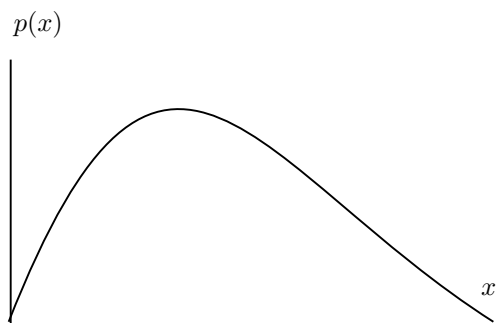


1 Занятие 1

1.1 Основные распределения в Мат Стат

1.1.1 Гамма распределение

$$\xi \sim \Gamma(\lambda, a) \quad \lambda > 0, a > 0$$
$$P(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad \{(0, +\infty)\}$$



$$\Gamma(S+1) = S\Gamma(S) \quad \Gamma(S) = \int_0^\infty x^{S-1} e^{-x} dx \quad x > 0$$
$$M[\Gamma] = \int_{-\infty}^\infty \rho(x) dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \frac{a}{\lambda}$$
$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{a^2 + a}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

Теорема 1.1 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_n независимы, $\xi_i \sim \Gamma(\lambda, a_i)$,
 $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n \sim \Gamma(\lambda, a_1 + \dots + a_n)$

Доказательство. $\xi_1 \sim \Gamma(\lambda, a_1)$. $\xi_2 \sim \Gamma(\lambda, a_2)$ - независимые, $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\eta < y) = P(\xi_1 + \xi_2 < y) = \iint_{x_1 + x_2 < y} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^y dx_2 \int_0^{y-x_2} \frac{\lambda^{a_1}}{\Gamma(a_1) x_1^{a_1-1} e^{-\lambda x_1}} \frac{\lambda^{a_2}}{\Gamma(a_2) x_2^{a_2-1} e^{-\lambda x_2}} dx_1 \\ \varphi(y) &= \Phi'(y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Распределение Парсона χ^2

$\xi_i \sim N(0, 1)$ - независимы, $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = \chi^2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\xi^2 < y) = \begin{cases} y \leq 0 & : 0 \\ y > 0 & : P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) \end{cases} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(-\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \{(0; +\infty)\} \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\xi^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \chi^2(n)$$

n - число степеней свободы

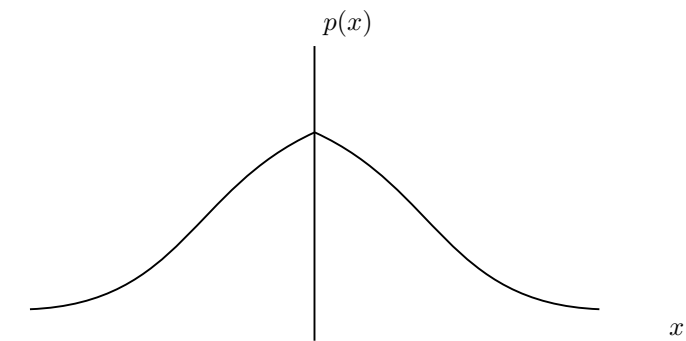
$$M[\eta] = \frac{a}{\lambda} = \frac{n/2}{1/2} = n$$

$$D[\eta] = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{n/2}{1/4} = 2n$$

Теорема 1.2 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_m - независ, $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$, $\xi_1 + \dots + \xi_n \sim \chi^2(n_1 + \dots + n_m)$

1.2 Распределение Стьюдента (Госсет)

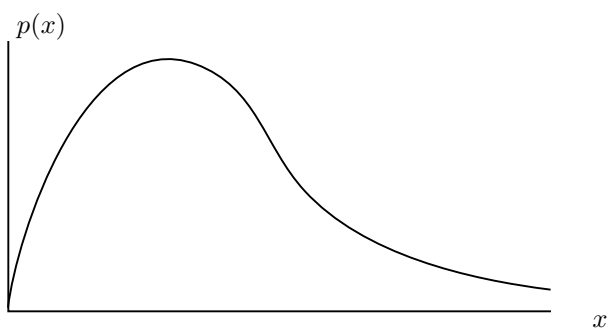
$\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимы, $\frac{\xi}{\sqrt{\eta/m}} \sim t(m)$



$$p(x) = \frac{(m)^{m/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{m}{2}) (x^2 + m)^{\frac{m+1}{2}}}$$

1.3 Распределение Фишера

$\xi \sim \chi^2(n)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимые, $\frac{\xi/n}{\eta/m} \sim F(n, m)$



1.4 Нормальное распределение

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a})}$$

$$\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, R)$$

Свойства:

- $\xi \sim N(0, 1), \eta = a\xi + b \sim N(b, a^2)$
- $\xi \sim N(\alpha, \sigma^2), \eta = a\xi + b \sim N(a\alpha + b, \sigma^2 a^2)$
- $\xi \sim N(\vec{0}, E), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b}, A : n \times n, \det A \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(t_1, \dots, t_n) &= P(\eta_1 < t_1, \dots, \eta_n < t_n) = P(\vec{\eta} < \vec{t}) = P(A\vec{\xi} + \vec{b} < \vec{t}) = \\ &= \int \dots \int_{A\vec{x} + \vec{b} < \vec{t}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &\quad \vec{y} = A\vec{x} + \vec{b} \quad J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \quad \frac{1}{J} = \det A \\ &= \int \dots \int_{\vec{y} < \vec{t}} p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} dy_1 \dots dy_n \\ &\quad \varphi(\vec{t}) = p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} \\ \varphi(\vec{t}) &= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\vec{y}-\vec{b}))^T (A^{-1}(\vec{y}-\vec{b}))} = \\ &= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(\vec{t}-\vec{b})^T (A^T)^{-1} A^{-1}(\vec{t}-\vec{b})} \\ K &= AA^T \quad \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(\vec{b}, AA^T) \end{aligned}$$

- $\xi \sim N(\vec{a}, K), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(A\vec{a} + \vec{b}, AK A^T), A : n \times n, \det A \neq 0$
- Для $A : m \times n$ два предыдущих свойства так же верны
- ξ, η - независ $\Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$, в другую сторону не верно

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{независимые} \end{cases} \Leftrightarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{cov}(\xi, \eta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Лемма 1.1 (Лемма Фишера). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, E)$ и C ортогональная матрица, $\vec{\eta} = C\vec{\xi}$, тогда $\forall k = 1 \dots n-1$ сл. вел. $\varkappa = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \dots - \eta_k^2 \sim \chi^2(n-k)$ и вел $\varkappa, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\vec{\eta} &\sim N(\vec{0}, \underbrace{CC^T}_E) \\ \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 &= \vec{\eta}^T \vec{\eta} = \vec{\xi}^T C^T C \vec{\xi} = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \\ \varkappa &= \eta_{k+1}^2 + \dots + \eta_n^2 \\ \varkappa &= \chi^2(n-k)\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3 (Фишера). Пусть ξ_1, \dots, ξ_n независ и $\xi_i \sim N(a, \sigma^2)$, тогда:

1. $\varphi = \sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$
2. $\psi = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
3. φ и ψ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i - a}{\sigma} \right) \\ \frac{\xi_i - a}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma} \xi_i - \frac{a}{\sigma} \sim N\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}, \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2}\right) = N(0, 1) \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \vec{\eta} \sim N(\vec{0}, AA^T) = N(0, 1)\end{aligned}$$

1) Доказан

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\xi_i - a}{\sigma}}_{\eta_i \sim N(0,1)} - \underbrace{\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma}}_{\bar{\eta}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i^2 - 2\eta_i \bar{\eta} + (\bar{\eta})^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - 2\bar{\eta} \sum_{i=1}^n \eta_i + n(\bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - n(\bar{\eta})^2 \\ \eta_i &\sim N(0, 1) \quad \zeta^2 = n\bar{\eta}^2 \quad \zeta = \sqrt{n}\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i = A\vec{\eta} = \varphi\end{aligned}$$

$A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow C$ - ортог. матрица (Грамма-Шмидта)

(A получается строчкой матрицы C и тогда ζ - одна из координат в другом базисе и применима Лемма Фишера)

По лемме Фишера $\psi \sim \chi^2(n-1)$, ψ и $A\bar{\eta}$ независ

□

Теорема 1.4 (О проекции). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$, $L_1 : \dim L_1 = m_1$ и $L_2 : \dim L_2 = m_2$ два ортогональных подпространства \mathbb{R}^n , $\vec{\eta}_1$ - проекция $\vec{\xi}$ на L_1 , норм. распр., независ. и $\frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_1)$, $\frac{|\eta_2|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_2)$

Доказательство. $\vec{\eta}_1 = A_1 \vec{\xi} \sim N(\dots, \dots)$, $\vec{\zeta} = C \vec{\xi}$, C - ортогональная. $\vec{\zeta} \sim N(\vec{0}, C \sigma^2 E C^T) = N(\vec{0}, \sigma^2 E)$. Новый ортонормированный базис $e'_1 \dots e'_m$ в L_1 , $e'_{m+1} \dots e'_n$ в L_2 , $\vec{\eta}_1 = \zeta_1 e'_1 + \dots + \zeta_m e'_m$, $\vec{\eta}_2 = \zeta_{m+1} e'_{m+1} + \dots + \zeta_n e'_n$

$$\frac{\vec{\xi}}{\sigma} \sim N(\vec{0}, E) \quad \frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} = \sum \frac{\xi_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m_1)$$

□

2 Порядковые случайные величины

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независ, $\xi_i \sim F(x)$

$$\eta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim? \quad \zeta = \max(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim?$$

$$\Phi(y) = P(\eta < y) = 1 - P(\eta \geq y) = 1 - P(\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq y) =$$

$$= 1 - P(\xi_1 \geq y, \dots, \xi_n \geq y) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\xi_i \geq y) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(\xi_i < y)) = 1 - (1 - F(y))^n$$

$$\Psi(z) = P(\zeta < z) = P(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) < z) =$$

$$= P(\xi_1 < z, \dots, \xi_n < z) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < z) = (F(z))^n$$

Порядковые величины:

$$\xi_{(1)} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

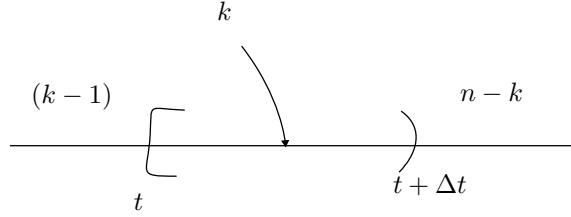
$$\xi_{(2)} = \min(\xi_i : \xi_i \neq \xi_{(1)})$$

$$\xi_{(3)} = \min(\xi_i : \xi_i \neq \xi_{(1)}, \xi_i \neq \xi_{(2)})$$

...

$$\xi_{(n)} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Положим $F(x)$ - непрерывна:



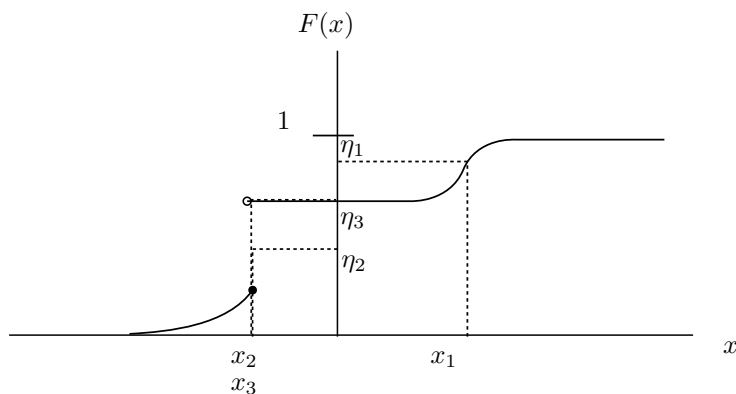
$$\begin{aligned}
 P(t \leq \xi_{(k)} < t + \Delta t) &= \\
 &= nP(t \leq \xi < t + \Delta t)C_{n-1}^{k-1}(P(\xi < t))^{k-1}(P(\xi \geq t + \Delta t))^{n-k}C_{n-k}^{n-k} = \\
 &= \varkappa(t + \Delta t) - \varkappa(t) \\
 n \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} C_{n-1}^{k-1}(F(t))^{k-1}(1 - F(t + \Delta t))^{n-k} &= \frac{\varkappa(t + \Delta t) - \varkappa(t)}{\Delta t} \\
 \varkappa(t) &= np(t)C_{n-1}^{k-1}(1 - F(t))^{n-k}(F(t))^{k-1}
 \end{aligned}$$

$\varkappa(t)$ - плотность распределения $\xi_{(k)}$, $p(t) = F'(t)$

$\xi_{(1)}$ и $\xi_{(n)}$ совместное распр

$$\begin{aligned}
 G(y, z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) \\
 P(\xi_{(n)} < z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) + P(\xi_{(1)} \geq y, \xi_{(n)} < z) \\
 \Psi(z) &= (F(z))^n = P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) + \underbrace{\prod_{i=1}^n P(y \leq \xi_i < z)}_{F(z) - F(y)} \\
 G(y, z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) = \begin{cases} (F(z))^n, & y > z \\ (F(z))^n - (F(z) - F(y))^n, & y \leq z \end{cases}
 \end{aligned}$$

3 Моделирование случайных величин



$\xi \sim F(x)$, $\eta \sim R(0, 1)$, $F(x) = \eta_1 \rightarrow x_1$, для псевдослучайных чисел вихрь Мерсенна

4 Основные задачи статистики

Явление \rightarrow математическая модель явления \rightarrow вероятностная модель явления ξ_i .

Выборка - n наблюдений над явлением \rightarrow описательная статистика (непараметрическая), выбор классов (e.g. $\varepsilon \sim N(a, \sigma^2)$) \rightarrow параметрическая статистика (e.g. $\varepsilon \sim N(a, \sigma^2)$, $a-?$, $b-?$)

Пример. Пытаемся понять как остывает чашка чая.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) + \varepsilon$$

Вероятностная модель явления с двумя случайными величинами (погрешности измерений ε и внутри k).

Распределения полагаем нормальными и так далее.

1. Определение параметров и оценка их точности
2. Проверка статистических гипотез

Характеристики модели θ , по выборке оценка $\bar{\theta}(\vec{x}_n)$, n - объём выборки.

Статистика - \forall борелевская функция от \vec{x}_n (борелевская $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \forall B \in \mathbb{B} \hookrightarrow g^{-1}(B) \in \mathbb{B}$).

Воспринимаем \vec{x}_n с двух сторон:

1. конкретные наблюдения над явлением

2. независимые случайные величины с распределением, одинаковым со случайными величинами в вероятностной модели

4.1 Свойства оценок

Θ - множество значений θ , $\theta \in \Theta$, $\tilde{\theta}(\vec{x}_n)$ - оценка θ по выборке

1. несмещённость $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow M[\tilde{\theta}(\vec{x}_n)] = \theta$
2. состоятельность $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0 P(|\tilde{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)
3. сравнение оценок $\tilde{\theta}_1$ эффективнее $\tilde{\theta}_2$, если $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\tilde{\theta}_1] \leq D[\tilde{\theta}_2]$ и $\exists \theta \in \Theta : D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2]$

Теорема 4.1 (Достаточное условие состоятельности). Если $\tilde{\theta}$ является несмещённой оценкой θ и $D[\tilde{\theta}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\tilde{\theta}$ является состоятельной оценкой ($\forall \theta \in \Theta$)

Доказательство. $M[\tilde{\theta}] = \theta$, по неравенству Чебышёва:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta} - \underbrace{M[\tilde{\theta}]}_{\theta}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[\tilde{\theta}]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

□

Задача (T1). Пытаемся понять по двум серийным номерам сколько всего танков.

$\xi \sim R(0, \theta)$, $\theta > 0$ вер. модель., \vec{x}_n - выборка объёмом n

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= 2\bar{x} = 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \tilde{\theta}_2 &= \min x_i \\ \tilde{\theta}_3 &= \max x_i \\ \tilde{\theta}_4 &= x_1 + \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=2}^n x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M[\xi] &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{x}{\theta} dx = \frac{\theta}{2} \\ M[\xi^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{\theta} dx = \frac{\theta^2}{3}\end{aligned}$$

Рассматриваем $\tilde{\theta}_1$:

Несмещённость $\forall \theta > 0 M[\tilde{\theta}] = \theta$:

$$M[\frac{\theta}{n} \sum_{i=1}^n x_i] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = 2M[\xi] = \theta \text{ несмещённая}$$

$D[\tilde{\theta}_1] = D[\frac{2}{n} \sum x_i] = \frac{1}{n^2} \sum D[x_i] = \frac{4}{n} D[\xi] = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, по достаточному условию оценка состоятельная

Рассматриваем $\tilde{\theta}_2$:

$$\begin{aligned} M[\tilde{\theta}_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy \\ \Phi(y) &= 1 - (1 - F(y))^n \quad \varphi(y) = n(1 - F(y))^{n-1} p(y) \\ M[\tilde{\theta}_2] &= \int_0^{\theta} n(1 - \frac{y}{\theta})^{n-1} \frac{1}{\theta} y dy = \\ &\quad t = 1 - \frac{y}{\theta} \\ &= - \int_1^0 n t^{n-1} (1 - t) \theta dt = \int_0^1 n \theta t^{n-1} dt - \int_0^1 n \theta t^n dt = \\ &= n \theta [1 - \frac{n}{n+1}] = \frac{\theta}{n+1} \quad \text{смещённая} \\ \tilde{\theta}_2' &= (n+1) x_{min} = (n+1) \tilde{\theta}_2 \quad \text{несмещённая} \\ M[\tilde{\theta}_2^2] &= \int_0^{\theta} n(1 - \frac{y}{\theta})^{n-1} \frac{1}{\theta} y^2 dy = \\ &= - \int_1^0 n t^{n-1} (1 - t)^2 \theta^2 dt = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \\ D[\tilde{\theta}_2] &= \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2 \left[\frac{2(n+1) - (n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \right] = \\ &= \theta^2 \left[\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{достаточное не выполняется} \\ D[\tilde{\theta}_2'] &= (n+1)^2 D[\tilde{\theta}_2] = \frac{\theta^2 n}{n+2} \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2'$ по определению

$$\forall \theta > 0 \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) &\geq P(\tilde{\theta}_2' > \theta + \varepsilon) = \\ &= P((n+1)x_{min} \geq \theta + \varepsilon) = P(x_{min} \geq \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}) = \\ &= 1 - P(x_{min} < \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}) = 1 - (1 - (1 - F(\frac{\theta + \varepsilon}{n+1}))^n) = \\ &= (1 - (\frac{\theta + \varepsilon}{\theta(n+1)}))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\theta + \varepsilon}{\theta}} > 0 \end{aligned}$$

Не является состоятельной!

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2$ по определению:

$$P(\tilde{\theta}_2 < \theta - \varepsilon) + \underbrace{P(\tilde{\theta}_2 > \theta + \varepsilon)}_{=0, \text{ т.к. } \tilde{\theta}_2 = x_{\min}} \\ P(x_{\min} < \theta - \varepsilon = \Phi(\theta - \varepsilon)) = 1 - (1 - \frac{\theta - \varepsilon}{\theta})^n = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Не является состоятельной!

Рассматриваем $\tilde{\theta}_3 = x_{\max}$:

$$M[\tilde{\theta}_3] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\psi(z)dz = \int_0^\theta n \frac{z^n}{\theta^n} dz = \frac{n}{n+1}\theta \quad \text{смешённая} \\ \Psi(z) = (F(z))^n \quad \psi(z) = n(F(z))^{n-1}p(z) = n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \{(0; \theta)\} \\ D[\tilde{\theta}_3] \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \\ D[\tilde{\theta}_3] \frac{(n+1)^2}{n^2} D[\tilde{\theta}_3] = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{состоятельная}$$

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2'$ по определению

$$\forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \\ P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) = P(x_{\max} < \theta - \varepsilon) + \underbrace{P(x_{\max} \geq \theta + \varepsilon)}_{=0} = \\ = (F(\theta - \varepsilon))^n = \begin{cases} 0 < \varepsilon < \theta : \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \varepsilon \geq \theta : (0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Является состоятельной!