1 Уравнение волны

Упругая волна - процесс распротранения возмущения в упругой среде, различают продольные и поперечные.
Для распространения волны в положительном направлении неоходимо, чтобы аргументы t и x входили в функцию в виде комбинации $t - x/v$, ведь тогда $dx/dt = v$ следовательно функция возмущения имеет следующий вид:

$$\xi(x,t) = f(t - x/v)$$

Особую роль играет гармоническая волна:

$$\xi(x,y) = a\cos\omega(t - x/v)T = 2\pi/\omega \qquad \lambda = vT = v/\nu$$

Вводя волновое число $k = 2\pi/\lambda$ получаем симметричный вид:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx)$$

Если волна затухающая, вводим коэфициент затухания волны γ и получаем:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$$

1.1 Плоская волна

Для плоской волны распростроняющейся в произвольном направлении ($\vec{n}$):

$$\xi = f(t - \vec{r}\vec{n}/v) \qquad \xi = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad \vec{k} = (\omega/v)\vec{n} = (2\pi/\lambda)\vec{n}$$

1.2 Сферическая и цилиндрическая волны

Продольная волна от точечного источника:

$$\xi = \frac{1}{r}f(t - r/v) \qquad \xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr)$$

Цилиндрическая волна:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}f(t - R/v) \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\cos(\omega t - kR)$$

2 Волновые уравнения

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi'_\varphi \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\xi'_\varphi/v \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{2.2}$$

Если волна распространяется в отрицательном напрвлении по оси x знак справа меняется на $+$.
Физический смысл производных, $\partial\xi/\partial t = u_x$ - проекция скорости частицы среды, $\partial\xi/\partial x = \varepsilon$ - отностельная деформация среды.

2.1 Общее волновое уравнение

Продифференцировав (2.1) по соответствующим переменным ещё раз получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

Это уравнение удовлетворяет уравнениям распространения в обе стороны и справедливо для однородных изотропных сред, затухание в которых пренебрежимо мало.
В трёхмерном пространстве:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

3 Скорость упругих волн

3.1 Скорость волны в тонком стержне

По закону Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где $\varepsilon = \partial\xi/\partial x$. Применив к малому растянутому элементу второй закон Ньютона: $\rho\Delta x S\ddot{\xi} = F_x(x+\Delta)+F_x(x) = S\sigma(x+\Delta x) - S\sigma(x) = S\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x$, после сокращения получаем:

$$\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Сопоставив с (2.3) получим $v = \sqrt{E/\rho}$ для продольной волны

3.2 Скорость волны в гибком шнуре

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{F/\rho_1} \tag{3.1}$$

где F - сила натяжения, ρ_1 - линейная плотность шнура

3.3 Скорость звука в жидкостях и газах

Можно заново использовать формулу для волны с стержне, нужно только разобраться что такое модуль Юнга. В данном случае закон Гука - связь избыточного давления с относительным изменением длины: $\Delta p = -E\Delta\xi/\Delta x$, получаем $\Delta p = -E\Delta V/V$, где $\Delta V/V$ - относительное приращение объёма. Так как масса - константа имеем $dV = -Vd\rho/\rho$, подставляя $v = \sqrt{dp/d\rho}$. Учитывая что $pV^\gamma = const$, $E = \gamma p$, получаем $v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/\mu}$,

4 Энергия упругой волны

4.1 Плотность энергии упругой волны

Приложим к торцу стержня растягивающую силу $F(x)$, растущую от 0 до F_0. Тогда по закону Гука $F(x) = \varkappa x$, где $\varkappa$ - коэф. упругости

$$A = \int_0^x F(x)dx = \varkappa \int_0^x xd = \frac{\varkappa x^2}{2}$$

Работа идёт на увеличение упругой энергии U, тогда с учётом того что $\varkappa x = F = \sigma F$, $\sigma = E\varepsilon$ и $\varepsilon = x/l$, можем найти плотность упругой энергии w_p

$$U = \frac{Fx}{2} = \frac{\sigma S\varepsilon l}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}Sl$$

$$w_p = \frac{U}{Sl} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

Но каждая единица объёма обладает и кинетической и потенциальной энергией:

$$w = w_k + w_p = \rho\dot{\varepsilon}^2/2 + E\varepsilon^2/2$$

Согласно главе 3.1 $E = \rho V^2$:

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]$$

Однако согласно 2.2 слогаемые равны:

$$w = \rho\dot{\varepsilon}^2$$

Тогда для гармонической волны:

$$w = \rho a^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx)$$

$$\langle w\rangle = \rho a^2\omega^2/2$$

4.2 Плотность потока энергии

Поток энергии - кол-во энергии переносимое волной через поверхность S за единицу времени:

$$\Phi = dW/dt$$

Плотность потока энергии - поток энергии через единичную площадку, перепендикулярную направлению переноса энергии:

$$j = d\Phi/dS_\perp$$

Рассматривая косой цилиндр с основанием dS и длиной vdt:

$$dW = wdV = wvdtdS\cos\alpha = wvdtdS_{\perp}$$
$$j = wv$$

Для определения направления вводят вектор Умова:

$$\vec{j} = w\vec{v}$$

где v - вектор скорости нормальный к волновой поверхности в данном месте.

В случае гармонической волны:

$$\vec{v} = (\omega/k)\vec{n}$$
$$\langle\vec{j}\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\vec{v}$$

Среднее по времени значение плотности потока энергии называют интенсивностью:

$$I = \langle j\rangle$$

Если мы имеем дело с суперпозицией волн формула становится сложнее:

$$\vec{j} = -\sigma\vec{u}$$
$$j_x = -E\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\sigma u_x$$

где σ - напряжение, $\vec{u}$ - скорость частиц (вывод стр 24)

5 Стоячие волны

5.1 Уравнение стоячей волны

При наложение волн они не возмущают друг друга, колебания частиц оказываются векторной суммой колебаний. Рассмотрим случай когда две гармонических волны с одинаковыми частотой и амплитудой распростроняются в противоположных направлениях

$$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx) \qquad \xi_1 = a\cos(\omega t + kx)$$
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(kx)\cos(\omega t) \qquad A = 2a$$

5.2 Энергия стоячей волны

$$\dot{\xi} = -A\omega\cos(kx)\sin(\omega t)$$
$$\varepsilon = -Ak\sin(kx)\cos(\omega t)$$

В стоячей волне происходят превращения энергии то польностью в потенциальную, то полностью в кинетическую.

5.3 Колебания струны (стержня)

Образование стоячей волны возможно если на закреплённых концах струны смещение $\xi = 0$. То есть на длине струны l должно укладываться целое число n полуволн: $l = n \cdot \lambda/2$. Тогда возможные длины волн и их частоты:

$$\lambda_n = 2l/n \qquad n = 1, 2, \dots$$
$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l}n$$

где v - фазовая скорость волны определяемая согласно 3.1.

Частоты ν_n называеют собственными, ν_0 - основной, $\nu_2, n_3, \dots$ - обертонами