1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad a_{ij}(t) \in C(a,b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau} \qquad \forall t \in (a,b),\ t_0 \in (a,b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=a_{11}W(t)} + \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}}_{=a_{nn}W(t)}$$

1) решения лин. завис $\Rightarrow$ $W(t) = 0$ на (a,b)

2) решения лин. независ:

$\dot{x}_1 = Ax_1 \ \dots \ \dot{x}_n = Ax_n$, ФМР $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\dot{\Phi}(t) = A\Phi$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1}$$
$$\dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2}$$
$$\dots$$
$$\dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn}$$

$$(\dot{x}_{11}\,\dot{x}_{12}\,\ldots\,\dot{x}_{1n}) = a_{11}(x_{11}\,x_{12}\,\ldots\,x_{1n}) + a_{12}(x_{21}\,x_{22}\,\ldots\,x_{2n}) \\ + \dots + a_{1n}(x_{n1}\,x_{n2}\,\ldots\,x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=W(t)} + a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0} + \\ + \dots + a_{1n}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\dot{W}(t) = trA \cdot W(t) \qquad W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau}$$

□

2 Формула Остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a,b)$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)}d\xi}$$

Доказательство. 1) $y_1, \ldots, y_n$ лин завис $\Rightarrow$ $W(x) = 0$

2) $y_1, \dots, y_n$ - лин независ

$$t = x \; x_1 = y \; x_2 = y' \; \dots \; x_n = y^{n-1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = y^n = -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} x_n - \dots - -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} x_1 \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} d\tau} \qquad W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}$$

$\square$

Замечание.

$$W(x_0) = 0 \to W(x) = 0 \text{ на } (a, b)$$
$$W(x_0) \neq 0 \to W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $W(x) = y_1(x) = y_1(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(\xi)}{x_1(\xi)} d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение
   (a) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x) \quad e^{ax} \quad x^a$
   (b) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi} \to y_2(x)$ - линейно незав. решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. однор. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \qquad b_0(x), b_1(x) \in C(a,b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$p(x) > 0$ на (a,b), $p(x) \in C'(a,b)$, $q(x) \in C(a,b)$.

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} > 0$, $p(x) \in C'(a,b)$, $q = b_0e^{\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)d\xi} \in C(a,b)$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \qquad r(x) \in C(a,b)$$

(a) $b_0 \in C(a,b)$ и $b_1(x) \in C'(a,b)$ замена $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $b_0 = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, +\infty)$

$$y' = \varphi' z + \varphi z' \qquad y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''$$
$$x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi' z + 2\varphi z' + \varphi z = 0$$

Зануляем коэфициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$
$$\varphi' = -\frac{1}{x^2} \qquad \varphi'' = \frac{2}{x^2}$$
$$\frac{2}{x^2} z + z'' - 2z\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z = 0$$
$$z'' + \frac{1}{x} z = 0$$

(b) $b_0(x)$ и $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' \qquad y'' = \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2$$
$$py'' + p'y' + qy = 0 \qquad p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy = 0$$
$$p\psi'' + p'\psi' = 0 \qquad (p\psi') = 0 \qquad p\psi' = 1$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi)} \rightarrow$ сторого монот и непр, $\exists$ обратная функция $x = x(t)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \qquad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p\frac{1}{p^2}\ddot{y} + qy = 0$$
$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$

(c) Преобразование Фурье-Лиувилля - привидение к канон. виду

i. $t = \varphi(x)$ к виду $\ddot{y} + c(t)\dot{y} \pm y = 0$

ii. $c(t) \in C'(t_1, t_2)$, $y(t) = \psi(t)z(t)$ к канон. виду $\ddot{y} + \alpha(t)y = 0$

Пример.

$$xy'' + 2y' + y = 0 \quad x > 0$$
$$y' = \dot{y}\varphi'(x) \qquad y'' = \dot{y}\varphi''(x) + \ddot{y}\varphi'^2$$
$$x\dot{y}\varphi'' + x\ddot{y}\varphi'^2 + 2\dot{y}\varphi' + y = 0$$
$$x\varphi'^2 = 1 \qquad \varphi' = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \varphi = 2\sqrt{x}$$
$$t = 2\sqrt{x} \qquad \varphi'' = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}$$
$$\ddot{y} + \dot{y}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + y = 0$$
$$\ddot{y} + \dot{y}\frac{3}{2\sqrt{x}} + y = 0 \qquad \ddot{y} + \dot{y}\underbrace{\frac{3}{t}}_{c(t)} + y = 0$$

При $t > 0$ непр дифф., делаем второй шаг

$$y(t) = z(t)\psi(t)$$
$$\ddot{z}\psi(t) + 2\dot{z}\dot{\psi} + z\ddot{\psi} + \frac{3}{t}\dot{z}\psi + \frac{3}{t}z\dot{\psi} + z\psi = 0$$
$$2\dot{\psi} + \frac{3}{t}\psi = 0 \qquad \psi = \frac{1}{t^{3/2}}$$
$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{1}{t^{5/2}} \qquad \ddot{\psi} = \frac{15}{4}\frac{1}{t^{7/2}}$$
$$\ddot{z}\frac{1}{t^{3/2}} + z\left(\frac{15}{4}\frac{1}{t^{7/2}} - \frac{9}{2}\frac{1}{t^{7/2}} + \frac{1}{t^{3/2}}\right) = 0$$
$$\ddot{z} + z\left(1 - \frac{3}{4t^2}\right) = 0 \qquad t > 0$$

4.2 Асимптотический вид решения

$$\ddot{y} + y(m + \beta(t)) = 0 \qquad m \neq 0$$

Теорема 4.1. Если $\beta(t)$ непр на $[t_0, +\infty)$ и $\beta(t) = O(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$ при $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$, то

- $m > 0$: $y(t) = C_1 \cos\sqrt{m}t + C_2 \sin\sqrt{m}t + O(\frac{1}{t^\varepsilon})$
- $m < 0$: $y(t) = C_1 e^{\sqrt{|m|}t}\left(1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon})\right) + C_2 e^{-\sqrt{|m|}t}\left(1 + O(\frac{1}{t^\varepsilon})\right)$

Пример.

$$\ddot{z} + z\left(1 - \frac{3}{4t^2}\right) = 0 \qquad t > 0$$

$$m = 1 \qquad \beta(t) = -\frac{3}{4t^2} \quad \text{непр } (0, +\infty) \quad \varepsilon = 1$$

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + O(t)$$

$$t = 2\sqrt{x} \qquad y(t) = z(t)\frac{1}{t^{3/2}}$$

$$y(t) = C_1 \frac{\cos t}{3^{3/2}} + C_2 \frac{\sin t}{t^{3/2}} + O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right)$$

$$y(x) = \tilde{C}_1 \frac{\cos 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + \tilde{C}_2 \frac{\sin 2\sqrt{x}}{x^{3/4}} + O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$$

Верно при $x \to \infty$

4.3 Исследование нулей решения уравн. второго порядка

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \qquad b_0, b_1 \in C(a, b)$$

Определение 4.1. Точка x_0 называется нулём решения $y(x)$, если $y(x_0) = 0$

Теорема 4.2. Пусть $y(x)$ нетривиальное решение и $y(x_0) = 0$ тогда $y'(x_0) \neq 0$

Доказательство. Пусть $y'(x_0) = 0$, получаем задачу Коши $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ единст. реш., противоречит с нетрив реш. □

Теорема 4.3. Любое нетривиальное решение может иметь на отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ не более конечного числа нулей.

Доказательство. Пусть число нулей бесконечно на $[c, d]$, счётное подмнож $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ограниченная послед, выделяем сход. подпослед. $x_{n_k} \to x_0 \in [c, d]$.

$y(x_{n_k}) = 0$, $y(x_{n_k}) \to y(x_0) = 0$ непр. $y(x)$

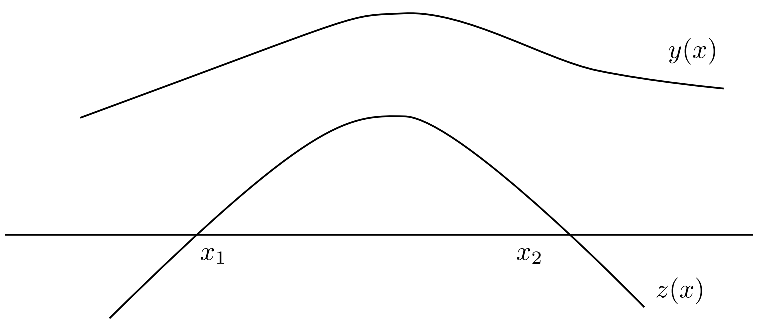
$y(x)$ - решение $\Rightarrow \exists y'(x_0)$

$$y'(x_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

Противоречие с пред. теоремой. □

Теорема 4.4 (Теорема сравнения Штурма)**.** Пусть $(p(x)z')'+q(x)z=0$, $(p(x)y')'+Q(x)y=0$, $p(x)\in C'(a,b)$, $q,Q\in C(a,b)$, $p(x)>0$ на (a,b) и пусть x_1 и $x_2\in(a,b)$ два последовательных нуля нетривиального решения $z(x)$ и $q(x)\le Q(x)$ на $[x_1,x_2]$.

Тогда любое решение $y(x)$ имеет хотя бы один нуль на $[x_1,x_2]$.



Доказательство. Пусть $y(x)\neq 0$ на $[x_1,x_2]$

$$(pz')'y+qzy'-(py')'z-Qyz=0$$

$$\underbrace{p'z'y+pz''y-p'y'z-py''z}_{(p(z'y-zy'))'}+yz(q-Q)=0 \quad \int_{x_1}^{x_2}$$

$$p(z'y-zy')\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}yz(q-Q)dx=0$$

$$\underbrace{\underbrace{p(x_2)}_{>0}(\underbrace{z'(x_2)}_{<0}\underbrace{y(x_2)}_{>0}-\underbrace{z(x_2)}_{=0}y'(x_2))-\underbrace{p(x_1)}_{>0}(\underbrace{z'(x_1)}_{>0}\underbrace{y(x_1)}_{>0}-\underbrace{z(x_1)}_{=0}y'(x_1))}_{<0}+$$

$$+\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{yz}_{\ge 0}\underbrace{(q-Q)}_{<0}dx}_{\le 0}=0$$

Противоречие. □

Следствие 4.1 (Теорема о премежаемости нулей)**.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линейно независимых решения $(p(x)y(x))' + q(x)y = 0$, $p \in C'(a,b)$, $p > 0$ на (a,b), $q \in C(a,b)$ и x_1 и x_2 два последовательных нуля $y_1(x)$ тогда $y_2(x)$ имеет ровно один нуль на (x_1, x_2).

Доказательство. Пусть $y_1(x_0) = 0$ и $y_2(x_0) = 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Противоречие с линейной независ.

$$(py_1')' + qy_1 = 0 \qquad (py_2')' + qy_2 = 0$$

По теореме Штурма y_2 имеет хотя бы один нуль на (x_1, x_2).

Пусть два нуля $y_2(x_3) = y_2(x_4) = 0$, тогда по теореме сравнения Штурма $\exists x_5 : y_1(x_5) = 0$ противоречит с соседством x_1 и x_2. □

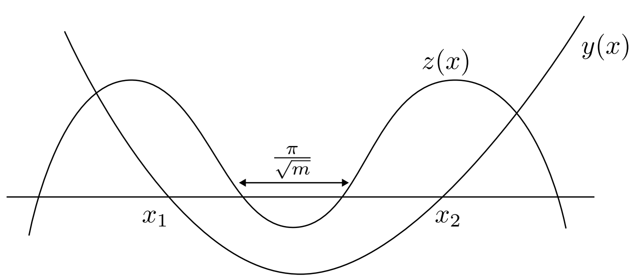
4.4 Оценка расстояние между нулями

Теорема 4.5. Пусть $y'' + qy = 0$, $q \in C(a,b)$, тогда для любого нетривиального решения расстояние между соседними нулями удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \Delta \le \frac{\pi}{\sqrt{m}} \qquad 0 < m \le q(x) \le M \text{ на } (a,b)$$

Доказательство. Пусть $\Delta > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$

$$z'' + mz = 0 \qquad z(x) = \sin(\sqrt{m}(x+\alpha)) \qquad \forall \alpha$$



$m \leq q$ по т. ср. Штурма между двумя нулями $z(x)$ $\exists$ нуль $y(x)$. Противоречие.

Аналогично $\Delta < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ $\square$

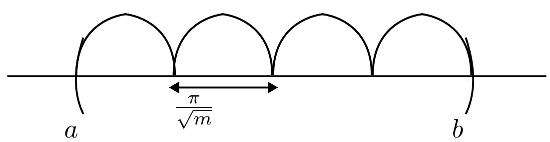
4.5 Оценка числа нулей на интервале

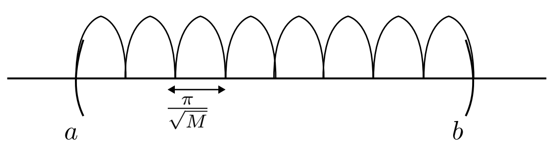
Теорема 4.6. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a,b)$, $0 < m \leq Q(x) \leq M$ на (a,b), тогда число нулей любого нетривиального решения на (a,b) удовлетворяет неравнству:

$$\left[\sqrt{m}\frac{b-a}{\pi}\right] - 1 \leq N \leq \left[\sqrt{M}\frac{b-a}{\pi}\right] + 1$$

где $[\dots]$ - целая часть числа.

Доказательство. $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ - расстояние между соседними нулями.





$\square$

Теорема 4.7. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(a,b)$, $Q(x) \leq 0$ на (a,b), тогда число нулей любого нетривиального решения на (a,b) удовлетворяет неравнству:

$$0 \leq N \leq 1$$

(не более одного нуля)

Доказательство. Пусть 2 нуля x_1, x_2

$$z'' + 0z = 0 \ \Rightarrow \ z'' = 0$$

По т. сравн. Штурма на $[x_1, x_2]$ лежит хотя бы один нуль $z'' = 0$ любого решения. $\square$

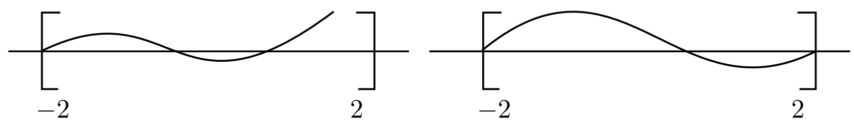
Замечание. • в Т. 1: (a, b) - открытое и ограниченное множество

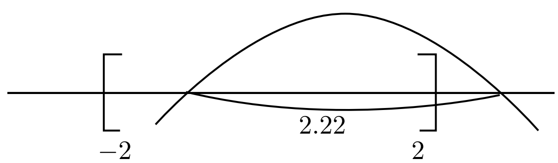
- в Т. 2 $(a, b), [a, b], (a, b]$ и может быть неогран.

Пример. Доказать $\forall$ нетрив. реш $y'' + \sqrt{4 - x^2}y = 0$ имеет на $[-2, 2]$ не более 2 нулей.

$$0 \le Q(x) = \sqrt{4 - x^2} \le 2$$
$$(-2, 2) \quad N \le \underbrace{\left[\sqrt{2}\frac{(2 - (-2))}{\pi}\right]}_{1.8} + 1 = 2$$

Пусть 3 нуля на $[-2, 2]$.





$$z'' + 2z = 0$$
$$z = \sin\sqrt{2}(x + \alpha) \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.22$$

Можем подобрать α так чтобы попадал только один ноль в $[-2, 2]$.

4.6 Уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$
$$x > 0 \quad \nu \in \mathbb{R} \quad \nu \ge 0$$

Попытаемся привести к каноническому виду:

$$y = z(x)\varphi(x)$$
$$x^2(z''\varphi + z\varphi'' + 2z'\varphi') + x(z'\varphi + z\varphi') + (x^2 - \nu^2)z\varphi = 0$$
$$2x^2\varphi' + x\varphi = 0 \qquad \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dx}{2x}$$
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \varphi' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \qquad \varphi'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^{3/2}}$$
$$z''x^{3/2} + z\left(\frac{3}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{3/2} - \nu^2\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$
$$z'' + z\left(1 + \frac{.25 - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$
$$\nu = \frac{1}{2} \qquad z'' + z = 0 \qquad y(z) = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Одно решение ограничено (синус), а другое нет (косинус). Может быть это характерно для всех решений уравнения?

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{\xi^2}d\xi} = W(x_0)\frac{x_0}{x}$$
$$W(x) = \frac{C}{x} = y_1y_2' - y_2y_1' \underset{x\to 0}{\to} \infty$$

Действительно что-то стремится к бесконечности (или производные или сама функция).

$$z'' + z(1 + \underbrace{\frac{.25 - \nu^2}{x^2}}_{\alpha(x)}) = 0$$

Чтобы было почти с пост. коэф. α непр на $[x_0, +\infty)$, $\alpha(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$,$\varepsilon > 0$.

$$z(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)}_{O\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$y(x) = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}_{x\to\infty}$$

Обобщённый степенной ряд:

$$y(x) = x^{\alpha}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\alpha}$$

Полагаем что дифф. нужно число раз и после нахождения решения задним числом смотрим так ли это.

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} - \nu^2 a_k x^{k+\alpha} + a_k x^{k+\alpha+2}] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k)x^k + a_k x^{k+2}] = 0$$

$$k=0: \ a_0\alpha^2 - a_0\nu^2 = 0$$

$$k=1: \ a_1(1+\alpha)^2 - a_1\nu^2 = 0$$

$$k \geq 2: \ a_k(k+\alpha)^2 - \nu^2 a_k + a_{k-2} = 0$$

$$a_0 \neq 0 \quad \alpha = \pm\nu \quad \alpha = \nu \geq 0$$

$$a_1(1+\nu^2+2\nu-\nu^2) = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = 0$$

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{\nu^2 - (k+\nu)^2} = \frac{-a_{k-2}}{k(k+2\nu)}$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+2\nu)} = \frac{-a_{2n-2}}{4n(n+\nu)}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(a+\nu)} \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4\cdot 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{\underbrace{4\cdot 4}_{2^4}\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_6 = \frac{a_0}{2^6\cdot 2\cdot 3(3+\nu)(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\dots(n+\nu)}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \quad s>0 \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

$$\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)\Gamma(n+\nu) = \dots = (n+\nu)(n+\nu-1)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\overbrace{k+\alpha}^{\nu}}$$

$$\underbrace{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}_{\text{ф. Бесселя 1го рода}} = J_\nu(x)$$

Постфактум доказываем дифферинцируемость (признак Доломбера):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(.5x)^2}{(n+1)(n+\nu+1)} \right| = 0$$

Получаем что радиус сходимости бесконечен ($R = \infty$), то есть можем бесконечно диф. где угодно.

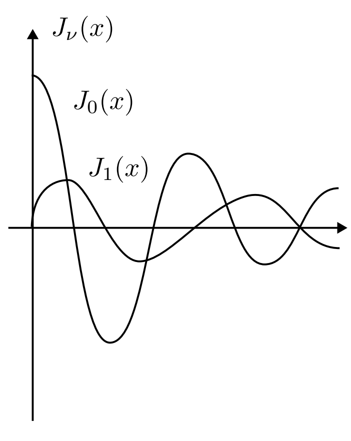
$J_\nu(x)$ беск. дифф $x > 0$.

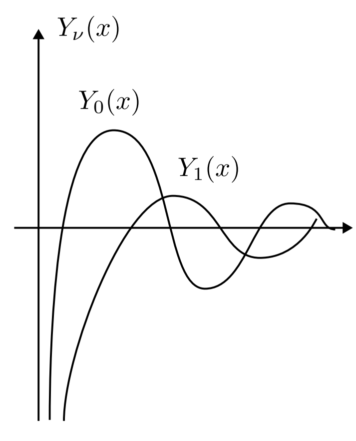
Ищем второе решение через ФОЛ:

$$\left(\frac{y_2}{J_\nu(x)}\right)' = \frac{1}{J_\nu^2(x)} \frac{1}{x}$$

$y_2 = Y_\nu(x)$ функция Бесселя второго рода.

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$





5 Автономные системы дифф. ур.

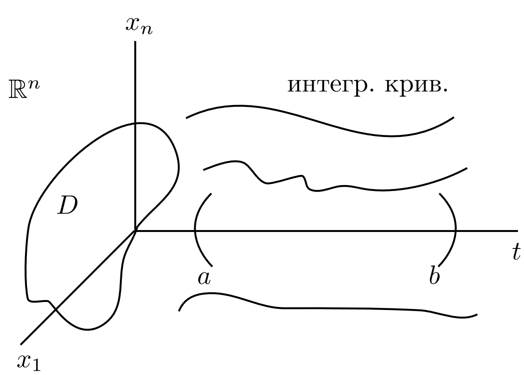
Определение 5.1. Нормальная система называется автономной, если правая часть не зависит явно от t.

$$\dot{x} = F(x)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dots \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases} \qquad f_i(x) \in C^1(D) \quad D \in \mathbb{R}^n \quad t \in (a, b)$$

через $\forall t_0 \in (a, b)$ и $\forall x_0 \in D$ проходит единственная интегральная кривая.

Определение 5.2. Точка $\tilde{x} \in D$ называется положением равновесия автономной системы, если $F(\tilde{x}) = 0$.



Определение 5.3. Фазовая траектория - проекция инт. кр. на $\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ - фазовое пространство.

5.1 Свойства фазовых траекторий

1. Если $x = \varphi(t)$ решение системы на (a, b) (автономн.), то $\forall c\ x = \varphi(t+c)$ тоже решение на $(a - c, b - c)$.

   Доказательство.

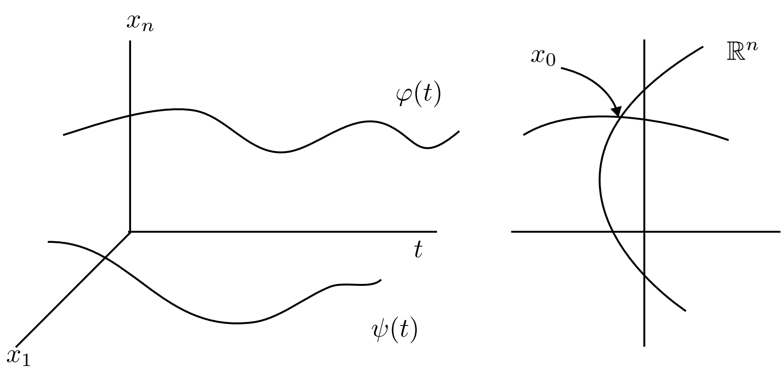
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = F(\varphi(t)) \qquad t = \tau + c$$

$$\frac{d\varphi(\tau + c)}{d(\tau + c)} = F(\varphi(\tau + c))$$

$\varphi(\tau + c) \to$ решение ☐

2. Фазовые траектории не могут пересекаться

   Доказательство. Пусть есть два решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на (a, b)

   $\exists t_1, t_2 \in (a, b) : \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0$, $\chi(t) = \varphi(t + t_1 - t_2)$ - решение

   $\chi(t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2) = x_0$ противоречит Т. единст. ☐

3. Пусть $\tilde{x}$ положение равновесия, тогда $x = \varphi(t) = \tilde{x}$ - решение системы, а точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ - фазовая траектория.

   Доказательство.
   $$F(\tilde{x}) = 0 \qquad \dot{x} = 0$$
   Проекция фазовой троектории - точка. ☐

4. Фазовая траектория, отличная от положения равн. является гладкой кривой.

   Доказательство. $x = \varphi(t)$ - параметрически заданная кривая в фазовом простаранстве

   $\dot{x} = F(x)$, $F \in C'$, $\varphi(t)$ - непр. дифф. на (a, b),

   $\dot{x} = \dot{\varphi}(t) \neq 0$ т.к. не явл. полож. равн. ☐

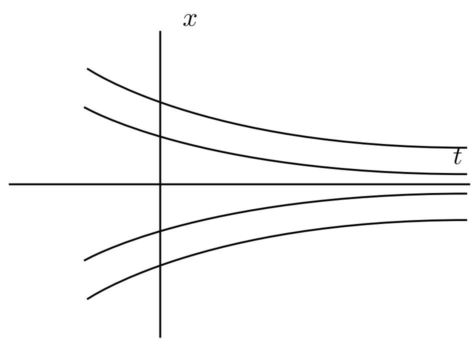
5. Фазовые траектории:

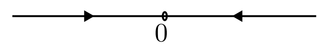
   - точки
   - незамкнутые гладкие кривые без самопересечения
   - замкнутые гладкие кривые без самопересечения

5.2 Классификация положений равновесия

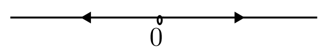
5.2.1 n=1

$$\dot{x} = -x \qquad x(t) = Ce^{-t} \qquad \tilde{x} = 0$$

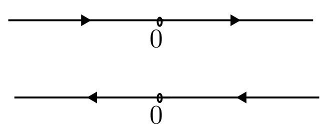




аттрактор



репелер



шунт

5.2.2 n=2

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5.2.3 Изолированные положения равновесия при n=2

$$detA \neq 0 \qquad Ax = 0 \qquad \tilde{x} = 0$$
$$\lambda_1 \neq 0 \qquad \lambda_2 \neq 0$$

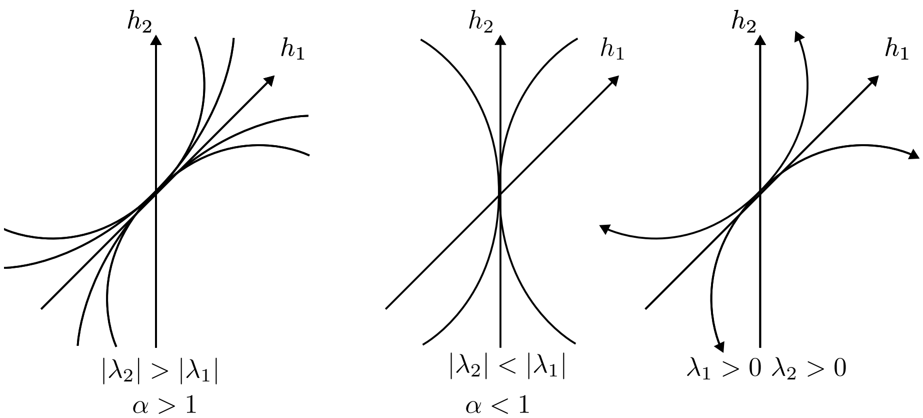
λ_1 и λ_2 действительны, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, h_1 и h_2 - базис

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \qquad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = C_2 \left(\dfrac{\xi_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} & , C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

1. $\alpha > 0$,



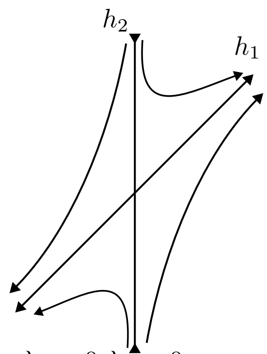
   h_1 и h_2 - фазовые траектории

   $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ неустойчивый узел

   $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ устойчивый узел

2. $\alpha < 0$, $\xi_2 = A\xi_1^{\alpha}$

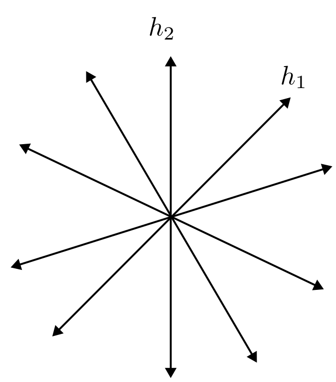
   λ_1 и λ_2 разные знаки, седло



λ_1, λ_2 - действ., $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1. Два собственных вектора h_1 и h_2

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} h_2$$
$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda t} \qquad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$$
$$\begin{cases} \xi_2 = \dfrac{C_2}{C_1}\xi_1 & , C_1 \neq 0 \\ \xi_1 = 0 & , C_1 = 0 \end{cases}$$

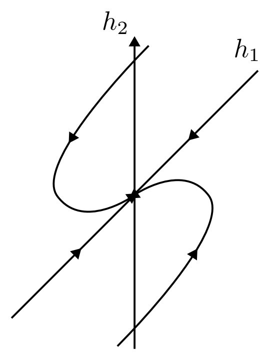


$\lambda > 0$ неустойчивый дикритический узел

$\lambda < 0$ устойчивый дикритический узел

2. h_1 - собственный вектор, h_2 - присоед.

$$x(t) = C_1 h_1 e^{\lambda t} + C_2(h_1 t + h_2)e^{\lambda t}$$
$$\xi_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} \qquad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$$
$$\begin{cases} \xi_1 = C_1 \dfrac{\xi_2}{C_2} + \xi_2 \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{\xi_2}{C_2} & , \ C_2 \neq 0 \\ \xi_2 = 0 & , \ C_2 = 0 \end{cases}$$



h_1 - фазовая таектория, h_2 - не явл. фаз. тр.

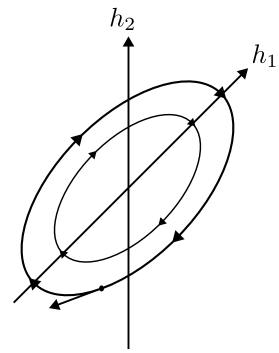
$\lambda > 0$ неустойчивый вырожденный узел

$\lambda < 0$ устойчивый вырожденный узел

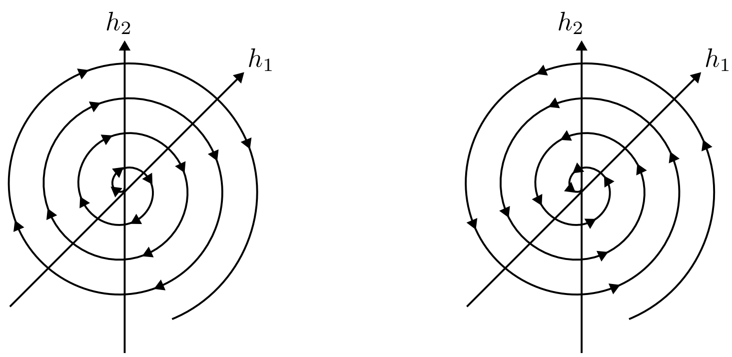
λ_1, λ_2 - комплексные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $b > 0$

$$\lambda_1 = a + ib \ \rightarrow \ h$$
$$h_1 = Re\, h \quad h_2 = Im\, h$$
$$x(t) = C_1 Re(he^{\lambda_1 t}) + C_2 Im(he^{\lambda_1 t})$$
$$he^{\lambda t} = (h_1 + ih_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) =$$
$$= e^{at}[(h_1 \cos bt - h_2 \sin bt) + i(h_2 \cos bt + h_1 \sin bt)]$$
$$x(t) = h_1(\underbrace{C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt}_{\xi_1}) + h_2(\underbrace{-C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \cos bt}_{\xi_2})$$
$$C_1 = A \cos\theta \qquad A \geq 0$$
$$C_2 = A \sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$
$$\xi + e^{at} \cos(\theta - bt)A$$
$$\xi_2 = e^{at} \sin(\theta - bt)A$$

1. $a = 0$, центр



2. $a \neq 0$, фокус



$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$

$a > 0$ неустойчивый фокус

$a < 0$ устойчивый фокус

5.2.4 Неизолированные полож равн. при n=2

$$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2$$
$$Ax = 0 \qquad detA = 0$$

Хотя бы одно $\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, собст. век, h_1 и h_2

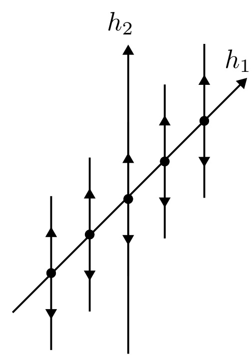
$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$J = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = C_1 \qquad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$



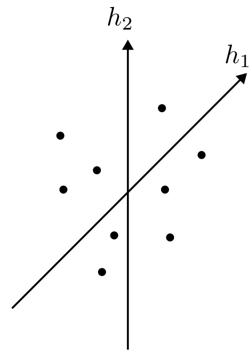
$\lambda_2 > 0$ нестабильная "антенна"

$\lambda_2 < 0$ стабильная "антенна"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 и h_2 собст. век.

$$x = C_1 h_1 + C_2 h_2$$

Положение равновесия все точки фызовой плоскости.

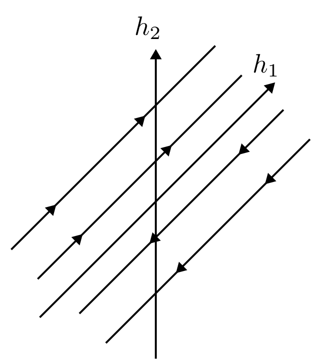


"Точки"

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, h_1 обст. век., h_2 присоед

$$x = C_1 h_1 + C_2(h_1 t + h_2)$$
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi_2 = 0$$
$$\xi_1 = C_1 + C_2 t \qquad \xi_2 = C_2$$

h_1 - положение равновесия



"Улица"

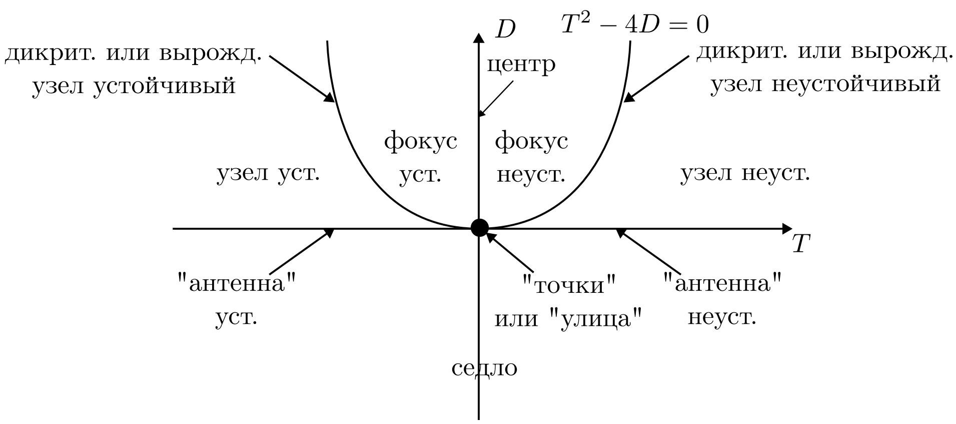
5.3 Второй взгляд на классификацию

$$det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda\underbrace{a_{11}+a_{22}}_{TrA}+\underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}_{detA=0}=0$$

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T\pm\sqrt{T^2-4D}}{2}$$



5.4 Третий взгляд на классификацию

Насколько влияют нелинейные коэффициенты?

Грубые: седло, узел, фокус

Негрубые: остальные

5.5 Устойчивость по Ляпунову

$$\dot{x} = F(t,x) \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

$x(t_0)=x_0$, $\varphi(t)$ - решение задачи Коши, продолжаемое на $[t_0,+\infty)$

Определение 5.4. Решение $\varphi(t)$ задачи Коши называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ \forall x(t)$ реш. $:\ |x(t_0)-x_0|<\delta\ \forall t\geq t_0\hookrightarrow x(t)$ определено на $[t_0,+\infty)$ и $|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$.

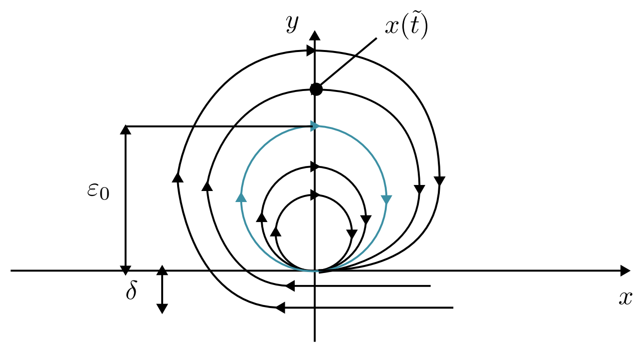
Определение 5.5. Решение $\varphi(t)$ з. К. называется асимптотически уст., если оно устойчиво и $\exists\delta_0 : \ \forall x(t)$ реш. с $|x(t_0)-x_0| < \delta_0 \hookrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)-\varphi(t)| = 0$

Определение 5.6 (Неустойчивость)**.** Решение $\varphi(t)$ называется неуст. по Ляпунову, если $\exists\varepsilon_0 > 0 : \ \forall\delta > 0 \ \exists x(t)$ реш. : $|x(t_0) - x_0| < \delta \ \exists\tilde{t} \geq t_0 \hookrightarrow x(\tilde{t})$ неопределено или $|x(\tilde{t}) - \varphi(\tilde{t})| \geq \varepsilon_0$.

Замечание.

$$|x(t_0) - x_0| = \sqrt{(x_1(t_0) - x_{01})^2 + \cdots + (x_n(t_0) - x_{0n})^2}$$

Пример (889)**.**



$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$\varphi(t) = 0$ - тривиальное решение, $\varphi(t_0) = 0$, $x_0 = 0$

Выполняются условия отрицания.

5.5.1 Исследование на устойчивость

$$\dot{x} = F(t,x) \qquad x(t_0) = x_0$$

$\varphi(t)$ - решение з. К., $x(t) = \varphi(t) + \varepsilon(t)$

$$\dot{\varphi} + \dot{\varepsilon} = F(t, \varphi + \varepsilon) \qquad \varepsilon(t_0) = 0$$

Система уравнений возмущений:

$$\dot{\varepsilon} = F(t, \varphi(t) + \varepsilon(t)) - \dot{\varphi}(t) \qquad \varepsilon(t) = 0$$

5.5.2 Теоремы об уст. (неуст.) полож. равн. авт. сис.

$$\dot{x} = F(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$F(x) = 0 \to \tilde{x}$ полож. равн., $\varphi(t) = \tilde{x}$

Теорема 5.1 (Об уст. по линейному прибл.). Пусть $\dot{x} = F(x)$, $F(\tilde{x}) = 0$, $F'(\tilde{x})$ матрица Якоби, λ_i - собст. числа $F'(\tilde{x})$, тогда

1. Если $\forall \lambda_i: \ Re\lambda_i < 0$, то $\tilde{x}$ асимпт. уст.
2. Если $\exists \lambda_i: \ Re\lambda_i > 0$, то $\tilde{x}$ неуст.

Определение 5.7 (Функция Ляпунова). $v(x)$ опр. и непр. дифф. в $O_\varepsilon(\tilde{x})$ (окрестности) и $v(\tilde{x}) = 0$.

Производная в силу системы:

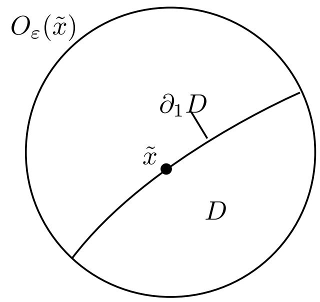
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x)$$

Теорема 5.2 (Ляпунова об устойчивости). Пусть $\exists v(x): \ v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} \leq 0$ в $O_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда $\tilde{x}$ - уст. по Ляпунову.

Теорема 5.3 (Ляпунова об асимпт. уст.). Пусть $\exists v(x): \ v(x) > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\frac{dv}{dt} < 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда $\tilde{x}$ - асимпт. уст. по Ляпунову.

Теорема 5.4 (Ляпунова о неустойчивости). Пусть $\exists v(x)$: в $\forall O_\delta(\tilde{x}) \in O_\varepsilon(\tilde{x})$ $\exists x^*: \ v(x^*) > 0$ и $\frac{dv}{dt} > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(\tilde{x})$, тогда $\tilde{x}$ - неуст.

Теорема 5.5 (Четаева о неустойчивости)**.**



Пусть $\exists$ область $D \subset O_\varepsilon(\tilde{x})$ и $\exists v(x)$, $\tilde{x} \in \partial_1 D$, $v(x) = 0$ на $\partial_1 D$, $v(x) > 0$ в D, $\frac{dv}{dt} > 0$ в D, тогда $\tilde{x}$ неуст.

5.6 Примеры на устойчивость

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

$$A(0,0) \qquad F'(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \text{ (центр)}$$

$$v = x^2 + y^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2x^4 - 2y^4 < 0$$

$v > 0$ в $\dot{O}_\varepsilon(A)$ и $\frac{dv}{dt} < 0$ там же $\Rightarrow$ асимп. уст.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}$$

$$A(0,0) \qquad F'(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v = y(y + 2x)$$

В т. Четаева берём за D область где $v > 0$: $v(A) = 0$, $v\big|_{\partial_1 D} = 0$, $v > 0$ в D

$$\frac{dv}{dt} = 2y^3 + 2x^2 + 2xy^2 = y^3 + 2x^2 + y^2(y + 2x) > 0 \text{ в } D$$

Выполнены условия для Четаева $\Rightarrow$ неустойчива.

5.7 Исследование фаз. тр. нелин. автоном. сист.

$$\dot{x} = F(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad F(x) \in C'(D) \qquad D \in \mathbb{R}^n$$

1. полож. равновесия, иссл. методом линеаризации

$$F(x) = \underbrace{F(\tilde{x})}_{0} + \underbrace{F'(x)}_{\text{м. Якоби}} (x - \tilde{x}) + o(|x - \tilde{x}|)$$

$$y = x - \tilde{x} \qquad \dot{y} = F'(\tilde{x})y + o(|y|)$$

   (важно учитывать грубые или негрубые)

2. иссл. устойчивость пол. равновесия

3. иссл. предельные множества.

4. иссл. фазовые траектории вне предельных множеств, метод первых интегралов

5.8 Первые интегралы автономных систем

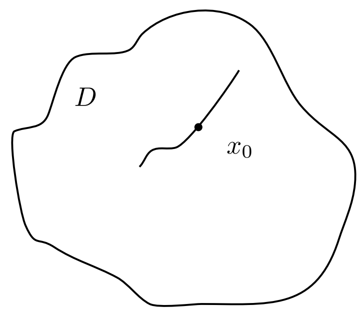
$$\dot{x} = F(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad F(x) \in C'(D) \qquad D \in \mathbb{R}^n$$

Определение 5.8. Функция $u(x) \in C'(D)$ называется первым интегралом автономной системы, если для любого решения $g(t)$, фазовая траектория которого лежит в $D \hookrightarrow u(g(t)) = const$.

Пример. $u = const$ - тривиальный первый интеграл

Теорема 5.6 (Критерий первого интеграла)**.** Функция $u(x) \in C'(D)$ является первым интегралом тогда и только тогда, когда $(\nabla u, F(x)) = 0$ в D.

Доказательство. $\to$: Пусть $u(x)$ первый инт:



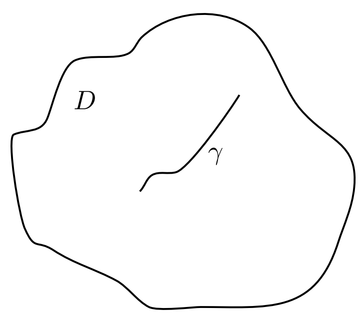
Возьмём $x_0 \in D$, $x(0) = x_0 \Rightarrow\ \exists$ решение $g(t)$, $u(g(t)) = const$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{(\nabla u)_i} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=0}}_{f_i(x_0)} = 0$$

$$(\nabla u, F(x)) = 0$$

В силу произвольности x_0 выполнено в D.

$\leftarrow$: Пусть $(\nabla u, F(x)) = 0$ в D.



Произвольное решение $x = g(t)$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(x) = (\nabla u, F)\Big|_{\gamma} = 0$$

Т.е. $u(g(t)) = const$ на γ. $\square$

5.9 Независимость функция

Определение 5.9. Система функций $u_1(x), \dots, u_m(x) \in C'(D)$, $x \in R^n$, $m \le n$, $D \in \mathbb{R}^n$ - область., называется зависимой в D, если в D

$$\exists K, \exists G \in C' : \; u_k(x) = G(u_1(x), \dots, u_{k-1}(x), u_{k+1}(x), \dots, u_m(x))$$

Если так сделать нельзя, то система называется независимой в D.

Теорема 5.7 (Необход. усл. зависимости)**.** Пусть $u_1, \dots, u_m$ зависимы в D, тогда $\nabla u_1, \dots, \nabla u_m$ линейно зависимы в каждой точке D.

Доказательство.

$$\nabla u_k(x) = \frac{\partial G}{\partial u_1} \nabla u_1 + \dots + \frac{\partial G}{\partial u_m} \nabla u_m$$

Получили опредление линейной зависимости ∇u_i. □

Следствие 5.1 (Достаточное условие независимости)**.** Пусть $\exists x_0 \in D$, в которой ∇u_i линейно незав., тогда система $u_1, \dots, u_m$ незав. в D.

Пример.

$$u_1 = x_1 \qquad u_2 = x_2 \qquad u_3 = x_1^2 + u_2^2$$
$$u_3 = u_1^2 + u_2^2$$
$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 5.8 (Достаточное условие зависимости)**.** Пусть в каждой точке области $D \hookrightarrow \nabla u_1, \dots, \nabla u_m$ лин. зав. и не обращаются 0 одновременно, тогда для каждой точки D существует окрестность, в которой $u_1, \dots, u_m$ зависимы.

Доказательство. (для $n = 2$)

$f(x, y)$, $g(x, y)$, ∇f и ∇g лин. зав. в D

$(x_0, y_0) \in D$ пусть $\nabla f\big|_A \neq \vec{0}$, пусть $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_A \neq 0$

$$\xi = f(x, y) \qquad \eta = y \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A \neq 0$$

$\exists O_\varepsilon(A)$, $J \neq 0$, значит есть взаимооднозначное отображение

$$x = x(\xi, \eta) \qquad y = y(\xi, \eta)$$

$$f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \xi \qquad g(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{pmatrix}}_{det=0 \text{ в } O_\delta(B)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{det=0 \text{ в } D} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0$$

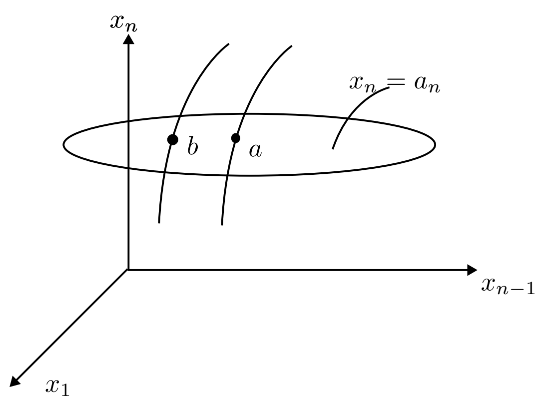
$\frac{\partial g}{\partial \eta} = 0$ в $O_\delta(B) \Rightarrow g = g(\eta) = h(f)$ завис в $O_\varepsilon(A)$. $\square$

Теорема 5.9 (О существовании первых инт.)**.** Пусть точка a не является положением равновесия автономной системы, тогда в некоторой окрестности этой точки $\exists$ первые интегралы $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ и она независимы.

Доказательство.

$$\dot{x} = F(x) \qquad F(x) \in C'(x) \qquad F(a) \neq \vec{0}$$

Пусть $f_n(a) \neq 0$.



$$x(0) = b \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$x = g(t, b)$ - реш. задачи Коши

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \\ \ldots \\ x_n = g_n(t, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \end{cases}$$

Можем смотреть как на решение з. К. и как на систему уравнений.

Значит $g_i(t, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n$ - по t напр дифф как решение, а также по b_j непр. дифф. по теор. о дифф. решения по параметру.

$$A : t = 0 \quad b_1 = a_1, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1}$$

Дифф. по b_j, $t = 0$:

$$\begin{cases} b_1 = g_1(0, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \\ \ldots \\ a_n = g_n(0, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \end{cases} \qquad \frac{\partial g_1}{\partial b_1}\Big|_A = 1;\ \frac{\partial g_1}{\partial b_j}\Big|_A = 0;\ \frac{\partial g_n}{\partial b_i}\Big|_A = 0$$

Дифф. по t в A: $b_i = a_i$

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t, a_1, \ldots, a_n) \\ \ldots \\ x_n = g_n(t, a_1, \ldots, a_n) \end{cases} \qquad \dot{g}_1(t) = f_1(a)$$

$$J = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(b_1, \ldots, b_{n-1}, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & f_1(a) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & f_2(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_n(a) \end{vmatrix}$$

$$b_1 = u_1(x), \ldots, b_{n-1} = u_{n-1}(x), t = v(x)$$

$u_i(x) \in C'(O_\varepsilon(a))$ по Т. о неявной функции

$\forall g(t, b)$ решение $u_i(g(t, b)) = b_i$

$\Rightarrow u_i$ - первый интеграл

$$t = 0 \quad u_1(b) = b_1 \quad \Rightarrow \quad \nabla u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \nabla u_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Градиенты линейно независимы $\Rightarrow$ первые интегралы независимы. $\square$

Пример. Дикритический узел $\to$ не существует нетрив. первый инт.

Пусть существует нетрив. первй инт. $u(x)$, $u(x) \in C'$, что возможно по всем лучам только если $u \equiv C$. Противоречие.

Следствие 5.2. Пусть $u(x)$ - первый интеграл в некоторой окрестности точки a, тогда $\exists G \in C' : \ u(x) = G(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$.

Доказательство. $(\nabla u, F(x)) = 0$, $(\nabla u_i, F(x)) = 0$ по критерию

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \end{cases}$$

$F(a) \neq 0$ значит $\exists$ окрестность $F(x) \neq 0$

$$BF(x) = 0$$

$|B| = 0$ в этой окрестности $\Rightarrow \nabla u, \nabla u_1, \ldots, \nabla u_{n-1}$ - лин. зав. в этой окр.

При этом $\nabla u_i \neq 0$ из теоремы $\Rightarrow \exists$ окрестность $\nabla u_i \neq 0$

По теореме о достаточном условии зависимости $u, u_1, \ldots, u_{n-1}$ зависимы в некоторой окрестности точки a.

$\Rightarrow \ \exists G : \ u = G(u_1, \ldots, u_{n-1})$ □

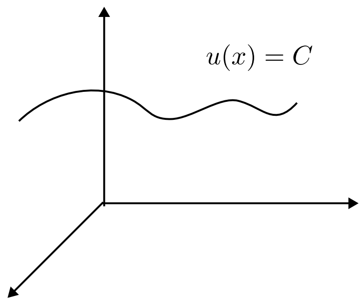
5.10 Применение первых интегралов

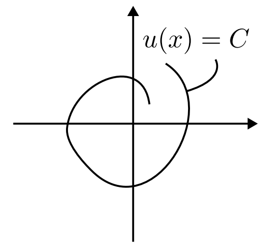
1. Понижение порядка системы

$$u_1(x) = C_1 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \neq 0$$

   по Т. о неявной функции $x_k = h(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n, C_1)$, подставляем в систему

2. Изображение фазовых траекторий





Решение лежит на поверхности уровня любого из своих первых инт.

3. Законы сохранения

5.11 Методы нахождения первых интегралов

Выделение интегрируемых комбинаций

$$\dot{x} = F(x) \to \text{симметричный вид}$$
$$\dot{x}_i = f_i(x)$$
$$dt = \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}$$

Поиск интегрируемых комбинаций:

1. Свойство пропорций - сложный-простой

$$0 \neq \gamma = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \qquad b_i \neq 0$$
$$\frac{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + \dots + k_n b_n} = \gamma = \frac{a_i}{b_i}$$

Доказательство.

(a) знам $\neq 0$

$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = \gamma(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n)$$
$$k_1(a_1 - \gamma b_1) + \dots + k_n(a_n - \gamma b_n) = 0$$

(b) знам $= 0$

$$k_1 b_1 + \dots + k_n b_n = 0$$
$$b_1 = \frac{a_1}{\gamma} \dots b_n = \frac{a_n}{\gamma}$$
$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0$$
$$b_i = 0 \to a_i = 0$$

□

---

2. простой-сложный - исключаем переменные, используя уже найденные первые инт.

6 Уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

Определение 6.1 (Решение)**.** $u(x) \in C'(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, после подстановки $\equiv 0$ в D.

6.1 Классификация

1. Линейные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u = f(x)$$

2. Квазилинейные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u)$$

3. Нелинейные

Замечание. Внутри класса линейных выделим класс линейных однородных:

$$\sum_{i=1}^{kn} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

6.2 Линейные однородные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

Пусть $a_i(x) \in C'(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - область, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) \neq 0$ в D.

Определение 6.2 (Характеристичекая система)**.**

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_1(x) \\ \dots \\ \dot{x_n} = a_n(x) \end{cases}$$

Не положение равновесия по усл. $\Rightarrow$ можем найти $u_1, \dots, u_{n-1}$ - первые инт. (независ.) в окр точки из D.

Определение 6.3. Фазовые траектории этой системы называются характеристиками.

Теорема 6.1. Пусть $\tilde{x} \in D$, тогда $\exists$ некоторая окрестность этой точки, в которой любое решение лин. однородного. уравн. имеет вид

$$u(x) = G(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \qquad G \in C'$$

Доказательство. $\tilde{x}$ - не явл. пол. равн $\to \exists$ окрест., в которой $\exists$ независ. $u_1, \dots, u_{n-1}$.

$\forall$ первый. инт. $u(x) = G(u_1, \dots, u_{n-1})$, $G \in C'$ (по следствию)

Критерий первого инт. $(\nabla u, F) = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow u(x)$$

$u(x) = G(u_1, \dots, u_{n-1})$ - общее решение лин. однородного ур. в ч.п. □

6.3 Квазилинейные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x,u)$$

$a_i(x,u), b(x,u) \in C'(\tilde{D})$, $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,y) \neq 0$ в $\tilde{D}$.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_1(x,u) \\ \dots \\ \dot{x_n} = a_n(x,u) \\ \dot{u} = b(x,u) \end{cases} \qquad \text{харак. сист.}$$

Фазовые трактории этой сист. называются характеристиками.

Вводим вспомогательное лин. ур.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial W}{\partial x_i} + b(x,u)\frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

$W(x,u) = G(W_1(x,u), \ldots, W_n(x,u))$ - общее реш, $G \in C'$

Теорема 6.2. Пусть в некоторой т. из $\tilde{D}$ $W(x,u) = 0$ и $\frac{\partial W}{\partial u} \neq 0$, тогда уравнение $W(x,u) = 0$ в некоторой окрестности этой точки определяет решение квазилинейного уравнения.

Доказательство. $W(x,u) = 0$, $W \in C'$, $W(x,u) = 0$, $\frac{\partial W}{\partial u} \neq 0$

$\Rightarrow$ по Т. о неявной функции $u(x) \in C'(D)$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \to \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_i}}{\frac{\partial W}{\partial u}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\left(-\frac{\frac{\partial W}{\partial x_i}}{\frac{\partial W}{\partial u}}\right) = b(x,u)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial W}{\partial x_i} + b(x,u)\frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

□

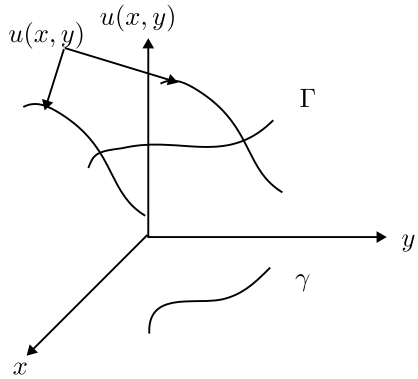
Определение 6.4 (Общий интеграл квазилинейного ур.)**.**

$$G(W_1, \ldots, W_n) = 0 \qquad G \in C' \qquad \frac{\partial G}{\partial u} \neq 0$$

7 Задача Коши для линейного уравнения в ч. п. (n=2)

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$a, b \in C'(D) \qquad D \subset \mathbb{R}^n \qquad a^2 + b^2 \neq 0 \text{ в } D$$



Определение 7.1 (Задача Коши)**.**

$\gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s)$, $s \in (s_1, s_2)$, гладкая

$\varphi, \psi \in C'(s_1, s_2)$, $\varphi^2 + \psi^2 \neq 0$

$u|_\gamma = u_0(s)$, $u_0 \in C'(s_1, s_2)$, Γ - гладкая кривая

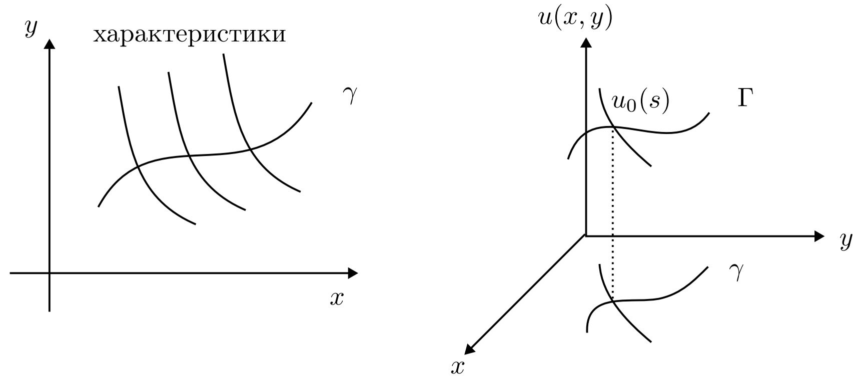
Найти решения $u(x, y)$, проходящие через Γ.

Теорема 7.1 (Существование и единственность решения задачи Коши)**.**

Пусть кривая γ не касается характеристик уравнения, тогда Решение задачи Коши существует и единственно в некоторой окрестности кривой γ.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, y) \qquad x(0) = \varphi(s) \\ \dot{y} &= b(x, y) \qquad y(0) = \psi(s) \end{aligned}$$



$\exists!\ x = x(t,s), y = y(t,s)$, по теореме о дифф. решения по параметру $x(t,s)$, $y(t,s)$ непр. дифф. по s, $u = u_0(s)$, получаем параметрически заданную поверхность

По построению поверхности на решении u сохраняет своё значение

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \Big|_\gamma = \begin{vmatrix} a(x,y) & \varphi' \\ b(x,y) & \psi' \end{vmatrix} \neq 0$$

Первый столбец - касательная к характеристике, второй - касательная к γ.

$$t = t(x,y) \qquad s = s(x,y)$$

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности кривой γ; t, s непр. дифф.

$$u = u_0(s(x,y))$$

Непр. дифф. в некоторой корестности γ как суперпозиция.

$\Rightarrow u = u_0(x,y)$ решение задачи Коши.

Единственность следует из единст. решения з. Коши для харак. системы и единственности неявной функции. $\square$

Определение 7.2 (Общий случай задачи Коши)**.**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$a_i(x) \in C'(D) \qquad D \subset \mathbb{R}^n \qquad \sum a_i^2 \neq 0 \text{ в } D$$

s - гладкая поверхность. (гиперповерхность)

$$u|_s = u_0(s) \qquad u_0(s) \in C'(s)$$

Найти решение, удовлетворяющие условия.

Теорема 7.2 (Общий случай сущ. и ед. решения)**.**

Пусть гиперповерхность S не касается характеристик, тогда $\exists!$ решение з. К., опрделённое в некоторой окрестности гиперповерхность S.

8 Задача Коши для квазилинейного уравнения в ч. п. (n=2)

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u)$$

$$a, b, c \in C'(D) \qquad D \subset \mathbb{R}^n \qquad a^2 + b^2 \neq 0 \text{ в } D$$

Определение 8.1.

$\gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s)$, $s \in (s_1, s_2)$, гладкая

$\varphi, \psi \in C'(s_1, s_2)$, $\varphi^2 + \psi^2 \neq 0$

$u|_\gamma = u_0(s)$, $u_0 \in C'(s_1, s_2)$, Γ - гладкая кривая

Найти решение проходящее через Γ.

Замечание (Характ. сист.)**.**

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y,u) \\ \dot{y} = b(x,y,u) \\ \dot{u} = c(x,y,u) \end{cases}$$

Теорема 8.1 (Существование и единственность решения задачи Коши)**.**

Пусть γ не касается проекций характеристик на XY, тогда $\exists!$ решение задачи Коши, определённое в некоторой окрестности кривой γ.

Пример.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$x\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial y} + 2xy\frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = 2xy \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2xy}$$

$$C_1 = \frac{y}{x} \qquad u - xy = C_2$$

$$W = G(\frac{y}{x}, u - xy) \qquad G \in C'$$

- общее решение вспомогательного уравнения.

Общий интеграл квазилинейного уравнения:

$$G(\frac{y}{x}, u - xy) = 0 \qquad G \in C' \qquad \frac{\partial G}{\partial u} \neq 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial G}{\partial u}}_{\neq 0} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial (u - xy)}}_{\neq 0} \underbrace{\frac{\partial u - xy}{\partial u}}_{1}$$

По теореме о неявной функции $x - xy = g(\frac{y}{x})$, $g \in C'$

$$u = xy + g(\frac{y}{x}) \qquad g \in C'$$

Пример. $u = 3x^3 + 1$ при $y = 2x^2$, $x > 0$

$$3x^3 + 1 = x(2x^2) + g(2x)$$

$$g(2x) = 1 + x^3 \qquad g(\xi) = 1 + \frac{\xi^3}{8}$$

$$u = xy + 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

Пример. $u = x^2$ при $y = x$, $x > 0$

$$x^2 = x^2 + g(1) \qquad g(1) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = 2xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^t \\ u = C_1 C_2 e^{2t} + C_3 \end{cases}$$

Проекция: $y = Ax$, нарушена теорема единственности, γ касается проекции характеристики.

9 Вариационное исчисление

$$J[y] \to extr$$

9.1 Функционал и первая вариация функционала

$C^1[a,b]$, $\|y\| = \max\limits_{[a,b]} |y(x)| + \max\limits_{[a,b]} |y'(x)|$

Определение 9.1 (Функционал)**.** Отображение $J : Y \in C'[a,b] \to \mathbb{R}$, Y - область определения функционала

$fix\, y \in Y$, $fix\, h \in C'[a,b]$, определим множество $A \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$\forall \alpha \in A \hookrightarrow y + ah \in Y$$
$$\Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$$

Если $\exists$ конечная производная $\Psi'(0)$, то она называется первой вариацией функционала и обозначается $\Psi'(0) = \delta J[y, h]$

Пример. $C[a,b]$

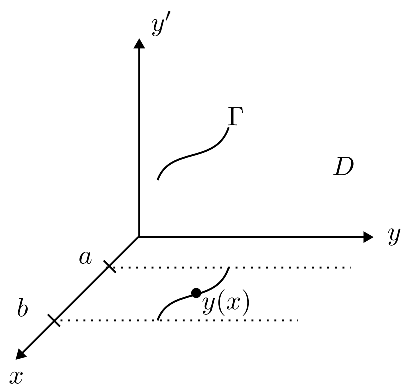
$$y(x) = 0 \qquad h = \sin x \qquad C[0, \pi]$$
$$\Psi(\alpha) = \max_{[a,b]} |\alpha \sin x| = |\alpha|$$

$\Psi(\alpha)$ не существует

9.2 Функционалы в вариационном исчислении

$$y = C^1[a,b] \to J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$
$$F(x, y, y') \in C^2(D) \qquad D \subset \mathbb{R}^3 \text{ область}$$
$$Y = \{y \in C'[a,b] : \forall x \in [a,b] \hookrightarrow (x, y(x), y'(x)) \in D\}$$

Лемма 9.1 (О существовании первой вариации)**.** Пусть $J(y)$ - функционал в вариационном исчислении, тогда $\forall y \in Y$ и $\forall h \in C'[a,b]$ $\exists \varepsilon > 0 :\ \forall |\alpha| \leq \varepsilon \hookrightarrow \Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$ непр. дифф и $\Psi'(0) = \delta J[y,h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h')dx$



Доказательство. Γ - ограниченное и замкнутое множ. из обл. $D \to$ существует окрестность кр. $\Gamma \subset D \to \forall \in C'[a,b] \exists \varepsilon : \forall |\alpha| \leq \varepsilon \forall x \in [a,b] :\ (x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)) \in$ окр. $\subset D$, $\Rightarrow$ на $\alpha \leq \varepsilon$ определена $\Psi(\alpha) = J[y + \alpha h]$

$$\Psi(\alpha) = \int_a^b \underbrace{F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}_{f(x,\alpha)} dx$$

$f(x,\alpha)$ непр. на $[a,b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}{\partial y + \alpha h} h + \frac{\partial F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')}{\partial y' + \alpha h'} h'$$

непр. на $[a,b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ как суперпозиция непр. функ.

По теореме о дифф. собственного инт. по параметру $\Psi(\alpha)$ непр. дифф. на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и

$$\Psi'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$$
$$\Psi'(0) = \delta J[y,h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h')dx$$

$\square$

Пример.

$$J[y] = \int_1^2 (2y + yy' + x^2 y'^{2)})dx$$

$$Y = \{y \in C'[1,2]\} \qquad D = \mathbb{R}^3$$

$$\delta J[y,h] = \int_1^2 ((2+y')h + (y + 2x^2 y')h')dx$$

$$y = x^2 \qquad \delta J[x^2, h] = \int_1^2 ((2+2x)h + (x^2 + 4x^3)h')dx$$

Лемма 9.2 (Дюбуа-Реймона)**.** Пусть $a_0(x)$ и $a_1(x) \in C[a,b]$ и $\forall h \in C'[a,b]$ и $h(a) = h(b) = 0$, $\int_a^b (a_0(x)h(x) + a_1(x)h'(x))dx = 0$, тогда $a_1(x) \in C'[a,b]$ и $a_1' = a_0$ на $[a,b]$.

Доказательство. $p(x) \in C'[a,b]$, $p'(x) = a_0(x)$ и $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b a_1(x)dx$

$\forall h \in C'[a,b]$ и $h(a) = h(b) = 0$,

$$\int_a^b (p'h + a_1 h')dx = \underbrace{ph\Big|_a^b}_{0} + \int_a^b (a_1 h' - h'p)dx = 0$$

$$\int_a^b h'(a_1 - p)dx = 0 \qquad h(x) = \int_a^x (a_1(t) - p(t))dt$$

$$\int_a^b (a_1 - p)^2 dx = 0 \;\Rightarrow\; a_1 \equiv p \text{ на } [a,b]$$

$\Rightarrow a_1 \in C'[a,b]$ и $a_1' = a_0$ □

Следствие 9.1.

1. Основная лемма вариационного исчисления $a_1 \equiv 0$

   Пусть $a_0(x) \in C[a,b]$ и $\forall h \in C'[a,b], h(a) = h(b) = 0$, $\int_a^b a_0 h dx = 0$, тогда $a_0 \equiv 0$

2. ($a_0 \equiv 0$) Пусть $a_1(x) \in C[a,b]$ и $\forall h \in C'[a,b], h(a) = h(b) = 0$, $\int_a^b a_1 h' dx = 0$, тогда $a_1 \equiv const$

Замечание. Неравенство Стеклова: Пусть $h(x) \in C'[a,b]$ и $h(a) = h(b) = 0$, тогда

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b h'^2 dx$$

Неравенство Виртингера: Пусть $h(x) \in C'[a,b]$ и $h(a) = 0$ (либо $h(b) = 0$), тогда

$$\int_a^b h^2 dx \le \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b h'^2 dx$$

9.3 Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$F(x, y, y') \in C^2(D) \qquad D \subset \mathbb{R}^3 \text{ область}$$

$$y(a) = A \qquad y(b) = B$$

$$Y = \{y \in C'[a,b] : \forall x \in [a,b] \hookrightarrow (x, y(x), y'(x)) \in D, y(a) = A, y(b) = B\}$$

$$J[y] \to extr \qquad y \in Y$$

Определение 9.2 (Экстремум)**.** $\tilde{y} \in Y$ называется точкой абсолютного минимума (максимума), если

$$\forall y \in Y \hookrightarrow J[\tilde{y}] \le J[y] \ (\ge)$$

Определение 9.3. $\tilde{y} \in Y$ называется точкой локального минимума (максимума), если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall y \in Y : \ 0 < \|y - \tilde{y}\| \underset{C'[a,b]}{<} \varepsilon \hookrightarrow J[\tilde{y}] \le J[y] \ (\ge)$$

Замечание. $\tilde{y} \in Y$ не экстремум

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_1, y_2 \in Y 0 < \|y - \tilde{y}\| \underset{C'[a,b]}{<} \varepsilon \hookrightarrow J[y_1] < J[\tilde{y}] < J[y_2]$$

Теорема 9.1 (Необходимое условие экстремума)**.** Пусть $\tilde{y} \in Y$ решение простейшей задачи, тогда $\delta J[\tilde{y}, h] = 0$, $\forall h \in C'[a,b] : \ h(a) = h(b) = 0$ и эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера (Эйлера-Лагранжа)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Доказательство. Пусть $\tilde{y} \in Y$ - locmin

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall y \in Y : \ 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon \hookrightarrow J[\tilde{y}] \leq J[y]$$
$$y = \tilde{y} + \delta y \in Y \to \delta y \in C'[a, b]$$
$$\underbrace{\tilde{y}(a)}_{A} + \delta y(a) = A \qquad \underbrace{\tilde{y}(b)}_{B} + \delta y(b) = B$$
$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \qquad 0 < \|\delta y\| < \varepsilon$$

δy - вариация. аргумента

$$\delta y = \alpha h \qquad h \in C'[a, b], \ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$h(a) = h(b) = 0 \qquad 0 < |a|\|h\| < \varepsilon$$
$$\forall h \in C'[a, b] \qquad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{\|h\|}$$

По лемме о существовании первой вариации $\exists \varepsilon_1 > 0 \ \forall |\alpha| < \varepsilon_1$ функция $\Psi(\alpha) = J[\tilde{y} + \alpha h]$ непр. дифф. $|\alpha| < \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 = \min(\frac{\varepsilon}{\|h\|}, \varepsilon_1)$, $|\alpha| < \varepsilon_2$, $\Psi(\alpha)$ непр. дифф и $\Psi(0) \leq \Psi(\alpha)$

$\Rightarrow \alpha = 0$ т. $\min \Psi(\alpha)$, по Т. Ферма $\Psi'(0) = 0$, $\delta J[\tilde{y}, h] = 0$

$$\delta J[\tilde{y}, h] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) \Big|_{\tilde{y}} dx = 0$$
$$\forall h \in C'[a, b] \qquad h(a) = h(b) = 0$$

По лемме Дюбуа-Реймона:

$$a_1 = \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{\tilde{y}} \in C'[a, b] \qquad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{\tilde{y}} = \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\tilde{y}}$$

□

Замечание.

1. Решения уравнения Эйлера называются экстремалями

   Решения, удовлетворяющие краевым условиям называются допустимыми экстремалями

2. Развёрнутая форма уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

Пример.

$$J[y] = \int_{-1}^{1} y^2(x-y')^2 dx \to min \qquad y(-1)=0 \qquad y(1)=\frac{1}{2}$$

$$2y(x-y')^2 + \frac{d}{dx}(2y^2(x-y')) = 0$$

$$y(x^2 - y'^2 + y - yy'') = 0 \qquad \text{однородное обобщённое}$$

$$y = 0 \qquad y = \frac{x^2}{2}$$

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0,\, x \in [-1,0] \\ \frac{x^2}{2},\, x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}} = 0$$

3. $\tilde{y}$ - решение $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ $\delta J[\tilde{y}, h] = 0, \forall h \in C'[a,b], h(a) = h(b) = 0$ $\underset{\leftarrow}{\rightarrow}$ ур. Эйлера

   $\tilde{y}$ - допуст. экстр

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}|_{\tilde{y}}}_{\text{непр.}} = \frac{d}{dx} \quad \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}}_{\text{непр. дифф.}}$$

$$\delta J[\tilde{y}, h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h')|_{\tilde{y}} dx =$$

$$= \int_a^b \underbrace{(\frac{\partial F}{\partial y} h - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} h)}_{0}|_{\tilde{y}} dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}} h|_a^b}_{0} = 0$$

Первая часть - уравнение Эйлера, во второй $h(a) = h(b) = 0$

9.3.1 Частные случаи F

1. $F = F(x)$, $\int_a^b F(x)dx$
2. $F = F(y)$, $\int_a^b F(y)dx$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $G(y) = 0 \to y = C$
3. $F = F(y')$, $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = C \to y' = a$, $y = ax + b$
4. $F = F(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $G(x, y) = 0$
5. $F = F(x, y')$, $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$

6. $F = F(y, y')$,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \qquad | \cdot y'$$
$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - y' y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$
$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Доп. исследование $y' = 0$ из-за домножения.

7. Квадратичный функционал

$$F = A(x)y^2 + B(x)yy' + C(x)y'^2 + D(x)y + E(x)y' + G(x)$$
$$\text{коэф.} \in C^2(c, d) \qquad [a, b] \subset (c, d)$$
$$F(x, y, y') \in C^2(\tilde{D}) \qquad \tilde{D} \subset \mathbb{R}^3 \text{ область}$$

На практике достаточно коэф. $\in C^2[a, b]$

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] \qquad (\delta y = \delta \ \delta y' = \delta')$$
$$y \in Y \qquad y + \delta y \in Y \qquad \delta y \in C'[a, b] \qquad \delta y(a) = \delta y(b) = 0$$
$$\Delta F = \int_a^b (A(y^2 + 2y\delta + \delta^2) + B(y + \delta)(y' + \delta') + C(y'^2 + 2y'\delta' + \delta'^2) +$$
$$+ D(y + \delta) + E(y' + \delta) + G - Ay^2 - Byy' - Cy'^2 - Dy - Ey' - G)dx =$$
$$= \int_a^b ((\overbrace{(2Ay + By' + D)}^{\frac{\partial F}{\partial y}} \delta + \overbrace{(By + 2Cy' + E)}^{\frac{\partial F}{\partial y'}} \delta')dx +$$
$$+ \int_a^b (A'\delta^2 + B\delta\delta' + C\delta'^2)dx$$
$$\Delta F[\tilde{y}] = \underbrace{\delta J[\tilde{y}, \delta y]}_{0} + \int_a^b (A(x)\delta y^2 + B(x)\delta y \delta y' + C(x)\delta y'^2)dx$$

9.4 Задача со свободными концами

Постановка задачи:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$
$$F(x, y, y') \in C^2(D) \qquad D \in \mathbb{R}^3 \text{ область}$$

Либо закреплён один из концов, либо оба не закреплены.

$$Y = \{y(x) \in C'[a,b] : \forall x \in [a,b], (x, y(x), y'(x)) \in D, y(a) = A\}$$
$$J[y] \to extr \qquad y \in Y$$

> **Теорема 9.2** (Необходимое условие экстремума)**.** Пусть $\tilde{y} \in Y$ решение задачи со свободными концами, тогда $\delta J[\tilde{y}, h] = 0\ \forall h \in C'[a,b], h(a) = 0$ и эта функция удовлетворяет ур. Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ и условию $\frac{\partial F}{\partial y'}|_b = 0$

Доказательство. $\tilde{y}$ - min

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall y \in Y :\ 0 < \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon \hookrightarrow J[y] \geq J[\tilde{y}]$$
$$y = \tilde{y} + \delta y \in Y \qquad \tilde{y} \in Y$$
$$\delta y \in C'[a,b] \qquad \delta y(a) = 0$$
$$\delta y = \alpha h \qquad h \in C'[a,b] \qquad h(a) = 0$$
$$0 < \|\alpha h\| < \varepsilon \qquad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{\|h\|}$$

По лемме о существовании первой вариации:

$$\forall h \in C'[a,b]\ \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall |\alpha| < \varepsilon_1\ \Psi(\alpha) = J[\tilde{y} + \alpha h] \in C'[|\alpha| < \varepsilon_1]$$
$$\varepsilon_2 = \min(\frac{\varepsilon}{\|h\|}, \varepsilon_1)$$
$$|\alpha| < \varepsilon_2 : \underbrace{J[\tilde{y} + \alpha h]}_{\Psi(\alpha)} \geq \underbrace{J[\tilde{y}]}_{\Psi(0)} \qquad \Psi(\alpha)\text{непр. дифф.}$$

$\alpha = 0$ - min $\Psi(\alpha) \to$ по теор. Ферма $\Psi'(0) = 0$, $\delta J[\tilde{y}, h] = 0$, $\forall h \in C'[a,b]$, $h(a) = 0$

$$\delta J[\tilde{y}, h] = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h')|_{\tilde{y}} dx = 0$$

По лемме Дюбуа-Реймона $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}$ - непр. дифф и $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$ на $\tilde{y}$

$$\int_a^b \overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}|_{\tilde{y}} h - (0)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}} h\right)}^{0} dx + \frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}} h|_a^b = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}(b)\,\underbrace{h(b)}_{\neq 0} = 0 \ \to\ \frac{\partial F}{\partial y'}|_{\tilde{y}}(b) = 0$$

□