1 Некоторые свойства абсолютно инт функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале (a,b), если выполняются два условия:

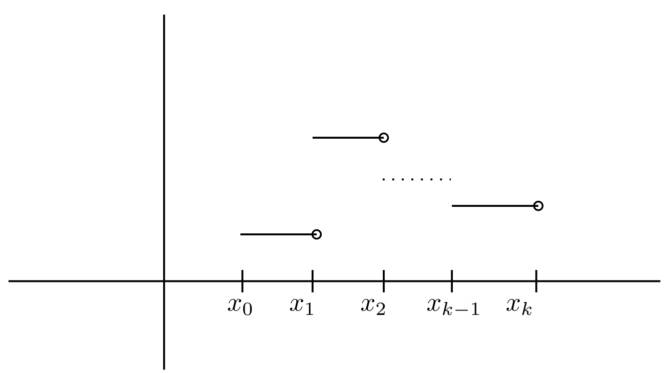
1. $\exists x_0, x_1, \ldots, x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$, что на любом отрезке $[\xi, \eta]$ из (a,b), не содерж x_i функция $f(x)$ интегрируема по Риману.
2. $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном (a,b). Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна и ограничена на (a,b). $f(x)\varphi(x)$ - абсолютно интегрируемо на $[a,b]$

Доказательство. а) Рассмотрим $\forall[\xi,\eta] \subset (x_{i-1}, x_i)$. На нём $f(x)$ и $\varphi(x)$ - интегрируема по Риману, следовательно $f(x)\varphi(x)$ инт. по Риману $\Rightarrow 1$.
б) Так как $\varphi(x)$ - ограничена то $\exists M : |\varphi(x)| \le M$ на (a,b). Тогда $|f(x)\varphi(x)| \le |f(x)|M$ на (a,b). Т.к. $\int_a^b |f(x)|dx$ - сход., то $\int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx$ - сход. по признаку сравнения $\Rightarrow 2$.
$\Rightarrow f(x)\varphi(x)$ - абс. инт. на (a,b) □

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$ определённая на $\mathbb{R}$ называется ступенчатой если $\exists$ числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0,\ x \in (-\infty, x_0) \cup [x_k, +\infty) \end{cases}$$



Замечание. Если положить

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \; x \notin [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

то $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1.1 (О приближении абс инт функций ступенчатыми)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на конечном или бесконечном (a, b) тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ступенчатая функция $\varphi(x) : \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть для простоты записи у функции имеются только две особенности в точках a и b, т.е. $f(x)$ - инт по Риману на $\forall[\xi, \eta]$ из (a, b).

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Из абсолютной инт. $f(x)$ следует $\exists$ таких $[\xi, \eta] \in (a, b)$:

$$\int_a^\xi |f(x)|dx + \int_\eta^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $f(x)$ инт. по Риману на $[\xi, \eta]$ то для рассмотренного $\varepsilon > 0$ $\exists \delta : \forall$ разб. отр. $[\xi, \eta]$ $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ $(|\tau| < \delta)$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

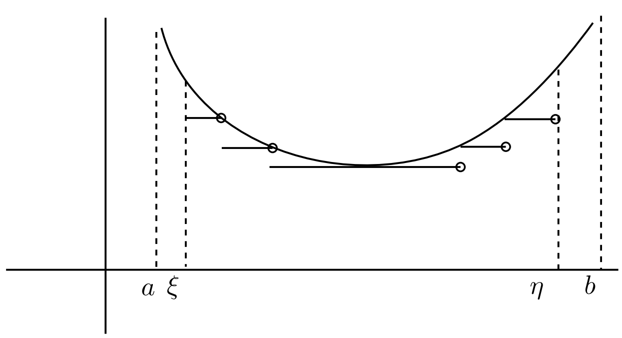
Выполняется $\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - \sigma_\tau\right| < \varepsilon/2$, где σ_τ - сумма Дарбу.

$\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, где $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i$ $(m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$.

Также $\int_\xi^\eta f(x)dx \geq s_\tau \;\Rightarrow\; 0 \leq \int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau \leq \varepsilon/2$.

Рассмотрим ступенчатую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, \; x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, x \notin [\xi, \eta) \end{cases}$$



Отметим: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i = \int_\xi^\eta f(x)dx$, $\varphi(x) \le f(x)$ на $[\xi, \eta]$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int_a^\xi |f|dx + \int_\xi^\eta |f - \varphi|dx + \int_\eta^b |f|dx$, но $\int_\xi^\eta |f - \varphi|dx = \int_\xi^\eta (f - \varphi)dx = \int_\xi^\eta fdx - s_\tau$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ □

Теорема 1.2 (Римана (об осциляциях))**.** Пусть $f(x)$ абс. инт. на конечном или бесконечном интервале (a, b), тогда $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\nu x dx = 0$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$

Доказательство. 1) Если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [\xi, \eta) \\ 0, \; x \notin [\xi, \eta) \end{cases}, \; [\xi, \eta] \in (a, b)$$

То:
$$\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = \int_\xi^\eta \sin\nu x dx = -\frac{\cos\nu x}{\nu}\Big|_\xi^\eta \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

2) Если $\varphi(x)$ - ступенчатая, то она является линейно комбинацией рассмотренных одноступенчатых функций, поэтому для неё утверждение справедливо.

3) Рассмотрим абс. инт. на (a, b) функцию $f(x)$. Возьмём $\underline{\forall\varepsilon > 0}$.

По предыдущей теорме $\exists\varphi(x)$ - ступенчатая функция: $\int_a^b |f - \varphi|dx < \varepsilon/2$.

Т.к. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = 0$, то $\underline{\exists\nu_\varepsilon} : \forall\nu \; (|\nu| > \nu_\varepsilon) \hookrightarrow |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| < \varepsilon/2$. Тогда $\underline{\forall\nu : \; (|\nu| > \nu_\varepsilon}$ выполняется:

$$\underline{|\int_a^b f(x)\sin\nu x dx|} = |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx + \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| \le$$
$$\le |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx| + |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| <$$
$$< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon}$$

Подчёркнутое означает,что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$. Аналогично косинус. □

Замечание. Интервал (a, b) при исследовании абсолютно интегрируемых на другой промежуток $[a, b], [a, b), (a, b]$