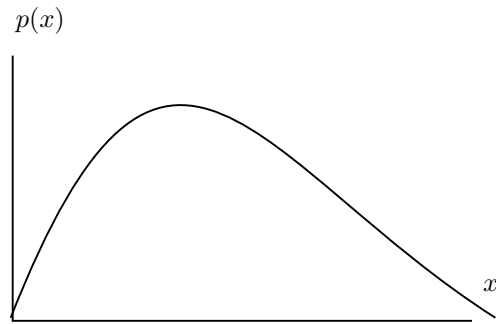


1 Занятие 1

1.1 Основные распределения в Мат Стат

1.1.1 Гамма распределение

$$\xi \sim \Gamma(\lambda, a) \quad \lambda > 0, a > 0$$
$$P(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad \{(0, +\infty)\}$$



$$\Gamma(S+1) = S\Gamma(S) \quad \Gamma(S) = \int_0^\infty x^{S-1} e^{-x} dx \quad x > 0$$
$$M[\Gamma] = \int_{-\infty}^\infty \rho(x) dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \frac{a}{\lambda}$$
$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{a^2 + a}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

Теорема 1.1 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_n независимы, $\xi_i \sim \Gamma(\lambda, a_i)$,
 $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n \sim \Gamma(\lambda, a_1 + \dots + a_n)$

Доказательство. $\xi_1 \sim \Gamma(\lambda, a_1)$. $\xi_2 \sim \Gamma(\lambda, a_2)$ - независимые, $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\eta < y) = P(\xi_1 + \xi_2 < y) = \iint_{x_1 + x_2 < y} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^y dx_2 \int_0^{y-x_2} \frac{\lambda^{a_1}}{\Gamma(a_1) x_1^{a_1-1} e^{-\lambda x_1}} \frac{\lambda^{a_2}}{\Gamma(a_2) x_2^{a_2-2} e^{-\lambda x_2}} dx_1 \\ \varphi(y) &= \Phi'(y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Распределение Парсона χ^2

$\xi_i \sim N(0, 1)$ - независимы, $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = \chi^2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\xi^2 < y) = \begin{cases} y \leq 0 & : 0 \\ y > 0 & : P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) \end{cases} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(-\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \{(0; +\infty)\} \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\xi^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \chi^2(n)$$

n - число степеней свободы

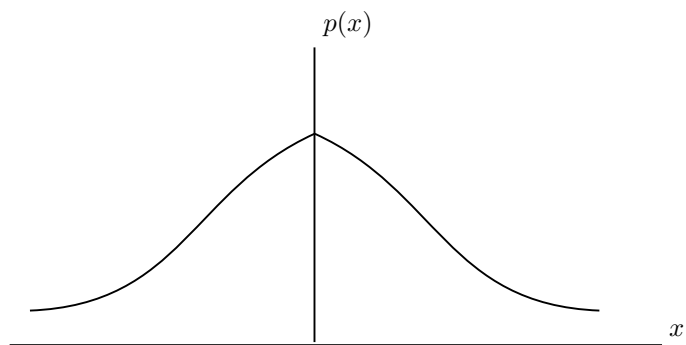
$$M[\eta] = \frac{a}{\lambda} = \frac{n/2}{1/2} = n$$

$$D[\eta] = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{n/2}{1/4} = 2n$$

Теорема 1.2 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_m - независ, $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$, $\xi_1 + \dots + \xi_n \sim \chi^2(n_1 + \dots + n_m)$

1.2 Распределение Стьюдента (Госсет)

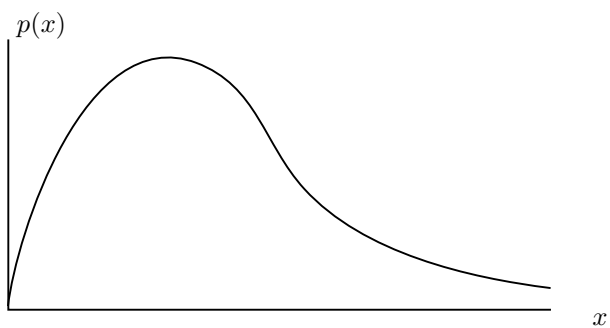
$\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимы, $\frac{\xi}{\sqrt{\eta/m}} \sim t(m)$



$$p(x) = \frac{(m)^{m/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{m}{2}) (x^2 + m)^{\frac{m+1}{2}}}$$

1.3 Распределение Фишера

$\xi \sim \chi^2(n)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимые, $\frac{\xi/n}{\eta/m} \sim F(n, m)$



1.4 Нормальное распределение

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a})}$$

$$\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, R)$$

Свойства:

- $\xi \sim N(0, 1), \eta = a\xi + b \sim N(b, a^2)$
- $\xi \sim N(\alpha, \sigma^2), \eta = a\xi + b \sim N(a\alpha + b, \sigma^2 a^2)$
- $\xi \sim N(\vec{0}, E), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b}, A : n \times n, \det A \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(t_1, \dots, t_n) &= P(\eta_1 < t_1, \dots, \eta_n < t_n) = P(\vec{\eta} < \vec{t}) = P(A\vec{\xi} + \vec{b} < \vec{t}) = \\ &= \int \dots \int_{A\vec{x} + \vec{b} < \vec{t}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &\quad \vec{y} = A\vec{x} + \vec{b} \quad J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \quad \frac{1}{J} = \det A \\ &= \int \dots \int_{\vec{y} < \vec{t}} p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} dy_1 \dots dy_n \\ &\quad \varphi(\vec{t}) = p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} \\ \varphi(\vec{t}) &= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\vec{y}-\vec{b}))^T (A^{-1}(\vec{y}-\vec{b}))} = \\ &= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(\vec{t}-\vec{b})^T (A^T)^{-1} A^{-1}(\vec{t}-\vec{b})} \\ &\quad K = AA^T \quad \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(\vec{b}, AA^T) \end{aligned}$$

- $\xi \sim N(\vec{a}, K), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(A\vec{a} + \vec{b}, AK A^T), A : n \times n, \det A \neq 0$
- Для $A : m \times n$ два предыдущих свойства так же верны
- ξ, η - независ $\Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$, в другую сторону не верно

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{независимые} \end{cases} \Leftrightarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{cov}(\xi, \eta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Лемма 1.1 (Лемма Фишера). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, E)$ и C ортогональная матрица, $\vec{\eta} = C\vec{\xi}$, тогда $\forall k = 1 \dots n-1$ сл. вел. $\varkappa = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \dots - \eta_k^2 \sim \chi^2(n-k)$ и вел $\varkappa, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\vec{\eta} &\sim N(\vec{0}, \underbrace{CC^T}_E) \\ \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 &= \vec{\eta}^T \vec{\eta} = \vec{\xi}^T C^T C \vec{\xi} = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \\ \varkappa &= \eta_{k+1}^2 + \dots + \eta_n^2 \\ \varkappa &= \chi^2(n-k)\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3 (Фишера). Пусть ξ_1, \dots, ξ_n независ и $\xi_i \sim N(a, \sigma^2)$, тогда:

1. $\varphi = \sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$
2. $\psi = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
3. φ и ψ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i - a}{\sigma} \right) \\ \frac{\xi_i - a}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma} \xi_i - \frac{a}{\sigma} \sim N\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}, \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2}\right) = N(0, 1) \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \vec{\eta} \sim N(\vec{0}, AA^T) = N(0, 1)\end{aligned}$$

1) Доказан

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\xi_i - a}{\sigma}}_{\eta_i \sim N(0,1)} - \underbrace{\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma}}_{\bar{\eta}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i^2 - 2\eta_i \bar{\eta} + (\bar{\eta})^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - 2\bar{\eta} \sum_{i=1}^n \eta_i + n(\bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - n(\bar{\eta})^2 \\ \eta_i &\sim N(0, 1) \quad \zeta^2 = n\bar{\eta}^2 \quad \zeta = \sqrt{n}\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i = A\vec{\eta} = \varphi\end{aligned}$$

$A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow C$ - ортог. матрица (Грамма-Шмидта)

(A получается строчкой матрицы C и тогда ζ - одна из координат в другом базисе и применима Лемма Фишера)

По лемме Фишера $\psi \sim \chi^2(n-1)$, ψ и $A\bar{\eta}$ независимы □

Теорема 1.4 (О проекции). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$, $L_1 : \dim L_1 = m_1$ и $L_2 : \dim L_2 = m_2$ два ортогональных подпространства \mathbb{R}^n , $\vec{\eta}_1$ - проекция $\vec{\xi}$ на L_1 , норм. распр., независ. и $\frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_1)$, $\frac{|\eta_2|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_2)$

Доказательство. $\vec{\eta}_1 = A_1 \vec{\xi} \sim N(\dots, \dots)$, $\vec{\zeta} = C \vec{\xi}$, C - ортогональная. $\vec{\zeta} \sim N(\vec{0}, C \sigma^2 E C^T) = N(\vec{0}, \sigma^2 E)$. Новый ортонормированный базис $e'_1 \dots e'_m$ в L_1 , $e'_{m+1} \dots e'_n$ в L_2 , $\vec{\eta}_1 = \zeta_1 e'_1 + \dots + \zeta_m e'_m$, $\vec{\eta}_2 = \zeta_{m+1} e'_{m+1} + \dots + \zeta_n e'_n$

$$\frac{\bar{\xi}}{\sigma} \sim N(\vec{0}, E) \quad \frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} = \sum \frac{\xi_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m_1)$$

□