Contents

1 Электрическое поле

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ф/м}, \ \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

В случае непрерывного распределения заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\vec{r}dV}{r^3}$$

1.1 Теорема Гаусса

$$\Phi = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{\text{внутр}}$$

1.1.1 Частные случаи

- Плоскость: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$
- Стена ширины d: $E = \begin{cases} \frac{\rho x}{\varepsilon_0} & , x < \frac{d}{2} \\ \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} & , x \geq \frac{d}{2} \end{cases}$
- Цилиндр: $E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} & , r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & , r > R \end{cases}$
- Шар: $E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & , r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , r > R \end{cases}$

1.1.2 Дифференциальный вид

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1.2 Потенциал

Теорема о циркуляции вектора E:

$$\oint_1^2 \vec{E}\vec{dl} = 0$$

Электростатическое поле является потенциальным.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\vec{dl}$$

Потенциал - величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке.

$$-d\varphi = \vec{E}\vec{dl} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Потенциал на бесконечности ($r \to \inf$) полагаем равным 0.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

1.3 Электрический диполь

Момент диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

где $\vec{l}$ направлен от - к +, q - положительный заряд

1.3.1 Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

где θ - угол между p и r

1.3.2 Напряженность поля диполя

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

В частности при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

1.3.3 Сила действующая на диполь

$$\vec{F} = p\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{l}}$$

1.3.4 Момент сил действующих на диполь

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p}\times\vec{E}]$$

1.3.5 Энергия диполя в поле

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q\frac{\partial\varphi}{\partial l}l = -qE_l l = -\vec{p}\vec{E}$$

2 Проводник в электростатическом поле

2.1 Поле внутри проводника

Внутри проводника:

$$\vec{E} = 0 \qquad \rho_{\text{внутр}} = 0 \qquad \varphi = const$$

Поверхность проводника эквипотенциальна!

2.2 Поле у поверхности проводника

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

где σ - локальная плотность заряда.

2.3 Силы, действующие на поверхность проводника

$$\Delta\vec{F} = \sigma\Delta S\vec{E}_0$$

где $\sigma\Delta S$ - заряд элемента, $\vec{E}_0$ - напряженность, создаваемая остальными зарядами.

$$E_\sigma = E_0 \qquad \vec{E}_0 = \frac{\vec{E}}{2} \qquad \Delta\vec{F} = \frac{\sigma\Delta S\vec{E}}{2}$$

$$\vec{F}_{\text{ед}} = \frac{\sigma\vec{E}}{2} = \frac{\sigma^2\vec{n}}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2\vec{n}}{2}$$

2.4 Замкнутая оболочка

Замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внешнюю и внутреннюю части, в электрическом отношении совершенно не зависящие друг от друга

2.5 Конденсатор

Для изолированного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Для кондесатора:

$$C = \frac{q}{U}$$

2.5.1 Частные случаи ёмкостей

- Плоский: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$
- Сферический: $C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{a-b}$
- Цилиндрический: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$

3 Электрическое поле в веществе

Свзянные заряды и их поле помечаются штрихом $(q', \rho', \sigma', \vec{E}')$, сторонне поле обозначено как $\vec{E}_0$.

3.1 Поляризованность P

- дипольный момент объёма вещества

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum\vec{p_i} \qquad \vec{P} = \eta\langle\vec{p}\rangle$$

Для изотропного диэлектрика:

$$\vec{P} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}, \text{ где } \kappa = \varepsilon - 1 \text{ - диэлектрическая восприимчивость}$$

3.1.1 Теорема Гаусса

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}}$$

3.1.2 Граничные условия

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

где индекс n означает проекцию на нормаль

3.2 Вектор D

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

3.2.1 Теорема Гаусса

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}}^{\text{сторонние}}$$

3.3 Условия на границе

3.3.1 Два диэлектрика

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 0 \qquad \oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad D_{2n} - D_{1n} = \sigma = 0$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

3.3.2 Проводник - диэлектрик

$$D_n = \sigma \Rightarrow \sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

3.4 Поле в однородном диэлектрике

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} \qquad \vec{D} = \vec{D}_0 \qquad \vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$$

4 Энергия электрического поля

4.1 Электрическая энергия системы зарядов

$$\delta A = -dW \qquad W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

где q_i - i-й заряд системы, φ_i - потенциал, создаваемый в месте нахождения i-го заряда всеми остальными зарядами.

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV$$

где φ - потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в объеме dV.

4.2 Энергия заряженных проводников и кондесатора

Уединенный проводник:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Конденсатор:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

4.3 Энергия поля

$$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV$$

4.3.1 Объёмная плотность

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$$

5 Постоянный электрический ток

$$I = \frac{dq}{dt}$$

5.1 Плотность тока, уравнение непрерывности

$$j = \frac{dI}{dS_\perp} \qquad I = \int \vec{j}d\vec{S}$$

Вектор плотности тока - отношение силы тока и площадки в данной точке, перпендикулярной ему. Сонаправлен с вектором скорости положительных частиц.

$$\oint \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

В случае постоянного тока, распределение не изменяется:

$$\oint \vec{j}d\vec{S} = 0$$

Дифференциальная форма:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

5.2 Закон Ома для однородного проводника

$$I = \frac{U}{R} \qquad R = \rho\frac{l}{S}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \lambda\vec{E}$$

λ - удельная электропроводность, сименс на метр (См/м)

5.2.1 Закон Ома для неоднородного участка

При наличии сторонних (некулоновских) сил ($\vec{E}^*$), обобщённый закон Ома:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^*)$$

$$I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = \int_1^2 \frac{\vec{j}\vec{dl}}{\lambda} = \int_1^2 \vec{E}\vec{dl} + \int_1^2 \vec{E}^*\vec{dl}$$

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

ε_{12} - электродвижущая сила

5.3 Правила Кирхгофа

В узле алгебраическая сумма токов равна 0:

$$\sum I_k = 0$$

В замкнутом контуре:

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k$$

5.4 Закон Ждоуля-Ленца

$$Q = RI^2 \qquad Q_{\text{удельная}} = \rho j^2 = \vec{j}\vec{E} = \lambda E^2$$

В неоднородной среде:

$$Q = \varepsilon I \qquad Q_{\text{удельная}} = \rho j^2 = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*)$$

5.5 Переходные процессы в цепи с конденсатором

5.5.1 Разрядка конденсатора

$$RI = U \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$

$$q = q_0 e^{-t/\tau} \qquad \tau = RC$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad I_0 = \frac{q_0}{\tau}$$

5.5.2 Зарядка кондесатора

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon - q/C}{R}$$
$$RC\ln(1 - \frac{q}{\varepsilon C}) = -t \qquad q = q_m(1 - e^{-t/\tau})$$
$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

6 Магнитное поле

Магнитное поле равномерно движущегося заряда:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3}, \text{ где } \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}$$
$$\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0[\vec{v}\times\vec{E}]$$

6.1 Сила Лоренца

$$\vec{F}_L = [\vec{v}\times\vec{B}]q$$

6.2 Закон Био-Савара

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[\vec{dl}\times\vec{r}]}{r^3}$$

Магнитное поле на оси кругового тока: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

6.3 Теорема Гаусса

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

6.4 Теорема о циркуляции B

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному контуру Г равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Г.

6.4.1 Частные случаи

- Прямой провод: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $r \geq R$
- Внутри длинного соленоида: $B = \mu_0\mu n I$
- Плоскость с током: $B = \frac{\mu_0 l}{2}$, где l сторона контура, параллельная плоскости

6.4.2 Дифференциальный вид

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint \vec{B}\vec{dl}}{S} = (rot\,\vec{B})_n$$

Правая часть - проекция ротора на нормаль площадки, полученную по правилу правого винта.

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Где $\vec{j} = \frac{\vec{I}}{S}$ - плотность тока.

6.5 Сила Ампера

$$d\vec{F}_A = \rho[\vec{v}\times\vec{B}]dV \qquad d\vec{F}_A = I[\vec{dl}\times\vec{B}] \qquad \vec{F}_A = l[\vec{I}\times\vec{B}]$$

6.5.1 Частные случаи

- Параллельные токи (на расстояние h) на единицу длины: $F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{h}$
- Контур с током при постоянном B: $\vec{F} = I\oint[\vec{dl}\times\vec{B}] = I[(\oint\vec{dl})\times\vec{B}] = I[0\times\vec{B}] = 0$

6.5.2 Работа при перемещении контура

$$\delta A = Id\Phi$$

где $d\Phi$ - приращение магнитного потока сквозь контур.
В случаем подвижной перемычки:

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS$$

6.6 Элементарный контур (магнитный диполь)

Поведение плоского малого контура описывается магнитным моментом: $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где S - площать контура, $\vec{n}$ - нормаль по правилу правого винта.

6.6.1 Сила действующая на контур

В неоднородном магнитном поле по закону ампера получаем:

$$\vec{F} = p_m\frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{n}}$$

где p_m - модуль момента, $\frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{n}}$ - производная по направлению нормали $\vec{n}$.

6.6.2 Момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

7 Магнитное поле в веществе

7.1 Намагниченность J

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m \qquad \vec{J} = n\langle\vec{p}_m\rangle$$

7.1.1 Циркуляция

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I' \qquad I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$$

где I' - алгебраическая сумма токов намагничивания в контуре, а $\vec{j}'$ - объёмная плотность тока намагничивания, интегрирование по произвольной поверхности, натянутой на контур.

$$\nabla \times \vec{J} = \vec{j}'$$

7.1.2 Когда j'=0

- магнетик однородный
- внутри магнетика нет токов проводимости

7.2 Вектор H

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I')$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \qquad \oint \vec{H} d\vec{l} = I$$

где I - алгебраическая сумма токов проводимости

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

где $\vec{j}$ - плотность тока проводимости

7.2.1 Связь J и H

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

χ - магнитная восприимчивость

- пармагнетики $\chi > 0$, $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$
- диамагнетики $\chi > 0$, $\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}$
- ферромагнетики, J зависит от предыистории (гистерезис)

7.2.2 Связь B и H

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \qquad \mu = 1 + \chi$$

7.3 Граничные условия B и H

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = 0 \qquad \oint \vec{H}d\vec{l} = I$$

$$B_{2n}\Delta S + B_{1n}\Delta S = 0 \qquad B_{2n} = B_{1n}$$

$$H_{2\tau}l + H_{2\tau}l = i_N l \qquad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$$

$\vec{N}$ - нормаль к контуру, i - плотность токов проводимости

7.3.1 Преломление линий B (H)

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

8 Относительность полей

Система отсчёта K' движется относительно системы K, тогда **локально** верны следующие соотношения:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E} \qquad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}_0 \times \vec{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} + [\vec{v}_0 \times \vec{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

где $\beta = v_0/c$

8.1 Простые следствия

- В системе К только Е: $\vec{B}' = -[\vec{v}_0 \times \vec{E}']$
- В системе К только В: $\vec{E}' = [\vec{v}_0 \times \vec{B}']$

8.2 Инварианты

$$\vec{E}\vec{B} = inv \qquad E^2 - c^2B^2 = inv$$

9 Электромагнитная индукция

9.1 Правило Ленца

Индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

9.2 Закон Фарадея

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

При нескольких витках $\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$ В полном виде:

$$\oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\vec{v} \times \vec{B}]\vec{dl}$$

Первое слагаемое связано с изменением магнитного поля во времени, второе - с движением контура.

9.3 Самоиндукция

$$\Phi = LI$$

L - индуктивность (e.g. соленоид $L = \mu\mu_0 n^2 V$)

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}$$

9.3.1 Исчезновение тока при размыкании цепи

$$RI = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt} \qquad I = I_0 e^{-t/\tau}$$

где $\tau = L/R$ - время релаксации.

9.3.2 Установление тока при замыкании цепи

$$RI = \varepsilon - L\frac{dI}{dt} \qquad I = I_0(1 - e^{-t/\tau})$$

9.4 Взаимная индукция

Два неподвижных контура достаточно близких к друг другу:

$$\Phi_2 = L_{21} \cdot I_1 \qquad \Phi_1 = L_{12} \cdot I_2$$

Где $L_{12} = L_{21} = M$ - взаимная индуктивность, при отсутствии поблизости ферромагнетиков. (Может быть и отрицательна, в отличие от L.)

9.5 Энергия магнитного поля

Работа совершаемая сторонними силами против эдс самоиндукции:

$$\varepsilon_0 = RI - \varepsilon_s \mid \cdot Idt \Rightarrow \delta A_{\text{стор}} = \delta Q + Id\Phi$$

$$\delta A^{\text{доп}} = Id\Phi$$

Считаем что ферромагнетиков нет:

$$d\Phi = LdI \ \Rightarrow \ A^{\text{доп}} = \frac{LI^2}{2}$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

$$W = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV \qquad w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu\mu_0} dV$$

9.6 Магнитная энергия двух контуров

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

$$W = \int \frac{B_1^2}{2\mu\mu_0} dv + \int \frac{B_2^2}{2\mu\mu_0} dv + \int \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{\mu\mu_0} dv$$

$$M = \frac{1}{I_1 I_2} \int \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{\mu\mu_0} dv$$

9.7 Энергия и силы в магнитном поле

$$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}} \qquad \delta A^{\text{доп}} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2$$

где A^* - работа источника тока, δQ - потери тепловыделения, $\delta A_{\text{мех}}$ - работа на перемещение и деформацию контуров, dW - прирост магнитной энергии.

$$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = dW + dA_{\text{мех}}$$

Следствия:

- При постоянных потоках: $\delta A_{\text{мех}} = -dW\Big|_{\Phi}$
- При постоянных токах: $\delta A_{\text{мех}} = -dW\Big|_{I}$

10 Уравнения Максвелла

10.1 Ток смещения

$$\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t} \qquad \oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$\oint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$$

$\vec{j}_{\text{см}} = \partial\vec{D}/\partial t$ - ток смещения, $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ - полный ток

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I_{\text{полн}} = \int(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

10.2 Система уравнений Максвелла

$$\boxed{\begin{array}{ll} \int \vec{E}d\vec{l} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} & \oint \vec{B}d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H}d\vec{l} = \int(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})d\vec{S} & \oint \vec{D}d\vec{S} = \int \rho dV \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array}}$$

Вместе с силой Лоренца $d\vec{p}/dt = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$ составляют фундаментальную систему

10.3 Вектор Пойнтинга. Энергия и её поток

10.3.1 Теорема Пойнтинга

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{\Pi}d\vec{S} + P$$

где $W = \int wdv$, $P = \int \vec{j}\vec{E}dV$ - мощность силы прикладываемой к зарядам, $\vec{\Pi}$ - вектор Пойнтинга

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} \qquad \vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

10.4 Импульс электромагнитного поля

10.4.1 Давление электромагнитной волны

Электромагнитная волна распространяется в однородной среде, обладающей поглощением (объёмная плотность выделяемой теплоты $\rho j^2 = \lambda E^2$)

$$\vec{j} = \lambda\vec{E} \qquad F_{\text{ед}} = [\vec{j} \times \vec{B}] = \lambda[\vec{E} \times \vec{B}]$$

$F_{\text{ед}}$ - сила на единицу объёма, ответсвенная за появление давления и сонаправленная с вектором скорости волны.

10.4.2 Импульс электромагнитного поля

Плотность импульса $\vec{G}$ - импульс поля в единице объёма

$$\vec{G} = \vec{\Pi}/c^2$$

В вакууме $G = w/c$

11 Электрические колебания

11.1 Уравнение колебательного контура

11.1.1 Условие квазистационарности.

$$\tau = \frac{l}{c} << T$$

где T - период изменений l - длина цепи c - скорость света

11.1.2 Колебательный контур.

уравнение колебательного контура

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = \varepsilon$$

иной вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$2\beta = \frac{R}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

11.2 Свободные электрические колебания

11.2.1 Свободные незатухающие колебания

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Период (формула Томпсона)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

11.2.2 Свободные затухающие колебания

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Напряжение на конденсаторе и ток в контуре

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}e^{-\beta t}cos(\omega t + \alpha)$$

$$I = \omega q_m e^{-\beta t}cos(\omega t + \alpha + \delta)$$

11.3 Величины характеризующие затухание

11.3.1 Коэффицент затухания и время релаксации

время релаксации τ - время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

11.3.2 Логарифмический декремент затухания

Определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд взятых через период колебания T

$$\lambda = \ln \frac{\alpha(t)}{\alpha(t+T)} = \beta T$$

если затухание мало

$$\lambda \approx \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

11.3.3 Добротность

- По определению: $Q = \frac{\pi}{\lambda}$
- При слабом затухании: $Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Энергетический смысл: $Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W}$

11.4 Вынужденные электрические колебания

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m cos(\omega t)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} cos(\omega t) \qquad q = q_m cos(\omega t - \psi)$$

где q_m - амплитуда заряда на конденсаторе
ψ - разность фаз между колебаниями заряда и внешней э.д.с ε ток в цепи

$$I = I_m cos(\omega t - \varphi)$$

где I_m амплитуда тока φ сдвиг по фазе между током и внешней э.д.с ε

$$I_m = \omega q_m, \qquad \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

напряжения на индуктивности сопротивлении и емкости

$$U_R = RI_m cos(\omega t - \varphi)$$

$$U_C = \frac{I_m}{\omega C} cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$U_L = I_m \omega L cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

11.4.1 Векторная диаграмма

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

11.4.2 Резонансные кривые

$$\omega_{I\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_{q\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

резонансные частоты для:

- U_R: $\omega_{R\text{рез}} = \omega_0$
- U_C: $\omega_{C\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1 - 2(\frac{\beta}{\omega_0})^2}$
- U_L: $\omega_{R\text{рез}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2(\frac{\beta}{\omega_0})^2}}$

11.4.3 Резонансные кривые и добротность

если $\beta << \omega_0$

$$\frac{U_{C\text{рез}}}{\varepsilon_m} = Q \qquad Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$$

где ω_0 - резонансная частота$\delta\omega$ - ширина резонансной кривой на высоте 0.7 от максимальной

11.5 Переменный ток

11.5.1 Полное сопротивление (импенданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

при $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ это сопротивление минимально и равно активному сопротивлению R. X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

ωL - индуктивное сопротивление $\frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление
их обозначают $X_L \quad X_C$ соответсвенно

11.5.2 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

$$P(t) = UI = U_m I_m cos(\omega t)cos(\omega t - \varphi)$$

можно представить в виде

$$P(t) = U_m I_m(\cos^2(\omega t)cos(\varphi) + sin(\omega t)cos(\omega t)sin(\varphi))$$

практический интерес имеет среднее за период колебаний значение мощности.

$$\langle P\rangle = \frac{U_m I_m}{2} cos(\varphi) = \frac{RI_m^2}{2}$$

такую же мощность развивает постоянный ток с постоянными величинами:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad \langle P\rangle = UIcos(\varphi)$$

12 Скин эффект

Толщина скин-слоя:

$$l \approx \frac{1}{\sqrt{2\mu_0\mu\lambda\nu}}$$

13 Разложение Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\inf}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)sin(n\omega t)dt$$

- Прямоугольник ($0 \le U \le U_0$): $b_n = 0 \qquad a_n = 2U_0\frac{2U_0}{n\pi}\sin(\frac{\tau}{T}\pi n)$