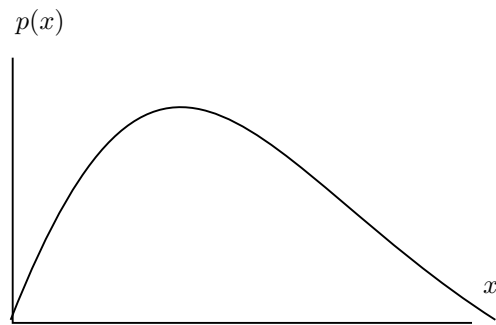


1 Занятие 1

1.1 Основные распределения в Мат Стат

1.1.1 Гамма распределение

$$\xi \sim \Gamma(\lambda, a) \quad \lambda > 0, a > 0$$
$$P(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad \{(0, +\infty)\}$$



$$\Gamma(S+1) = S\Gamma(S) \quad \Gamma(S) = \int_0^\infty x^{S-1} e^{-x} dx \quad x > 0$$
$$M[\Gamma] = \int_{-\infty}^\infty \rho(x) dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \frac{a}{\lambda}$$
$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{a^2 + a}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

Теорема 1.1 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_n независимы, $\xi_i \sim \Gamma(\lambda, a_i)$,
 $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n \sim \Gamma(\lambda, a_1 + \dots + a_n)$

Доказательство. $\xi_1 \sim \Gamma(\lambda, a_1)$. $\xi_2 \sim \Gamma(\lambda, a_2)$ - независимые, $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\eta < y) = P(\xi_1 + \xi_2 < y) = \iint_{x_1 + x_2 < y} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^y dx_2 \int_0^{y-x_2} \frac{\lambda^{a_1}}{\Gamma(a_1) x_1^{a_1-1} e^{-\lambda x_1}} \frac{\lambda^{a_2}}{\Gamma(a_2) x_2^{a_2-1} e^{-\lambda x_2}} dx_1 \\ \varphi(y) &= \Phi'(y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Распределение Пирсона χ^2

$\xi_i \sim N(0, 1)$ - независимы, $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = \chi^2$

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= P(\xi^2 < y) = \begin{cases} y \leq 0 & : 0 \\ y > 0 & : P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) \end{cases} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} F'(-\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \{(0; +\infty)\} \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\xi^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \chi^2(n)$$

n - число степеней свободы

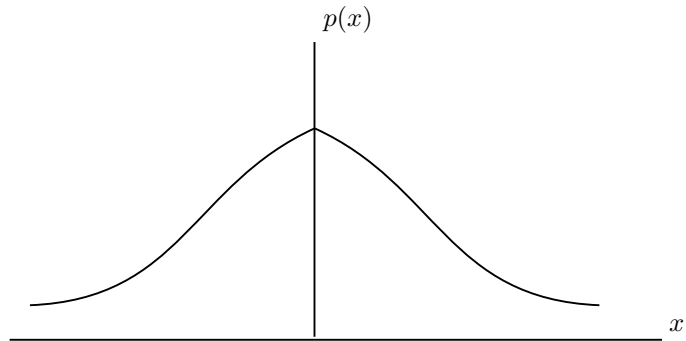
$$M[\eta] = \frac{a}{\lambda} = \frac{n/2}{1/2} = n$$

$$D[\eta] = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{n/2}{1/4} = 2n$$

Теорема 1.2 (Свойство суммы). ξ_1, \dots, ξ_m - независ, $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$, $\xi_1 + \dots + \xi_n \sim \chi^2(n_1 + \dots + n_m)$

1.2 Распределение Стьюдента (Госсет)

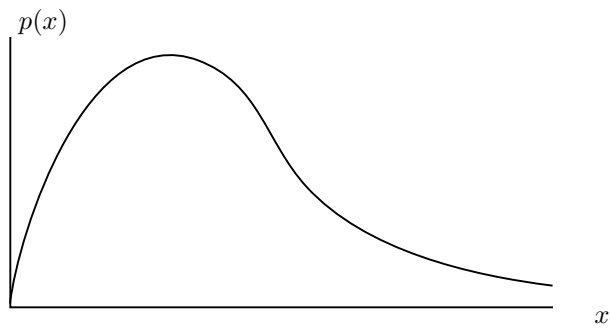
$\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимы, $\frac{\xi}{\sqrt{\eta/m}} \sim t(m)$



$$p(x) = \frac{(m)^{m/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{m}{2}) (x^2 + m)^{\frac{m+1}{2}}}$$

1.3 Распределение Фишера

$\xi \sim \chi^2(n)$, $\eta \sim \chi^2(m)$ - независимые, $\frac{\xi/n}{\eta/m} \sim F(n, m)$



1.4 Нормальное распределение

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a})}$$

$$\vec{\xi} \sim N(\vec{a}, R)$$

Свойства:

- $\xi \sim N(0, 1), \eta = a\xi + b \sim N(b, a^2)$
- $\xi \sim N(\alpha, \sigma^2), \eta = a\xi + b \sim N(a\alpha + b, \sigma^2 a^2)$
- $\xi \sim N(\vec{0}, E), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b}, A : n \times n, \det A \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1, \dots, t_n) &= P(\eta_1 < t_1, \dots, \eta_n < t_n) = P(\vec{\eta} < \vec{t}) = P(A\vec{\xi} + \vec{b} < \vec{t}) = \\
&= \int \dots \int_{A\vec{x} + \vec{b} < \vec{t}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
&\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b} \quad J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \quad \frac{1}{J} = \det A \\
&= \int \dots \int_{\vec{y} < \vec{t}} p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} dy_1 \dots dy_n \\
&\quad \varphi(\vec{t}) = p(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \frac{1}{|\det A|} \\
\varphi(\vec{t}) &= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))^T (A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))} = \\
&= \frac{1}{|\det A|} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(\vec{t} - \vec{b})^T (A^T)^{-1} A^{-1}(\vec{t} - \vec{b})} \\
K &= AA^T \quad \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(\vec{b}, AA^T)
\end{aligned}$$

- $\xi \sim N(\vec{a}, K), \vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \sim N(A\vec{a} + \vec{b}, AK A^T), A : n \times n, \det A \neq 0$
- Для $A : m \times n$ два предыдущих свойства так же верны
- ξ, η - независ $\Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$, в другую сторону не верно

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{независимые} \end{cases} \Leftrightarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \xi \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(a_2, \sigma_2^2) \\ \text{cov}(\xi, \eta) = 0 \end{cases} \Leftarrow (\xi, \eta) \sim N \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Лемма 1.1 (Лемма Фишера). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, E)$ и C ортогональная матрица, $\vec{\eta} = C\vec{\xi}$, тогда $\forall k = 1 \dots n-1$ сл. вел. $\varkappa = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \dots - \eta_k^2 \sim \chi^2(n-k)$ и вел $\varkappa, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\vec{\eta} &\sim N(\vec{0}, \underbrace{CC^T}_E) \\ \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 &= \vec{\eta}^T \vec{\eta} = \vec{\xi}^T C^T C \vec{\xi} = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \\ \varkappa &= \eta_{k-1}^2 + \dots + \eta_n^2 \\ \varkappa &= \chi^2(n-k)\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3 (Фишера). Пусть ξ_1, \dots, ξ_n независ и $\xi_i \sim N(a, \sigma^2)$, тогда:

1. $\varphi = \sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$
2. $\psi = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
3. φ и ψ независ.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum \xi_i - na}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{\xi_i - a}{\sigma} \right) \\ \frac{\xi_i - a}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma} \xi_i - \frac{a}{\sigma} \sim N\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}, \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2}\right) = N(0, 1) \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \eta_i = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \vec{\eta} \sim N(\vec{0}, AA^T) = N(0, 1)\end{aligned}$$

1) Доказан

$$\begin{aligned}\psi &= \sum \left(\underbrace{\frac{\xi_i - a}{\sigma}}_{\eta_i \sim N(0,1)} - \underbrace{\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma}}_{\bar{\eta}} \right)^2 = \sum (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum (\eta_i^2 - 2\eta_i \bar{\eta} + (\bar{\eta})^2) = \\ &= \sum \eta_i^2 - 2\bar{\eta} \sum \eta_i + n(\bar{\eta})^2 = \sum \eta_i^2 - n(\bar{\eta})^2 \\ \eta_i &\sim N(0, 1) \quad \zeta^2 = n\bar{\eta}^2 \quad \zeta = \sqrt{n}\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \eta_i = A\vec{\eta} = \varphi\end{aligned}$$

$A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow C$ - ортог. матрица (Грамма-Шмидта)

(A получается строчкой матрицы C и тогда ζ - одна из координат в другом базисе и применима Лемма Фишера)

По лемме Фишера $\psi \sim \chi^2(n-1)$, ψ и $A\vec{\eta}$ независ

□

Теорема 1.4 (О проекции). Пусть $\vec{\xi} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$, $L_1 : \dim L_1 = m_1$ и $L_2 : \dim L_2 = m_2$ два ортогональных подпространства \mathbb{R}^n , $\vec{\eta}_1$ - проекция $\vec{\xi}$ на L_1 , норм. распр., независ. и $\frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_1)$, $\frac{|\eta_2|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_2)$

Доказательство. $\vec{\eta}_1 = A_1 \vec{\xi} \sim N(\dots, \dots)$, $\vec{\zeta} = C \vec{\xi}$, C - ортогональная. $\vec{\zeta} \sim N(\vec{0}, C \sigma^2 E C^T) = N(\vec{0}, \sigma^2 E)$. Новый ортонормированный базис $e'_1 \dots e'_m$ в L_1 , $e'_{m+1} \dots e'_n$ в L_2 , $\vec{\eta}_1 = \zeta_1 e'_1 + \dots + \zeta_m e'_m$, $\vec{\eta}_2 = \zeta_{m+1} e'_{m+1} + \dots + \zeta_n e'_n$

$$\frac{\vec{\xi}}{\sigma} \sim N(\vec{0}, E) \quad \frac{|\eta_1|^2}{\sigma^2} = \sum \frac{\xi_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m_1)$$

□

2 Порядковые случайные величины

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независ., $\xi_i \sim F(x)$

$$\eta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim? \quad \zeta = \max(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim?$$

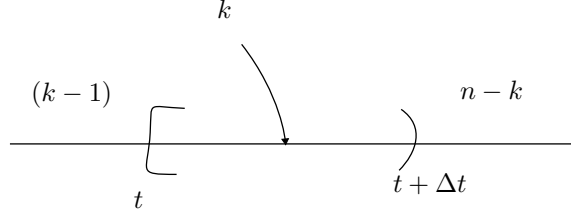
$$\begin{aligned} \Phi(y) &= P(\eta < y) = 1 - P(\eta \geq y) = 1 - P(\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq y) = \\ &= 1 - P(\xi_1 \geq y, \dots, \xi_n \geq y) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\xi_i \geq y) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(\xi_i < y)) = 1 - (1 - F(y))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= P(\zeta < z) = P(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) < z) = \\ &= P(\xi_1 < z, \dots, \xi_n < z) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < z) = (F(z))^n \end{aligned}$$

Порядковые величины:

$$\begin{aligned} \xi_{(1)} &= \min(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \xi_{(2)} &= \min(\xi_i : \xi_i \neq \xi_{(1)}) \\ \xi_{(3)} &= \min(\xi_i : \xi_i \neq \xi_{(1)}, \xi_i \neq \xi_{(2)}) \\ &\dots \\ \xi_{(n)} &= \max(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Положим $F(x)$ - непрерывна:



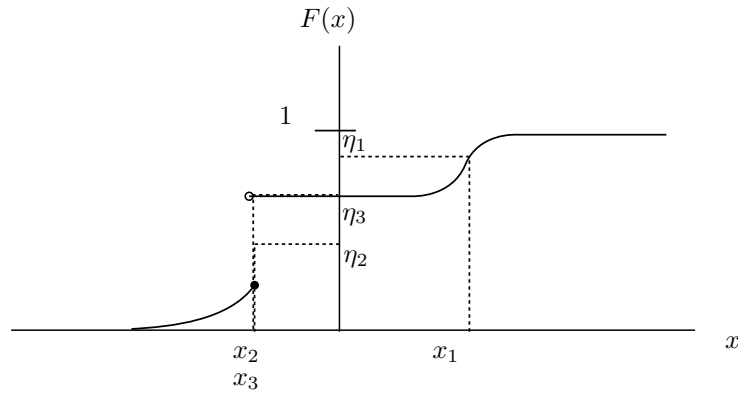
$$\begin{aligned}
P(t \leq \xi_{(k)} < t + \Delta t) &= \\
&= nP(t \leq \xi < t + \Delta t) C_{n-1}^{k-1} (P(\xi < t))^{k-1} (P(\xi \geq t + \Delta t))^{n-k} C_{n-k}^{n-k} = \\
&= \varkappa(t + \Delta t) - \varkappa(t) \\
n \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} C_{n-1}^{k-1} (F(t))^{k-1} (1 - F(t + \Delta t))^{n-k} &= \frac{\varkappa(t + \Delta t) - \varkappa(t)}{\Delta t} \\
\varkappa(t) &= np(t) C_{n-1}^{k-1} (1 - F(t))^{n-k} (F(t))^{k-1}
\end{aligned}$$

$\varkappa(t)$ - плотность распределения $\xi_{(k)}$, $p(t) = F'(t)$

$\xi_{(1)}$ и $\xi_{(n)}$ совместное распр

$$\begin{aligned}
G(y, z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) \\
P(\xi_{(n)} < z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) + P(\xi_{(1)} \geq y, \xi_{(n)} < z) \\
\Psi(z) &= (F(z))^n = P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) + \prod_{i=1}^n \underbrace{P(y \leq \xi_i < z)}_{F(z) - F(y)} \\
G(y, z) &= P(\xi_{(1)} < y, \xi_{(n)} < z) = \begin{cases} (F(z))^n, & y > z \\ (F(z))^n - (F(z) - F(y))^n, & y \leq z \end{cases}
\end{aligned}$$

3 Моделирование случайных величин



$\xi \sim F(x)$, $\eta \sim R(0,1)$, $F(x) = \eta_1 \rightarrow x_1$, для псевдослучайных чисел вихрь Мерсенна

4 Основные задачи статистики

Явление \rightarrow математическая модель явления \rightarrow вероятностная модель явления ξ_i .

Выборка - n наблюдений над явлением \rightarrow описательная статистика (непараметрическая), выбор классов (e.g. $\varepsilon \sim N(a, \sigma^2)$) \rightarrow параметрическая статистика (e.g. $\varepsilon \sim N(a, \sigma^2)$, $a-?$, $b-?$)

Пример. Пытаемся понять как остывает чашка чая.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) + \varepsilon$$

Вероятностная модель явления с двумя случайными величинами (погрешности измерений ε и внутри k).

Распределения полагаем нормальными и так далее.

1. Определение параметров и оценка их точности
2. Проверка статистических гипотез

Характеристики модели θ , по выборке оценка $\bar{\theta}(\vec{x}_n)$, n - объём выборки.

Статистика - \forall борелевская функция от \vec{x}_n (борелевская $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \forall B \in \mathbb{B} \hookrightarrow g^{-1}(B) \in \mathbb{B}$).

Воспринимаем \vec{x}_n с двух сторон:

1. конкретные наблюдения над явлением

2. независимые случайные величины с распределением, одинаковым со случайными величинами в вероятностной модели

4.1 Свойства оценок

Θ - множество значений θ , $\theta \in \Theta$, $\tilde{\theta}(\vec{x}_n)$ - оценка θ по выборке

1. несмещённость $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow M[\tilde{\theta}(\vec{x}_n)] = \theta$
2. состоятельность $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0 \ P(|\tilde{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)
3. сравнение оценок $\tilde{\theta}_1$ эффективнее $\tilde{\theta}_2$, если $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\tilde{\theta}_1] \leq D[\tilde{\theta}_2]$ и $\exists \theta \in \Theta : D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2]$

Теорема 4.1 (Достаточное условие состоятельности). Если $\tilde{\theta}$ является несмещённой оценкой θ и $D[\tilde{\theta}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\tilde{\theta}$ является состоятельной оценкой ($\forall \theta \in \Theta$)

Доказательство. $M[\tilde{\theta}] = \theta$, по неравенству Чебышёва:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta} - \underbrace{M[\tilde{\theta}]}_{\theta}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[\tilde{\theta}]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

□

Задача (T1). Пытаемся понять по двум серийным номерам сколько всего танков.

$\xi \sim R(0, \theta)$, $\theta > 0$ вер. модель., \vec{x}_n - выборка объёмом n

$$\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x} = 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\tilde{\theta}_2 = \min x_i$$

$$\tilde{\theta}_3 = \max x_i$$

$$\tilde{\theta}_4 = x_1 + \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=2}^n x_i$$

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{x}{\theta} dx = \frac{\theta}{2}$$

$$M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{\theta} dx = \frac{\theta^2}{3}$$

Рассматриваем $\tilde{\theta}_1$:

Несмещённость $\forall \theta > 0 M[\tilde{\theta}] = \theta$:

$$M[\frac{\theta}{n} \sum_{i=1}^n x_i] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = 2M[\xi] = \theta \text{ несмещённая}$$

$$D[\tilde{\theta}_1] = D[\frac{2}{n} \sum x_i] = \frac{1}{n^2} \sum D[x_i] = \frac{4}{n} D[\xi] = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ по достаточному условию оценка состоятельная}$$

Рассматриваем $\tilde{\theta}_2$:

$$\begin{aligned} M[\tilde{\theta}_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy \\ \Phi(y) &= 1 - (1 - F(y))^n \quad \varphi(y) = n(1 - F(y))^{n-1} p(y) \\ M[\tilde{\theta}_2] &= \int_0^{\theta} n(1 - \frac{y}{\theta})^{n-1} \frac{1}{\theta} y dy = \\ &\quad t = 1 - \frac{y}{\theta} \\ &= - \int_1^0 n t^{n-1} (1-t) \theta dt = \int_0^1 n \theta t^{n-1} dt - \int_0^1 n \theta t^n dt = \\ &= n \theta [1 - \frac{n}{n+1}] = \frac{\theta}{n+1} \quad \text{смещённая} \\ \tilde{\theta}_2' &= (n+1) x_{min} = (n+1) \tilde{\theta}_2 \quad \text{несмещённая} \\ M[\tilde{\theta}_2^2] &= \int_0^{\theta} n(1 - \frac{y}{\theta})^{n-1} \frac{1}{\theta} y^2 dy = \\ &= - \int_1^0 n t^{n-1} (1-t)^2 \theta^2 dt = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \\ D[\tilde{\theta}_2] &= \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2 \left[\frac{2(n+1) - (n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \right] = \\ &= \theta^2 \left[\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{достаточное не выполняется} \\ D[\tilde{\theta}_2'] &= (n+1)^2 D[\tilde{\theta}_2] = \frac{\theta^2 n}{n+2} \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2'$ по определению

$$\forall \theta > 0 \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) &\geq P(\tilde{\theta}_2' > \theta + \varepsilon) = \\ &= P((n+1)x_{min} \geq \theta + \varepsilon) = P(x_{min} \geq \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}) = \\ &= 1 - P(x_{min} < \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}) = 1 - (1 - (1 - F(\frac{\theta + \varepsilon}{n+1}))^n) = \\ &= (1 - (\frac{\theta + \varepsilon}{\theta(n+1)}))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\theta + \varepsilon}{\theta}} > 0 \end{aligned}$$

Не является состоятельной!

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2$ по определению:

$$P(\tilde{\theta}_2 < \theta - \varepsilon) + \underbrace{P(\tilde{\theta}_2 > \theta + \varepsilon)}_{=0, \text{ т.к. } \tilde{\theta}_2 = x_{min}} \\ P(x_{min} < \theta - \varepsilon = \Phi(\theta - \varepsilon)) = 1 - (1 - \frac{\theta - \varepsilon}{\theta})^n = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Не является состоятельной!

Рассматриваем $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$:

$$M[\tilde{\theta}_3] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\psi(z)dz = \int_0^\theta n \frac{z^n}{\theta^n} dz = \frac{n}{n+1}\theta \quad \text{смешённая} \\ \Psi(z) = (F(z))^n \quad \psi(z) = n(F(z))^{n-1}p(z) = n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \{(0; \theta)\} \\ D[\tilde{\theta}_3] \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \\ D[\tilde{\theta}_3] \frac{(n+1)^2}{n^2} D[\tilde{\theta}_3] = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{состоятельная}$$

Смотрим состоятельность $\tilde{\theta}_2'$ по определению

$$\forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \\ P(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon) = P(x_{max} < \theta - \varepsilon) + \underbrace{P(x_{max} \geq \theta + \varepsilon)}_{=0} = \\ = (F(\theta - \varepsilon))^n = \begin{cases} 0 < \varepsilon < \theta : \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \varepsilon \geq \theta : (0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Является состоятельной!

Рассматриваем $\tilde{\theta}_4$:

$$M[\tilde{\theta}_4] = M[x_1 + \sum_{i=2}^n x_i] = M[x_1] + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta \\ D[\tilde{\theta}_4] = D[\xi] + \frac{1}{(n-1)^2} (n-1) D[\xi] = \frac{\theta^2}{12} \frac{n}{n-1} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Достаточное усл. не работает.

Используем теорему $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$.

И ЗБЧ Хинчина: ξ_1, \dots, ξ_n незав., одинак распр. $\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} M[\xi]$.

$$\begin{aligned} x_1 &\xrightarrow{P} x_1 & \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i &\xrightarrow{P} \frac{\theta}{2} \\ \tilde{\theta}_4 &\xrightarrow{P} x_1 + \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Не состоятельна!

Адекватные остались $\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x}$, $\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} x_{max}$

$$D[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{3n} > D[\tilde{\theta}_3'] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Лучшая оценка $\tilde{\theta}_3$.

5 Оптимальность и эффективность оценок

Определение 5.1. Несмещённая оценка $\tilde{\theta}(\vec{x}_n)$ характеристики θ называется оптимальной $\tilde{\theta}_{opt}$ если для $\forall \theta \in \Theta \Rightarrow D[\tilde{\theta}_{opt}] = \inf D[\tilde{\theta}]$, \inf по всем несмещённым оценкам θ .

Теорема 5.1 (Единственность оптимальной оценки). Если оптимальная оценка существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$ разные оптимальные оценки

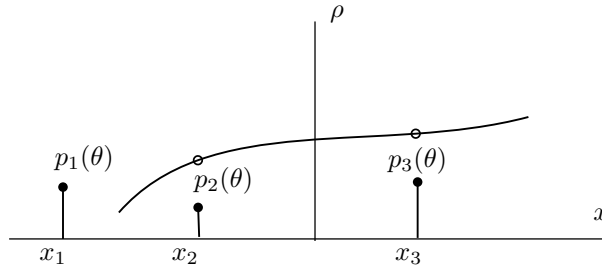
$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_3 &= \frac{\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2}{2} & M[\tilde{\theta}_3] &= \theta \\ D[\tilde{\theta}_3] &= \frac{1}{4}D[\tilde{\theta}_1] + D[\tilde{\theta}_2] + \frac{1}{2}cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}D[\tilde{\theta}_1] + \frac{1}{2}cos(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \\ D[a\xi + b\eta] &= a^2D[\xi] + b^2D[\eta] + 2abcov(\xi, \eta) \\ |cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)| &\leq \sqrt{D\tilde{\theta}_1 D\tilde{\theta}_2} = D[\tilde{\theta}_1] \\ D[\tilde{\theta}_3] &\leq D[\tilde{\theta}_1] & D[\tilde{\theta}_3] &= D[\tilde{\theta}_1] \\ cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) &= D[\tilde{\theta}_1] & \Rightarrow & r = 1 \Leftrightarrow \tilde{\theta}_1 = a\tilde{\theta}_2 + b \\ M[\tilde{\theta}_1] &= M[\tilde{\theta}_2] = \theta & D[\tilde{\theta}_1] &= D[\tilde{\theta}_2] \\ \begin{cases} \theta = a\theta + b \\ a^2D[\tilde{\theta}_2] = D[\tilde{\theta}_2] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 \end{aligned}$$

Противоречие.

□

Будем рассматривать параметрические вероятностные модели:

$$\begin{aligned}\xi &\sim \rho(x, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, x \in A(\theta) \\ \xi &\sim \rho(x, \vec{\theta}), \vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m, x \in A(\vec{\theta}) \\ \rho(x, \theta) &= \underbrace{p(x, \theta)\{E\}}_{\text{непр. часть}} + \underbrace{\sum_k p_k(\theta)\{x_k\}}_{\text{дискр. часть}}\end{aligned}$$



5.1 Информация Фишера

$$\begin{aligned}I(\theta) &= M \left[\left(\frac{\partial \ln \rho(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \\ &= \int_E \left(\frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x, \theta) dx + \sum_k \left(\frac{\partial \ln p_k(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p_k(\theta)\end{aligned}$$

$I(\vec{\theta})$ - информационная матрица Фишера

$$I_{ij}(\vec{\theta}) = M \left[\frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right]$$

Определение 5.2. Вероятностная модель $\xi \sim \zeta(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ называется регулярной, если

1. $\rho(x, \theta)$ непр дифф по θ на Θ
2. $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_A \rho(x, \theta) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial \theta} \rho(x, \theta) dx$ на Θ
3. $I(\theta)$ непр на Θ и $I(\theta) > 0$ на Θ

Определение 5.3. Вероятностная модель $\xi \sim \zeta(x, \vec{\theta})$, $\vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, $x \in A$ называется регулярной, если

1. $\rho(x, \vec{\theta})$ непр дифф по $\vec{\theta}$ на Θ
2. $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_A \rho(x, \vec{\theta}) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial \theta_i} \rho(x, \vec{\theta}) dx$ на Θ , $i = 1, \dots, m$
3. $I(\vec{\theta})$ положительно определена на Θ и $I_{ij}(\vec{\theta})$ непрер. на Θ

Определение 5.4. Вероятностная модель $\xi \sim \rho(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, $x \in A$ называется сильно регулярной, если эта модель регулярна и

1. $\rho(x, \theta)$ k раз непрерывно дифф по θ на Θ ($k \geq 2$)
2. $\frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \int_A \rho(x, \theta) dx = \int_A \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \rho(x, \theta) dx$, $l = 1, \dots, k$

Определение 5.5. Вероятностная модель $\xi \sim \zeta(x, \vec{\theta})$, $\vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, $x \in A$ называется сильно регулярной, если эта модель регулярна и

1. $\rho(x, \vec{\theta})$ k раз непрерывно дифф по θ на Θ ($k \geq 2$)
2. все производные по $\vec{\theta}$ перестановочные с \int по x

Определение 5.6. Статистика $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ называется регулярной оценкой функции $g(\theta)$, если она является несмещённой оценкой и

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) L(\vec{x}_n, \theta) d\vec{x}_n = \int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}_n, \theta) d\vec{x}_n$$

где $L(\vec{x}_n, \theta)$ - плотность распределения случайного вектора \vec{x}_n
 $(L(\vec{x}_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \theta))$, $B = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$

Теорема 5.2 (Достаточное условие регулярности оценки). Если модель регулярна, $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ является несмещ. оценкой $g(\theta)$ и $D[\tilde{g}(\vec{x}_n)]$ ограничена на \forall компакте из Θ по θ , тогда оценка регулярна.

5.2 Неравенство Крамера-Рао

Теорема 5.3. Пусть модель является регулярной, $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ является регулярной оценкой дифф функции $g(\theta)$. Тогда

$$\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\tilde{g}] \geq \frac{(g')^2(\theta)}{nI(\theta)}$$

Доказательство. $\xi \sim \rho(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $x \in A(\theta)$, \vec{x}_n независ. выборка

$L(\vec{x}_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \theta)$ - распр. выборки \vec{x}_n , $B = A \times \dots \times A$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int \dots \int_B L(\vec{x}, \theta) d\vec{x} = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0$$

в силу регулярности модели

$$\int \dots \int_B \frac{\partial}{\partial \theta} L d\vec{x} = 0$$

Домножаем и делим на L , там где $L = 0$ считаем что интеграл 0

$$\int_B \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} L d\vec{x} = 0$$

$$M[\tilde{g}] = g(\theta)$$

$$\int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) L(\vec{x}_n, \theta) d\vec{x}_n = g(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) L(\vec{x}_n, \theta) d\vec{x}_n = \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta)$$

$$\int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L d\vec{x}_n = g'(\theta)$$

$$\int_B \tilde{g}(\vec{x}_n) \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} L d\vec{x}_n = g'(\theta)$$

$$\int_B (\tilde{g}(\vec{x}_n) - g(\theta)) \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} L d\vec{x}_n = g'(\theta)$$

$\eta = \tilde{g}(\vec{x}_n) - g(\theta)$ - с.л. вел

$$\zeta = \frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} - \text{с.л. вел.}$$

$$\begin{aligned} M[\eta] &= 0 & M[\zeta] &= 0 \\ M[\eta\zeta] &= g'(\theta) \\ \text{cov}(\eta, \zeta) &= M[\eta\zeta] - M[\eta]M[\zeta] = g'(\theta) \\ r &= \frac{\text{cov}(\eta, \zeta)}{\sqrt{D\eta D\zeta}} & |r| &\leq 1 \\ \frac{\text{cov}^2(\zeta, \eta)}{D\zeta D\eta} &\leq 1 \\ g'^2(\theta) &\leq D\zeta \underbrace{D[\tilde{g}]}_{D[\tilde{g}]} \\ D\zeta &= M[\zeta^2] - M^2[\zeta] = M[\zeta^2] \\ D\zeta &= D\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] = D\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln \rho(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right] = \sum_{i=1}^n D\left[\frac{\partial \ln \rho(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right] = \\ &= nD\left[\frac{\partial \ln \rho(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right] = nM\left[\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \theta}\right)^2\right] - \underbrace{nM^2\left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial \theta}\right]}_0 = nI(\theta) \end{aligned}$$

□

Следствие 5.1.

1. оценка параметра θ , $g(t) = \theta$,

$$D[\tilde{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

2. многомерный аналог нер. Крамера-Рао

$$D[\tilde{g}(\vec{x}_n)] \geq \frac{1}{n} \nabla^T g(\vec{\theta}) I^{-1}(\vec{\theta}) \nabla g(\vec{\theta})$$

Определение 5.7 (Эффективная оценка). Регулярная оценка $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ функции $g(\theta)$ называется эффективной (\tilde{g}_{eff}), если $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\tilde{g}_{eff}] = \inf D[\tilde{g}]$, \inf берётся по всем регулярным оценкам.

Теорема 5.4. Если эффективная оценка \exists , то она единственна.

Доказательство. Так же как и оптимальная только нужно доказать что $\tilde{\theta}_3 = \frac{\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2}{2}$ - регулярная. □

Теорема 5.5 (Достаточное условие эффективности). Пусть выполнены условия нер. Крамера-Рао и $D[\tilde{g}] = \frac{g'^2}{nI(\theta)}$, тогда \tilde{g} эффективная оценка $g(\theta)$.

Теорема 5.6 (Теорема о частоте). Частота появления события A в n независимых опытах является несмещённой, состоятельной и эффективной оценкой вероятности появления этого события.

Доказательство. (на примере)

$$\begin{aligned}\xi &\sim \rho(x, \theta) = \theta\{1\} + (1 - \theta)\{0\} & \theta &\in (0, 1) \\ \xi &\sim Bi(1, \theta) & \nu &= \frac{m}{n} \\ \vec{x}_n &= (0, 0, 1, \dots) & \nu &= \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x} & \tilde{\theta} &= \bar{x}\end{aligned}$$

1. несмещённость ($\xi \sim Bi(l, \theta)$, $M[\xi] = l\theta$, $D[\xi] = l\theta(1 - \theta)$)

$$M[\bar{x}] = \frac{1}{n} M[\sum x_i] = M[\xi]$$

2. состоятельность

$$D[\tilde{\theta}] = D[\frac{1}{n} \sum x_i] = \frac{1}{n^2} n D[\xi] = \frac{1}{n} \theta(1 - \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

состоятельна по достаточному условию

3. эффективность, модель регулярна

$$I(\theta) = \frac{l}{\theta(1 - \theta)} \Big|_{l=1} = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}$$

$\tilde{\theta} = \bar{x}$ - регулярная оценка?

$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{n} \theta(1 - \theta)$ огран на \forall компакте из $(0, 1)$

Является регулярной ✓

Неравенство Крамера-Рао:

$$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{n} \theta(1 - \theta) \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}$$

достигает нижней грани \Rightarrow эффективная (в данном случае ещё и оптимальная)

□

6 Описательная стат. (непараметр. стат.)

\vec{x}_n - выборка

Вероятностная модель - все распределения, кроме сингулярных и вырожденных.

1. Вариационный ряд - упорядоченная выборка

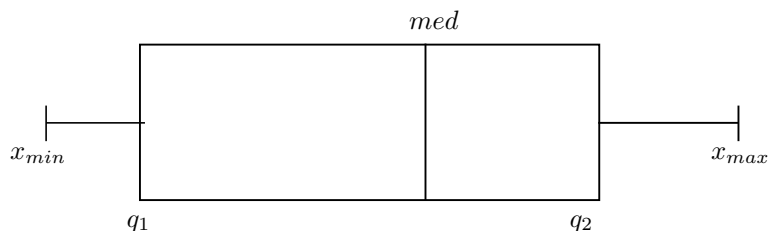
$$x_{min} = x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(n)} = x_{max}$$

$x_{(k)}$ - k -ая порядковая сл. вел

2. Размах выборки $l = x_{max} - x_{min}$
3. Медиана выборки med

$$mes = \begin{cases} x_{(k+1)}, n = 2k + 1 \\ \frac{x_{(k+1)} + x_{(k)}}{2}, n = 2k \end{cases}$$

4. Мода - эл. выборки, который встречается чаще всего
5. Квартили q_1, q_2 (медианы половинок)
6. Boxplot



$\varepsilon = q_2 - q_1$, если $x_{min} < q_1 - 1.5\varepsilon$ или $x_{max} > q_2 + 1.5\varepsilon$ рисуем усики до $q_1 - 1.5\varepsilon$ или $q_2 + 1.5\varepsilon$ соответственно, а дальше выбросы обозначаем точками для каждого значения

7. эмпирическая функция распределения

$$\tilde{F}(x) = \frac{m(x)}{n}$$

где $m(x)$ число элементов выборки, которые $< x$.

$$F(x) = P(\underbrace{\xi < x}_A)$$

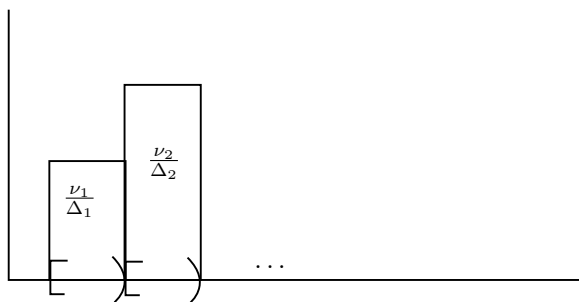
\tilde{F} является несмещённой, состоятельной и эффективной оценкой $F(x)$ (по Т. о частоте).

8. Гистограмма

Статистический ряд

$$\underbrace{[y_1, y_2)}_{\nu_1 = \frac{m_1}{n}}, \underbrace{[y_2, y_3)}_{\nu_2} \dots \underbrace{[y_k, y_{k+1})}_{\nu_k}$$

Эмперически $k = 1 + \log_2 n$



$$\nu_m = P(y_m \leq \xi < y_{m+1}) = \int_{y_m}^{y_{m+1}} p(x) dx = p(\bar{x}) \Delta_m$$

9. числовые характеристики

$\alpha_k = M[\xi^k]$ момент k -го порядка

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad \tilde{\alpha}_1 = \bar{x}$$

-
- несмещ: $M[\alpha_k] = \frac{1}{n} M[\sum x_i^k] = M[\xi^k] = \alpha_k$
 - состоятельность: ЗБЧ Хинчина $\tilde{\alpha}_k \xrightarrow{P} \alpha_k = M[\xi^k]$
-

$\mu_k = M[(\xi - M\xi)^K]$ - центральный момент k -го порядка

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$$

- СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

$$\begin{aligned}\mu_k &= M\left[\sum_{m=0}^k C_k^m \xi^m (-1)^{k-m} (M\xi)^{k-m}\right] = \\ &= \sum_{m=0}^k C_k^m (-1)^{k-m} \alpha_m (\alpha_1)^{k-m} \\ \tilde{\mu}_k &= \sum_{m=0}^k C_k^m (-1)^{k-m} \tilde{\alpha}_m (\tilde{\alpha}_1)^{k-m}\end{aligned}$$

Теорема наследования сходимости:

$$\begin{aligned}\xi_n &\xrightarrow{p} \xi, f(x) \text{ непр на } \mathbb{R} \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{p} f(\xi) \\ \xi_n &\xrightarrow{p} C, f(x) \text{ непр в точке } x = C \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{p} f(C) \\ \tilde{\alpha}_k &\xrightarrow{p} \alpha_k, f(x_1, \dots, x_n) \text{ непр} \Rightarrow \tilde{\mu}_k \xrightarrow{p} \mu_k\end{aligned}$$

- несмещённость

$$\begin{aligned}\mu_2 &= D\xi \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\alpha}_2 - (\tilde{\alpha})^2 \\ M[\tilde{\mu}_2] &= M\left[\frac{1}{n} \sum x_i^2\right] - M\left[\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2\right] = \\ &= M\xi^2 - (D[\bar{x}] + (M[\bar{x}])^2) = M\xi^2 - \frac{1}{n^2} n D\xi - (M\xi)^2 = \\ &= D\xi \left[1 - \frac{1}{n}\right] = \mu_2 \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \tilde{\mu}_2, M[S^2] = \mu_2 \text{ несмещ оценка дисперсии}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

коэффициент асимметрии

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\mu}_2^{3/2}} \xrightarrow{p} \gamma\end{aligned}$$

10. оценка распределения статистики

$$\vec{x}_n \quad \tilde{g}(\vec{x}_n)$$

\vec{x}_n становится вероятностной моделью, вытаскиваем 1000 подвыбоок с повторением элементов того же объёма \vec{x}_n^* , $\vec{x}_n^* \rightarrow \tilde{g}_i^*(\vec{x}_n^*)$, строим гистограмму из $\tilde{g}_1^* \dots \tilde{g}_{1000}^*$

7 Методы находжд. параметров модели

$$\xi \sim \rho(x, \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in A$$

Парметрическая модель, \vec{x}_n выборка

1. Метод моментов (Пирсон)

$$\alpha_k(\vec{\theta}) = M[\xi^k] \rightarrow \tilde{\alpha}_k = \alpha_k(\vec{\theta})$$

Если можем решить систему получаем $\tilde{\vec{\theta}}$ оценку методом моментов (ОММ)

Замечание. ОММГ (ОММ Группированная) для статистического ряда:

$$\underbrace{[y_1, y_2)}_{\nu_1} \dots \underbrace{[y_k, y_{k+1})}_{\nu_k} \quad \nu_i = \frac{m_i}{n}$$

$$z_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \dots, z_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

$$\tilde{\alpha}_l = \sum_{i=1}^k z_i^l \nu_i$$

2. Оценка Методом Правдоподобия (Фишер):

монета 10 раз, 6 орлов, 4 решки

(a) $p = \frac{1}{2}$

(b) $p = \frac{1}{3}$ - орёл, $p = \frac{2}{3}$ - решка

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.00098 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.00027$$

$$L(\vec{x}_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \theta)$$

$f_{ix} \theta, L(\vec{x}_n)$ - плотность распределения выборки

$f_{ix} \vec{x}_n, L(\theta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \theta)$ - функция правдоподобия (здесь x_i - элемент выборки), пытаемся максимизировать $L(\theta) \rightarrow \max$

Замечание. ОМПГ для статистического ряда

$$\begin{aligned}
& \underbrace{[y_1, y_2)}_{\nu_1} \cdots \underbrace{[y_k, y_{k+1})}_{\nu_k} \quad \nu_i = \frac{m_i}{n} \\
& P_1(\theta) = \int_{-\infty}^{y_2} \rho(x, \theta) dx \\
& P_2(\theta) = \int_{y_2}^{y_3} \rho(x, \theta) dx \\
& \quad \dots \\
& P_k(\theta) = \int_{y_k}^{+\infty} \rho(x, \theta) dx \\
& L(\theta) = P_1^{m_1} \dots P_k^{m_k} \quad L(\theta) \rightarrow \max
\end{aligned}$$

8 Асимптотические свойства оценок

$n \rightarrow \infty$

1. состоятельность $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow \tilde{g}(\vec{x}_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$
2. асимптотическая несмещённость $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow M[\tilde{g}(\vec{x}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(\theta)$
3. асимптотическая эффективность $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow nD[\tilde{g}(\vec{x}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{g'^2(\theta)}{I(\theta)}$
4. асимптотическая нормальность $\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow \sqrt{n}(\tilde{g}(\vec{x}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{F} \eta \sim N(0, \sigma^2)$

8.1 Асимптотические свойства ОММ

$$\begin{aligned}
\alpha_k(\vec{\theta}) = \tilde{\alpha}_k \rightarrow \tilde{\theta} &= f(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k) \\
\tilde{\alpha}_k &\xrightarrow{P} \alpha_k
\end{aligned}$$

f - непр в $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, тогда по теореме наследования $\tilde{\theta} \xrightarrow{P} f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \vec{\theta}$
состоятельная

Теорема о наследовании нормальности:

$\sqrt{n}(\xi_n - a) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ и $f(x) \in C'(r)$ и $f'(a) \neq 0$, тогда

$$\sqrt{n}(g(\xi_n) - g(a)) \rightsquigarrow N(0, g'^2(a)\sigma^2)$$

ЦПТ:

$$\begin{aligned}\frac{\sum x_i^k - nM[\xi^k]}{\sqrt{nD[\xi^k]}} &\rightsquigarrow N(0, 1) \\ \frac{\tilde{\alpha}_k - a_k}{\sqrt{\alpha_{2k} - a_k^2}} \sqrt{m} &\rightsquigarrow N(0, \underbrace{\alpha_{2k} - a_k^2}_{\sigma_k^2}) \\ (f(\tilde{\alpha}_k) - f(\alpha_j))\sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, f'^2(\alpha_k)\sigma_k^2) \\ (\tilde{\theta} - \theta)\sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, f'^2(\alpha_k)\sigma_k^2)\end{aligned}$$

8.1.1 Многомерное ЦПТ

$$\begin{aligned}\alpha &= \begin{pmatrix} \alpha_{s_1} \\ \vdots \\ \alpha_{s_k} \end{pmatrix} \quad \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{s_1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{s_k} \end{pmatrix} \quad \tilde{\alpha}_{s_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{s_1} \\ (\tilde{\alpha} - \alpha)\sqrt{n} &\rightsquigarrow N(\vec{0}, K) \quad K_{ij} = \alpha_{s_i + s_j} - \alpha_{s_i} \alpha_{s_j}\end{aligned}$$

$f(x) \in C'(R^k)$ и $\nabla f(\alpha) \neq 0$

$$(f(\tilde{\alpha}) - f(\alpha))\sqrt{n} \rightsquigarrow N(0, \nabla^T f(\alpha) K \nabla f(\alpha))$$

8.2 Асимптотические свойства ОМП

Теорема 8.1. Пусть вероятностная модель сильно регулярна и множество Θ открыто.

Тогда ОМП является состоятельной, асимп. несмещ., асимп. эффект. и асимп. нормальной.

Доказательство. $L(\theta) \rightarrow \max, \ln L \rightarrow \max, \frac{d \ln L(\tilde{\theta})}{d\theta} = 0$ Ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta}}_0 &= \frac{d \ln L}{d\theta}(\theta) + \frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}(\theta^*)(\tilde{\theta} - \theta) \\ \tilde{\theta} - \theta &= -\frac{(\ln L)'(\theta)}{(\ln L)''(\theta^*)} \\ \frac{d \ln L}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(\ln \prod p(x_i, \theta)) = \sum_{i=1}^n \frac{d \ln p(x_i, \theta)}{d\theta}\end{aligned}$$

$$\text{ЗБЧ Хинчина: } \frac{1}{n} \sum \frac{d \ln p}{d\theta} \xrightarrow{p} M \left[\frac{d \ln p(\xi, \theta)}{d\theta} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \theta) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\theta} p(x, \theta) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln p}{d\theta} p dx = 0$$

$$M \left[\frac{d \ln p}{d\theta} \right] = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln p}{d\theta} p dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 \ln p}{d\theta^2} p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln p}{d\theta} \frac{dp}{d\theta} dx = 0$$

$$M \left[\frac{d^2 \ln p}{d\theta^2} \right] + \underbrace{M \left[\left(\frac{d \ln p}{d\theta} \right)^2 \right]}_{I(\theta) > 0} = 0$$

$$\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \ln p(x_i, \theta^*)}{d\theta^2}$$

$$\frac{1}{n} \sum \frac{d \ln p(x_i, \theta^*)}{d\theta^2} \xrightarrow{p} -I(\theta^*) \neq 0$$

$$\text{Состоятельность доказана: } \theta^* \xrightarrow{p} \theta$$

$$\frac{\sum \frac{d \ln p}{d\theta} - \overbrace{n M \left[\frac{d \ln p}{d\theta} \right]}^{=0}}{\sqrt{n D \left[\frac{d \ln p}{d\theta} \right]}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Лемма Слущкого: $\xi_n \xrightarrow{F} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} C$, $x_n \eta_n \xrightarrow{F} \xi C$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} - \theta &= -\frac{\frac{\sum \frac{d \ln p}{d\theta}}{\sqrt{nI(\theta)}} \sqrt{nI(\theta)}}{\frac{1}{-nI(\theta)} \sum \frac{d^2 \ln p}{d\theta^2} (-nI(\theta))} \\ a &= \frac{\sum \frac{d \ln p}{d\theta}}{\sqrt{nI(\theta)}} \rightsquigarrow N(0, 1) \quad b = \frac{1}{-nI(\theta)} \sum \frac{d^2 \ln p}{d\theta^2} \rightsquigarrow 1 \\ (\tilde{\theta} - \theta) \sqrt{nI(\theta)} &= \frac{a}{b} \rightsquigarrow N(0, 1) \\ (\tilde{\theta} - \theta) \sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, \frac{1}{I(\theta)}) \\ D[(\tilde{\theta} - \theta) \sqrt{n}] &= nD[\tilde{\theta}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I(\theta)}\end{aligned}$$

Асимптотическая эффективность. □

Следствие 8.1. $\tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ - сост. $\tilde{\theta}$ ОМП, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \rightsquigarrow N(0, \frac{1}{I(\theta)})$$

- $g(\theta) \in C'(\Theta)$ и $g'(\theta) \neq 0$ на Θ

$$\sqrt{n}(g(\tilde{\theta}) - g(\theta)) \rightsquigarrow N(0, g'^2(\theta) \frac{1}{I(\theta)})$$

$$g(\tilde{\theta}) \xrightarrow{P} g(\theta)$$

$g(\tilde{\theta})$ сост. оценка $g(\theta)$, асим. несмещ., асим. эффект., асим. норм.

- многомерный аналог

$$\sqrt{n}(\vec{\tilde{\theta}} - \vec{\theta}) \rightsquigarrow N(\vec{0}, I^{-1}(\vec{\theta}))$$

$$g(\vec{\theta}) \in C'(\mathbb{R}^m) \quad \nabla g(\vec{\theta}) \neq 0 \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$$

$$\sqrt{n}(g(\vec{\tilde{\theta}}) - g(\vec{\theta})) \rightsquigarrow N(\vec{0}, \nabla^T g(\vec{\theta}) I^{-1}(\vec{\theta}) \nabla g(\vec{\theta}))$$

Пример. $\xi \sim R(0, \theta)$, $\theta > 0$, ОМП: $\tilde{\theta} = x_{max}$

$$\tilde{\theta}' = \frac{n+1}{n} x_{max} \text{ несмещ}$$

$$M[x_{max}] = \frac{n}{n+1} \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \text{ асим. несм.}$$

$$x_{max} \xrightarrow{P} \theta \text{ сост.}$$

$D[x_{max}] = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$, $I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$, $nD[x_{max}] \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I(\theta)}$, значит не является эффективной (на самом деле оценка сверхэффективная, модель нерегулярна)

условия теоремы не выполнены)

Пусть асим. норм.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\underbrace{\tilde{\theta}}_{x_{max}} - \theta) &\rightsquigarrow N(0, \sigma^2) \\ P(\sqrt{n}(x_{max} - \theta) < x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ P(\sqrt{n}(x_{max} - \theta) < 0) &= 1 \rightarrow 1 \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Противоречие \Rightarrow не является асим. нормальной.

9 Доверительный интервал

Определение 9.1. Доверительным интервалом величины h вероятностной модели называется случайный интервал, который покрывает значение h с вероятностью, не меньшей β .

$$\begin{aligned}I &= (g_1(\vec{x}_n), g_2(\vec{x}_n)) \\ P((g_1, g_2) \ni \theta) &\geq \beta\end{aligned}$$

β - доверительная вероятность, чаще всего 0.9, 0.95, 0.99.

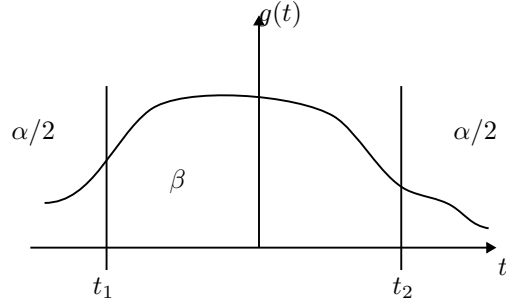
9.1 Методы построения доверит. инт.

- точный
- асимптотический
 - по ОММ
 - по ОМП
- численные
 - параметрический бутстрап
 - непараметрический бутстрап

9.1.1 Точный метод

$h, \vec{x}_n \rightarrow f(g, \vec{x}_n) \sim g(t)$ (созерцание)

1. $g(t)$ - плотность распр. (сл. вел. непр.)



$\alpha + \beta = 1$, квантиль $F(x_p) = p$, x_p - квантиль порядка p , $F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} g(t)dt$

$$t_1 = g_{\alpha/2} = g_{\frac{1-\beta}{2}} \quad t_2 = g_{\beta+\frac{\alpha}{2}} = g_{\frac{1+\beta}{2}}$$

$$P(t_1 < f(h, \vec{x}_n) < t_2) = \beta$$

$$g_1(\vec{x}_n) < h < g_2(\vec{x}_n)$$

2. $g(t)$ содержит дискр. части, сдвигаем β так чтобы получить точное равенство

Пример. $\xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > 0$

$$\tilde{\theta}_1 = \bar{x} \quad \tilde{\theta}_2^2 = S^2$$

Теорема Фишера:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \theta_1}{\theta_2} \sim N(0, 1) \quad \frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$t_1 = \chi_{\frac{1-\beta}{2}}^2(n-1) \quad t_2 = \chi_{\frac{1+\beta}{2}}^2(n-1)$$

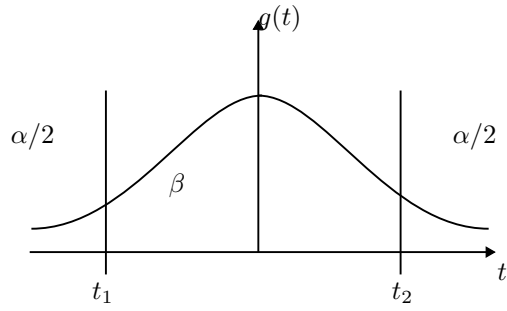
$$P(t_1 < \frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} < t_2) = B$$

$$\frac{S^2(n-1)}{t_2} < \theta_2^2 < \frac{S^2(n-1)}{t_1}$$

$$\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{t_2}} < \theta_2 < \sqrt{\frac{S^2(n-1)}{t_1}}$$

$$\frac{\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \theta_1}{\theta_2}}{\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2(n-1)}}} \sim t(n-1)$$

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \theta_1}{S} \sim t(n-1)$$



$$t_1 = t_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1) \quad t_2 = t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)$$

$$P(t_1 < \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \theta_1}{S} < t_2) = \beta$$

$$\bar{x} - \frac{St_2}{\sqrt{n}} < \theta_1 < \bar{x} - \frac{St_1}{\sqrt{n}}$$

9.2 Асимптотический метод

$$h, \vec{x}_n \rightarrow f(h, \vec{x}_n) \rightsquigarrow g(t)$$

По ОММ

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(g(\tilde{\theta}) - g(\vec{\theta})) &\rightsquigarrow N(\vec{0}, \nabla^T g(\vec{\theta}) I^{-1}(\vec{\theta}) \nabla g(\vec{\theta})) \\
\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{s_1} \\ \vdots \\ \alpha_{s_k} \end{pmatrix} \quad \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{s_1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{s_k} \end{pmatrix} \quad K_{ij} = \alpha_{s_i + s_j} - \alpha_{s_i} \alpha_{s_j} \\
(\tilde{\alpha}_j - \alpha_j) \sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, \alpha_{2k} - \alpha_k^2) \\
\frac{\tilde{\alpha}_k - \alpha_k}{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}} \sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, 1) \\
\tilde{\alpha}_k \xrightarrow{p} \alpha_k \quad \sqrt{\tilde{\alpha}_{2k} - \tilde{\alpha}_k^2} &\xrightarrow{p} \sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2} \\
\frac{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}}{\sqrt{\tilde{\alpha}_{2k} - \tilde{\alpha}_k^2}} &\xrightarrow{p} 1
\end{aligned}$$

Лемма Слущкого $\xi_n \xrightarrow{F} \xi, \eta_n \xrightarrow{p} C, \xi_n \eta_n \xrightarrow{F} C\xi$

$$\frac{\tilde{\alpha}_k - \alpha_k}{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}} \sqrt{n} \frac{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}}{\sqrt{\tilde{\alpha}_{2k} - \tilde{\alpha}_k^2}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$ \frac{\sqrt{n}(g(\tilde{\alpha}) - g(\alpha))}{\sqrt{\nabla^T g(\tilde{\alpha}) K(\tilde{\alpha}) \nabla g(\tilde{\alpha})}} \rightsquigarrow N(0, 1) \quad \text{ОММ} $
$ \frac{\sqrt{n}(g(\tilde{\theta}) - g(\vec{\theta}))}{\sqrt{\nabla^T g(\vec{\theta}) I^{-1}(\vec{\theta}) \nabla g(\vec{\theta})}} \rightsquigarrow N(0, 1) \quad \text{ОМП} $

Пример. $\xi \sim \rho(x) = x\theta\{(0, 1)\} + (1 - \frac{\theta}{2})\{2\}, \theta \in (0, 2)$

$\vec{x}_n = \{0.53, 0.84, 0.1, 0.83, \underbrace{2, \dots, 2}_{16}\}, n = 20$

1. ОММ $\tilde{\theta} = \frac{3}{2}(2 - \bar{x}), \tilde{\theta} = 0.4275, S = 0.6, \beta = 0.95$

$$\tilde{\theta} = \frac{3}{2}(2 - \tilde{\alpha}_1) = g(\tilde{\alpha}_1) \quad \theta = g(\alpha_1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(g(\tilde{\alpha}_1) - g(\alpha_1))}{\sqrt{\nabla^T g(\tilde{\alpha}) K(\tilde{\alpha}) \nabla g(\tilde{\alpha})}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\nabla g = 0 \frac{3}{2} \quad K_{11} = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta)}{\sqrt{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2})(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1^2)}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1^2 = 0.342 \quad \tilde{\mu}_2 = S^2 \frac{n-1}{n}$$

$$t_1 = u_{\frac{1-0.95}{2}} = u_{0.025} = -1.96 \quad t_2 = u_{\frac{1+0.95}{2}} = u_{0.025} = 1.96$$

$$-1.96 < \frac{\sqrt{20}(0.4275 - \theta)}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot 0.342}} < 1.96$$

$$0.0435 < \theta < 0.811 \quad l = 0.768$$

2. ОМП $\tilde{\theta} = 2(1 - \nu) = 2(1 - \frac{16}{20}) = 0.4$

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta)}{\sqrt{I^{-1}(\theta)}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta(2 - \theta)}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta)}{\sqrt{\tilde{\theta}(2 - \tilde{\theta})}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$-1.96 < \frac{\sqrt{20}(0.4 - \theta)}{\sqrt{0.4 \cdot 1.6}} < 1.96$$

$$0.049 < \theta < 0.751 \quad l = 0.702$$

ОМП довер. инт. дисперсии

$$D\xi = \frac{11}{12}\theta - \frac{4}{9}\theta^2$$

$$\tilde{D}\xi = \frac{11}{12} \cdot 0.4 - \frac{4}{9} \cdot 0.4^2 = 0.296$$

$$\frac{\sqrt{n}(g(\tilde{\theta}) - g(\theta))}{\sqrt{\nabla^T g(\tilde{\theta}) I^{-1}(\tilde{\theta}) \nabla g(\tilde{\theta})}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\nabla g(\theta) = \frac{11}{12} - \frac{8}{9}\theta$$

$$-1.96 < \frac{\sqrt{20}(\tilde{D}\xi - D\xi)}{\sqrt{(\frac{11}{12} - \frac{8}{9} \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4 \cdot 1.6}} < 1.96$$

$$0.1 < D\xi < 0.492$$

9.3 Численные методы

1. Непараметрические методы

$h, \vec{x}_n \rightarrow \tilde{h}$, берём выборку за вероятностную модель, из выборки формируем подвыборку $N = 1000$, $\tilde{h} - h = \tilde{\Delta}$

(а) \vec{x}_n^* с повторение элем. $\Delta_1^* = \tilde{h}^* - \tilde{h}$

(b) ...

(c) ???

(d) ...

(e) \vec{x}_n^* с повторение элем. $\Delta_{1000}^* = \tilde{h}^* - \tilde{h}$

(f) Profit!

Вариационный ряд $\Delta_{(1)}^*, \dots, \Delta_{(1000)}^*$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[\frac{1-\beta}{2} \cdot 1000 \right] & K_2 &= \left[\frac{1+\beta}{2} \cdot 1000 \right] \\ t_1 &= \Delta_{(k_1)} & t_2 &= \Delta_{(k_2)} \\ P(t_1 < \tilde{h}^* - \tilde{h} < t_2) &\approx \beta \\ P(t_1 < h^* - h < t_2) &\approx \beta \\ \tilde{h} - t_2 < h < \tilde{h} - t_1 \end{aligned}$$

2. Параметрический бутстрап

$h, \tilde{h}, \Delta = \tilde{h} - h, \xi \sim \rho(x, h), \vec{x}_n \rightarrow \tilde{h}$ - сост. и несм. оценка

$\xi \sim \rho(x, \tilde{h})$ моделируем выборки $\vec{x}_n^*, N = 50000$

$\Delta_i^* = \tilde{h}^* - \tilde{h}, \Delta_{(1)}^* \dots \Delta_{(N)}^*$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[\frac{1-\beta}{2} \cdot N \right] & K_2 &= \left[\frac{1+\beta}{2} \cdot N \right] \\ t_1 &= \Delta_{(k_1)}^* & t_2 &= \Delta_{(k_2)}^* \\ P(t_1 < \tilde{h}^* - \tilde{h} < t_2) &\approx \beta \\ P(t_1 < h^* - h < t_2) &\approx \beta \end{aligned}$$

Пример. $\vec{x}_n = \{0.53, 0.84, 0.1, 0.83, \underbrace{2, \dots, 2}_{16}\}, n = 20$

1. Непараметрический бутстрап $\tilde{\theta} = 0.4$ ОМП $\tilde{\theta} = 2(1 - \nu)$

- $\vec{x}_n^* = 0.53, \dots, m = 14, \Delta_1^* = \tilde{\theta}^* - \tilde{\theta} = 0.2$
- ...
- $\Delta_{1000}^* = 0$

$$\begin{aligned} \beta &= 0.95 & k_1 &= 25 & k_2 &= 975 \\ t_1 &= \Delta_{(25)}^* = -0.3 & t_2 &= \Delta_{(975)}^* = 0.4 \\ P(-0.3 < \tilde{\theta}^* - \tilde{\theta} < 0.4) &\approx 0.95 \\ P(-0.3 < \tilde{\theta} - \theta < 0.4) &\approx 0.95 \\ 0 < \theta < 0.7 & l &= 0.7 \end{aligned}$$

2. Параметрический бутстрап $\tilde{\theta} = 0.4$

$$\xi \sim \rho(x, \theta) = x\theta\{(0, 1)\} + (1 - \frac{\theta}{2})\{2\} = x \cdot 0.4\{(0, 1)\} + 0.8\{2\}$$

$N = 10000$, делаем выборки из модели и дальше так же как и непарам.

9.4 Доверительный интервал для частоты

$\nu = \frac{m}{n}$ хорошая оценка $P(A)$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа:

$$\begin{aligned}\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} &\rightsquigarrow N(0, 1) \\ \frac{\nu - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, 1) \\ \frac{\nu - p}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \sqrt{n} &\rightsquigarrow N(0, 1)\end{aligned}$$

9.5 Доверительный интервал функции распределения

F , $\tilde{F}(x) = \frac{m}{n}$, где m - кол-во элементов меньше x

$$\frac{\tilde{F}(x) - F(x)}{\sqrt{\tilde{F}(x)(1 - \tilde{F}(x))}} \sqrt{n} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

10 Проверка статистических гипотез

Определение 10.1. Гипотеза - любое высказывание о вероятностной модели.

Определение 10.2. Простая гипотеза - однозначное определение вероятностной модели.

Определение 10.3. Сложная гипотеза - неоднозначное определение вер. модели.

$\rho \sim N(0, a)$, $H : a = 2$ - простая, $H : a > 2$ - сложная

Определение 10.4. H_0 - основная гипотеза, H_1 - альтернативная (отклонение от основной)

$H_0 : a = 2$, $H_1 : a > 2$

10.1 Принцип от маловероятного

Пусть H_0 - верна. Событие A . $P(A|H_0)$ - мала. Событие A наблюдаемо. Отвергаем H_0 , иначе нет оснований отвергнуть H_0 .

11 Критерии согласия

11.1 Критерий Пирсона

Вероятностная модель, \vec{x}_n

$H_0 : \xi \sim F(x)$ - простая гипотеза

$H_1 : \bar{H}_0$ - сложная

Полная группа событий: $A_1 \dots A_k$ - конечная группа событий, $A_1 + \dots + A_k = \Omega$, $A_i A_j = \emptyset$ $i \neq j$, $P(A_i) > 0$

$H_0 : P_i = P(A_i), \tilde{P}_i = \nu_i = \frac{m_i}{n}$

$$\Delta = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - \nu)^2}{p_i}$$
$$\Delta = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - \frac{m_i}{n})^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i}$$

Теорема 11.1. Если H_0 верна, то $\Delta \rightsquigarrow \chi^2(k-1)$

Замечание. Нормальная аппроксимация при $n \geq 50$, $np_i \geq 5$ (можно мухлевать: $np_i \geq 1$ и в 20% случаев можем разрешить $np_i < 5$)

Пример. H_0 : красные автомобили штрафуют в 2 раза чаще остальных

$H_1 : \bar{H}_0$

Выборка: 150 штрафов, 90 красные, A_{red} , A_{other}

	A_r	A_o
p_i	2/3	1/3
np_i	100	50
np_i	90	60

$$\hat{\Delta} = \frac{(100 - 90)^2}{100} + \frac{(50 - 60)^2}{50} = 3$$

α - уровень значимости, $\alpha = .1; \boxed{.05}; .01$

$$H_0 : \Delta \rightsquigarrow \chi^2(1), k = 2$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_3^\infty q(t) dt = 0.083$$

Нет веских оснований отвергнуть H_0 .

Замечание. Правила использования p-value:

1. Если $\text{p-value} \leq \alpha$, то H_0 отвергается, результаты значимы, p-value - мера значимости
2. Если $\text{p-value} > \alpha$, то нет оснований отвергать H_0 , результаты незначимы.

Либо гипотеза верна (отклонения объясняются случайными факторами), либо критерий недостаточно мощный.

p-value не является вероятностью H_0 и не является вероятностью случайных факторов!

Пример (Закон Бенфорда). В больших массивах данных, полученных естественным путём, следуют определённому распределению.

$$P_i = \log_{10}(1 + \frac{1}{d_i}) \quad d_i = 1, \dots, 9$$

Рассмотрим числа Фибоначи (первые 100 штук)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	29	18	13	9	8	6	5	7	5
p_i	0.3	0.18	0.12	0.1	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
np_i	3	18	12	10	8	7	6	5	4

8 и 9 объединяем чтобы попадать под условия применимости

$$\tilde{\Delta} = \frac{(30 - 29)^2}{30} + \dots + \frac{(9 - 12)^2}{9} = 1.53 \quad \Delta \rightsquigarrow \chi^2(7)$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{1.53}^\infty q(t) dt = 0.981$$

Нет оснований отвергать H_0 .

11.2 Критерий Колмогорова (непр. распр.)

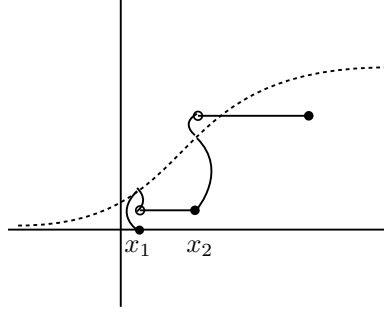
$$H_0 : \xi \sim F(x), H_1 : \bar{H}_0, \vec{x}_n$$

$$\Delta = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(x) - F(x)|$$

- где \tilde{F} - империческая функция распределения.

Теорема 11.2. Если H_0 верна, то $\Delta \rightsquigarrow K(x)$ $K(x)$ - функ. распределения Колмогорова

$$K(x) = P(\Delta < x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} \{(0, \infty)\}$$



$$\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{F}(x) - F(x)| = \max_{i=1, \dots, n} \max(|\tilde{F}(x_i - 0) - F(x_i)|, |\tilde{F}(x_i + 0) - F(x_i)|)$$

Пример. $H_0 : \xi \sim R(0, 1)$, $H_1 : \bar{H}_0$, $\vec{x}_n = (0.2; 0.5; 0.8; 0.9)$

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{4} \max(0.2; 0, 25; 0.3; 0.15) = 2 * 0.3 = 0.6$$

$$H_0 : \Delta \rightsquigarrow K(x)$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 1 - K(\tilde{\Delta}) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^j e^{-2k^2 \tilde{\Delta}^2} = 0.8642$$

4 элемента - вообще беда, используем бутстрап, так как считаем в вероятности, что верна H_0 по хорошему бутстрап параметрический

- $x_4^* \rightarrow \Delta_1^* = \sqrt{n} \sup |\tilde{F}^*(x) - F(x)|$
- ...
- $x_4^* \rightarrow \Delta_N^* = \sqrt{n} \sup |\tilde{F}^*(x) - F(x)|$

$N = 10000 - 50000$, вариационный ряд $\Delta_{(1)}^* \dots \Delta_{(N)}^*$

$$\text{p-value} = \frac{K}{N}, K - \text{число } \Delta_{(i)}^* \geq \tilde{\Delta}$$

$$\text{p-value} = 0.47$$

11.3 Критерий Пирсона для слож. гипотезы

$H_0 : \xi \sim F(x, \vec{\theta}), \vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m, H_1 : \bar{H}_0, \vec{x}_n, A_1 \dots A_k$ - полная группа событий

$$P_i(\vec{\theta}) = P(A_i) \quad P_i = \nu_i$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{(np_i(\vec{\theta}) - m_i)^2}{np_i(\vec{\theta})}$$

Теорема 11.3. Если H_0 верная и $\tilde{\theta}$ есть ОМПГ, то $\Delta \rightsquigarrow \chi^2(k-1-m)$

Пример. $H_0 : \xi \sim R(0, \theta), \theta > 0, H_1 : \bar{H}_0$

	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, \infty)$
m_i	25	10	15	30	20
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
np_i	20	20	20	20	20

$$P_i = \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{\theta} dx \quad P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{\theta}$$

$$P_5 = \int_4^{\infty} p(x, \theta) dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta - 4}{\theta}$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{25+10+15+30} \left(\frac{\theta-4}{\theta}\right)^{20} \rightarrow \max$$

$$\ln L = -80 \ln \theta + 20 \ln(\theta - 4) - 20 \ln \theta = -100 \ln \theta + 20 \ln(\theta - 4) \rightarrow \max$$

$$(\ln L)' = -\frac{100}{\theta} + \frac{20}{\theta - 4} = 0 \quad \tilde{\theta} = 5$$

$$\Delta \rightsquigarrow \chi^2(5-1-1) = \chi^2(3)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{(25-20)^2}{20} + \dots + \frac{(20-20)^2}{20} = 12.5$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{12.5}^{\infty} q(t) dt = 0.00585$$

Отвергаем H_0 .

Пример. H_0 : распределение Эрланга $\xi \sim p(x) = \frac{1}{\lambda^2} x e^{-x/\lambda} \{(0, +\infty)\}$, $\lambda > 0, H_1 : \bar{H}_0$

	$[0; 2.5)$	$[2.5; 5)$	$[5; 7.5)$	$[7.5; 10)$	$[10; 12.5)$	$[12.5; 15)$
m_i	12	17	12	4	3	2
np_i	12.9	16.4	10.4	5.5	2.6	2.2

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{a}{\lambda}e^{-a/\lambda} - \frac{b}{\lambda}e^{-b/\lambda} + e^{-a/\lambda} - e^{-b/\lambda}$$

$$P_1 = \int_0^{2.5} p(x)dx \quad \dots \quad P_6 = \int_{12.5}^{\infty} p(x)dx$$

$$L(\lambda) = P_1^{12} \dots P_6^2 \rightarrow \max$$

Считаем экстремум численно.

$$\tilde{\lambda} = 2.531$$

После объединения и пересчёта:

$$\tilde{\lambda} = 2.542 \quad \tilde{\Delta} = 0.756$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 0.86$$

11.4 Критерий Колмогорова для сл. гип. (непр. распр.)

$H_0 : \xi \sim F(x, \vec{\theta}), \vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m, H_1 : \bar{H}_0, \vec{x}_n, A_1 \dots A_k$ - полная группа событий

$$\Delta = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(x) - F(x, \vec{\theta})|$$

Параметрический бутстрап: $\vec{x}_n \rightarrow \tilde{\vec{\theta}}$ - сост. оценка (любой метод)

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(x) - F(x, \tilde{\vec{\theta}})|$$

$\xi \sim F(x, \tilde{\vec{\theta}}), N = 10000 - 50000$

- $\vec{x}_n^* \rightarrow \tilde{\vec{\theta}}^* \rightarrow \Delta_1^* = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}^*(x) - F(x, \tilde{\vec{\theta}})|$
- ...

Вариационный ряд $\Delta_{(1)}^* \dots \Delta_{(N)}^*$, p-value = $\frac{K}{N}$, K - число элементов $\Delta_{(i)}^* \geq \tilde{\Delta}$

Пример (Эрланг).

$$\tilde{\Delta} = 0.3982 \quad \text{p-value} = 0.9284$$

11.5 Проверка гипотезы однородности

$A_1 \dots A_k$ - полная группа

- 1 выборка $m_{11} \dots m_{1k}$
- ...
- 1 выборка $m_{l1} \dots m_{lk}$

H_0 : все выборки из одного распределения, $H_1 : \bar{H}_0$

$$n = n_1 + \dots + n_l \quad \nu_j = \frac{\sum_{i=1}^l m_{ij}}{n}$$

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^k \frac{(m_{1j} - n_1 \nu_j)^2}{n_1 \nu_j} \quad \Delta_s = \sum_{j=s}^k \frac{(m_{sj} - n_s \nu_j)^2}{n_s \nu_j}$$

$$\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_l$$

Теорема 11.4. Если H_0 верна, то $\Delta \rightsquigarrow \chi^2((k-1)(l-1))$

Пример (Коллоквиум 2023).

	2	3	4	5	
1гр	0	1	10	5	16
2гр	1	0	9	1	11
3гр	2	4	6	4	16
4гр	1	0	8	6	15
	4	5	33	16	

2 и 5	3 и 4
5	11
2	9
6	10
7	8
$\frac{20}{58}$	$\frac{38}{58}$

$$\Delta_1 = 0.074 \quad \Delta_2 = 1.294 \quad \Delta_3 = 0.064 \quad \Delta_4 = 0.986$$

$$\tilde{\Delta} = 2.418 \quad \chi^2(1 \cdot 3)$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 0.49$$

11.6 Проверка гипотезы независимости

(ξ, η) , H_0 : ξ и η - независимы, $H_1 : \bar{H}_0$, A_i и B_j - полные группы событий

	A_1	\dots	A_k
B_1	m_{11}	\dots	m_{1k}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
B_l	m_{l1}	\dots	m_{lk}

$$P_1 = \frac{m_{11} + \dots + m_{1k}}{n} \quad q_1 = \frac{m_{11} + \dots + m_{l1}}{n}$$

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{(m_{ij} - np_i q_j)^2}{np_i q_j}$$

Теорема 11.5. Если H_0 верна, то $\Delta \rightsquigarrow \chi^2((k-1)(l-1))$.

Пример. $n = 246$, зависимость успеваемости от родного города

	Москва	Подмоск	Остальное	
2	13	10	17	$\frac{40}{246}$
3	35	38	19	$\frac{92}{246}$
4	21	21	26	$\frac{68}{246}$
5	16	11	19	$\frac{46}{246}$
	$\frac{85}{246}$	$\frac{80}{246}$	$\frac{81}{246}$	

$$\tilde{\Delta} = 11.05 \quad \text{p-value} = \int_{11.05}^{\infty} q(t)dt = 0.087$$

Нет оснований отвергать H_0 .

11.7 Проверка гипотезы случайности

H_0 : элементы выборки независимы и одинакового распределены, $H_1 : \bar{H}_0$, I_n - число инверсий в выборке

Теорема 11.6. Если H_0 верно, то

$$\Delta = \frac{I_n - \frac{n(n-1)}{4}}{\sqrt{\frac{n^3}{36}}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Пример. $n = 10$, $\vec{x}_n = (4, 10, 8, 8, 6, 7, 7, 9, 8, 9)$

$$I_n = 0 + 8 + 3 + 3 + \dots + 0 = 15$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{15 - \frac{10 \cdot 9}{4}}{\sqrt{\frac{10^3}{36}}} = -1.42$$

$$\text{p-value} = P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}| | H_0) = 2P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}| | H_0) = 2 \int_{1.42}^{\infty} q(t)dt = 0.155$$

Нет оснований отвергать H_0 .

11.8 Критерий Смирнова для проверки гипотезы однородности (непр. расп.)

$H_0 : F(x) = G(x)$, $H_1 : \bar{H}_0$ Выборки \vec{x}_n, \vec{y}_m

$$\Delta = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_R |\tilde{F}(x) - \tilde{G}(x)|$$

где \tilde{F} и \tilde{G} - эмпирические функции распределения

Теорема 11.7. Если H_0 верна, то $\Delta \rightsquigarrow K(x)$

12 Использование доверительных интервалов для проверки гипотез

Вероятностная модель, h - характеристика вероятностной модели, \tilde{h} - оценка

$$H_0 : h \in T_0, H_1 : h \in T_1, T_0 \cap T_1 = \emptyset$$

$\tilde{h} \rightarrow$ доверительный интервал (точный, асимптотический или непараметрический бутстраповский)

Если $I \subset T_1$, то H_0 отвергаем

Пример. $H_0 : h \leq 3, H_1 : h > 3$

- Если $\tilde{h} \leq 3$ сразу говорим что нет оснований отвергать гипотезу
- Если $\tilde{h} > 3$, считаем доверительный интервал (правосторонний): $\tilde{h} \rightarrow I = [h_0, +\infty)$

Пример. $H_0 : h = 3, H_1 : h \neq 3$, в таком случае интервал двухсторонний: $I = (\tilde{h} - \delta, \tilde{h} + \delta)$

13 Методы построения критериев

$G_{кр} (G_{cr})$ - критическая область

$$H_0 \text{ отвергаем} \Leftrightarrow \vec{x}_n \in G_{cr}$$

$$P(\vec{x}_n \in G | H_0) \leq \alpha$$

Ошибка I рода $\alpha_1 = P(H_1 | H_0)$.

Ошибка II рода $\alpha_0 = P(H_0 | H_1)$.

Если H_0 и H_1 сложные, то $\alpha_1 = \sup_{H_0} P(\vec{x}_n \in G | H_0)$, $\alpha_2 = \sup_{H_1} P(\vec{x}_n \notin G | H_1)$

Определение 13.1 (Мощность критерия).

$$W(H_1) = P(\vec{x}_n \in G | H_1)$$

Для простой гипотезы $W = 1 - \alpha_2$

Определение 13.2 (Состоятельность критерия). Критерий называется состоятельным, если

$$\forall H_1 \hookrightarrow W(H_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Замечание. α_1 - наиболее опасная ошибка

$\alpha_1 \leq \alpha$ обязательно, $\alpha_2 \rightarrow \min$, решаем оптимизационную задачу $\rightarrow G_{opt}$

Пример. H_0 : болен, H_1 : здоров

$\alpha_1 = P(H_1|H_0)$ - признали больного здоровым - беда

$\alpha_2 = P(H_0|H_1)$ - признали здорового больным - не так критично

13.1 Теорема Неймана-Пирсона для проверки простой H_0 против простой H_1

$\alpha_2 \rightarrow \min, \alpha_1 \leq \alpha$

$$\begin{aligned} W = 1 - \alpha_2 &= P(\vec{x}_n \in G|H_1) \rightarrow \max \\ \int_G L_1(\vec{x}_n) d\vec{x}_n &= \int_G \underbrace{\frac{L_1}{L_0}}_l L_0 d\vec{x}_n \rightarrow \max \\ G : l &\geq C \quad \int_G L_0 d\vec{x}_n \leq L \end{aligned}$$

l - отношение правдоподобия

Пример. $n = 25, \bar{x} = 9.3, \alpha = 0.02$

$H_0 : \xi \sim N(10, 4), H_1 : \xi \sim N(9, 4)$

$$\begin{aligned} l &= \frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^n p_1(x_i)}{\prod_{i=1}^n p_0(x_i)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}}\right)^n e^{-\frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (x_i - 9)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}}\right)^n e^{-\frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (x_i - 10)^2}} = \\ &= e^{-\frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (2x_i - 10)} = e^{-\frac{1}{4} n\bar{x} + \frac{19}{8} n} \geq C \\ -\frac{1}{4} n\bar{x} + \frac{19}{8} n &\geq \ln C \quad G : \bar{x} \leq A \\ P(\bar{x} \leq A|H_0) &\leq \alpha \end{aligned}$$

По Т. Фишера:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n} &\sim N(0, 1) \\ P\left(\frac{\bar{x} - 10}{2} \sqrt{25} \leq \frac{A - 10}{2} \sqrt{25}\right) &\leq \alpha \end{aligned}$$

$\frac{5}{2}(A - 10) = U_\alpha$ - квантиль порядка α для нормального распределения

$$\frac{A - 10}{2}5 = U_\alpha = -2.054$$

$$G : \bar{x} \leq 9.18$$

$\bar{x} \notin G$ нет оснований отвергнуть H_0

$$W = P(\bar{x} \in G | H_1) = P\left(\frac{\bar{x} - 9}{2}5 \leq \frac{9.18 - 9}{2}5\right) = \int_{-\infty}^{0.45} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.67$$

$$\alpha_1 = 0.02 \quad \alpha_2 = 1 - W = 0.33$$

Сколько нужно n чтобы имело смысл

$$\alpha_1 = 0.01 \quad \alpha_2 = 0.1$$

$$G : \bar{x} \leq B$$

$$\alpha_1 = P(\bar{x} \leq B | H_0) = P\left(\frac{\bar{x} - 10}{2}\sqrt{n} \leq \frac{B - 10}{2}\sqrt{n}\right) = 0.01$$

$$\alpha_2 = P(\bar{x} > B | H_0) = P\left(\frac{\bar{x} - 9}{2}\sqrt{n} \leq \frac{B - 10}{2}\sqrt{n}\right) = 0.1$$

$$\begin{cases} \frac{B - 10}{2}\sqrt{n} = U_{0.01} = -2.33 \\ \frac{B - 9}{2}\sqrt{n} = U_{0.9} = 1.28 \end{cases}$$

$$B = 9.36 \quad n = 53$$

Пример. $\xi \sim \xi(x) = (2 - 2\theta)x\{(0, 1)\} + \theta\{0\}$

$$H_0 : \theta = \frac{1}{3}, H_1 : \theta = \frac{1}{2}, n = 1, \alpha = 0.35$$

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)}$$

x	(0, 1)	2
1	$\frac{x}{4x/3} = \frac{3}{4}$	$\frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$
H_0, p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
H_1, p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$G : l \geq C \quad P(l \geq C | H_0) \leq 0.35$$

$$G : l \geq \frac{3}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = P(l < C | H_1) = \frac{1}{2}$$

Пример. Те же условия что и в прошлом но $n = 2$!:

	(0, 1)	2
(0, 1)	$\frac{1 \cdot 1 \cdot x_1 \cdot x_2}{\frac{4}{3}x_1 \frac{4}{3}x_2} = \frac{9}{16}$	$\frac{x_2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{3}x_2 \frac{1}{3}} = \frac{9}{8}$
2	$\frac{9}{8}$	$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$

H_0 :

	(0, 1)	2
(0, 1)	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

H_1 :

	(0, 1)	2
(0, 1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$G : l \geq C \quad P(l \geq C | H_0) \leq 0.35$$

$$G : l \geq \frac{9}{4}, \alpha_1 = \frac{1}{9}, \alpha_2 = P(l < C | H_1) = \frac{3}{4}, W = \frac{1}{4}$$

Асимптотический критерий $n \rightarrow \infty$

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \prod_{i=1}^n \frac{\rho_1(x_i)}{\rho_0(x_i)} \geq C$$

$$\ln l = \sum_{i=1}^n \underbrace{\ln \frac{\rho_1(x_i)}{\rho_0(x_i)}}_{\eta_i} \geq \ln C$$

ЦПТ

Параметрический бутстрап

m - число появлений 2

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod x_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-m} \prod x_i \left(\frac{1}{3}\right)^m}$$

$$l = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq C \quad P(l \geq C | H_0) \leq \alpha$$

$$\rho_0(x) = \frac{4}{3}x\{(0, 1)\} + \frac{1}{3}\{2\}$$

- $\vec{x}_n^* \rightarrow m_1^* \rightarrow l_1^*$
- ...
- $\vec{x}_n^* \rightarrow m_N^* \rightarrow l_N^*$

Вариационный ряд $l_{(1)}^* \dots l_{(N)}^*$, $k = [(1 - \alpha)N]$, $C = l_{(k)}^*$

$n = 1$, $\alpha = 0.02$, $N = 50000$, $C = 4$

$W = P(l \geq C | H_1)$, те же самые процедуры с другим распределением $W = \frac{k}{N}$, $W = 0.17$

Пример (Т11 из задания). $H_0 : \xi \sim p_0(x) = 1\{(0, 1)\}$ $H_1 : \xi \sim p_0(x) = \frac{e}{e-1}e^{-x}\{(0, 1)\}$

a) $n = 1, \alpha$

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\frac{e}{e-1}e^{-x}}{1} \geq C \quad e^{-x} \geq B \quad x \leq A$$

$$P(x \leq A|H_0) = \alpha \quad \int_0^A 1dx = A = \alpha$$

$$G : x \leq \alpha \quad \alpha_1 = \alpha$$

$$W = P(x \leq A|H_1) = \int_0^\alpha \frac{e}{e-1}e^{-x}dx = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-\alpha}) \quad \alpha_2 = 1 - W$$

b) $n = 2, \alpha$

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1}e^{-x_2}}{1 \cdot 1} \geq C \quad x_1 + x_2 \leq A$$

$$P(x_1 + x_2 \leq A|H_0) = \alpha \quad \iint_{x_1+x_2 \leq A} 1dx_1dx_2 = \frac{A^2}{2} = \alpha \quad A = \sqrt{2\alpha}$$

$$G : x_1 + x_2 \leq \sqrt{2\alpha} \quad \alpha_1 = \alpha$$

$$W = P(x_1 + x_2 \leq A|H_1) = \iint_{x_1+x_2 \leq A} \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1-x_2}dx_1dx_2 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^A dx_1 \int_0^{A-x_1} e^{-x_1}e^{-x_2}dx_2 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^A e^{-x_1}(1 - e^{-(A-x_1)})dx_1 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^A (e^{-x_1} - e^{-A})dx_1 = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 (1 - e^{-A} - Ae^{-A}) \quad A = \sqrt{2\alpha}$$

$$\alpha = 1 - W$$

c)

$$\begin{aligned}
l &= \frac{L_1}{L_0} = \prod \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} \geq C \\
\ln l &= \sum \ln \underbrace{\frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)}}_{\eta_i} \geq \ln C \\
\frac{\sum \eta_i - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}} &\rightsquigarrow N(0, 1) \\
P(\ln l \geq \ln C | H_0) &= \alpha \quad \eta = \ln\left(\frac{e}{e-1}e^{-x}\right) = \ln \frac{e}{e-1} - x \\
\ln l &= \sum \ln \frac{e}{e-1} - \sum x_i \geq \ln C \quad G: \sum x_i \leq A \\
P(\sum x_i \leq A | H_0) &= \alpha \quad P\left(\frac{\sum x_i - nMx}{\sqrt{nDx}} \leq \frac{A - nMx}{\sqrt{nDx}} | H_0\right) = \alpha \\
Mx &= \frac{1}{2} \quad Dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{12} \\
\frac{A - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{2}}} &= u_\alpha \quad A = n\frac{1}{2} + \sqrt{n\frac{1}{12}}u_\alpha \\
G: \sum x_i &\leq n\frac{1}{2} + u_\alpha\sqrt{\frac{n}{12}} \quad \alpha_1 = \alpha \\
W &= P(\sum x_i \leq A | H_1) = P\left(\frac{\sum x_i - nMx}{\sqrt{nDx}} \leq \frac{A - nMx}{\sqrt{nDx}} | H_1\right) \\
Mx &= \int_0^1 x \frac{e}{e-1} e^{-x} dx = \frac{e-2}{e-1} \quad Mx^2 = \frac{2e-5}{e-1} \quad Dx = \frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2} \\
W &= \int_{-\infty}^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad B = \frac{\frac{n}{2} + U_\alpha \sqrt{\frac{n}{12}} - n\frac{e-2}{e-1}}{\sqrt{n\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} \quad \alpha_2 = 1 - W \\
B &= \frac{\sqrt{n} \cdot 0.082 + U_\alpha \sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty
\end{aligned}$$

Критерий состоятелен.

$$\alpha = 0.05, n = 1, x \leq 0.05, W = 0.077, \alpha_2 = 0.923$$

$$\alpha = 0.05, n = 2, x_1 + x_2 \leq 0.316, W = 0.102, \alpha_2 = 0.898$$

$$\alpha = 0.05, n = 10, \sum x_i \leq 3.5, B = -0.78, W = 0.22, \alpha_2 = 0.78$$

d) $G : x_{max} \leq C$

$$\begin{aligned}
P(\vec{x}_n \in G | H_0) &= \alpha & P(x_{max} \leq C | H_0) &= \alpha \\
\xi &\sim F(x) & \xi_{max} &\sim (F(x))^n \\
P(x_{max} \leq C | H_0) &= \underbrace{(F_0(C))^n}_C = \alpha & C &= \sqrt[n]{\alpha} \\
G : x_{max} &\leq \sqrt[n]{\alpha} & \alpha_1 &= \alpha \\
W &= P(\vec{x}_n \in G | H_1) = P(x_{max} \leq C | H_1) \\
H_1 : \xi &\sim p(x) = \frac{e}{e-1} e^{-x} \{(0, 1)\} & F_1(x) &= \frac{e}{e-1} (1 - e^{-x}) \\
W &= (F_1(C))^n = \left(\frac{e}{e-1} (1 - e^{-\sqrt[n]{\alpha}}) \right)^n & \alpha_2 &= 1 - W
\end{aligned}$$

Состоятельность $W \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
e^{-(e^{\frac{1}{n} \ln \alpha})} &= e^{-(1 - \frac{1}{n} \ln \alpha + o(\frac{1}{n}))} \\
\left(\frac{e}{e-1} (1 - e^{-1} e^{-\frac{1}{n} \ln \alpha + o(\frac{1}{n})}) \right)^n &= \left(\frac{e}{e-1} (1 - e^{-1} (1 - \frac{1}{n} \ln \alpha + o(\frac{1}{n}))) \right)^n = \\
&= \left[\frac{e}{e-1} \left(\frac{e-1}{e} + \frac{\ln \alpha}{ne} + o(\frac{1}{n}) \right) \right]^n = \\
&= \left[1 + \frac{\ln \alpha}{e-1} \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \alpha}{e-1}} = \alpha^{\frac{1}{e-1}} \neq 1
\end{aligned}$$

Не является состоятельной

13.2 Проверка сложных гипотез. КОП-критерий отношения правдоподобия

$$\xi \sim F(x, \vec{\theta}, \vec{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$$

$$H_0 : \vec{\theta} \in \Omega_0, H_1 : \vec{\theta} \in \Omega_1, \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset, \Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$$

$$\begin{aligned}
l &= \frac{L_1}{L_0} \geq C & l(x) &= \frac{\sup_{\Omega_1} L}{\sup_{\Omega_0} L} \\
G : l(x) &= \frac{\sup_{\Omega} L}{\sup_{\Omega_0} L} \geq C & P(l \geq C | H_0) &= \alpha
\end{aligned}$$

(сверху в числителе омега без индекса!)

Теорема 13.1. Если H_0 верна, то

$$2 \ln l \rightsquigarrow \chi^2(\dim \Omega - \dim \Omega_0)$$

Пример. $\xi \sim p(x) = \theta e^{-\theta x} \{(0, +\infty)\}, \theta > 0$

$$H : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$$

$$\Omega_0 = \{\theta_0\}, \theta_1 = \{\theta : \theta > \theta_0\}, \Omega = [\theta_0, +\infty)$$

Размерности соответственно 0, 1, 1

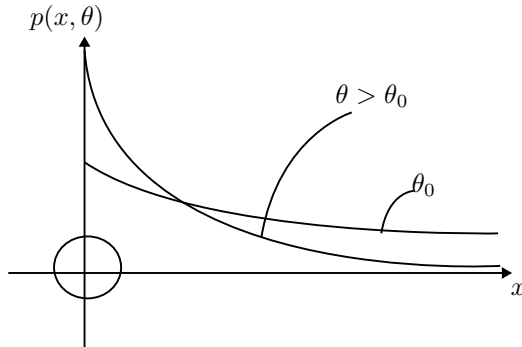
$$\underline{n = 1}$$

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) = p(x, \theta)$$

$$\sup_{\theta_0} L = \theta_0 e^{-\theta_0 x} \quad \sup_{\Omega} L = \begin{cases} \theta_0 < \frac{1}{x} : \frac{1}{x} e^{-1} \\ \theta_0 > \frac{1}{x} : \theta_0 e^{-\theta_0 x} \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} \theta_0 < \frac{1}{x} : \frac{1}{x} \frac{e^{-1}}{\theta_0 e^{-\theta_0 x}} \\ \theta_0 > \frac{1}{x} : 1 \end{cases} \geq C$$

Давим логикой

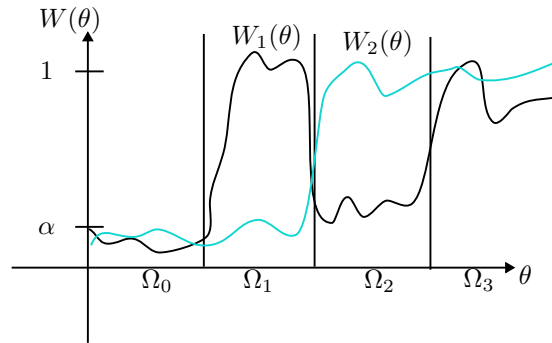
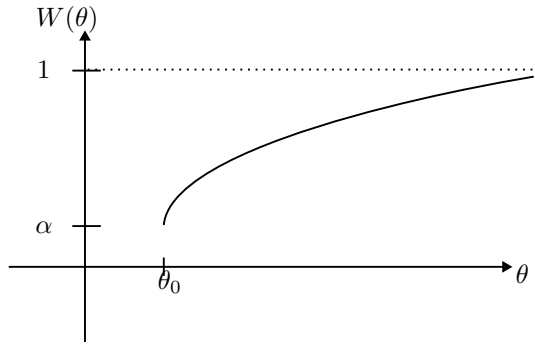


Рассматривая записимость распределения от θ , видим что у альтернативной гипотезы вероятность попасть в окрестность нуля больше, отталкиваемся от этого

$$G : x \leq C \quad P(x \leq C | H_0) = \alpha$$

$$\int_0^C \theta_0 e^{-\theta_0 x} dx = 1 - e^{-\theta_0 C} = \alpha \quad C = -\frac{1}{\theta_0} \ln(1 - \alpha)$$

$$W(\theta) = P(x \leq C | H_1) = \int_0^C \theta e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-\theta C} = 1 - e^{\frac{\theta}{\theta_0} \ln(1 - \alpha)}$$



13.3 Проверка гипотез о параметрах нормальной модели

$$\xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2), \theta_1 \in R, \theta_2 > 0$$

13.3.1 Проверка гипотез о значениях параметров

a) $H_0 : \theta_1 = a, H_1 : \theta_1 \neq a; \theta_1 > a; \theta_1 < a$

b) $H_0 : \theta_2^2 = b, H_1 : \theta_2^2 \neq b; \theta_2^2 > b; \theta_2^2 < b$

Теорема Фишера:

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1) \quad \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \frac{\bar{x} - a}{S} \sqrt{n} \sim t(n)$$

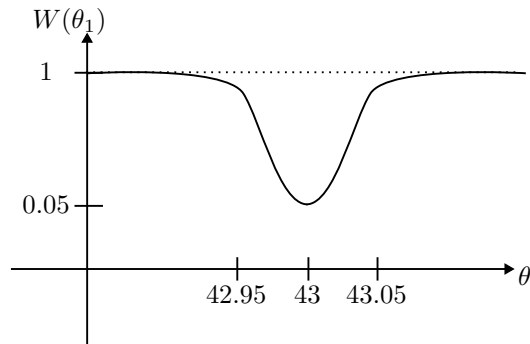
Пример. $\xi \sim N(\theta, 0,001)$, $H_0 : \theta_1 = 43$, $H_1 : \theta \neq 43$, $n = 50$, $\bar{x} = 42.972$,

$$\alpha = 0.05$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\bar{x} - 43}{.1} \sqrt{50} & G : |\Delta| \geq C & & P(|\Delta| \geq C | H_0) = \alpha \\ 2P(\Delta \geq C | H_0) &= \alpha & C &= u_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ G : |\Delta| &\geq u_{1-\alpha/2} = 1.96 \\ G : \begin{cases} \bar{x} \geq 43.027 \\ \bar{x} \leq 42.9723 \end{cases}\end{aligned}$$

$\bar{x} \in G$, отвергаем H_0

$$\begin{aligned}W(\theta_1) &= P(\vec{x}_n \in G | H_1) = P(\bar{x} \geq 43.027 | H_1) + P(\bar{x} \leq 42.9723 | H_1) = \\ &= P\left(\frac{\bar{x} - \theta_1}{0.1} \sqrt{50} \geq \underbrace{\frac{43.027 - \theta_1}{0.1} \sqrt{50}}_{a_1}\right) + P\left(\frac{\bar{x} - \theta_1}{0.1} \sqrt{50} \leq \underbrace{\frac{42.9723 - \theta_1}{0.1} \sqrt{50}}_{a_2}\right) = \\ &= \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\infty}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\end{aligned}$$



Парктические методы:

1. p-value:

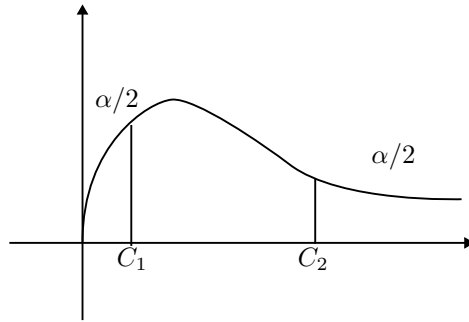
$$\begin{aligned}\text{p-value} &= P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}| | H_0) = \\ &(\Delta = \frac{\bar{x} - 43}{0.1} \sqrt{50} \quad \tilde{\Delta} = -1.98) \\ &= 2P(\Delta \geq 1.98) = 2 \int_{1.98}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.0477\end{aligned}$$

2. Доверительный интервал:

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - \alpha = 0.95 \\ -1.96 &\leq \frac{\bar{x} - a}{0.1} \sqrt{50} \leq 1.96 \\ I &= (42.9443; 42.9997) \quad a \in I\end{aligned}$$

$a = 43$, H_0 отвергаем

Пример. $\xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$, $H_0 : \theta_2^2 = 400$, $H_1 : \theta_2^2 \neq 400$, $S^2 = 784$, $n = 20$,
 $\Delta = \frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2}$



$$\begin{aligned}P(\Delta \leq C_1 | H_0) + P(\Delta \geq C_2 | H_0) &= \alpha \\ C_1 &= \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \quad C_2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \\ \chi_{0.025}^2(19) &= 8.907 \quad \chi_{0.975}^2(19) = 32.87 \\ \tilde{\Delta} &= 37.24\end{aligned}$$

Попали в критическую область, отвергаем H_0 .

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 0.0074$$

Оставляем гипотезу если $\frac{\alpha}{2} \leq \text{p-value} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}$, в данном случае не отвергаем.

13.3.2 Проверка гипотез о равенстве параметров

а) $\xi \sim N(\varphi, \theta_2^2)$, $\eta \sim N(\psi, \theta_2^2)$, независимы, θ_2^2 одинакова, но неизвестна

$H_0 : \varphi = \psi$, $H_1 : \varphi \neq \psi$, $\varphi > \psi$, $\varphi < \psi$

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} x_n & y_m \\ \frac{\bar{x} - \varphi}{\theta_2} \sqrt{n} \sim N(0, 1) & \frac{\bar{y} - \psi}{\theta_2} \sqrt{m} \sim N(0, 1) \\ \bar{x} - \varphi \sim N(0, \frac{\theta_2^2}{n}) & \bar{y} - \psi \sim N(0, \frac{\theta_2^2}{m}) \\ \Delta = \bar{x} - \varphi - (\bar{y} - \psi) \sim N(0, \frac{\theta_2^2}{n} + \frac{\theta_2^2}{m}) \\ \tilde{\xi} \sim N(\vec{0}, K) & L\tilde{\xi} \sim N(\vec{0}, LKL^T) \\ \Delta \sim N(0, \theta_2^2 \frac{n+m}{nm}) \\ \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\varphi - \psi)}{\theta_2 \sqrt{\frac{n+m}{nm}}} \sim N(0, 1) \\ \frac{S_x^2(n-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n-1) & \frac{S_y^2(m-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(m-1) \\ \frac{S_x^2(n-1) - S_y^2(m-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n+m-2) \end{matrix}
\end{aligned}$$

Теорема 13.2. Если H_0 верна, то

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \sqrt{\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

Асимптотическое приближение $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{x} - \varphi}{\theta_2'} \sqrt{n} \sim N(0, 1) \quad \frac{\bar{y} - \psi}{\theta_2''} \sqrt{m} \sim N(0, 1)$$

По лемме Слуцкого:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{x} - \varphi}{S_x} \sqrt{n} \rightsquigarrow N(0, 1) \quad \frac{\bar{y} - \psi}{S_y} \sqrt{m} \rightsquigarrow N(0, 1) \\
& \bar{x} - \varphi - (\bar{y} - \psi) \rightsquigarrow N(0, \frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m})
\end{aligned}$$

Теорема 13.3. Если H_0 верна ($\varphi = \psi$), то

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

b) $\xi \sim N(a, \varphi^2)$, $\eta \sim N(b, \psi^2)$ независ.

$H_0 : \varphi^2 = \psi^2$, $H_1 : \varphi^2 \neq \psi^2, \varphi^2 > \psi^2, \varphi^2 < \psi^2$

$$\begin{aligned} \frac{S_x^2(n-1)}{\varphi} &\sim \chi^2(n-1) & \frac{S_y^2(m-1)}{\psi^2} &\sim \chi^2(m-1) \\ \frac{S_x^2 \psi^2}{\varphi^2 S_y^2} &\sim F(n-1, m-1) \end{aligned}$$

Теорема 13.4. Если H_0 верна, то

$$\frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n-1, m-1)$$

Пример. $n = 20$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, A/B тестирование

1 группа сразу: 12, 17.5, 16, 9.5, 15, 15.5, 13, 16.5, 14.5, 17

2 группа сразу: 16, 12, 15.5, 15, 14, 18.5, 18, 13, 17.5, 17

$$\bar{x} = 14.65 \quad S_x = 2.49$$

$$\bar{y} = 15.65 \quad S_y = 2.17$$

1. норм. закон распределения

2. дисперсии равны

$H_0 : M\xi = M\eta$, $H_1 : M\xi \neq M\eta$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} \sqrt{\frac{nm}{n+m}} &\sim t(n+m-2) & \sigma &= \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}} \\ \tilde{\Delta} &= -1.044 \end{aligned}$$

$$\text{p-value} = P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}| | H_0) = 2P(\Delta \geq 1.044) = 2 \int_{1.044}^{+\infty} q(t) dt = 0.31$$

Нет оснований отвергать гипотезу

1) Критерий Колмогорова для двух выборок p-value = 0.3, p-value = 0.68

2) $H_0 : D\xi = D\eta$, $H_1 : D\xi \neq D\eta$

$$\Delta = \frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$\tilde{\Delta} = 1.147 \quad g(t) : F(9, 9)$$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{1.147}^{\infty} g(t) dt = 0.42$$

3) Проверка гипотезы случайности:

$$\Delta = \frac{I_n - \frac{n(n-1)}{4}}{\sqrt{\frac{n^3}{36}}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Для y : $I_m = 19$, $\tilde{\Delta} = -0.626$, $p\text{-value} = P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}|) = 2P(\Delta \geq 0.626) = 0.531$, нет оснований отвергать гипотезу.

Бутстрап - непараметрический бутстрап + метод доверительных инт.

$$h = M\xi - M\eta \quad \tilde{h} = \bar{x} - \bar{y} = -1 \quad \Delta = \tilde{h} - h$$

$$\begin{cases} \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_n^* \\ \vec{y}_m \rightarrow \vec{y}_m^* \end{cases} \rightarrow \Delta_i^* = \bar{x}^* - \bar{y}^* - \tilde{h}$$

$$K_1 = [N \frac{1-\beta}{2}] \quad K_2 = [N \frac{1+\beta}{2}]$$

$$P(\Delta_{(k_1)}^* < \Delta^* < \Delta_{(k_2)}^*) \approx \beta$$

$$\Delta_{(k_1)}^* < \Delta^* < \Delta_{(k_2)}^* \rightarrow (-1, 2)$$

$0 \in I$, нет оснований отвергнуть гипотезу

13.4 Множественная проверка гипотез

H_{01}, \dots, H_{0m} , всем соответствует α , $P(A_i) = \alpha$

$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_m) &= \bar{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_m) = \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_m) = 1 - (1 - \alpha)^m \approx 1 - (1 - \alpha m) = \alpha m \end{aligned}$$

13.5 Метод Бонферрони

Проверяем гипотезы на уровне α/m , адекватно при $m \leq 5$

13.6 Метод Холма-Бонферрони

Считаем $p\text{-value}$ для всех гипотез и упорядовиваем

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(m)}$$

$p_{(1)}$ сравниваем с α/m :

если $p_{(1)} \geq \alpha/m$, то нет оснований отвергнуть все гипотезы

если $p_{(1)} < \alpha/m$, отвергаем $H_{0(1)}$, $p_{(2)}$ сравн. с $\alpha/(m-1)$, ..., $p_{(m)}$ сравн. с α

14 Исследование зависимостей

14.1 Методы статистики

1. Традиционный анализ (ANCOVA)

Обнаружение зависимостей в количественных данных

2. Дисперсионный анализ (ANOVA)

Обнаружение зависимости в качественных данных

3. Регрессионный анализ

Обнаружение и определение формы зависимости

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ - факторы (регрессоры)

η - отклик

$\eta = f(\vec{x}) + \varepsilon(\vec{x})$ - аппроксимация зависимости

\vec{x} - значение $\vec{\xi}$, $\varepsilon(\vec{x})$ - сл. вел.

Базис $\Psi_1^{(\vec{x})}, \dots, \Psi_p^{(\vec{x})}$, $f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^p \beta_m \Psi_m(\vec{x})$

Выбор базиса зависит от цели:

1. Сглаживание данных

2. Факторный анализ: $\Psi : 1, \underbrace{x_1, \dots, x_k}_{\text{факторы}}, \underbrace{x_1 x_2, \dots, x_i^2}_{\text{взаим. влиян.}}$

Пример. Популяция $\xi = x$, $\eta = \dot{x}$

1. развитие $\eta = kx + \varepsilon_1$, вероят. модель.

2. ограниченность ресурсов $\eta = kx(a - x) + \varepsilon_2$

3. агрессивность внешней сред $\eta = kx(a - x)(x - b) + \varepsilon_3$

$\varepsilon(\vec{x}) \sim N(0, \sigma^2)$

$\beta_1 = M\eta$ при $x_i = 0$ - среднее влияние внешних факторов Вероятностная модель для одного отклика:

$$\eta = \sum_{m=1}^p \beta_m \Psi_m(\vec{x}) + \varepsilon(\vec{x}) - \text{линейная регрессия}$$

Выборка (y_i, \vec{x}_i) $i = 1, \dots, n$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{x}_1) & \dots & \Psi_p(\vec{x}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1(\vec{x}_n) & \dots & \Psi_p(\vec{x}_n) \end{pmatrix} - \text{матрица наблюдений}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} - \text{вектор отклика - сл. вел.} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{значение век. откл.}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(\vec{x}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} - \text{вектор ошибок - сл. вел.}$$

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} - \text{значение } \varepsilon$$

Вероятностная модель для вектора отклика

$$\eta = \Psi\beta + \varepsilon$$

Оценка по выборке

$$Y = \Psi\tilde{\beta} + e$$

$\varepsilon \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$ - сильно регулярная, открытое множество $\sigma > 0$

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} e^T e} \rightarrow \max$$

$$e^T e \rightarrow \min$$

$$(Y - \Psi\tilde{\beta})^T (Y - \Psi\tilde{\beta}) \rightarrow \min$$

$$Y - \Psi\tilde{\beta} \perp \Psi t \quad (\Psi t)^T (Y - \Psi\tilde{\beta}) = 0$$

$$t^T \underbrace{(\Psi^T Y - \Psi^T \Psi \tilde{\beta})}_0 = 0 \quad \forall t$$

$$F = \Psi^T \Psi - \text{полож. определённая (предположение)}$$

$$F^{-1} - \text{матрица Фишера}$$

$$\tilde{\beta} = F^{-1} \Psi^T Y$$

Свойства $\tilde{\beta}$: сост., асим. несмещ., асим. нормальн., асим. эффект (см. Замечание после примера)

Пример. Выборка: $x = (1, 2, 3, 4, 5)$, $y = (6, 5, 4, 5, 6)$

Базис берём $x, \frac{1}{x}$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$F = \Psi^T \Psi = \begin{pmatrix} 55 & 5 \\ 5 & 1.464 \end{pmatrix} \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0264 & -0.09 \\ -0.09 & 0.991 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\beta} = F^{-1} \Psi^T Y = \begin{pmatrix} 0.954 \\ 5.153 \end{pmatrix}$$

$$y = 0.954x + \frac{5.153}{x} + e$$

Распределение $\tilde{\beta}$ (как случайной вел)

$$\tilde{\beta} = F^{-1} \Psi^T \eta = F^{-1} \Psi^T (\Psi \beta + \varepsilon) = F^{-1} \underbrace{\Psi^T \Psi}_F \beta + F^{-1} \Psi^T \varepsilon$$

$$\underbrace{F^{-1} \Psi^T}_L \varepsilon \sim N(\vec{0}, L E L^T) = N(\vec{0}, F^{-1})$$

$$\tilde{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 F^{-1})$$

Замечание (Уточнение свойств $\tilde{\beta}$).

1. состоятельная
2. несмещ
3. нормальная
4. эффективная (trust me bro, без доказательства)

Пример.

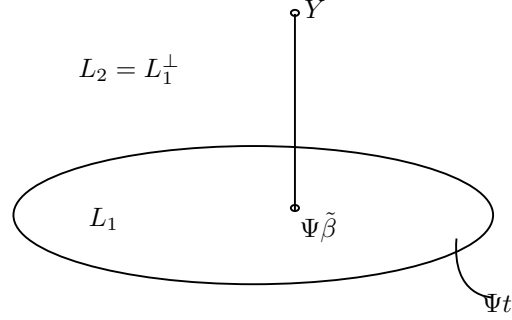
$$\tilde{\beta} \sim N \left(\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} 0.0264 & -0.09 \\ -0.09 & 0.991 \end{pmatrix} \right)$$

$$D\tilde{\beta}_1 = 0.0264\sigma^2 \quad D\tilde{\beta}_2 = 0.991\sigma^2 \quad cov(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = \sigma^2(-0.09)$$

14.1.1 Оценка парметра сигма квадрат

RSS - остаточная сумма квадратов (residual sum of squares)

$RSS = e^T e$ - числа



$$\begin{aligned}
 \eta_{L_1} &= \Psi\tilde{\beta} & \eta_{L_2} &= \eta - \eta_{L_1} \\
 \eta &= \Psi\beta + \varepsilon \\
 (\Psi\beta + \varepsilon)_{L_1} &= \Psi\beta + \varepsilon_{L_1} = \Psi\tilde{\beta} \\
 (\Psi\beta + \varepsilon)_{L_2} &= \varepsilon_{L_2} = \eta_{L_2} \text{RSS} = |\eta_{L_2}|^2 - \text{как сл. вел} \\
 \text{RSS} &= |\varepsilon_{L_2}|^2
 \end{aligned}$$

Теорема о проекциях: $\varepsilon \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$, L_1 и L_2 лин. подпр. $L_2 = L_1^\perp$, тогда ε_{L_1} , ε_{L_2} норм. распр., незав и $\frac{|\varepsilon_{L_1}|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_1)$, $\frac{|\varepsilon_{L_2}|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_2)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{RSS}}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-p) \\
 \Psi\beta + \varepsilon_{L_1} &= \Psi\tilde{\beta} \mid \cdot F^{-1}\Psi^T \\
 F^{-1}\Psi^T\Psi\beta + F^{-1}\Psi^T\varepsilon_{L_1} &= F^{-1}\Psi^T\Psi\tilde{\beta} \\
 \tilde{\beta} - \beta &= F^{-1}\Psi^T\varepsilon_{L_1}
 \end{aligned}$$

RSS и $\tilde{\beta} - \beta$ независ. как случайные величины

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}^2 &= \frac{\text{RSS}}{n-p} \\
 M[\tilde{\sigma}^2] &= M\left[\frac{\text{RSS}}{n-p}\right] = \frac{\sigma^2}{n-p} M\left[\frac{\text{RSS}}{\sigma^2}\right] = \sigma^2 \quad \text{несмещ.} \\
 D[\tilde{\sigma}^2] &= \frac{\sigma^4}{(n-p)^2} D\left[\frac{\text{RSS}}{\sigma^2}\right] = \frac{2\sigma^4}{n-p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{сост.}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$Y = \Psi \tilde{\beta} + e$$

$$e = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \Psi \begin{pmatrix} 0.954 \\ 5.153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.107 \\ 0.5155 \\ -0.58 \\ -0.104 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$RSS = e^T e = 0.664 \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{0.664}{5-2} = 0.221$$

Прогноз:

$$x_0 = 2.5 \quad \tilde{y}_0 = \Psi(x_0) \tilde{\beta}$$

$$\Psi(x_0) = (\Psi_1(x_0) \ \Psi_2(x_0)) = (2.5 \ \frac{1}{2.5})$$

$$\tilde{y}_0 = (2.5 \ \frac{1}{2.5}) \begin{pmatrix} 0.954 \\ 5.153 \end{pmatrix} = 4.45$$

14.1.2 Доверительный интервал

$$\eta_0 = \underbrace{\Psi(x_0)}_{\Psi_0} \beta + \underbrace{\varepsilon(x_0)}_{\varepsilon_0}$$

$$\tilde{y}_0 \sim N(\Psi_0 \beta, \sigma^2 \Psi_0 F^{-1} \Psi_0^T)$$

$$\eta_0 \sim N(\Psi_0 \beta, \sigma^2)$$

$$\tilde{y}_0 - \eta_0 \sim N(0, \sigma^2(1 + \Psi_0 F^{-1} \Psi^T))$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{y}_0 - \eta_0}{\sigma \sqrt{1 + \Psi_0 F^{-1} \Psi^T}} \sim N(0, 1) \\ \frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p) \end{cases} \quad \text{независ.}$$

$$\frac{\tilde{y}_0 - \eta_0}{\sqrt{1 + \Psi_0 F^{-1} \Psi_0}} \sim t(n-p)$$

$$\sqrt{\frac{RSS}{n-p}}$$

$$t_{\frac{1-\beta}{2}}(n-p) < \frac{\tilde{y}_0 - \eta_0}{\sqrt{1 + \Psi_0 F^{-1} \Psi_0}} \sqrt{\frac{n-p}{RSS}} < t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-p)$$

$$\tilde{y}_0 - \Delta < \eta_0 < \tilde{y}_0 + \Delta$$

$$\Delta = t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-p) \frac{\sqrt{RSS(1 + \Psi_0 F^{-1} \Psi_0)}}{\sqrt{n-p}}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\beta &= 0.95 & t_{0.975}(3) &= 3.182 \\ \Delta &= 3.182 \sqrt{\frac{(1 + 0.144)0.664}{3}} = 1.6 \\ \tilde{y}_0 &= 4.45 \\ &(2.85, 6.05)\end{aligned}$$

14.2 Проверка гипотез

14.2.1 Проверка значимости коэфф. регрессии

$H_0 : \beta_i = 0, H_1 : \beta_i \neq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_i &\sim N(\beta_i, \sigma^2 F_{ii}^{-1}) \\ \frac{\tilde{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{F_{ii}^{-1}}} &\sim N(0, 1) & \frac{RSS}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-p) \\ \frac{\tilde{\beta}_i - \beta}{\sqrt{RSS \cdot F_{ii}^{-1} \sqrt{n-p}}} &\sim t(n-p)\end{aligned}$$

Теорема 14.1. Если H_0 верна, то

$$\Delta = \frac{\tilde{\beta}_i}{\sqrt{RSS \cdot F_{ii}^{-1}}} \sqrt{n-p} \sim t(n-p)$$

Пример.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= 0.954 & RSS &= 0.664 & F_{11}^{-1} &= 0.0264 \\ \tilde{\Delta} &= 12.48 & \Delta &\sim t(3)\end{aligned}$$

$$\text{p-value} = P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}| | H_0) = 2P(\Delta \geq 12.48) = 2 \int_{12.48}^{\infty} g(t) dt = 0.0011$$

Отвергаем H_0 , β_1 значимый

14.2.2 Проверка равенства коэфф.

$H_0 : \beta_i = \beta_j, H_1 : \beta_i \neq \beta_j, \beta_i > \beta_j, \beta_i < \beta_j$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_i &\sim N(\beta_i, \sigma^2 F_{ii}^{-1}) \\ \tilde{\beta}_j &\sim N(\beta_j, \sigma^2 F_{jj}^{-1}) \\ \frac{\tilde{\beta}_i - \beta_i - (\tilde{\beta}_j - \beta_j)}{\sigma} &\sim N(0, F_{ii}^{-1} + F_{jj}^{-1})\end{aligned}$$

Теорема 14.2. Если H_0 верна, то

$$\Delta = \frac{\tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_j}{\sqrt{RSS(F_{ii}^{-1} + F_{jj}^{-1})}} \sqrt{n-p} \sim t(n-p)$$

Пример. $H_0 : \beta_1 = \beta_2, H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$

$$\tilde{\Delta} = -8.85 \quad \Delta \sim t(3)$$

$$\text{p-value} = 2P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}|) = 2P(\delta \geq 8.85) = 2 \int_{8.85}^{\infty} g(t) dt = 0.003$$

Различие β_i значимо

Замечание. Нормировка:

$$y_i = \frac{x_i - x_{i \min}}{x_{i \max} - x_{i \min}} \quad z_i \in [0, 1]$$

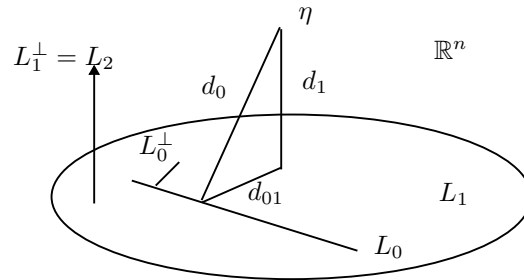
14.2.3 Сравнение регрессий

Вспомогательная задача:

$$\eta = \gamma + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(\vec{0}, \sigma^2 E)$$

γ - лежит в подпр $L_1, L_0 \subset L_1$

$$H_0 : \gamma \in L_0, H_1 : \gamma \in L_1 / L_0$$



$$d_1 = |\eta - \eta_{L_1}|^2 \quad d_0 = |\eta - \eta_{L_0}|^2 \quad d_{01} = d_0 - d_1$$

$$\mathbb{R}^n = L_0 \oplus L_0^\perp \oplus L_2$$

Теорема о проекц: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E)$ и $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$, тогда $\varepsilon_{L_1}, \varepsilon_{L_2}, \varepsilon_{L_3}$ - независ
и $\frac{|\varepsilon_{L_i}|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\dim L_i)$

$$\begin{aligned}\eta &= \gamma + \varepsilon & H_0 : \eta &= \gamma + \varepsilon \\ d_1 &= |\gamma + \varepsilon - \gamma - \varepsilon_{L_1}|^2 = |\varepsilon - \varepsilon_{L_1}|^2 \\ H_0 : d_0 &= |\gamma + \varepsilon - \gamma - \varepsilon_{L_0}|^2 = |\varepsilon - \varepsilon_{L_0}|^2\end{aligned}$$

d_{01} - проек. ε на L_0^\perp

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{d_{01}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - n_0) \\ \frac{d_1}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - n_1) \end{cases} & \text{независ.} \\ H_0 : \Delta &= \frac{d_{01}/(n_1 - n_0)}{d_1/(n - n_1)} \sim F(n_1 - n_0, n - n_1)\end{aligned}$$