

# 1 Введение

**Определение 1.1** (Динамическая система). Система у которой

- Определено состояние как совокупность величин или функция в данный момент времени
- Задан закон эволюции системы

Изучаем вектор состояния  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\vec{x} \in X \in \mathbb{R}^n$

**Определение 1.2** (Типы законов эволюции). /

- Системы с непрерывным временем (потoki)  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ ,  $\vec{x}$  - автономная
- Системы с дискретным временем (каскады)  $\vec{x}_{k+1} = T_k \vec{x}_k$ , здесь  $T_k$  - оператор, в большинстве случаев - функция

**Пример.** Для описание системы движущегося колеса используем два параметра: скорость и угол. Вектор состояния  $\vec{x} = \{x_0 \ x_1\}$ .

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$$
$$\begin{cases} x_1 = f_1(\vec{x}, t) \\ \dots \\ x_n = f_n(\vec{x}, t) \end{cases}$$

**Определение 1.3** (Автономная система). Если правая часть системы дифф. уравнений не зависит от времени система называется автономной. Когда система не автономная над ней находится сверхсистема, изменение которой нужно изучить и определить её воздействие на нашу систему в зависимости от времени.

**Пример.** Спутник на орбите - автономная система, сила действующая на него зависит только от координат. А если Земля не округлая и вращается нужно вводить начальное положение и изменение от времени, система уже не автономная.

**Пример.** Если мы смотрим на популяцию кроликов раз в пол года имеем следующий закон изменения.

$$x_{k+1} = f_1(x_k)$$

## 2 Описание системы

**Определение 2.1** (Твёрдое тело). Система мат точек, у которых не изменяется расстояние между любыми 2мя точками.

Имеем систему  $N$  материальных точек, где  $\nu$  - номер точки. Движение описывается в виде

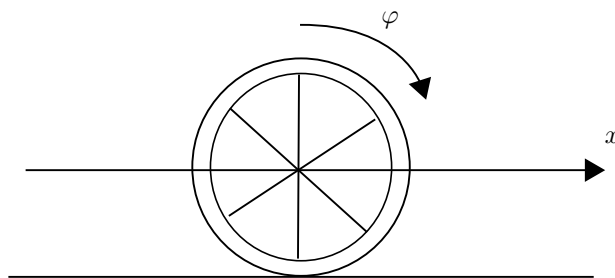
$$\vec{r}_\nu(t), \nu = 1, \dots, N$$

$$\vec{v}_\nu(t) = \dot{\vec{r}}_\nu(t) \quad \vec{w}_\nu(t) = \dot{\vec{v}}_\nu(t)$$

Связи  $f(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_\nu, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_\nu, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$ , кратко  $f(t, \vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu) = 0$ .

Конечные связи - не зависят от скорости  $f(t, \vec{r}_\nu) = 0$ , стационарные - не зависят от времени  $f(\vec{r}_\nu) = 0$ , интегрируемые  $f(t, \vec{r}_\nu) = G$

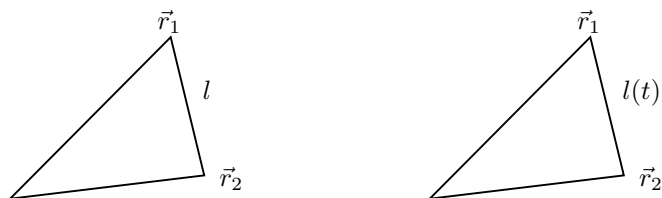
**Пример.**



В колесе без проскальзывания:

$$\dot{x}_1 = R\dot{\varphi}_1$$

**Пример.**



Стационарная и нестационарная связи:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2 \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2(t)$$

**Определение 2.2** (Голономные системы). Системы мат точек, в которых нет дифференциальных неинтегрируемых связей.

**Замечание.** Если наложено  $d$  связей (голономных) для описание положения нужно  $3N - d$  переменных.

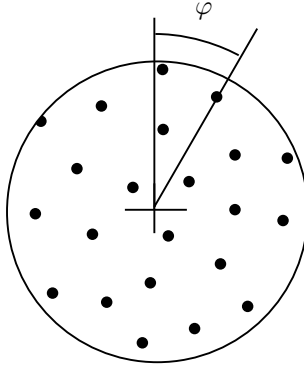
**Определение 2.3** (Кол-во степеней свободы). Минимальное количество независимых переменных которые однозначно определяют **положение** системы называется количеством степеней свободы.

**Замечание.** Состояние отличается от положения тем, что в неё входят скорости и зная состояние, мы может предсказать как система будет развиваться.

**Определение 2.4** (Параметризация системы). Введение параметров  $q_1, \dots, q_n$  ( $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ -обобщённые координаты) таких, что однозначно описывают положение:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad \nu = 1, \dots, N$$

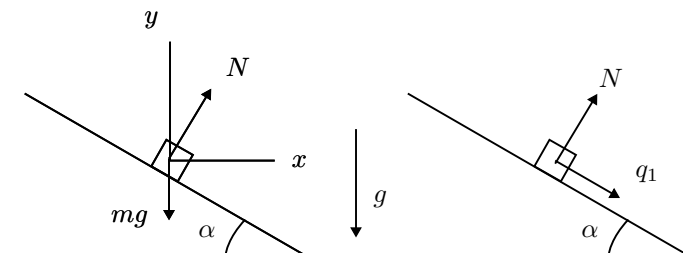
**Пример.**



Твёрдое тело круг на плоскости, три обобщённые координаты  $x, y, \varphi$  соответственно  $q_1, q_2, q_3$ .

**Определение 2.5.** Если нет нестационарных связей то  $\vec{r}_\nu(q)$  склерономные системы (не зависят от времени).

### 3 Лагранжева механика



$$\begin{cases} y = -x \tan \alpha \\ m_{\nu} \ddot{\vec{r}}_{\nu} = \sum \vec{F}_{\nu} \end{cases} \quad \ddot{q}_1 = g \sin \alpha$$

#### 3.1 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Применимо к голономным системам.

##### 3.1.1 Кинетическая энергия

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1 \dots n$$

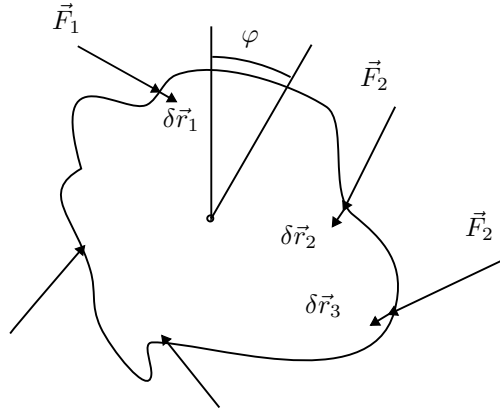
$T(\dot{q}, q, t)$  - кинетическая энергия,  $Q_i(\dot{q}, q, t)$  - обобщённые силы

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \delta \vec{r}_{\nu} = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i$$

$\delta \vec{r}_{\nu}$  - виртуальное перемещение.

**Определение 3.1** (Виртуальное перемещение). Виртуальное перемещение - перемещение точек системы с учётом наложенных связей не изменяющихся (замороженных) во времени.

**Пример.**



Одна степень свободы - угол вращения. Начинаем варьировать  $\varphi$  чтобы выразить  $\delta \vec{r}_i$  через  $\delta q_i$  получаем работу и тогда можем выразить  $Q_i$ . В случае когда степеней свободы много нужно жёстко фиксировать все кроме одной.

### 3.1.2 Потенциальная энергия

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi(q, t)}{\partial q_i}$$

**Пример.**

- Гравитационное поле:  $\Pi = mgh$  или  $\Pi = -\frac{\gamma M m}{r}$  при нескольких телах.
- Пружина  $\Pi = \frac{c(\Delta x)^2}{2}$ .
- Точка на стержне прикреплённого к оси вращения: возникает центробежная сила если рассматривать систему отсчёта связанную с осью и стержнем  $F_x(x) = m\omega^2 x$  тогда потенциальная энергия центробежной силы  $\Pi = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$

**Замечание.** Потенциальная энергия всегда увеличивается в сторону обратную направлению силы.

### 3.1.3 Лагранжиан

$$L = T - \Pi$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n}$$

### 3.1.4 Структура кинетической энергии

Для набора материальных точек ( $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q - t)$ ):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2$$

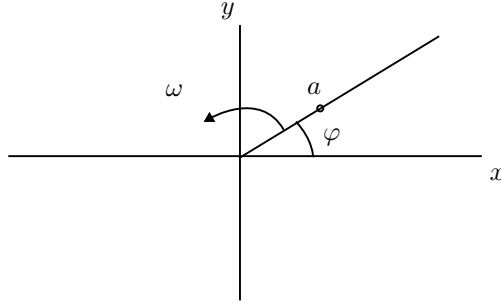
$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \quad a_j = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{a_0}_{T_0}$$

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Для склерономной  $T = T_2$

**Пример.**



$q$  - расстояние от начала стержня до точки  $a$

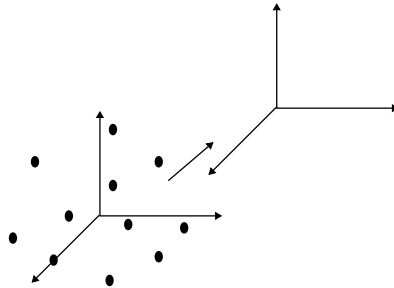
$$\varphi = \omega t \quad x = q \cos(\omega t) \quad y = q \sin(\omega t)$$

$$\dot{x} = \dot{q} \cos(\omega t) - q\omega \sin(\omega t) \quad \dot{y} = \dot{q} \sin(\omega t) + q\omega \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

$$T = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$$

**Пример.**



Теорема Кёнига:

1. Кёнигова система отсчёта
  - (а) Центр находится в центре масс
  - (б) При движении системы кёнигова система точек движется поступательно
2.  $T = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + T^{\text{отн}}$ , для твёрдого тела (на плоскости)  $T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} I_{\text{ось вр}} \omega^2$

### 3.1.5 Алгоритм решения

1. Определить количество степеней свободы
2. Выбрать обобщённую систему координат
3.  $T(\dot{q}, q, t)$
4.  $\Pi(q, t)$
5.  $L = T - \Pi$
6.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, n$
7. Вычислить производные

### 3.2 Классификация обобщённых сил

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}, q, t)$$

$\tilde{Q}$  - непотенциальная сила

$$N = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i$$

- мощность обобщённых сил.

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= -Q_q q - Q_{\dot{q}} \dot{q} \\ C &= \frac{1}{2}(Q_q + Q_q^T) = C^T \quad B = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} + Q_{\dot{q}}^T) = B^T \\ P &= \frac{1}{2}(Q_q - Q_q^T) = -P^T \quad G = \frac{1}{2}(Q_{\dot{q}} - Q_{\dot{q}}^T) = -G^T \\ \vec{Q} &= -Cq - Pq - B\dot{q} - G\dot{q}\end{aligned}$$

матрица	$q$	$\dot{q}$
симметричные	консервативные $C$	диссипативные $B$
кососимметричные	существенно непотенц. $P$	гироскопические $G$

$$T(\dot{q}, q, t) = T_2 + T_1 + T_0$$

Индекс показывает степень с которой  $T_i$  зависит от  $\dot{q}$ . В склерономной  $T_1$  и  $T_0$  нет.

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi$$

### 3.2.1 Изменение полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Условия консервативной системы (не учитывая экзотику когда слагаемые сокращаются):

1. Если система склерономная  $T_1 = T_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$
2. Если  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ .
3. Если  $\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$

## 4 Гамильтонова механика

$$\begin{aligned}L(\dot{q}, q, t) &= T - \Pi \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots = 0 \\ \dots \end{cases}\end{aligned}$$

В лагранжевой механике на очевидно что такое лагранжиан и итоговые уравнения получаются в ненормальном виде из-за чего их сложно решать.



#### 4.1 Переход к новым переменным

$q, \dot{q}, t$  ( $\dot{q}$ -обобщённые скорости)  $\Rightarrow q, p, t$  ( $p$  - обобщённый импульс)

$L(\dot{q}, q, t) \Rightarrow H(q, p, t)$  функция гамильтона (гамильтониан)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

Преобразование Лежандра:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

На место  $\dot{q}$  нужно подставить зависимость выше.

Канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Уравнения 1го порядка в нормальном виде!

$$H = T_2 - T_0 + \Pi$$

В склерономной системе  $T_0 = 0 \Rightarrow H = T_2 + \Pi = T + \Pi = E$

### 5 Первый интеграл

$$\begin{aligned} \{\dot{x}_j = g_j(x, t) \quad j = 1, \dots, m \quad m = 2n \\ x_j^* = x_j^*(t, C_1, \dots, C_m) \end{aligned}$$

**Определение 5.1** (Первый интеграл).  $f(x, t)$  - первый интеграл, если при подстановке любого решения  $x^*$ , её значение констанка.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0$$

Законы сохранения  $f(x) = const$  тоже являются первыми интегралами.

Если набрать  $m$  функционально независимых первых интегралов можно выразить  $x_j$  через соответствующие константы и  $t$  ( $f_k(x, t) = C_k$ ) и тогда не нужно решать диффур.

Если же первые интегралы не зависят от  $t$  ( $f(x) = C_k$ ) всего их может быть  $m - 1$ .

**Определение 5.2.**  $k$  первых интегралов  $f_k(x_1, \dots, x_m, t)$  называются функционально независимыми в области  $D$  если в каждой точке  $D$  ранг матрицы  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n$  равен  $k$ .

## 5.1 Гамильтоновы системы

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

**Определение 5.3** (Скобки Пуассона). Пусть  $\exists$  дважды непр. дифф. функции гамильтоновых переменных  $\varphi(q, p, t)$  и  $\psi(q, p, t)$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$$

**Замечание.**  $(\varphi, \varphi) = 0$ ,  $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$

**Теорема 5.1** (Критерий перв. инт. гам. сист.).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0$$

**Теорема 5.2** (Теорема Якоби-Пуассона). Скобка Пуассона от двух первых интегралов гамильтоновой системы также является первым интегралом.

## 5.2 Первые инт. гам. сист

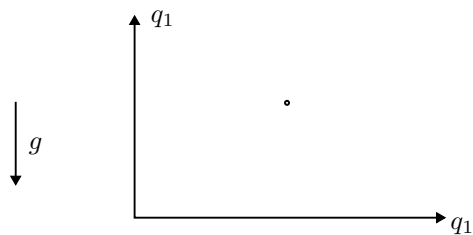
1. Если  $H$  не зависит от  $t$ , он явл. первым интегралом,  $H(q, p) = h$  - обобщённый интеграл энергии. ( $H = T + \Pi = E$ , если  $T = T_2$ )

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = (H, H) = 0$$

2. Если  $H$  не зависит от координаты  $q_k$  она называется циклической и существует первый интеграл  $p_k = \text{const}$ .
3. Если пара переменных  $q_k$  и  $p_k$  входит в  $H$  в виде одной функции  $z_k = z_k(q_k, p_k)$  то  $z_k(q_k, p_k) = \text{const}$  является первым интегралом. Переменная  $q_k$  называется отделимой.

**Пример.**

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1^2 + p_1^2 + \frac{q_2 p_2}{e^{q_1^2 + p_1^2}} \sin(q_2 p_2)$$

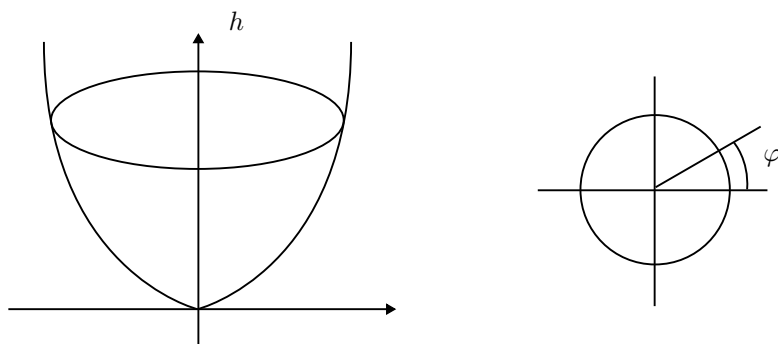


**Пример.** Материальная точка в постоянном поле тяжести.

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m}}_{const} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m} + mgq_2}_{const} = const$$

Получаем циклическую переменную, отделимую переменную и обобщённый инт. энергии.

**Пример.** Мат. точка на парабалоиде.

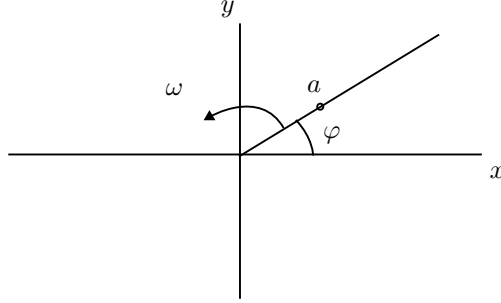


$\varphi$  добавляет степень свободы однако она не влияет на потенциальную энергию, поэтому она и называется циклической.

$$\Pi = mgh$$

**Пример.**

$$H(q, p) = T_2 - T_0 + \Pi = const$$



	инерциальная	неинерц
$T$	$\frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$	$\frac{m}{2}\dot{q}^2$
$\Pi$	0	$-\frac{m\omega^2 q^2}{2}$
$E$	$\frac{m}{2}[\dot{q}^2 + \omega^2 q^2]$	$\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$
$H$	$\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$	$\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$

### 5.3 Интегрируемость гамильтоновых систем

$$\{\dot{x}_j = g_j(x, t)\}$$

Пусть известно  $l$  первых интегралов

$$f_k(x, t) = C_k \quad k = 1, \dots, l$$

Выразим  $l$  переменных  $x_j$  через остальные  $x_{m-l}$ . Понизим порядок системы дифф. уравнений. Если система автономна

$$\{\dot{x}_j = g_j(x)\}$$

и известно  $n - 1$  первых инт. получим

$$\frac{dx_m}{dt} = g_m(x_m, C_1, \dots, C_{m-1}) \quad \int \frac{dx_m}{g_m(x_m, C_1, \dots, C_{m-1})} = t + C_m$$

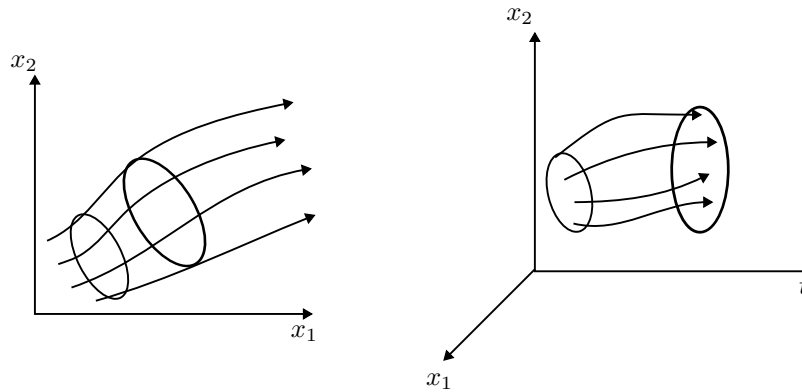
1.  $l$  циклических инт. понижают порядок системы на  $2l$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ p_i = C_k \end{cases}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial C_k} = F_k(c_1, \dots, C_l, C_{2n-2l+1}, \dots, C_{2n}, t)$$

2. Если  $n$  координат отделимы. То гамильт. сист инт. Если сист. 2-го порядка имеет 1-интеграл  $\Rightarrow$  интегрируема.

#### 5.4 Теорема Лиувилля (траектории в фазовом пр-ве)



**Теорема 5.3** (Лиувилля о сохранении фаз. объёма).

Если

$$\{\dot{x}_j = f_j(x, t)\}$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0$$

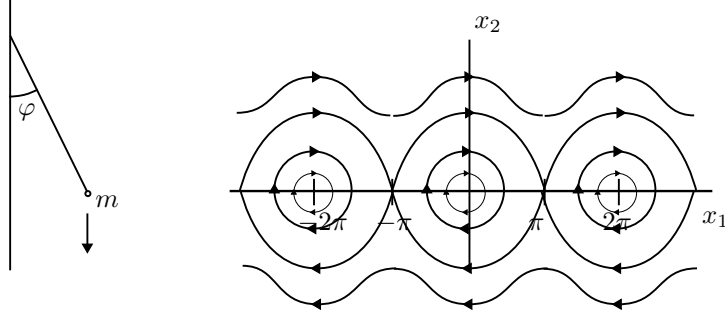
в системе сохраняется фазовый объём:

$$J = \iiint_V \delta x_1 \dots \delta x_m$$

**Замечание.** Фазовый объём в гамильтоновых системах:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) = 0$$

## 6 Теория устойчивости



$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$x_1 = \varphi \quad x_2 = \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 \end{cases}$$

Особые точки  $x_2 = 0$  и  $\sin x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = k\pi, k \in F \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

**Определение 6.1** (Положение равновесия). Такое положение механической системы при котором не изменяются положения мат точек при условии того, что в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости мат. точек были равны нулю.

**Замечание.** В кратце:

$$\vec{R}(0) = \vec{R}_0 \quad \dot{\vec{R}}(0) = 0 \Rightarrow \vec{R}(t) = \vec{R}(0) \quad \forall t > 0$$

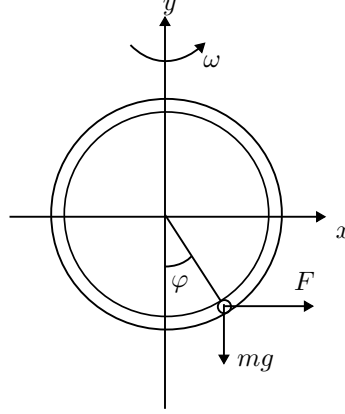
### 6.1 Стационарные заданные системы

**Определение 6.2.** Если система стационарно задана ( $\vec{R} = \vec{R}(q_1, \dots, q_n)$ ), положение  $q^0$  называется положением равновесия, если из  $q(0) = q^0$  и  $\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q(t) = q^0 \quad \forall t > 0$ .

**Теорема 6.1** (Критерий положения равновесия).

$$q^0 \text{- полож. равн} \Leftrightarrow Q_i(q^0, \dot{q} = 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \right.$$



**Пример.**

$$\begin{aligned} \Pi_c &= -\int F(x)dx = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} \\ \Pi &= mgy - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -mgr \sin \varphi - \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi}{2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= 0 \Rightarrow mgr \sin \varphi - m\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0 \\ mr \sin \varphi (g - \omega^2 r \cos \varphi) &= 0 \\ \varphi_1 &= 0 \quad \varphi_2 = \pi \\ \varphi_{3,4} &= \begin{cases} \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 r}, & \frac{g}{\omega^2 r} \leq 1 \\ \emptyset, & \frac{g}{\omega^2 r} > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Определение 6.3** (Устойчивость по Ляпунову).

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon < 0)(\exists \delta > 0)(\forall |\vec{x}(0)| = |\vec{x}_0| < \delta)(\forall t > 0) &\Leftrightarrow |\vec{x}(t)| < \varepsilon \\ (\forall \varepsilon < 0)(\exists \delta > 0)(\forall |q(0)| < \delta, \forall |\dot{q}(0)| < \delta)(\forall t > 0) &\Leftrightarrow |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Неустойчивость:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists |\vec{x}(0)| = \vec{x}_0 < \delta)(\exists t_1 > 0) \Leftrightarrow |\vec{x}(t)| > \varepsilon$$

## 6.2 Устойчивость равновесия Лагранжевых систем

$$q, \dot{q}, T(\dot{q}, q), Q_i(\dot{q}, q) \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Приводим к нулю:  $q = q - q^*$ ,  $q^*$  - значение в пол. равн.

Тогда в положении равновесия:  $q^0 = 0$  и  $\dot{q}^0 = 0$ .

### 6.2.1 Устойчивость пол. равн. консервативной системы

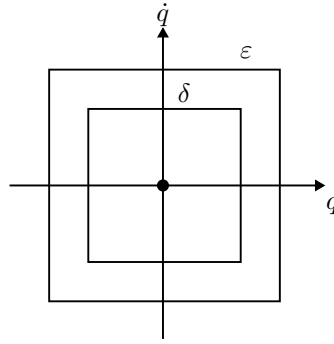
$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i}$$

Устойчивость определяется  $\Pi(q)$  (принимая  $\Pi(q^*) = 0$ )

**Теорема 6.2** (Лагранжа-Дирихле (дост. усл.)). Если в некоторой  $\Delta$  - окрестности положения равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет строгий минимум, это положение равновесия устойчиво.

То есть:

$$|q| < \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi(q) = 0, |q| = 0 \\ \Pi(q) > 0, |q| \neq 0 \end{cases}$$



*Доказательство.*  $E(q, \dot{q}) = T + \Pi$

$T(\dot{q}, q) > 0$  при  $|\dot{q}| \neq 0 \Rightarrow E(\dot{q}, q) > 0$  если  $\{q, \dot{q}\} \neq 0, |q| < \Delta$

Возьмём  $0 < \varepsilon < \Delta$ ,  $E$  достигает на границе минимум  $E \geq E^* > 0$ ,  $\exists \delta$  - окрестность:  $|q| < \delta, |\dot{q}| < \delta, E(0) < E^*, \forall t > 0 \Leftrightarrow E(t) = E(0) < E^*$   $\square$



**Теорема 6.3.** ( $\Pi(q)$  достаточное условие экстремума)

$$\Pi(q) = \underbrace{\Pi(0)}_0 + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \Big|_{q=0}}_0 q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0} q_i q_j + \Pi_m(q)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \quad \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$$

Если  $\Pi_2$  полож. опред., то  $\Pi$  в точке  $q = 0$  имеет строгий минимум  
 $\Rightarrow$  критерий Сильвестра.

### 6.2.2 Теоремы неуст. пол. равн. консервативной системы

**Теорема 6.4** (Ляпунова I). Если в положении равновесия конс. системы у потенц. энергии  $\Pi(q)$  отсутствует минимум (в том числе нестрогий) и это можно определить по  $\Pi_2$ , то данное положение неустойчиво.

**Пример.**

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} q^T C q$$

$$\Pi(q) = 4q_1^2 - 2q_1 q_2 + 2q_2^2 = \frac{1}{2} (8q_1^2 - 4q_1 q_2 + 4q_2^2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Критерий Сильвестра выполнен  $\Rightarrow$  устойчивое положение равновесия

### 6.2.3 Границы теорем

1.  $\Pi$  не зависит от компоненты  $q$
2. Разложение 2-ой степени не зависит от компоненты  $q$

### 6.2.4 Степень неустойчивости

$\Pi - 2 = \frac{1}{2} q^T C q$  приводим  $C$  к диаг. виду

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i \theta_i^2$$

Число отрицательных собственных чисел  $r_i$  назыв. степенью неуст.

### 6.2.5 Гироскопические и диссипативные силы

**Определение 6.4** (Гироскопические силы).

$$\tilde{Q}_i : \forall \dot{q} \hookrightarrow \dot{q}^T \tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$$

**Определение 6.5** (Диссипативные силы).

$$Q_i^* : \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i \leq 0$$

**Определение 6.6** (Строго диссипативные силы).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = 0, \dot{q}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i < 0, \dot{q}_i \neq 0 \end{cases}$$

### 6.3 Асимптотическая устойчивость

Динамическая система:

$$\{\dot{x}_j = f_j(x, t) \quad j = 1, \dots, n$$

**Определение 6.7.** Нулевое решение  $\vec{x}(t) = 0$  называется притягивающим, если  $\exists \Delta : \forall |\vec{x}(0)| < \Delta \exists \lim_{t \rightarrow \infty} |x(0)| = 0$ .

**Определение 6.8.** Нулевое решение называется асимпт. уст., если оно уст. и притягивающее.