектории - точка.

□

4. Фазовая траектория, отличная от положения равн. является гладкой кривой.

Доказательство. $x = \varphi(t)$ - параметрически заданная кривая в фазовом пространстве

$\dot{x} = F(x), F \in C', \varphi(t)$ - непр. дифф. на (a, b) ,

$\dot{x} = \dot{\varphi}(t) \neq 0$ т.к. не явл. полож. равн.

□

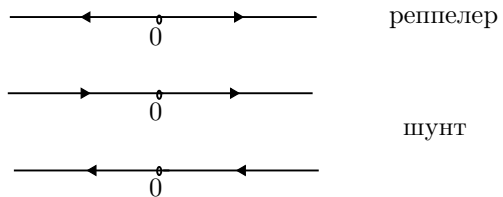
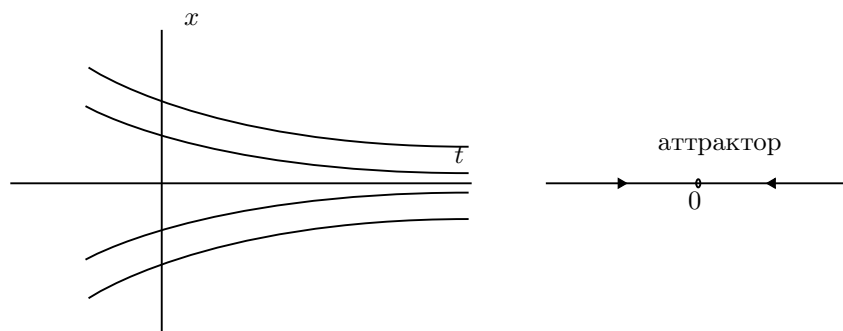
5. Фазовые траектории:

- точки
- незамкнутые гладкие кривые без самопересечения
- замкнутые гладкие кривые без самопересечения

5.2 Классификация положений равновесия

5.2.1 n=1

$$\dot{x} = -x \quad x(t) = Ce^{-t} \quad \tilde{x} = 0$$



5.2.2 n=2

$$\dot{x} = Ax \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5.2.3 Изолированные положения равновесия при n=2

$$\begin{aligned} \det A &\neq 0 & Ax &= 0 & \tilde{x} &= 0 \\ \lambda_1 &\neq 0 & \lambda_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

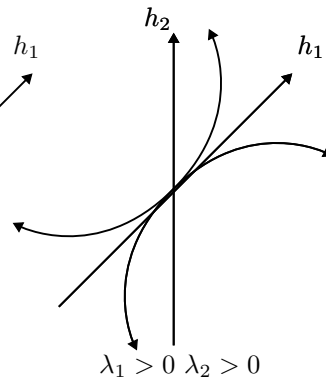
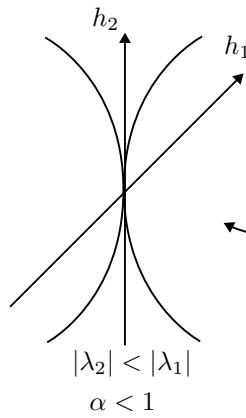
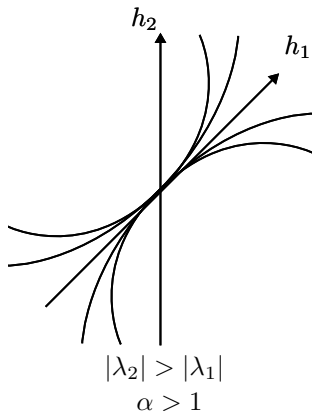
λ_1 и λ_2 действительны, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, h_1 и h_2 - базис

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = C_2 \left(\frac{\xi_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, & C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

1. $\alpha > 0$,



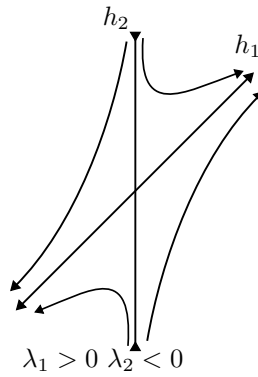
h_1 и h_2 - фазовые траектории

$\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ неустойчивый узел

$\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ устойчивый узел

2. $\alpha < 0$, $\xi_2 = A \xi_1^\alpha$

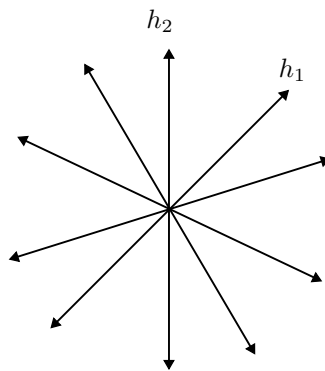
λ_1 и λ_2 разные знаки, седло



λ_1, λ_2 - действ., $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1. Два собственных вектора h_1 и h_2

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} h_2 \\
 \xi_1 &= C_1 e^{\lambda t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t} \\
 \begin{cases} \xi_2 = \frac{C_2}{C_1} \xi_1 & , C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

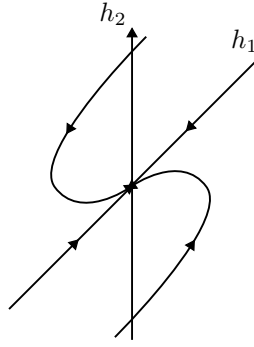


$\lambda > 0$ неустойчивый дикритический узел

$\lambda < 0$ устойчивый дикритический узел

2. h_1 - собственный вектор, h_2 - присоед.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 h_1 e^{\lambda t} + C_2 (h_1 t + h_2) e^{\lambda t} \\
 \xi_1 &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t} \\
 \begin{cases} \xi_1 = C_1 \frac{\xi_2}{C_2} + \xi_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{C_2} \\ \xi_2 = 0 \end{cases} &, C_2 \neq 0 \\
 &, C_2 = 0
 \end{aligned}$$



h_1 - фазовая траектория, h_2 - не явл. фаз. тр.

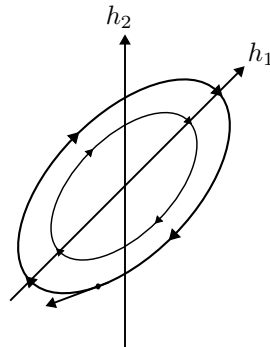
$\lambda > 0$ неустойчивый вырожденный узел

$\lambda < 0$ устойчивый вырожденный узел

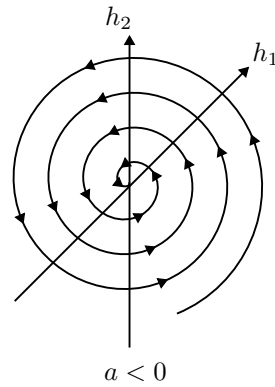
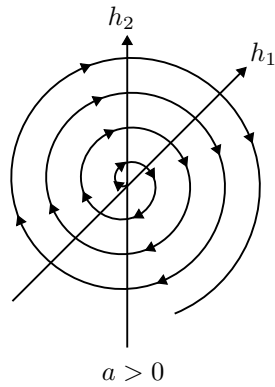
λ_1, λ_2 - комплексные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b > 0$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= a + ib \rightarrow h \\
 h_1 &= \operatorname{Re} h \quad h_2 = \operatorname{Im} h \\
 x(t) &= C_1 \operatorname{Re}(h e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(h e^{\lambda_1 t}) \\
 h e^{\lambda t} &= (h_1 + i h_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) = \\
 &= e^{at} [(h_1 \cos bt - h_2 \sin bt) + i(h_2 \cos bt + h_1 \sin bt)] \\
 x(t) &= h_1 \underbrace{(C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt)}_{\xi_1} + h_2 \underbrace{(-C_1 e^{at} \sin bt + C_2 e^{at} \cos bt)}_{\xi_2} \\
 C_1 &= A \cos \theta \quad A \geq 0 \\
 C_2 &= A \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi) \\
 \xi &+ e^{at} \cos(\theta - bt) A \\
 \xi_2 &= e^{at} \sin(\theta - bt) A
 \end{aligned}$$

1. $a = 0$, центр



2. $a \neq 0$, фокус



$a > 0$ неустойчивый фокус

$a < 0$ устойчивый фокус

5.2.4 Неизолированные полож. равн. при $n=2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax & x &\in \mathbb{R}^2 \\ Ax &= 0 & \det A &= 0 \end{aligned}$$

Хотя бы одно $\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, собст. век, h_1 и h_2

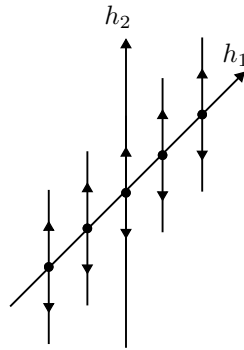
$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = C_1 \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$



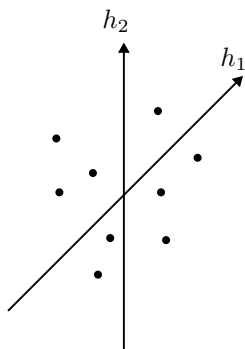
$\lambda_2 > 0$ нестабильная "антенна"

$\lambda_2 < 0$ стабильная "антенна"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 и h_2 собст. век.

$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2$$

Положение равновесия все точки фазовой плоскости.



"Точки"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 обст. век., h_2 присоед

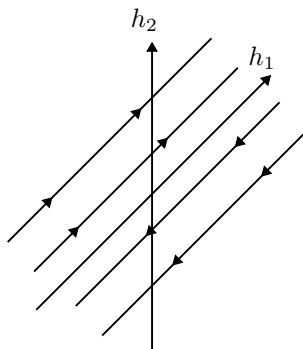
$$x = C_1 h_1 + C_2 (h_1 t + h_2)$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = C_1 + C_2 t \quad \xi_2 = C_2$$

h_1 - положение равновесия



"Улица"

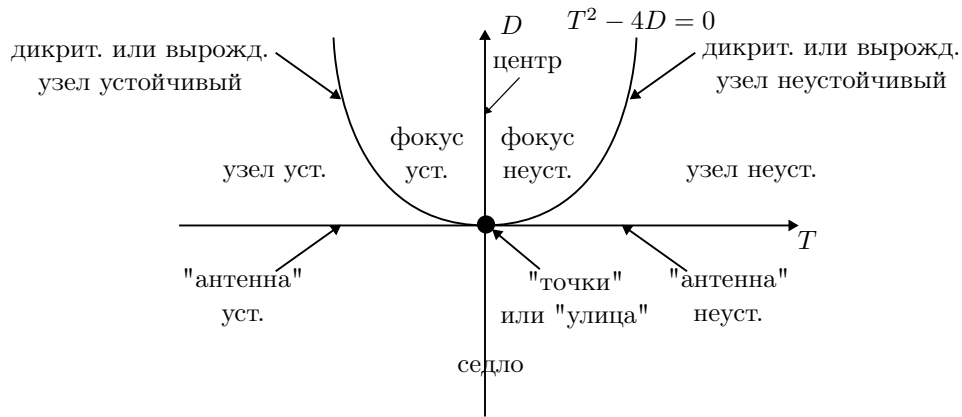
5.3 Второй взгляд на классификацию

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda \underbrace{a_{11} + a_{22}}_{Tr A} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{det A = 0} = 0$$

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$



5.4 Третий взгляд на классификацию

Насколько влияют нелинейные коэффициенты?

Грубые: седло, узел, фокус

Негрубые: остальные

5.5 Устойчивость по Ляпунову

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$x(t_0) = x_0$, $\varphi(t)$ - решение задачи Коши, продолжаемое на $[t_0, +\infty)$

Определение 5.4. Решение $\varphi(t)$ задачи Коши называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x(t)$ реш. : $|x(t_0) - x_0| < \delta \forall t \geq t_0 \hookrightarrow x(t)$ определено на $[t_0, +\infty)$ и $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

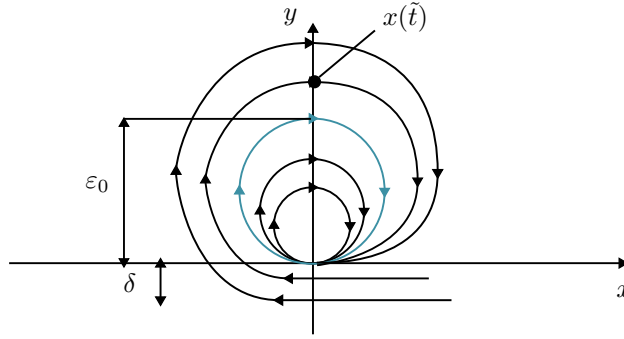
Определение 5.5. Решение $\varphi(t)$ з. К. называется асимптотически уст., если оно устойчиво и $\exists \delta_0 : \forall x(t) \text{ реш. с } |x(t_0) - x_0| < \delta_0 \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$

Определение 5.6 (Неустойчивость). Решение $\varphi(t)$ называется неуст. по Ляпунову, если $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x(t) \text{ реш. : } |x(t_0) - x_0| < \delta \exists \tilde{t} \geq t_0 \hookrightarrow x(\tilde{t}) \text{ неопределено или } |x(\tilde{t}) - \varphi(\tilde{t})| \geq \varepsilon_0$.

Замечание.

$$|x(t_0) - x_0| = \sqrt{(x_1(t_0) - x_{01})^2 + \dots + (x_n(t_0) - x_{0n})^2}$$

Пример (889).



$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

$\varphi(t) = 0$ - тривиальное решение, $\varphi(t_0) = 0, x_0 = 0$

Выполняются условия отрицания.

5.5.1 Исследование на устойчивость

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

$\varphi(t)$ - решение з. К., $x(t) = \varphi(t) + \varepsilon(t)$

$$\dot{\varphi} + \dot{\varepsilon} = F(t, \varphi + \varepsilon) \quad \varepsilon(t_0) = 0$$

Система уравнений возмущений:

$$\dot{\varepsilon} = F(t, \varphi(t) + \varepsilon(t)) - \dot{\varphi}(t) \quad \varepsilon(t) = 0$$

5.5.2 Теоремы об уст. (неуст.) полож. равн. авт. сис.

$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$F(x) = 0 \rightarrow \tilde{x}$ полож. равн., $\varphi(t) = \tilde{x}$

Теорема 5.1 (Об уст. по линейному пригл.). Пусть $\dot{x} = F(x)$, $F(\tilde{x}) = 0$, $F'(\tilde{x})$ матрица Якоби, λ_i - собст. числа $F'(\tilde{x})$, тогда

1. Если $\forall \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то \tilde{x} асимпт. уст.
2. Если $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то \tilde{x} неуст.

Определение 5.7 (Функция Ляпунова). $v(x)$ опр. и непр. дифф. в $O_\varepsilon(\tilde{x})$ (окрестности) и $v(\tilde{x}) = 0$.

Производная в силу системы:

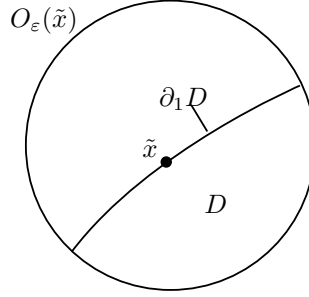
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x)$$

Теорема 5.2 (Ляпунова об устойчивости). Пусть $\exists v(x) : v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} \leq 0$ в $O_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - уст. по Ляпунову.

Теорема 5.3 (Ляпунова об асимпт. уст.). Пусть $\exists v(x) : v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} < 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - асимпт. уст. по Ляпунову.

Теорема 5.4 (Ляпунова о неустойчивости). Пусть $\exists v(x) : \forall O_\delta(\tilde{x}) \in O_\varepsilon(\tilde{x}) \exists x^* : v(x^*) > 0$ и $\frac{dv}{dt} > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда \tilde{x} - неуст.

Теорема 5.5 (Четаева о неустойчивости).



Пусть \exists область $D \subset O_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\exists v(x)$, $\tilde{x} \in \partial_1 D$, $v(x) = 0$ на $\partial_1 D$, $v(x) > 0$ в D , $\frac{dv}{dt} > 0$ в D , тогда \tilde{x} неуст.

5.6 Примеры на устойчивость

Пример.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \\ A(0,0) \quad F'(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm i \text{ (центр)} \\ & v = x^2 + y^2 \\ \frac{dv}{dt} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2x^4 - 2y^4 < 0 \end{aligned}$$

$v > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(A)$ и $\frac{dv}{dt} < 0$ там же \Rightarrow асимпт. уст.

Пример.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases} \\ A(0,0) \quad F'(A) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & v = y(y + 2x) \end{aligned}$$

В т. Четаева берём за D область где $v > 0$: $v(A) = 0$, $v|_{\partial_1 D} = 0$, $v > 0$ в D

$$\frac{dv}{dt} = 2y^3 + 2x^2 + 2xy^2 = y^3 + 2x^2 + y^2(y + 2x) > 0 \text{ в } D$$

Выполнены условия для Четаева \Rightarrow неустойчива.

5.7 Исследование фаз. тр. нелин. автоном. сист.

$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad F(x) \in C'(D) \quad D \in \mathbb{R}^n$$

1. полож. равновесия, иссл. методом линеаризации

$$F(x) = \underbrace{F(\tilde{x})}_0 + \underbrace{F'(\tilde{x})}_{\text{м. Якоби}} (x - \tilde{x}) + o(|x - \tilde{x}|)$$

$$y = x - \tilde{x} \quad \dot{y} = F'(\tilde{x})y + o(|y|)$$

(важно учитывать грубые или негрубые)

2. иссл. устойчивость пол. равновесия
3. иссл. предельные множества.
4. иссл. фазовые траектории вне предельных множеств, метод первых интегралов

5.8 Первые интегралы автономных систем

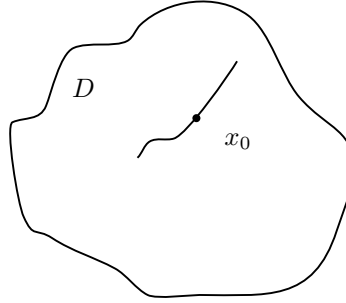
$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad F(x) \in C'(D) \quad D \in \mathbb{R}^n$$

Определение 5.8. Функция $u(x) \in C'(D)$ называется первым интегралом автономной системы, если для любого решения $g(t)$, фазовая траектория которого лежит в $D \hookrightarrow u(g(t)) = \text{const.}$

Пример. $u = \text{const}$ - тривиальный первый интеграл

Теорема 5.6 (Критерий первого интеграла). Функция $u(x) \in C'(D)$ является первым интегралом тогда и только тогда, когда $(\nabla u, F(x)) = 0$ в D .

Доказательство. \rightarrow : Пусть $u(x)$ первый инт:



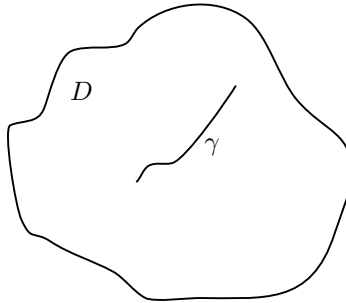
Возьмём $x_0 \in D$, $x(0) = x_0 \Rightarrow \exists$ решение $g(t)$, $u(g(t)) = \text{const}$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{(\nabla u)_i} \underbrace{\left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0}}_{f_i(x_0)} = 0$$

$$(\nabla u, F(x)) = 0$$

В силу произвольности x_0 выполнено в D .

\leftarrow : Пусть $(\nabla u, F(x)) = 0$ в D .



Произвольное решение $x = g(t)$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{\gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(x) = (\nabla u, F) \Big|_{\gamma} = 0$$

Т.е. $u(g(t)) = \text{const}$ на γ .

□

5.9 Независимость функция

Определение 5.9. Система функций $u_1(x), \dots, u_m(x) \in C'(D)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, $D \in \mathbb{R}^n$ - область., называется зависимой в D , если в D

$$\exists K, \exists G \in C' : u_k(x) = G(u_1(x), \dots, u_{k-1}(x), u_{k+1}(x), \dots, u_m(x))$$

Если так сделать нельзя, то система называется независимой в D .

Теорема 5.7 (Необход. усл. зависимости). Пусть u_1, \dots, u_m зависимы в D , тогда $\nabla u_1, \dots, \nabla u_m$ линейно зависимы в каждой точке D .

Доказательство.

$$\nabla u_k(x) = \frac{\partial G}{\partial u_1} \nabla u_1 + \dots + \frac{\partial G}{\partial u_m} \nabla u_m$$

Получили определение линейной зависимости ∇u_i . □

Следствие 5.1 (Достаточное условие независимости). Пусть $\exists x_0 \in D$, в которой ∇u_i линейно незав., тогда система u_1, \dots, u_m незав. в D .

Пример.

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 & u_2 &= x_2 & u_3 &= x_1^2 + u_2^2 \\ u_3 &= u_1^2 + u_2^2 \\ \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Теорема 5.8 (Достаточное условие зависимости). Пусть в каждой точке области $D \hookrightarrow \nabla u_1, \dots, \nabla u_m$ лин. зав. и не обращаются 0 одновременно, тогда для каждой точки D существует окрестность, в которой u_1, \dots, u_m зависимы.

Доказательство. (для $n = 2$)

$f(x, y), g(x, y), \nabla f$ и ∇g лин. зав. в D

$(x_0, y_0) \in D$ пусть $\nabla f|_A \neq \vec{0}$, пусть $\frac{\partial f}{\partial x}|_A \neq 0$

$$\xi = f(x, y) \quad \eta = y \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}|_A \neq 0$$

$\exists O_\varepsilon(A)$, $J \neq 0$, значит есть взаимнооднозначное отображение

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) & y &= y(\xi, \eta) \\ f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) &= \xi & g(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{pmatrix}}_{\det=0 \text{ в } O_\delta(B)} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\det=0 \text{ в } D} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

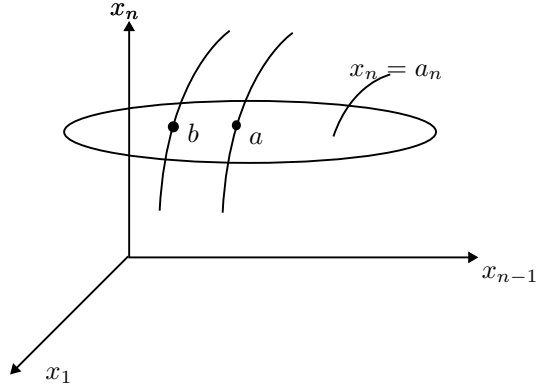
$\frac{\partial g}{\partial \eta} = 0$ в $O_\delta(B) \Rightarrow g = g(\eta) = h(f)$ завис в $O_\varepsilon(A)$. □

Теорема 5.9 (О существовании первых инт.). Пусть точка a не является положением равновесия автономной системы, тогда в некоторой окрестности этой точки \exists первые интегралы $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ и она независимы.

Доказательство.

$$\dot{x} = F(x) \quad F(x) \in C'(x) \quad F(a) \neq \vec{0}$$

Пусть $f_n(a) \neq 0$.



$$x(0) = b \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$x = g(t, b)$ - реш. задачи Коши

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \\ \dots \\ x_n = g_n(t, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \end{cases}$$

Можем смотреть как на решение з. К. и как на систему уравнений.

Значит $g_i(t, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$ - по t напр дифф как решение, а также по b_j непр. дифф. по теор. о дифф. решения по параметру.

$$A: t = 0 \quad b_1 = a_1, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}$$

Дифф. по $b_j, t = 0$:

$$\begin{cases} b_1 = g_1(0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \\ \dots \\ a_n = g_n(0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \end{cases} \quad \frac{\partial g_1}{\partial b_1} \Big|_A = 1; \quad \frac{\partial g_1}{\partial b_j} \Big|_A = 0; \quad \frac{\partial g_n}{\partial b_i} \Big|_A = 0$$

Дифф. по t в A : $b_i = a_i$

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t, a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ x_n = g_n(t, a_1, \dots, a_n) \end{cases} \quad \dot{g}_1(t) = f_1(a)$$

$$J = \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(b_1, \dots, b_{n-1}, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_1(a) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_2(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_n(a) \end{vmatrix}$$

$$b_1 = u_1(x), \dots, b_{n-1} = u_{n-1}(x), t = v(x)$$

$u_i(x) \in C'(O_\varepsilon(a))$ по Т. о неявной функции

$\forall g(t, b)$ решение $u_i(g(t, b)) = b_i$

$\Rightarrow u_i$ - первый интеграл

$$t = 0 \quad u_1(b) = b_1 \quad \Rightarrow \quad \nabla u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \nabla u_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Градиенты линейно независимы \Rightarrow первые интегралы независимы. □

Пример. Дикритический узел \rightarrow не существует нетрив. первый инт.

Пусть существует нетрив. первй инт. $u(x), u(x) \in C'$, что возможно по всем лучам только если $u \equiv C$. Противоречие.

Следствие 5.2. Пусть $u(x)$ - первый интеграл в некоторой окрестности точки a , тогда $\exists G \in C' : u(x) = G(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))$.

Доказательство. $(\nabla u, F(x)) = 0, (\nabla u_i, F(x)) = 0$ по критерию

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \end{cases}$$

$F(a) \neq 0$ значит \exists окрестность $F(x) \neq 0$

$$BF(x) = 0$$

$|B| = 0$ в этой окрестности $\Rightarrow \nabla u, \nabla u_1, \dots, \nabla u_{n-1}$ - лин. зав. в этой окр.

При этом $\nabla u_i \neq 0$ из теоремы $\Rightarrow \exists$ окрестность $\nabla u_i \neq 0$

По теореме о достаточном условии зависимости u, u_1, \dots, u_{n-1} зависимы в некоторой окрестности точки a .

$\Rightarrow \exists G : u = G(u_1, \dots, u_{n-1})$

□

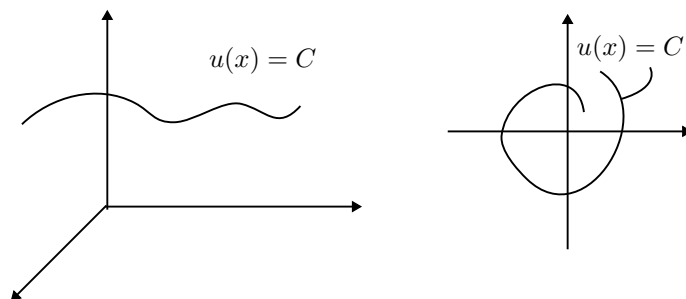
5.10 Применение первых интегралов

1. Понижение порядка системы

$$u_1(x) = C_1 \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \neq 0$$

по Т. о неявной функции $x_k = h(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, C_1)$, подставляем в систему

2. Изображение фазовых траекторий



Решение лежит на поверхности уровня любого из своих первых инт.

3. Законы сохранения

5.11 Методы нахождения первых интегралов

Выделение интегрируемых комбинаций

$\dot{x} = F(x) \rightarrow$ симметричный вид

$$\dot{x}_i = f_i(x)$$

$$dt = \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}$$

Поиск интегрируемых комбинаций:

1. Свойство пропорций - сложный-простой

$$0 \neq \gamma = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad b_i \neq 0$$

$$\frac{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + \dots + k_n b_n} = \gamma = \frac{a_i}{b_i}$$

Доказательство.

(а) знам $\neq 0$

$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = \gamma(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n)$$

$$k_1(a_1 - \gamma b_1) + \dots + k_n(a_n - \gamma b_n) = 0$$

(b) $\text{знам} = 0$

$$\begin{aligned}k_1 b_1 + \dots + k_n b_n &= 0 \\ b_1 &= \frac{a_1}{\gamma} \dots b_n = \frac{a_n}{\gamma} \\ k_1 a_1 + \dots + k_n a_n &= 0 \\ b_i = 0 &\rightarrow a_i = 0\end{aligned}$$

□

-
2. простой-сложный - исключаем переменные, используя уже найденные первые инт.

6 Уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

Определение 6.1 (Решение). $u(x) \in C'(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, после подстановки $\equiv 0$ в D .

6.1 Классификация

1. Линейные уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u = f(x)$$

2. Квазилинейные уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u)$$

3. Нелинейные

Замечание. Внутри класса линейных выделим класс линейных однородных:

$$\sum_{i=1}^{kn} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

6.2 Линейные однородные уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

Пусть $a_i(x) \in C'(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - область, $\sum_{i=1}^n a_i^2(x) \neq 0$ в D .

Определение 6.2 (Характеристическая система).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x) \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x) \end{cases}$$

Не положение равновесия по усл. \Rightarrow можем найти u_1, \dots, u_{n-1} - первые инт. (независ.) в окр точки из D .

Определение 6.3. Фазовые траектории этой системы называются характеристиками.

Теорема 6.1. Пусть $\tilde{x} \in D$, тогда \exists некоторая окрестность этой точки, в которой любое решение лин. однородного. уравн. имеет вид

$$u(x) = G(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad G \in C'$$

Доказательство. \tilde{x} - не явл. пол. равн $\rightarrow \exists$ окрест., в которой \exists независ. u_1, \dots, u_{n-1} .

\forall первый. инт. $u(x) = G(u_1, \dots, u_{n-1})$, $G \in C'$ (по следствию)

Критерий первого инт. $(\nabla u, F) = 0$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow u(x)$$

$u(x) = G(u_1, \dots, u_{n-1})$ - общее решение лин. однородного ур. в ч.п. □

6.3 Квазилинейные уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u)$$

$a_i(x, u), b(x, u) \in C'(\tilde{D})$, $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\sum_{i=1}^n a_i^2(x, u) \neq 0$ в \tilde{D} .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x, u) \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x, u) \\ \dot{u} = b(x, u) \end{cases} \quad \text{харак. сист.}$$

Фазовые траектории этой сист. называются характеристиками.

Вводим вспомогательное лин. ур.

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial W}{\partial x_i} + b(x, u) \frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

$W(x, u) = G(W_1(x, u), \dots, W_n(x, u))$ - общее реш, $G \in C'$

Теорема 6.2. Пусть в некоторой т. из \tilde{D} $W(x, u) = 0$ и $\frac{\partial W}{\partial u} \neq 0$, тогда уравнение $W(x, u) = 0$ в некоторой окрестности этой точки определяет решение квазилинейного уравнения.

Доказательство. $W(x, u) = 0$, $W \in C'$, $W(x, u) = 0$, $\frac{\partial W}{\partial u} \neq 0$

\Rightarrow по Т. о неявной функции $u(x) \in C'(D)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_i}}{\frac{\partial W}{\partial u}} \\ \sum_{i=1}^n a_i(x, u) \left(-\frac{\frac{\partial W}{\partial x_i}}{\frac{\partial W}{\partial u}}\right) &= b(x, u) \\ \sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial W}{\partial x_i} + b(x, u) \frac{\partial W}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

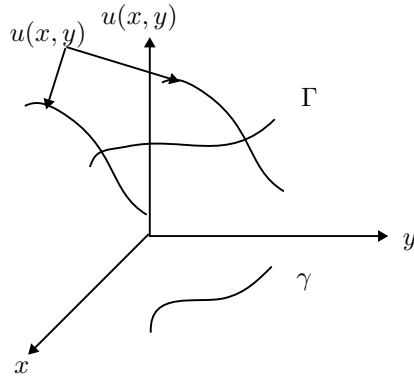
□

Определение 6.4 (Общий интеграл квазилинейного ур.).

$$G(W_1, \dots, W_n) = 0 \quad G \in C' \quad \frac{\partial G}{\partial u} \neq 0$$

7 Задача Коши для линейного уравнения в ч. п. (n=2)

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ a, b \in C'(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad a^2 + b^2 &\neq 0 \text{ в } D \end{aligned}$$



Определение 7.1 (Задача Коши).

$\gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s), s \in (s_1, s_2)$, гладкая

$\varphi, \psi \in C'(s_1, s_2), \varphi^2 + \psi^2 \neq 0$

$u|_\gamma = u_0(s), u_0 \in C'(s_1, s_2), \Gamma$ - гладкая кривая

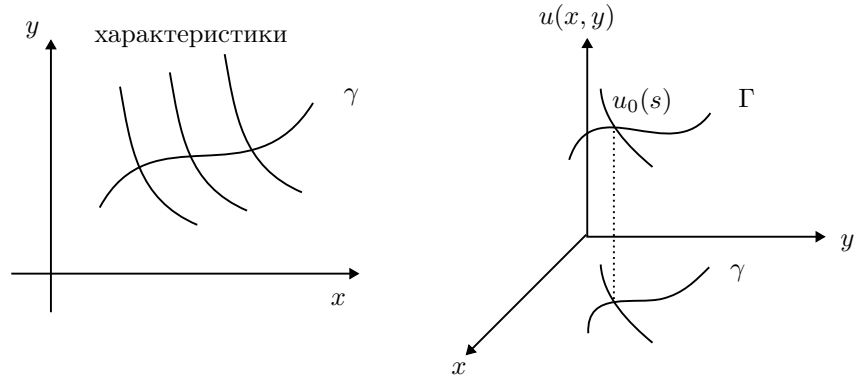
Найти решения $u(x, y)$, проходящие через Γ .

Теорема 7.1 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Пусть кривая γ не касается характеристик уравнения, тогда Решение задачи Коши существует и единственно в некоторой окрестности кривой γ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, y) & x(0) &= \varphi(s) \\ \dot{y} &= b(x, y) & y(0) &= \psi(s) \end{aligned}$$



$\exists! x = x(t, s), y = y(t, s)$, по теореме о дифф. решения по параметру $x(t, s)$, $y(t, s)$ непр. дифф. по s , $u = u_0(s)$, получаем параметрически заданную поверхность

По построению поверхности на решении u сохраняет своё значение

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \Big|_{\gamma} = \begin{vmatrix} a(x, y) & \varphi' \\ b(x, y) & \psi' \end{vmatrix} \neq 0$$

Первый столбец - касательная к характеристике, второй - касательная к γ .

$$t = t(x, y) \quad s = s(x, y)$$

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности кривой γ ; t, s непр. дифф.

$$u = u_0(s(x, y))$$

Непр. дифф. в некоторой окрестности γ как суперпозиция.

$\Rightarrow u = u_0(x, y)$ решение задачи Коши.

Единственность следует из единст. решения з. Коши для харак. системы и единственности неявной функции. \square

Определение 7.2 (Общий случай задачи Коши).

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$a_i(x) \in C'(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad \sum a_i^2 \neq 0 \text{ в } D$$

s - гладкая поверхность. (гиперповерхность)

$$u|_s = u_0(s) \quad u_0(s) \in C'(s)$$

Найти решение, удовлетворяющие условия.

Теорема 7.2 (Общий случай сущ. и ед. решения).

Пусть гиперповерхность S не касается характеристик, тогда $\exists!$ решение з. К., определённое в некоторой окрестности гиперповерхности S .

8 Задача Коши для квазилинейного уравнения в ч. п. (n=2)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

$$a, b, c \in C'(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad a^2 + b^2 \neq 0 \text{ в } D$$

Определение 8.1.

$\gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s), s \in (s_1, s_2)$, гладкая

$\varphi, \psi \in C'(s_1, s_2), \varphi^2 + \psi^2 \neq 0$

$u|_\gamma = u_0(s), u_0 \in C'(s_1, s_2), \Gamma$ - гладкая кривая

Найти решение проходящее через Γ .

Замечание (Характ. сист.).

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y, u) \\ \dot{y} = b(x, y, u) \\ \dot{u} = c(x, y, u) \end{cases}$$

Теорема 8.1 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Пусть γ не касается проекций характеристик на XY , тогда $\exists!$ решение задачи Коши, определённое в некоторой окрестности кривой γ .

Пример.

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= 2xy \\
 x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} + 2xy \frac{\partial W}{\partial u} &= 0 \\
 \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = 2xy \end{cases} \\
 \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2xy} \\
 C_1 = \frac{y}{x} \quad u - xy = C_2 \\
 W = G\left(\frac{y}{x}, u - xy\right) \quad G \in C'
 \end{aligned}$$

- общее решение вспомогательного уравнения.

Общий интеграл квазилинейного уравнения:

$$\begin{aligned}
 G\left(\frac{y}{x}, u - xy\right) &= 0 \quad G \in C' \quad \frac{\partial G}{\partial u} \neq 0 \\
 \underbrace{\frac{\partial G}{\partial u}}_{\neq 0} &= \underbrace{\frac{\partial G}{\partial(u - xy)}}_{\neq 0} \underbrace{\frac{\partial(u - xy)}{\partial u}}_1
 \end{aligned}$$

По теореме о неявной функции $x - xy = g\left(\frac{y}{x}\right)$, $g \in C'$

$$u = xy + g\left(\frac{y}{x}\right) \quad g \in C'$$

Пример. $u = 3x^3 + 1$ при $y = 2x^2$, $x > 0$

$$\begin{aligned}
 3x^3 + 1 &= x(2x^2) + g(2x) \\
 g(2x) &= 1 + x^3 \quad g(\xi) = 1 + \frac{\xi^3}{8} \\
 u &= xy + 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{x}\right)^3
 \end{aligned}$$

Пример. $u = x^2$ при $y = x, x > 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 + g(1) & g(1) &= 0 \\ \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = 2xy \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^t \\ u = C_1 C_2 e^{2t} + C_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Проекция: $y = Ax$, нарушена теорема единственности, γ касается проекции характеристики.

9 Вариационное исчисление

$$J[y] \rightarrow extr$$

9.1 Функционал и первая вариация функционала

$$C^1[a, b], \|y\| = \max_{[a, b]} |y(x)| + \max_{[a, b]} |y'(x)|$$

Определение 9.1 (Функционал). Отображение $J : Y \in C'[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Y - область определения функционала

$fix y \in Y, fix h \in C'[a, b]$, определим множество $A \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in A &\hookrightarrow y + \alpha h \in Y \\ \Psi(\alpha) &= J[y + \alpha h] \end{aligned}$$

Если \exists конечная производная $\Psi'(0)$, то она называется первой вариацией функционала и обозначается $\Psi'(0) = \delta J[y, h]$

Пример. $C[a, b]$

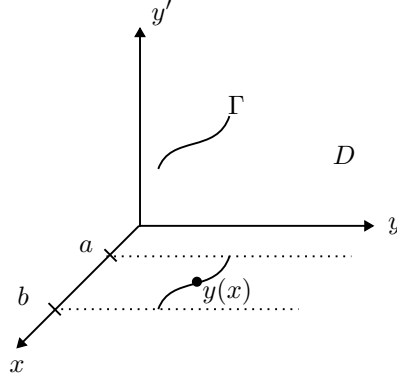
$$\begin{aligned} y(x) &= 0 & h &= \sin x & C[0, \pi] \\ \Psi(\alpha) &= \max_{[a, b]} |\alpha \sin x| = |\alpha| \end{aligned}$$

$\Psi(\alpha)$ не существует

9.2 Функционалы в вариационном исчислении

$$\begin{aligned} y &= C^1[a, b] \rightarrow J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \\ F(x, y, y') &\in C^2(D) & D &\subset \mathbb{R}^3 \text{ область} \\ Y &= \{y \in C'[a, b] : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow (x, y(x), y'(x)) \in D\} \end{aligned}$$

Лемма 9.1 (О существовании первой вариации). Пусть $J(y)$ - функционал в вариационном исчислении, тогда $\forall y \in Y$ и $\forall h \in C'[a, b]$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall |\alpha| \leq \varepsilon \hookrightarrow \Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$ непр. дифф и $\Psi'(0) = \delta J[y, h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h') dx$



Доказательство. Γ - ограниченное и замкнутое множ. из обл. $D \rightarrow$ существует окрестность кр. $\Gamma \subset D \rightarrow \forall \in C'[a, b] \exists \varepsilon : \forall |\alpha| \leq \varepsilon \forall x \in [a, b] : (x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)) \in \text{окр.} \subset D, \Rightarrow$ на $\alpha \leq \varepsilon$ определена $\Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$

$$\Psi(\alpha) = \int_a^b \underbrace{F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}_{f(x, \alpha)} dx$$

$f(x, \alpha)$ непр. на $[a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}{\partial y + \alpha h} h + \frac{\partial F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}{\partial y' + \alpha h'} h'$$

непр. на $[a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ как суперпозиция непр. функ.

По теореме о дифф. собственного инт. по параметру $\Psi(\alpha)$ непр. дифф. на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и

$$\begin{aligned} \Psi'(\alpha) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx \\ \Psi'(0) &= \delta J[y, h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h') dx \end{aligned}$$

□

Пример.

$$\begin{aligned}
J[y] &= \int_1^2 (2y + yy' + x^2 y'^2) dx \\
Y &= \{y \in C'[1, 2]\} \quad D = \mathbb{R}^3 \\
\delta J[y, h] &= \int_1^2 ((2 + y')h + (y + 2x^2 y')h') dx \\
y = x^2 \quad \delta J[x^2, h] &= \int_1^2 ((2 + 2x)h + (x^2 + 4x^3)h') dx
\end{aligned}$$

Лемма 9.2 (Дюбуа-Реймона). Пусть $a_0(x)$ и $a_1(x) \in C[a, b]$ и $\forall h \in C'[a, b]$ и $h(a) = h(b) = 0$, $\int_a^b (a_0(x)h(x) + a_1(x)h'(x))dx = 0$, тогда $a_1(x) \in C'[a, b]$ и $a_1' = a_0$ на $[a, b]$.

Доказательство. $p(x) \in C'[a, b]$, $p'(x) = a_0(x)$ и $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b a_1(x)dx$
 $\forall h \in C'[a, b]$ и $h(a) = h(b) = 0$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (p'h + a_1 h') dx &= \underbrace{ph}\bigg|_a^b + \int_a^b (a_1 h' - h'p) dx = 0 \\
\int_a^b h'(a_1 - p) dx &= 0 \quad h(x) = \int_a^x (a_1(t) - p(t)) dt \\
\int_a^b (a_1 - p)^2 dx &= 0 \Rightarrow a_1 \equiv p \text{ на } [a, b]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 \in C'[a, b]$ и $a_1' = a_0$

□

Следствие 9.1.

1. Основная лемма вариационного исчисления $a_1 \equiv 0$

Пусть $a_0(x) \in C[a, b]$ и $\forall h \in C'[a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$, $\int_a^b a_0 h dx = 0$,
тогда $a_0 \equiv 0$

2. ($a_0 \equiv 0$) Пусть $a_1(x) \in C[a, b]$ и $\forall h \in C'[a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$,
 $\int_a^b a_1 h' dx = 0$, тогда $a_1 \equiv \text{const}$

Замечание. Неравенство Стеклова: Пусть $h(x) \in C'[a, b]$ и $h(a) = h(b) = 0$,
тогда

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b h'^2 dx$$

Неравенство Виртингера: Пусть $h(x) \in C'[a, b]$ и $h(a) = 0$ (либо $h(b) = 0$), тогда

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b h'^2 dx$$

9.3 Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b F(x, y, y') dx \\ F(x, y, y') &\in C^2(D) \quad D \subset \mathbb{R}^3 \text{ область} \\ y(a) &= A \quad y(b) = B \\ Y &= \{y \in C'[a, b] : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow (x, y(x), y'(x)) \in D, y(a) = A, y(b) = B\} \\ J[y] &\rightarrow extr \quad y \in Y \end{aligned}$$

Определение 9.2 (Экстремум). $\tilde{y} \in Y$ называется точкой абсолютно-го минимума (максимума), если

$$\forall y \in Y \hookrightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y] \text{ } (\geq)$$

Определение 9.3. $\tilde{y} \in Y$ называется точкой локального минимума (максимума), если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\|_{C'[a,b]} < \varepsilon \hookrightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y] \text{ } (\geq)$$

Замечание. $\tilde{y} \in Y$ не экстремум

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y_1, y_2 \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\|_{C'[a,b]} < \varepsilon \hookrightarrow J[y_1] < J[\tilde{y}] < J[y_2]$$

Теорема 9.1 (Необходимое условие экстремума). Пусть $\tilde{y} \in Y$ решение простейшей задачи, тогда $\delta J[\tilde{y}, h] = 0, \forall h \in C'[a, b] : h(a) = h(b) = 0$ и эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера (Эйлера-Лагранжа)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Доказательство. Пусть $\tilde{y} \in Y$ - лосmin

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : \forall y \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon \hookrightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y] \\ y = \tilde{y} + \delta y \in Y &\rightarrow \delta y \in C'[a, b] \\ \underbrace{\tilde{y}(a)}_A + \delta y(a) = A &\quad \underbrace{\tilde{y}(b)}_B + \delta y(b) = B \\ \delta y(a) = \delta y(b) = 0 &\quad 0 < \|\delta y\| < \varepsilon \end{aligned}$$

δy - вариация. аргумента

$$\begin{aligned} \delta y &= \alpha h \quad h \in C'[a, b], \alpha \in \mathbb{R} \\ h(a) &= h(b) = 0 \quad 0 < \|h\| < \varepsilon \\ \forall h \in C'[a, b] &\quad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \end{aligned}$$

По лемме о существовании первой вариации $\exists \varepsilon_1 > 0 \forall |\alpha| < \varepsilon_1$ функция $\Psi(\alpha) = J[\tilde{y} + \alpha h]$ непр. дифф. $|\alpha| < \varepsilon_1$

$$\varepsilon_2 = \min(\frac{\varepsilon}{\|h\|}, \varepsilon_1), |\alpha| < \varepsilon_2, \Psi(\alpha) \text{ непр. дифф и } \Psi(0) \leq \Psi(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ т. } \min \Psi(\alpha), \text{ по Т. Ферма } \Psi'(0) = 0, \delta J[\tilde{y}, h] = 0$$

$$\begin{aligned} \delta J[\tilde{y}, h] &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) \Big|_{\tilde{y}} dx = 0 \\ \forall h \in C'[a, b] &\quad h(a) = h(b) = 0 \end{aligned}$$

По лемме Дюбуа-Реймона:

$$a_1 = \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{\tilde{y}} \in C'[a, b] \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{\tilde{y}} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{\tilde{y}}$$

□

Замечание.

1. Решения уравнения Эйлера называются экстремалиями

Решения, удовлетворяющие краевым условиям называются допустимыми экстремалиями

2. Развёрнутая форма уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' &= 0 \end{aligned}$$

Пример.

$$J[y] = \int_{-1}^1 y^2(x - y')^2 dx \rightarrow \min \quad y(-1) = 0 \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$2y(x - y')^2 + \frac{d}{dx}(2y^2(x - y')) = 0$$

$$y(x^2 - y'^2 + y - yy'') = 0 \quad \text{однородное обобщённое}$$

$$y = 0 \quad y = \frac{x^2}{2}$$

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ \frac{x^2}{2}, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}} = 0$$

3. \tilde{y} - решение $\xrightarrow{\neq} \delta J[\tilde{y}, h] = 0, \forall h \in C'[a, b], h(a) = h(b) = 0 \xrightarrow{\leftarrow}$ ур. Эйлера

\tilde{y} - допуст. экстр

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}|_{\tilde{y}}}_{\text{непр.}} = \frac{d}{dx} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}}_{\text{непр. дифф.}}$$

$$\begin{aligned} \delta J[\tilde{y}, h] &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) |_{\tilde{y}} dx = \\ &= \int_a^b \left(\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} h - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} h \right)}_0 |_{\tilde{y}} dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} |_{\tilde{y}} h}_0 \Big|_a^b \right) = 0 \end{aligned}$$

Первая часть - уравнение Эйлера, во второй $h(a) = h(b) = 0$

9.3.1 Частные случаи F

1. $F = F(x), \int_a^b F(x) dx$
2. $F = F(y), \int_a^b F(y) dx, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, G(y) = 0 \rightarrow y = C$
3. $F = F(y'), \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \frac{\partial F}{\partial y'} = C \rightarrow y' = a, y = ax + b$
4. $F = F(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = 0, G(x, y) = 0$
5. $F = F(x, y'), \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \frac{\partial F}{\partial y'} = C$

6. $F = F(y, y')$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' &= 0 \quad | \cdot y' \\ y' \frac{\partial F}{\partial y} - y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - y' y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0 \\ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} &= C\end{aligned}$$

Доп. исследование $y' = 0$ из-за домножения.

7. Квадратичный функционал

$$\begin{aligned}F &= A(x)y^2 + B(x)yy' + C(x)y'^2 + D(x)y + E(x)y' + G(x) \\ \text{коэф.} &\in C^2(c, d) \quad [a, b] \subset (c, d) \\ F(x, y, y') &\in C^2(\tilde{D}) \quad \tilde{D} \subset \mathbb{R}^3 \text{ область}\end{aligned}$$

На практике достаточно коэф. $\in C^2[a, b]$

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \quad (\delta y = \delta \quad \delta y' = \delta') \\ y \in Y \quad y + \delta y &\in Y \quad \delta y \in C'[a, b] \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0 \\ \Delta F &= \int_a^b (A(y^2 + 2y\delta + \delta^2) + B(y + \delta)(y' + \delta') + C(y'^2 + 2y'\delta' + \delta'^2) + \\ &+ D(y + \delta) + E(y' + \delta) + G - Ay^2 - Byy' - Cy'^2 - Dy - Ey' - G)dx = \\ &= \int_a^b \overbrace{((2Ay + By' + D) \delta + (By + 2Cy' + E) \delta')}^{\frac{\partial F}{\partial y}} dx + \\ &\quad + \int_a^b (A'\delta^2 + B\delta\delta' + C\delta'^2)dx \\ \Delta F[\tilde{y}] &= \underbrace{\delta J[\tilde{y}, \delta y]}_0 + \int_a^b (A(x)\delta y^2 + B(x)\delta y\delta y' + C(x)\delta y'^2)dx\end{aligned}$$

9.4 Задача со свободными концами

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}J[y] &= \int_a^b F(x, y, y')dx \\ F(x, y, y') &\in C^2(D) \quad D \in \mathbb{R}^3 \text{ область}\end{aligned}$$

Либо закреплён один из концов, либо оба не закреплены.

$$Y = \{y(x) \in C'[a, b] : \forall x \in [a, b], (x, y(x), y'(x)) \in D, y(a) = A\}$$

$$J[y] \rightarrow \text{extr} \quad y \in Y$$

Теорема 9.2 (Необходимое условие экстремума). Пусть $\tilde{y} \in Y$ решение задачи со свободными концами, тогда $\delta J[\tilde{y}, h] = 0 \quad \forall h \in C'[a, b], h(a) = 0$ и эта функция удовлетворяет ур. Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ и условию $\frac{\partial F}{\partial y'}|_b = 0$

Доказательство. \tilde{y} - min

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : \forall y \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon &\hookrightarrow J[y] \geq J[\tilde{y}] \\ y = \tilde{y} + \delta y \in Y &\quad \tilde{y} \in Y \\ \delta y \in C'[a, b] &\quad \delta y(a) = 0 \\ \delta y = \alpha h &\quad h \in C'[a, b] \quad h(a) = 0 \\ 0 < \|\alpha h\| < \varepsilon &\quad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \end{aligned}$$

По лемме о существовании первой вариации:

$$\begin{aligned} \forall h \in C'[a, b] \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall |\alpha| < \varepsilon_1 \quad \Psi(\alpha) = J[\tilde{y} + \alpha h] &\in C' [|\alpha| < \varepsilon_1] \\ \varepsilon_2 = \min(\frac{\varepsilon}{\|h\|}, \varepsilon_1) & \\ |\alpha| < \varepsilon_2 : \underbrace{J[\tilde{y} + \alpha h]}_{\Psi(\alpha)} \geq \underbrace{J[\tilde{y}]}_{\Psi(0)} &\quad \Psi(\alpha) \text{ непр. дифф.} \end{aligned}$$

$\alpha = 0$ - min $\Psi(\alpha) \rightarrow$ по теор. Ферма $\Psi'(0) = 0$, $\delta J[\tilde{y}, h] = 0$, $\forall h \in C'[a, b]$, $h(a) = 0$

$$\delta J[\tilde{y}, h] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) |_{\tilde{y}} dx = 0$$

По лемме Дюбуа-Реймона $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}$ - непр. дифф и $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$ на \tilde{y}

$$\begin{aligned} \int_a^b \overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} |_{\tilde{y}} h - \Psi(0) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} |_{\tilde{y}} h \right)}^0 dx + \frac{\partial F}{\partial y'} |_{\tilde{y}} h|_a^b &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} |_{\tilde{y}}(b) \underbrace{h(b)}_{\neq 0} = 0 &\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} |_{\tilde{y}}(b) = 0 \end{aligned}$$

□

Замечание.

1. Решения уравнения Эйлера называются экстремалиями

Решения краевой задачи называются допустимыми экстремалиями (с учётом $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$)

2. \tilde{y} реш. $\xrightarrow{\neq} \delta J[\tilde{y}, h] = 0, h(a) = 0, h \in C'[a, b] \xleftarrow{\neq}$ ур. Эйлера + $\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_b = 0$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{\tilde{y}} - \text{непр. дифф.} \\ \delta J &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) \Big|_{\tilde{y}} dx = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{\tilde{y}} h \Big|_a^b + \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 \Big|_{\tilde{y}} h dx = 0 \end{aligned}$$

□

3. На допустимых экстремалиях для квадратичного функционала:

$$\Delta J[\tilde{y}] = \int_a^b (A(x)\delta y^2 + B(x)\delta y\delta y' + C(x)\delta y'^2) dx$$

9.5 Задача с вектор-функцией

$\vec{C}^1[a, b]$ - множество вектор-функция с непр. дифф. на $[a, b]$ компонентами ($y_k \in C'[a, b]$)

$$\|\vec{y}\| = \sum_{k=1}^n \|y_k\| = \sum_{k=1}^n (\max_{[a,b]} |y_k| + \max_{[a,b]} |y'_k|)$$

9.5.1 Постановка задачи

$$J[\vec{y}] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx \quad \vec{y}'(a) = \vec{A}, \vec{y}(b) = \vec{B}$$

$$F(x, y, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) \in C^2(D), D \subset \mathbb{R}^{2n+1}, D - \text{область}$$

$$Y = \{\vec{y} \in \vec{C}^1[a, b], \forall x \in [a, b] (x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) \in D, \vec{y}'(a) = \vec{A}, \vec{y}(b) = \vec{B}\}$$

$$J[\vec{y}] \rightarrow \text{extr} \quad \vec{y} \in Y$$

Определение 9.4 (Экстремум). $\vec{y} \in Y$ называется точкой локального \min (\max), если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \vec{y} \in Y : 0 \geq \|\vec{y} - \tilde{\vec{y}}\| < \varepsilon \rightarrow J[\tilde{\vec{y}}] \leq J[\vec{y}] (\geq)$$

Теорема 9.3 (Необходимое условие экстремума). Пусть \tilde{y} решение задачи с вектор-функцией, тогда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_n} = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

$$J[\tilde{y}] = \int_a^b (F, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}'_1, \dots, \tilde{y}'_{k-1}, \tilde{y}'_k, \tilde{y}'_{k+1}, \dots) \\ y_k(a) = A_k \quad y_k(b) = B_k$$

Простейшая задача для $y_k \rightarrow$ необх. усл $\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0$ □

9.6 Задача с производными высших порядков

$C^n[a, b]$ - множество всех n -раз непрерывно дифф. на $[a, b]$ функций

$$\|y\| = \max_{[a,b]} |y| + \sum_{k=1}^n \max_{[a,b]} |y^{(k)}|$$

9.6.1 Постановка задачи

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad F \in C^{n+1}(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

$$y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}$$

$$y(b) = B_0, \quad y'(b) = B_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$$

$$Y = \{y \in C^n[a, b], \forall x \in [a, b] \quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D, y^{(k)}(a) = A_k, \\ y^{(k)}(b) = B_k, k = 0, \dots, n-1\}$$

$$J[y] \rightarrow \text{extr}, \quad y \in Y$$

Определение 9.5 (Определение экстремума). $\vec{y} \in Y$ называется точкой локального \min (\max), если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon \rightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y] \quad (\geq)$$

Лемма 9.3 (Обобщённая лемма существования первой вариации).

Пусть $J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx$, $F(x, y, \dots, y^{(n)}) \in C^{n+1}(D)$, $D \in \mathbb{R}^{n+2}$, $Y = \{y \in C^n[a, b] : \forall x \in [a, b] (x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D\}$, тогда

$$\forall y \in Y \forall h \in C^n[a, b] \exists \varepsilon > 0 : \Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$$

является непр. дифф. на $|\alpha| \leq \varepsilon$ и

$$\Psi'(0) = \delta J[y, h] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} h^{(n)} \right) dx$$

Лемма 9.4 (Обобщённая лемма Дюбуа-Реймона).

Пусть $a_k(x) \in C[a, b]$, $k = 0, \dots, n$ и

$$\int_a^b (a_0 h + a_1 h' + \dots + a_k h^{(k)} + \dots + a_n h^{(n)}) dx = 0$$

$$\forall h \in C^n[a, b] \quad h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0 \quad k = 0, \dots, n-1$$

тогда $a_k(x) \in C^k[a, b]$ и $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k^{(k)} = 0$

Теорема 9.4 (Необходимое условие экстремума). Пусть $\tilde{y}(x) \in Y$ решение задачи с производными высшего порядка, тогда

$$\delta J[\tilde{y}, h] = 0 \quad \forall h \in C^n[a, b] : h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0 \quad k = 0, \dots, n-1$$

и \tilde{y} удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0$$

Доказательство. $\tilde{y}(x) \in Y$ locmin

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : \forall y \in Y : 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon &\hookrightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y] \\ y = \tilde{y} + \delta y \in Y \quad \delta \in C^n[a, b] &\Rightarrow \delta y^{(k)}(a) = \delta y^{(k)}(b) = 0 \\ \delta y = \alpha h \quad h \in C^n[a, b] \quad h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) &= 0 \\ 0 < \|\delta y\| = |\alpha| \|h\| < \varepsilon &\Rightarrow |\alpha| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \end{aligned}$$

По обобщённой лемме существования первой вариации:

$$\tilde{y} \in Y \forall h \in C^n[a, b] \exists \varepsilon_1 \Psi(\alpha) = J[\tilde{y} + \alpha h] \text{ непр. дифф. на } |\alpha| < \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \min(\frac{\varepsilon}{\|h\|}, \varepsilon_1), |\alpha| < \varepsilon_2 : \Psi(\alpha) \text{ непр. дифф. } J[\tilde{y}] \leq J[\tilde{y} + \alpha h], \alpha = 0 - \min$$

По теореме Ферма: $\Psi'(0) = 0$, $\delta J[\tilde{y}, h] = 0$

$$\begin{aligned} \delta j &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} h^{(n)} \right) dx = 0 \\ \forall h \in C^n[a, b] \quad h^{(k)}(a) &= h^{(k)}(b) = 0 \quad k = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

По лемме Дюбуа-Реймона: $a_k \in C^k[a, b]$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k^{(k)} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

□

Пример.

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_1^2 (2y + yy' + x^2 y'^2) dx \\ 2 + y' - \frac{d}{dx} (y + 2x^2 y') &= 0 \\ x^2 y'' + 2xy' &= 1 \quad (x^2 y')' = 1 \\ y' &= \frac{1}{x} + \frac{\tilde{C}_1}{x^2} \quad y = \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{1,2} &= 0 \\ \begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0 \\ y(2) + 8y'(2) = 0 \end{cases} &\rightarrow \tilde{y}(x) = 2 + \ln 4 + \frac{4 + \ln 4}{x} + \ln x \\ \Delta J = J[\tilde{y} + \delta y] - J[\tilde{y}] &= \int_1^2 (\delta y \delta y' + x^2 \delta y'^2) dx = \frac{1}{2} \delta y^2 \Big|_1^2 + \int_1^2 x^2 \delta y'^2 dx \\ \Delta J &= \frac{1}{2} \delta y^2(2) - \frac{1}{2} \delta y^2(1) + \int_1^2 x^2 \delta y'^2 dx \\ 0 < \|\delta y\| < \varepsilon \quad \delta y &= a(x-1) \quad \|\delta y\| = 2a < \varepsilon \\ \delta y_1 &= \frac{\varepsilon}{4}(x-1) \rightarrow \Delta J > 0 \end{aligned}$$