1 Некоторые свойства абсолютно инт функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале (a,b), если выполняются два условия:

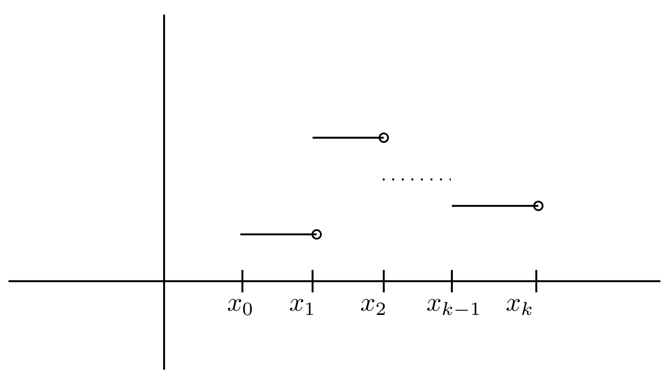
1. $\exists x_0, x_1, \ldots, x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$, что на любом отрезке $[\xi, \eta]$ из (a,b), не содерж x_i функция $f(x)$ интегрируема по Риману.
2. $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном (a,b). Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна и ограничена на (a,b). $f(x)\varphi(x)$ - абсолютно интегрируемо на $[a,b]$

Доказательство. а) Рассмотрим $\forall[\xi,\eta] \subset (x_{i-1}, x_i)$. На нём $f(x)$ и $\varphi(x)$ - интегрируема по Риману, следовательно $f(x)\varphi(x)$ инт. по Риману $\Rightarrow 1$.
б) Так как $\varphi(x)$ - ограничена то $\exists M : |\varphi(x)| \le M$ на (a,b). Тогда $|f(x)\varphi(x)| \le |f(x)|M$ на (a,b). Т.к. $\int_a^b |f(x)|dx$ - сход., то $\int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx$ - сход. по признаку сравнения $\Rightarrow 2$.
$\Rightarrow f(x)\varphi(x)$ - абс. инт. на (a,b) ◻

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$ определённая на $\mathbb{R}$ называется ступенчатой если $\exists$ числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \ x \in (-\infty, x_0) \cup [x_k, +\infty) \end{cases}$$



Замечание. Если положить

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \ x \notin [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

то $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1.1 (О приближении абс инт функций ступенчатыми)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на конечном или бесконечном (a, b) тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ ступенчатая функция $\varphi(x) : \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть для простоты записи у функции имеются только две особенности в точках a и b, т.е. $f(x)$ - инт по Риману на $\forall [\xi, \eta]$ из (a, b).

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Из абсолютной инт. $f(x)$ следует $\exists$ таких $[\xi, \eta] \in (a, b)$:

$$\int_a^\xi |f(x)| dx + \int_\eta^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $f(x)$ инт. по Риману на $[\xi, \eta]$ то для рассмотренного $\varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall$ разб. отр. $[\xi, \eta]$ $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ $(|\tau| < \delta)$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

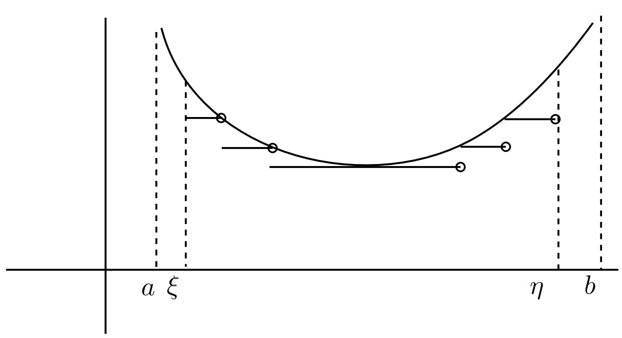
Выполняется $\left| \int_\xi^\eta f(x) dx - \sigma_\tau \right| < \varepsilon/2$, где σ_τ - сумма Дарбу.

$\left| \int_\xi^\eta f(x) dx - s_\tau \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, где $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i$ $(m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$.

Также $\int_\xi^\eta f(x) dx \geq s_\tau \ \Rightarrow \ 0 \leq \int_\xi^\eta f(x) dx - s_\tau \leq \varepsilon/2$.

Рассмотрим ступенчатую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, x \notin [\xi, \eta) \end{cases}$$



Отметим: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i = \int_\xi^\eta f(x)dx$, $\varphi(x) \le f(x)$ на $[\xi, \eta]$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int_a^\xi |f|dx + \int_\xi^\eta |f-\varphi|dx + \int_\eta^b |f|dx$, но $\int_\xi^\eta |f-\varphi|dx = \int_\xi^\eta (f-\varphi)dx = \int_\xi^\eta f dx - s_\tau$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ □

Теорема 1.2 (Римана (об осциляциях))**.** Пусть $f(x)$ абс. инт. на конечном или бесконечном интервале (a, b), тогда $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\nu x dx = 0$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$

Доказательство. 1) Если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\xi, \eta) \\ 0, & x \notin [\xi, \eta) \end{cases}, \ [\xi, \eta] \in (a, b)$$

То:

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = \int_\xi^\eta \sin\nu x dx = -\frac{\cos\nu x}{\nu}\Big|_\xi^\eta \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

2) Если $\varphi(x)$ - ступенчатая, то она является линейно комбинацией расмотренных одноступенчатых функций, поэтому для неё утверждение справедливо.

3) Рассмотрим абс. инт. на (a, b) функцию $f(x)$. Возьмём $\underline{\forall\varepsilon > 0}$.

По предыдущей теорме $\exists\varphi(x)$ - ступенчатая функция: $\int_a^b |f - \varphi|dx < \varepsilon/2$.

Т.к. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx = 0$, то $\underline{\exists\nu_\varepsilon}$: $\forall\nu$ $(|\nu| > \nu_\varepsilon) \hookrightarrow |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| < \varepsilon/2$. Тогда $\underline{\forall\nu : \ (|\nu| > \nu_\varepsilon}$ выполняется:

$$\begin{gathered} \underline{|\int_a^b f(x)\sin\nu x dx|} = |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx + \int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| \le \\ \le |\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin\nu x dx| + |\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x dx| < \\ < \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon} \end{gathered}$$

Подчёркнутое означает,что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\nu x dx = 0$. Аналогично косинус. □

Замечание. Интервал (a, b) при исследовании абсолютно интегрируемых на другой промежуток $[a, b], [a, b), (a, b]$

2 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 2.1. Ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ называется тригонометрическим рядом, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Определение 2.2. Множество функций $\{u_n(x)\} = \{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ называется тригонемтрической системой

Свойства тригоном. сист.

1. Триг. сист. "ортогональна"в смысле $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)u_k(x)dx = 0,\ \forall n, k : n \neq k$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} u_n^2(x)dx = \pi$, при $n \geq 2$

Доказательство. 1) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x)dx = 0$$

$\square$

Доказательство. 2) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}dx = \pi + 0 = \pi$$

$\square$

Лемма 2.1. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.1}$$

и ряд сходится равномерно тогда:

$$\begin{gathered} a_n = \frac{1}{\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx,\ n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,\ n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Домножим 2.1 на $\cos mx$. Полученный ряд будет равномерно сходится.

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} \cos mx(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| = |\cos mx| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leq$$
$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right|$$

Из выполнения усл. Коши равномерной сходимости для исходного ряда 2.1 следует выполнение усл. Коши равномерной сходимости полученного в результате умножения ряда.

Тогда имеем право интегрировать равнество (по x от $-\pi$ до π)

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} \cos mx(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \pi$$
$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

Второе равество в 2.2 получается аналогично. □

Определение 2.3. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi;\pi]$ функция. Тригонометрический ряд с коэффицентами 2.2 называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты a_k, b_k - коэффициетами Фурье. Имеет место запись (здесь $\sim$ означает соответствие):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Перефразируем лемму:

Лемма 2.2 (2.1’)**.** Рамномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$$

где $\alpha > 1$ является рядом Фурье своей суммы, так как он равномерно сходдится по признаку Вееруштрасса

Замечание. Если функция абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то интегралы в 2.2 сходятся абсолютно по 1.1

Замечание. Если $f(x)$ - 2π периодична и абс. инт. на каком-либо $[a-\pi, a+\pi]$, то она будет абс. инт. на $\forall$ другом таком отрезке и интегралы (2.2) не зависят от отрезка.

Замечание. Любую абсолютно интегрируемую на $[a-\pi, a+\pi]((a-\pi, a+\pi); (a-\pi, a+\pi], [a-\pi, a+\pi))$ можно продолжить до 2π периодической функции, возможно доопределив или переопределив функцию в граничных точках. Интегралы при этом не меняются.

Следствие 2.1. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ - посл. коэфф. Фурье 2π периодической и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

По 1.1 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ - абс. инт.. По Т. Римана получаем нужный результат.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

Не может быть рядом Фурье какой-либо абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции.

2.1 Ядро Дирихле. Принцип локализации

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = S_n(x, b) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

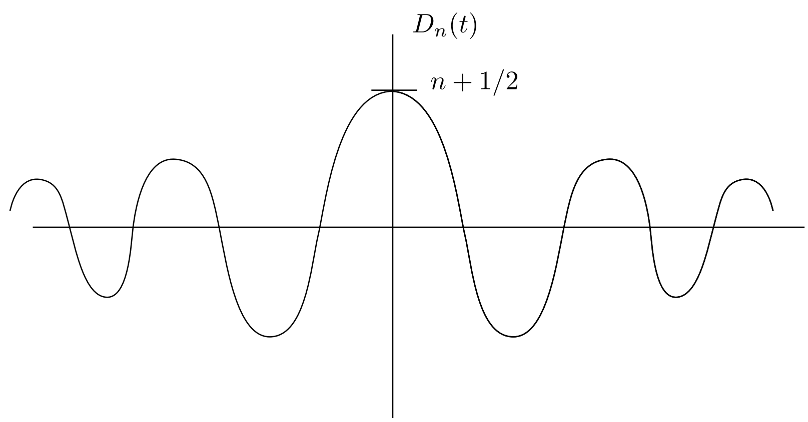
Преобразуем:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kxdt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt \cdot \sin kx =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt$$
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt$$

Определение 2.4. Функция

$$D_n(t) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t)\right)$$

называется ядром Дирихле



Свойства ядра Дирихле:

1. $D_n(t)$ - четная, 2π период. и непр. функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$
3. $\max|D_n(t)| = \max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
4. $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, при $t \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. Следует из аналогичных свойств слогаемых
2. Очев
3. $\frac{1}{2} - n \le D_n(t) \le \frac{1}{2} + n = D_n(0)$
4.

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos 2t + \dots + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \dots - \sin(n-\frac{1}{2})t + \sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$\square$

Теорема 2.1 (Принцип локализации)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt$ существуют или нет одновременно. В случае существования равны.

Замечание. Таким образом сходимость и значение суммы ряда Фурье 2π пер. и абс. инт. на $[-\pi, \pi]$ зависит только от свойств функции в сколь угодно малой окрестности.

Доказательство. Преобр. S_n:

$$S_n(x_0) \underset{t=\tau+x_0}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\tau=-t} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}}_{\tau=t})f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} f(x_0-t)D_n(-t)dt + \int_0^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt)$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{pi}\int_0^{\pi} D_n(t)(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi})\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{на}[\delta,\pi]$$

Тогда $\frac{(f(x_0-t)+f(x_0+t))}{2\sin\frac{t}{2}}$ - абс. инт на $[\delta,\pi]$ (см 1.1).

Тогда 2-ой инт. $\to 0$ при $n \to \infty$ (Т. Римана) и получаем нужный результат.

$\square$