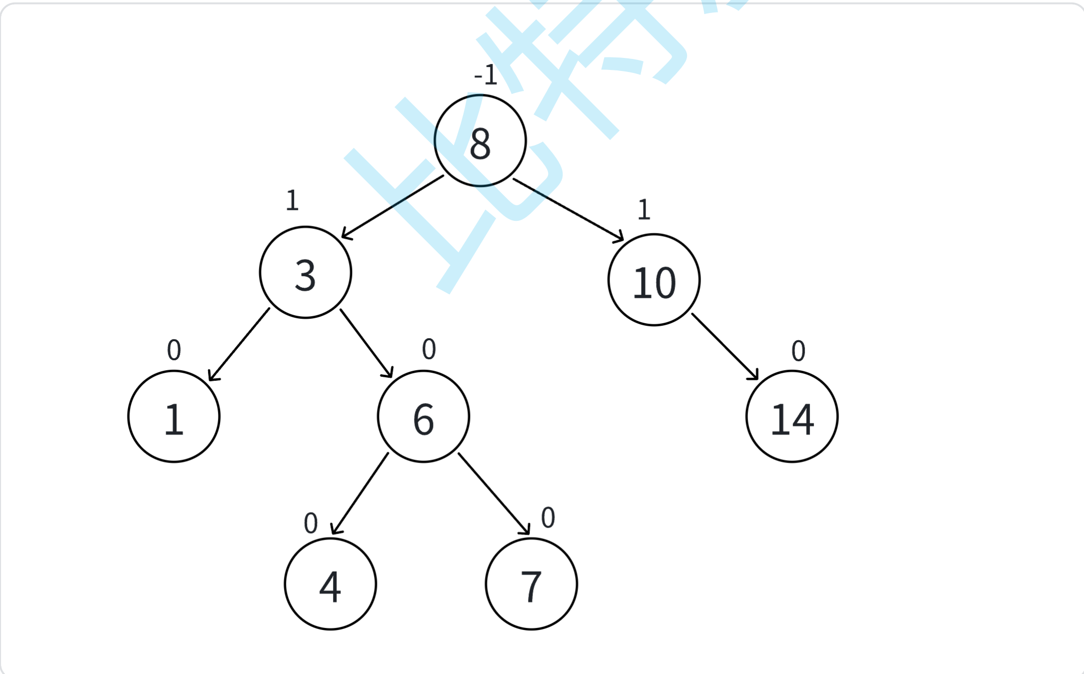
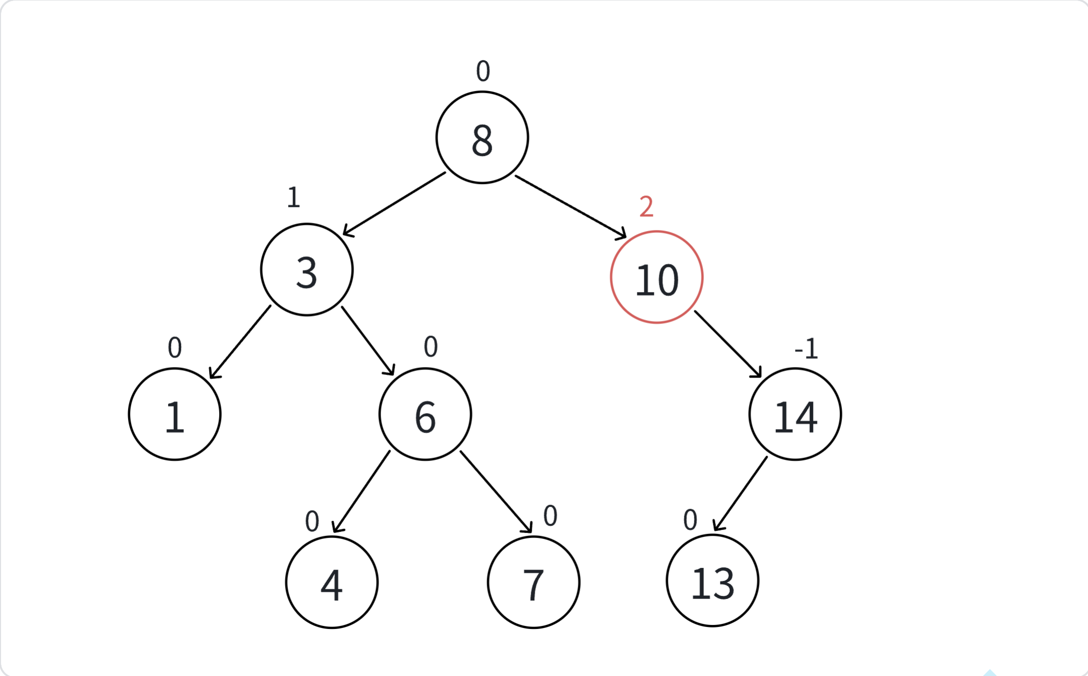
05.AVL树实现

1. AVL的概念

- AVL树是最先发明的自平衡二叉查找树，AVL是一颗空树，或者具备下列性质的二叉搜索树：它的左右子树都是AVL树，且左右子树的高度差的绝对值不超过1。AVL树是一颗高度平衡搜索二叉树，通过控制高度差去控制平衡。
- AVL树得名于它的发明者G. M. Adelson-Velsky和E. M. Landis是两个前苏联的科学家，他们在1962年的论文《An algorithm for the organization of information》中发表了它。
- AVL树实现这里我们引入一个平衡因子(balance factor)的概念，每个结点都有一个平衡因子，任何结点的平衡因子等于右子树的高度减去左子树的高度，也就是说任何结点的平衡因子等于0/1/-1，AVL树并不是必须要平衡因子，但是有了平衡因子可以更方便我们去进行观察和控制树是否平衡，就像一个风向标一样。
- 思考一下为什么AVL树是高度平衡搜索二叉树，要求高度差不超过1，而不是高度差是0呢？0不是更好的平衡吗？画画图分析我们发现，不是不想这样设计，而是有些情况是做不到高度差是0的。比如一棵树是2个结点，4个结点等情况下，高度差最好就是1，无法做到高度差是0
- AVL树整体结点数量和分布和完全二叉树类似，高度可以控制在 $logN$ ，那么增删查改的效率也可以控制在 $O(logN)$ ，相比二叉搜索树有了本质的提升。





2. AVL树的实现

2.1 AVL树的结构

```
template<class K, class V>
struct AVLTreeNode
{
	// 需要parent指针，后续更新平衡因子可以看到
	pair<K, V> _kv;
	AVLTreeNode<K, V>* _left;
	AVLTreeNode<K, V>* _right;
	AVLTreeNode<K, V>* _parent;
	int _bf; // balance factor

	AVLTreeNode(const pair<K, V>& kv)
		:_kv(kv)
		, _left(nullptr)
		, _right(nullptr)
		, _parent(nullptr)
		,_bf(0)
	{}
};

template<class K, class V>
class AVLTree
{
	typedef AVLTreeNode<K, V> Node;
public:
	//...
```

```
private:
        Node* _root = nullptr;
};
```

2.2 AVL树的插入

2.2.1 AVL树插入一个值的大概过程

1. 插入一个值按二叉搜索树规则进行插入。
2. 新增结点以后，只会影响祖先结点的高度，也就是可能会影响部分祖先结点的平衡因子，所以更新从新增结点->根结点路径上的平衡因子，实际中最坏情况下要更新到根，有些情况更新到中间就可以停止了，具体情况我们下面再详细分析。
3. 更新平衡因子过程中没有出现问题，则插入结束
4. 更新平衡因子过程中出现不平衡，对不平衡子树旋转，旋转后本质调平衡的同时，本质降低了子树的高度，不会再影响上一层，所以插入结束。

2.2.2 平衡因子更新

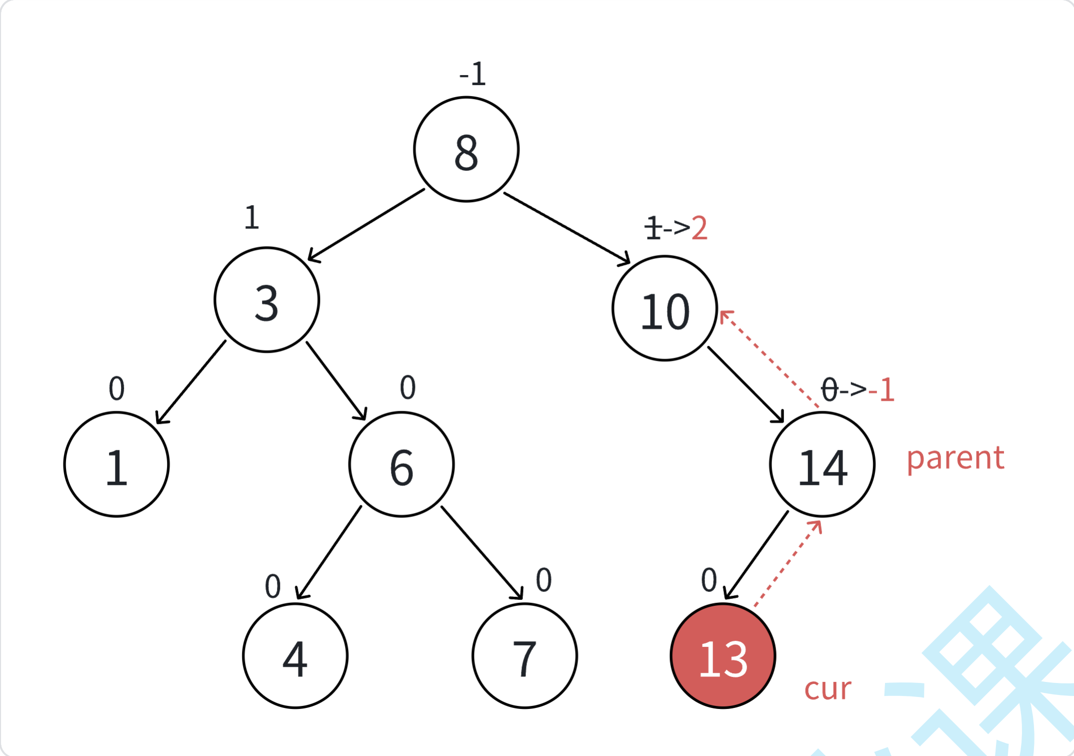
更新原则：

- 平衡因子 = 右子树高度-左子树高度
- 只有子树高度变化才会影响当前结点平衡因子。
- 插入结点，会增加高度，所以新增结点在parent的右子树，parent的平衡因子++，新增结点在parent的左子树，parent平衡因子--
- parent所在子树的高度是否变化决定了是否会继续往上更新

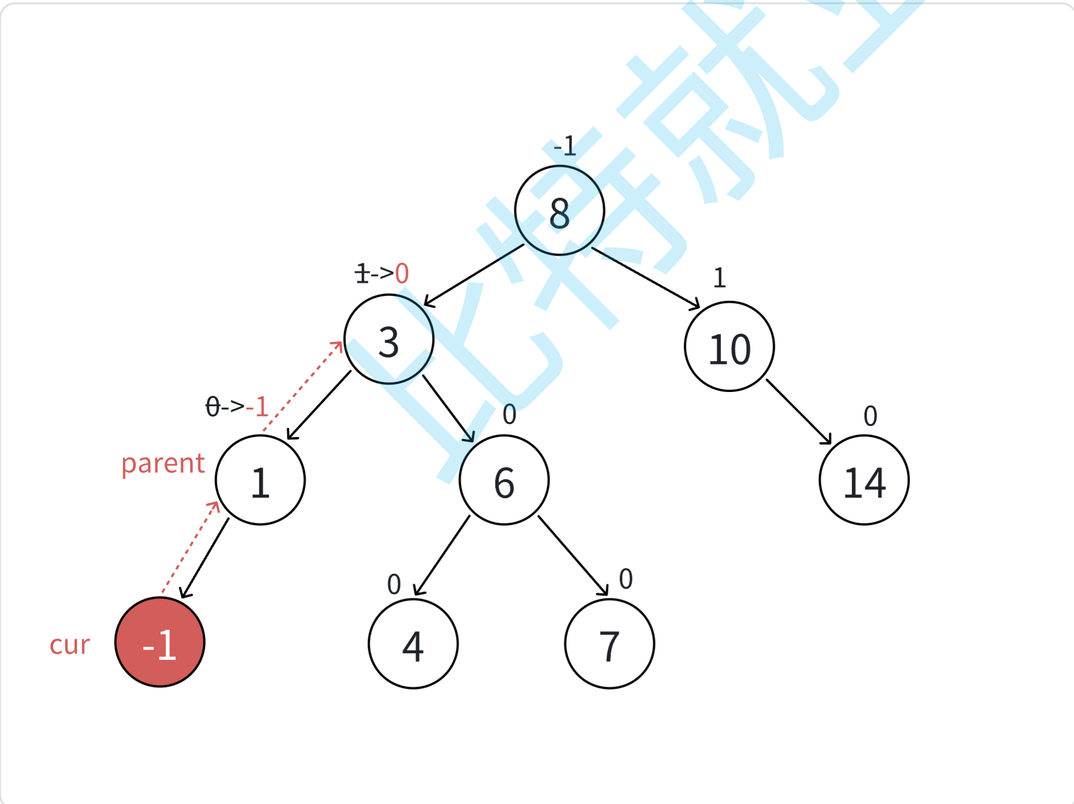
更新停止条件：

- 更新后parent的平衡因子等于0，更新中parent的平衡因子变化为-1->0 或者 1->0，说明更新前parent子树一边高一边低，新增的结点插入在低的那边，插入后parent所在的子树高度不变，不会影响parent的父亲结点的平衡因子，更新结束。
- 更新后parent的平衡因子等于1 或 -1，更新前更新中parent的平衡因子变化为0->1 或者 0->-1，说明更新前parent子树两边一样高，新增的插入结点后，parent所在的子树一边高一边低，parent所在的子树符合平衡要求，但是高度增加了1，会影响parent的父亲结点的平衡因子，所以要继续向上更新。
- 更新后parent的平衡因子等于2 或 -2，更新前更新中parent的平衡因子变化为1->2 或者 -1->-2，说明更新前parent子树一边高一边低，新增的插入结点在高的那边，parent所在的子树高的那边更高了，破坏了平衡，parent所在的子树不符合平衡要求，需要旋转处理，旋转的目标有两个：1、把parent子树旋转平衡。2、降低parent子树的高度，恢复到插入结点以前的高度。所以旋转后也不需要继续往上更新，插入结束。
- 不断更新，更新到根，跟的平衡因子是1或-1也停止了。

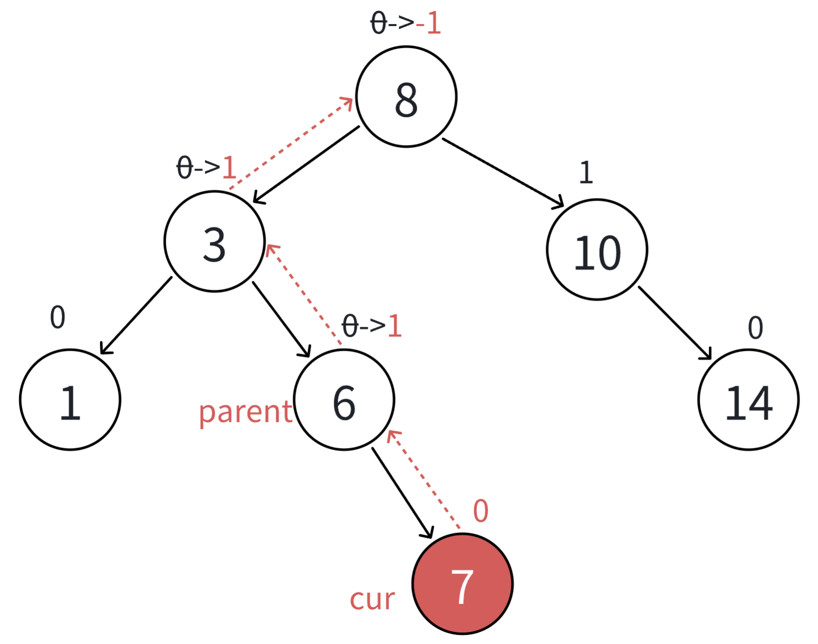
更新到10结点，平衡因子为2，10所在的子树已经不平衡，需要旋转处理



更新到中间结点，3为根的子树高度不变，不会影响上一层，更新结束



最坏更新到根停止



2.2.3 插入结点及更新平衡因子的代码实现

```
bool Insert(const pair<K, V>& kv)
{
        if (_root == nullptr)
        {
                _root = new Node(kv);
                return true;
        }

        Node* parent = nullptr;
        Node* cur = _root;
        while (cur)
        {
                if (cur->_kv.first < kv.first)
                {
                        parent = cur;
                        cur = cur->_right;
                }
                else if (cur->_kv.first > kv.first)
                {
                        parent = cur;
                        cur = cur->_left;
                }
                else
                {
                        return false;
                }
        }
```

```cpp

    cur = new Node(kv);
    if (parent->_kv.first < kv.first)
    {
        parent->_right = cur;
    }
    else
    {
        parent->_left = cur;
    }
    cur->_parent = parent;

    // 更新平衡因子
    while (parent)
    {
        // 更新平衡因子
        if (cur == parent->_left)
            parent->_bf--;
        else
            parent->_bf++;

        if (parent->_bf == 0)
        {
            // 更新结束
            break;
        }
        else if (parent->_bf == 1 || parent->_bf == -1)
        {
            // 继续往上更新
            cur = parent;
            parent = parent->_parent;
        }
        else if (parent->_bf == 2 || parent->_bf == -2)
        {
            // 不平衡了，旋转处理
            break;
        }
        else
        {
            assert(false);
        }
    }

    return true;
}
```

2.3 旋转

2.3.1 旋转的原则

1. 保持搜索树的规则
2. 让旋转的树从不满足变平衡，其次降低旋转树的高度

旋转总共分为四种，左单旋/右单旋/左右双旋/右左双旋。

说明：下面的图中，有些结点我们给的是具体值，如10和5等结点，这里是为了方便讲解，实际中是什么值都可以，只要大小关系符合搜索树的性质即可。

2.3.2 右单旋

- 本图1展示的是10为根的树，有a/b/c抽象为三棵高度为h的子树(h>=0)，a/b/c均符合AVL树的要求。10可能是整棵树的根，也可能是一个整棵树中局部的子树的根。这里a/b/c是高度为h的子树，是一种概括抽象表示，他代表了所有右单旋的场景，实际右单旋形态有很多种，具体图2/图3/图4/图5进行了详细描述。
- 在a子树中插入一个新结点，导致a子树的高度从h变成h+1，不断向上更新平衡因子，导致10的平衡因子从-1变成-2，10为根的树左右高度差超过1，违反平衡规则。10为根的树左边太高了，需要往右边旋转，控制两棵树的平衡。
- 旋转核心步骤，因为5 < b子树的值 < 10，将b变成10的左子树，10变成5的右子树，5变成这棵树新的根，符合搜索树的规则，控制了平衡，同时这棵的高度恢复到了插入之前的h+2，符合旋转原则。如果插入之前10整棵树的一个局部子树，旋转后不会再影响上一层，插入结束了。

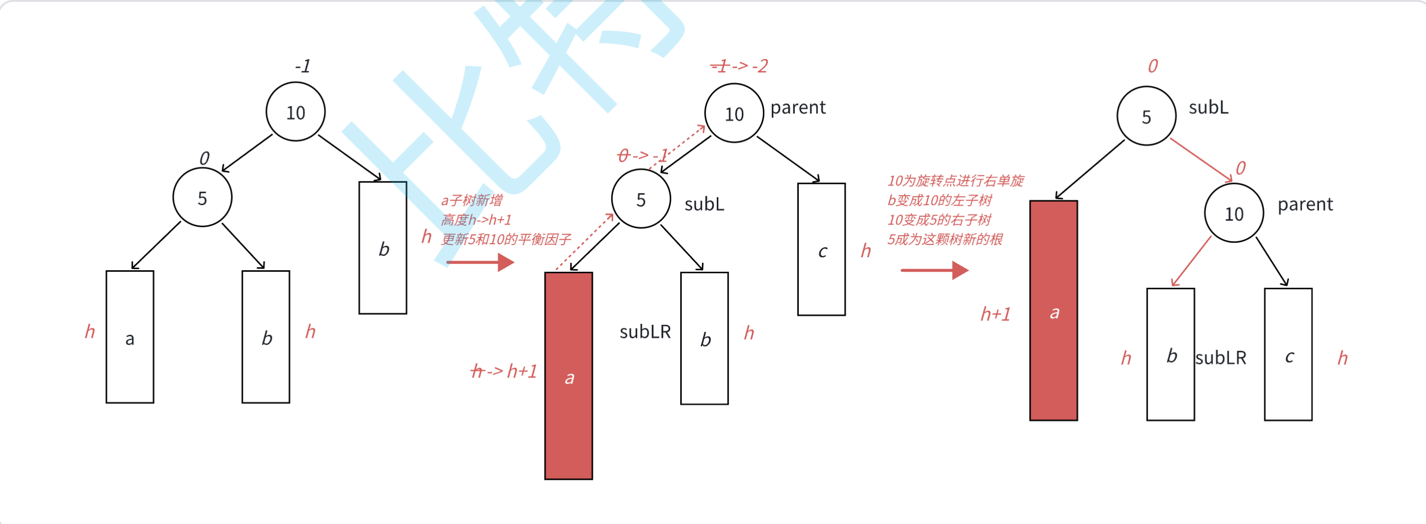
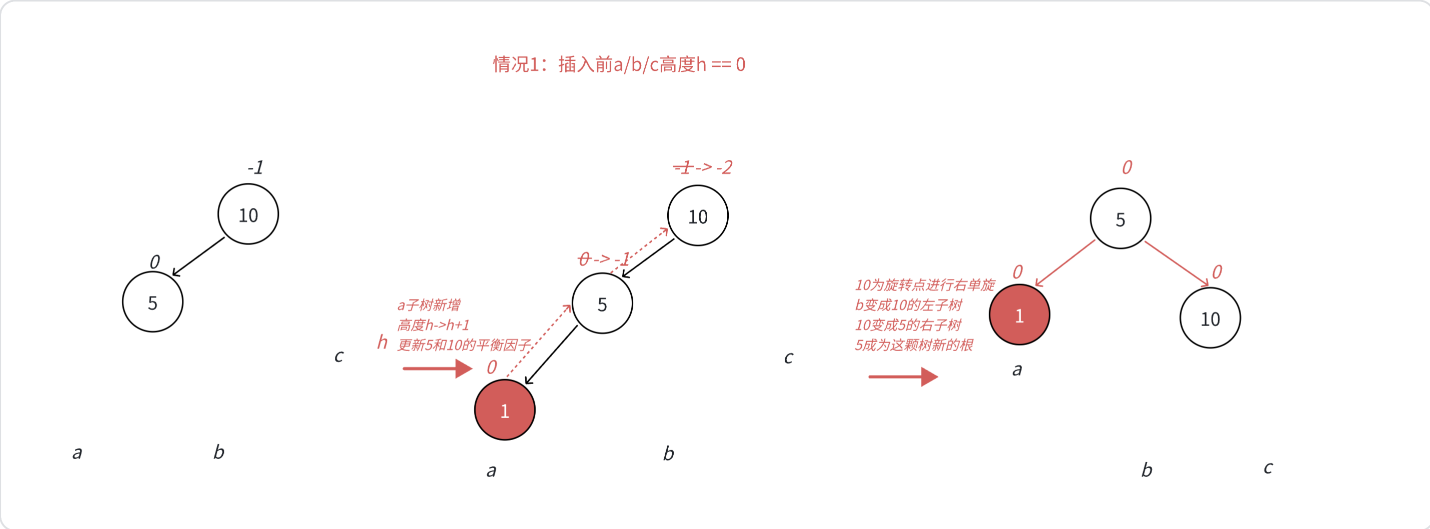
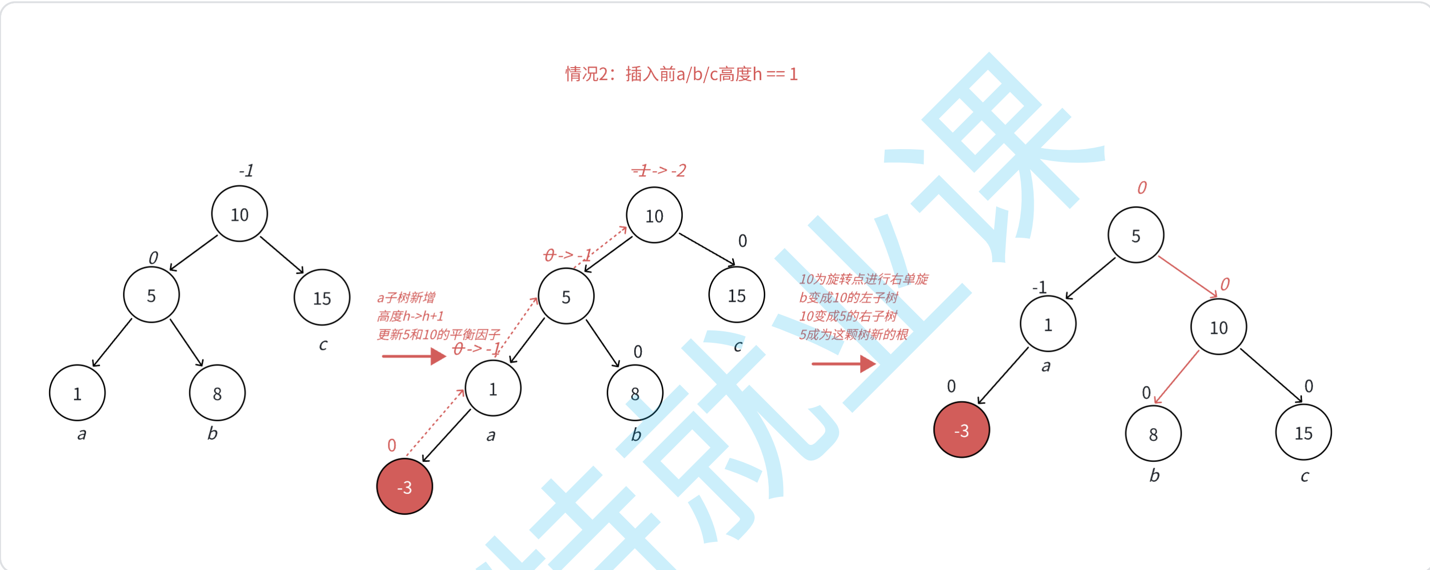


图1



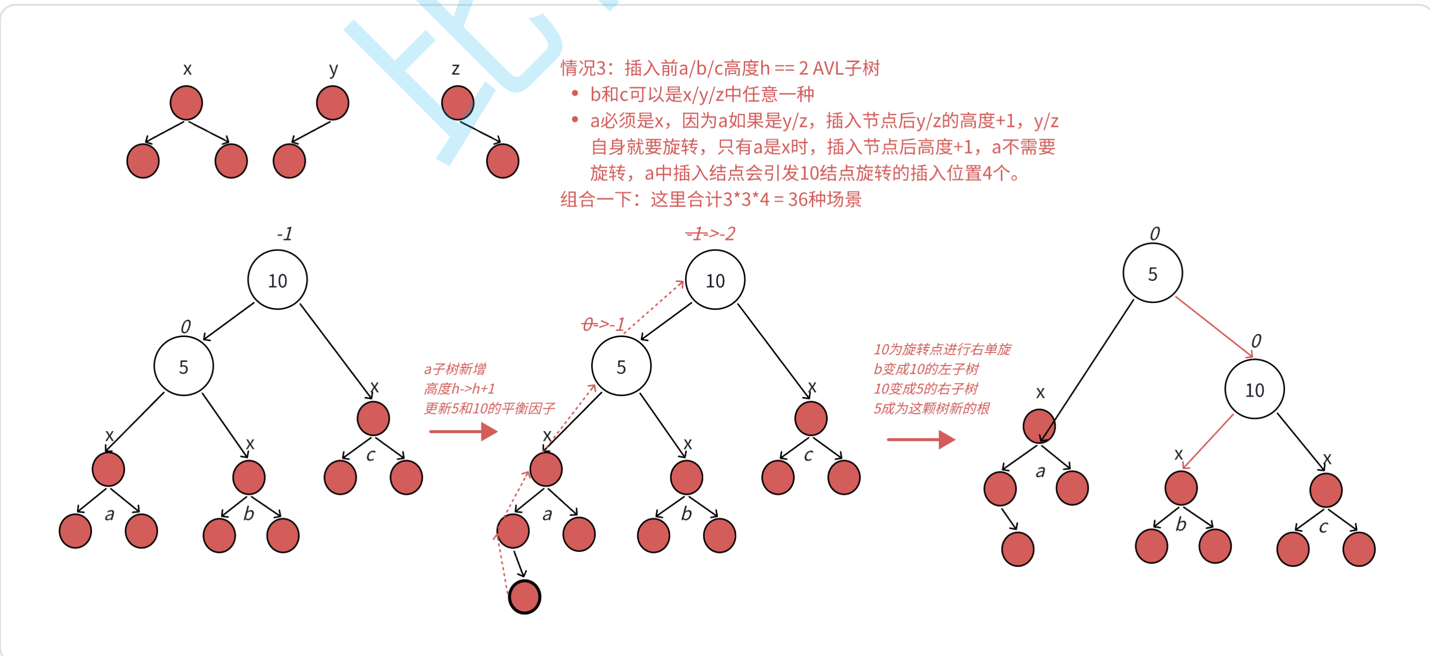
情况1：插入前a/b/c高度h == 0
-1
10
0
5
a
b
c
~~-1~~ -> -2
~~0~~ -> -1
a子树新增
高度h->h+1
更新5和10的平衡因子
h
0
1
10为旋转点进行右单旋
b变成10的左子树
10变成5的右子树
5成为这颗树新的根

图2



情况2：插入前a/b/c高度h == 1
-1
10
0
5
15
1
8
a
b
c
~~-1~~ -> -2
~~0~~ -> -1
a子树新增
高度h->h+1
更新5和10的平衡因子
-3
10为旋转点进行右单旋
b变成10的左子树
10变成5的右子树
5成为这颗树新的根

图3



x
y
z
情况3：插入前a/b/c高度h == 2 AVL子树
• b和c可以是x/y/z中任意一种
• a必须是x，因为a如果是y/z，插入节点后y/z的高度+1，y/z自身就要旋转，只有a是x时，插入节点后高度+1，a不需要旋转，a中插入结点会引发10结点旋转的插入位置4个。
组合一下：这里合计3*3*4 = 36种场景
-1
10
0
5
a
b
c
~~-1~~->-2
~~0~~->-1
a子树新增
高度h->h+1
更新5和10的平衡因子
10为旋转点进行右单旋
b变成10的左子树
10变成5的右子树
5成为这颗树新的根

图4

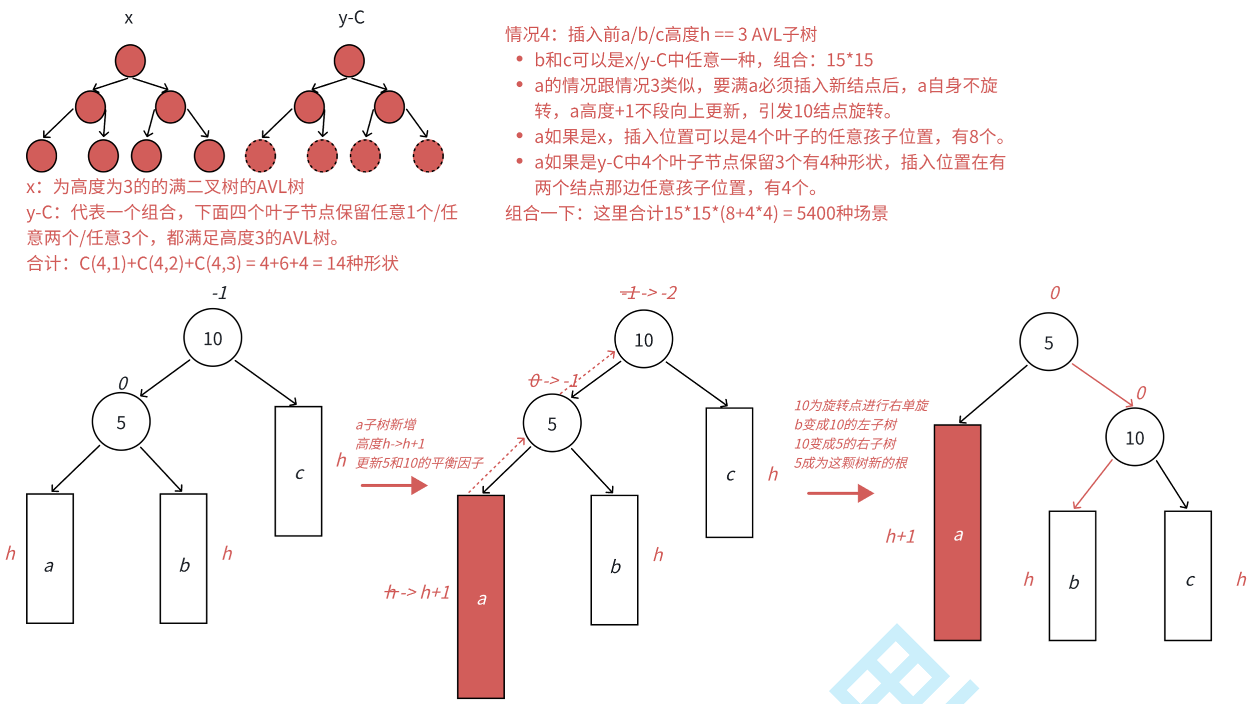


图5

2.3.3 右单旋代码实现

```
void  RotateR(Node* parent)
{
        Node* subL = parent->_left;
        Node* subLR = subL->_right;

        // 需要注意除了要修改孩子指针指向，还是修改父亲
        parent->_left = subLR;
        if (subLR)
                subLR->_parent = parent;

        Node* parentParent = parent->_parent;

        subL->_right = parent;
        parent->_parent = subL;

        // parent有可能是整棵树的根，也可能是局部的子树
        // 如果是整棵树的根，要修改_root
        // 如果是局部的指针要跟上一层链接
        if (parentParent == nullptr)
        {
                _root = subL;
                subL->_parent = nullptr;
        }
        else
```

```
        {
                if (parent == parentParent->_left)
                {
                        parentParent->_left = subL;
                }
                else
                {
                        parentParent->_right = subL;
                }

                subL->_parent = parentParent;
        }

        parent->_bf = subL->_bf = 0;
}
```

2.3.4 左单旋

- 本图6展示的是10为根的树，有a/b/c抽象为三棵高度为h的子树(h>=0)，a/b/c均符合AVL树的要求。10可能是整棵树的根，也可能是一个整棵树中局部的子树的根。这里a/b/c是高度为h的子树，是一种概括抽象表示，他代表了所有右单旋的场景，实际右单旋形态有很多种，具体跟上面左旋类似。
- 在a子树中插入一个新结点，导致a子树的高度从h变成h+1，不断向上更新平衡因子，导致10的平衡因子从1变成2，10为根的树左右高度差超过1，违反平衡规则。10为根的树右边太高了，需要往左边旋转，控制两棵树的平衡。
- 旋转核心步骤，因为10 < b子树的值 < 15，将b变成10的右子树，10变成15的左子树，15变成这棵树新的根，符合搜索树的规则，控制了平衡，同时这棵的高度恢复到了插入之前的h+2，符合旋转原则。如果插入之前10整棵树的一个局部子树，旋转后不会再影响上一层，插入结束了。

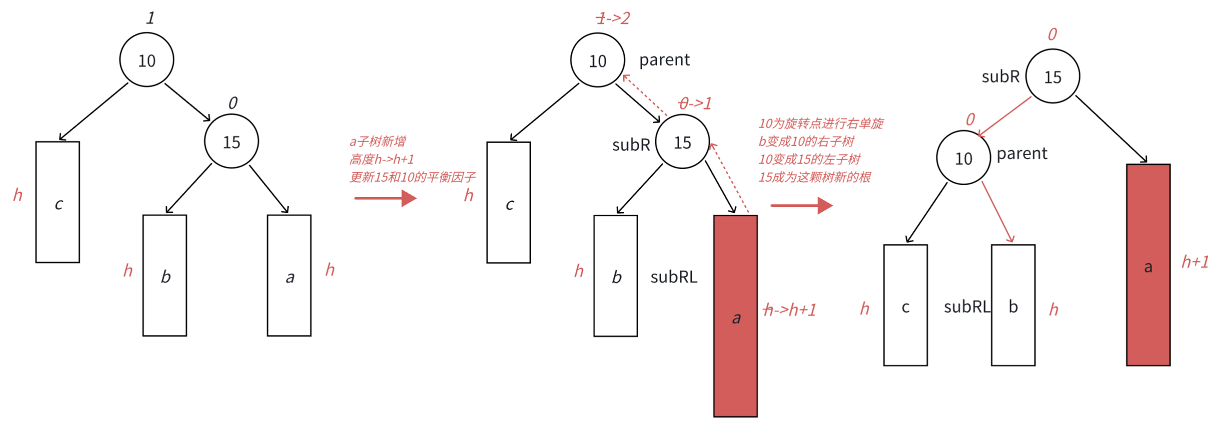


图6

2.3.5 左单旋代码实现

```
void RotateL(Node* parent)
{
        Node* subR = parent->_right;
        Node* subRL = subR->_left;

        parent->_right = subRL;
        if(subRL)
                subRL->_parent = parent;

        Node* parentParent = parent->_parent;

        subR->_left = parent;
        parent->_parent = subR;

        if (parentParent == nullptr)
        {
                _root = subR;
                subR->_parent = nullptr;
        }
        else
        {
                if (parent == parentParent->_left)
                {
                        parentParent->_left = subR;
                }
                else
                {
                        parentParent->_right = subR;
                }

                subR->_parent = parentParent;
        }

        parent->_bf = subR->_bf = 0;
}
```

2.3.6 左右双旋

通过图7和图8可以看到，左边高时，如果插入位置不是在a子树，而是插入在b子树，b子树高度从h变成h+1，引发旋转，右单旋无法解决问题，右单旋后，我们的树依旧不平衡。右单旋解决的纯粹的左边高，但是插入在b子树中，10为跟的子树不再是单纯的左边高，对于10是左边高，但是对于5是右边高，需要用两次旋转才能解决，以5为旋转点进行一个左单旋，以10为旋转点进行一个右单旋，这棵树这棵树就平衡了。

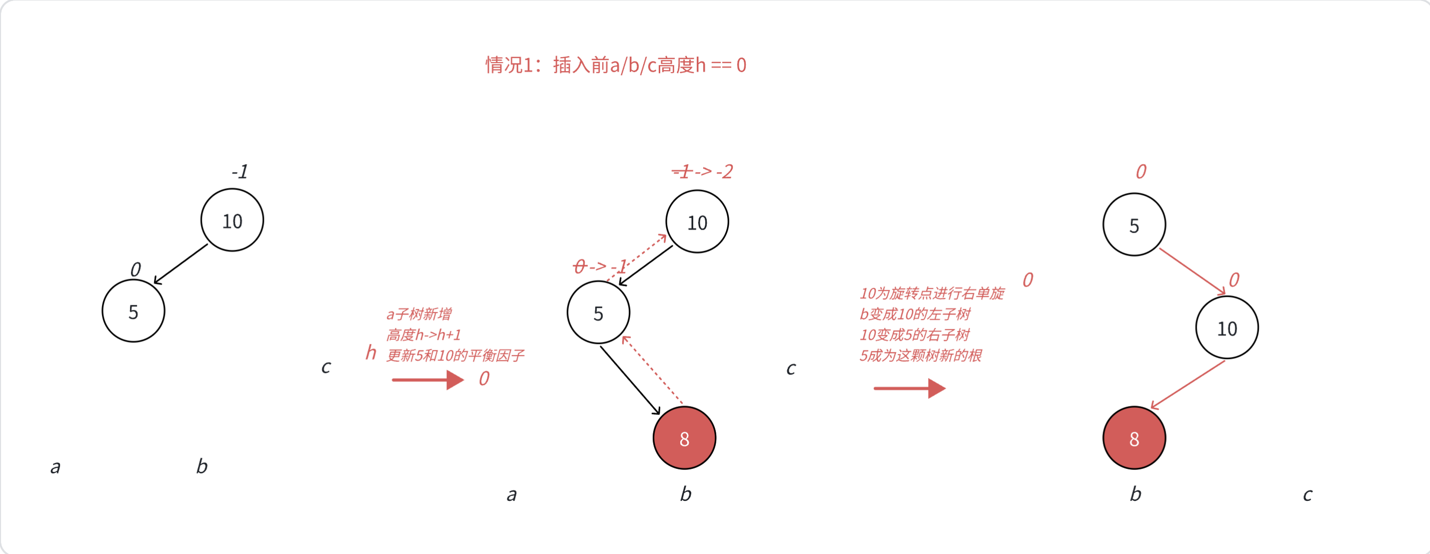


图7

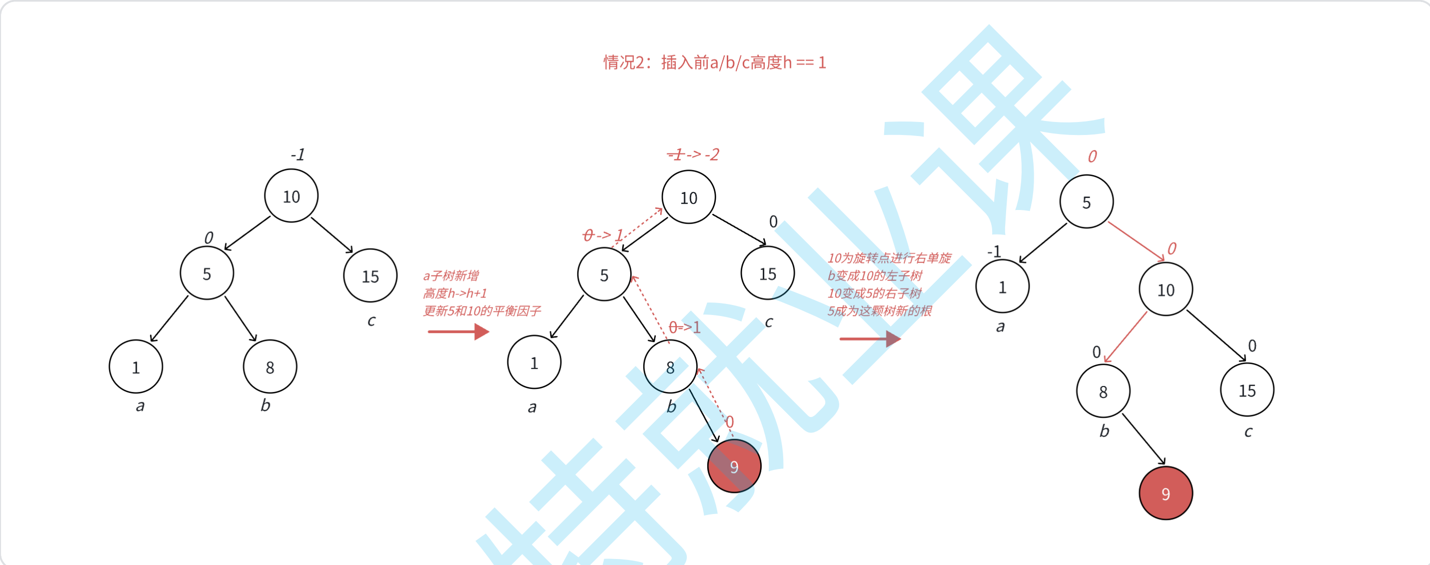


图8

- 图7和图8分别为左右双旋中h==0和h==1具体场景分析，下面我们将a/b/c子树抽象为高度h的AVL子树进行分析，另外我们需要把b子树的细节进一步展开为8和左子树高度为h-1的e和f子树，因为我们要对b的父亲5为旋转点进行左单旋，左单旋需要动b树中的左子树。b子树中新增结点的位置不同，平衡因子更新的细节也不同，通过观察8的平衡因子不同，这里我们要分三个场景讨论。
- 场景1：h >= 1时，新增结点插入在e子树，e子树高度从h-1并为h并不断更新8->5->10平衡因子，引发旋转，其中8的平衡因子为-1，旋转后8和5平衡因子为0，10平衡因子为1。
- 场景2：h >= 1时，新增结点插入在f子树，f子树高度从h-1变为h并不断更新8->5->10平衡因子，引发旋转，其中8的平衡因子为1，旋转后8和10平衡因子为0，5平衡因子为-1。
- 场景3：h == 0时，a/b/c都是空树，b自己就是一个新增结点，不断更新5->10平衡因子，引发旋转，其中8的平衡因子为0，旋转后8和10和5平衡因子均为0。

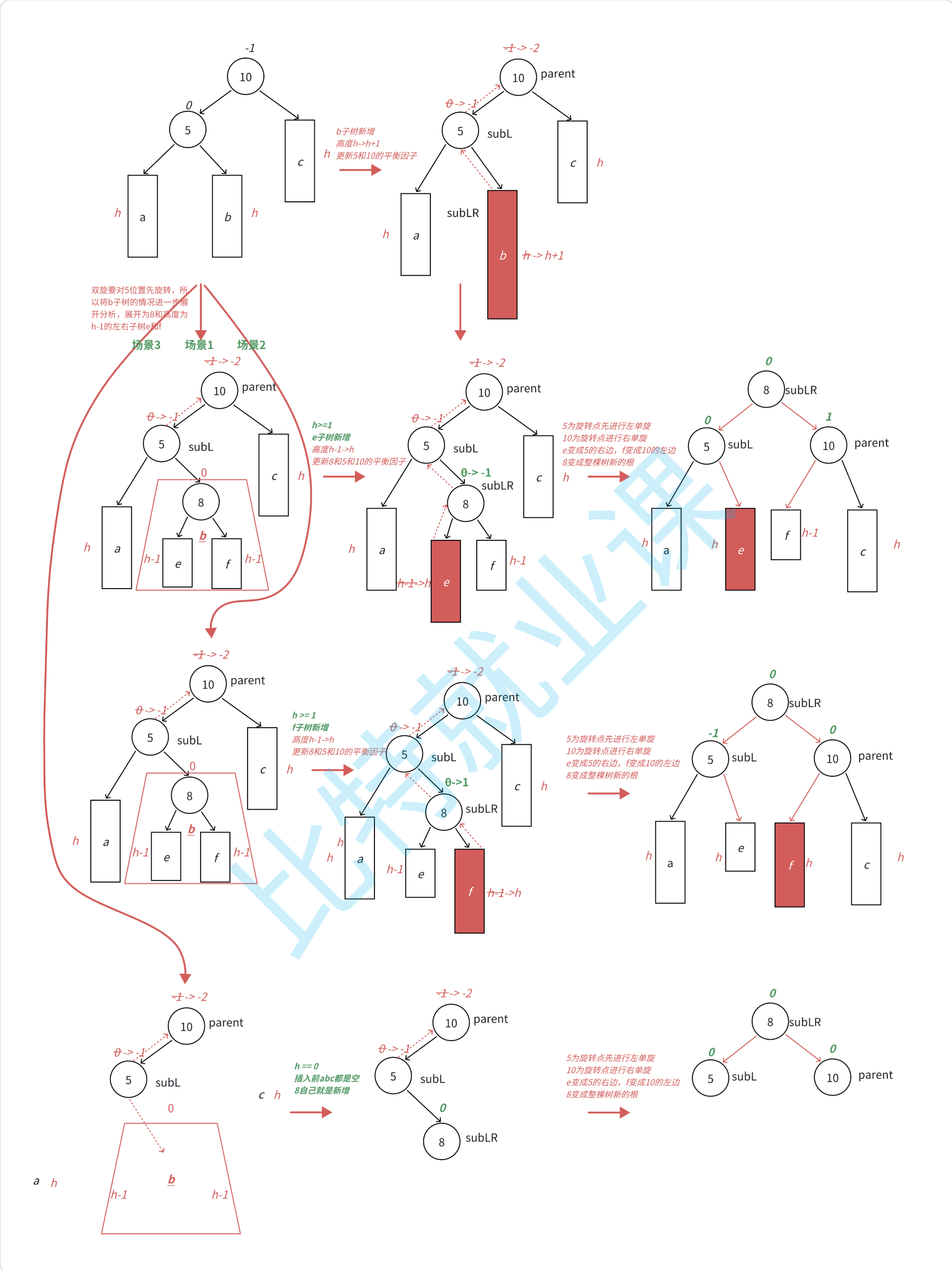


图9

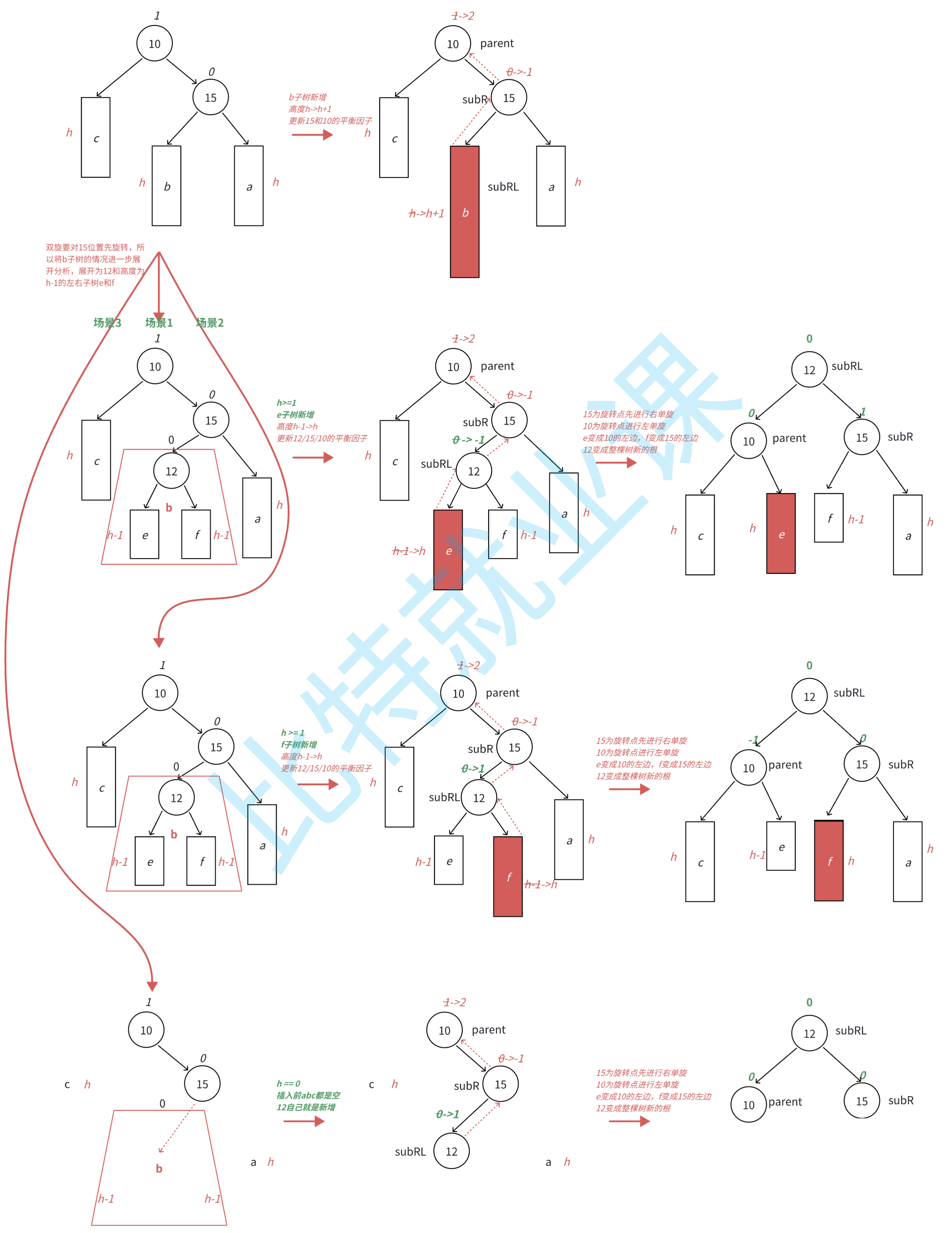
2.3.7 左右双旋代码实现

```
void RotateLR(Node* parent)
{
        Node* subL = parent->_left;
        Node* subLR = subL->_right;
        int bf = subLR->_bf;

        RotateL(parent->_left);
        RotateR(parent);

        if (bf == 0)
        {
                subL->_bf = 0;
                subLR->_bf = 0;
                parent->_bf = 0;
        }
        else if (bf == -1)
        {
                subL->_bf = 0;
                subLR->_bf = 0;
                parent->_bf = 1;
        }
        else if(bf == 1)
        {
                subL->_bf = -1;
                subLR->_bf = 0;
                parent->_bf = 0;
        }
        else
        {
                assert(false);
        }
}
```


2.3.8 右左双旋

- 跟左右双旋类似，下面我们将a/b/c子树抽象为高度h的AVL子树进行分析，另外我们需要把b子树的细节进一步展开为12和左子树高度为h-1的e和f子树，因为我们要对b的父亲15为旋转点进行右单旋，右单旋需要动b树中的右子树。b子树中新增结点的位置不同，平衡因子更新的细节也不同，通过观察12的平衡因子不同，这里我们要分三个场景讨论。
- 场景1：h >= 1时，新增结点插入在e子树，e子树高度从h-1变为h并不断更新12->15->10平衡因子，引发旋转，其中12的平衡因子为-1，旋转后10和12平衡因子为0，15平衡因子为1。
- 场景2：h >= 1时，新增结点插入在f子树，f子树高度从h-1变为h并不断更新12->15->10平衡因子，引发旋转，其中12的平衡因子为1，旋转后15和12平衡因子为0，10平衡因子为-1。

- 场景3：h == 0时，a/b/c都是空树，b自己就是一个新增结点，不断更新15->10平衡因子，引发旋转，其中12的平衡因子为0，旋转后10和12和15平衡因子均为0。



2.3.9 右左双旋代码实现

```
void RotateRL(Node* parent)
{
	Node* subR = parent->_right;
	Node* subRL = subR->_left;
	int bf = subRL->_bf;

	RotateR(parent->_right);
	RotateL(parent);

	if (bf == 0)
	{
		subR->_bf = 0;
		subRL->_bf = 0;
		parent->_bf = 0;
	}
	else if (bf == 1)
	{
		subR->_bf = 0;
		subRL->_bf = 0;
		parent->_bf = -1;
	}
	else if (bf == -1)
	{
		subR->_bf = 1;
		subRL->_bf = 0;
		parent->_bf = 0;
	}
	else
	{
		assert(false);
	}
}
```


2.4 AVL树的查找

那二叉搜索树逻辑实现即可，搜索效率为 $O(logN)$

```
Node* Find(const K& key)
{
	Node* cur = _root;
	while (cur)
```

```
    {
        if (cur->_kv.first < key)
        {
            cur = cur->_right;
        }
        else if (cur->_kv.first > key)
        {
            cur = cur->_left;
        }
        else
        {
            return cur;
        }
    }

    return nullptr;
}
```

2.5 AVL树平衡检测

我们实现的AVL树是否合格，我们通过检查左右子树高度差的的程序进行反向验证，同时检查一下结点的平衡因子更新是否出现了问题。

```
int _Height(Node* root)
{
    if (root == nullptr)
        return 0;

    int leftHeight = _Height(root->_left);
    int rightHeight = _Height(root->_right);

    return leftHeight > rightHeight ? leftHeight + 1 : rightHeight + 1;
}

bool _IsBalanceTree(Node* root)
{
    // 空树也是AVL树
    if (nullptr == root)
        return true;

    // 计算pRoot结点的平衡因子：即pRoot左右子树的高度差
    int leftHeight = _Height(root->_left);
    int rightHeight = _Height(root->_right);
    int diff = rightHeight - leftHeight;

```

```
    // 如果计算出的平衡因子与pRoot的平衡因子不相等，或者
    // pRoot平衡因子的绝对值超过1，则一定不是AVL树
    if (abs(diff) >= 2)
    {
        cout << root->_kv.first << "高度差异常" << endl;
        return false;
    }

    if (root->_bf != diff)
    {
        cout << root->_kv.first << "平衡因子异常" << endl;
        return false;
    }

    // pRoot的左和右如果都是AVL树，则该树一定是AVL树
    return _IsBalanceTree(root->_left) && _IsBalanceTree(root->_right);
}

// 测试代码
void TestAVLTree1()
{
    AVLTree<int, int> t;
    // 常规的测试用例
    //int a[] = { 16, 3, 7, 11, 9, 26, 18, 14, 15 };
    // 特殊的带有双旋场景的测试用例
    int a[] = { 4, 2, 6, 1, 3, 5, 15, 7, 16, 14 };
    for (auto e : a)
    {
        t.Insert({ e, e });
    }

    t.InOrder();
    cout << t.IsBalanceTree() << endl;
}

// 插入一堆随机值，测试平衡，顺便测试一下高度和性能等
void TestAVLTree2()
{
    const int N = 100000;
    vector<int> v;
    v.reserve(N);
    srand(time(0));

    for (size_t i = 0; i < N; i++)
    {
        v.push_back(rand()+i);
    }
```

```cpp

	size_t begin2 = clock();
	AVLTree<int, int> t;
	for (auto e : v)
	{
		t.Insert(make_pair(e, e));
	}
	size_t end2 = clock();

	cout << "Insert:" << end2 - begin2 << endl;
	cout << t.IsBalanceTree() << endl;

	cout << "Height:" << t.Height() << endl;
	cout << "Size:" << t.Size() << endl;

	size_t begin1 = clock();
	// 确定在的值
	/*for (auto e : v)
	{
		t.Find(e);
	}*/

	// 随机值
	for (size_t i = 0; i < N; i++)
	{
		t.Find((rand() + i));
	}

	size_t end1 = clock();

	cout << "Find:" << end1 - begin1 << endl;
}
```

2.6 AVL树的删除

AVL树的删除本章节不做讲解，有兴趣的同学可参考：《殷人昆 数据结构：用面向对象方法与C++语言描述》中讲解。