1 Введение

Определение 1.1 (Динамическая система)**.** Система у которой

- Определено состояние как совокупность велечин или функция в данный момент времени
- Задан закон эволюции системы

Изучаем вектор состояния $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\vec{x} \in X \in \mathbb{R}^n$

Определение 1.2 (Типы законов эволюции)**.** /

- Системы с непрерывным временем (потоки) $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}$ - автономная
- Системы с дискретным временем (каскады) $\vec{x}_{k+1} = T_k \vec{x}_k$, здесь T_k - оператор, в большинстве случаев - функция

Пример. Для описание системы движущегося колеса используем два параметра: скорость и угол. Вектор состояния $\vec{x} = \{x_0 \; x_1\}$.

$$\frac{d\vec{x}}{t} = f(\vec{x}, t)$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\vec{x}, t) \\ \dots \\ x_n = f_n(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Определение 1.3 (Автономная система)**.** Если правая часть системы дифф. уравнений не зависит от времени система называется автономной. Когда система не автономная над ней находится сверхсистема, изменение которой нужно изучить и определить её воздействие на нашу систему в зависимости от времени.

Пример. Спутник на орбите - автономная система, сила воздействующая на него зависит только от координат. А если Земля не округлая и вращается нужно вводить начальное положение и изменение от времени, система уже не автономная.

Пример. Если мы смотрим на популяцию кроликов раз в пол года имеем следующий закон изменения.

$$x_{k+1} = f_1(x_k)$$

2 Описание системы

Определение 2.1 (Твёрдое тело)**.** Система мат точек, у которых не изменяется расстояние между любыми 2мя точками.

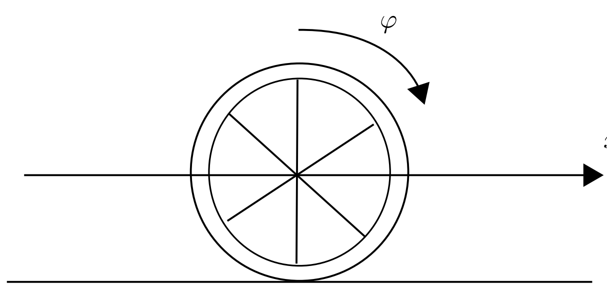
Имеем систему N материальных точек, где ν - номер точки. Движение описывается в виде

$$\vec{r}_\nu(t),\ \nu = 1, \ldots, N$$

$$\vec{v}_\nu(t) = \dot{\vec{r}}_\nu(t) \qquad \vec{w}_\nu(t) = \dot{\vec{v}}_\nu(t)$$

Связи $f(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_\nu, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_\nu, \ldots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$, кратко $f(t, \vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_N) = 0$. Конечные связи - не зависят от скорости $f(t, \vec{r}_\nu) = 0$, стационарные - не зависят от времени $f(\vec{r}_\nu) = 0$, интегрируемые $f(t, \vec{r}_\nu) = G$

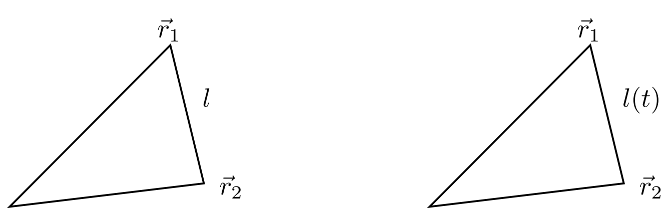
Пример.



В колесе без проскальзывания:

$$\dot{x_1} = R\dot{\varphi}_1$$

Пример.



Стационарная и нестационарная связи:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2 \qquad\qquad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2(t)$$

Определение 2.2 (Голономные системы)**.** Системы мат точек, в которых нет дифференицальных неинтегрирумеых связей.

Замечание. Если наложено d связей (голономных) для описание положения нужно $3N - d$ переменных.

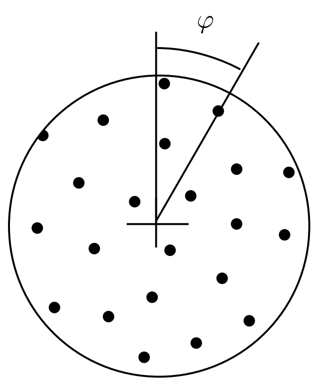
Определение 2.3 (Кол-во степеней свободы)**.** Минимальное количество независимых переменных которые однозначно определяют **положение** системы называется количеством степеней свободы.

Замечание. Состояние отличается от положения тем, что в неё входят скорости и зная сотояние, мы может предсказать как система будет развиваться.

Определение 2.4 (Параметризация системы)**.** Введение параметров $q_1, \ldots, q_n$ ($q = \{q_1, \ldots, q_n\}$-обобщённые координаты) таких, что однозначнозначно описывают положение:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad \nu = 1, \ldots, N$$

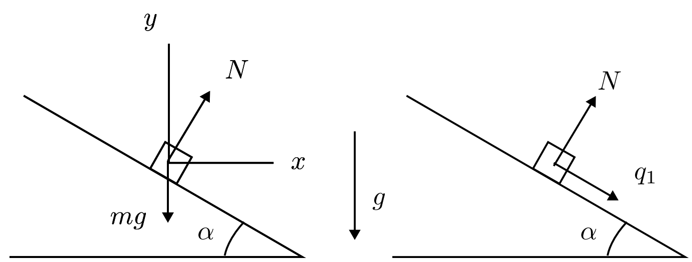
Пример.



Твёрдое тело круг на плоскости, три обощённые координаты x, y, φ соответственно q_1, q_2, q_3.

Определение 2.5. Если нет нестационарных связей то $\vec{r}_\nu(q)$ склерономные системы (не зависят от времени).

3 Лагранжева механика



$$\begin{cases} y = -x\tan\alpha \\ m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum \vec{F}_\nu \end{cases} \qquad \ddot{q}_1 = g\sin\alpha$$

3.1 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Применимо к голономным системам.

3.1.1 Кинетическая энергия

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1\dots n$$

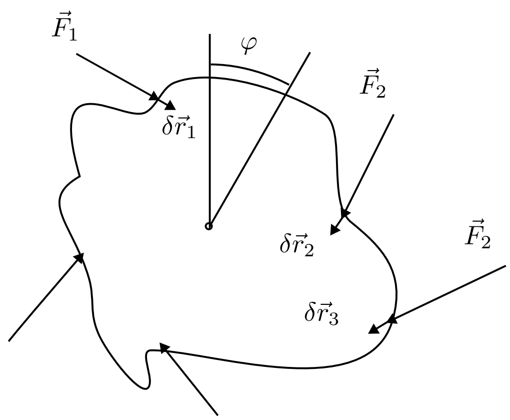
$T(\dot{q}, q, t)$ - кинетическая энергия, $Q_i(\dot{q}, q, t)$ - обобщённые силы

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta q_i$$

$\delta\vec{r}_\nu$ - виртуальное перемещение.

Определение 3.1 (Виртуальное перемещение)**.** Виртуальное перемещение - перемещение точек системы с учётом наложенных связей не изменяющихся (замороженных) во времени.

Пример.



Одна степерь свободы - угол вращения. Начинаем варьировать φ чтобы выразить $\delta\vec{r}_\nu$ через δq_i получаем работу и тогда можем выразить Q_i. В случае когда степеней свободы много нужно жёстко фиксировать все кроме одной.

3.1.2 Потенциальная энергия

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q,t)}{\partial q_i}$$

Пример.

- Гравитационное поле: $\Pi = mgh$ или $\Pi = -\frac{\gamma Mm}{r}$ при нескольких телах.
- Пружина $\Pi = \frac{c(\Delta x)^2}{2}$.
- Точка на стержне прикреплённого к оси вращения: возникает цетробежная сила если рассматривать систему отсчёта связанную с осью и стрежнем $F_x(x) = m\omega^2 x$ тогда потенциальная энергия центробежной силы $\Pi = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$

Замечание. Потенциальная энергия всегда увеличивается в сторону обратную направлению силы.

3.1.3 Лагранжиан

$$L = T - \Pi$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n}$$

3.1.4 Стректура кинетической энергии

Для набора материальных точек ($\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q-t)$):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

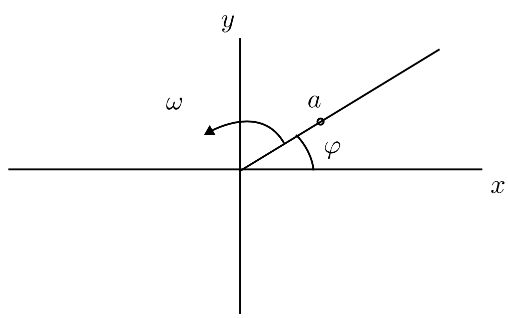
$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \qquad a_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \qquad a_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j\dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{a_0}_{T_0}$$

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Для склерономной $T = T_2$

Пример.



q - расстояние от начала стержня до точки a

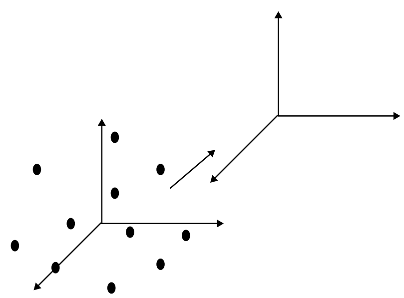
$$\varphi = \omega t \qquad x = q\cos(\omega t) \qquad y = q\sin(\omega t)$$

$$\dot{x} = \dot{q}\cos(\omega t) - q\omega\sin(\omega t) \qquad \dot{y} = \dot{q}\sin(\omega t) + q\omega\cos(\omega t)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2 = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

$$T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

Пример.



Теорема Кёнига:

1. Кёнигова система отсчёта
   (a) Центр находится в центре масс
   (b) При движении системы кёнигова система точек движется поступательно
2. $T = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + T^{\text{отн}}$, для твёрдого тела (на плоскости) $T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} I_{\text{ось вр}} \omega^2$

3.1.5 Алгоритм решения

1. Определить количество степеней свободы
2. Выбрать обобщённую систему координат
3. $T(\dot{q}, q, t)$
4. $\Pi(q, t)$
5. $L = T - \Pi$
6. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$
7. Вычислить производные

3.2 Классификация обобщённых сил

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}, q, t)$$

$\tilde{Q}$ - непотенциальная сила

$$N = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i$$

- мощность обобщённых сил.

$$\vec{Q} = -Q_q q - Q_{\dot{q}} \dot{q}$$

$$C = \frac{1}{2}(Q_q + Q_q^T) = C^T \qquad B = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} + Q_{\dot{q}}^T) = B^T$$

$$P = \frac{1}{2}(Q_q - Q_q^T) = -P^T \qquad G = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} - Q_{\dot{q}}^T) = -G^T$$

$$\vec{Q} = -Cq - Pq - B\dot{q} - G\dot{q}$$

матрица	q	$\dot{q}$
симметричные	консервативные C	диссипативные B
кососимметричные	существенно непотенц. P	гироскопические G

$$T(\dot{q}, q, t) = T_2 + T_1 + T_0$$

Индекс показывает степень с которой T_i зависит от $\dot{q}$. В склерономной T_1 и T_0 нет.

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi$$

3.2.1 Изменение полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Условия консервативной системы (не учитывая экзотику когда слогаемые сокращаются):

1. Если система склерономная $T_1 = T_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$
2. Если $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$.
3. Если $\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$

4 Гамильтонова механика

$$L(\dot{q}, q, t) = T - \Pi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{cases}$$

В лагранжевой механике на очевидно что такое лагранжиан и итоговые уравнения получаются в ненормальном виде из-за чего их сложно решать.

4.1 Переход к новым переменным

$q, \dot{q}, t$ ($\dot{q}$-обобщённые скорости) $\Rightarrow q, p, t$ (p - обобщённый импульс)

$L(\dot{q}, q, t) \Rightarrow H(q, p, t)$ функция гамильтона (гамильтониан)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \dot{\hat{q}} = \dot{\hat{q}}(q, p, t)$$

Преобразование Лежандра:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{\hat{q}}_i - L(q, \dot{\hat{q}}, t)$$

На место $\dot{\hat{q}}$ нужно подставить зависимость выше.

Канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Уравнения 1го порядка в нормальном виде!

$$H = T_2 - T_0 + \Pi$$

В склерономной системy $T_0 = 0 \Rightarrow H = T_2 + \Pi = T + \Pi = E$

5 Первый интеграл

$$\{\dot{x}_j = g_j(x, t) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad m = 2n$$
$$x_j^* = x_j^*(t, C_1, \ldots, C_m)$$

Определение 5.1 (Первый интеграл)**.** $f(x, t)$ - первый итеграл, если при подстановке любого решения x^*, её значение констанка.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_j = 0$$

Законы сохранения $f(x) = const$ тоже являются первыми интегралами.

Если набрать m функционально независимых первых интегралов можно выразить x_j через соответствующие константы и t ($f_k(x, t) = C_k$) и тогда не нужно решать диффур.

Если же первые интегралы не зависят от t ($f(x) = C_k$) всего их может быть $m - 1$.

Определение 5.2. k первых интегралов $f_k(x_1, \ldots, x_m, t)$ называются функционально независимыми в области D если в каждой точке D ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$ равен k.

5.1 Гамильтоновы системы

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Определение 5.3 (Скобки Пуассона)**.** Пусть $\exists$ дважды непр. дифф. функции гамильтоновых переменных $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$$

Замечание. $(\varphi, \varphi) = 0$, $(\varphi, \psi) = -(-\psi, \varphi)$

Теорема 5.1 (Критерий перв. инт. гам. сист.)**.**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0$$

Теорема 5.2 (Теоремя Якоби-Пуассона)**.** Скобка Пуассона от двух первых интегралов гамильтоновой системы также является первым интегралом.

5.2 Первые инт. гам. сист

1. Если H не зависит от t, он явл. первым интегралом, $H(q, p) = h$ - обобщённый интеграл энергии. ($H = T + \Pi = E$, если $T = T_2$)

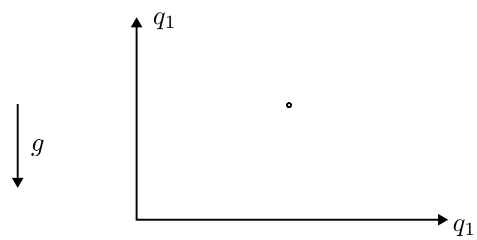
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = (H, H) = 0$$

2. Если H не зависит от координаты q_k она называется циклической и существует первый интеграл $p_k = const$.

3. Если пара переменных q_k и p_k входит в H в виде одной функции $z_k = z_k(q_k, p_k)$ то $z_k(q_k, p_k) = const$ является первым интегралом. Переменная q_k называется отделимой.

Пример.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1^2 + p_1^2 + \frac{q_2 p_2}{e^{q_1^2 + p_1^2}} \sin(q_2 p_2)$$

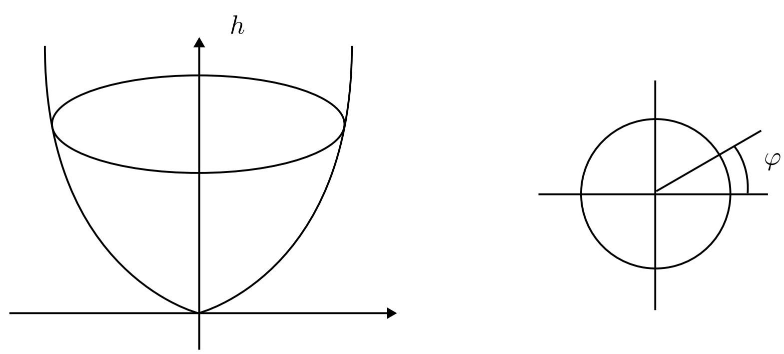


Пример. Материальная точка в постоянном поле тяжести.

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m}}_{const} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m} + mgq_2}_{const} = const$$

Получаем циклическую переменную, отделимую перменную и обобщённый инт. энергии.

Пример. Мат. точка на парабалоиде.

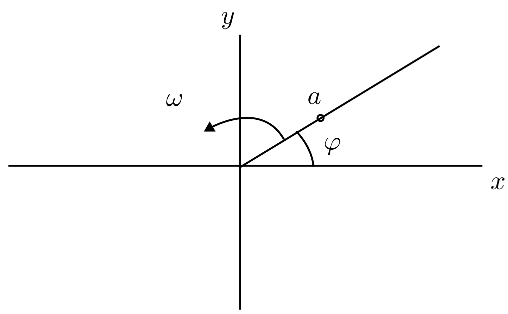


φ добавляет степень свободы однако она не влияет на потенциальную энергию, поэтому она и называется циклической.

$$\Pi = mgh$$

Пример.

$$H(q,p) = T_2 - T_0 + \Pi = const$$



	инерциальная	неинерц
T	$\frac{m}{2}[\dot{q}^2+\omega^2 q^2]$	$\frac{m}{2}\dot{q}^2$
Π	0	$-\frac{m\omega^2 q^2}{2}$
E	$\frac{m}{2}[\dot{q}^2+\omega^2 q^2]$	$\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m\omega^2 q^2}{2}$
H	$\frac{p^2}{2m}-\frac{m\omega^2 q^2}{2}$	$\frac{p^2}{2m}-\frac{m\omega^2 q^2}{2}$

5.3 Интегрируемость гамильтоновых систем

$$\{\dot{x}_j = g_j(x,t)$$

Пусть известно l первых интегралов

$$f_k(x,t) = C_k \qquad k = 1,\ldots,l$$

Выразим l переменных x_j через остальные x_{m-l}. Понизим порядок системы дифф. уравнений. Если система автономна

$$\{\dot{x}_j = g_j(x)$$

и известно $n-1$ первых инт. получим

$$\frac{dx_m}{dt} = g_m(x_m, C_1,\ldots,C_{m-1}) \qquad \int \frac{dx_m}{g_m(x_m, C_1,\ldots,C_{m-1})} = t + C_m$$

1. l циклических инт. понижают порядок системы на $2l$

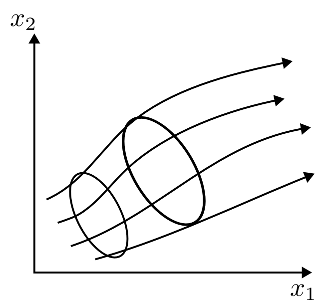
$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

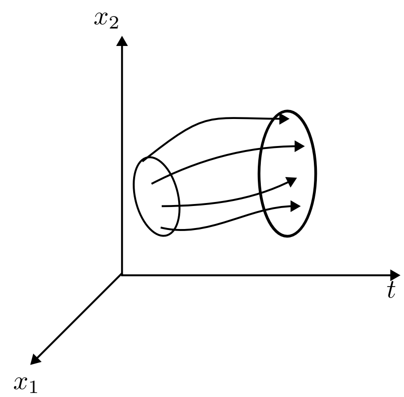
$$p_i = C_k$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial C_k} = F_k(c_1,\ldots,C_l,C_{2n-2l+1},\ldots,C_{2n},t)$$

2. Если n координат отделимы. То гамильт. сист инт. Если сист. 2-го порядка имеет 1-интеграл $\Rightarrow$ интегрируема.

5.4 Теорема Лиувилля (траектории в фазовом пр-ве)





Теорема 5.3 (Лиувилля о сохранении фаз. объёма)**.**

Если

$$\left\{\dot{x}_j = f_j(x,t)\right.$$

удовлетворяет условию

$$div\vec{f} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0$$

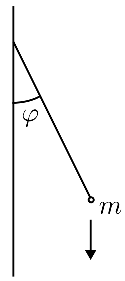
в системе сохраняется фазовый объём:

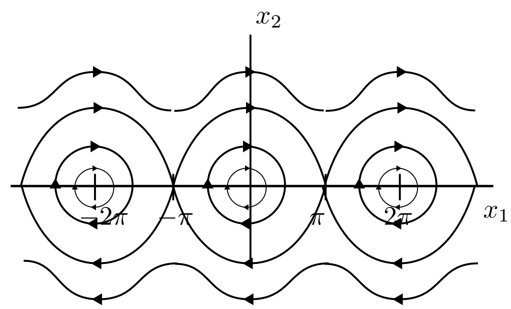
$$J = \iiint\limits_V \delta x_1 \dots \delta x_m$$

Замечание. Фазовый объём в гамильтоновых системах:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) = 0$$

6 Теория устойчивости





$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$x_1 = \varphi \qquad x_2 = \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 \end{cases}$$

Особые точки $x_2 = 0$ и $\sin x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Определение 6.1 (Положение равновесия)**.** Такое положение механической системы при котором не изменяются положения мат точек при условии того, что в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости мат. точек были равны нулю.

Замечание. В кратце:

$$\vec{R}(0) = \vec{R}_0 \ \dot{\vec{R}}(0) = 0 \ \Rightarrow \ \vec{R}(t) = \vec{R}(0) \ \forall t > 0$$

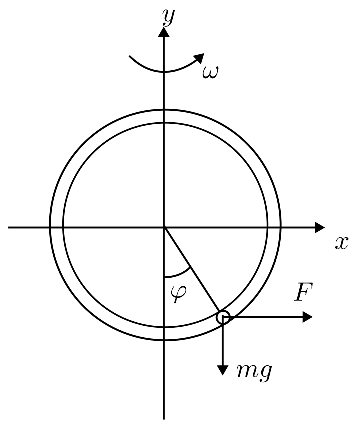
6.1 Стационарные заданные системы

Определение 6.2. Если система стационарно задана ($\vec{R} = \vec{R}(q_1, \ldots, q_n)$), положение q^0 называется положением равновесия, если из $q(0) = q^0$ и $\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q(t) = q^0 \ \forall t > 0$.

Теорема 6.1 (Критерий положения равновесия).

$$q^0\text{- полож. равн} \Leftrightarrow Q_i(q^0, \dot{q} = 0) = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \right.$$



Пример.

$$\Pi_c = -\int F(x)dx = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\Pi = mgy - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -mgr\sin\varphi - \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow mgr\sin\varphi - m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi\cos\varphi = 0$$

$$mr\sin\varphi(g - \omega^2 r\cos\varphi) = 0$$

$$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = \pi$$

$$\varphi_{3,4} = \begin{cases} \pm\arccos\dfrac{q}{\omega^2 r},\ \dfrac{q}{\omega^2 r} \leq 1 \\ \emptyset,\ \dfrac{q}{\omega^2 r} > 1 \end{cases}$$

Определение 6.3 (Усточивость по Ляпунову).

$$(\forall\varepsilon < 0)(\exists\delta > 0)(\forall|\vec{x}(0)| = |\vec{x}_0| < \delta)(\forall t > 0) \hookrightarrow |\vec{x}(t)| < \varepsilon$$
$$(\forall\varepsilon < 0)(\exists\delta > 0)(\forall|q(0)| < \delta, \forall|\dot{q}(0)| < \delta)(\forall t > 0) \hookrightarrow |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon$$

Неустойчивость:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists|\vec{x}(0)| = \vec{x}_0 < \delta)(\exists t_1 > 0) \hookrightarrow |\vec{x}(t)| > \varepsilon$$

6.2 Устойчивость равновесия Лагранжевых систем

$$q, \dot{q}, T(\dot{q}, q), Q_i(\dot{q}, q) \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, \dots, n$$

Приводим к нулю: $q = q - q^*$, q^* - значение в пол. равн.

Тогда в положении равновесия: $q^0 = 0$ и $\dot{q}^0 = 0$.

6.2.1 Устойчивость пол. равн. консервативной системы

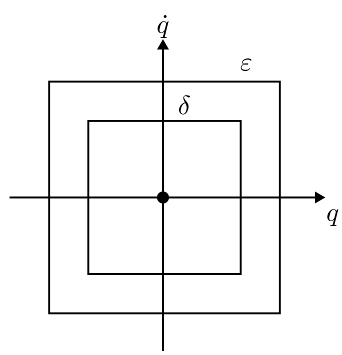
$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i}$$

Устойчивость определяется $\Pi(q)$ (принимаем $\Pi(q^*) = 0$)

Теорема 6.2 (Лагранжа-Дирихле (дост. усл.))**.** Если в некоторой Δ - окрестности положения равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет строгий минимум, это положение равновесия устойчиво.

То есть:

$$|q| < \Delta \hookrightarrow \begin{cases} \Pi(q) = 0, |q| = 0 \\ \Pi(q) > 0, |q| \neq 0 \end{cases}$$



Доказательство. $E(q, \dot{q}) = T + \Pi$

$T(\dot{q}, q) > 0$ при $|\dot{q}| \neq 0 \Rightarrow E(\dot{q}, q) > 0$ если $\{q, \dot{q}\} \neq 0, |q| < \Delta$

Возьмём $0 < \varepsilon < \Delta$, E достигает на границе минимум $E \geq E^* > 0$, $\exists\delta$ - окрестность: $|q| < \delta$, $|\dot{q}| < \delta$, $E(0) < E^*$, $\forall t > 0 \hookrightarrow E(t) = E(0) < E^*$ □

Теорема 6.3. ($\Pi(q)$ достаточное условие экстремума)

$$\Pi(q) = \underbrace{\Pi(0)}_{0} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\Big|_{q=0}}_{0} q + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q=0} q_i q_j + \Pi_m(q)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \qquad \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$$

Если Π_2 полож. опред., то Π в точке $q = 0$ имеет строгий минимум

$\Rightarrow$ критерий Сильвестра.

6.2.2 Теоремы неуст. пол. равн. консервативной системы

Теорема 6.4 (Ляпунова I)**.** Если в положении равновесия конс. системы у потенц. энергии $\Pi(q)$ отсутствует минимум (в том числе нестрогий) и это можно определить по Π_2, то данное положение неустойчиво.

Пример.

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} q^T C q$$

$$\Pi(q) = 4q_1^2 - 2q_1q_2 + 2q_2^2 = \frac{1}{2}(8q_1^2 - 4q_1q_2 + 4q_2^2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Критерий Сильвестра выполнен $\Rightarrow$ устойчивое положение равновесия

6.2.3 Границы теорем

1. Π не зависит от компоненты q
2. Разложение 2-ой степени не зависит от компоненты q

6.2.4 Степень неустойчивости

$\Pi - 2 = \frac{1}{2} q^T C q$ приводим C к диаг. виду

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \theta_i^2$$

Число отрицательных собственный чисел r_i назыв. степенью. неуст.

6.2.5 Гироскопические и диссипативные силы

Определение 6.4 (Гироскопические силы).

$$\tilde{Q}_i : \ \forall \dot{q} \hookrightarrow \dot{q}^T \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$$

Определение 6.5 (Диссипативные силы).

$$Q_i^* : \ \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i \leq 0$$

Определение 6.6 (Строго диссипативные силы).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = 0, \dot{q}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i < 0, \dot{q}_i \neq 0 \end{cases}$$

6.3 Асимтотическая устойчивость

Динамическая система:

$$\{\dot{x}_j = f_j(x,t) \qquad j = 1, \ldots, n$$

Определение 6.7. Нулевое решение $\vec{x}(t) = 0$ называется притягивающим, если $\exists \Delta : \ \forall |\vec{x}(0)| < \Delta \ \exists \lim\limits_{t \to \infty} |x(0)| = 0$.

Определение 6.8. Нулевое решение называется асимпт. уст., если оно уст. и притягивающее.

6.4 Влияние гироскопических и диссипативных сил

6.4.1 Изначально устойчива

Если в полож. равн. потенц. энергия имеет строгий локальный минимум, при добавл. гироскопических и диссипативных сил оно останется устойчивым.

При добавлении дисс. сил с полной диссипацией полож. равн. становится асимпт. уст.

6.4.2 Изначально неустойчива

Если среди коэфф. устойивости r_i хотя бы один является отрицательным, изолированное пол. равновесия на может быть стабилизировано диссипативной силой с полной диссипацией.

Если положение равновесия стабилизировано с помощью гироскопических сил, то добавление диссипативных сил с полной диссипацией разрушает устойчивость.

Если степень неустойчивости чётная, то возможна стабилицазия с помощью гироскопических сил.

7 Решения линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \end{cases} \qquad \dot{\vec{x}} = D\vec{x}$$

$\vec{x} \equiv \vec{0}$ - тривиальное решение.

Решение $\vec{x} = \vec{u}e^{\lambda t}$, $\lambda \vec{u} e^{\lambda t} = D\vec{u}e^{\lambda t}$, $det(D - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow \lambda_j$ имеет m решений, если кратные корни s, перечисляем s раз

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$$

1. Нет кратных корней

$$(D - \lambda E)\vec{u} = 0 \qquad rang(D - \lambda m) < m$$
$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} C_j \vec{u}_j e^{\lambda_j t}$$

2. Есть кратные корни $rang(D - \lambda E) = m - 1$ присоед. вектора

   $rang(D - \lambda E) = m - s$ получим s собственных векторов

При $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ общее решение:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} C_j [e^{\mu_j t}(\vec{h}_j(t) \cos \nu_j t + \vec{H}_j(t) \sin \nu_j t)]$$

- $\forall j \hookrightarrow \mu_j = Re\lambda_j < 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \rightarrow$ асимпт уст
- $\exists j : \ \mu_j = Re\lambda_j > 0 \Rightarrow \vec{x} = 0 \rightarrow$ неуст.
- $\forall j \hookrightarrow \mu_j = Re\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, r$, $r < m$ и $\exists j : \ \mu_j = Re\lambda_j = 0$, $j = r + 1, \dots, m$ - уст. или неуст.

Теорема 7.1 (Критерий Рауса-Гурвица).

Матрица Гурвица ($m \times m$):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы действ. части всех корней хар. ур. были отрицательными ($\forall j \hookrightarrow Re\lambda_j < 0$), необходимо и достаточно чтобы все главные миноры матрицы Гурвица были положительны.

Теорема 7.2 (Необходимое усл. устойчивости системы).

$$\forall j \hookrightarrow a_j > 0$$

Теорема 7.3 (Критерий Льенара-Шипара). При выполнении необходимого условия устойчивости для устойчивых систем необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица с нечетными (четными) номерами были положительны.

Теорема 7.4 (Ляпунова об устойчивости по лин. приближению).

$$\left\{ \dot{x}_j = f_j(x) \right. \qquad \dot{\vec{x}} = D\vec{x} + g(\vec{x})$$

$\forall j \hookrightarrow \mu_j = Re\lambda_j < 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$ - асимпт. уст. у нел. сис.

2. $\exists j : \ Re\lambda_j > 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$ - неуст. у нел. сист.

3. $\forall j \hookrightarrow \mu_j = Re\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, r$, $r < m$ и $\exists j : \ \mu_j = Re\lambda_j = 0$, $j = r+1, \dots, m$ - критич., нельзя переходить к лин. прибл

7.1 Прямой метод Ляпунова

В Δ - окрестности $\vec{x} = 0$ определяется непр. дфф. функция $V(\vec{x})$:

- $V(\vec{0}) = 0$
- $V(\vec{x}) > 0$ при $|\vec{x}| < \Delta$ и $|\vec{x}| \neq 0$

$$\frac{dV(\vec{x})}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j$$

Если существует $V(x)$ и во всей окрестности 0 выполняется:

1. $\frac{dV}{dt} \leq 0$ - уст.
2. $\frac{dV}{dt} < 0$ - асимпт. уст.
3. $\frac{dV}{dt} > 0$ - неуст

8 Малые колебания консервативных систем

$$\dot{\vec{x}} = D\vec{x}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad L = T - \Pi$$
$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} \qquad \Pi = \frac{1}{2}q^T Cq$$

Кинетческая скорость может зависить не только от скоростей, но и от координат (полагаем $q = 0$ - устойчивое положение равновесия):

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(0)\dot{q}_i\dot{q}_k + \dots$$
$$\Pi(q) = \underbrace{\Pi(0)}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\Big|_{q=0} q_i}_{0} + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\Big|_{q=0} q_i q_k + \dots$$

Разложив в ряды получаем n уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \end{cases}$$
$$A\ddot{q} + Cq = 0$$

- основное уравнение малых колебаний, ищем решения в виде:

$$q = \vec{u}\sin(\omega t + \alpha) \qquad \rho = \omega^2$$
$$(C - \rho A)\vec{u} = 0$$

Тривиальное решение $\vec{u} = 0$ - нахождение в положении равновесия.

$$det(C - \rho A) = 0$$
$$a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

- вековое уравнение, из него получаем n корней для ρ.

Подставляя в наше уравнение получаем общее решение:

$$q = \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{u}_i\sin(\sqrt{\rho_i}t + \alpha_i)$$

Если ρ_k кратности s, если $rang(C-\rho A) = n-s$, можем найти s амплитудных векторов $\vec{u}$.

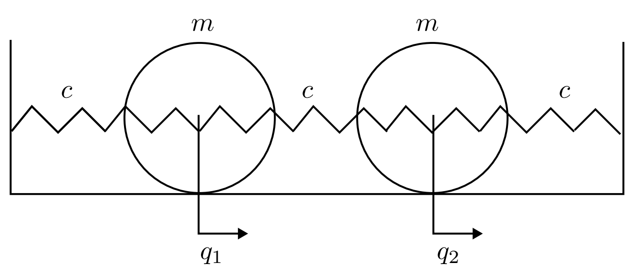
В нашем случае это условие выполняется так как обе матрицы можно привести к диагональному виду (одну даже к единичному):

$$q = U\theta \qquad \dot{q} = 0U\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_i^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i\theta_i$$

$$\left\{\ddot{\theta}_i + \omega_i\theta_i = 0\right.$$

Матрица U состоит из нормированных амплитудных вект. $U = (u_1 \ \dots \ u_n)$, $u_i^T A u_k = \delta_{ik}$ (δ_{ik} - символ Кронекера).



Пример.

$$\Pi = \frac{c}{2}q_1^2 + \frac{c}{2}(q_2 - q_1) + \frac{c}{2}q_2^2 = \frac{1}{2}(2cq_1^2 - 2cq_1q_2 + 2cq_2^2) \qquad C = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m}{4}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{4}\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}(\frac{3m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{3m}{2}\dot{q}_2^2) \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{3m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3m}{2} \end{pmatrix}$$

$$det(C - \rho A) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} 2c - \frac{3m}{2}\rho & -c \\ -c & 2c - \frac{3m}{2}\rho \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \rho_1 = \frac{2c}{3m} \quad \rho_2 = \frac{2c}{m}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$cu_{11} - cu_{21} = 0 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично получаем $u_2 = (1 \quad -1)^T$.

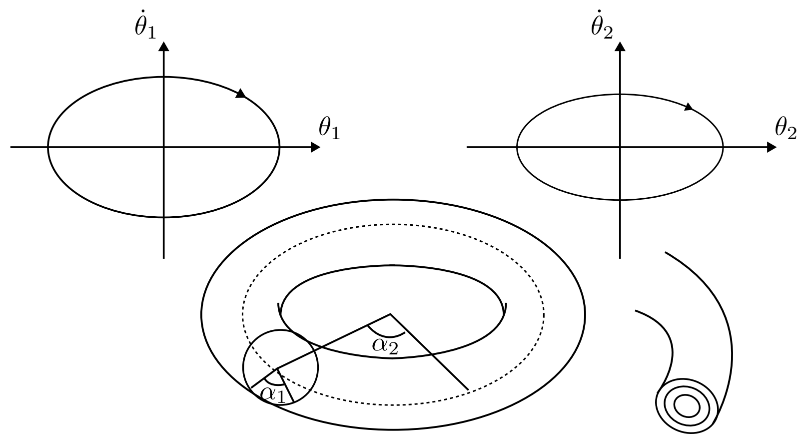
Общее решение:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{\frac{2c}{3m}} t + \alpha_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{\frac{2c}{m}} t + \alpha_2)$$

$$\tilde{u}_i^T A \tilde{u}_i = 1 \qquad \tilde{u}_i = k_i u_i$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3m}}(\theta_1 + \theta_2) \\ q_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3m}}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{2c}{3m}\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \dfrac{2c}{m}\theta_2 = 0 \end{cases}$$



Если $\exists$ целые k_1, k_2 : $k1_1\omega_1 = k_2\omega_2$ - частотые соизмеримы, внутри тора есть множество схожих траекторий, иначе весь тор покрыт одной траекторией.