1 Некоторые свойства абсолютно инт функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале (a, b), если выполняются два условия:

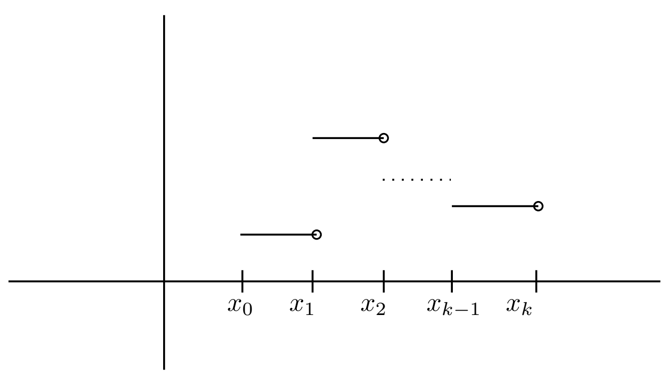
1. $\exists x_0, x_1, \ldots, x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$, что на любом отрезке $[\xi, \eta]$ из (a, b), не содерж x_i функция $f(x)$ интегрируема по Риману.
2. $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном (a, b). Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна и ограничена на (a, b).
$f(x)\varphi(x)$ - абсолютно интегрируемо на $[a, b]$

Доказательство. а) Рассмотрим $\forall[\xi, \eta] \subset (x_{i-1}, x_i)$. На нём $f(x)$ и $\varphi(x)$ - интегрируема по Риману, следовательно $f(x)\varphi(x)$ инт. по Риману $\Rightarrow$ 1.
б) Так как $\varphi(x)$ - ограничена то $\exists M : |\varphi(x)| \leq M$ на (a, b). Тогда $|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)|M$ на (a, b). Т.к. $\int_a^b |f(x)|dx$ - сход., то $\int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx$ - сход. по признаку сравнения $\Rightarrow$ 2.
$\Rightarrow f(x)\varphi(x)$ - абс. инт. на (a, b) $\square$

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$ определённая на $\mathbb{R}$ называется ступенчатой если $\exists$ числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \ x \in (-\infty, x_0) \cup [x_k, +\infty) \end{cases}$$



Замечание. Если положить

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \ x \notin [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

то $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1.1 (О приближении абс инт функций ступенчатыми)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на конечном или бесконечном (a, b) тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ ступенчатая функция $\varphi(x) : \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть для простоты записи у функции имеются только две особенности в точках a и b, т.е. $f(x)$ - инт по Риману на $\forall[\xi, \eta]$ из (a, b).

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$. Из абсолютной инт. $f(x)$ следует $\exists$ таких $[\xi, \eta] \in (a, b)$:

$$\int_a^\xi |f(x)|dx + \int_\eta^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $f(x)$ инт. по Риману на $[\xi, \eta]$ то для рассмотренного $\varepsilon > 0$ $\exists\delta : \forall$ разб. отр. $[\xi, \eta]$ $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n_\tau}$ $(|\tau| < \delta)$, $\forall\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

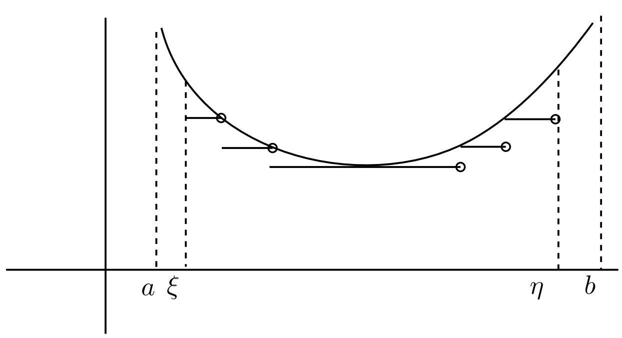
Выполняется $\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - \sigma_\tau\right| < \varepsilon/2$, где σ_τ - сумма Дарбу.

$\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$, где $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i\Delta x_i$ $(m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$.

Также $\int_\xi^\eta f(x)dx \ge s_\tau \ \Rightarrow\ 0 \le \int_\xi^\eta f(x)dx - s_\tau \le \varepsilon/2$.

Рассмотрим ступенчатую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, \ x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, x \notin [\xi, \eta) \end{cases}$$



Отметим: $s_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} m_i \Delta x_i = \int_\xi^\eta f(x)dx$, $\varphi(x) \le f(x)$ на $[\xi, \eta]$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int_a^\xi |f|dx + \int_\xi^\eta |f - \varphi|dx + \int_\eta^b |f|dx$, но $\int_\xi^\eta |f - \varphi|dx = \int_\xi^\eta (f - \varphi)dx = \int_\xi^\eta f dx - s_\tau$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ □

Теорема 1.2 (Римана (об осциляциях))**.** Пусть $f(x)$ абс. инт. на конечном или бесконечном интервале (a, b), тогда $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos \nu x dx = 0$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin \nu x dx = 0$

Доказательство. 1) Если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [\xi, \eta) \\ 0, \ x \notin [\xi, \eta) \end{cases}, \ [\xi, \eta] \in (a, b)$$

То:

$$\int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx = \int_\xi^\eta \sin \nu x dx = -\frac{\cos \nu x}{\nu}\Big|_\xi^\eta \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

2) Если $\varphi(x)$ - ступенчатая, то она является линейно комбинацией рассмотренных одноступенчатых функций, поэтому для неё утверждение справедливо.

3) Рассмотрим абс. инт. на (a, b) функцию $f(x)$. Возьмём $\underline{\forall \varepsilon > 0}$.

По предыдущей теорме $\exists \varphi(x)$ - ступенчатая функция: $\int_a^b |f - \varphi|dx < \varepsilon/2$.

Т.к. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx = 0$, то $\underline{\exists \nu_\varepsilon} : \forall \nu \ (|\nu| > \nu_\varepsilon) \hookrightarrow |\int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx| < \varepsilon/2$. Тогда $\underline{\forall \nu : \ (|\nu| > \nu_\varepsilon}$ выполняется:

$$\underline{|\int_a^b f(x) \sin \nu x dx|} = |\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \nu x dx + \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx| \le$$
$$\le |\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \nu x dx| + |\int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx| <$$
$$< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon}$$

Подчёркнутое означает,что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0$. Аналогично косинус. □

Замечание. Интервал (a, b) при исследовании абсолютно интегрируемых на другой промежуток $[a, b], [a, b), (a, b]$

2 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 2.1. Ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ называется тригонометрическим рядом, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Определение 2.2. Множество функций $\{u_n(x)\} = \{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ называется тригонемтрической системой

Свойства тригоном. сист.

1. Триг. сист. "ортогональна"в смысле $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) u_k(x) dx = 0$, $\forall n, k : n \neq k$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} u_n^2(x) dx = \pi$, при $n \geq 2$

Доказательство. 1) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x) dx = 0$$

$\square$

Доказательство. 2) Например

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2} dx = \pi + 0 = \pi$$

$\square$

Лемма 2.1. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.1}$$

и ряд сходится равномерно тогда:

$$\begin{gathered} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Домножим 2.1 на $\cos mx$. Полученный ряд будет равномерно сходится.

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} \cos mx(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| = |\cos mx| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leq \left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right|$$

Из выполнения усл. Коши равномерной сходимости для исходного ряда 2.1 следует выполнение усл. Коши равномерной сходимости полученного в результате умножения ряда.

Тогда имеем право интегрировать равнество (по x от $-\pi$ до π)

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} \cos mx(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

Второе равество в 2.2 получается аналогично. □

Определение 2.3. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируемая на $[-\pi; \pi]$ функция. Тригонометрический ряд с коэффицентами 2.2 называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты a_k, b_k - коэффициетами Фурье. Имеет место запись (здесь $\sim$ означает соответствие):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Перефразируем лемму:

Лемма 2.2 (2.1'). Рамномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$$

где $\alpha > 1$ является рядом Фурье своей суммы, так как он равномерно сходдится по признаку Вееритрасса

Замечание. Если функция абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то интегралы в 2.2 сходятся абсолютно по 1.1

Замечание. Если $f(x)$ - 2π периодична и абс. инт. на каком-либо $[a-\pi, a+\pi]$, то она будет абс. инт. на $\forall$ другом таком отрезке и интегралы (2.2) не зависят от отрезка.

Замечание. Любую абсолютно интегрируемую на $[a-\pi, a+\pi]((a-\pi, a+\pi); (a-\pi, a+\pi], [a-\pi, a+\pi))$ можно продолжить до 2π периодической функции, возможно доопределив или переопределив функцию в граничных точках. Интегралы при этом не меняются.

Следствие 2.1. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ - посл. коэфф. Фурье 2π периодической и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0 \qquad \lim_{k \to \infty} b_k = 0$$

По 1.1 $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$ - абс. инт.. По Т. Римана получаем нужный результат.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

Не может быть рядом Фурье какой-либо абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функции.

2.1 Ядро Дирихле. Принцип локализации

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = S_n(x, b) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

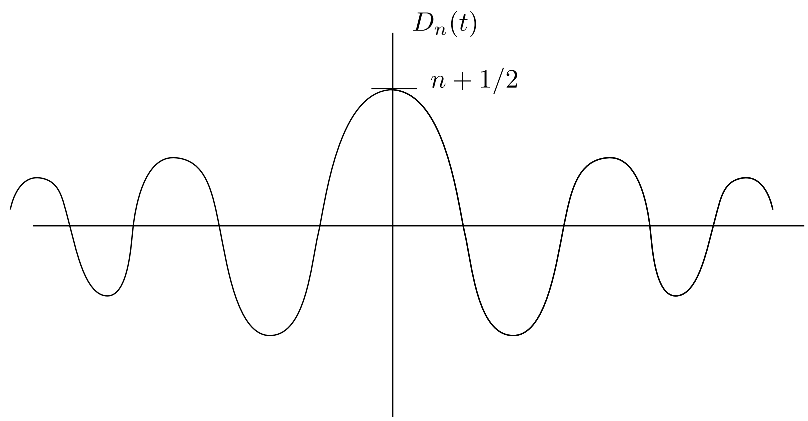
Преобразуем:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kxdt\cdot\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt\cdot\sin kx =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt$$
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt$$

Определение 2.4. Функция

$$D_n(t) = \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t)\right)$$

называется ядром Дирихле



Свойства ядра Дирихле:

1. $D_n(t)$ - четная, 2π период. и непр. функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$
3. $\max|D_n(t)| = \max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
4. $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, при $t \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. Следует из аналогичных свойств слогаемых
2. Очев
3. $\frac{1}{2} - n \leq D_n(t) \leq \frac{1}{2} + n = D_n(0)$
4.

$$\begin{gathered}D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \\ = \frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos 2t + \dots + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} = \\ = \frac{\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \dots - \sin(n-\frac{1}{2})t + \sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = \\ = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\end{gathered}$$

□

Теорема 2.1 (Принцип локализации)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ функция. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt$ существуют или нет одновременно. В случае существования равны.

Замечание. Таким образом сходимость и значение суммы ряда Фурье 2π пер. и абс. инт. на $[-\pi, \pi]$ зависит только от свойств функции в сколь угодно малой окрестности.

Доказательство. Преобр. S_n:

$$S_n(x_0) \underset{t=\tau+x_0}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\tau=-t} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}}_{\tau=t})f(x_0+\tau)D_n(\tau)d\tau = \\ = \frac{1}{\pi}(\int_0^\pi f(x_0-t)D_n(-t)dt + \int_0^\pi f(x_0+t)D_n(t)dt)\end{gathered}$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt \tag{2.4}$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi)\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{на}[\delta,\pi]$$

Тогда $\frac{(f(x_0-t)+f(x_0+t))}{2\sin\frac{t}{2}}$ - абс. инт на $[\delta,\pi]$ (см 1.1).

Тогда 2-ой инт. $\to 0$ при $n\to\infty$ (Т. Римана) и получаем нужный результат.

□

2.2 Признаки сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 2.2 (Признак Дини)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть в точке x_0 существуют $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Пусть для некоторого $\delta>0$ $\int_0^\delta \frac{|f^*_{x_0}(t)|}{t}dt$ (где $f^*_{x_0}(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0+0)$) сходится. Тогда ряд Фурье сходится в точке x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Рассматриваем

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^*_{x_0}(t)D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^*_{x_0}(t)\frac{\sin(n+.5)t}{2\sin .5t}dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f^*_{x_0}(t)}{t}\frac{.5t}{\sin .5t}\sin(n+.5)tdt$$

Функция $f^*_{x_0}$ абс. инт. на $[0,\pi]$ (т.к. по сравнению с абс. инт функциями $f(x_0+t)$ и $f(x_0-t)$) у функции $f^*_{x_0}(t)$ появивлась лишь одна особенность при $t=0$, в окр. кот. функция по условию абс. инт. Функция $\frac{t/2}{\sin t/2}$ доопределима в до непрерывной и ограниченной на $[0,\pi]$ функции.

По лемме 1.1 $\frac{f^*_{x_0}}{t}\frac{t/2}{\sin t/2}$ - абс. инт. на $[0,\pi]$. По Т. Римана 1.2 интеграл $\to 0$ при $n\to\infty$

$$\Rightarrow S_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

□

Определение 2.5. Функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 правостороннему (левостороннему) условия Гёльдера с показателем α ($\alpha\in(0,1]$) если $\exists\delta>0, M>0: \forall t\in(0,\delta) \hookrightarrow |f(x_0 \underset{(-)}{+} t) - f(x_0 \underset{(-)}{+} 0)| < Mt^\alpha$.

Замечание. При α это условие называется также условием Липшица.

Определение 2.6. Пусть $\exists\ f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Введём обобщение односторонней производной

$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{t\to\pm0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm0)}{t}$$

Лемма 2.3. Если $\exists$ (конечная) $f'_{\underset{(-)}{+}}(x_0)$, то $f(x)$ удовл. правостороннему (левостороннему) усл. Липшица.

Доказательство. (для $f'(x_0)$)

$\exists f'_+(x_0) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \Rightarrow \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} = f'_+(x_0) + \underset{t\to+0}{o(1)}$

$\Rightarrow$ В некоторой окр. $(0,\delta)$ выполнится $\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t} \le |f'_+(x_0)|+1$

$\Rightarrow |f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le (|f'_+(x_0)|+1)t$ □

Теорема 2.3 (Признак Липшица)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ выполняются оба условия Гёльдера. Тогда ряд Фурье сходится в x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Пусть выполняются оба условия Гёльдера. Тогда на $(0,\delta)$ выполняются:

$$\frac{|f^*_{x_0}|}{t} \le \frac{|f(x_0+t)+f(x_0+0)|}{t} + \frac{|f(x_0-t)+f(x_0-0)|}{t} \le \frac{2Mt^\alpha}{t} = \underbrace{\frac{2M}{t^{1-\alpha}}}_{\text{абс.инт.}}$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения $\int_0^\delta \frac{|f^*_{x_0}(t)|dt}{t}$ сход

$\Rightarrow$ по признаку Дини $S_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$ □

Следствие 2.2. Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi,\pi]$ функция. Пусть $\exists f(x_0\pm0)$ и $f'_\pm(x_0)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Следует из признака Липшица и леммы. □

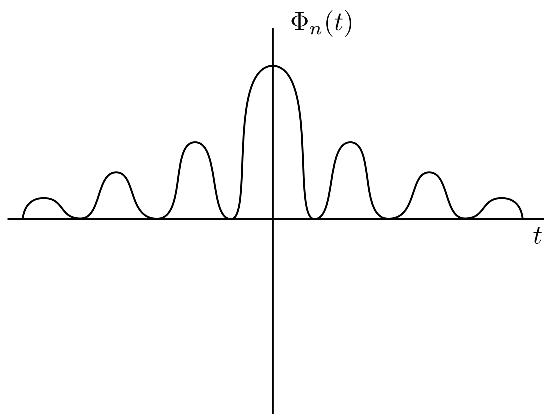
3 Суммирование рядов методом ср. арифм.

Пусть $f(x)$ - 2π периодическая и абсолютно инт. на $[-\pi, \pi]$ функция.

Определение 3.1. $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$ - сумма Фейера, где $S_k(x)$ - частичная сумма ряда Фурье.

Определение 3.2. $\Phi_n(x) = \frac{D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_n(x)}{n+1}$ - ядро Фейера, где $D_k(x)$ - ядра Дирихле.

Из формулы 2.3 (принцип локализации) $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)dt$ следует $\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x+t)dt$.



Свойства ядра Фейереа:

1. $\Phi_n(t)$ - четная, 2π периодичекая, непр функция
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \pi$
3. $\max \Phi_n(t) = \Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$
4. $\Phi_n(t)$ - неотр.
5. $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$ при $t \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. из св. ядра Дирихле
2. из св. ядра Дирихле

3. Т.к. $\max D_n(t) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, то

$$\max \Phi_n(t) = \Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}(D_0(0) + D_1(0) + \cdots + D_n(0)) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}+n\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n}{2}(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

4. из 5)

5.

$$(n+1)\Phi_n = D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t) =$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3}{2}t + \cdots + \sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{3}{2}t\sin\frac{t}{2} + \cdots + 2\sin(n+\frac{1}{2})t\sin\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{\cos 0 - \cos t + \cos t - \cos 2t + \cdots + \cos nt - \cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

□

Теорема 3.1 (Фейера)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодическая, непрерывная $\Rightarrow \sigma_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$

Доказательство.

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt - f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt| =$$
$$= \frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)(f(x+t)-f(x))dt| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|dt$$

Т.к. $f(x)$ - непр., 2π период, то она ограничена и существует $C > 0 : |f(x)| \leq C$. Также $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$ (в силу равн. непр.)

$$\exists\delta \in (0,\pi) : \forall x, x' : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt = \underbrace{\frac{1}{pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \ldots dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \ldots dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \ldots dt}_{I_3}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt \le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)(|f(x+t)| + |f(x)|)dt \le$$
$$\le \frac{2C}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \le \frac{2C}{\pi}\pi\max_{[\delta,\pi]}\Phi_n(t) \le 2C\frac{1}{2(n+t)\sin^2\frac{\delta}{2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Тогда $\exists n_3 : \forall n \ge n_3 \hookrightarrow I_3 < \frac{\varepsilon}{3}\forall x$. Аналогично $\exists n_1 : \forall n \ge n_1 \hookrightarrow I_1 < \frac{\varepsilon}{3}\forall x$. $\underline{\exists n_0} = \max n_1, n_3 : \underline{\forall n \ge n_0 \hookrightarrow |\sigma_n(t) - f(x)| < \varepsilon\,\forall x}$.

Подчёркнутое означает $\sigma_n(t) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$ ☐

Следствие 3.1. Если ряд Фурье непр., 2π периодической функции сходится в точке x, то он сходится к $f(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(t) = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = A$.

По Т. (Фейера) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f(x) \Rightarrow A = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(t) = f(x)$. ☐

4 Приближение непр. функ. многочленами

Определение 4.1. Функция вида

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx + B_k\sin kx$$

называются тригонометрическим многочленом.

Теорема 4.1 (Т1 Вейерштрасса)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр функция.

Тогда $\forall\varepsilon > 0\exists$ триг. многочлен $T(x) : \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Т.к. $\sigma_n(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\underline{\forall\varepsilon > 0}\exists N : \forall n \ge N, \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $\underline{\exists T(x)} = \sigma_n(x)$: $\underline{\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|T(x) - f(x)| < \varepsilon}$. ☐

Теорема 4.2 (T1' (перефразирование))**.** Пусть $f(x)$ - непр на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi) \Rightarrow \forall \varepsilon > \exists$ триг. многочлен $T(x) : \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Такая функция продолжаема до 2π периодической, непр. функции, можем применять T1. $\square$

Теорема 4.3 (T2 Веерштрасса)**.** Пусть $f(x)$- непр. на $[a, b]$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ алгебраический многочлен $P(x) : \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$: $x = a + \frac{b-a}{\pi} t$, обозначим $f^*(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi} t)$, $t \in [0, \pi]$.

Продолжим $f^*(t)$ чётно на $[-\pi, \pi]$ и 2π периодически на $\mathbb{R}$, сохранив обозначение $f^*(t)$.

По T1 $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тр. мн. $T(t) : \max\limits_{t \in [0,\pi]} |f^*(t) - T(t)| \leq \max\limits_{t \in \mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ряды Тейлора для $\cos kt$ и $\sin kt$ и, следовательно, для $T(t)$ имеют радиус сходимости $+\infty$, и следовательно равномерно сходятся на любом отрезке.

Таким образом $\exists$ алг. многочлен $P(t) : \max\limits_{t \in [0,\pi]} |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\max\limits_{t \in [0,\pi]} |f^*(t) - P(t)| < \varepsilon$ или $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(\pi \frac{x-a}{b-a})| < \varepsilon$. $\square$

4.1 Минимальное св-во коэфф. Фурье

Лемма 4.1. Если $f(x)$ инт (в несобственном смысле) на $[a, b]$ вместе с квадратом $f^2(x)$. $\Rightarrow f(x)$ абс. инт на $[a, b]$.

Доказательство. Следует из неравенства $|f(x)| \leq \frac{1+f^2}{2}$. $\square$

Замечание.

$$\exists f = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

абс. инт на $[0, 1]$ но не явл. инт с кв.

Теорема 4.4. Пусть $f(x))$ - 2π период. и инт. вместе с квадратом функция на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $S_n(x)$ - частичные суммы ряда Фурье, a_n и b_n - коэф. Фурье.

Тогда:

1. $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx = \min\limits_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx$, где $T_n(x)$ - триг. многочлены степени не выше n.
2. $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ - неравенство Бесселя

Доказательство. Пусть $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\pi(\frac{a_0A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_kA_k + b_kB_k) + \pi(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) +$$

$$+\pi\left(\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right)$$

Видно, что последнее выражение минимально при $A_k = a_k$, $B_k = b_k$, что доказывает 1.

Для доказательства 2 возьмём $T_n = S_n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \pi\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

Частичн. суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$ составляют неубывающую, ограниченную последовательность, следовательно ряд сходится.

Переходим в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и получаем 2. $\square$

Теорема 4.5 (Равентсво Парсеваля)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична, непрерывна, a_n и b_n её коэф. Фурье, тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Замечание. Равенство верно и для интегрируемой функции вместе с квадратом.

Замечание. Равенство Парсеваля получается при формальной подстановке $S(x)$ вместо $f(x)$.

Доказательство. Возьмём $\underline{\forall \varepsilon > 0}$. По Т. Вейерштрасса $\exists T_n(x)$ - триг. многочлен, такой что $\max\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx < \varepsilon$$

Из минимального свойства коэф. Фурье:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx < \varepsilon \tag{1}$$

Тогда:

$$\underline{0 \overset{\text{нер. Б.}}{\leq} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right]} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2 dx \underline{\overset{(1)}{\leq} \varepsilon}$$

Из подчёркнутого получаем равенство Парсвеваля. □

Определение 4.2 (Кусочно непр. дифф.)**.** Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывно дифф. на отрезке $[a, b]$, если $\exists$ такое разбиение отрезка, что на каждом отрезке разбиения, функция непрерывно дифф. (в концевых точках односторонне).

Теорема 4.6 (О почленном дифф. ряда Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. дифф. на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Тогда $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$. (т.е. ряд можно формально дифф.)

Замечание. О сходимости ничего не говорится.

Доказательство. Пусть $f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$

$$\alpha_0 = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n)\sin nx df = nb_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n)\cos nx df = -na_n$$

□

Лемма 4.2 (О порядке убывания коэф. Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична и непр. на $\mathbb{R}$.

Пусть $f(x)$ имеет непр. производную до порядка $k-1$ включительно на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. производную порядка k ($k \geq 1$) на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$, $|b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ - сход.

Доказательство. Пусть $f^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$.

Применяем предыдущую Т. k раз, получим либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n \qquad \beta_n = \pm n^k b_n \tag{1}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n \qquad \beta_n = \pm n^k a_n \tag{2}$$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f^{(k)})^2 dx$ (нер. Бесселя) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ (где $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$) сходится.

Если справедл (1), то

$$|a_n| = \frac{\alpha_n}{n^k} \leq \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k} \qquad |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}$$

Аналогично в случае (2). □

Теорема 4.7 (О скорости сходимости ряда Ф. к функ.)**.** Пусть $f(x)$ - 2π периодична и непр. на $\mathbb{R}$.

Пусть $f(x)$ имеет непр. производную до порядка $k-1$ включительно на $\mathbb{R}$ и кусочно непр. производную порядка k ($k \geq 1$) на $[-\pi, \pi]$.

Тогда ряд Фурье равномерно и абсолютно сходится к $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и выполняется

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\eta_n}{n^{k-.5}}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ и $\{\eta_n\}$ - числовая посл.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ и $S_n(x)$ - сумма Фурье порядка n.

Выполняются достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.

Рассмотрм остаток ряда Фурье

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

При анализе остатка будем использовать неравенства Коши-Буняковского-Шварца для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2} \tag{1}$$

которое получается из нер. К.-Б.-Ш. для конечной суммы

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2}$$

после применения предельного перехода $N \to \infty$.

Также будем использовать нер.

$$\frac{1}{m^p} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^p}, \ p > 0 \tag{2}$$

которое получается инт. нерав. $\frac{1}{m^p} \leq \frac{1}{x^p}$ по отрезку $[m-1, m]$.

$$|r_n(x)| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \le$$

$$\overset{(1)}{\le} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}} \overset{(1)}{\le} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}} =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2k}}} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}}_{\eta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0} \sqrt{\frac{1}{n^{2k-1}}} = \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ Ряд сходится равномерно, т.к. η_n не зависит от x.

Т.к. получилась оценка

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \le \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$$

из которой следует абсолютная сход. остатка, заключаем, что ряд сход. абс. □

Следствие 4.1 (Достаточное усл. равн. сход. ряда)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период., непр на $\mathbb{R}$, имеет кус. непр. производную на $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ Ряд Фурье равномерно на $\mathbb{R}$ и абс. сходится к $f(x)$.

Доказательство. Следует из Т. при $k = 1$. □

Теорема 4.8 (О почленном инт. ряда Фурье)**.** Пусть $f(x)$ - 2π период. и кусочно непр. на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Тогда:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx)$$

и ряд в правой части сх. равн. на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Введём $F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$, $F(x)$ - непр. на $\mathbb{R}$, её производная $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ - кусочно непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$.

$$F(x+2\pi) = F(x) + \underbrace{\int_x^{x+2\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt}_{0} = F(x)$$

т.е. $F(x)$ - 2π периодична

$\Rightarrow$ ряд Фурье $F(x)$ сх. равн. к $F(x)$ на $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty A_n \cos nx + B_n \sin nx \tag{1}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) d\sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi n} F(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \frac{a_0}{2})\sin nx dx = -\frac{b_n}{n}$$

$$B_n = \frac{a_n}{n}$$

Положим в (1) $x = 0$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty A_n = 0 \Rightarrow \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n}$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}\sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx)$$

□

4.2 Запись р. Фурье в комплексной форме

Рассмотрим $f(x)$ - 2π периодическую, абс. инт на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Подставим $\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ и $\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$ (ф. Эйлера)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

Введём обозначения $c_0 = \frac{a_0}{2}$; $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Тогда $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{inx}$, где $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$.

Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$
$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

Общая формула:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Замечание. $c_{-n} = \bar{c}_n$, если $f(x)$ - действительное.

5 Метрические пространства

Определение 5.1. Множество X называется метрическим пространством, если любой паре $x, y \in X$ поставлено в соответствие $\rho(x, y)$ (метрика или расстояние), такая что выполняются аксиомы:

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - неравенство треугольника
3. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Свойство. $\rho(x, y) \ge 0$.

Доказательство. $0 = \rho(x, x) \le \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y) \ \ \forall x, y \in X$ $\square$

Замечание. Любое подмнож. метрического пространства является метрическим пространством.

Пример. Мн. $\mathbb{R}$ - метр. пр-во $\rho(x, y) = |x - y|$

Пример. Арифметическое евклидово пр-во $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$

Пример. Мн-во $B([a, b])$ ограниченных на $[a, b]$ функций,

$$\rho(\varphi(x), \psi(x)) = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$$
$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |\varphi(x) - \alpha(x) + \alpha(x) - \psi(x)| \le |\varphi - \alpha| + |\alpha - \psi| \le$$
$$\le \sup_{[a,b]} |\varphi - \alpha| + \sup_{[a,b]} |\alpha - \psi| = \rho(\varphi, \alpha) + \rho(\alpha, \psi)$$

Перейдём в неравенстве к sup:

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{[a,b]} |\varphi - \psi| \le \rho(\varphi, \alpha) + \rho(a, \psi)$$

Доказали неравенство треугольника.

Пример. Мн-во $CL([a,b])$ непр. функций на $[a,b]$ с метрикой $\rho(\varphi,\psi) = \int_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|dx$ является метр. пр-вом.

2 аксиома: $|\varphi-\psi| \leq |\varphi-\alpha| + |\alpha-\psi| \Rightarrow \rho(\varphi,\psi) \leq \rho(\varphi,\alpha)+\rho(\alpha,\psi)$

3 аксиома: $0 = \rho(\varphi,\psi) = \int_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|dx \Rightarrow \varphi \equiv \psi$

Если не требуем не непрерывности, то $\rho(\varphi,\psi) = 0 \not\Rightarrow \varphi \equiv \psi$, т.к. функции могут отличатся в отдельных точках.

Определение 5.2. Посл. $\{x_n\}$ элементов метр. пр-ва X называется сходящимся, если

$$\exists x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$$

(или $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x_0) = 0$).

В этом случае считаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Определение 5.3. Посл. $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Определение 5.4. Метр. пр-во X называется полным, если в нём любая фундаментальная посл. сходится.

Теорема 5.1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Пример. Полные метр. пр-ва: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$.

Пример. Неполные метр. пр-ва: $(0,1)$, где $\rho(x,y) = |x-y|$. Здесь $\{\frac{1}{n}\}$ - фунд, но не сход.

Пример. Q - мн. рац. чисел не явл. полным метр. пр. $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ - фунд., но не сход.

Замечание. В метр. пр-ве, так же как и в $\mathbb{R}^n$, можно ввести понятия окрестности, внутр. точки, граничной т., т. прикосновения., предельной т., замыкания, отк. множества и т.д.

5.1 Линейные нормированные пространства

Определение 5.5. Множество X называется линейным пр-вом, если в нём определены сложение $(x+y)$ и умножение на число (αx):

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0: \ x + 0 = x$
4. $\forall x \in X \ \exists (-x): \ x + (-x) = 0$
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
6. $\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
7. $1 \cdot x = x$

Определено вычитание $x - y = x + (-y)$.

Определение 5.6. Система векторов называется линейно независимой, если любая конечная подсистема линейно независима.

Определение 5.7. Линейное пространство X называется нормированным, если на нём определенна действительная функция (функционал) $\|x\|$, такая что выполняются аксиомы:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Свойство. $\|x\| \geq 0$

Доказательство.

$$0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

□

Определение 5.8. Функция, удовлетворяющая условиям 1 и 2 называется полунормой.

Пример. Мн-во действительных чисел: $\|x\| = |x|$

Пример. Геометрическое пространство: $\|\bar{x}\| = |\bar{x}|$

Пример. Мн-во $B[a, b]$ ограниченных на $[a, b]$ функций:

$\|f(x)\| = \sup_{[a,b]} |f(x)|$

Пример. Мн-во абс. инт. на $[a, b]$ функций $(RL_1[a, b])$:

$\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)|dx$ - полунорма

Пример. Мн-во непр. на $[a, b]$ функ. $(CL_1[a, b])$: $\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)|dx$

Лемма 5.1. Если X - линейное нормированное пространство, то оно является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Замечание. В этом случае говорят, что метрика порождена нормой.

Замечание. Все понятия, введённые в метрическом пространстве могут быть перенесены в нормированное пространство.

Определение 5.9.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$
3. Если $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$, то $x - y = 0$, т.е. $x = y$

   Если $x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$

Определение 5.10. Линейное нормированное пространство называется полным, если оно полно в смысле метрики, порождённой нормой.

Определение 5.11. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым.

Определение 5.12. Система $\{x_\alpha, \alpha \in U\}$ элементов нормированного (полуномированного) линейного пространства X называется полной в X, если $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists$ линейная комбинация (л.к.(x_α) или lc x_α): $\|x - lcx_\alpha\| < \varepsilon$

5.2 Теоремы Вейрештрасса о прибл. непр. функций

Теорема 5.2 (Т1 с волной)**.** Система тригонометрических полна в пространстве 2π-периодических, непрерывных функций в смысле нормы $\|f\| = \max_{[-\pi,\pi]} |f(x)|$ (в смысле равномерного приближения)

Теорема 5.3 (Т2 с волной)**.** Система неотрицательных степеней x $\{x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ полна в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$ в смысле равномерного приближения

5.3 Линейные пространства со скалярным произведением

Определение 5.13. Скалярным произведением в линейном пространстве X называется функция двух переменных (x, y), где $x, y \in X$:

1. $(x, x) > 0$
2. $(x, y) = (y, x)$
3. $(\lambda x + \mu y, z) = \alpha(x, z) + \mu(y, z)$
4. $(x, x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$

Определение 5.14. Пространство со скалярным произведением называется предгильбертовым.

Определение 5.15. Функция (x, y), удовлетворяющая условиям 1-3 называется полускалярным произведением.

Теорема 5.4 (Неравенство Коши-Буняковского)**.**

Если (x, y) -скалярное (полускалярное) произведение в линейном пространстве X, то $\forall x, y \in X \hookrightarrow (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Доказательство.

$$\forall x, y \in X,\ \forall t \in R \hookrightarrow (tx + y, tx + y) \geq 0$$
$$(x, x)t^2 + 2(x, y)t + (y, y) \geq 0$$

1. $(x, x) = 0 \ \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow$ нер-во верно
2. $(x, x) \neq 0 \Rightarrow D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow$ нер. верно.

□

Следствие 5.1 (Неравенство треугольника)**.** Для скалярного (полускалярного) произведения верно

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$$

Доказательство.

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2|(x, y)| + |(y, y)| \leq$$
$$\leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2$$

□

Лемма 5.2. Если (x, y) - скалярное (полускалярное) произведение, то функция $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ является нормой (полунормой) и неравенство Коши-Буняковского имеет вид $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$

Доказательство.

1. $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)}$
2. $\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$
3. В случае скал. произв. $\sqrt{(x,x)} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

$\square$

Пример. $\mathbb{R}$ $(x, y) = xy$

Пример. Векторное пространство $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\varphi$

Пример. $RL_2[a, b]$ - мн-во функ., интегрируемых на $[a, b]$ в несобственном смысле вместе с квадратом

Отметим, что если $f(x), g(x) \in RL_2[a, b]$, то $|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2+g^2}{2}$ и $\int_a^b fgdx$ - сход. (абс.)

Вводим $(f, g) = \int_a^b fgdx$ - полускалярное произв.

Пример. $CL_2[a, b]$ - мн-во непр. функций, скал. произв. $(f, g) = \int_a^b fgdx$

5.4 Сравнение норм

Рассмотрим $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$

В них $\|\varphi\|_\infty = \max_{[a,b]} |\varphi(t)|$, $\|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)|dt$, $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(t)dt}$

Неравенство Коши-Буняковского для $(f, g) = \int_a^b fgdx$:

$$\left(\int_a^b fgdt\right)^2 \leq \int_a^b f^2dt \int_a^b g^2dt$$

При $g = 1$, $f(t) = |\varphi(t)|$:

$$\left(\int_a^b |\varphi(t)|dt\right)^2 \leq \int_a^b \varphi^2(t)dt(b-a) \quad \Big|\sqrt{}$$

$$\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2\sqrt{b-a}$$

Также верна: $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty\sqrt{b-a}$

Теорема 5.5. Из сходимости $\{f_n(t)\}$ на норме $\|\cdot\|_\infty$ следует сходимость по норме $\|\cdot\|_2$, а из неё следует сходимость по норме $\|\cdot\|_1$

Определение 5.16. Линейное пространство X со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порождённой скалярным произведением, т.е $\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}$ называется гильбертовым пространством.

Теорема 5.6. $C[a,b]$ - пространство непрерывных функций с нормой $\|f(x)\|_\infty = \max_{[a,b]}$ -полное пространство

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, т.е

$\underline{\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n,m \geq N} \hookrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \underline{\forall x \in [a,b] \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon}$

Подчёркнутое означает, что выполнено условие Коши равномерной сходимости

$\Rightarrow \exists f$ - непр. на $[a,b]$: $f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$

$\Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N}, \forall x \in [a,b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \varepsilon$

$\Rightarrow \underline{\|f_n - f\| < \varepsilon} \Rightarrow f_n$ - сходится по норме $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ полн. пр-ва ☐

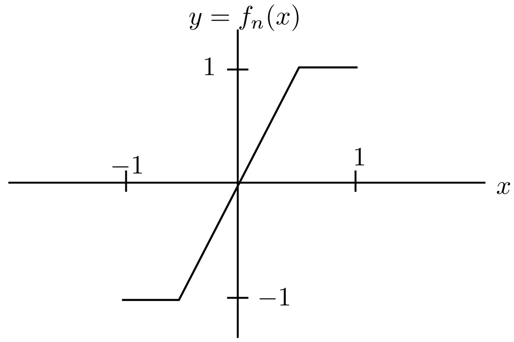
Теорема 5.7. Пространство $CL_2[a,b]$ непрерыных функций, со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ не является полным.

Доказательство. Доказательство проведём для отрезка $[-1,1]$.

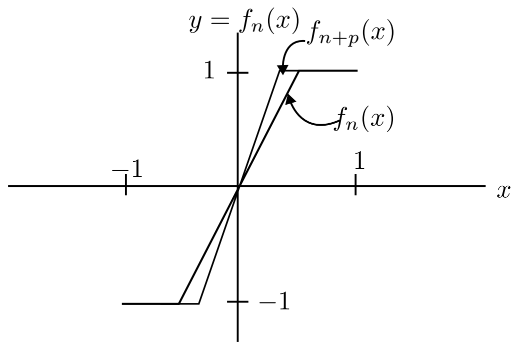
Докажем, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1, \frac{-1}{n}] \\ nx, x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

является фундаментальной но не сходится в $CL_2[-1,1]$



1) Докажем фундаментальность



Оценим

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f_{n+p}(x) - f_n(x))^2 dx} =$$

$$= \sqrt{2\int_0^{1/n} (f_{n+p} - f_n)^2 dx} \leq \sqrt{2\int_0^{1/n} (1-0)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Т.к. $\sqrt{\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ то $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$.

Тогда $\forall n \geq N, p \in N \hookrightarrow \|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$

2) Отсутствие сходимости

Предположим, что $\exists f(x)$ - непр. на $[-1,1]: \|f_n(x)-f(x)\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Rightarrow \sqrt{\int_{-1}^{1}(f_n-f)^2dx} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Rightarrow \sqrt{\int_{0}^{1}(f_n-f)^2dx} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Предположим $\exists x_0 \in (0,1): f(x_0) = 1+\varepsilon \neq 1$

Тогда в некоторой $(x_0-\delta, x_0+\delta) \hookrightarrow |f(x)-1| > \frac{|\varepsilon|}{2}$ и начиная с некоторого n выполняется $\sqrt{\int_{0}^{1}(f_n-f)^2dx} \geq \sqrt{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\varepsilon^2}{4}dx} = \sqrt{2\delta\frac{\varepsilon^2}{4}} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = 1$ на $(0,1)$, аналогично $f(x) = -1$ на $(-1,0)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ разрывна в нуле

$\Rightarrow$ $\nexists f(x)$ - непр. $\Rightarrow$ $CL_2[-1,1]$ не явл. полным □

6 Ортогональные сист. и разложение по ним

Работаем в предгильбертовом пространстве X_Π или в гильбертовом X_Γ

Определение 6.1. Система элементов $\{\xi_\alpha, \alpha \in U\}$ предгильбертого прост. X_Π называется ортогональной, если $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = 0 \ \forall \alpha_, \alpha_2 \in U : \alpha_1 \neq \alpha_2$

Если при этом $\|x_\alpha\| = 1 \ \forall \alpha$, то такая система называется ортонормированной.

Определение 6.2. Система элементов X_Π называется незав., если $\forall$ её конечная подсистема - ленейно независ

Лемма 6.1. Ортог. сист. в $X_\Pi : x_\alpha \neq 0 \ \forall \alpha$ является лин. незав.

Доказательство. Как в ан. геометрии. (Предполагаем что система лин. завис., тогда есть нетрив. лин. комб. равная 0, домнажаем скалярно на элементы и получаем что коэф. равны нулю из-за ортогональности) □

Пример. Триг. система $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$

- ортог. сист. в $L_2[-\pi,\pi]$, т.е. в смысле скал. произв. $\int_{-\pi}^{\pi} fg dx$

Система $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots\}$ - ортонорм. сист.

Пример. Полином Лежандра

$$P_0(x) = 1 \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

где $n \in N$ - ортог. сист. в $L_2[-1,1]$, где $(f,g) = \int_{-1}^{1} fgdx$. (Также $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$)

Доказательство. (Ортогональности)

Заметим (формула Лейбница) $\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}\big|_{x=\pm 1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Рассмотрим $Q_m(x)$ многочлен степени $m < n$.

Тогда

$$(Q_m, P_n) = \int_{-1}^{1} Q_m(x) \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} =$$
$$= Q_m \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_m' \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= Q_m' \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} Q_m'' \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= \cdots = (-1)^m Q_m^{(m)} \frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

В частности $\int_{-1}^{1} P_m P_n dx = 0$ при $m < n$, т.е. полиномы Лежандра ортогональны. □

Далее рассматриваем счётные ортогональные системы $\{e_k\} : e_k \neq 0$

Определение 6.3. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ ($e_k \neq 0$) - ортог. сист. в X_Π, $x \in X_\Pi$. Тогда $\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}$ назыв. коэф. Фурье x по системе $\{e_k\}$.

При этом элементу x ставится в соответсвие ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ - ряд Фурье.

Т.е. $x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

Определение 6.4. Частичная сумма ряда Фурье $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$

Замечание. Триг. ряд Фурье функции, инт. с квалратов является рядом Фурье в L_2.

Замечание. $\alpha_k e_k$ проекция x на e_k, если система конечна α_k - координата

Определение 6.5. Говорят, что x разложен в ряд Фурье и пишут $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, если $\|x - S_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Теорема 6.1 (T1)**.** Пусть $x \in X_\Pi$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e_k \Rightarrow A_k = \alpha_k$ (α_k - коэф. Ф.)

Доказательство. $x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e_k \Rightarrow (x, e_m) \underset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e_k, e_m) = A_m \|e_m\|^2$
$\Rightarrow A_m = \frac{(x,e_m)}{\|e_m\|^2} = \alpha_m$

Док-во (1): $|(x, e_m) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e_k, e_m)| = |(x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_K, e_m)| \le \|x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_k\| \|e_m\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (первая норма стремится к 0) □

Теорема 6.2 (Минимальное св-во коэфф. Фурье)**.** Пусть $\{e_k\}$ - ортогональная система, тогда

$$\min_{A_1,\dots,A_n} \|x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_k\| = \|x - S_n(x)\|$$

И выполняется

$$\|x - S_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k^2\| \tag{1}$$

Доказательство.

$$\underline{\|x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_k\|^2} = (x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} A_k e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} A_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{2k} (e_k, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} A_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \|e_k\|^2 =$$

$$= \underline{\|x\| + \sum_{k=1}^{n} (A_k \|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|})^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}}$$

Если в качестве A_k взять $\alpha_k = \frac{(x,e_k)}{\|e_k\|^2}$, то будет min

Подчёркнутое равенство при $A_k = \alpha_k$ даёт (1) □

Следствие 6.1. В условиях теоремы $\|x - S_{n+1}\| \le \|x - S_n\|$

Доказательство. Следует из (1) (вичитаем при n+1 и n) □

Теорема 6.3 (Т3)**.** Пусть $x \in X_{\Pi}$; α_k - коэф. Фурье по ортог. системе $\{e_k\}$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k^2\| \le \|x\|^2$ (Нерав. Бесселя)

Доказательство. Рассмотрим (1)

$$0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$ и получаем неравенство □

Следствие 6.2. В условиях теоремы $\alpha_k \|e_k\| \to 0$ при $k \to \infty$

Теорема 6.4. В X_Γ ряд Фурье $\forall x \in X_\Gamma$ по любой ортогональной $\{e_k\}$ сходится.

Если $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, то $(x - x_0, e_k) = 0 \ \forall k$

Доказательство.

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = (\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \quad (2)$$

Из неравенства Бесселя следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$

$\Rightarrow$ фундаментальна последовательность $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$

Из (2) $\Rightarrow$ фундаментальность $\{S_n\}$

Из X_Γ - полно $\Rightarrow$ $\{S_n\}$ сходится к $x_0 \in X_\Gamma$

Рассмотрим $(x - x_0, e_k) = (x, e_k) - (x_0, e_k) = (x, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (e_n, e_k) = (x, e_k) - \alpha_k (e_k, e_k) = (x, e_k) - \alpha_k \|e_k\|^2 = 0$ □

Теорема 6.5 (Т5)**.** Ортогональная система $\{e_k\}$ является полной в X_Π $\Leftrightarrow \forall x \in X_\Pi$ ряд Фурье сход. к x.

Доказательство. 1) Возьмём $x \in X_\Pi$. Пусть ряд Фурье сходится к x

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - S_n(x)\| = 0$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists n : \|x - S_n\| < \varepsilon$, что означает полноту.

2) Пусть система $\{e_k\}$ полна.

$\Rightarrow \forall x \in X_\Pi$ $\underline{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n}$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon$

Минимальное св-во коэф. Фурье $\Rightarrow \|x - S_n\| < \varepsilon$

Следствие из Т2 $\Rightarrow$ $\underline{\|x - S_m\| < \varepsilon \ \forall m \ge n}$

Подчёркнутое означает что ряд Фурье сходится к x. □

Теорема 6.6 (Т6)**.** Ряд Фурье элемента $x \in X_\Pi$ сходится к нему $\Leftrightarrow$ для него полняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$

Доказательство. Формула (1) из минимального св-ва коэф Фурье

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем нужный результат. $\square$

Следствие 6.3. Ортогональная система $\{e_k\}$ полна в X_Π

$\Leftrightarrow \forall$ элем. в X_Π выполняется равенство Парсеваля

$\Leftrightarrow$ Ряд Фурье $\forall x \in X_\Pi$ сходится к x

Теорема 6.7 (Т7)**.** Если ортогональная система $\{e_k\}$ из X_Π полная и коэф. Фурье для x равны нулю, то $x = 0$.

Доказательство. Из равентсва Парсеваля следует, что $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ $\square$

Следствие 6.4. Если коэф. Фурье элем. x_1 и $x_2 \in X_\Pi$ по полной ортог. сист $\{e_k\}$ равны между собой, то эти элементы равны.

Доказательство. Для элемента $x = x_2 - x_1$ коэф. Фурье $\frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(x_2 - x_1, e_k)}{\|e_k\|^2}$ будут нулевыми. Тогда $x_2 - x_1 = 0$. $\square$

Определение 6.6 (Замкнутость системы)**.** Ортогональная система $\{e_k\}$ в X_Π называется замкнутой, если в X_Π $\nexists x \neq 0 : (x, e_k) = 0 \; \forall k$.

Теорема 6.8. В X_Γ ортогональная система $\{e_k\}$ полна $\Leftrightarrow$ $\{e_k\}$ - замкнута

Доказательство. 1) Пусть $\{e_k\}$ - полна. Пусть $\exists x \neq 0 : (x, e_k) = 0 \; \forall k$

$\Rightarrow$ коэф. Фурье - нулевые, по Т7 $\Rightarrow$ $x = 0$ $\Rightarrow$ система замкнута 2) Пусть система $\{e_k\}$ - замкнута. Пусть $x \in X_\Gamma$, $x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ и $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

По Т4 $(x - x_0, e_k) = 0 \; \forall k$ $\Rightarrow x - x_0 = 0$ (т.к. замкнута)

$\Rightarrow x = x_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ и по Т5 система полна. $\square$

Определение 6.7. Пусть X - нормированное пространство. Счётная система $\{e_k\}$ называется базисом в X, если $\forall x \in x$ $\exists!$ представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j e_j$

Замечание. Базис - полная система, но не всякая полная система - базис.

Пример. Система $\{1, x, x^2, \dots, x^k, \dots\}$ не является базисом в $C[-1,1]$, т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x^k$, сходящийся на этом отрезке - диф. функция не существует для $|x|$ (не диф. функция).

Теорема 6.9 (T9)**.** Пусть $\{e_k\}$ - ортог. сист. в X_Π. Если $\{e_k\}$ - полн. то она базис.

Доказательство. Если $\{e_k\}$ - полная ортог. сист., то $\forall x \in X_\Pi \hookrightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ по T

Единственность следует из T1. □

Пример. Полные ортогональные системы:

1. Тригонометрическая система в $L_2[-\pi, \pi]$
2. Система полиномов Лежандра в $L_2[-1,1]$

7 Собственные интегралы, зависящие от параметра

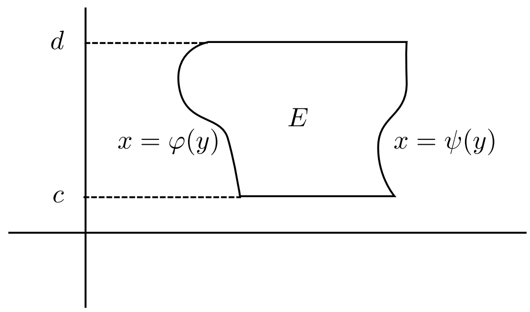
Теорема 7.1 (T1)**.** Пусть $f(x,y)$ - непр. в $[a,b] \times [c,d]$

$\Rightarrow\ I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ - непр. на $[c,d]$ (здесь y - параметр)

Доказательство. f - непр. на компакте $[a,b] \times [c,d]$, значит f - равномерно непр. на нём

$\Rightarrow\ \omega(\delta) \underset{\delta \to \infty}{\to} 0$ (модуль. непр.)

$\Rightarrow\ |I(y + \Delta y) - I(y)| \leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x,y)|dx \leq (b-a)\omega(\Delta y) \underset{\Delta y \to 0}{\to} 0$
$\Rightarrow\ I(y)$ - непр. на $[c,d]$. □



Теорема 7.2 (Т2)**.** Пусть $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ - непр. на $[c, d]$. $\varphi(y) \leq \psi(y)$ на $[c, d]$

$E = \{(x, y)\} : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$, $y \in [c, d]$, f(x,y) - непр. на E

$\Rightarrow \ I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ - непр. на $[c, d]$

Доказательство. Замена пременной $x = \varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y))$

$I(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y)), y)(\psi(y) - \varphi(y))dy$ - непр. на $[0, 1] \times [c, d]$ как суперпоз. непр.

По Т1 $I(y)$ - непр. функ. на $[c, d]$. $\square$

Теорема 7.3 (Т3 Об интегрировании под знаком интеграла)**.**

1. $f(x, y)$ - инт. по Риману на $[a, b] \times [c, d]$
2. $\int_a^b f(x, y)dx$ существует $\forall y \in [c, d]$
3. $\int_c^d f(x, y)dy$ существует $\forall x \in [a, b]$

$\Rightarrow \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx$

Доказательство. Утверждение следует из равенства кратного интегрела $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy$ двум повторным $\square$

Замечание. Если $f(x, y)$ непр. на $[a, b] \times [c, d]$, то верно заключение теоремы.

Теорема 7.4 (Т4 О дифференцировании интеграла)**.**

1. $f(x,y), f'_y(x,y)$ - непр. в $[a,b]\times[c,d]$
2. $E:\{(x,y):\varphi(y)\le x\le\psi(y), y\in[c,d]\}\subset[a,b]\times[c,d]$
3. $\exists\varphi'(y),\psi'(y)$ на $[c,d]$

Тогда существует

$\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right)' = \psi'(y)f(\psi(y),y)-\varphi'(y)f(\varphi(y),y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx$

Доказательство. Пусть $y,y_0\in[c,d]$. Обозначим $I(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} d(x,y)dx$

$$I(y)-I(y_0)=(\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)}+\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)}+\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)})f(x,y)dx-\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx=$$
$$=\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)dx+\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)}(f(x,y)-f(x,y_0))dx$$
$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx=$$
$$=\frac{1}{y-y_0}(\varphi(y_0)-\varphi(y))f(\tilde{x},y)\underset{y\to y_0}{\to}-\varphi'(y_0)f(\varphi(y_0),y_0)$$

(Использовали теорему о среднем, $\tilde{x}\in(\varphi(y),\varphi(y_0))$)

Аналогично для второго интеграла.

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)}(f(x,y)-f(x,y_0))dx=$$
$$=\frac{1}{y-y_0}\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0)dx=$$
$$=\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta(y-y_0))dx\underset{y\to y_0}{\to}\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f'_y(x,y_0)dx$$

Воспользовались Т1. □

8 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \quad -\infty<a<b\le+\infty,\ y\in Y \tag{1}$$

с единственной особенностью на верхнем пределе.

Это предполагает, что для любых $\eta \in (a,b)$ и $\forall y \in Y$ существует Риманов интеграл $\int_a^\eta f(x,y)dx$.

По умолчанию считаем, что условие выполняется.

В случае сходимости интеграла:

$$I(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x,y)dx \qquad \lim_{\eta \to b-0} \int_\eta^b f(x,y)dx = 0$$

Определение 8.1. Сходящийся на Y интеграл называется равномерно сходящимся на Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon \in (a,b):\ \forall \eta \in (\eta_\varepsilon, b);\ \forall y \in Y \hookrightarrow |\int_\eta^b f(x,y)dx| < \varepsilon$$

Определение 8.2 (Перефразирование)**.** Сходящийся на Y называется равномерно сходящимся, если

$$\lim_{\eta \to b-0} \sup_{y \in Y} |\int_\eta^b f(x,y)dx| = 0$$

Теорема 8.1 (Критерий Коши равномерной сходимости несобст. инт.)**.** Интеграл (1) сходится равномерно на $Y \Leftrightarrow$ выполняется условие Коши равномерной сходимости интеграла

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon \in (a,b):\ \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b),\ \forall y \in Y \hookrightarrow |\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

Доказательство.

1) Пусть интеграл сходится равномерно, т.е.

$$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon \in (a,b)}:\ \forall \eta \in (\eta_\varepsilon, b);\ \forall y \in Y \hookrightarrow |\int_\eta^b f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмём $\underline{\forall \eta', \eta'' \in (\eta_\varepsilon, b),\ \forall y \in Y}$

Тогда

$$\underline{|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx|} = |(\int_{\eta'}^{b} - \int_{\eta''}^{b}) f(x,y)dx| \leq$$
$$\leq |\int_{\eta'}^{b} f(x,y)dx| + |\int_{\eta''}^{b} f(x,y)dx| \underline{< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon}$$

2) Пусть выполняется условие Коши равномерной сходимости, т.е.

$$\underline{\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta_\varepsilon \in (a,b):\ \forall\eta'},\eta''\underline{\in(\eta,b),\ \forall y\in Y} \hookrightarrow |\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Перейдём к пределу при $\eta'' \to b-0$ (предел существует при $\forall y \in Y$, т.к из выполнения условия Коши равномерной сходимости следует условия Коши сходимости и, следовательно, сходимость)

$$\underline{|\int_{\eta'}^{b} f(x,y)dx| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$$

Подчёркнутое означает сходимость интеграла. □

Теорема 8.2 (Т2 Признак Вейерштрасса равн. сход. несобст. инт.). Пусть $\exists\varphi(x):\ \varphi(x)$ - инт. по Риману на $[a,\eta]$ $\forall\eta \in (a,b)$ $|f(x,y)| \le \varphi(x)$ $\forall x\in[a,b),\ \forall y \in Y,\ \int_a^b \varphi(x)dx$ - сходится

$\Rightarrow$ (1) сходится равномерно на Y.

Доказательство. Возьмём $\underline{\forall\varepsilon > 0}$. Из сходимости $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует (кр. Коши), что $\underline{\exists\eta_\varepsilon \in (a,b):\ \forall\eta',\eta'' \in (\eta,b)} \hookrightarrow |\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx| < \varepsilon$

Но $\underline{\forall y\in Y \hookrightarrow |\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx|} \le |\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x,y)|dx| \le |\int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(x)dx|\underline{\le\varepsilon}$

Подчёркнутое означает равномерную сходимость интеграла (1). □

Определение 8.3 (Равномерная сходимость функции). $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(y)$ при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0}\sup_{y\in E}|f(x,y)-\varphi(y)| = 0$

Теорема 8.3 (Признак Дирихле равномерной сход. инт.). Пусть

1. $f(x,y)$ непр. на $[a,+\infty)\times Y$ по x и $\exists M > 0:\ |\int_a^\eta f(x,y)dx| < M$ $\forall\eta > a,\ \forall y\in Y$ (интеграл $\int_a^\eta$ - равномерно ограничен)
2. $\frac{\partial g}{\partial x}$ - непр. по x на $[a,+\infty)\times Y$

   $g(x,y)$ - монот. по x на $[a,+\infty)\times Y$
3. $g(x,y) \underset{y\in Y}{\rightrightarrows} 0$ при $x\to+\infty$

$\Rightarrow\ \int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сх. равн. на Y

Доказательство. Возьмём $\underline{\forall\varepsilon > 0}$. Т.к. $g(x,y) \underset{y\in Y}{\rightrightarrows} 0$ при $x\to\infty$, то $\underline{\exists\eta_\varepsilon > a}$: $\forall\eta > \eta_\varepsilon\ \forall y\in Y \hookrightarrow |g(\eta,y)| < \frac{\varepsilon}{6M}$

Возьмём $\underline{\forall \eta', \eta'' > \eta_\varepsilon,\ \forall y \in Y}$. Тогда

$$\underline{|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)dx|} = \int_{\eta'}^{\eta''} g(x,y)d\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)d\xi| =$$

$$= |g(x,y)\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)d\xi|_{\eta'}^{\eta''} - \int_{\eta'}^{\eta''}(\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)d\xi)g'_x(x,y)dx| \le$$

$$(\text{т.к.} \int_{\eta'}^{x} = \int_{a}^{x} - \int_{a}^{\eta'}) \quad \le |g(\eta'',y)|\cdot 2M + 2M|\int_{\eta'}^{\eta''}|g'_x(x,y)|dx| =$$

$$= |g(\eta'',y)2M + 2M|\int_{\eta'}^{\eta''} g'_x(x,y)dx \le 2M(2|g(\eta'',y)| + |g(\eta')|) <$$

$$\underline{< 2M(2\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{6M}) = \varepsilon}$$

Подчёркнутое означает равномерную сходимость интеграла. □

Теорема 8.4 (Признак Абеля (вне программы))**.** Пусть

1. $f(x,y)$ - непр. по x на $[a,+\infty)\times Y$, $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сх-ся равн. на Y
2. $\frac{\partial g}{\partial x}$ - непр. по x на $[a,+\infty)\times Y$, $g(x,y)$ монот. по x на $[a,+\infty)\times Y$

   $g(x,y)$ - равн. огр. (т.е. огр. на совокупн. пер. x и y на $[a,+\infty)\times Y$)

$\Rightarrow$ $\int_a^{\infty} fgdx$ - равн. сход. на Y

8.1 Свойства равномерно сходящихся интегралов

Теорема 8.5 (О непрерывности)**.** Пусть $f(x,y)$ непр. на $[a,b)\times[c,d]$

$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ - равн. сход. на $[c,d]$

$\Rightarrow$ $I(y)$ - непр. на $[c,d]$.

Доказательство. Возьмём $\underline{\forall y_0 \in [c,d]}$. Возьмём $\underline{\forall \varepsilon > 0}$. Т.к. $\int_a^b f(x,y)dx$ - сх. равн. на $[c,d]$, то $\exists \eta \in (a,b):\ \forall y \in [c,d] \hookrightarrow |\int_\eta^b f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$

Теперь $\int_a^\eta f(x,y)dx$ - собст. интеграл и непр. на $[c,d]$.

Тогда $\underline{\exists \delta > 0:\ \forall y \in U_\delta(y_0)} \hookrightarrow |\int_a^\eta f(x,y)dx - \int_a^\eta f(x,y_0)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$

Оценим

$$\underline{|I(y) - I(y_0)|} \le |\int_a^\eta f(x,y)dx - \int_a^\eta f(x,y_0)dx| +$$

$$+|\int_\eta^b f(x,y)dx| + |\int_\eta^b f(x,y_0)dx| \underline{< \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon}$$

$\square$

Теорема 8.6 (Об интегрировании несобственного интеграла)**.** В условиях предыдущей теоремы:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

Доказательство. Т.к. $f(x,y)$ - непр., то

$$\int_c^d (\int_a^\eta f(x,y)dx)dy = \int_a^\eta (\int_c^d f(x,y)dy)dx \qquad (1)$$

Но

$$|\int_c^d (\int_a^\eta f(x,y)dx)dy - \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy| \le$$
$$\le \int_c^d |\int_\eta^b f(x,y)dx|dy \le (d-c) \sup_{y\in[c,d]} |\int_\eta^b f(x,y)dx| \underset{\eta\to b-0}{\to} 0$$

Т.к. инт. $I(y)$ сход. равномерно.

Доказали, что $\lim_{\eta\to b-0} \int_c^d (\int_a^\eta f(x,y)dx)dy = \int_c^d (\int_a^b f dx)dy$

Переходя в (1) к пределу при $\eta \to b-0$ получаем нужный результат. $\square$

Теорема 8.7 (О дифф. собственного интеграла)**.**

Пусть $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ - непр. на $[a,b) \times [c,d]$.

Пусть $\exists y_0 \in [c,d] : \int_a^b f(x,y_0)dx$ - сход.

Пусть $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx$ - сход. равномерно на $[c,d]$

$\Rightarrow \ \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\int_{y_0}^y (\int_a^b f'_y(x,t)dx)dt = \overbrace{\int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))dx}^{(1)} =$$
$$= \underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{(3)} - \underbrace{\int_a^b f(x,y_0)dx}_{(2)}$$

(3) сходится т.к. сходятся (1) и (2).

Дифф. полученное равенство

$$\int_a^b f'_y(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx$$

□

9 Эйлеровы интегралы

Определение 9.1. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\ \ s>0$$

Св-ва:

1. Инт. сходится при $s>0$ и расх. при $s\le 0$

   Доказательство.

   $x^{s-1}e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{s-1} \ \Rightarrow\ \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ - сх. $s>0$, расх. $s\le 0$

   $x^{s-1}e^{-x} = o(e^{-\frac{x}{2}}) \ \Rightarrow\ \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ - сходится $\forall s$ □

2. $\Gamma(s)$ - непр. при $s>0$

   Доказательство.

   (a) $x^{s-1}e^{-x} \le x^{s_0-1}$, где $x\in(0,1]$, $s_1\ge s\ge s_0>0$

   $\Rightarrow\ I_1(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ - сх. равн. на $[s_0, s_1]$

   $\Rightarrow\ I_1(s)$ - непр. на $[s_0,s_1] \Rightarrow I_1(s)$ - непр. на $(0,+\infty)$

   (b) $x^{s-1}e^{-x} \le x^{s_1-1}e^{-x}$, где $x\in[1,+\infty)$, $0<s_0\le s\le s_1$

   $\Rightarrow\ I_2(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ - сх. равн. на $[s_0, s_1]$

   $\Rightarrow\ I_2(s)$ - непр. на $[s_0,s_1] \Rightarrow I_2(s)$ - непр. на $(0,+\infty)$

   $\Rightarrow\ \Gamma(s)$ - непр. на $(0,+\infty)$ □

3. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Доказательство.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^s de^{-x} =$$
$$= \underbrace{-x^s e^{-x}\big|_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s)$$

□

$(\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2 \dots \Gamma(n+1) = n!)$

Определение 9.2. Бета-функция Эйлера:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Св-ва:

1. Интеграл сходится при $p > 0, q > 0$

   Доказательство.

   $x^{p-1}(1-x)^{p-1} \underset{x\to+0}{\sim} x^{p-1} \;\Rightarrow\; \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ - сх. при $p > 0$

   $x^{p-1}(1-x)^{p-1} \underset{x\to 1-0}{\sim} (1-x)^{q-1} \;\Rightarrow\; \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ - сх. при $q > 0$ □

2. $B(p,q) = B(q,p)$

   Доказательство.

   Замена переменных $1 - x = t$, $dx = -dt$

   $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(q,p)$ □

3. $B(p,q)$ - непр. на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

   Доказательство.

   Рассмотрим $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$, где $p_0 > 0, q_0 > 0$

   Верно $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$ при $x \in (0,1)$, $p \ge p_0, q \ge q_0$, при этом $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx$ - сход.

   $\Rightarrow B(p,q)$ - сх. равн. на $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$ (пр. Вейер.)

   $B(p,q)$ - непр. на $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $B(p,q)$ - непр. на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ $\square$

Замечание. Здесь применили теоремы для инт., завис. от двух параметров

4. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (без док.)
5. Формула дополнения $B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ $(a \in (0,1)$ (без док.)

10 Интеграл Дирихле

Лемма 10.1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}sign(\alpha)$$

Доказательство. (Через ядро Дирихле)

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \Big| \int_0^{\pi} \dots dx$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \overbrace{\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right)}^{(1)} \sin(n+\frac{1}{2})x dx}_{(2)} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx$$

(1) имеет предел при $x \to 0$ (расскладываем по Тейлору) $\Rightarrow$ можно доопределить до непр. на $[0,\pi]$

Тогда интеграл (2) при $n \to +\infty$ стремится к 0 (теорема Римана)

Переходим в последнем равенстве к пределеу при $n \to +\infty$ (замена $(n+\frac{1}{2})x = t$)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}dt$$

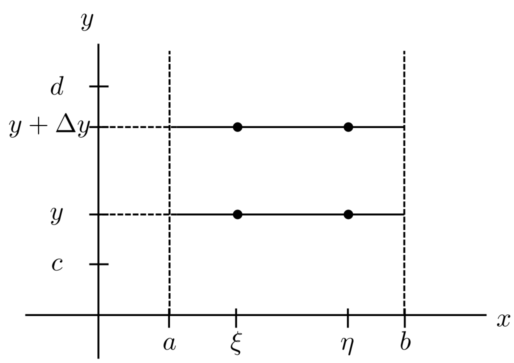
Но $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ - сход. $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

Из нечётности и постоянства незименности знака α $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}sign(\alpha)$ $\square$

11 Интеграл Фурье

Лемма 11.1. Пусть $f(x)$ - абс. инт. на (a, b) (конечном или беск.), $\varphi(x, y)$ - непр. и огран. на $(a, b) \times [c, d]$. Тогда

1. $I(y) = \int_a^b f(x)\varphi(x, y)dx$ - непр. на $[c, d]$
2. $\int_c^d (\int_a^b f(x)\varphi(x, y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x)\varphi(x, y)dy)dx$



Доказательство. (Для 2-х особ. на концах)

1) Пусть $\varphi(x, y) \le M$ на $(a, b) \times [c, d]$

Возьмём $\underline{\forall \varepsilon > 0}$. Т.к. $f(x)$ - абс. инт., то $\exists \xi, \eta \in (a, b)$: $\int_a^\xi |f(x)|dx < k\varepsilon$, $\int_\eta^b |f(x)|dx < k\varepsilon$

Рассмотрим $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y) = (\int_a^\xi + \int_\xi^\eta + \int_\eta^b) f(x)(\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y))dx$

Оценка $|\Delta I| < 2Mk\varepsilon + \omega(\Delta y, \varphi, \Pi) \int_a^b |f(x)|dx + 2Mk\varepsilon$ $(\Pi = [\xi, \eta] \times [c, d])$

Т.к. $\varphi(x, y)$ - непр. на Π, то $\varphi(x, y)$ - равн. непр. на Π

$\underline{\exists \delta > 0}$: $\forall \Delta y < \delta \hookrightarrow |\omega(\Delta y, \varphi, \Pi)| < k\varepsilon$

Тогда $|\Delta I| < 4Mk\varepsilon + \int_a^b |f(x)|dxk\varepsilon = k\varepsilon(4M + \int_a^b |f(x)|dx)$

Если $k = \frac{1}{4M + \int_a^b |f(x)|dx}$, то получим $\underline{|\Delta I| < \varepsilon}$

Подчёркнутое означает непрерывность $I(y)$.

2) Доказана теорема о том, что любая абс. инт. функция $f(x)$ может быть приближена на $[a, b]$ ступенчатой функцией $\psi(x)$ по норме $\| \cdot \|_1$ (интеграл от модуля) сколь угодно точно. Но ступенчатая функция может быть приближена непрерывной $f_\varepsilon(x)$ по норме $\| \cdot \|_1$, сколь угодно точно, если "исправить"ступеньку на трапецию. (_|‾|_ → _/‾_)

Таким образом $\forall\varepsilon > 0\ \exists f_\varepsilon(x) : \int_a^b |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \varepsilon$

При этом $f_\varepsilon(x)$ - непр. и равна нулю вне некоторого $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$

Тогда $f_\varepsilon(x)\varphi(x,y)$ - непр. на $[\alpha,\beta] \times [c,d] \subset (a,b) \times [c,d]$ и

$$\int_c^d (\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x,y)dx)dy = \int_a^b f_\varepsilon(x)(\int_c^d \varphi(x,y)dy)dx$$

Покажем, что перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве получим утверждение леммы. Действительно

$$\int_c^d (\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x,y)dx)dy \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_c^d (\int_a^b f(x)\varphi(x,y)dx)dy$$

т.к. $|\int_c^d(\int_a^b(f(x)-f_\varepsilon(x))\varphi(x,y)dx)dy| \le M(d-c)\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|dx \le M(d-c)\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$

Аналогично $\int_a^b(f_\varepsilon(x)\int_c^d \varphi(x,y)dy)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_a^b(\int_c^d f(x)\varphi(x,y)dy)dx$ □

Определение 11.1. Пусть $f(x)$ - абс. инт. на $(-\infty,+\infty)$. Тогда:

$$S(x) = S(x,f) = \int_0^{+\infty} (a(y)\cos xy + b(y)\sin xy)dy$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos tydt \qquad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin tydt$$

называется интегралом Фурье функции $f(x)$

Замечание. Интеграл Фурье - аналог ряда Фурье для функции определённой на $(-\infty,+\infty)$, $a(y), b(y)$ - аналоги коэф. Фурье

Лемма 11.2. Пусть $f(x)$ - абс. инт. $(-\infty,+\infty)$ - непр. на $(-\infty,+\infty)$. Тогда

1. $a(y), b(y)$ - непр. на $(-\infty, +\infty$
2. $\lim_{y\to\pm\infty} a(y) = \lim_{y\to\pm\infty} b(y) = 0$

Доказательство.

1. Следует из леммы 1
2. Следует из Теоремы Римана

□

Теорема 11.1 (О сходимости интеграла Фурье к функции)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$.

Пусть в точке x_0 $\exists f(x_0 \pm 0), f'_\pm(x_0)$

$\Rightarrow\ S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Доказательство. Преобразуем инт. Фурье (подставляем a и b):

$$S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos y(x-t)dt\right)dy$$

Рассмотрим $S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos y(x-t)dt\right)dy$ - аналог. част. суммы Фурье

Применяя лемму 1, получим

$$\begin{aligned}
S_\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{\eta}\cos y(x-t)dt\right)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}dt = \\
\langle t-x=u\rangle\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin\eta u}{u}du = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underset{t=-u}{\int_{-\infty}^{0}} + \underset{t=u}{\int_{0}^{+\infty}}\right) f(x+u)\frac{\sin\eta u}{u}du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\eta t}{t}dy
\end{aligned}$$

В точке x_0 $\exists f(x_0 \pm 0), f'_\pm(x_0)$. Тогда (используя инт. Дирихле)

$$\begin{aligned}
&S_\eta(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\eta t}{t}dt - \\
&- \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0+0)+f(x_0-0))\frac{\sin\eta t}{t}dt = \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0+t)-f(x_0+0))\frac{\sin\eta t}{t}dt}_{I^+} + \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0-t)-f(x_0-0))\frac{\sin\eta t}{t}dt}_{I^-}
\end{aligned}$$

$$I^+ = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right)(f(x_0+t) - f(x_0+0))\frac{\sin\eta t}{t}dt =$$
$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin\eta t dt}_{I_1^+} +$$
$$+ \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{f(x_0+t)}{t}\sin\eta t dt}_{I_2^+} - \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x_0+0)\frac{\sin\eta t}{t}dt}_{I_3^+}$$

По теореме Римана $I_1^+ \underset{\eta\to\infty}{\to} 0$ (т.к. $\exists f'_+(x_0)$, $I_2^+ \underset{\eta\to\infty}{\to} 0$

Преобразуем $I_3^+ \underset{\eta t = u}{=} f(x_0+0)\int_\eta^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du \underset{\eta\to\infty}{0}$, т.к. это остаток сходящегося интеграла Дирихле.

$\Rightarrow \ I^+ = I_1^+ + I_2^+ + I_3^+ \underset{\eta\to\infty}{\to} 0$. Аналогичо I^-.

$\Rightarrow S_\eta(x_0) \underset{\eta\to\infty}{\to} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-)}{2}$ □

Определение 11.2. Пусть $f(x)$ - инт. в собственном или несобственном смысле на произвольном $[\eta, \eta]$.

Тогда интеграл $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx$ называется интегралом в смысле главного значения.

Замечание. Если $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то $\exists\ v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, но не наоборот

Пример. Функции $\sin x$ и x

Пусть $f(x)$ - абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$, непр., в любой точке существует одностор. производная.

Тогда по теореме:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(x-t)dt\right)dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt\right)dy$$

Также:

$$0 = v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)dt\right)dy$$

Умножаем на i и складываем с предыдущим:

Определение 11.3.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt \right) dy \qquad (0)$$

- комплексная запись инт. Фурье

12 Преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ - абс. инт и непр. на $(-\infty, +\infty)$, в каждой точке существуют $f'_{\pm}$

Тогда перепишем (0) в виде

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) e^{iyx} dy \qquad (1)$$

Определение 12.1.

$$F[f](y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

называется преобразованием Фурье функции $f(x)$

Определение 12.2.

$$F^{-1}[f](y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx$$

называется обратным преобразованием Фурье функции $f(x)$

Теорема 12.1 (T1)**.** Пусть $f(x)$ абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$, непр. и меет обе одностор. произв. в любой точке

$\Rightarrow \; F^{-1}[F[f]] = f; F[F^{-1}[f]] = f$

Доказательство. Первая формула совпадает с (1).

Формулу (0) можно записать поменяв $(x - t)$ на $(t - x)$ т.е.

$$f(x) = v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(t-x)} dt dy =$$
$$= v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt \right) dt = F[F^{-1}[f]]$$

□

12.1 Св-ва преобр. Фурье абс. инт. функций

1. $F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$
2. $F[f](y)$ - непр. на $(-\infty, +\infty)$
3. $F[f](y) \underset{y\to\infty}{\to} 0$
4. $F[f](y)$ - огран. на $(-\infty, +\infty)$

Доказательство.

1. Из свойства интеграла
2. Из леммы 2 раздела 'Интеграл Фурье' , т.к. $F[f](y) = (a(t) - ib(t))\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
3. Аналогично второму
4. $|F[f](y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \underbrace{|e^{-ixy}|}_{1} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$

□

12.2 Преобразование производной

Теорема 12.2 (Т2 Преобразование Фурье производной)**.** Пусть $f(x)$ - абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$, $f'(x)$ - непр. и абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow\ F[f'](y) = iyF[f](y),\ y \in (-\infty, +\infty)$

Доказательство.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

Т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)dt$ - сход., то $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$

Эти пределы равны 0, т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ - сход.

Тогда

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = iyF[f](y)$$

□

Следствие 12.1. Пусть $f(x)$ абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка n влюкчительно и $f^{(n)}(x)$ - непр. как $(-\infty, +\infty)$. Тогда

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y) \tag{2}$$

$$|F[f](y)| \leq \frac{M}{|y|^n} \qquad M = \sup_{(-\infty,+\infty)} |F[f^{(n)}]| \tag{3}$$

Доказательство. Применяя n раз теорему получаем (2). Оценка следует из (2) □

Теорема 12.3 (Т3 Производная от преобразования)**.**

Пусть $f(x)$ - непр. на $(-\infty, +\infty)$, а $xf(x)$ - абс. инт на $(-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \ \exists \frac{d}{dy} F[f](y) = F[-ixfx()](y)$

Доказательство. Из абс. сход $xf(x)$ и непр. $f(x)$ следует абс. инт. $f(x)$.

Тогда $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$.

Продифф. по y:

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix) e^{-iyx} dx$$

Дифф. законно, т.к. инт. справа сх. равн. по признаку Вейерштрасса

$(|f(x)(-ix)e^{-ixy}| \leq |f(x)x|)$ □

Следствие 12.2. Пусть $f(x)$ - непр. на $(-\infty, +\infty)$. $x^n f(x)$ - абс. инт. на $(-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \ \exists \ \frac{d^n}{dy^n} F[f](y) = F[(-ix)^n f(x)](y)$

Доказательство. Применяем теорему n раз. □

13 Обобщённые функции

Определение 13.1. Носителем функции $\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ называется замыкание множества, на котором $\varphi(x) \neq 0$ и обозначается $supp\varphi$

Определение 13.2. Функция $\varphi(x)$ называется финитной, если её носитель ограничен.

Определение 13.3. Пространство D основных (пробных) функций - множество беск. дифф. финитных функций со сходимость, определённой следующим образом.

Определение 13.4. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется сход. в D к функции $\varphi(x)$, если

1. $\exists [a,b]: \ supp\varphi_n(x) \in [a,b] \ \forall n$
2. $\sup_{[a,b]} |\varphi_n^{(s)}(x) - \varphi^{(s)}(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall s = 0,1,2,\dots$

Пример.

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, |x| < a, a > 0 \\ 0, |x| \geq a \end{cases}$$

Докозательство беск. дифф. функции $\varphi_a(x)$ проводится аналогично док-ву беск. дифф. функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

(пределы всех производных в точках a равны 0)

Определение 13.5. Отображение $f: D \to \mathbb{R}$, будем называть функционалом.

Значение f на φ будем обозначать (f, φ)

Определение 13.6. Функционал f на D будем называть линейным, если $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$, для $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}; \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$

Определение 13.7. Функционал f на D называется непрерывным, если $\forall \{\varphi_n\}$ из $D: \ \varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$ в $D \hookrightarrow (f, \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\to} (f, \varphi)$

Определение 13.8. Всякий линейный непрерывный функционал на D называется обобщённой функцией.

Определение 13.9. Пространством обобщённых функций D' называется множество всех обобщённых функций с введённымы в нём операциями сложение и умножение на число и сходимостью по следующим правилам

1. $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1(f_1, \varphi) + \alpha_2(f_2, \varphi)\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in D$
2. Последовательность $\{f_n\}$ называется сходящейся в D' к $f \in D'$, если $(f_n, \varphi) \underset{n\to\infty}{\to} (f, \varphi)\ \forall \varphi \in D$

   Сходимость записываться $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ в D'

Определение 13.10. Функция $f(x)$ называется локально абс. инт., если $f(x)$ абс. инт на любом $[a, b]$

Определение 13.11. Функционал порождённый локально абс. инт. функцией $f(x)$ по правилу $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ называется регулярной обобщённой функцией и обозначается также f

Доказательство. (Коректности определения)

1. $(f, \varphi)\exists$ (см. лемму перед теоремой Римана)
2. Функционал линеен (следует из линейности интеграла)
3. Функционал непрерывен, т.к. из того, что $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$ в D следует $|(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| \leq \int_a^b |f||\varphi - \varphi_n|dx \leq \sup_{[a,b]} |\varphi - \varphi_n| \int_a^b |f|dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$

   $\Rightarrow\ (f, \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\to} (f, \varphi)$

□

Определение 13.12. Обобщённая функция, которая не является регульрной называется сингулярной.

Определение 13.13. Функционал вида $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$ называется δ-функцией (Дирака)

Теорема 13.1. δ-функция является сингулярной обобщённой функцией

Доказательство.

1. Линейность $(\delta, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi_2(0) = \alpha_1(\delta, \varphi_1) + \alpha_2(\delta, \varphi_2)$

2. Непрерывность $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi(x)$ в D

   $\Rightarrow\ \varphi_n(0) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi(0) \Leftrightarrow (\delta, \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} (\delta, \varphi)$

3. Сингулярность

   Предположим, что δ - регулярная и порождена локально абс. инт. функ. $f(x)$ и $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$

   Пусть $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, |x| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \\ 0, |x| > \varepsilon \end{cases}$

   Тогда $\frac{1}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$.

   Но $|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx| \leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)|\frac{1}{f}dx \underset{\varepsilon\to 0}{\rightarrow} 0$ (?!)

   $\Rightarrow$ δ - синг. обобщ. функ.

□

Замечание. Допускается вместо (δ, φ) писать $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$

Пример.

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, x \in [-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}] \\ 0, x \notin [-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}] \end{cases}$$

Доказать, что $\delta_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \delta(x)$ в D'

Доказательство.

$$(\delta_n, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2}\varphi(x)dx =$$
$$= \frac{n}{2}\frac{2}{n}\varphi(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

Здесь $\xi_n \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ □

Определение 13.14. $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$

Определение 13.15. Пусть $f \in D'$. Тогда $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$

Обоснование. Если f - регулярная обобщённая функция, порожд. непр. дифф. функцией $f(x)$, то $f'(x)$ - локально. абс. инт. и $(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' dx = -(f, \varphi')$

Докажем, что $f' \in D'$

1. $f' \in D \;\Rightarrow\; \exists (f, \varphi')$
2. f' - линейный, т.к. f - линейный
3. Если $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\varphi}$ в D, то

   $\varphi_n' \to \varphi'$ в $D \;\Rightarrow\;$ (т.к. f - непр) $(f, \varphi_n') \underset{n\to\infty}{\to} (f, \varphi')$

   $\Rightarrow (f', \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\to} (f', \varphi)$- непр.

$\square$

Замечание. Любая обобщённая функция имеет производную.

Пример. Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

$\Rightarrow\;\; \theta'(x) = \delta(x)$ в D'

Определение 13.16. Пусть $f \in D'$, $g(x)$ - беск. дифф. функция. Тогда $(fg, \varphi) = (f, \varphi g)$

Пример. Упростить в D': $\delta'(x)x$

$$(\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), \varphi(x)x) = -(\delta(x), \varphi'(x) + \varphi(x)) =$$
$$= -\varphi'(0)0 - \varphi(0) = -(\delta, \varphi)$$

$\Rightarrow \delta'(x)x = -\delta(x)$ в D'