

1 Формула Остроградского-Лиувилля (ФОЛ) для лин. сис.

$$\dot{X} = A(t)x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad a_{ij}(t) \in C(a, b)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решение системы

$$W(t) = |x_1(t) \dots x_n(t)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решение системы и $W(t)$ - определитель Вронского, тогда:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau} \quad \forall t \in (a, b), t_0 \in (a, b)$$

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} W(t) \qquad \qquad \qquad = a_{nn} W(t)$

1) решения лин. завис $\Rightarrow W(t) = 0$ на (a, b)

2) решения лин. независ:

$$\dot{x}_1 = Ax_1 \dots \dot{x}_n = Ax_n, \text{ ФМР } \Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{\Phi}(t) = A\Phi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dots & \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dots & \dot{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \dots & \dot{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1}$$

$$\dot{x}_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2}$$

...

$$\dot{x}_{1n} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn}$$

$$(\dot{x}_{11} \dot{x}_{12} \dots \dot{x}_{1n}) = a_{11}(x_{11} x_{12} \dots x_{1n}) + a_{12}(x_{21} x_{22} \dots x_{2n}) \\ + \dots + a_{1n}(x_{n1} x_{n2} \dots x_{nn})$$

$$W_1 = a_{11} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \\ = W(t) \quad = 0 \\ + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \\ = 0$$

$$\dot{W}(t) = \text{tr} A \cdot W(t) \quad W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau}$$

□

2 Формула Остроградского-Лиувилля для линейного уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$a_i(x)/a_n(x) \in C(a, b)$; y_1, y_2, \dots, y_n - решения

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть y_1, \dots, y_n - решения уравнения и $W(x)$ опр. Вронского, тогда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} d\xi}$$

Доказательство. 1) y_1, \dots, y_n лин завис $\Rightarrow W(x) = 0$

2) y_1, \dots, y_n - лин независ

$$\begin{aligned}
 t = x \quad x_1 = y \quad x_2 = y' \quad \dots \quad x_n = y^{n-1} \\
 \begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = y^n = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \dots - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 \end{cases} \\
 A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \\
 W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau} \quad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}
 \end{aligned}$$

□

Замечание.

$$\begin{aligned}
 W(x_0) = 0 &\rightarrow W(x) = 0 \text{ на } (a, b) \\
 W(x_0) \neq 0 &\rightarrow W(x) \neq 0 \text{ на } (a, b)
 \end{aligned}$$

Частные случаи:

1. $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, W(x) = y_1(x) = y_1(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_0(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi}$
2. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' y_1^2 = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi}$$

3 Схема решения уравн (линейного) второго порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}, \frac{f}{a_2} \in C(a, b)$$

1. однородное уравнение

(а) угадали $y_1(x)$ чаще всего в виде $P_n(x) e^{ax} x^a$

(б) $y_2(x)$ по ФОЛ $\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi} \rightarrow y_2(x)$ - линейно незав.
решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. неоднородное уравнение МВП $\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ - частное решение неоднородного

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

4 Качественное исследование лин. одноп. ур. 2-го порядка

4.1 Виды уравнений

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

1. нормальный вид

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \quad b_0(x), b_1(x) \in C(a, b)$$

2. самосопряжённый вид

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

$$p(x) > 0 \text{ на } (a, b), p(x) \in C'(a, b), q(x) \in C(a, b).$$

Как приводить?

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = y'' + b_1y' + b_0y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p'}{p} = b_1 \\ q = pb_0 \end{cases}$$

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} > 0, p(x) \in C'(a, b), q = b_0 e^{\int_{x_0}^x b_1(\xi) d\xi} \in C(a, b)$$

Пример. $xy'' + 2y' + y = 0$ нормальный вид $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ смотрим на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ (у нас второе) самосопр вид $(x^2y')' + xy = 0$, $p = x^2$, $q = x$

3. канонический вид

$$y'' + r(x)y = 0 \quad r(x) \in C(a, b)$$

$$(a) \quad b_0 \in C(a, b) \text{ и } b_1(x) \in C'(a, b) \text{ замена } y(x) = \varphi(x)z(x)$$

Пример. $b_1(x) = \frac{2}{x}$, $b_0 = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $b_1 \in C'(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} y' &= \varphi' z + \varphi z' & y'' &= \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z'' \\ x\varphi'' z + 2x\varphi' z' + x\varphi z'' + 2\varphi' z + 2\varphi z' + \varphi z &= 0 \end{aligned}$$

Зануляем коэффициент перед $z' \Rightarrow 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'}{\varphi} &= -\frac{1}{x} & \varphi(x) &= \frac{1}{x} \\ \varphi' &= -\frac{1}{x^2} & \varphi'' &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{2}{x^2} z + z'' - 2z \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} z &= 0 \\ z'' + \frac{1}{x} z &= 0 \end{aligned}$$

(b) $b_0(x)$ и $b_1(x) \in C(a, b)$, замена $t = \psi(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \dot{y}\psi' & y'' &= \dot{y}\psi'' + \ddot{y}\psi'^2 \\ py'' + p'y' + qy &= 0 & p\dot{y}\psi'' + p\ddot{y}\psi'^2 + p'\dot{y}\psi' + qy &= 0 \\ p\psi'' + p'\psi' &= 0 & (p\psi') &= 0 & p\psi' &= 1 \end{aligned}$$

$\psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{p(\xi)} \rightarrow$ строго монот и непр, \exists обратная функция
 $x = x(t)$ на (t_1, t_2)

$$\psi' = \frac{1}{p} \quad \psi'' = -\frac{p'}{p^2}$$

$$p \frac{1}{p^2} \ddot{y} + qy = 0$$

$$\ddot{y}(t) + q(x(t))p(x(t))y(t) = 0$$